

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MOTIFS DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RIGIDES

Numéro 140-141
Nouvelle série

2 0 1 5

Joseph AYOUB

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE
Emmanuel BREUILLARD
Gérard BESSON
Antoine CHAMBERT-LOIR
Julien MARCHÉ
Pascal HUBERT

Charles FAVRE
Daniel HUYBRECHTS
Yves LE JAN
Laure SAINT-RAYMOND
Wilhem SCHLAG

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 60 € (\$90)

Abonnement Europe : 136 € hors Europe : 153 € (\$231)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-285629-811-4

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

MÉMOIRES DE LA SMF 140/141

MOTIFS DES VARIÉTÉS
ANALYTIQUES RIGIDES

Joseph Ayoub

Société Mathématique de France 2015
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Ayoub

Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zürich, Switzerland.

CNRS, LAGA Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.

E-mail : joseph.ayoub@math.uzh.ch

Classification mathématique par sujets (2000). — 14C15, 14C25, 14F20, 14F35, 14F42, 14G22.

Mots clefs. — Géométrie analytique rigide, théorie de l'homotopie stable motivique, motifs, motifs rigides analytiques.

Remerciements. — Les recherches qui ont abouti à ce travail ont commencé en 2006 vers la fin de mon doctorat effectué à l'IMJ (Université de Paris 7). Elles ont été menées à bout durant l'année académique 2006-2007 pendant laquelle j'étais membre de l'IAS (Princeton) et chargé de recherche CNRS au LAGA (Université de Paris 13). Je remercie les institutions ci-mentionnées pour leur soutien. Je tiens également à remercier le rapporteur pour sa lecture minutieuse, ses commentaires pertinents et pour avoir noté une erreur dans la preuve de la proposition 2.2.23.

MOTIFS DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RIGIDES

Joseph Ayoub

Résumé. — Dans ce travail, j'étends la théorie des motifs, comme développée par Voevodsky et Morel-Voevodsky, au cadre de la géométrie analytique rigide sur un corps complet non archimédien.

Le premier chapitre reprend l'approche homotopique de Morel et Voevodsky. On y trouve la construction de la catégorie homotopique stable motivique des variétés analytiques rigides ainsi qu'une description complète de cette dernière en termes de motifs algébriques lorsque le corps de base est d'égale caractéristique nulle et de valuation discrète. Le second chapitre reprend l'approche par les transferts de Voevodsky. On y trouve la construction de la catégorie triangulée des motifs analytiques rigides, ainsi qu'une extension à la géométrie rigide d'une grande partie des résultats fondamentaux de Voevodsky et notamment sa théorie des préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie. Ceci dit, le présent travail ne se résume pas à un simple décalque de la théorie classique et le lecteur trouvera beaucoup de résultats nouveaux et spécifiques au contexte de la géométrie rigide.

Abstract (Motives of rigid analytic varieties). — In this work, I extend the theory of motives, as developed by Voevodsky and Morel-Voevodsky, to the context of rigid analytic geometry over a complete non archimedean field.

The first chapter deals with the homotopical approach of Morel and Voevodsky. One finds there the construction of the motivic stable homotopy category of rigid analytic varieties and a complete description of this category in terms of algebraic motives when the base field has equal characteristic zero and its valuation is discrete. The second chapter deals with Voevodsky's approach based on transfers. One finds there the construction of the triangulated category of rigid analytic motives, and an extension to rigid analytic geometry of a large number of Voevodsky's fundamental results such as his theory of homotopy invariants presheaves with transfers. This is said, the present work is a lot more than just a mere copy of the classical theory and the reader will find a lot of results that are new and specific to rigid analytic geometry.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
1. Motifs des variétés rigides analytiques I : version sans transferts et lien avec le foncteur « motif proche »	13
Introduction	13
1.1. Rappels et compléments de géométrie rigide	14
1.1.1. Généralités	14
1.1.2. Algèbres affinoïdes et variétés rigides	16
1.1.3. Le foncteur d’analytification	22
1.1.4. La fibre générique de Raynaud et les modèles formels	25
1.1.5. Points en géométrie rigide	31
1.1.6. Morphismes lisses et étales	38
1.1.7. Modèles semi-stables	52
1.2. La topologie de Nisnevich en géométrie rigide	55
1.2.1. Définition et propriétés basiques de la topologie de Nisnevich	56
1.2.2. Carrés Nisnevich et propriété de Brown-Gersten	66
1.2.3. Engendrement par des k -affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction	75
1.2.4. Topologies de Nisnevich et foncteur d’analytification	81
1.3. Les catégories \mathbb{B}^1 -homotopiques des k -variétés rigides	83
1.3.1. Construction et propriétés élémentaires : cas instable	83
1.3.2. Motifs rigides de quelques variétés algébriques	90
1.3.3. Construction et propriétés élémentaires : cas stable	100
1.3.4. Énoncé du résultat principal et réductions	105
1.4. Le 2-foncteur homotopique stable RigSH (−)	126
1.4.1. Les k° -schémas rigides	126
1.4.2. La construction des dérivateurs RigSH (−) et FSH (−)	128
1.4.3. L’axiome de localité pour RigSH (−) et FSH (−)	135
1.4.4. Fin de la vérification des axiomes et quelques compléments	146
1.4.5. Démonstration du théorème 1.3.38	154
1.A. Appendice : complément sur les opérations de Grothendieck dans le monde motivique	160

2. Motifs des variétés rigides analytiques II : étude cohomologique des préfaisceaux avec transferts, surconvergens et invariants par homotopie	169
2.1. Rappels et compléments de géométrie rigide (suite)	170
2.1.1. Domaines de la droite affine et leur cohomologie	170
2.1.2. Préfaisceaux et faisceaux surconvergens	187
2.2. Correspondances finies et préfaisceaux avec transferts en géométrie rigide	201
2.2.1. Faisceaux fh et multiplicités d'intersection	201
2.2.2. Correspondances finies et préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/k	213
2.2.3. Préfaisceaux avec transferts sur SmRig/k et compléments	222
2.2.4. Préfaisceaux avec transferts \mathbb{B}^1 -invariants : propriétés élémentaires ...	228
2.2.5. Fibres d'un préfaisceau avec transferts \mathbb{B}^1 -invariant	233
2.3. Invariance par homotopie et groupe de Picard relatif	257
2.3.1. Groupe de Picard relatif et correspondances finies à homotopie près	258
2.3.2. Construction de correspondances finies à homotopie près	271
2.4. Cohomologie Nisnevich d'un préfaisceau avec transferts, surconvergent et \mathbb{B}^1 -invariant	284
2.4.1. Étude de la restriction au petit site de la boule de Tate	284
2.4.2. Invariance par homotopie de la cohomologie et applications	291
2.4.3. Exemples de préfaisceaux avec transferts, surconvergens et \mathbb{B}^1 -invariants	296
2.5. La catégorie $\mathbf{RigDM}(k)$ des motifs des variétés rigides	305
2.5.1. Construction de $\mathbf{RigDM}(k)$ et propriétés élémentaires	305
2.5.2. Engendrement par les motifs rigides de variétés algébriques et t -structure homotopique	322
2.5.3. Théorème de simplification ou le « cancellation theorem »	342
2.5.4. Description en termes de motifs algébriques	352
Bibliographie	379
Index	383

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans ce travail, j'étends la théorie des motifs, comme développée par Voevodsky [46], et Morel et Voevodsky [30], au cadre de la géométrie analytique rigide sur un corps complet non archimédien. Certes, il s'agit en partie d'adapter les techniques déjà existantes de la théorie des motifs des variétés algébriques et de les appliquer aux variétés analytiques rigides. Mais ce travail ne se résume pas à un simple décalque de la théorie de Morel et Voevodsky et à la construction de nouvelles catégories motiviques. Ainsi, je m'efforcerai dans cette introduction de mettre en évidence l'originalité du présent travail et de souligner les idées nouvelles qui, hélas, ont pu être noyées dans le style systématique du texte. Ensuite, j'esquisserai quelques applications possibles de cette théorie.

Il existe deux approches modernes à la théorie des motifs des variétés algébriques. La première, d'un point de vue logique mais pas historique, est l'*approche homotopique* de Morel et Voevodsky [30] dont résultent la catégorie homotopique des k -schémas $\mathbf{H}(k)$ et sa version stable $\mathbf{SH}(k)$ (voir [26]). Elle est entièrement basée sur la théorie de l'homotopie, via la machinerie des catégories de modèles, et, par conséquent, se prête moins aux « calculs ».

La seconde, est l'*approche par les transferts* de Voevodsky [46] dont résulte la catégorie des motifs triangulés $\mathbf{DM}(k)$. Elle est plus géométrique et il est possible de décrire explicitement dans cette théorie les objets motiviques en termes de cycles algébriques. Toutefois, la seconde approche est limitée : par exemple, elle ne permet pas de retrouver la K -théorie algébrique, contrairement à la première.

Bien entendu, ces deux approches se comparent et il est instructif, et souvent pertinent, de comparer le lien entre $\mathbf{SH}(k)$ et $\mathbf{DM}(k)$ à celui entre \mathbf{SH} , la catégorie homotopique stable des espaces topologiques, et $\mathbf{D}(\mathbb{Z})$, la catégorie dérivée de celle des \mathbb{Z} -modules.

Dans ce travail, je reprends les deux approches, homotopique et par les transferts, dans le cadre de la géométrie rigide.

L'approche homotopique ou le premier chapitre

Soit k un corps complet non archimédien. On note k° son anneau de valuation et \tilde{k} son corps résiduel.

Les ingrédients de la construction. — Ici, les ingrédients de base sont les k -variétés rigides lisses, la topologie de Nisnevich en géométrie rigide et la boule de Tate. La première section du chapitre 1 est entièrement consacrée à des rappels de géométrie rigide. Elle ne contient aucun résultat original, et le lecteur familier avec les fondements de la géométrie rigide suivant Tate et Raynaud pourra l'ignorer et passer à la suite.

Dans la section 1.2, j'introduis l'analogie de la topologie de Nisnevich pour les variétés analytiques rigides. Comme en géométrie algébrique, il s'agit d'une topologie intermédiaire entre la topologie étale, trop fine pour les théories cohomologiques motiviques, et la topologie des recouvrements admissibles, trop grossière pour assurer la pureté. Étant donné un modèle formel \mathcal{X} de X (voir la définition 1.1.22), on peut associer à un recouvrement Nisnevich du \tilde{k} -schéma \mathcal{X}_σ un recouvrement Nisnevich de X . Réciproquement, on obtient, à raffinement près, tout recouvrement Nisnevich de X à partir d'un recouvrement Nisnevich de \mathcal{X}_σ , pour un modèle \mathcal{X} suffisamment fin. Cette propriété est fort utile et ramène en grande partie l'étude de la topologie de Nisnevich en géométrie rigide à celle de la topologie de Nisnevich en géométrie algébrique.

Un résultat notable de la section 1.2 est le théorème 1.2.36. Il fournit des générateurs particulièrement simples de la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \mathbb{Z}))$. (Ici, SmRig/k est le site Nisnevich des k -variétés analytiques rigides lisses et $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \mathbb{Z})$ est la catégorie abélienne des faisceaux sur ce site.) Le théorème 1.2.36, en fait un cas particulier, affirme que $\mathbf{D}(\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \mathbb{Z}))$ est engendrée, en tant que catégorie triangulée avec petites sommes, par les faisceaux représentés par des k -affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction. (Rappelons qu'un k -affinoïde X admet bonne réduction s'il possède un modèle formel \mathcal{X} lisse sur k° ; il admet potentiellement bonne réduction s'il acquiert bonne réduction après extension des scalaires à une extension finie de k .) Ce théorème nécessite que la valuation de k soit discrète et que \tilde{k} soit de caractéristique nulle. Dans ce cas, on a $k = \tilde{k}((\pi))$, le corps des séries de Laurent en l'uniformisante π . Ce résultat est surprenant surtout, qu'en général, il est impossible de couvrir une variété rigide (même lisse) par des affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction. De plus, il est propre à la géométrie rigide et n'admet pas d'analogue (non vide) en géométrie algébrique.

La construction. — Il n'est guère surprenant pour le lecteur familier avec la théorie de Morel et Voevodsky qu'il est possible de construire une catégorie homotopique stable $\mathbf{RigSH}(k)$ à partir du site Nisnevich des k -variétés rigides lisses muni de l'intervalle \mathbb{B}_k^1 , qui est la boule de Tate. J'explique les détails de cette construction dans les paragraphes 1.3.1 (version instable) et 1.3.3 (version stable) de la section 1.3. Les objets de $\mathbf{RigSH}(k)$ sont les *motifs rigides*. À toute k -variété rigide lisse V , il est associé un motif rigide $M(V)$. Je construis également un foncteur d'analytification :

$$(1) \quad \text{Rig}^* : \mathbf{SH}(k) \longrightarrow \mathbf{RigSH}(k)$$

qui étend le foncteur d'analytification usuel associant à un k -schéma lisse X la k -variété rigide lisse X^{an} (voir le paragraphe 1.1.3). Plus précisément, on a un isomorphisme canonique $\text{Rig}^*M(X) \simeq M(X^{\text{an}})$ avec $M(X)$ le motif (usuel) associé à X .

Dans le paragraphe 1.3.2, j'étudie les motifs rigides des analytifiés de certains k -schémas simples, les $Q_p^{\text{geo}}(X, f)$. Ici, on suppose que $k = \tilde{k}((\pi))$ avec $\text{car}(\tilde{k}) = 0$. Étant donné un \tilde{k} -schéma lisse X , une fonction inversible $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et un entier non nul $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, on pose

$$Q_p^{\text{geo}}(X, f) = (X \otimes_{\tilde{k}} k)[V]/(V^p - \pi f).$$

En tant que famille paramétrée par le \tilde{k} -schéma $\text{Spec}(k)$, la famille $Q_p^{\text{geo}}(X, f)$ est quasi-constante. En fait, elle devient constante après extension des scalaires à $k[\pi^{1/p}]$. Le théorème 1.3.11 affirme que le motif rigide $M((Q_p^{\text{geo}}(X, f))^{\text{an}})$ associé à l'analytifié de $Q_p^{\text{geo}}(X, f)$ est isomorphe au motif rigide d'une k -variété rigide quasi-compacte $Q_p^{\text{rig}}(X, f)$ définie comme étant la fibre générique de la complétion formelle en la fibre spéciale du k° -schéma $(X \otimes_{\tilde{k}} k^\circ)[V]/(V^p - \pi f)$. Ce résultat technique, dont la preuve occupe la totalité du paragraphe 1.3.2, est très utile. Joint au théorème 1.2.36 (dont il était question ci-dessus), il permet de montrer que l'image du foncteur (1) est dense dans $\mathbf{RigSH}(k)$, i.e., engendre la catégorie triangulée avec petites sommes $\mathbf{RigSH}(k)$. Mieux encore, sachant que $\mathbf{SH}(k)$ est engendrée par les motifs des k -schémas projectifs et lisses, on déduit aussitôt que $\mathbf{RigSH}(k)$ est engendrée par les motifs rigides des analytifiés de tels k -schémas. On obtient au passage que tout objet compact de $\mathbf{RigSH}(k)$ est fortement dualisable.

Les résultats principaux. — Les deux résultats principaux du chapitre 1 sont résumés dans la scholie 1.3.26. Ces résultats sont sans doute la raison d'être de ce chapitre, et même de tout ce travail.

Le premier résultat (voir la première partie de la scholie 1.3.26) décrit complètement la catégorie $\mathbf{RigSH}(k)$, lorsque $k = \tilde{k}((\pi))$ et $\text{car}(\tilde{k}) = 0$, comme une sous-catégorie pleine de $\mathbf{SH}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$, la catégorie homotopique stable des $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schémas. Plus précisément, soit $\mathbf{QUSH}(\tilde{k}) \subset \mathbf{SH}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$ la sous-catégorie triangulée avec petites sommes engendrée par les motifs des $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schémas

$$Q_p^{\text{gm}}(X, f) = X[V, T, T^{-1}]/(V^p - fT) \longrightarrow \text{Spec}(\tilde{k}[T, T^{-1}]).$$

Ici, comme avant, X est un \tilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Pour des raisons évidentes, $\mathbf{QUSH}(\tilde{k})$ est appelée la catégorie des variations quasi-unipotentes de motifs sur $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$. Alors, la composition de

$$(2) \quad \mathbf{QUSH}(\tilde{k}) \hookrightarrow \mathbf{SH}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{SH}(k) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigSH}(k)$$

est une équivalence de catégories. À ma connaissance, l'idée d'une telle équivalence est nouvelle et n'est jamais apparue auparavant dans la littérature, par exemple en théorie de Hodge.

La preuve que (2) est une équivalence de catégories est longue et difficile. Dans le paragraphe 1.3.4, je montre comment obtenir cette équivalence à partir de deux autres énoncés, à savoir les théorèmes 1.3.37 et 1.3.38. Cette réduction est basée sur les théorèmes 1.2.36 et 1.3.11 dont il était question plus haut. Dans ce même paragraphe, je démontre le théorème 1.3.37. Ici, l'ingrédient clef est le théorème de changement

de base pour un morphisme projectif pour les catégories homotopiques stables des schémas (voir [2, Chapitre I] et l'appendice I.A). La preuve du théorème 1.3.38 sera rélégée à la fin du chapitre 1. Elle repose sur l'existence d'un 2-foncteur homotopique stable (au sens de [2, Chapitre I]) sur $\mathrm{Spec}(k^\circ)$ qui étend convenablement la catégorie $\mathbf{RigSH}(k)$. La construction d'un tel 2-foncteur homotopique stable occupe les quatre premiers paragraphes de la section 1.4. La preuve proprement dite du théorème 1.3.38 est donnée au paragraphe 1.4.5.

L'équivalence de catégories (2) fournit à mon avis l'approche la plus naturelle à la théorie des motifs limites, analogues motiviques des structures de Hodge limites. Le lien avec mon approche précédente des foncteurs motifs proches fait l'objet de la seconde partie de la scholie 1.3.26. Il s'agit là du deuxième résultat principal du chapitre 1, qui affirme que le foncteur « motif proche » $\Psi : \mathbf{SH}(k) \rightarrow \mathbf{SH}(\tilde{k})$, défini dans [3, Chapitre III], est naturellement isomorphe à la composition de

$$\mathbf{RigSH}(k) \stackrel{(2)}{\simeq} \mathbf{QUSH}(\tilde{k}) \hookrightarrow \mathbf{SH}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}) \xrightarrow{1^*} \mathbf{SH}(\tilde{k}),$$

avec $1 : \mathrm{Spec}(\tilde{k}) \rightarrow \mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ la section unité. La preuve de cette comparaison se trouve dans le paragraphe 1.3.4.

L'approche par les transferts ou le deuxième chapitre

Comme avant, k est un corps complet non archimédien. On note k° son anneau de valuation et \tilde{k} son corps résiduel.

Les ingrédients de la construction. — Ici, l'ingrédient supplémentaire est la notion de correspondances finies en géométrie rigide. Il s'agit d'une extension directe de la notion de correspondances finies entre k -schémas lisses. Le seul point qui mérite d'être noté ici concerne la méthode que j'ai choisie. En effet, il existe (au moins) deux méthodes possibles.

La première, celle de [46], consiste à définir les correspondances finies entre deux variétés rigides X et Y à l'aide des sous-variétés de $X \widehat{\times}_k Y$ qui sont irréductibles, finies et surjectives sur une composante connexe de X . Ensuite, on définit la composition des correspondances finies à l'aide de la formule de multiplicité de Serre et on vérifie l'associativité.

La seconde méthode, celle de [41], consiste à introduire les correspondances finies via la topologie fh . Plus précisément, les correspondances finies entre X et Y sont certains morphismes de préfaisceaux entre les fh -faisceaux associés aux préfaisceaux $X \otimes \mathbb{Z}$ et $Y \otimes \mathbb{Z}$. Cette deuxième méthode a le vertu de rendre obsolète la question de l'associativité de la composition.

Sans raison vraiment valable, j'ai choisi ici d'étendre la notion de correspondance finie à la géométrie rigide en utilisant la méthode de [41]. Ceci est l'objet des paragraphes 2.2.1 et 2.2.2 de la section 2.2. Une fois la construction terminée, on obtient la catégorie $\mathbf{RigCor}(k)$ (ou sa version relative $\mathbf{RigCor}(B)$). Les objets de cette catégorie sont les k -variétés rigides lisses et les flèches sont les correspondances finies. La catégorie des préfaisceaux additifs sur $\mathbf{RigCor}(k)$ est notée $\mathbf{RigPST}(k)$ et ses objets sont appelés les préfaisceaux avec transferts sur SmRig/k .

Encore une fois, il n'est nullement surprenant qu'en utilisant la catégorie $\mathbf{RigPST}(k)$, la topologie Nisnevich et la boule de Tate, on puisse construire une catégorie $\mathbf{RigDM}(k)$, analogue rigide de la catégorie $\mathbf{DM}(k)$ des motifs triangulés de Voevodsky. Je décris la construction de cette catégorie seulement vers la fin du chapitre 2 (voir le paragraphe 2.5.1), mais, logiquement, cette construction aurait pu se faire juste après le paragraphe 2.2.2.

La fibre d'un préfaisceau invariant par homotopie. — Le paragraphe 2.2.5 contient quelques résultats spécifiques concernant les préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie en géométrie rigide. Ces résultats jouent un rôle important dans la preuve du résultat principal du chapitre 2, à savoir le théorème 2.4.9. Bien entendu, un préfaisceau F sur \mathbf{SmRig}/k est dit invariant par homotopie si le morphisme $F(X) \rightarrow F(\mathbb{B}_X^1)$ est un isomorphisme pour toute k -variété rigide lisse.

Je commence d'abord par le théorème 2.2.58 dont je décris un cas particulier. Supposons donnés un k -affinoïde lisse B et deux B -affinoïdes lisses X et Y . Soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal de B . Il existe alors un isomorphisme canonique

$$(3) \quad \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} \pi_0 \mathbf{Cor}_U(X \widehat{\times}_B U, Y \widehat{\times}_B U) \simeq \pi_0 \mathbf{Cor}_{\widehat{k}(p)}(X_{\widehat{p}}, Y_{\widehat{p}}).$$

Ci-dessus, $\pi_0 \mathbf{Cor}(-, -)$ désigne le groupe des correspondances finies à homotopie près (voir la définition 2.2.42), $\operatorname{Flt}(p)$ désigne le filtre des voisinages de p dans B , et $(-)_{\widehat{p}}$ désigne la fibre au-dessus de p . La preuve du théorème 2.2.58 occupe une grande partie du paragraphe 2.2.5 et repose d'une manière essentielle sur le théorème de Popescu [34, 35]. (La validité de l'isomorphisme (3) suppose en fait quelques conditions techniques sur X , Y et p que je passe ici sous silence.) Il est important de noter que le théorème 2.2.58 est spécifique à la géométrie rigide. En effet, l'énoncé analogue en géométrie algébrique est faux, déjà pour $Y = \mathbb{G}_{mB}$ (exercice facile!).

Le théorème 2.2.58 est ensuite utilisé pour définir la *fibre* d'un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie (voir la définition 2.2.70). Je termine le paragraphe 2.2.5 avec le lemme 2.2.71 qui compare la cohomologie (pour les recouvrements admissibles) d'un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie avec la cohomologie de sa fibre.

Construction de correspondances finies à homotopie près. — Dans la section 2.3, j'adapte une partie du matériel dans [29, Lectures 11 & 21]. La traduction dans le langage de la géométrie rigide est souvent délicate et non triviale.

Soient B un k -affinoïde lisse et X une B -courbe affinoïde lisse. Suivant [29], je définis la notion de bonne compactification de X . Il s'agit d'un B -schéma projectif \overline{X} de dimension relative 1, dans lequel X se plonge et tel que le complémentaire de son image est contenu dans un ouvert Zariski qui est affine. Étant donnée une B -courbe X munie d'une bonne compactification \overline{X} , je définis le groupe de Picard relatif $\operatorname{Pic}_{\overline{X}}(X)$ (voir la définition 2.3.6). C'est le groupe des classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ -modules inversibles munis d'une trivialisations sur un voisinage affinoïde (presque rationnel) de $\overline{X}^{\text{an}} - X$. Ce groupe n'est pas invariant par homotopie. Il est donc naturel de

considérer son quotient $\mathrm{Pic}_{\overline{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$ défini par le coégalisateur de la double flèche

$$\mathrm{Pic}_{\mathbb{B}_k^1 \times_k \overline{X}}(\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k X) \begin{array}{c} \xrightarrow{1^*} \\ \xrightarrow{0^*} \end{array} \mathrm{Pic}_{\overline{X}}(X).$$

(Cette étape est inutile en géométrie algébrique!) J'exhibe ensuite un isomorphisme canonique $\pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X) \simeq \mathrm{Pic}_{\overline{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$ (voir le théorème 2.3.12) dont l'analogue algébrique est bien connu dans la théorie de Voevodsky. Il en résulte deux méthodes de constructions de correspondances finies à homotopies près. Elle sont contenues respectivement dans les propositions 2.3.17 et 2.3.15. La première proposition est nouvelle et propre à la géométrie rigide alors que la seconde est l'analogue de [29, Proposition 11.15]. D'ailleurs, je m'en sers, en calquant la preuve de [29, Theorem 21.6], pour déduire le théorème 2.3.16 qui entraîne que certains recouvrements admissibles d'un ouvert affinoïde de $(\mathbb{P}_k^1)^{\mathrm{an}}$ sont acycliques par rapport à tout préfaisceau avec transferts invariant par homotopie.

Le résultat principal. — Le résultat principal du chapitre 2 admet un analogue algébrique bien connu dans la théorie de Voevodsky, à savoir [29, Theorem 24.1]. Il affirme que si F est un préfaisceau avec transferts, (faiblement) surconvergent et invariant par homotopie sur SmRig/k , il en est de même de ses préfaisceaux de cohomologie $H_{\mathrm{ad}}^i(-, F)$ (voir le théorème 2.4.9 pour les conditions de validité du résultat). On en déduit aussitôt que la catégorie $\mathbf{OHStr}(k)$ des faisceaux avec transferts surconvergents et invariants par homotopie est une sous-catégorie abélienne épaisse (i.e., stable par sous-objets, quotients et extensions) de la catégorie de tous les faisceaux Nisnevich avec transferts.

Comme dans le cas algébrique, la preuve du théorème 2.4.9 se fait en deux étapes. La première étape est une étude détaillée de la cohomologie des domaines affinoïdes de la boule de Tate à valeurs dans F , le préfaisceau avec transferts, (faiblement) surconvergent et invariant par homotopie sur SmRig/k . Le but de cette étude est de prouver que la restriction de F au petit site des domaines affinoïdes de la boule de Tate est acyclique (voir le théorème 2.4.2). Dans la seconde étape on démontre que

$$(4) \quad H_{\mathrm{ad}}^i(X, F) \longrightarrow H_{\mathrm{ad}}^i(\mathbb{B}_X^1, F)$$

est inversible en se ramenant au cas où X est le spectre d'un corps. Toutefois, il me semble assez juste de dire que les arguments dans chacune de ces deux étapes diffèrent radicalement des arguments de Voevodsky. En effet, la topologie de la boule de Tate étant bien plus complexe que la topologie de Zariski de la droite affine, la preuve du théorème 2.4.2 est nettement plus pénible que celle du résultat analogue en géométrie algébrique. En effet, je suis amené à faire une preuve cas par cas basée sur le théorème 2.1.12. Par contre, la seconde étape, celle qui traite le morphisme (4), est nettement plus simple que l'étape correspondante en géométrie algébrique. Ceci est largement dû aux résultats du paragraphe 2.2.5, et notamment à l'existence d'un bon « foncteur fibre » pour les préfaisceaux invariants par homotopie qui de plus est cohomologiquement inerte (par le lemme 2.2.71).

La structure de la catégorie $\mathbf{RigDM}(k)$. — Comme c’est le cas en géométrie algébrique, on peut utiliser le théorème 2.4.9 pour mieux comprendre la structure de la catégorie triangulée $\mathbf{RigDM}(k)$ et de ses objets. J’ai entassé les conséquences de ce théorème dans les paragraphes 2.5.2 et 2.5.3.

Une première conséquence est le théorème 2.5.32. Un cas particulier significatif de ce théorème affirme que le motif de l’analytifié X^{an} d’un k -schéma lisse est donné, à un quasi-isomorphisme de faisceaux près, par $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{B}^1}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$. Ce complexe est nul en degrés strictement négatifs et il est donné en degré $n \geq 0$ par le faisceau $\mathbf{Cor}_k(\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k -, X^{\text{an}})$ avec

$$\Delta_{\text{rig}}^n = \text{Spm}\left(k\{t_0, \dots, t_n\} / \left(1 - \sum_{i=0}^n t_i\right)\right)$$

le n -ième simplexe rigide. Ce résultat permet en particulier d’exprimer les groupes

$$\text{hom}_{\mathbf{RigDM}(k)}(\mathbb{Z}(0), M(X^{\text{an}}))$$

en termes de cycles algébriques (ici, $\mathbb{Z}(0) = M(\text{Spm}(k))$ est l’objet unité de la catégorie monoïdale $\mathbf{RigDM}(k)$).

Une deuxième conséquence est la réalisation de la catégorie $\mathbf{OHStr}(k)$ comme le cœur d’une t -structure homotopique sur la catégorie $\mathbf{RigDM}(k)$. Ce résultat (voir le corollaire 2.5.36 et le théorème 2.5.37) est beaucoup plus difficile que son analogue algébrique à cause de la propriété de surconvergence. Il repose en effet, d’une manière essentielle, sur le théorème 2.5.35 qui affirme que la catégorie $\mathbf{RigDM}(k)$ est compactement engendrée par les motifs rigides des analytifiés des k -schémas projectifs lisses.

Une troisième conséquence est le théorème de simplification (voir le théorème 2.5.38). La preuve ici est largement calquée sur celle de Voevodsky en géométrie algébrique.

Description en termes de motifs algébriques. — On termine le chapitre 2 avec l’analogie avec transferts de la première partie de la scholie 1.3.26. Supposons, pour simplifier, que $k = \widetilde{k}((\pi))$ avec $\text{car}(k) = 0$. On note (comme dans le chapitre 1) $\mathbf{QUDM}(\widetilde{k}) \subset \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\widetilde{k}})$ la sous-catégorie triangulée avec petites sommes compactement engendrée par les motifs des $\mathbb{G}_{m\widetilde{k}}$ -schémas $Q_p^{\text{gm}}(X, f)$. Ici, comme avant, X est un \widetilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Alors, la composition de

$$(5) \quad \mathbf{QUDM}(\widetilde{k}) \hookrightarrow \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\widetilde{k}}) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{DM}(k) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}(k)$$

est une équivalence de catégories (voir le théorème 2.5.57 pour un énoncé plus précis et plus général). Toutefois, la preuve de ce résultat est beaucoup plus directe que la preuve du résultat analogue du chapitre 1. Une telle preuve est possible grâce au théorème 2.5.32.

Quelques applications potentielles

Je termine cette introduction succincte par quelques applications potentielles.

K -théorie et cobordisme pour les variétés rigides. — On peut utiliser la catégorie $\mathbf{RigSH}(k)$ pour attacher à une k -variété rigide lisse des groupes de K -théorie et de cobordisme. En effet, Voevodsky a construit un \mathbb{P}^1 -spectre \mathbf{BGL} , objet de la catégorie homotopique stable des k -schémas $\mathbf{SH}(k)$, qui représente la K -théorie algébrique des k -schémas lisses. En lui appliquant le foncteur d'analytification

$$\mathbf{Rig}^* : \mathbf{SH}(k) \longrightarrow \mathbf{RigSH}(k),$$

on obtient un objet \mathbf{BGL}^{an} de $\mathbf{RigSH}(k)$. On définit alors les groupes de K -théorie d'une k -variété rigide lisse X par

$$(6) \quad K^i(X) = \text{hom}_{\mathbf{RigSH}(k)}(\mathbf{M}(X), \mathbf{BGL}^{\text{an}}[i])$$

où $\mathbf{M}(X)$ est le motif, ou plutôt le type d'homotopie motivique stable, de la k -variété rigide X . De même, en appliquant le foncteur \mathbf{Rig}^* au spectre de cobordisme algébrique \mathbf{MGL} , défini également par Voevodsky, on obtient un objet \mathbf{MGL}^{an} de $\mathbf{RigSH}(k)$. Les groupes de cobordisme attachés à une k -variété rigide lisse X sont alors

$$(7) \quad \Omega^{i,j}(X) = \text{hom}_{\mathbf{RigSH}(k)}(\mathbf{M}(X), \mathbf{MGL}^{\text{an}}[i](j)).$$

Lorsque k est d'égale caractéristique nulle et que sa valuation est discrète, il est possible de décrire les groupes de K -théorie et de cobordisme d'une k -variété rigide lisse X en termes des groupes de K -théorie ou de cobordisme de certains schémas sur le corps résiduel \tilde{k} de k apparaissant dans les réductions de X . Ceci est une conséquence immédiate de la scholie 1.3.26 qui permet de réaliser $\mathbf{RigSH}(k)$ comme une sous-catégorie pleine de $\mathbf{SH}(\mathbb{G}_{\mathfrak{m}, \tilde{k}})$. En effet, il est facile de voir que $K^i(X) \simeq \text{hom}_{\mathbf{SH}(\mathbb{G}_{\mathfrak{m}, \tilde{k}})}(\mathfrak{F}^{-1}\mathbf{M}(X), \mathbf{BGL}[i])$ et pareillement pour $\Omega^{i,j}(X)$.

De même, on peut attacher à une variété rigide lisse X des groupes de cohomologie motivique. Ils sont définis par

$$(8) \quad H^p(X, \mathbb{Z}(q)) = \text{hom}_{\mathbf{RigDM}(k)}(\mathbf{M}(X), \mathbb{Z}(q)[p])$$

où les $\mathbb{Z}(q)$ sont les motifs de Tate dans $\mathbf{RigDM}(k)$ et $\mathbf{M}(X)$ est le motif rigide associé à X . Il est alors naturel de définir les groupes de Chow de X en posant

$$(9) \quad \text{CH}^d(X) = H^{2d}(X, \mathbb{Z}(d)).$$

Toutefois, on ne dispose pas d'une description simple des groupes $\text{CH}^d(X)$ en termes de sous-variétés fermées de X que pour $d = 0$ ou $d = \dim(X)$.

Application au foncteur « motif proche ». — La motivation initiale de ce travail était l'étude du foncteur « motif proche » introduit dans [3, Chapitre III]. L'idée d'un lien entre la géométrie rigide et les motifs proches a commencé à germer suite à mes tentatives infructueuses de montrer que le foncteur « motif proche » (restreint aux motifs constructibles) est conservatif (voir [4]).

Soit $S = \text{Spec}(A)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète d'égale caractéristique nulle. On note $\eta = \text{Spec}(K)$ (resp. $\sigma = \text{Spec}(k)$) son point ouvert (resp. fermé).

Soit X une K -variété projective et lisse. On voudrait étudier l'homomorphisme (et en particulier son noyau !)

$$(10) \quad \mathrm{CH}_d(X) = \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(K)}(\mathbb{Z}(d)[2d], \mathrm{M}(X)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Z}(d)[2d], \Psi\mathrm{M}(X)) \quad (1)$$

avec $\mathrm{M}(X)$ le motif de Voevodsky de X . Notons i et j les immersions de σ et η dans S . On dispose alors d'une transformation naturelle $i^*j_* \rightarrow \Psi$ et l'homomorphisme

$$(11) \quad \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Z}(d)[2d], i^*j_*\mathrm{M}(X)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Z}(d)[2d], \Psi\mathrm{M}(X))$$

est facile à décrire en utilisant le triangle de monodromie (voir [3, Chapitre III]). Il reste donc à comprendre l'homomorphisme

$$(12) \quad \mathrm{CH}_d(X) = \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(K)}(\mathbb{Z}(d)[2d], \mathrm{M}(X)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Z}(d)[2d], i^*j_*\mathrm{M}(X)).$$

Grâce à ce travail, j'obtiens une description rigide-géométrique de l'homomorphisme ci-dessus.

En effet, le groupe de Chow des d -cycles dans X peut être réalisé comme le d -ième groupe d'homologie du complexe de correspondances finies

$$(13) \quad \mathbf{Cor}((\mathbb{G}_m, 1)^{\wedge d} \times \Delta^\bullet, X)$$

avec $\Delta^n = \mathrm{Spec}(K[t_0, \dots, t_n]/(1 - \sum_{i=0}^n t_i))$. Rappelons que $\mathbf{Cor}((\mathbb{G}_m, 1)^{\wedge d} \times Y, X)$ désigne le sous-groupe des correspondances finies de $(\mathbb{G}_m)^d \times Y$ dans X qui s'annulent sur les hypersurfaces $(\mathbb{G}_m)^i \times \{1\} \times (\mathbb{G}_m)^j \times Y \subset (\mathbb{G}_m)^d \times Y$ pour $i+j = d-1$. Supposons maintenant que K est complet. On peut former l'analogie rigide-analytique de (13). C'est le complexe

$$(14) \quad \mathbf{Cor}((\partial\mathbb{B}^1, 1)^{\wedge d} \times \Delta_{\mathrm{rig}}^\bullet, X^{\mathrm{an}})$$

avec $\partial\mathbb{B}^1$ le bord de la boule de Tate \mathbb{B}^1 , $\Delta_{\mathrm{rig}}^n = \mathrm{Spm}(K\{t_0, \dots, t_n\}/(1 - \sum_{i=0}^n t_i))$ et X^{an} la variété analytique rigide associée à X . On dispose d'un morphisme naturel de complexes

$$(15) \quad \mathbf{Cor}((\mathbb{G}_m, 1)^{\wedge d} \times \Delta^\bullet, X) \longrightarrow \mathbf{Cor}((\partial\mathbb{B}^1, 1)^{\wedge d} \times \Delta_{\mathrm{rig}}^\bullet, X^{\mathrm{an}})$$

induit par le foncteur d'analytification et les inclusions évidentes $\partial\mathbb{B}^1 \hookrightarrow (\mathbb{G}_m)^{\mathrm{an}}$ et $\Delta_{\mathrm{rig}}^n \hookrightarrow (\Delta^n)^{\mathrm{an}}$. Alors, (12) s'identifie à l'homomorphisme induit par (15) sur les groupes d'homologie en degré d .

(1) Strictement parlant, le foncteur Ψ n'est pas défini explicitement dans la littérature. Lorsqu'on travaille à coefficients rationnels, on peut toutefois utiliser les équivalences de catégories de Morel et Cisinski-Dégglise $\mathbf{DA}^{\mathrm{ét}}(k, \mathbb{Q}) \simeq \mathbf{DM}(k, \mathbb{Q})$ et $\mathbf{DA}^{\mathrm{ét}}(\tilde{k}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbf{DM}(\tilde{k}, \mathbb{Q})$ (voir [5, Annexe B]) pour définir le foncteur Ψ sur $\mathbf{DM}(k, \mathbb{Q})$. On peut aussi utiliser le présent travail pour définir Ψ comme étant la composition de

$$\mathbf{DM}(k) \longrightarrow \mathbf{RigDM}(k) \simeq \mathbf{QUDM}(\tilde{k}) \hookrightarrow \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m, \tilde{k}}) \xrightarrow{1^*} \mathbf{DM}(\tilde{k}).$$

Groupes de Galois, groupes de décomposition et groupes d'inertie motiviques. — Soit K un corps muni d'une valuation discrète v de corps résiduel k . On note $G(K)$ le groupe de Galois de K . On peut associer à v un sous-groupe $D(v) \subset G(K)$ défini à conjugaison près. C'est le groupe de décomposition de v . Il est muni d'une surjection $D(v) \twoheadrightarrow G(k)$ de noyau le groupe d'inertie $I(v)$ de v . J'expliquerai ici comment la théorie des motifs rigides permet d'étendre ces notions classiques aux groupes de Galois motiviques, espérant ainsi convaincre le lecteur de la pertinence de cette nouvelle théorie⁽²⁾.

Pour simplifier, je supposerai que K est de caractéristique nulle. Il est conjecturé qu'un groupe de Galois motivique $\mathbf{G}(K, \sigma)$ est canoniquement associé à tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Plus précisément, il devrait exister une t -structure, dite motivique, sur la catégorie triangulée $\mathbf{DM}^{\text{ct}}(K, \mathbb{Q})$ des motifs constructibles (ou encore géométriques) à coefficients rationnels dont le cœur $\mathbf{MM}(K)$ est une catégorie tannakienne. Le plongement σ induit alors un foncteur fibre sur $\mathbf{MM}(K)$ dont le pro-groupe algébrique d'automorphismes est $\mathbf{G}(K, \sigma)$.

On notera \widehat{K} le complété de K pour la valuation v . Pour simplifier, on supposera que le corps résiduel k est de caractéristique nulle et on fixe un plongement $\tilde{\sigma} : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Par le chapitre 2, on dispose d'une équivalence de catégories entre $\mathbf{RigDM}(\widehat{K}, \mathbb{Q})$ et une sous-catégorie $\mathbf{QUDM}(k, \mathbb{Q})$ de $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m,k}, \mathbb{Q})$. Considérons le foncteur composé

$$(16) \quad \mathbf{f}_{v, \tilde{\sigma}} : \mathbf{DM}(K, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}(\widehat{K}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbf{QUDM}(k, \mathbb{Q}) \\ \hookrightarrow \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m,k}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{1^*} \mathbf{DM}(k, \mathbb{Q}) \xrightarrow{B_{\tilde{\sigma}}^*} \mathbf{D}(\mathbb{Q})$$

avec 1^* le « pull-back » suivant la section unité de $\mathbb{G}_{m,k}$ et $B_{\tilde{\sigma}}^*$ la réalisation de Betti associée au plongement $\tilde{\sigma}$. Alors, $\mathbf{f}_{v, \tilde{\sigma}}$ se restreint en un foncteur fibre de la catégorie tannakienne $\mathbf{MM}(K)$. Le pro-groupe algébrique des automorphismes de ce foncteur fibre sera noté $\mathbf{G}(K, v, \tilde{\sigma})$. Par le formalisme tannakien, on dispose d'un isomorphisme non canonique de pro-groupes algébriques

$$(17) \quad \mathbf{G}(K, v, \tilde{\sigma}) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \simeq \mathbf{G}(K, \sigma) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}.$$

Enfin, il doit exister une t -structure motivique sur $\mathbf{RigDM}^{\text{ct}}(\widehat{K}, \mathbb{Q})$ dont le cœur $\mathbf{RigMM}(\widehat{K})$ est une catégorie tannakienne. Cette t -structure devrait correspondre via l'équivalence

$$\mathbf{RigDM}(\widehat{K}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbf{QUDM}(k, \mathbb{Q})$$

à la restriction de la t -structure motivique sur $\mathbf{DM}^{\text{ct}}(\mathbb{G}_{m,k}, \mathbb{Q})$. Le foncteur composé

$$(18) \quad \mathbf{f}'_{\tilde{\sigma}} : \mathbf{RigDM}(\widehat{K}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbf{QUDM}(k, \mathbb{Q}) \\ \hookrightarrow \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m,k}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{1^*} \mathbf{DM}(k, \mathbb{Q}) \xrightarrow{B_{\tilde{\sigma}}^*} \mathbf{D}(\mathbb{Q})$$

induit un foncteur fibre dont le pro-groupe algébrique d'automorphismes est noté $\mathbf{G}^{\text{rig}}(\widehat{K}, \tilde{\sigma})$. Le foncteur Rig^* , que l'on conjecture être exact, induit un morphisme de

⁽²⁾ L'histoire conjecturale ci-dessous est maintenant, en grande partie, réalisée dans [6, 7].

pro-groupes algébriques

$$(19) \quad \mathbf{G}^{\text{rig}}(\widehat{K}, \tilde{\sigma}) \longrightarrow \mathbf{G}(K, \tilde{\sigma})$$

qui devrait être injectif. Il est alors naturel de noter $\mathbf{D}(v, \tilde{\sigma})$ le pro-groupe algébrique $\mathbf{G}^{\text{rig}}(\widehat{K}, \tilde{\sigma})$ et de l'appeler le groupe de décomposition motivique de v .

Enfin, le foncteur d'image inverse $\mathbf{DM}(k, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbf{QUDM}(k, \mathbb{Q})$ suivant la projection structurale de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur $\text{Spec}(k)$ induit un morphisme de pro-groupes algébriques

$$(20) \quad \mathbf{D}(v, \tilde{\sigma}) = \mathbf{G}^{\text{rig}}(\widehat{K}, \tilde{\sigma}) \longrightarrow \mathbf{G}(k, \tilde{\sigma})$$

qui devrait être surjectif. Le noyau de ce morphisme sera noté $\mathbf{I}(v, \tilde{\sigma})$. C'est le groupe d'inertie motivique de v .

CHAPITRE 1

MOTIFS DES VARIÉTÉS RIGIDES ANALYTIQUES I : VERSION SANS TRANSFERTS ET LIEN AVEC LE FONCTEUR « MOTIF PROCHE »

Introduction

L'approche homotopique à la géométrie algébrique initiée par Morel et Voevodsky [30] se transporte à d'autres contextes (voir par exemple [38]). Reste bien sûr à trouver des cadres particuliers où la théorie générale nous donne une catégorie homotopique intéressante et utile. Dans ce chapitre, on montre que c'est le cas de la géométrie rigide. Contrairement à [30], on travaillera à coefficients stables puisqu'on n'a rien de particulier à dire dans le cas instable. Faisons un bref aperçu du chapitre.

Étant donné que le présent travail s'adresse plutôt aux spécialistes des motifs qu'aux spécialistes de la géométrie rigide, la première section de ce chapitre sera consacrée à des rappels et des compléments sur les variétés rigides.

Dans la deuxième section, on introduit l'analogue rigide de la topologie de Nisnevich (bien connue en géométrie algébrique). On établit ensuite les analogues rigides de quelques propriétés bien connues de cette topologie. On termine la section par un résultat d'engendrement pour la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich sur le gros site lisse. On montre que cette catégorie est compactement engendrée par les faisceaux représentables par des affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction. Ce résultat, qui peut paraître surprenant, est particulier au monde rigide et n'admet pas d'analogie en géométrie algébrique.

Dans la troisième section, on définit les catégories homotopiques des variétés rigides. Il s'agit d'extensions immédiates des définitions en géométrie algébrique. On explique ensuite le lien avec le foncteur « motif proche » (construit dans [3, Chapitre III]) dans la scholie 1.3.26 qui sera démontrée à la fin de la quatrième section.

1.1. Rappels et compléments de géométrie rigide

Dans cette section on reprend quelques notions de géométrie rigide en suivant [10] et [18]. Quelques compléments seront également donnés.

1.1.1. Généralités. — Soit A un anneau commutatif. Une *semi-norme* (resp. une *norme*) sur A est une fonction $|\cdot| : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes (pour $(a, b) \in A^2$) :

- 1) $|1| \leq 1$ et $|0| = 0$ (resp. et $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$),
- 2) $|ab| \leq |a| \cdot |b|$,
- 3) $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$.⁽¹⁾

Le couple $(A, |\cdot|)$ est appelé un *anneau semi-normé* (resp. *normé*). Si $B \subset A$ est une partie de A , on note $|B|$ son image par $|\cdot|$. On a forcément $|1| = 1$ ou $|A| = \{0\}$. Tout anneau A peut être muni de la *norme triviale* pour laquelle $|A - \{0\}| = \{1\}$.

On note $A^\circ = \{a \in A; |a| \leq 1\}$ et $A^\vee = \{a \in A; |a| < 1\}$. Il est clair que A° est un sous-anneau semi-normé (resp. normé) de A et que A^\vee est un idéal de A° . L'anneau quotient $\tilde{A} = A^\circ/A^\vee$ est appelé l'*anneau résiduel* de la semi-norme (resp. norme) $|\cdot|$.

On note deux constructions de semi-normes.

Exemple 1.1.1. — 1) Soient $(A, |\cdot|)$ un anneau semi-normé et $p : A \twoheadrightarrow B$ un morphisme surjectif d'anneaux. On définit une semi-norme $|\cdot|_p$ sur B en posant $|b|_p = \inf_{a \in p^{-1}(b)} |a|$. C'est la *semi-norme résiduelle* sur B . Lorsque $B = A/\ker |\cdot|$ avec $\ker |\cdot| = \{a \in A; |a| = 0\}$, la semi-norme $|\cdot|_p$ est alors une norme. Plus généralement, $|\cdot|_p$ est une norme si et seulement si l'idéal $p^{-1}(0)$ est *fermé* dans A (i.e., 0 appartient à l'adhérence de $|a + p^{-1}(0)| \subset \mathbb{R}$ si et seulement si $a \in p^{-1}(0)$).

2) Soient $(B_1, |\cdot|)$ et $(B_2, |\cdot|)$ deux anneaux semi-normés qui sont des A -algèbres pour un anneau A . On définit une semi-norme sur l'anneau $B_1 \otimes_A B_2$ en posant pour $v \in B_1 \otimes_A B_2$

$$|v| = \inf\{\sup\{|b_{11}| \times |b_{21}|, \dots, |b_{1r}| \times |b_{2r}|\}; v = b_{11} \otimes b_{21} + \dots + b_{1r} \otimes b_{2r}\}.$$

Une semi-norme $|\cdot|$ sur un anneau A est dite *multiplicative* lorsque l'égalité $|ab| = |a| \cdot |b|$ est vérifiée pour tout $(a, b) \in A^2$. Une *valuation* est une norme multiplicative. Si $(k, |\cdot|)$ est un corps valué, l'anneau k° est un anneau de valuation de hauteur ≤ 1 . Cette hauteur est nulle si et seulement si la valuation de k est triviale. On dit que la valuation $|\cdot|$ est *discrète* lorsqu'elle est non triviale et que le sous-groupe $|k^\times| \subset \mathbb{R}_{>0}^\times$ est discret, i.e., de la forme $\alpha^{\mathbb{Z}}$ pour un réel $0 < \alpha < 1$. On appelle alors *uniformisante*

⁽¹⁾ La définition officielle d'une semi-norme demande l'inégalité triangulaire $|a + b| \leq |a| + |b|$. L'inégalité plus stricte que nous demandons ici caractérise les *semi-normes non archimédiennes* (alias *ultramétriques*). Dans ce travail, toutes les semi-normes considérées sont non archimédiennes de sorte que nous n'avons pas jugé utile de le préciser.

de k un élément $\pi \in k^\vee$ tel que $|\pi| = \alpha$. C'est un générateur de l'idéal maximal $k^\vee \subset k^\circ$.

Les algèbres ci-dessous jouent le rôle des algèbres de polynômes dans le cadre des anneaux semi-normés.

Définition 1.1.2. — Soit $(A, |\cdot|)$ un anneau semi-normé. Une série formelle en n variables T_1, \dots, T_n :

$$f = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_n} T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n}$$

est dite strictement convergente si $|a_{\nu_1, \dots, \nu_n}| \rightarrow 0$ lorsque $\nu_1 + \cdots + \nu_n \rightarrow \infty$. L'ensemble des séries formelles strictement convergentes est noté $A\{T_1, \dots, T_n\}$. C'est une sous- A -algèbre de $A[[T_1, \dots, T_n]]$. L'association $f \rightsquigarrow |f| = \sup_{\nu_1, \dots, \nu_n} |a_{\nu_1, \dots, \nu_n}|$ définit une semi-norme sur $A\{T_1, \dots, T_n\}$ appelée la semi-norme de Gauss (et qui est une norme si et seulement si $|\cdot|$ est une norme sur A).

Remarque 1.1.3. — On a clairement la formule

$$(A\{T_1, \dots, T_n\})^\circ = A^\circ\{T_1, \dots, T_n\}.$$

De plus, l'anneau résiduel de $A\{T_1, \dots, T_n\}$ s'identifie canoniquement à l'algèbre des polynômes $\tilde{A}[T_1, \dots, T_n]$.

Une semi-norme $|\cdot|$ induit une pseudo-distance d sur A définie par $d(a, b) = |a - b|$. On en déduit alors une topologie sur A . Cette topologie est séparée (ou encore d est une distance) si et seulement si $|\cdot|$ est une norme.

Soient $(A, |\cdot|)$ et $(B, |\cdot|)$ deux anneaux semi-normés et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. On dit que f est *continu* si l'application sous-jacente est continue pour les topologies induites par les semi-normes. On dit que f est *borné* s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $|f(a)| \leq M \cdot |a|$ pour tout $a \in A$. Il est clair qu'un morphisme borné est continu. Lorsqu'on peut prendre $M = 1$, on dit que f est *contractant*. On dit enfin que f est *isométrique* si l'égalité $|f(a)| = |a|$ est toujours vérifiée.

Un anneau normé $(A, |\cdot|)$ est dit *complet* lorsque l'espace métrique (A, d) vérifie le critère de Cauchy. Cela revient à dire qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ d'éléments de A converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Étant donné un anneau semi-normé $(A, |\cdot|)$, on appelle *complétion* de A , un anneau normé complet $(\hat{A}, |\cdot|)$ muni d'un morphisme isométrique $A \rightarrow \hat{A}$ d'image dense. On a le lemme suivant (voir [10, Proposition 1.1.7/5 and 6]).

Lemme 1.1.4. — Tout anneau semi-normé $(A, |\cdot|)$ admet une complétion $(\hat{A}, |\cdot|)$ unique à un isomorphisme unique près. De plus, on a $|\hat{A}| = |A|$.

Démonstration. — Quitte à quotienter par $\ker |\cdot|$, on peut supposer que la semi-norme $|\cdot|$ est une norme. Soit $C(A)$ l'anneau des suites de Cauchy de A . Les éléments de $C(A)$ sont donc des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$. On définit une semi-norme sur $C(A)$ en posant $|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}| = \lim_{m \rightarrow \infty} |a_m|$. Cette limite existe puisque

$\| |a_n| - |a_m| \| \leq |a_n - a_m|$. De plus, $|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}| \in |A|$. En effet, si $|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}| = \alpha > 0$, il existe un entier N tel que $|a_{n+m} - a_n| < \alpha$ pour tout $n \geq N$ et $m \geq 0$. Il vient que $|a_{n+m}| = |a_n|$. La suite des normes $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir de N .

On définit alors \widehat{A} comme étant le quotient de $C(A)$ par l'idéal $I(A)$ des suites de Cauchy de norme 0. L'anneau normé $(\widehat{A}, |\cdot|)$ est alors complet (voir [10, Proposition 1.1.7/5] pour plus de détails). L'unicité de $(\widehat{A}, |\cdot|)$ est facile. En effet, tout morphisme isométrique $f : A \rightarrow B$ vers un anneau normé complet B , s'étend en un morphisme isométrique $C(f) : C(A) \rightarrow B$ qui à une suite de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la limite de $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Il est clair que $C(f)$ s'annule sur l'idéal $I(A)$. D'où un morphisme $\widehat{f} : \widehat{A} \rightarrow B$. Si de plus, $f(A)$ est dense dans B , \widehat{f} est bijective (car surjective et isométrique). C.Q.F.D.

Si $(B_1, |\cdot|)$ et $(B_2, |\cdot|)$ sont deux anneaux semi-normés qui sont des A -algèbres pour un anneau A , on notera $B_1 \widehat{\otimes}_A B_2$ le complété de $B_1 \otimes_A B_2$ pour la semi-norme de l'exemple 1.1.1.

Proposition 1.1.5. — *Soit $(A, |\cdot|)$ un anneau normé complet.*

1) *L'anneau normé $A\{T_1, \dots, T_n\}$ est encore complet. De plus, il coïncide avec la complétion de son sous-anneau $A[T_1, \dots, T_n]$.*

2) *Le morphisme $A\{T_1, \dots, T_n\} \otimes_A A\{S_1, \dots, S_m\} \rightarrow A\{T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m\}$ induit un isomorphisme d'anneaux normés complets*

$$A\{T_1, \dots, T_n\} \widehat{\otimes}_A A\{S_1, \dots, S_m\} \simeq A\{T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m\}.$$

1.1.2. Algèbres affinoïdes et variétés rigides. — On fixe un corps valué complet $(k, |\cdot|)$. Sauf mention explicite du contraire, on ne supposera pas la valuation de k non triviale. Lorsque la valuation de k est triviale, les notions développées correspondront à des notions classiques de géométrie algébrique.

Rappelons qu'une k -algèbre de Banach est une k -algèbre A complète pour une norme $|\cdot|_A$ telle que $|a \cdot f|_A = |a| \cdot |f|_A$ pour tout $(a, f) \in k \times A$. Un exemple fondamental de k -algèbres de Banach est donné par la k -algèbre $k\{T_1, \dots, T_n\}$ munie de la norme de Gauss (qui est en fait une valuation). Cette algèbre est noethérienne et tous ses idéaux sont fermés (voir [10, Theorem 5.2.6/1 and Corollary 5.2.7/2]). Si $x \subset k\{T_1, \dots, T_n\}$ est un idéal maximal, son corps résiduel $k(x)$ est une extension finie de k . Les anneaux de fonctions en géométrie rigide sont (localement) donnés par des k -algèbres de Banach particulières appelées les k -algèbres affinoïdes.

Définition 1.1.6. — *Une k -algèbre A est appelée une k -algèbre affinoïde s'il existe un morphisme surjectif de k -algèbres $k\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow A$. Un tel morphisme est appelé une présentation de A .*

Étant donnée une présentation $p : k\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow A$ d'une k -algèbre affinoïde A , on peut munir A de la norme résiduelle $|\cdot|_p$ (voir l'exemple 1.1.1). La k -algèbre A est

alors de Banach pour cette norme. Bien que $|\cdot|_p$ dépende du choix de la présentation, la topologie induite par $|\cdot|_p$ n'en dépend pas. Plus précisément, toutes les normes de Banach sur A sont équivalentes et un morphisme abstrait entre k -algèbres affinoïdes est automatiquement borné pour tout choix de normes de Banach (voir [10, Theorem 6.1.3/1]).

Remarque 1.1.7. — Soit A une k -algèbre affinoïde. On note $\mathrm{Spm}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A . Pour $x \in \mathrm{Spm}(A)$, on munit le corps résiduel $k(x)$ de l'unique valuation $|\cdot|$ qui étend celle de k (on utilise ici que les $k(x)$ sont des extensions finies de k). Pour $f \in A$, on note comme d'habitude $f(x) \in k(x)$ l'image de f dans $k(x)$. On pose alors

$$|f|_\infty = \sup_{x \in \mathrm{Spm}(A)} |f(x)|.$$

D'après [10, Lemma 6.2.1/1], $|\cdot|_\infty$ est une semi-norme sur A qui est une norme si et seulement si A est réduite. Plus précisément, on a $\ker |\cdot|_\infty = \sqrt{(0)}$. De plus, $A_{\mathrm{red}} = A/\sqrt{(0)}$ est complète pour cette norme. C'est la *semi-norme infinie* sur A . Tout morphisme $u : A \rightarrow A'$ de k -algèbres affinoïdes est contractant pour les semi-normes infinies. Lorsque A est la k -algèbre des séries strictement convergentes, la norme infinie coïncide avec la norme de Gauss.

Étant donnés deux morphismes de k -algèbres affinoïdes $A \rightarrow B_i$ (avec $i \in \{1, 2\}$), le complété $B_1 \widehat{\otimes}_A B_2$ de l'anneau $B_1 \otimes_A B_2$ ne dépend pas du choix des normes de Banach sur les B_i . C'est une k -algèbre affinoïde qui de plus est la colimite du diagramme $B_1 \leftarrow A \rightarrow B_2$ dans la catégorie des k -algèbres affinoïdes.

Définition 1.1.8. — Soient A une k -algèbre affinoïde et $f_0, f_1, \dots, f_n \in A$ des éléments engendrant A comme idéal. On note $D(f_0|f_1, \dots, f_n)$ le sous-ensemble des $x \in \mathrm{Spm}(A)$ défini par les inégalités $|f_0(x)| \geq |f_i(x)|$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Un tel ensemble est appelé un *domaine rationnel*.

Pour plus de précision, on écrira parfois $D_A(f_0|f_1, \dots, f_n)$ ou $D_{\mathrm{Spm}(A)}(f_0|f_1, \dots, f_n)$ au lieu de $D(f_0|f_1, \dots, f_n)$.

Il est facile de voir que la fonction $x \rightsquigarrow |f_0(x)|$ ne s'annule pas sur l'ensemble $D(f_0|f_1, \dots, f_n)$. De plus, cet ensemble est canoniquement en bijection avec $\mathrm{Spm}(A\langle f_0|f_1, \dots, f_n \rangle)$ où $A\langle f_0|f_1, \dots, f_n \rangle$ est la k -algèbre affinoïde

$$A\{T_1, \dots, T_n\}/(f_0T_1 - f_1, \dots, f_0T_n - f_n)$$

(voir [18, Lemma 4.1.2]). Les domaines rationnels sont stables par intersections finies et vérifient la propriété de transitivité, i.e., un domaine rationnel de $\mathrm{Spm}(A\langle f_0|f_1, \dots, f_n \rangle)$ est un domaine rationnel de $\mathrm{Spm}(A)$. Un sous-ensemble $D \subset \mathrm{Spm}(A)$ est un *domaine* s'il existe un nombre fini de domaines rationnels $D_i \subset \mathrm{Spm}(A)$ tels que $D = \bigcup_i D_i$. Un sous-ensemble $U \subset \mathrm{Spm}(A)$ est un ouvert, s'il est une réunion quelconque de domaines rationnels. On fait la définition suivante.

Définition 1.1.9. — 1) Soient A une k -algèbre affinoïde et $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$ des éléments engendrant A comme idéal. La famille

$$(D(f_i|f_1, \dots, \widehat{f_i}, \dots, f_n) \subset \mathrm{Spm}(A))_i$$

est appelée le recouvrement standard associé à $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$.

2) Soient U un ouvert de $\mathrm{Spm}(A)$ et $\mathcal{R} = (U_i \subset U)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathrm{Spm}(A)$ contenus dans U . On dit que \mathcal{R} est un recouvrement admissible de U si pour tout domaine rationnel $D = \mathrm{Spm}(B)$ contenu dans U , la famille $(U_i \cap D \subset D)_{i \in I}$ peut être raffinée par un recouvrement standard de $\mathrm{Spm}(B)$.

3) On dit qu'un ouvert U de $\mathrm{Spm}(A)$ est admissible si pour tout morphisme de k -algèbres affinoïdes $f : A \rightarrow B$ avec $\mathrm{Spm}(f)(\mathrm{Spm}(B)) \subset U$, il existe un domaine D de $\mathrm{Spm}(A)$ contenu dans U et contenant $\mathrm{Spm}(f)(\mathrm{Spm}(B))$.

Exemple 1.1.10. — Soient A une k -algèbre affinoïde et $D \subset \mathrm{Spm}(A)$ un domaine. Une famille finie $(D_i \subset D)_{i \in I}$ de sous-domaines est un recouvrement admissible si et seulement si $D = \bigcup_i D_i$ (voir [18, Lemma 4.2.4]).

Définition 1.1.11. — Soit X un ensemble. Une G -topologie τ_X sur X est la donnée :

- (i) d'un sous-ensemble $\mathrm{Ouv}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ de l'ensemble des parties de X , stable par intersection et réunion finies (avec la convention que la réunion de la famille vide est la partie vide et l'intersection de la famille vide est X tout entier) ;
- (ii) d'une topologie de Grothendieck τ_X sur l'ensemble ordonné (par l'inclusion) $\mathrm{Ouv}(X)$ telle que la condition suivante est satisfaite. Pour $V \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $P \subset V$ une partie de V , on a $P \in \mathrm{Ouv}(X)$ s'il existe un recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ de V (pour la topologie τ_X) tel que $V_i \cap P \in \mathrm{Ouv}(X)$ quel que soit $i \in I$.

L'ensemble $\mathrm{Spm}(A)$ sera muni de la G -topologie suivante. On prendra pour $\mathrm{Ouv}(\mathrm{Spm}(A))$ l'ensemble des ouverts admissibles de $\mathrm{Spm}(A)$. La topologie sur $\mathrm{Ouv}(\mathrm{Spm}(A))$ est celle engendrée par les recouvrements admissibles entre ouverts admissibles. Une application $\mathrm{Spm}(f)$, associée à un morphisme de k -algèbres affinoïdes f , est continue pour ces G -topologies. Notons $\mathrm{Rat}(\mathrm{Spm}(A)) \subset \mathrm{Ouv}(\mathrm{Spm}(A))$ le sous-ensemble des domaines rationnels de A . Si on munit $\mathrm{Rat}(\mathrm{Spm}(A))$ de la topologie engendrée par les recouvrements standards, on obtient une équivalence de sites⁽²⁾ entre $\mathrm{Ouv}(\mathrm{Spm}(A))$ et $\mathrm{Rat}(\mathrm{Spm}(A))$.

D'après [18, Theorem 4.2.2], il existe un faisceau sur $\mathrm{Rat}(\mathrm{Spm}(A))$ qui à un domaine rationnel $D(f_0|f_1, \dots, f_n)$ associe l'algèbre $A(f_0|f_1, \dots, f_n)$. C'est le faisceau structural qui sera noté \mathcal{O} . On peut l'étendre d'une manière unique en un faisceau de k -algèbres sur $\mathrm{Ouv}(\mathrm{Spm}(A))$ qu'on note encore \mathcal{O} . On obtient ainsi un G -espace annelé $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O})$.

⁽²⁾ Bien entendu, une équivalence de sites est un morphisme de sites qui induit une équivalence entre les topologies associés.

Définition 1.1.12. — Une k -affinoïde (ou encore une k -variété affinoïde) est un G -espace annelé isomorphe à $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O})$ pour une certaine k -algèbre affinoïde A . Une k -variété rigide (X, \mathcal{O}_X) est un G -espace annelé (X, \mathcal{O}_X) qui est localement⁽³⁾ un k -affinoïde.

Un morphisme de G -espaces annelés est un morphisme de k -variétés rigides s'il est localement isomorphe à $\mathrm{Spm}(f)$ pour f un morphisme de k -algèbres affinoïdes.

Étant donnée une k -variété rigide (X, \mathcal{O}_X) , les parties dans $\mathrm{Ouv}(X)$ seront appelées les *ouverts admissibles* de X . Les recouvrements pour la G -topologie sur X seront appelés les *recouvrements admissibles*.

Notation 1.1.13. — Soit (X, \mathcal{O}_X) une k -variété rigide. Pour $x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x} = \mathrm{Colim}_{x \in U \in \mathrm{Ouv}(X)} \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est local et son corps résiduel $k(x)$ est une extension finie de k qu'on munit de l'unique norme qui étend celle de k . Pour $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, on note $f(x) \in k(x)$ la valeur de f en x , i.e., la classe de f par l'homomorphisme évident $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow k(x)$.

1) Pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, on pose $|f|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. C'est la *semi-norme infinie* sur $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

2) On définit des sous-faisceaux \mathcal{O}_X° et \mathcal{O}_X^\vee par

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathcal{O}_X^\circ) &= \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X); |f(x)| \leq 1, \forall x \in U\}, \\ \Gamma(U, \mathcal{O}_X^\vee) &= \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X); |f(x)| < 1, \forall x \in U\}, \end{aligned}$$

pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$.

3) Pour $f_0, f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ des éléments engendrant \mathcal{O}_X comme idéal, on note $D_X(f_0 | f_1, \dots, f_n)$ le sous-ensemble des $x \in X$ défini par les inégalités $|f_0(x)| \geq |f_i(x)|$ pour tout $1 \leq i \leq n$. C'est un ouvert admissible de X .

Exemple 1.1.14. — 0) Soient A une k -algèbre affinoïde et $U \subset \mathrm{Spm}(A)$ un ouvert admissible. Alors, $(U, \mathcal{O}|_U)$ est naturellement une k -variété rigide.

1) Le k -affinoïde $\mathrm{Spm}(k\{T\})$ sera noté \mathbb{B}_k^1 ou aussi $\mathbb{B}_k^1(o, 1)$. C'est la boule unité de Tate. Plus généralement, si $r \in \sqrt{|k^\times|}$, le sous-groupe divisible de $\mathbb{R}_{>0}^\times$ engendré par $|k^\times|$, on note $\mathbb{B}_k^1(o, r)$ le spectre maximal de la k -algèbre affinoïde

$$k\{r^{-1}T\} = \left\{ f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n; \lim_n r^n |a_n| = 0 \right\}.$$

Si $r_1 \leq r_2$, l'inclusion $k\{r_2^{-1}T\} \hookrightarrow k\{r_1^{-1}T\}$ induit un morphisme $\mathbb{B}_k^1(o, r_1) \rightarrow \mathbb{B}_k^1(o, r_2)$ qui est l'inclusion d'un domaine rationnel. Il est facile de voir que $\mathbb{B}_k^1(o, r)$ représente le foncteur qui à un k -affinoïde $U = \mathrm{Spm}(A)$ associe l'ensemble des $f \in A$ tel que $|f|_\infty \leq r$. En particulier, $\mathbb{B}_k^1(o, 1)$ est un k -affinoïde en anneau.

⁽³⁾ On fera attention que « localement » doit être compris au sens des topologies de Grothendieck. Ainsi, il n'est pas suffisant de vérifier la propriété en question au voisinage de chaque point de X .

2) Le k -affinoïde $\mathrm{Spm}(k\{T\}\langle T|1\rangle) = \mathrm{Spm}(k\{T, T^{-1}\})$ sera noté $\partial\mathbb{B}_k^1$. On y pensera comme au « bord » de la boule unité de Tate. Il représente le foncteur qui à un k -affinoïde $U = \mathrm{Spm}(A)$ associe l'ensemble des $f \in A$ tel que $|f|_\infty = 1$. En particulier, $\partial\mathbb{B}_k^1$ est un k -affinoïde en groupe.

Plus généralement, pour $r_1, r_2 \in \sqrt{|k^\times|}$ avec $r_1 \leq r_2$, on définit la couronne $\mathbb{C}r_k^1(o, r_1, r_2)$ (de petit rayon r_1 et de grand rayon r_2) par le spectre maximal de la k -algèbre affinoïde

$$k\{r_2^{-1}T\}\langle T|r_1\rangle = k\{r_2^{-1}T\}\langle T^p|a\rangle$$

avec $a \in k^\times$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $|a| = r_1^p$. Le k -affinoïde $\mathbb{C}r_k^1(o, r_1, r_2)$ représente le foncteur qui à un k -affinoïde $U = \mathrm{Spm}(A)$ associe l'ensemble des $f \in A$ tel que $r_1 \leq |f|_\infty \leq r_2$. Pour $r \in \sqrt{|k^\times|}$, on note $\partial\mathbb{B}_k^1(o, r)$ au lieu de $\mathbb{C}r_k^1(o, r, r)$. On y pensera comme au « bord » de $\mathbb{B}_k^1(o, r)$.

3) Supposons que la valuation de k est non triviale. La droite affine analytique $(\mathbb{A}_k^1)^{\mathrm{an}}$ est définie comme l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_k^1(o, |\pi|^{-n})$ avec $\pi \in k^\times$ un scalaire non nul. Il est facile de voir que $(\mathbb{A}_k^1)^{\mathrm{an}}$ représente le foncteur qui à une k -variété rigide U associe l'anneau des fonctions globales $\Gamma(U, \mathcal{O})$. En particulier, $(\mathbb{A}_k^1)^{\mathrm{an}}$ est un anneau dans la catégorie des k -variétés rigides.

Exemple 1.1.15. — Soient $X = \mathrm{Spm}(A)$ une k -variété affinoïde, $f \in A$ inversible et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. On définit une k -variété affinoïde $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$ par le spectre maximal de la k -algèbre affinoïde

$$(1.1) \quad A\{f^{-1/p}T\} = \left\{ f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n \in A[[T]]; \lim_{n \rightarrow \infty} |f^n a_n^p|_\infty = 0 \right\}.$$

On pensera à $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$ comme à une famille de boules paramétrée par X et de rayons donnés par la fonction $x \in X \rightsquigarrow |f(x)|^{1/p}$. Pour montrer que (1.1) est bien une k -algèbre affinoïde, on peut supposer que $f \in A^\circ$. Dans ce cas, elle coïncide visiblement avec $A\{T\}\langle f|T^p\rangle$. Étant donnée une deuxième fonction inversible $g \in A$ et un deuxième entier non nul q tels que⁽⁴⁾ $|g(x)|^{1/q} \leq |f(x)|^{1/p}$ pour tout $x \in X$, on définit la couronne $\mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p}) = \mathrm{Spm}(A\{f^{-1/p}T\}\langle T^q|g\rangle)$. Lorsque $f = g$ et $p = q$, on note simplement $\partial\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$ cette couronne. On y pensera comme à la famille de cercles qui bordent la famille de boules $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$.

Si X est une k -variété rigide arbitraire et $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$, les constructions précédentes se recollent pour définir les k -variétés rigides $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$, $\mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p})$ et $\partial\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$. On laissera au lecteur le soin d'explicitier les foncteurs de point représentés par ces X -variétés rigides.

On note VarRig/k la catégorie des k -variétés rigides et $\mathrm{Afd}/k \subset \mathrm{VarRig}/k$ la sous-catégorie pleine des k -variétés affinoïdes. Elle est équivalente à l'opposée de la catégorie des k -algèbres affinoïdes. La catégorie VarRig/k admet les limites finies. On

⁽⁴⁾ Cette condition n'est pas nécessaire pour la définition. Elle assure uniquement que les fibres de la couronne au-dessus de X ne sont jamais vides.

notera $X \widehat{\times}_S Y$ le produit fibré de deux k -variétés rigides X et Y au-dessus d'une troisième S . Le produit fibré de k -affinoïdes correspond au produit tensoriel complété des k -algèbres affinoïdes de fonctions.

Une k -variété rigide X est dite *quasi-compacte* lorsqu'elle est recouverte par un nombre fini de k -affinoïdes. Elle est dite *quasi-séparée* si elle admet un recouvrement admissible $(U_i)_i$ par des k -affinoïdes tels que $U_i \cap U_j$ soit quasi-compacte pour tout (i, j) .

Étant donné une k -algèbre affinoïde A et un A -module M , le préfaisceau qui à un domaine rationnel $D(f_0|f_1, \dots, f_n)$ associe $M \otimes_A A\langle f_0|f_1, \dots, f_n \rangle$ est un faisceau⁽⁵⁾ sur $\text{Rat}(\text{Spm}(A))$ que l'on note $\mathfrak{a}(M)$ ainsi que son extension à $\text{Ouv}(\text{Spm}(A))$.

Définition 1.1.16. — Soient (X, \mathcal{O}_X) une k -variété rigide et \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{M} est quasi-cohérent (resp. cohérent) s'il existe un recouvrement admissible $(U_i = \text{Spm}(A_i))_i$ de X par des k -affinoïdes tel que $\mathcal{M}|_{U_i}$ soit isomorphe à $\mathfrak{a}(M_i)$ avec M_i un A_i -module (resp. de type fini).

Soit A une k -algèbre affinoïde. D'après [18, Theorem 4.5.2], le foncteur qui à un A -module M associe $\mathfrak{a}(M)$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des A -modules de type fini et celles des $\mathcal{O}_{\text{Spm}(A)}$ -modules cohérents. L'assertion correspondante pour les modules quasi-cohérents est fautive en général (voir [16, Remark 2.1.5 and Example 2.1.6]).

Définition 1.1.17. — Un morphisme $Y \rightarrow X$ de k -variétés rigides est appelé une immersion fermée s'il existe un recouvrement admissible $(U_i = \text{Spm}(A_i))_i$ de X tel que pour tout i le morphisme $Y \times_X U_i \rightarrow U_i$ soit isomorphe à $\text{Spm}(A_i/I_i) \rightarrow \text{Spm}(A_i)$ pour un idéal $I_i \subset A_i$.

Sous les conditions de la définition 1.1.17, les $\mathfrak{a}(I_i)$ se recollent pour définir un idéal cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ appelé l'idéal de l'immersion fermée. Souvent, on abusera en disant que Y est une sous-variété fermée de X et on notera $Y = X/\mathcal{I}$. Comme en géométrie algébrique, on dit qu'un morphisme de k -variétés rigides $f : Y \rightarrow X$ est *séparé* si la diagonale $Y \rightarrow Y \widehat{\times}_X Y$ est une immersion fermée.

Définition 1.1.18. — Un morphisme $j : W \rightarrow X$ de k -variétés rigides est appelé une immersion ouverte s'il existe un ouvert admissible $U \subset X$ contenant l'image de j tel que pour tout domaine $D \subset U$ le morphisme $W \times_X D \rightarrow D$ est inversible.

On voit immédiatement qu'une immersion ouverte qui est surjective sur les ensembles de points est forcément un isomorphisme.

⁽⁵⁾ Dans [18], on considère uniquement le cas où M est de type fini. Cette condition est superflue. En effet, M est la colimite filtrante de ses sous-modules de type fini et la topologie sur $\text{Rat}(\text{Spm}(A))$ est quasi-compacte de sorte qu'une colimite filtrante de faisceaux (prise dans la catégorie des pré-faisceaux) est encore un faisceau.

1.1.3. Le foncteur d'analytification. — Soit A une k -algèbre affinoïde. Une k -algèbre affinoïde B munie d'un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow B$ est appelée une A -algèbre affinoïde. De même, une k -variété rigide X munie d'un morphisme vers $\mathrm{Spm}(A)$ sera appelée une A -variété rigide. La catégorie des A -variétés rigides sera notée VarRig/A . De même, on note Sch/A la catégorie des A -schémas (où A est considéré comme un anneau abstrait) et $\mathrm{Sch}^{\mathrm{tf}}/A$ sa sous-catégorie pleine des A -schémas de type fini. Dans ce paragraphe, nous allons construire un foncteur d'analytification

$$(1.2) \quad \mathrm{Rig} : \mathrm{Sch}^{\mathrm{tf}}/A \longrightarrow \mathrm{VarRig}/A,$$

qui à un A -schéma de type fini X associe une A -variété rigide X^{an} . Lorsque la valuation de k est triviale, ce foncteur est simplement l'inclusion de la sous-catégorie des k -schémas de type fini dans celle des k -schémas localement de type fini. On supposera donc dans la suite que la valuation de k est non triviale.

Soit X un A -schéma affine de type fini. On définit un préfaisceau $h_{\mathrm{an}}(X)$ sur VarRig/A par l'association : $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{VarRig}/A) \rightsquigarrow \mathrm{hom}_{\mathrm{Sch}/A}(\mathrm{Spec}(\Gamma(U, \mathcal{O})), X)$. On a le lemme suivant.

Lemme 1.1.19. — *Le préfaisceau $h_{\mathrm{an}}(X)$ est représentable.*

Démonstration. — Soit $i : X \rightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{Spec}(A)}^n = \mathrm{Spec}(A[T_1, \dots, T_n])$ une immersion fermée d'idéal $I \subset A[T_1, \dots, T_n]$. Le préfaisceau $h_{\mathrm{an}}(X)$ est le produit fibré de préfaisceaux

$$\mathcal{O}(-)^n \xrightarrow{\prod_i P_i} \prod_i \overset{*}{\mathcal{O}(-)},$$

avec $(P_i)_i$ une famille génératrice finie de l'idéal I . Comme VarRig/A possède les produits fibrés, il suffit de traiter le cas de $X = \mathbb{A}_{\mathrm{Spec}(A)}^1$. On peut alors prendre $X^{\mathrm{an}} = (\mathbb{A}_k^1)^{\mathrm{an}} \widehat{\times}_k \mathrm{Spm}(A)$ avec $(\mathbb{A}_k^1)^{\mathrm{an}}$ la droite analytique rigide de l'exemple 1.1.14.

C.Q.F.D.

Si X est seulement supposé de type fini sur A et $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{VarRig}/A)$, on note $h_{\mathrm{an}}(X)(U)$ l'ensemble des morphismes de G -espaces annelés en A -algèbres de U vers X qui sont localement une composition de $\mathrm{Spm}(C) \rightarrow \mathrm{Spec}(C) \rightarrow \mathrm{Spec}(B)$ pour B une A -algèbre de type fini, C une A -algèbre affinoïde et $B \rightarrow C$ un morphisme de A -algèbres. On obtient ainsi un préfaisceau $h_{\mathrm{an}}(X)$. Lorsque X est affine, on retrouve bien le préfaisceau défini ci-dessus.

Proposition 1.1.20. — *Pour tout A -schéma de type fini X , le préfaisceau $h_{\mathrm{an}}(X)$ est représentable par une A -variété rigide X^{an} .*

Démonstration. — Supposons d'abord que X est séparé. Soit $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement Zariski de X par des ouverts affines. On définit une k -variété rigide X^{an} en recollant les X_i^{an} suivant $(X_i \cap X_j)^{\mathrm{an}}$. Il est immédiat de voir que X^{an} représente le préfaisceau $h_{\mathrm{an}}(X)$.

Lorsque X n'est plus supposé séparé, les intersections $X_i \cap X_j$ sont elles séparées puisque quasi-affines. On peut donc encore définir X^{an} en recollant les X_i^{an} suivant $(X_i \cap X_j)^{\text{an}}$. La k -variété rigide ainsi obtenue représente le préfaisceau $h_{\text{an}}(X)$.

C.Q.F.D.

L'association $X \rightsquigarrow X^{\text{an}}$ est fonctorielle puisqu'il en est ainsi de $X \rightsquigarrow h_{\text{an}}(X)$. D'où le foncteur (1.2). On vérifie facilement que le foncteur Rig commute à l'extension des scalaires suivant les morphismes $A \rightarrow A'$ entre k -affinoïdes, i.e., on a un isomorphisme naturel $(X \otimes_A A')^{\text{an}} \simeq X^{\text{an}} \widehat{\otimes}_A A'$ en $X \in \text{Ob}(\text{Sch}^{\text{tf}}/A)$. Notons également que Rig envoie les immersions fermées (resp. ouvertes) de A -schémas sur des immersions fermées (resp. ouvertes) de A -variétés rigides.

Soient X un A -schéma de type fini et $U = \text{Spm}(B)$ un A -affinoïde. Nous allons construire une application

$$(1.3) \quad \text{hom}_{\text{Sch}/A}(\text{Spec}(B), X) \longrightarrow \text{hom}_{\text{VarRig}/A}(\text{Spm}(B), X^{\text{an}}).$$

Remarquons pour cela que

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\text{Sch}/A}(\text{Spec}(B), X) &\simeq \text{hom}_{\text{Sch}/B}(\text{Spec}(B), X \otimes_A B), \\ \text{hom}_{\text{VarRig}/A}(\text{Spm}(B), X^{\text{an}}) &\simeq \text{hom}_{\text{VarRig}/B}(\text{Spm}(B), X^{\text{an}} \widehat{\otimes}_A B) \\ &\simeq \text{hom}_{\text{VarRig}/B}(\text{Spm}(B), (X \otimes_A B)^{\text{an}}). \end{aligned}$$

Il suffit donc de traiter le cas $A = B$. Dans ce cas, l'application recherchée s'obtient par fonctorialité de $(-)^{\text{an}}$. Nous ignorons si le résultat ci-dessous est vrai sans l'hypothèse de séparation.

Proposition 1.1.21. — *Soit X un A -schéma séparé et de type fini. Pour tout A -affinoïde $U = \text{Spm}(B)$, l'application (1.3) est bijective.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $A = B$. Le fait que (1.3) est injective découle facilement du fait que le morphisme de G -espaces annelés $X^{\text{an}} \rightarrow X$ est fidèlement plat. On se concentre sur la surjectivité : on fixe une section $s : U = \text{Spm}(A) \rightarrow X^{\text{an}}$ au morphisme $X^{\text{an}} \rightarrow \text{Spm}(A)$ et on montre que s admet un antécédent par (1.3). On divise la preuve en trois étapes.

Étape 1 : Soit $j : X_0 \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert affine de X . Notons $Y = X - X_0$ et considérons $Z = s^{-1}(Y^{\text{an}})$; c'est un sous-affinoïde fermé de U défini par un idéal $I \subset A$. Soit $h \in I$ et considérons la A -algèbre $A_h = A[T]/(hT - 1)$. On note \mathcal{R} la \mathcal{O}_U -algèbre quasi-cohérente sur $\text{Spm}(A)$ associée à A_h . On a alors $\Gamma(U, \mathcal{R}) = A_h$.

Nous allons montrer qu'il existe un unique morphisme de G -espaces annelés $s' : (U, \mathcal{R}) \rightarrow (X, j_* \mathcal{O})$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} (U, \mathcal{R}) & \xrightarrow{s'} & (X, j_* \mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{s} & (X, \mathcal{O}). \end{array}$$

(Ci-dessus, nous avons encore noté $s : (U, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O})$ le morphisme de G -espaces annelés déduit du morphisme $s : U \rightarrow X^{\text{an}}$ par la proposition 1.1.20.) La question est locale en X et U . Soient donc $V_1 = \text{Spec}(E_1), \dots, V_r = \text{Spec}(E_r)$ un recouvrement affine de X et $D_1 = \text{Spm}(F_1), \dots, D_r = \text{Spm}(F_r)$ un recouvrement standard de U tels que le morphisme de G -espaces sous-jacent à s envoie D_i dans V_i . Il suffit de montrer l'existence et l'unicité d'un morphisme s'_i de G -espaces annelés rendant commutatif le carré

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} (D_i, \mathcal{R}|_{D_i}) & \xrightarrow{s'_i} & (V_i, (j_* \mathcal{O})|_{V_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (D_i, \mathcal{O}) & \xrightarrow{s_i} & (V_i, \mathcal{O}). \end{array}$$

Puisque X est supposé séparé, $V_i \cap X_0$ est un ouvert affine de V_i . Il s'ensuit que $E_i = \Gamma(V_i, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(V_i \cap X_0, \mathcal{O})$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux et il en est de même avec V_i remplacé par un ouvert affine de V_i . Ceci montre que $\mathcal{O}_{V_i} \rightarrow (j_* \mathcal{O}_{X_0})|_{V_i}$ est un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux d'anneaux sur V_i . L'unicité de s'_i s'ensuit.

Pour montrer l'existence de s'_i , il suffit de construire un morphisme de A -algèbres θ'_i rendant commutatif le carré

$$(1.5) \quad \begin{array}{ccc} (F_i)_h & \xleftarrow{\theta'_i} & \Gamma(V_i \cap X_0, \mathcal{O}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F_i & \xleftarrow{\theta_i} & E_i. \end{array}$$

Rappelons qu'on avait noté Y le complémentaire de X_0 dans X et Z son image inverse par s . On pose $Y_i = Y \cap V_i$ et $Z_i = Z \cap D_i$. On obtient donc un carré cartésien de A -schémas

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(F_i) - Z_i & \longrightarrow & V_i - Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(F_i) & \longrightarrow & V_i. \end{array}$$

D'où un morphisme $\Gamma(V_i - Y_i, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\text{Spec}(F_i) - Z_i, \mathcal{O})$. Comme h s'annule sur Z_i , l'ouvert Zariski $\text{Spec}((F_i)_h)$ est contenu dans $\text{Spec}(F_i) - Z_i$. On prendra alors pour θ'_i la composition de

$$\Gamma(V_i \cap X_0, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\text{Spec}(F_i) - Z_i, \mathcal{O}) \longrightarrow (F_i)_h.$$

La commutation du carré (1.5) est alors claire.

Étape 2 : Gardons les notations de l'étape précédente. En passant aux sections globales, le morphisme de G -espaces annelés $s' : (U, \mathcal{R}) \rightarrow (X, j_* \mathcal{O})$ fournit un morphisme de A -algèbres de type fini

$$\Gamma(X_0, \mathcal{O}) \longrightarrow A_h.$$

Il s'ensuit un morphisme de A -schémas de type fini $\mathrm{Spec}(A_h) \rightarrow X_0$. Il est facile de vérifier que l'analytifié de ce morphisme, à savoir

$$U - (U/(h)) = \mathrm{Spec}(A_h)^{\mathrm{an}} \longrightarrow X_0^{\mathrm{an}},$$

coïncide avec la restriction de s à l'ouvert $U - (U/(h))$.

Étape 3 : Soit $(X_i)_i$ un recouvrement affine de X et posons $U_i = s^{-1}(X_i^{\mathrm{an}})$. Il existe un recouvrement admissible $(U'_{ij})_j$ de U_i avec $U'_{ij} = U - (U/(h_{ij}))$ pour des fonctions h_{ij} engendrant l'idéal définissant le sous-affinoïde fermé $f^{-1}(X^{\mathrm{an}} - X_i^{\mathrm{an}}) \subset U$. D'après la seconde étape, le morphisme $U'_{ij} \rightarrow X_i^{\mathrm{an}}$ est l'analytifié d'un unique morphisme de A -schémas $\mathrm{Spec}(A_{h_{ij}}) \rightarrow X_i$. En recollant ces morphismes, nous obtenons un morphisme de A -schémas $\mathrm{Spec}(A) \rightarrow X$ dont l'analytifié est s . La proposition est démontrée. C.Q.F.D.

1.1.4. La fibre générique de Raynaud et les modèles formels. — Dans ce paragraphe, on supposera que la valuation de k est non triviale et on fixe un élément non nul $\pi \in k^\vee$.

Une k° -algèbre est dite *topologiquement de type fini* si elle est complète pour la topologie π -adique (i.e., $A \simeq \mathrm{Lim}_n A/\pi^n A$) et admet une présentation $p : k^\circ\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow A$. Si de plus, on peut choisir p de noyau un idéal de type fini, A sera dite *topologiquement de présentation finie*. Elle sera dite *essentielle* lorsque π n'est pas un diviseur de zéro dans A , i.e., le morphisme $A \rightarrow A[1/\pi]$ est injectif. C'est un fait non trivial (voir [11, Proposition 1.1] où « essentielle » est remplacé par « admissible ») que toute k° -algèbre topologiquement de type fini et essentielle est topologiquement de présentation finie. Étant donnée une k° -algèbre topologiquement de type fini A , on notera A^{es} l'image de $A \rightarrow A[1/\pi]$. C'est une k° -algèbre essentielle (et donc topologiquement de présentation finie).

Ces notions s'étendent trivialement au cas des schémas formels. Un k° -schéma formel *de type fini* (resp. *de présentation finie*) est un schéma formel \mathcal{X} quasi-compact et qui est localement donné par le spectre formel $\mathrm{Spf}(A)$ d'une k° -algèbre topologiquement de type fini (resp. de présentation finie) A . On dira que \mathcal{X} est essentiel si les k° -algèbres A le sont, i.e., s'il est plat sur k° . On dispose d'une immersion fermée maximale $\mathcal{X}^{\mathrm{es}} \hookrightarrow \mathcal{X}$ telle que $\mathcal{X}^{\mathrm{es}}$ est essentiel.

Soit A une k -algèbre affinoïde munie d'une présentation $p : k\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow A$. La k° -algèbre $A^\circ = \{a \in A; |a|_p \leq 1\}$ est un quotient de $k^\circ\{T_1, \dots, T_n\}$ (ce qui découle de [10, Corollary 5.2.7/8]). C'est donc une k° -algèbre topologiquement de type fini. Il est clair que A° est essentielle et donc topologiquement de présentation finie. On peut lui associer le k° -schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A^\circ)$. Réciproquement, étant donné un k° -schéma formel affine et de type fini \mathcal{X} , la k -algèbre $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_{k^\circ} k$ est une k -algèbre affinoïde et on peut lui associer le k -affinoïde $\mathrm{Spm}(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_{k^\circ} k)$ que l'on notera \mathcal{X}_η . Il est facile de voir que si \mathcal{U} est un ouvert Zariski de \mathcal{X} , \mathcal{U}_η est un domaine de \mathcal{X}_η . En recollant, on peut donc étendre cette construction pour obtenir le foncteur de passage

à la fibre générique de Raynaud (voir [36])

$$(1.6) \quad (-)_\eta : \text{SchF}^{\text{tf}}/k^\circ \longrightarrow \text{VarRig}/k,$$

qui à un k° -schéma formel de type fini \mathcal{X} associe une k -variété rigide quasi-compacte et quasi-séparée \mathcal{X}_η . Si \mathcal{X} est un k° -schéma formel, on notera $|\mathcal{X}|$ l'espace topologique sous-jacent. On dispose alors d'une application $\text{red} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow |\mathcal{X}|$ qui à un point $x \in \mathcal{X}_\eta$ associe l'image du morphisme de schéma formels $\text{Spf}(k^\circ(x)) \rightarrow \mathcal{X}$. Lorsque \mathcal{X} est essentiel, cette application induit une surjection de \mathcal{X}_η sur le sous-ensemble des points fermés de $|\mathcal{X}|$.

Définition 1.1.22. — Soit X une k -variété rigide (quasi-compacte et quasi-séparée). On appelle modèle de X , un k° -schéma formel de type fini \mathcal{X} muni d'un isomorphisme de k -variétés rigides $X \simeq \mathcal{X}_\eta$. On note $\text{Mdl}(X)$ la catégorie des modèles de X et $\text{Mdl}_{\text{es}}(X)$ sa sous-catégorie pleine formée des modèles essentiels.

Nous dirons qu'un modèle $\mathcal{X}' \in \text{Mdl}(X)$ est plus fin que le modèle \mathcal{X} s'il existe un morphisme $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ dans $\text{Mdl}(X)$.

Il est clair que l'inclusion $\text{Mdl}_{\text{es}}(X) \hookrightarrow \text{Mdl}(X)$ est cofinale. De plus, $\text{Mdl}_{\text{es}}(X)$ est équivalente à un ensemble ordonné. On a la proposition suivante (voir [11]).

Proposition 1.1.23. — Soit \mathcal{X} un modèle essentiel d'une k -variété rigide X . Tout éclatement $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ en un idéal ouvert et de type fini (dit éclatement admissible) est naturellement un modèle de X qui de plus est essentiel.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que le morphisme évident $\mathcal{X}'_\eta \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ est inversible. On peut pour cela supposer que $\mathcal{X} = \text{Spf}(A^\circ)$ est affine et que \mathcal{X}' est l'éclaté d'un idéal $I^\circ = (f_1, \dots, f_n) \subset A^\circ$. Comme cet idéal est supposé ouvert, il contient une puissance de π .

Rappelons que l'éclaté \mathcal{X}' est le complété formel de $\text{Proj}(\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (I^\circ)^r)$. Il admet donc le recouvrement standard par les

$$\mathcal{U}_i = \text{Spf}\left(\text{Gr}^0\left(\left(\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (I^\circ)^r\right)\left[\frac{1}{f_i}\right]\right)\right)\//(\pi)$$

où l'élément « f_i » inversé est celui placé en degré 1 et Gr^r désigne le sous- A° -module des éléments de degré r . (Rappelons que $(-)\//(\pi) = \text{Lim}_{n \in \mathbb{N}} (-)/(\pi^n)$ désigne la complétion formelle le long de l'idéal engendré par π .) On dispose d'un morphisme surjectif évident

$$\begin{aligned} B_i &= A^\circ[T_1, \dots, \widehat{T_i}, \dots, T_n]/(f_i T_1 - f_1, \dots, \widehat{f_i T_i - f_i}, \dots, f_i T_n - f_n) \\ &\twoheadrightarrow C_i = \text{Gr}^0\left(\left(\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (I^\circ)^r\right)\left[\frac{1}{f_i}\right]\right) \end{aligned}$$

qui associe f_j/f_i à T_j pour $j \neq i$. Notons $J_i \subset B_i$ le noyau de ce morphisme. Le noyau de $B_i//(\pi) \rightarrow C_i//(\pi)$ est alors donné par $K_i = J_i//(\pi)$. Supposons un instant que tout élément de K_i est annihilé par une puissance de π et expliquons comment

conclure. Cette propriété entraîne que $(B_i//(\pi))^{\text{es}} \simeq C_i//(\pi)$. Ceci montre que $(\mathcal{U}_i)_\eta$ est canoniquement isomorphe à

$$\begin{aligned} \text{Spm}(A\{T_1, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n\}/(f_i T_1 - f_1, \dots, f_i \widehat{T}_i - f_i, \dots, f_i T_n - f_n)) \\ = D(f_i|f_1, \dots, \widehat{f}_i, \dots, f_n). \end{aligned}$$

De plus, $(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)_\eta$ correspond à l'intersection des domaines rationnels

$$D(f_i|f_1, \dots, \widehat{f}_i, \dots, f_n) \quad \text{et} \quad D(f_j|f_1, \dots, \widehat{f}_j, \dots, f_n).$$

Étant donné que les $D(f_i|f_1, \dots, \widehat{f}_i, \dots, f_n)$ recouvrent X , le résultat est maintenant clair.

Vérifions à présent que tout élément de K_i est annihilé par une puissance de π . Remarquons d'abord qu'il en est ainsi de tout élément de J_i . En effet, le morphisme $B_i[1/\pi] \rightarrow C_i[1/\pi]$ est un isomorphisme puisque I° contient une puissance de π . Par ailleurs, on dispose d'un carré commutatif à flèches horizontales surjectives

$$\begin{array}{ccc} A^\circ\{T_1, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n\} & \longrightarrow & B_i//(\pi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A\{T_1, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n\} & \longrightarrow & (B_i//(\pi))[1/\pi]. \end{array}$$

Soit $h = \sum_{r \in \mathbb{N}} a_r \cdot h_r$ un élément de K_i avec $a_r \in k^\circ$, $h_r \in J_i$ et $\text{Lim}_r |a_r| = 0$. Nous cherchons à démontrer que h est annihilé par une puissance de π . Ceci revient à dire que l'image de h dans $(B_i//(\pi))[1/\pi]$ est nulle.

Pour $r \in \mathbb{N}$, choisissons un polynôme $H_r \in A^\circ[T_1, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n]$ qui s'envoie sur h_r par le morphisme évident

$$A^\circ[T_1, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n] \twoheadrightarrow B_i.$$

La série $H = \sum_{r \in \mathbb{N}} a_r \cdot H_r$ définit un élément de $A^\circ\{T_1, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n\}$. Il suffit de montrer que l'image de H par le morphisme

$$A\{T_1, \dots, \widehat{T}_i, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow (B_i//(\pi))[1/\pi]$$

est nulle. Or, le noyau de ce morphisme est un idéal fermé. Il est donc suffisant de montrer que l'image de chaque H_r est nulle dans $(B_i//(\pi))[1/\pi]$. Vu le carré commutatif ci-dessus, cette image coïncide avec l'image de h_r par le morphisme

$$B_i//(\pi) \longrightarrow (B_i//(\pi))[1/\pi]$$

qui est nulle puisque l'élément $h_r \in J_i$ est annihilé par une puissance de π . C.Q.F.D.

Remarque 1.1.24. — L'argument ci-dessus montre que tout recouvrement standard d'un k -affinoïde X correspond par le foncteur de Raynaud au recouvrement standard affine d'un éclaté admissible d'un modèle affine de X (voir [36]).

Lemme 1.1.25. — Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux modèles d'une k -variété rigide quasi-compacte et séparée X . Il existe un modèle \mathcal{Z} qui est plus fin que \mathcal{X} et \mathcal{Y} .

Démonstration. — On se donne des recouvrements affines

$$(\mathcal{U}_i = \mathrm{Spf}(A_i^\circ))_i \quad \text{et} \quad (\mathcal{V}_j = \mathrm{Spf}(B_j^\circ))_j$$

de \mathcal{X} et \mathcal{Y} . On en déduit un recouvrement $(\mathcal{U}_i \widehat{\times}_{k^\circ} \mathcal{V}_j = \mathrm{Spf}(A_i^\circ \widehat{\otimes}_{k^\circ} B_j^\circ))_{i,j}$ de $\mathcal{X} \widehat{\times}_{k^\circ} \mathcal{Y}$.

Pour tout i et j , considérons l'idéal I_{ij} de $A_i \widehat{\otimes}_k B_j$ correspondant au sous-affinoïde fermé $(\mathcal{U}_i \widehat{\times}_{k^\circ} \mathcal{V}_j)_\eta \cap \Delta(X)$ avec $\Delta(X)$ la diagonale de $X \widehat{\times}_k X$. (C'est ici qu'on utilise l'hypothèse que X est séparé.) On note alors I_{ij}° l'image inverse de I_{ij} dans $A_i^\circ \widehat{\otimes}_{k^\circ} B_j^\circ$. Il est immédiat de voir que les I_{ij}° définissent un idéal cohérent sur le schéma formel $\mathcal{X} \widehat{\times}_{k^\circ} \mathcal{Y}$ correspondant à un sous-schéma formel fermé \mathcal{Z} tel que $\mathcal{Z}_\eta \simeq X$. C.Q.F.D.

On montre facilement que la construction utilisée dans la preuve du lemme précédent est indépendante du choix des recouvrements. On notera $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ le k° -schéma formel \mathcal{Z} . On peut penser à $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ comme étant l'adhérence schématique dans $\mathcal{X} \widehat{\times}_{k^\circ} \mathcal{Y}$ de X plongé diagonalement dans $X \widehat{\times}_k X \simeq (\mathcal{X} \widehat{\times}_{k^\circ} \mathcal{Y})_\eta$.

Corollaire 1.1.26. — *Soit X une k -variété rigide séparée. La catégorie $\mathrm{Mdl}(X)$ est cofiltrante lorsqu'elle n'est pas vide.*

Proposition 1.1.27. — *Soit $X = \mathrm{Spm}(A)$ un k -affinoïde. On suppose fixée une norme résiduelle sur A . Soit \mathcal{X} un modèle de X . Il existe alors un idéal ouvert et de type fini de A° dont l'éclaté dans $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ est un modèle plus fin que \mathcal{X} .*

Démonstration. — Soit $\mathcal{U}_\alpha = \mathrm{Spf}(B_\alpha^\circ)$ un recouvrement Zariski de \mathcal{X} par des k° -schémas formels affines. Le recouvrement $(\mathcal{U}_\alpha)_\eta$ peut se raffiner par un recouvrement rationnel standard associé à $g_1, \dots, g_n \in A^\circ$. Notons \mathcal{Y} l'éclaté de $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ en l'idéal admissible (g_1, \dots, g_n) et considérons $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$. On voit facilement que le k° -schéma formel \mathcal{Z} est affine sur \mathcal{Y} . On conclut alors par le lemme ci-dessous et le fait que la composition de deux éclatements admissibles est encore un éclatement admissible.

C.Q.F.D.

Lemme 1.1.28. — *Soit $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme affine de k° -schémas formels essentiels. On suppose que f_η est inversible. Alors, f est fini et il existe un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_\mathcal{X}$ ouvert et de type fini dont l'éclaté est un modèle de \mathcal{X}_η qui est plus fin que \mathcal{Y} .*

Démonstration. — On montre d'abord que f est fini. La question étant locale, on peut supposer que $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A^\circ)$ et $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}(B^\circ)$ avec A° et B° deux k° -algèbres topologiques essentielles. On note $e : A^\circ \rightarrow B^\circ$ le morphisme de k° -algèbres induit par f .

Soit une présentation $p : A^\circ\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow B^\circ$. Comme A° et B° sont topologiquement de présentation finie, l'idéal $I = p^{-1}(0)$ est de type fini. Comme $A = A^\circ[1/\pi] \simeq B = B^\circ[1/\pi]$, l'idéal $I[1/\pi]$ est de la forme $(T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n)$ avec $a_i \in A$. Considérons le sous-schéma fermé Z de $\mathbb{P}_{A^\circ}^n = \mathrm{Proj}(A^\circ[T_0, \dots, T_n])$ obtenu en prenant l'adhérence schématique de la section $[1 : a_1 : \dots : a_n]$ définie au-dessus

de A . On dispose d'une factorisation de $\mathrm{Spf}(e)$:

$$\mathrm{Spf}(B^\circ) \xrightarrow{w} Z//(\pi) \longrightarrow \mathrm{Spf}(A^\circ)$$

et plus précisément, $\mathrm{Spf}(B^\circ)$ s'identifie via w à l'intersection de $Z//(\pi)$ avec l'ouvert standard $\mathrm{Spf}(A^\circ\{T_1, \dots, T_n\})$ de $\mathbb{P}_{A^\circ}^n//(\pi)$. Il suffira de montrer que w est un isomorphisme. En effet, si c'est le cas, $\mathrm{Spf}(B^\circ)$ sera un $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ -schéma formel projectif et affine, donc forcément fini.

Si w était une immersion ouverte stricte, on peut trouver un point fermé s de l'espace topologique sous-jacent à $Z//(\pi)$ qui ne soit pas dans l'image de w . Le point s est aussi un point fermé du schéma Z . Comme $Z[1/\pi]$ est dense dans Z , on peut trouver un point fermé x de $Z[1/\pi]$ tel que $\{x\}$ contient s . Le point x est alors forcément en dehors de l'image de $\mathrm{Spm}(B)$. Ceci est une contradiction avec le fait que $\mathcal{Y}_\eta \simeq (Z//(\pi))_\eta \simeq \mathcal{X}_\eta$.

Passons à la seconde partie de l'énoncé. Soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement Zariski de \mathcal{X} et supposons que $\mathcal{V}_i = \mathcal{Y} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{U}_i$ est moins fin qu'un éclatement admissible de \mathcal{U}_i de centre un idéal ouvert $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$ de type fini. Par [21, 6.9.7], on peut construire des idéaux quasi-cohérents $\mathcal{J}_i \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ de type fini et ouverts tels que $\mathcal{J}_i = (\mathcal{I}_i)|_{\mathcal{U}_i}$. Il suffit alors d'éclater successivement les idéaux \mathcal{J}_i pour obtenir un modèle plus fin que \mathcal{Y} . Ceci montre que la seconde partie de l'énoncé est également locale. On peut donc supposer que $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A^\circ)$ et $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}(B^\circ)$ avec B° une A° -algèbre finie. Soient $b_1, \dots, b_n \in B^\circ$ des générateurs de la A° -algèbre B° . Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^N b_i$ est l'image d'un élément $a_i \in A^\circ$. L'idéal $(a_1, \dots, a_n, \pi^N) \subset A^\circ$ est alors admissible et son éclaté est isomorphe à B° . Ceci achève la preuve du lemme. C.Q.F.D.

On en déduit immédiatement que tout morphisme de modèles essentiels est propre et surjectif.

Corollaire 1.1.29. — *Soient $X = \mathrm{Spm}(A)$ un k -affinoïde et U un domaine de X . Pour tout modèle \mathcal{U}_0 de U , il existe un modèle \mathcal{X} de X et un ouvert Zariski $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ tel que $\mathcal{U}_\eta \simeq U$ et \mathcal{U} plus fin que \mathcal{U}_0 .*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où $U = \mathrm{Spm}(B)$ est un domaine rationnel. On fixe une norme résiduelle sur A . On suppose que $B = A\langle f_1 | f_2, \dots, f_n \rangle$ avec $f_i \in A^\circ$ engendrant A comme idéal. Notons \mathcal{X}_1 l'éclaté de $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ en l'idéal $(f_1, \dots, f_n) \subset A^\circ$. Le domaine rationnel U est la fibre générique de l'ouvert standard $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{X}_1$ correspondant à f_1 .

Par la proposition 1.1.27, il suffit de considérer le cas où \mathcal{U}_0 est l'éclaté de $\mathrm{Spf}(B^\circ)$ en un idéal admissible $(g_1, \dots, g_n) \subset B^\circ$. Par [21, 6.9.7], il existe un idéal ouvert de type fini $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}$ tel que $\Gamma(\mathcal{U}_1, \mathcal{I}) = (g_1, \dots, g_n)$. Il suffit alors de prendre pour \mathcal{X} l'éclaté de \mathcal{I} . C.Q.F.D.

Théorème 1.1.30. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte et séparée.*

(i) *La catégorie $\mathrm{Mdl}(X)$ est cofiltrante (en particulier non vide).*

- (ii) Si $U \subset X$ est un ouvert quasi-compact et \mathcal{U}_0 un modèle de U , il existe un modèle $\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)$ et un ouvert Zariski $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ qui soit un modèle de U plus fin que \mathcal{U}_0 .

Démonstration. — Le théorème est vrai dans le cas où X est un k -affinoïde.

On suppose donné un recouvrement de X par deux ouverts quasi-compacts X_1 et X_2 avec $X_2 = \text{Spm}(A)$ un k -affinoïde. On suppose que l'énoncé du théorème est vrai pour X_1 . On va le déduire pour X .

Montrons d'abord que $\text{Mdl}(X)$ est non vide. La première assertion découlera alors du corollaire 1.1.26. Notons $U = X_1 \cap X_2$. On suppose donné un modèle \mathcal{X}_1 de X_1 ainsi qu'un ouvert Zariski $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{X}_1$ qui est un modèle de $U \subset X_1$. On munit A d'une norme résiduelle pour laquelle \mathcal{U}_1 est naturellement un A° -schéma formel. (On laisse au lecteur le soin de vérifier que ceci est bien possible.)

Par le corollaire 1.1.29, il existe un éclatement admissible \mathcal{X}_2 de centre $I \subset A^\circ$ et un ouvert \mathcal{U}_2 de \mathcal{X}_2 qui est un modèle de $U \subset X_2$ plus fin que \mathcal{U}_1 . Le morphisme $e : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1$ est alors l'éclatement de l'idéal $I \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1}$. Par [21, 6.9.7], il existe un idéal ouvert de type fini $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}_1}$ tel que $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1} = I \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1}$. Ainsi, quitte à remplacer \mathcal{X}_1 par l'éclaté de \mathcal{J} , on peut supposer que $\mathcal{U}_1 \simeq \mathcal{U}_2$. Le schéma formel obtenu en recollant \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 le long de l'isomorphisme $\mathcal{U}_1 \simeq \mathcal{U}_2$ est un modèle de X .

On montre la seconde assertion par la même méthode. Les détails sont laissés en exercice. Le théorème s'obtient alors par une récurrence facile sur le nombre de k -affinoïdes nécessaires pour couvrir X . C.Q.F.D.

Nous aurons besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.1.31. — Soient $\mathcal{S} = \text{Spf}(A^\circ)$ un k° -schéma formel et X un A° -schéma séparé et de présentation finie. Il existe une immersion ouverte canonique de $\mathcal{S}_\eta = \text{Spm}(A)$ -variétés rigides

$$(1.7) \quad (X//(\pi))_\eta \longrightarrow (X[1/\pi])^{\text{an}}$$

qui est un isomorphisme si et seulement si toute composante irréductible de X qui est plate sur k° est propre sur $\text{Spec}(A^\circ)$.

Démonstration. — L'hypothèse de séparation est probablement superflue. On construit d'abord l'immersion ouverte (1.7). Lorsque X est affine, cette flèche correspond au morphisme évident $\Gamma(X, \mathcal{O})[1/\pi] \rightarrow \Gamma(X//(\pi), \mathcal{O})[1/\pi]$. On utilise ici la définition de $(X[1/\pi])^{\text{an}}$ comme représentant du foncteur $h_{\text{an}}(X[1/\pi])$ (voir le lemme 1.1.19). Pour le cas général, on se donne un recouvrement $(X_i)_i$ de X par des ouverts affines. Les flèches $(X_i//(\pi))_\eta \rightarrow (X_i[1/\pi])^{\text{an}}$ se recollent suivant $((X_i \cap X_j)//(\pi))_\eta \rightarrow ((X_i \cap X_j)[1/\pi])^{\text{an}}$ modulo les identifications $((X_i \cap X_j)//(\pi))_\eta \simeq (X_i//(\pi))_\eta \cap (X_j//(\pi))_\eta$ et $((X_i \cap X_j)[1/\pi])^{\text{an}} \simeq (X_i[1/\pi])^{\text{an}} \cap (X_j[1/\pi])^{\text{an}}$.

Le fait que (1.7) est une immersion ouverte se vérifie localement. Il suffit alors de traiter le cas de $X = \mathbb{A}_{A^\circ}^1$ qui est trivial. Il reste à montrer le critère d'isomorphisme pour (1.7).

Supposons d'abord que les composantes plates de X sont propres sur $\mathrm{Spec}(A^\circ)$. Comme (1.7) est une immersion ouverte, il suffira de montrer qu'elle est surjective sur les points fermés. Soient l est une extension finie de k , et $x : \mathrm{Spm}(l) \rightarrow (X[1/\pi])^{\mathrm{an}}$ un point fermé. Ce point provient d'un morphisme de A -schémas $x : \mathrm{Spec}(l) \rightarrow (X[1/\pi])$. La composition de $\mathrm{Spec}(l) \rightarrow X \rightarrow \mathrm{Spec}(A^\circ)$ s'étend d'une manière unique en un morphisme $\mathrm{Spec}(l^\circ) \rightarrow \mathrm{Spec}(A^\circ)$. Par le critère valuatif de propriété appliqué à la composante irréductible de X contenant x , le point x s'étend en $x^\circ : \mathrm{Spec}(l^\circ) \rightarrow X$. On en déduit un morphisme de schémas formels $\mathrm{Spf}(l^\circ) \rightarrow X//(\pi)$ qui par passage à la fibre générique nous donne un point $x' : \mathrm{Spm}(l) \rightarrow (X//(\pi))_\eta$. Le lecteur vérifiera facilement que x' est envoyé sur x par (1.7). D'où le résultat.

Réciproquement, supposons que (1.7) soit inversible. On va prouver que les composantes k° -plates de X sont propres sur $\mathrm{Spec}(A^\circ)$. Par [32], on peut trouver une compactification $j : X \rightarrow \bar{X}$ avec X dense dans \bar{X} qui est propre sur $\mathrm{Spec}(A^\circ)$. Notons $Z = \bar{X} - X$. Il suffit de montrer qu'aucun point fermé de Z n'est dans l'adhérence des composantes plates de X . Supposons le contraire. Soit un point fermé x_0 dans $(\bar{X} - X)/k^\vee$ qui est dans l'adhérence d'une composante plate de X . Il existe donc un morphisme $x^\circ : \mathrm{Spec}(l^\circ) \rightarrow \bar{X}$ avec l une extension finie de k tel que :

- la fibre générique $x : \mathrm{Spec}(l) \rightarrow \bar{X}$ est contenue dans X ,
- la fibre spéciale $\mathrm{Spec}(\bar{l}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(l^\circ) \rightarrow \bar{X}$ coïncide avec x_0 . En particulier, elle n'est pas contenue dans X .

Le point x fournit alors un point fermé de $(X[1/\pi])^{\mathrm{an}}$ qui n'est pas dans l'image de (1.7). Ceci contredit l'hypothèse que (1.7) est un isomorphisme. C.Q.F.D.

1.1.5. Points en géométrie rigide. — Comme dans le paragraphe précédent, la valuation de k sera supposée non triviale et π désignera un élément non nul de k^\vee . Étant donné un k° -schéma formel \mathcal{X} , on notera \mathcal{X}_σ le \tilde{k} -schéma \mathcal{X}/k^\vee .

Les points fermés d'une k -variété rigide ne suffisent pas pour décrire les propriétés locales. Il est naturel d'introduire (suivant [18, Chapter 7]) la notion suivante.

Définition 1.1.32. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte et séparée. On pose $\mathcal{P}(X) = \mathrm{Lim}_{\mathcal{X} \in \mathrm{Mdl}(X)} \mathcal{X}_\sigma$ où la limite est prise dans la catégorie des espaces topologiques. On note $\mathrm{red} : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ l'application évidente. Les éléments de $\mathcal{P}(X)$ sont appelés les points rigides (ou simplement les points) de X .*

Étant donnés $p, q \in \mathcal{P}(X)$, on écrit $p \prec q$ si p appartient à l'adhérence $\overline{\{q\}}$ du point q . L'ensemble des points maximaux pour cette relation est noté $\mathcal{M}(X)$. Les éléments de $\mathcal{M}(X)$ seront appelés les points maximaux de $\mathcal{P}(X)$.

Lorsque U est un ouvert quasi-compact d'une k -variété rigide quasi-compacte et séparée X , le morphisme évident $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est l'inclusion d'un ouvert de $\mathcal{P}(X)$. Ceci est une conséquence directe du théorème 1.1.30. On peut alors définir par recollement un espace topologique $\mathcal{P}(X)$ pour toute k -variété rigide. Comme avant, on note

$\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ le sous-ensemble des points maximaux. Remarquons que si $Y \subset X$ est une sous-variété fermée, $\mathcal{P}(Y)$ est naturellement une partie fermée de $\mathcal{P}(X)$.

Proposition 1.1.33. — 1) *Si x est un point fermé de X , alors $\text{red}(x)$ est un point maximal de $\mathcal{P}(X)$.*

2) *Soient $Y \subset X$ une sous-variété fermée et $p \in \mathcal{P}(X)$. Si $p \notin \mathcal{P}(Y)$, alors $\overline{\{p\}} \cap \mathcal{P}(Y) = \emptyset$.*

3) *Un point $p \in \mathcal{P}(X)$ est contenu dans l'adhérence d'un unique point maximal $m(p)$. On obtient ainsi une application $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ qui est une rétraction à l'inclusion évidente.*

Démonstration. — Le premier point découle facilement du second. Soit $p \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\overline{\{p\}} \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$. Pour un modèle \mathcal{X} de X , on note $p_{\mathcal{X}}$ l'image de p dans \mathcal{X}_{σ} et $Z_{\mathcal{X}}$ son adhérence. On note aussi $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$ l'adhérence schématique de Y dans \mathcal{X} . On a donc $(\mathcal{Y}_{\mathcal{X}})_{\sigma} \cap Z_{\mathcal{X}} \neq \emptyset$ pour tout modèle \mathcal{X} . Si $p \notin \mathcal{P}(Y)$, il existe un modèle \mathcal{X} tel que l'inclusion $(\mathcal{Y}_{\mathcal{X}})_{\sigma} \cap Z_{\mathcal{X}} \subset Z_{\mathcal{X}}$ est stricte. Quitte à remplacer \mathcal{X} par un voisinage affine de $p_{\mathcal{X}}$, on peut se ramener au cas où $X = \text{Spm}(A)$ est un k -affinoïde et $\mathcal{X} = \text{Spf}(A^{\circ})$ un schéma formel affine (une norme résiduelle étant choisie sur A). On a dans $\text{Spec}(A^{\circ})$ deux sous-schémas fermés $Z_{\mathcal{X}}$ et $\text{Spec}(A^{\circ}/I)$ avec I l'idéal du sous-schéma formel $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}}$. Ce dernier étant essentiel, I est de type fini. Soit $J \subset A^{\circ}$ un idéal de type fini ayant $Z_{\mathcal{X}}$ pour lieu d'annulation. On peut supposer que J est ouvert de sorte que $I + J$ est le centre d'un éclatement admissible \mathcal{X}' de \mathcal{X} . Les transformés purs $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}'}$ et $Z'_{\mathcal{X}}$ dans \mathcal{X}' sont disjoints par le lemme 1.1.34 ci-dessous. Or $p_{\mathcal{X}'}$ est forcément le point générique de $Z'_{\mathcal{X}}$. Ceci est une contradiction.

La dernière partie se démontre de la même manière. Soient en effet deux points p_1 et p_2 de $\mathcal{P}(X)$ tels que $\overline{\{p_1\}} \cap \overline{\{p_2\}} \neq \emptyset$. Nous allons montrer que $p_1 \prec p_2$ ou $p_2 \prec p_1$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe un modèle \mathcal{X} de X tel que $(Z_1)_{\mathcal{X}} \cap (Z_2)_{\mathcal{X}}$ est un sous-schéma strict de $(Z_i)_{\mathcal{X}}$ pour $i \in \{1, 2\}$ (où l'on a noté $(Z_i)_{\mathcal{X}}$ l'adhérence Zariski de $(p_i)_{\mathcal{X}}$). On choisit un idéal ouvert et de type fini $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ ayant pour lieu d'annulation la partie fermée $(Z_i)_{\mathcal{X}}$. En éclatant l'idéal $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ on obtient (par le lemme 1.1.34 ci-dessous) un modèle \mathcal{X}' avec $(Z_1)_{\mathcal{X}'} \cap (Z_2)_{\mathcal{X}'} = \emptyset$. Ceci contredit l'hypothèse $\overline{\{p_1\}} \cap \overline{\{p_2\}} \neq \emptyset$. C.Q.F.D.

Lemme 1.1.34. — *Soient X un schéma et $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{O}_X$ deux idéaux quasi-cohérents de type fini. Soit X' l'éclaté de $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ dans X . On note*

$$\mathcal{I}'_i = (\mathcal{I}_i \cdot \mathcal{O}_{X'}) \cdot (\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'})^{-1}$$

le transformé faible de \mathcal{I}_i pour $i \in \{1, 2\}$. On a alors $\mathcal{I}'_1 + \mathcal{I}'_2 = \mathcal{O}_{X'}$. En particulier, les transformés purs des fermés X/\mathcal{I}_1 et X/\mathcal{I}_2 sont disjoints dans X' .

Soit X une k -variété rigide. Étant donné un point $p \in \mathcal{P}(X)$, on note $\text{Flt}(p)$ l'ensemble des ouverts admissibles U de X tel que $p \in \mathcal{P}(U)$. C'est un ensemble ordonné cofiltrant. De plus, le sous-ensemble $\text{Flt}'(p) \subset \text{Flt}(p)$ formé des ouverts affinoïdes est

cofinal. On pose $\mathcal{O}_{X,p} = \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(p)} \Gamma(U, \mathcal{O})$, $\mathcal{O}_{X,p}^\circ = \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(p)} \Gamma(U, \mathcal{O})^\circ$ et $\mathcal{O}_{X,p}^\vee = \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(p)} \Gamma(U, \mathcal{O})^\vee$ (voir la notation 1.1.13). L'anneau $\mathcal{O}_{X,p}$ possède une semi-norme définie par

$$(1.8) \quad \|f\|_p = \inf \{ |f'|_\infty; f' \in \Gamma(U, \mathcal{O}), U \in \text{Flt}(p) \text{ et } f = (\Gamma(U, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}_{X,p})(f') \}.$$

On note $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_{X,p}$ l'idéal des f avec $\|f\|_p = 0$. On a clairement $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_{X,p}^\vee \subset \mathcal{O}_{X,p}^\circ$. On a le résultat suivant (voir [18, Proposition 7.1.8]).

Proposition 1.1.35. — *L'anneau $\mathcal{O}_{X,p}$ est local hensélien d'idéal maximal \mathfrak{m}_p et la fonction $\|\cdot\|_p$ définit une valuation sur le corps résiduel $k(p) = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$. De plus, si $\widehat{k}(p)$ désigne le complété de $k(p)$ pour la valuation $\|\cdot\|_p$, alors $k(p)$ est séparablement clos dans $\widehat{k}(p)$.*

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties.

Partie A : Montrons que \mathfrak{m}_p est l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,p}$. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,p}$ et supposons que $\|f\|_p > 0$. On sait que $|f'|_\infty \geq \|f\|_p$ pour tout relèvement $f' \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ de f à $U \in \text{Flt}(p)$. Soit $\lambda \in |k|$ tel que $0 < \lambda < \|f\|_p$. On peut écrire U comme la réunion admissible de deux ouverts $D(f'|\lambda) \cup D(\lambda|f')$. Étant donné que la norme infinie de la restriction de f' à $D(\lambda|f')$ est strictement inférieure à $\|f\|_p$, on déduit que $D(\lambda|f') \notin \text{Flt}(p)$. On a donc forcément $D(f'|\lambda) \in \text{Flt}(p)$. Mais la restriction de f' à $D(f'|\lambda)$ est inversible. Ceci montre que f est inversible.

Pour voir que $\|\cdot\|_p$ définit une valuation sur $k(p)$ il suffit de montrer l'égalité $\|a\|_p \cdot \|a^{-1}\|_p = 1$ pour $a \in k(p) - \{0\}$. Soit $g \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ un relèvement de a à $U \in \text{Flt}(p)$. Soient λ_1 et λ_2 dans $\sqrt{|k^\times|}$ tels que $0 < \lambda_1 < \|a\|_p < \lambda_2$. Alors, $D(\lambda_1|g) \notin \text{Flt}(p)$ et $D(g|\lambda_2) \notin \text{Flt}(p)$. On a donc forcément $D(\lambda_2|g|\lambda_1) = D(\lambda_2|g) \cap D(g|\lambda_1) \in \text{Flt}(p)$. Mais $|g|_{D(\lambda_2|g|\lambda_1)}|_\infty \leq \lambda_2$ et $|g|_{D(\lambda_2|g|\lambda_1)}^{-1}|_\infty \leq \lambda_1^{-1}$. Ceci montre que $\|a\|_p \cdot \|a^{-1}\|_p \leq \lambda_2 \lambda_1^{-1}$. En faisant tendre λ_1 et λ_2 vers $\|a\|_p$, on obtient l'inégalité $\|a\|_p \cdot \|a^{-1}\|_p \leq 1$. Or, $\|a\|_p \cdot \|a^{-1}\|_p \geq \|1\|_p = 1$. D'où le résultat recherché.

Partie B : Dans cette partie on montre simultanément que $\mathcal{O}_{X,p}$ est hensélien et que $k(p)$ est séparablement clos dans $\widehat{k}(p)$. On peut pour cela supposer X réduit quitte à le remplacer par X_{red} . Soit $P \in \mathcal{O}_{X,p}[T]$ et $\bar{f} \in \widehat{k}(p)$ une racine séparable de la réduction $\bar{P} \in k(p)[T] \subset \widehat{k}(p)[T]$ de P . Il suffit de montrer que P admet une racine dans $\mathcal{O}_{X,p}$. On peut supposer que $\|\bar{f}\|_p < 1$ quitte à prendre $P(aT)$ à la place de $P(T)$ avec $a \in k^\times$ un scalaire bien choisi. Comme $\bar{P}'(\bar{f})$ est inversible, $\|\bar{P}'(\bar{f})\|_p > 0$. On fixe $\lambda \in |k^\times|$ tel que $0 < \lambda < \min(1, \|\bar{P}'(\bar{f})\|_p)$.

Le polynôme à deux variables $P(S+T) - P(S) - P'(S)T$ est divisible par T^2 puisqu'il admet une racine d'ordre 2 en $T=0$. Soit donc $R(S,T) \in \mathcal{O}_{X,p}[S,T]$ tel que

$$(1.9) \quad P(S+T) = P(S) + P'(S)T + R(S,T)T^2.$$

Soit $M \geq 1$ un réel qui majore strictement les normes des coefficients de $P(T)$ et $R(S,T)$. (Remarquons que cela entraîne que M majore strictement les normes des

coefficients de $\frac{\partial R}{\partial T}(S, T)$.) On fixe $f_0 \in \mathcal{O}_{X,p}$ tel que $\|f_0(p) - \bar{f}\|_p < \frac{\lambda^2}{2M^2}$. On déduit de la formule

$$P(f_0(p)) = P(\bar{f} + (f_0(p) - \bar{f})) = P'(\bar{f}) \cdot (f_0(p) - \bar{f}) + R(\bar{f}, (f_0(p) - \bar{f})) \cdot (f_0(p) - \bar{f})^2$$

que $\|P(f_0)\|_p < \frac{\lambda^2}{2M}$.

On peut trouver un ouvert affinoïde $U \in \text{Flt}(p)$ tel que f_0 , P et R se relèvent en \tilde{f}_0 , \tilde{P} et \tilde{R} dans $\Gamma(U, \mathcal{O})$, $\Gamma(U, \mathcal{O})[S]$ et $\Gamma(U, \mathcal{O})[S, T]$. Quitte à raffiner U , on peut supposer que :

- 1) $|\tilde{f}_0|_\infty \leq 1$,
- 2) $|\tilde{P}'(\tilde{f}_0)(x)| \geq \lambda$ pour tout $x \in U$,
- 3) les normes infinies des coefficients de \tilde{R} sont majorées par M ,
- 4) $|\tilde{P}(\tilde{f}_0)|_\infty \leq \frac{\lambda^2}{2M}$.

Quitte à raffiner U une deuxième fois (afin de se débarrasser des composantes irréductibles ne contenant pas p), on a également la relation

$$(1.10) \quad \tilde{P}(S + T) = \tilde{P}(S) + \tilde{P}'(S)T + \tilde{R}(S, T)T^2.$$

On considère alors la suite récurrente (de Newton) $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$(1.11) \quad \tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n - \frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}.$$

Notons qu'a priori, cette suite est à valeurs dans les fonctions méromorphes sur U puisque \tilde{f}_n peut avoir des pôles. Montrons par récurrence les trois propriétés suivantes :

- (i) $\tilde{f}_n \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ et $|\tilde{f}_n|_\infty \leq 1$,
- (ii) $|\tilde{P}'(\tilde{f}_n)(x)| \geq \lambda$ pour tout $x \in U$,
- (iii) $|\tilde{P}(\tilde{f}_n)|_\infty \leq \frac{\lambda^2}{2^{2^n} M}$.

Lorsque $n = 0$ les trois propriétés ci-dessus sont vraies. On suppose que ces propriétés sont prouvées pour n . Il vient que $\tilde{f}_{n+1} \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ puisque $\tilde{P}'(\tilde{f}_n)$ est inversible. Comme $|\tilde{P}'(\tilde{f}_n)(x)| \geq \lambda$ pour tout $x \in U$, on déduit que

$$(1.12) \quad \left| \frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)} \right|_\infty \leq \frac{\lambda}{2^{2^n} M}.$$

Ceci montre que $|\tilde{f}_{n+1}|_\infty \leq 1$. D'autre part, la formule (1.10) donne

$$(1.13) \quad \tilde{P}(\tilde{f}_{n+1}) = \tilde{P}\left(\tilde{f}_n - \frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right) = \tilde{R}\left(\tilde{f}_n, -\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right) \left(\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)^2.$$

En utilisant (1.12) et $|\tilde{f}_n|_\infty \leq 1$, on obtient la majoration $|\tilde{R}(\tilde{f}_n, -\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)})|_\infty \leq M$. Ceci donne bien

$$(1.14) \quad |\tilde{P}(\tilde{f}_{n+1})|_\infty \leq M \left(\frac{\lambda}{2^{2^n} M}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{2^{2^{n+1}} M}.$$

De la formule $\tilde{P}'(S+T) = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial T}(S+T)$, on déduit

$$(1.15) \quad \tilde{P}'(S+T) = \tilde{P}'(S) + 2\tilde{R}(S,T)T + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial T}(S,T)T^2.$$

En remplaçant S par \tilde{f}_n et T par $-\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}$ on obtient la formule

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \tilde{P}'(\tilde{f}_{n+1}) &= \tilde{P}'\left(\tilde{f}_n - \frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right) \\ &= \tilde{P}'(\tilde{f}_n) - 2\tilde{R}\left(\tilde{f}_n, -\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)\left(\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right) \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial T}\left(\tilde{f}_n, -\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)\left(\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)^2. \end{aligned}$$

On a les minoration

$$(1.17) \quad \left|2\tilde{R}\left(\tilde{f}_n, -\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)\left(\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)\right|_{\infty} \leq M \frac{\lambda}{2^{2^n} M} \leq \frac{\lambda}{2},$$

$$(1.18) \quad \left|\frac{\partial \tilde{R}}{\partial T}\left(\tilde{f}_n, -\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)\left(\frac{\tilde{P}(\tilde{f}_n)}{\tilde{P}'(\tilde{f}_n)}\right)^2\right|_{\infty} \leq M \left(\frac{\lambda}{2^{2^n} M}\right)^2 \leq \frac{\lambda}{2}.$$

On en déduit que $|\tilde{P}'(\tilde{f}_{n+1})|_{\infty} \geq \lambda$ ce qui boucle la récurrence.

Il est facile maintenant de construire le relèvement f recherché. En effet, on a $|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n|_{\infty} \leq \frac{\lambda}{2^{2^n} M}$. Comme $\Gamma(U, \mathcal{O})$ est complet, la suite (\tilde{f}_n) converge. Si \tilde{f} est la limite de cette suite, on a alors $|\tilde{P}(\tilde{f})|_{\infty} = 0$. Comme X a été supposé réduit, on a $\tilde{P}(\tilde{f}) = 0$. L'image f de \tilde{f} dans $\mathcal{O}_{X,p}$ est donc une racine de P . C.Q.F.D.

On a également le résultat suivant.

Lemme 1.1.36. — *Le sous-anneau $k^{\circ}(p) = \mathcal{O}_{X,p}^{\circ}/\mathfrak{m}_p$ de $k(p) = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$ est un anneau de valuation de $k(p)$. Si p est un point maximal, alors $k^{\circ}(p)$ coïncide avec l'anneau de valuation de la norme $\|\cdot\|_p$ définie par (1.8). Il est donc de hauteur 1 et son idéal maximal est $k^{\vee}(p) = \mathcal{O}_{X,p}^{\vee}/\mathfrak{m}_p$.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{O}_{X,p}$ et soit \bar{f} sa réduction dans $k(p)$. Il s'agit de montrer que $\bar{f} \in k^{\circ}(p)$ ou $\bar{f}^{-1} \in k^{\circ}(p)$. Si $\bar{f} \notin k^{\circ}(p)$, il est en particulier non nul, i.e., $\|\bar{f}\|_p > 0$. Il existe donc $U \in \text{Flt}(p)$ et un relèvement $\tilde{f} \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ de f qui est inversible dans $\Gamma(U, \mathcal{O})$. L'ouvert $D(1|\tilde{f})$ n'appartient pas à $\text{Flt}(p)$ car $\tilde{f} \in \Gamma(D(1|\tilde{f}), \mathcal{O}^{\circ})$ ce qui est incompatible avec la condition $\bar{f} \notin k^{\circ}(p)$. Ainsi, on a nécessairement $D(\tilde{f}|1) = D(1|\tilde{f}^{-1}) \in \text{Flt}(p)$. Puisque $\tilde{f}^{-1} \in \Gamma(D(1|\tilde{f}), \mathcal{O}^{\circ})$, il s'ensuit que $\bar{f}^{-1} \in k^{\circ}(p)$.

Soit $\mathfrak{q} \subset k^{\circ}(p)$ un idéal premier non nul. Pour tout modèle \mathcal{X} de X , on choisit un voisinage affine $\mathcal{U}_{\mathcal{X}} = \text{Spf}(A_{\mathcal{X}}^{\circ})$ de $p_{\mathcal{X}}$. (On rappelle que $p_{\mathcal{X}}$ est l'image de p dans \mathcal{X} .) On dispose d'un morphisme $A_{\mathcal{X}}^{\circ} \rightarrow \mathcal{O}_{X,p}^{\circ}$. L'image inverse de l'idéal \mathfrak{q} définit un point $q_{\mathcal{X}}$

dans $\text{Spec}(A_x^\circ)$ qui appartient à \mathcal{U}_x . On obtient ainsi un point $q = (qx)_{x \in \text{Mdl}(X)}$ de $\mathcal{P}(X)$.

Lorsque \mathfrak{q} est l'idéal maximal, on obtient le point p . De plus, si $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ alors $q_2 \prec q_1$ et $q_1 \neq q_2$. Ceci montre que $k^\circ(p)$ est de hauteur 1 si p est maximal, i.e., il y a un seul idéal premier non nul dans $k^\circ(p)$. Notons $R = \{f \in k(p); \|f\|_p \leq 1\}$ l'anneau de valuation de la norme $\|\cdot\|_p$. On a clairement $k^\circ(p) \subset R$. Comme $k^\circ(p)$ et R sont tous les deux des anneaux de valuation de hauteur 1, ils sont forcément égaux.

Supposant toujours que p est maximal, le fait que $k^\circ(p)$ est de hauteur 1 montre que l'idéal maximal de $k^\circ(p)$ est $\sqrt{k^\vee(p)}$ (puisque $k^\vee(p)$ est non nul). Mais par construction, $k^\circ(p)/k^\vee(p)$ est isomorphe à la colimite des algèbres réduites $\Gamma(U, \mathcal{O}^\circ)/\Gamma(U, \mathcal{O}^\vee)$ pour $U \in \text{Flt}(p)$. Elle est donc elle-même réduite. Ceci prouve que $\sqrt{k^\vee(p)} = k^\vee(p)$. Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Proposition 1.1.37. — *Soient X un k -affinoïde et $p \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal. Soient f_0, f_1, \dots, f_n des générateurs de $\Gamma(X, \mathcal{O})$ en tant qu'idéal. Alors, $p \in \mathcal{M}(D(f_0|f_1, \dots, f_n))$ si et seulement si $\|f_0\|_p \geq \|f_i\|_p$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Démonstration. — On suppose que $X = \text{Spm}(A)$ avec A une k -algèbre affinoïde munie d'une norme résiduelle. On peut supposer que $f_i \in A^\circ$. On note \mathcal{X} l'éclaté de $\text{Spf}(A^\circ)$ en l'idéal $(f_0, \dots, f_n) \subset A^\circ$. Dire que $p \in \mathcal{M}(D(f_0|f_1, \dots, f_n))$ revient à dire qu'il existe une factorisation du morphisme évident $A^\circ \rightarrow k^\circ(p)$:

$$\begin{array}{ccc} A^\circ & \xrightarrow{\hspace{10em}} & k^\circ(p) \\ \downarrow & \searrow & \\ A^\circ[t_1, \dots, t_n]/(f_0t_1 - f_1, \dots, f_0t_n - f_n) & & \end{array}$$

Notons $f_i(p)$ l'image de f_i dans $k(p)$. Une telle factorisation existe si et seulement si $f_0(p) \neq 0$ et $f_i(p)/f_0(p) \in k^\circ(p)$ pour $1 \leq i \leq n$. Par le lemme 1.1.36 et l'hypothèse que p est maximal, cela revient à dire que $\|f_0\|_p \geq \|f_i\|_p$ pour $1 \leq i \leq n$. (Remarquer que cette condition entraîne que $\|f_0\|_p \neq 0$.) C.Q.F.D.

Corollaire 1.1.38. — *Soient X une k -variété rigide, $U \subset X$ un ouvert quasi-compact et $p \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal. On suppose que $p \notin \mathcal{M}(U)$. Alors, il existe $V \in \text{Flt}(p)$ tel que $U \cap V = \emptyset$.*

Démonstration. — La question est locale en U et autour de p . On peut donc supposer que $X = \text{Spm}(A)$ est un k -affinoïde et $U = D(f_0|f_1, \dots, f_n)$ est un domaine rationnel associé à des générateurs f_0, f_1, \dots, f_n de A en tant qu'idéal. Par la proposition 1.1.37, la condition $p \notin \mathcal{M}(U)$ entraîne l'existence d'un $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $\|f_0\|_p < \|f_{i_0}\|_p$. Soient $\lambda, \lambda' \in \sqrt{|k^\times|}$ tels que $\|f_0\|_p < \lambda < \lambda' < \|f_{i_0}\|_p$. L'ouvert $V = D(\lambda|f_0) \cap D(f_{i_0}|\lambda')$ convient alors. C.Q.F.D.

Proposition 1.1.39. — *Pour $p \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal, l'anneau $\mathcal{O}_{X,p}^\circ$ est local hensélien d'idéal maximal $\mathcal{O}_{X,p}^\vee$. Si $\tilde{k}(p)$ désigne le corps résiduel de l'anneau de*

valuation $k^\circ(p)$, on a des isomorphismes naturels

$$\tilde{k}(p) = \mathcal{O}_{X,p}^\circ / \mathcal{O}_{X,p}^\vee \simeq \operatorname{Colim}_X \tilde{k}(p_X)$$

avec p_X l'image de p dans \mathcal{X}_σ pour $X \in \operatorname{Mdl}(X)$.

Démonstration. — L'anneau $\mathcal{O}_{X,p}^\circ$ est local d'idéal maximal $\mathcal{O}_{X,p}^\vee$. En effet, soit $f \in \mathcal{O}_{X,p}^\circ - \mathcal{O}_{X,p}^\vee$ et notons \bar{f} sa classe dans $k^\circ(p)$. Comme $f \notin \mathfrak{m}_p$, il admet un inverse f^{-1} dans $\mathcal{O}_{X,p}$. La classe \bar{f}^{-1} de f^{-1} dans $k(p)$ est l'inverse de \bar{f} . Étant donné que $\bar{f} \in k^\circ(p) - k^\vee(p)$, son inverse est dans $k^\circ(p)$ (on utilise ici le lemme 1.1.36). Ceci montre que $f^{-1} \in \mathcal{O}_{X,p}^\circ$ (on utilise ici que $\mathcal{O}_{X,p}^\circ$ est l'image inverse de $k^\circ(p) \subset k(p)$ par le morphisme $\mathcal{O}_{X,p} \twoheadrightarrow k(p)$).

Montrons maintenant que $\mathcal{O}_{X,p}^\circ$ est hensélien. Soit $P \in \mathcal{O}_{X,p}^\circ[T]$ un polynôme et \tilde{f} une racine simple de la réduction $\tilde{P} \in \tilde{k}(p)[T]$. Grâce au lemme 1.1.36, la maximalité de p entraîne que

$$\tilde{k}(p) = \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} \Gamma(U, \mathcal{O}^\circ) / \Gamma(U, \mathcal{O}^\vee).$$

On peut donc supposer que P est l'image d'un polynôme $Q \in \Gamma(U, \mathcal{O}^\circ)[T]$ et que la racine \tilde{f} provient d'une racine \tilde{g} de Q à valeurs $\Gamma(U, \mathcal{O}^\circ) / \Gamma(U, \mathcal{O}^\vee)$. Comme $(\Gamma(U, \mathcal{O}^\circ), \Gamma(U, \mathcal{O}^\vee))$ est un couple hensélien, du moins si l'ouvert U est affinoïde, on peut relever \tilde{g} en une racine $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}^\circ)$. L'image $f \in \mathcal{O}_{X,p}^\circ$ de g est bien une racine de P .

Il reste à montrer la dernière assertion. On peut pour cela supposer que X est un k -affinoïde réduit. Montrons que sous cette condition, les deux morphismes évidents

$$\begin{aligned} \operatorname{Colim}_{X \in \operatorname{Mdl}(X), p_X \in \mathcal{U} \subset X} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}) / \sqrt{(\pi)} &\xrightarrow{(1)} \operatorname{Colim}_{X \in \operatorname{Mdl}(X), p_X \in \mathcal{U} \subset X} \Gamma(\mathcal{U}_\eta, \mathcal{O})^\circ / \Gamma(\mathcal{U}_\eta, \mathcal{O})^\vee \\ &\xrightarrow{(2)} \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} \Gamma(U, \mathcal{O}^\circ) / \Gamma(U, \mathcal{O}^\vee) \end{aligned}$$

sont inversibles. Pour le morphisme (2), on remarque que le foncteur qui associe à un couple $(X, p_X \in \mathcal{U})$ l'ouvert admissible $\mathcal{U}_\eta \in \operatorname{Flt}(p)$ est cofinal par le théorème 1.1.30. Considérons maintenant le morphisme (1). Soit $\mathcal{U} \subset X$ un voisinage affine de p_X . La $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ -algèbre $\Gamma(\mathcal{U}_\eta, \mathcal{O})^\circ$ est entière et complète pour la topologie π -adique. Elle s'écrit donc comme une colimite filtrante de ses sous- $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ -algèbres topologiquement de type fini et essentielles. Il vient que $\Gamma(\mathcal{U}_\eta, \mathcal{O})^\circ \simeq \operatorname{Colim}_{X' \in \operatorname{Mdl}(X)/X} \Gamma(\mathcal{U} \widehat{\times}_X X', \mathcal{O})$ ce qui entraîne le résultat recherché.

Il est maintenant aisé de conclure. D'après la discussion précédente, on dispose d'un morphisme évident

$$\mathcal{O}_{X,p}^\circ / \mathcal{O}_{X,p}^\vee \simeq \operatorname{Colim}_{X \in \operatorname{Mdl}(X), p_X \in \mathcal{U} \subset X} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}) / \sqrt{(\pi)} \longrightarrow \operatorname{Colim}_{X \in \operatorname{Mdl}(X)} \tilde{k}(p_X),$$

qui est clairement surjectif. Or, d'après le lemme 1.1.36, le membre de gauche s'identifie à $\widehat{k}(p)$ qui est un corps. Puisque le membre de droite est non nul, le morphisme ci-dessus est un isomorphisme. C.Q.F.D.

On termine le paragraphe avec le résultat suivant.

Proposition 1.1.40. — *Soient $p \in \mathcal{P}(X)$ et $q = m(p)$ le point maximal tel que $p \prec q$. Alors, il existe une inclusion naturelle isométrique $k(p) \hookrightarrow k(q)$ induisant un isomorphisme $\widehat{k}(p) \simeq \widehat{k}(q)$.*

Démonstration. — Puisque $p \in \overline{\{q\}}$, on a l'implication $(U \in \text{Flt}(p)) \Rightarrow (U \in \text{Flt}(q))$. On dispose alors d'un morphisme canonique $\mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathcal{O}_{X,q}$ qui est contractant pour les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$. Ce morphisme est donc local et induit une inclusion sur les corps résiduels $k(p) \hookrightarrow k(q)$. Cette inclusion est encore contractante ce qui entraîne aussitôt qu'elle est isométrique.

Il reste à montrer que $k(p)$ est dense dans $k(q)$. Pour ce faire, on se donne $U \in \text{Flt}(q)$ et $g \in \Gamma(U, \mathcal{O})$. On peut supposer que $U = D(f_0|f_1, \dots, f_n)$ est un domaine rationnel. D'après la proposition 1.1.37, on a $\|f_0\|_q \geq \|f_i\|_q$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Soit $a \in k$, avec $|a| > 1$, et montrons que $D(af_0|f_1, \dots, f_n) \in \text{Flt}(p)$. En utilisant une deuxième fois la proposition 1.1.37, on trouve que $q \notin \mathcal{P}(D(f_i|af_0, f_1, \dots, f_n))$ pour $1 \leq i \leq n$. Étant donné que $p \in \overline{\{q\}}$, on a également $p \notin \mathcal{P}(D(f_i|af_0, f_1, \dots, f_n))$. Or, $D(af_0|f_1, \dots, f_n)$ et les $D(f_i|af_0, f_1, \dots, f_n)$, pour $1 \leq i \leq n$, recouvrent X . On a donc nécessairement $p \in \mathcal{P}(D(af_0|f_1, \dots, f_n))$ comme souhaité.

Il est maintenant aisé de conclure. En effet, le morphisme $\mathcal{O}(D(af_0|f_1, \dots, f_n)) \rightarrow \mathcal{O}(D(f_0|f_1, \dots, f_n))$ est d'image dense, ce qui entraîne que la classe de g dans $k(q)$ appartient à l'adhérence de $k(p)$ dans $k(q)$. C.Q.F.D.

1.1.6. Morphismes lisses et étales. — Sauf mention explicite du contraire, on ne supposera pas que la valuation de k est non triviale dans ce paragraphe.

Définition 1.1.41. — *Soient X une k -variété rigide et x un point fermé de X (ou plus généralement un point de $\mathcal{P}(X)$). On dit que X est régulière en x si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,p}$ est régulier. On dit que X est lisse en x si, pour toute extension finie $k \subset k'$, $X \widehat{\otimes}_k k'$ est régulière en tout point x' au-dessus de x .*

On dit que X est lisse (resp. régulière) si elle est lisse (resp. régulière) en tous ses points fermés. On note $\text{SmRig}/k \subset \text{VarRig}/k$ et $\text{SmAfd}/k \subset \text{Afd}/k$ les sous-catégories pleines des k -variétés rigides lisses.

Si $X = \text{Spm}(A)$ est un k -affinoïde régulier, alors l'anneau A est régulier au sens algébrique. En effet pour $x \in \text{Spm}(A)$, on a $\widehat{A}_x \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ (où l'on désigne par $\widehat{}$ le complété formel d'un anneau local \dagger en son idéal maximal).

Comme en géométrie algébrique, la notion de lissité est intimement liée à celle des différentielles. Étant donné un morphisme $f : Y \rightarrow X$ de k -variétés rigides, on note Ω_f le \mathcal{O}_Y -module cohérent $\mathcal{I}_\Delta/\mathcal{I}_\Delta^2$ avec \mathcal{I}_Δ l'idéal de l'immersion localement fermée

$\Delta : Y \rightarrow Y \widehat{\times}_X Y$. On dispose d'un morphisme de faisceaux abéliens $d : \mathcal{O}_Y \rightarrow \Omega_f$ qui est localement donné par $df = f \otimes 1 - 1 \otimes f$. Le morphisme d est une dérivation. Si $Y = X\{T_1, \dots, T_n\}$, alors Ω_f est un \mathcal{O}_Y -module libre ayant pour base (dT_1, \dots, dT_n) . Étant donné un triangle commutatif de k -variétés rigides

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s} & Y \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & X \end{array}$$

avec s une immersion fermée d'idéal \mathcal{I}_s et de faisceau normal $\mathcal{N}_s = \mathcal{I}_s/\mathcal{I}_s^2$, on dispose d'une suite exacte de faisceaux de \mathcal{O}_Z -modules

$$(1.19) \quad \mathcal{N}_s \longrightarrow s^*\Omega_f \longrightarrow \Omega_g \longrightarrow 0.$$

On a le théorème suivant.

Théorème 1.1.42. — *Soit $X = \mathrm{Spm}(A)$ un k -affinoïde de dimension d en un point fermé x de X . Soient $p : k\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow A$ une présentation de A et f_1, \dots, f_m une famille de générateurs de l'idéal $p^{-1}(0)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) X est lisse en x ,
- 2) $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/k} \otimes_A k(x)) = d$,
- 3) $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/k} \otimes_A k(x)) \leq d$,
- 4) $\mathrm{rang}_{k(x)}\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}(x)\right) = n - d$,
- 5) $\mathrm{rang}_{k(x)}\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}(x)\right) \geq n - d$.

Démonstration. — Notons $I = p^{-1}(0)$ de sorte que le faisceau normal de $\mathrm{Spm}(p)$ soit associé au A -module I/I^2 . On note \mathfrak{m}_x l'idéal maximal de $k\{T_1, \dots, T_n\}$ définissant le point x .

On peut bien sûr supposer que x est un point rationnel quitte à remplacer k par $k(x)$. Dans ce cas, X est lisse en x si et seulement si il est régulier en x ou encore si et seulement si l'image de l'application linéaire

$$(1.20) \quad I/I^2 \otimes_A k(x) \longrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$

est un sous $k(x)$ -espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à $n - d$ (en fait, forcément égale à $n - d$).

La suite exacte (1.19) appliquée aux immersions $x \subset \text{Spm}(A) \subset \text{Spm}(k\{T_1, \dots, T_n\})$ fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \cdot f_1 \oplus \dots \oplus A \cdot f_m & \xrightarrow{(\partial f_j / \partial T_i)_{i,j}} & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 I/I^2 & \longrightarrow & A \cdot dT_1 \oplus \dots \oplus A \cdot dT_n & \longrightarrow & \Omega_{A/k} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 & \xrightarrow{\sim} & k(x) \cdot dT_1 \oplus \dots \oplus k(x) \cdot dT_n & \longrightarrow & \Omega_{k(x)/k} = 0 & &
 \end{array}$$

Il vient que l'image de (1.20) est de dimension $\geq n - d$ si et seulement si la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_j}{\partial T_i}(x))_{ij}$ est de rang $\geq n - d$, ce qui est vrai si et seulement si la dimension de $\Omega_{A/k} \otimes_A k(x)$ est $\leq d$. C.Q.F.D.

On obtient alors les corollaires suivants.

Corollaire 1.1.43. — *Si la k -variété rigide X est lisse au point x , il existe un voisinage ouvert U de x qui est lisse (i.e., la lissité est une propriété ouverte).*

Démonstration. — En effet, comme X est régulier en x , il existe un voisinage affinoïde $U = \text{Spm}(A)$ de x avec A normal. En particulier, on peut supposer que X est partout de dimension d . Pour conclure, il suffit de remarquer que la propriété $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/k} \otimes x) \leq d$ est ouverte. C.Q.F.D.

Corollaire 1.1.44. — *Soit X une k -variété rigide partout de dimension d . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) X est lisse,
- 2) $\Omega_{X/k}$ est localement libre de dimension d .

Supposons que $X = \text{Spm}(A)$ est un k -affinoïde muni d'une présentation $p : k\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow A$ de noyau $p^{-1}(0) = (f_1, \dots, f_m)$. Alors, les deux conditions précédentes sont également équivalentes à :

- 3) la matrice jacobienne $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}$ est de rang $n - d$ dans A .

Démonstration. — On peut bien sûr supposer que $X = \text{Spm}(A)$ est un k -affinoïde. Si Ω_A est un module projectif de rang d , alors $\text{Spm}(A)$ est lisse en tous ses points fermés par le théorème 1.1.42. Toujours par le théorème 1.1.42, la matrice jacobienne $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}$ est de rang $n - d$. Enfin, si l'on suppose que la matrice jacobienne est de rang $n - d$, son image est alors un module projectif de dimension $n - d$ et son conoyau est projectif de dimension d . Par le diagramme de la preuve du théorème 1.1.42, ce conoyau est canoniquement isomorphe à $\Omega_{A/k}$. C.Q.F.D.

Corollaire 1.1.45. — *Soit $s : Y \rightarrow X$ une immersion fermée entre deux k -variétés rigides lisses. On a alors une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_s \longrightarrow s^* \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k} \longrightarrow 0.$$

En particulier, \mathcal{N}_s est localement libre et la suite exacte est localement scindée.

Démonstration. — On peut supposer que $Y = \mathrm{Spm}(B)$ et $X = \mathrm{Spm}(A)$ sont des k -affinoïdes lisses de dimensions pures d_Y et d_X . L'immersion s est alors donnée par un morphisme surjectif $e : A \twoheadrightarrow B$. Notons I le noyau de e . On a une suite exacte

$$I/I^2 \xrightarrow{\theta} \Omega_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/k} \longrightarrow 0.$$

Il s'agit de montrer l'exactitude à gauche pour cette suite. Il existe un recouvrement admissible $(X_i = \mathrm{Spm}(A_i))_i$ de X tel que $\ker(\Omega_{A_i/k} \otimes_{A_i} B_i \rightarrow \Omega_{B_i/k})$ est libre (avec $B_i = B \widehat{\otimes}_A A_i$). On peut donc supposer dans la suite que $\ker(\Omega_{A/k} \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k})$ est libre de base (a_1, \dots, a_r) avec $r = d_X - d_Y$. Soient $f_1, \dots, f_r \in I$ tels que $\theta(f_i) = a_i$ et notons I_1 l'idéal (f_1, \dots, f_r) . Il suffira de montrer que $I_1 = I$ au voisinage de Y .

Notons $B_1 = A/I_1$ et $Y_1 = \mathrm{Spm}(B_1)$. On a un morphisme surjectif $B_1 \twoheadrightarrow B$ induisant une immersion fermée $Y \hookrightarrow Y_1$. La suite exacte

$$I_1/I_1^2 \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A B_1 \longrightarrow \Omega_{B_1/k} \longrightarrow 0$$

montre que $\Omega_{B_1/k} \otimes_{B_1} B \simeq \Omega_{B/k}$. Ainsi, en tout point fermé $y \in Y$, la k -variété rigide Y_1 est lisse puisque $\dim_y(Y_1) \geq \dim_y(Y) \geq \dim_{k(y)}(\Omega_{Y/k} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y))$. Il vient aussi que Y_1 est de dimension d_Y en y . Ceci montre que l'inclusion $Y \hookrightarrow Y_1$ est un isomorphisme au voisinage de y . On a donc montré que Y_1 est une somme disjointe $Y_1 = Y \coprod Z$. Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D.

Il est utile de définir une version relative de la lissité. On commence par rappeler la notion de platitude.

Définition 1.1.46. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -variétés rigides. On dit que f est plat s'il est localement isomorphe à $\mathrm{Spm}(u)$ avec u un morphisme plat de k -algèbres affinoïdes.

On montre que f est plat si et seulement si pour tout point fermé $y \in Y$ le morphisme d'anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ (ou encore $\widehat{\mathcal{O}}_{X,f(y)} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$) est plat. On en déduit facilement que la platitude est stable par changement de base. Notons enfin que si $f : \mathrm{Spm}(B) \rightarrow \mathrm{Spm}(A)$ est un morphisme de k -affinoïdes, alors f est plat si et seulement si la A -algèbre B est plate.

Définition 1.1.47. — Un morphisme $f : Y \rightarrow X$ de k -variétés rigides est lisse s'il est plat et si pour tout $x \in X$, la fibre $f^{-1}(x)$ est lisse sur $k(x)$. On dit que f est étale si de plus les fibres de f sont de dimension nulle.

Si X est une k -variété rigide, on note $\mathrm{SmRig}/X \subset \mathrm{VarRig}/X$ la sous-catégorie pleine des X -variétés rigides lisses (i.e., des morphismes lisses de but X). On note aussi $\mathrm{Et}/X \subset \mathrm{SmRig}/X$ la sous-catégorie pleine des X -variétés rigides étales (i.e., des morphismes étales de but X).

On peut généraliser le corollaire 1.1.45 aux morphismes lisses.

Lemme 1.1.48. — 1) Soit f un morphisme lisse de k -variétés rigides. Le faisceau cohérent Ω_f est localement libre.

2) Soit un triangle commutatif de k -variétés rigides

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & T \end{array}$$

avec s une immersion fermée, et f et g des morphismes lisses. On a alors une suite exacte courte de \mathcal{O}_Y -modules

$$(1.21) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{N}_s \longrightarrow s^* \Omega_f \longrightarrow \Omega_g \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Pour la première partie du lemme, on peut supposer que f provient d'un morphisme de k -algèbres affinoïdes $A \rightarrow B$. On choisit une présentation $p : C = A\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow B$ de noyau I . On a une suite exacte de B -modules

$$(1.22) \quad I/I^2 \longrightarrow B \cdot dT_1 \oplus \dots \oplus B \cdot dT_n \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

Comme B est une algèbre plate, le morphisme $I \otimes_A k(x) \rightarrow C \otimes_A k(x)$ est injectif pour tout $x \in \text{Spm}(A)$. Il s'ensuit que le morphisme évident $I \otimes_A k(x) \rightarrow I(C \otimes_A k(x))$ est inversible. De plus, l'image de la composition de

$$I^2 \otimes_A k(x) \longrightarrow I \otimes_A k(x) \longrightarrow I(C \otimes_A k(x))$$

s'identifie à $I^2(C \otimes_A k(x))$. On a donc un isomorphisme naturel

$$(I/I^2) \otimes_A k(x) \xrightarrow{\sim} I(C \otimes_A k(x))/I^2(C \otimes_A k(x)).$$

Par ailleurs, le morphisme évident $\Omega_{B/A} \otimes_A k(x) \rightarrow \Omega_{B \otimes_A k(x)/k(x)}$ est inversible. Ainsi, si on applique $- \otimes_A k(x)$ à la suite (1.22), on obtient (à isomorphisme près) la suite

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow I(C \otimes_A k(x))/I^2(C \otimes_A k(x)) \\ &\longrightarrow (B \otimes_A k(x)) \cdot dT_1 \oplus \dots \oplus (B \otimes_A k(x)) \cdot dT_n \longrightarrow \Omega_{B \otimes_A k(x)/k(x)} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

qui est une suite exacte courte de modules localement libres par le corollaire 1.1.45. Autrement dit, pour tout $y \in \text{Spm}(B)$, la suite déduite de (1.22) par application de $- \otimes_B k(y)$ est une suite exacte courte.

Appelons maintenant $N = \ker((I/I^2) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n B \cdot dT_i)$ et $K = \text{coker}(N \rightarrow (I/I^2))$ de sorte qu'on a une suite exacte courte de B -modules

$$(1.23) \quad 0 \longrightarrow K \longrightarrow B \cdot dT_1 \oplus \dots \oplus B \cdot dT_n \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

Étant donné que $(I/I^2) \otimes_B k(y) \rightarrow K \otimes_B k(y)$ est surjectif, on voit que (1.23) est encore une suite exacte courte après application de $- \otimes_B k(y)$ pour tout $y \in \text{Spm}(B)$. Comme $\bigoplus_{i=1}^n B \cdot dT_i$ est libre, on déduit que $\text{Tor}_B^1(\Omega_{B/A}, k(y)) = 0$ pour tout point fermé y de $\text{Spec}(B)$. Comme $\Omega_{B/A}$ est de type fini, il est projectif.

Pour la seconde partie du lemme, on appelle \mathcal{E} le noyau de $\mathcal{N}_s \rightarrow s^*\Omega_f$ et $\mathcal{K} = \mathcal{N}_s/\mathcal{E}$. On a alors deux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow s^*\Omega_f \longrightarrow \Omega_g \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0.$$

De la discussion ci-dessus, on déduit que \mathcal{K} est localement libre et que $\mathcal{N}_s \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \simeq \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)$. Étant donné que $\text{Tor}_{\mathcal{O}_Y}^1(\mathcal{K}, k(y)) = 0$, on a forcément $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in Y$, on déduit que $\mathcal{E} = 0$. Le lemme est prouvé. C.Q.F.D.

On a le résultat suivant concernant les morphismes étales.

Théorème 1.1.49. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -variétés rigides. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est étale,
- (ii) f est plat et $\Omega_f = 0$,
- (iii) f est plat et $Y \rightarrow Y \widehat{\times}_X Y$ est une immersion ouverte,
- (iv) pour tout $y \in Y$, $V = \text{Spm}(B)$ un voisinage affinoïde de y et $U = \text{Spm}(A)$ un voisinage affinoïde de $f(V)$, la A -algèbre B est isomorphe à $A\{T_1, \dots, T_n\}/(f_1, \dots, f_n)$ avec $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}$ de rang n (i.e., inversible) dans B .

Démonstration. — Si f est étale, on a pour $x \in X$, $(\Omega_f) \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x) = \Omega_{f^{-1}(x)} = 0$. Ceci prouve que $\Omega_f = 0$. D'où l'implication (i) \Rightarrow (ii).

Montrons que (ii) \Rightarrow (iii). Si \mathcal{I}_Δ est l'idéal de l'inclusion $Y \hookrightarrow Y \widehat{\times}_X Y$ alors $\mathcal{I}_\Delta^2 = \mathcal{I}_\Delta$. Ainsi, en tout point $e \in Y \widehat{\times}_X Y$, l'idéal $\mathcal{I}_\Delta \otimes_{\mathcal{O}_{Y \widehat{\times}_X Y}} \mathcal{O}_{Y \widehat{\times}_X Y, e}$ est soit nul, soit égal à $\mathcal{O}_{Y \widehat{\times}_X Y, e}$. Le résultat est alors clair. L'implication (iii) \Rightarrow (ii) est immédiate.

Montrons que (iv) \Rightarrow (i). On peut supposer que $X = \text{Spm}(A)$ et $Y = \text{Spm}(B)$. Pour montrer que f est étale en y , il suffit de la faire après une extension finie de k . On peut donc supposer que $k(y) = k(x) = k$. Il suffira de montrer que le morphisme $\widehat{A}_x \rightarrow \widehat{B}_y$ est étale. On verra même que c'est un isomorphisme. On peut supposer que y est envoyée sur l'origine de $\text{Spm}(A\{T_1, \dots, T_n\})$ par $\text{Spm}(p)$. En d'autres termes, $f_i(0, \dots, 0) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. La \widehat{A}_x -algèbre \widehat{B}_y est donc donnée par $A[[T_1, \dots, T_n]]/(f_1, \dots, f_n)$. Il est alors clair que l'endomorphisme $T_i \rightsquigarrow f_i$ est un automorphisme de $A[[T_1, \dots, T_n]]$. D'où le résultat.

Pour finir, il reste à voir que (ii) \Rightarrow (iv). On se donne une présentation $p : A\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow B$ avec $I = p^{-1}(0)$. La suite exacte (voir le lemme 1.1.48)

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\theta} B \cdot dT_1 \oplus \dots \oplus B \cdot dT_n \longrightarrow \Omega_f \longrightarrow 0$$

montre que le morphisme θ est inversible. Soient des éléments $f_1, \dots, f_n \in I$ tels que $\theta(f_i) = dT_i$ et notons $I_1 = (f_1, \dots, f_n)$. Le morphisme $I_1/I_1^2 \rightarrow I/I^2$ est surjectif. Il vient que $I = I_1 + I^2$. Comme l'anneau $A\{T_1, \dots, T_n\}$ est noethérien, on a forcément

$I = I_1$ au voisinage de $\text{Spec}(B)$, i.e., il existe $g \in A\{T_1, \dots, T_n\}$ tel que l'image de g dans B est inversible et $I_g = (I_1)_g$. Quitte à multiplier g par un élément de $A\{T_1, \dots, T_n\}$, on peut supposer que l'image de g dans B est égale à 1. On considère la présentation $p' : A\{T_1, \dots, T_n, S\} \twoheadrightarrow B$ qui étend p et qui envoie S sur 1. Il est alors facile de voir que le noyau de p' est l'idéal $(f_1, \dots, f_n, gS - 1)$. De plus, l'image de $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n, gS-1)}{\partial(T_1, \dots, T_n, S)}$ dans B est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. C.Q.F.D.

Corollaire 1.1.50. — *Soit un triangle commutatif de k -variétés rigides*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & T. \end{array}$$

Si h et g sont étales, il en est de même de f .

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & X \\ \text{id} \times f \downarrow & (c) & \downarrow \Delta \\ Y \widehat{\times}_T X & \xrightarrow{\quad} & X \widehat{\times}_T X \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \text{pr}_2 \\ & & X \end{array}$$

où le carré (c) est cartésien. Par le théorème 1.1.49, Δ est une immersion ouverte. Il vient que $\text{id} \times f$ est également une immersion ouverte. Le résultat découle alors du fait que pr_2 est étale et que $f = \text{pr}_2 \circ (\text{id} \times f)$. C.Q.F.D.

Corollaire 1.1.51. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -variétés rigides. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) f est lisse.
- 2) *Il existe des recouvrements admissibles $(Y_i)_{i \in I}$ et $(X_i)_{i \in I}$ de Y et X tels que :*
 - $Y_i \subset f^{-1}(X_i)$,
 - le morphisme $f_i : Y_i \rightarrow X_i$ se factorise de la manière suivante :

$$Y_i \xrightarrow{e} \mathbb{B}_k^n \widehat{\times}_k X_i \xrightarrow{\text{pr}_2} X_i$$

avec e un morphisme étale.

Démonstration. — La seconde condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. On peut supposer que $X = \text{Spm}(A)$ et $Y = \text{Spm}(B)$ sont affinoïdes. Soit $p : A\{T_1, \dots, T_n\} \twoheadrightarrow B$ une présentation de B . On note $I = p^{-1}(0)$. On a la suite exacte courte de B -modules

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\alpha} B \cdot dT_1 \oplus \cdots \oplus B \cdot dT_n \rightarrow \Omega_f \longrightarrow 0.$$

Comme Ω_f est projectif, on déduit que I/I^2 est aussi projectif.

On peut trouver un recouvrement admissible $(Y_i = \text{Spm}(B_i))_i$ de Y par des domaines rationnels tels que pour chaque i , le sous-module

$$\alpha(I/I^2) \otimes_B B_i \subset B_i \cdot dT_1 \oplus \cdots \oplus B_i \cdot dT_n$$

soit libre et admet un supplémentaire librement engendré par une partie de $\{dT_1, \dots, dT_n\}$. Fixons l'indice i et supposons que cette partie est $\{dT_1, \dots, dT_r\}$ pour un certain $r \leq n$. Le morphisme

$$(B_i \cdot dT_1 \oplus \cdots \oplus B_i \cdot dT_r) \oplus ((I/I^2) \otimes_B B_i) \longrightarrow B_i \cdot dT_1 \oplus \cdots \oplus B_i \cdot dT_n$$

est donc inversible. Choisissons des éléments $f_{r+1}^i, \dots, f_n^i \in I$ engendrant librement $(I/I^2) \otimes_B B_i$. Soit enfin, $D_i = \text{Spm}(A\{T_1, \dots, T_n\} \langle h_0 | h_1, \dots, h_m \rangle)$ un domaine rationnel contenant Y_i comme une partie fermée. On obtient alors la présentation suivante de la A -algèbre B_i :

$$B_i \simeq \frac{A\{T_1, \dots, T_r\} \{T_{r+1}, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m\}}{(f_{r+1}^i, \dots, f_n^i, h_0 S_1 - h_1, \dots, h_0 S_m - h_m)}.$$

On vérifie facilement que la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(f_{r+1}^i, \dots, f_n^i, h_0 S_1 - h_1, \dots, h_0 S_m - h_m)}{\partial(T_{r+1}, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m)}$$

est bien inversible dans B_i . Ceci montre que B_i est une $A\{T_1, \dots, T_r\}$ -algèbre étale. Le corollaire est prouvé. C.Q.F.D.

On a le lemme important suivant.

Lemme 1.1.52. — *Soit $e : \text{Spm}(B) \rightarrow \text{Spm}(A)$ un morphisme étale de k -affinoïdes. On peut trouver une présentation*

$$A\{T_1, \dots, T_n\} / (P_1, \dots, P_n) \xrightarrow{\sim} B$$

avec $P_i \in A[T_1, \dots, T_n]$ des polynômes et $\frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}$ inversible dans B . De plus, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout n -uplet $(f_1, \dots, f_n) \in A\{T_1, \dots, T_n\}^n$ avec $|f_i - P_i| \leq \epsilon$, la A -algèbre $A\{T_1, \dots, T_n\} / (f_1, \dots, f_n)$ est isomorphe à B .

Démonstration. — Lorsque la valuation de k est triviale, il n'y a rien à montrer. On suppose donc que la valuation de k est non triviale et on fixe une norme de Banach sur A . La preuve du lemme est une application de la méthode d'approximation de Newton (voir aussi la preuve de la proposition 1.1.35). On commence par une discussion générale.

Étape 1 : Soit $C = A\{T_1, \dots, T_n\} / (f_1, \dots, f_n)$ une A -algèbre affinoïde. On notera $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ et $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$ (un deuxième système d'indéterminées) que l'on considère comme des vecteurs. On peut écrire

$$(1.24) \quad \mathbf{f}(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \mathbf{f}(\mathbf{T}) + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{T})](\mathbf{S}) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} S_i \cdot S_j \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{i,j}(\mathbf{T}, \mathbf{S}),$$

avec $J_{\mathbf{f}} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}$ la matrice jacobienne et $\mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{i,j}$ des vecteurs à coefficients de séries strictement convergentes, i.e., $\mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{i,j} \in A\{T_1, \dots, T_n, S_j, \dots, S_n\}^n$. Supposons que $J_{\mathbf{f}}$ soit inversible dans C (donc C est étale sur A). Ceci revient à dire qu'il existe des séries strictement convergentes $g, w_1, \dots, w_n \in k\{T_1, \dots, T_n\}$ telles que

$$(1.25) \quad \det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{T})) \cdot g(\mathbf{T}) = 1 + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{T}) \cdot w_i(\mathbf{T}).$$

Soient R une A -algèbre affinoïde réduite (que l'on munit d'une norme résiduelle arbitraire pour laquelle $A \rightarrow R$ est contractant) et $\mathbf{t}_0 = (t_{10}, \dots, t_{n0}) \in (R^\circ)^n$. On définit un système récurrent (de Newton) par la formule

$$(1.26) \quad \mathbf{t}_{r+1} = \mathbf{t}_r - [J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r)]^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{t}_r)).$$

On fixe un réel $M > 1$ tel que :

- 1) les normes de Gauss des séries strictement convergentes w_i sont inférieures ou égales à M ,
- 2) les normes de Gauss des coefficients des vecteurs $\mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{i,j}$ sont $\leq M$,
- 3) les normes de Gauss de g et des coefficients de la comatrice de $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{T})$ sont $\leq \sqrt{M}$.

Supposons que $|f_i(\mathbf{t}_0)| \leq \frac{1}{2M^3}$ (pour $1 \leq i \leq n$). Nous allons montrer par récurrence que :

- (i) \mathbf{t}_r est bien défini et $\mathbf{t}_r \in (R^\circ)^n$,
- (ii) $|f_i(\mathbf{t}_r)| \leq \frac{1}{2^{2^r} M^3}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Lorsque $r = 0$, ces conditions sont clairement vérifiées. Supposons qu'elles le sont encore pour un entier r . Comme $|w_i| \leq M$, on voit que $|w_i(\mathbf{t}_r) \cdot f_i(\mathbf{t}_r)| < 1$. Ainsi, $1 + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{t}_r) \cdot w_i(\mathbf{t}_r)$ est inversible dans R et la norme de son inverse est égale à 1. On déduit de (1.25) que $\det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r))$ est inversible et que la norme de son inverse est égale à la norme de g qui est majorée par \sqrt{M} . Ceci prouve que $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r)$ est inversible et que les normes des coefficients de $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r)^{-1}$ sont majorées par M . Il vient donc que

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r)^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{t}_r)) = (e_1(\mathbf{t}_r), \dots, e_n(\mathbf{t}_r)) = \mathbf{e}(\mathbf{t}_r)$$

est un vecteur dont tous les coefficients sont de normes inférieures ou égales à $\frac{1}{2^{2^r} M^2}$.

Ceci montre en particulier que \mathbf{t}_{r+1} est défini et qu'il est à coefficients dans R° .

Il reste à montrer l'inégalité dans (ii). Pour cela, on utilise (1.24) pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{t}_{r+1}) &= \mathbf{f}(\mathbf{t}_r - J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{t}_r)) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{t}_r) - J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r) J_{\mathbf{f}}(\mathbf{t}_r)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{t}_r) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} e_i(\mathbf{t}_r) e_j(\mathbf{t}_r) \mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{ij}(\mathbf{t}_r, -\mathbf{e}(\mathbf{t}_r)) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} e_i(\mathbf{t}_r) e_j(\mathbf{t}_r) \mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{ij}(\mathbf{t}_r, -\mathbf{e}(\mathbf{t}_r)). \end{aligned}$$

Ceci montre que les normes des coefficients de $\mathbf{f}(\mathbf{t}_{r+1})$ sont majorées par

$$\left(\frac{1}{2^{2^r} M^2}\right)^2 \cdot M = \frac{1}{2^{2^{r+1}} M^3}.$$

D'où le cas $r + 1$ de la récurrence.

On déduit donc que la suite $(\mathbf{t}_r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge vers un n -uplet $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in (R^\circ)^n$. Comme $|f_i(t_1, \dots, t_n)| = 0$, on déduit que $f_i(t_1, \dots, t_n) = 0$. On obtient ainsi un morphisme de A -algèbres $C \rightarrow R$ qui à T_i associe t_i .

Étape 2 : On garde les notations de l'étape précédente. Soient $\mathbf{f}' = (f'_1, \dots, f'_n) \in A\{T_1, \dots, T_n\}^n$ et notons $C' = A\{T_1, \dots, T_n\}/(f'_1, \dots, f'_n)$. On suppose que

$$(1.27) \quad |f_i - f'_i| \leq \frac{1}{2M^3}, \quad |\det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}}) - \det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'})| < \frac{1}{\sqrt{M}},$$

$$|\mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{i,j} - \mathbf{D}_{\mathbf{f}'}^{i,j}| < M \quad \text{et} \quad |\text{Com}(\mathbf{J}_{\mathbf{f}}) - \text{Com}(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'})| < \sqrt{M},$$

(où la norme d'une matrice ou d'un vecteur est le supremum des normes des coefficients). Nous allons montrer que les A -algèbres C et C' sont isomorphes.

Montrons d'abord que $\text{Spm}(C')$ est étale sur $\text{Spm}(A)$, i.e., que la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\mathbf{f}'}$ est inversible dans C' . Il suffit bien entendu de montrer que $g \cdot \det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'})$ est inversible dans C' . Étant donné que

$$|g \cdot \det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}}) - g \cdot \det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'})| < 1,$$

il suffira de montrer que $|g \cdot \det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}})(x')| = 1$ pour tout $x' \in \text{Spm}(C')$. Or, dans C' , on a

$$1 + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{T}) \cdot w_i(\mathbf{T}) = 1 + \sum_{i=1}^n (f_i - f'_i)(\mathbf{T}) \cdot w_i(\mathbf{T}) \pmod{(f'_1, \dots, f'_n)}.$$

Comme $|f_i - f'_i| < |w_i|^{-1}$, le résultat recherché s'ensuit.

Notons t'_{i0} la classe de T_i dans C' . On a

$$|f_i(t'_{10}, \dots, t'_{n0})| = |(f_i - f'_i)(t'_{10}, \dots, t'_{n0})| \leq |f_i - f'_i| \leq \frac{1}{2M^3}.$$

La suite récurrente de l'étape précédente fournit donc des éléments

$$t'_i \in A\{T_1, \dots, T_n\}/(f'_1, \dots, f'_n)$$

tels que $f_i(t'_1, \dots, t'_n) = 0$. Ceci fournit un morphisme surjectif de A -algèbres étales

$$(1.28) \quad C = \frac{A\{T_1, \dots, T_n\}}{(f_1, \dots, f_n)} \twoheadrightarrow C' = \frac{A\{T_1, \dots, T_n\}}{(f'_1, \dots, f'_n)}.$$

La surjectivité découle du fait que $|t'_i - t'_{i0}| < 1$.

Réciproquement, notons t_{i0} la classe de T_i dans C . On a encore

$$|f'_i(t_{10}, \dots, t_{n0})| = |(f'_i - f_i)(t_{10}, \dots, t_{n0})| \leq |f_i - f'_i| \leq \frac{1}{2M^3}.$$

Par l'étape précédente, le système

$$(1.29) \quad \mathbf{t}_{r+1} = \mathbf{t}_r - [\mathbf{J}_{\mathbf{f}'}(\mathbf{t}_r)^{-1}](\mathbf{f}'(\mathbf{t}_r))$$

converge vers une racine de l'équation $\mathbf{f}' = 0$. En effet, on a les mêmes bornes sur les normes de $\det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'})$, $\mathbf{D}_{\mathbf{f}'}^{i,j}$, $\text{Com}(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'})$. De plus, par la discussion du début de la seconde étape, on peut écrire

$$\det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'}) \cdot g \cdot (1 + \epsilon)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^n f'_i(\mathbf{T}) \cdot w_i(\mathbf{T})(1 + \epsilon)^{-1}$$

avec $|\epsilon| < 1$ (on a plus précisément $\epsilon = g \cdot \det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}'}) - g \cdot \det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}}) + \sum_i (f_i - f'_i) \cdot w_i$). On en déduit alors un morphisme surjectif

$$(1.30) \quad C' = \frac{A\{T_1, \dots, T_n\}}{(f'_1, \dots, f'_n)} \twoheadrightarrow C = \frac{A\{T_1, \dots, T_n\}}{(f_1, \dots, f_n)}.$$

Par le corollaire 1.1.50 le morphisme surjectif (1.28) identifie $\text{Spm}(C')$ à une composante connexe de $\text{Spm}(C)$. De même, le morphisme (1.30) identifie $\text{Spm}(C)$ à une composante connexe de $\text{Spm}(C')$. On en déduit que les compositions de

$$\text{Spm}(C) \longrightarrow \text{Spm}(C') \longrightarrow \text{Spm}(C) \quad \text{et} \quad \text{Spm}(C') \longrightarrow \text{Spm}(C) \longrightarrow \text{Spm}(C')$$

sont des isomorphismes. Il vient que C et C' sont isomorphes en tant que A -algèbres.

Étape 3 : Revenons à l'énoncé du lemme. On peut supposer que notre A -algèbre B est égale à C . Étant donné que $\det(\mathbf{J}_{\mathbf{f}})$, $\mathbf{D}_{\mathbf{f}}^{i,j}$ et $\text{Com}(\mathbf{J}_{\mathbf{f}})$ dépendent continûment de \mathbf{f} , il existe $\epsilon > 0$, tel que les conditions (1.27) sont vérifiées dès que $|\mathbf{f} - \mathbf{f}'| < \epsilon$. Le résultat découle alors du fait que l'on peut choisir de tels f'_i dans le sous-anneau dense $A[T_1, \dots, T_n] \subset A\{T_1, \dots, T_n\}$. C.Q.F.D.

On appliquera le lemme précédent pour établir quelques propriétés importantes des morphismes étales entre k -variétés rigides quasi-compactes (voir [18, Proposition 8.1.2]).

Proposition 1.1.53. — *On suppose que la valuation de k est non triviale. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale de k -variétés rigides.*

1) *Soit $q \in \mathcal{P}(Y)$ et notons $p \in \mathcal{P}(X)$ son image par f . Si q est un point maximal, le morphisme $\mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,q}$ est fini et étale. De plus, il existe un voisinage affinoïde $V \in \text{Flt}(q)$ qui est un revêtement étale (i.e., un morphisme fini et étale) sur un voisinage affinoïde $U \in \text{Flt}(p)$.*

2) *Il existe un recouvrement admissible $(X_i)_{i \in I}$ de X , des recouvrements admissibles $(Y_{ij})_{j \in J_i}$ de $Y_i = Y \widehat{\times}_X X_i$ ainsi que des triangles commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} Y_{ij} & \xrightarrow{u_{ij}} & \bar{Y}_{ij} \\ & \searrow & \downarrow \bar{f}_{ij} \\ & & X_i \end{array}$$

avec u_{ij} des immersions ouvertes et \bar{f}_{ij} des revêtements étales finis.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où $X = \text{Spm}(A)$ et $Y = \text{Spm}(B)$ avec $B = A\{T_1, \dots, T_n\}/(P_1, \dots, P_n)$ où P_i sont des polynômes et

$$\text{Jac}(P_1, \dots, P_n) = \det\left(\frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(T_1, \dots, T_n)}\right)$$

inversible dans B . Considérons la A -algèbre de type finie

$$E = A[T_1, \dots, T_n, U]/(P_1, \dots, P_n, \text{Jac}(P_1, \dots, P_n) \cdot U - 1).$$

C'est une A -algèbre étale. De plus, $\text{Spm}(B)$ est un ouvert admissible de $\text{Spec}(E)^{\text{an}}$. Il existe un recouvrement Zariski $(\text{Spec}(A_i))_i$ de $\text{Spec}(A)$ et des recouvrements Zariski $(\text{Spec}(E_{ij}))_j$ de $\text{Spec}(E_i) = \text{Spec}(E \times_A A_i)$ tels que E_{ij} est une A_i -algèbre étale élémentaire, i.e., de la forme $(A_i[T]/P_{ij}(T))[1/P'_{ij}(T) \cdot Q_{ij}(T)]$ avec P_{ij} un polynôme unitaire et Q_{ij} un polynôme quelconque. Quitte à remplacer X et Y par les ouverts admissibles de recouvrements admissibles, on peut donc supposer que $\text{Spm}(B)$ est un ouvert admissible de $\text{Spec}(E)^{\text{an}}$ avec $E = (A[T]/P(T))[1/P'(T)]$ une A -algèbre étale élémentaire (avec P unitaire). Notons alors $\bar{E} = A[T]/P(T)$. C'est une A -algèbre finie et donc une k -algèbre affinoïde. Il est clair que $\text{Spm}(B)$ est un domaine de $\bar{Y} = \text{Spm}(\bar{E})$. De plus, le lieu singulier de la A -variété rigide \bar{Y} est le fermé Z d'équation $P'(T) = 0$ qui est disjoint de $\text{Spm}(B)$.

Notons $\bar{f} : \text{Spm}(\bar{E}) = \bar{Y} \rightarrow \text{Spm}(A) = X$. Nous allons montrer les deux assertions suivantes.

- (i) Soient F une partie de $\mathcal{P}(X)$ et V un domaine de \bar{Y} tel que $\mathcal{P}(V)$ contient la partie $\bar{f}^{-1}(F)$. Il existe alors un domaine U de X tel que $F \subset \mathcal{P}(U)$ et $\bar{f}^{-1}(U) \subset V$.
- (ii) Soit $p \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal. Notons $\bar{f}^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$. Il existe des ouverts $V_i \in \text{Flt}(q_i)$ tels que $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Étant donné un modèle essentiel \mathcal{X} de X , on considère un modèle $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}}$ de \bar{Y} , fini et plat sur \mathcal{X} . Par le théorème de platisation de Raynaud-Gruson (voir [22]) et le fait que E est une A -algèbre libre, on peut choisir \mathcal{X} et $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}}$ aussi fins que l'on veut. On peut donc supposer que V est la fibre générique d'un ouvert Zariski \mathcal{V} du schéma formel $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}}$. Notons $F_{\mathcal{X}}$ l'image de F dans \mathcal{X}_{σ} . Alors, l'image de $\bar{f}^{-1}(F)$ dans $(\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}})_{\sigma}$ coïncide avec $(\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X})^{-1}(F_{\mathcal{X}})$. En effet, si $\mathcal{X}' \in \text{Mdl}(X)$ est un modèle essentiel et plus fin que \mathcal{X} , et $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}'}$ choisi plus fin que $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}}$, la platitude du \mathcal{X} -schéma formel $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}}$ entraîne que le morphisme $\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}'} \rightarrow \bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}} \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ est surjectif. Il s'ensuit que l'application $(\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}'} \rightarrow \mathcal{X}')^{-1}(p_{\mathcal{X}'}) \rightarrow (\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X})^{-1}(p_{\mathcal{X}})$ est surjective pour tout $p \in \mathcal{P}(X)$. Or, $\bar{f}^{-1}(p)$ est la limite projective des $(\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}'} \rightarrow \mathcal{X}')^{-1}(p_{\mathcal{X}'})$ ce qui entraîne la propriété recherchée. On déduit de ce qui précède que $(\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X})^{-1}(F_{\mathcal{X}}) \subset \mathcal{V}_{\sigma}$. L'image de $(\bar{\mathcal{Y}}_{\mathcal{X}})_{\sigma} - \mathcal{V}_{\sigma}$ par $\mathcal{Y}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ est un fermé T de \mathcal{X} disjoint de $F_{\mathcal{X}}$. L'ouvert $U = (\mathcal{X} - T)_{\eta}$ convient clairement pour (i). La propriété (ii) découle du corollaire 1.1.38 et du fait que les q_i sont maximaux.

Soit $p \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal. On déduit des propriétés (i) et (ii) des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\bar{Y},q_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\bar{Y},q_r} &\simeq \operatorname{Colim}_{V_1 \in \operatorname{Flt}(q_1), \dots, V_r \in \operatorname{Flt}(q_r)} \Gamma(V_1 \cup \cdots \cup V_r, \mathcal{O}) \\ &\simeq \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} \Gamma(U \widehat{\times}_X \bar{Y}, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}_{X,p} \otimes_A \bar{E}. \end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{O}_{\bar{Y},q_i}$ est une $\mathcal{O}_{X,p}$ -algèbre finie. Cette algèbre est étale si $q_i \in \mathcal{M}(\bar{Y} - Z)$ et en particulier si $q_i \in \mathcal{M}(Y)$. Ceci montre que pour tout $q \in \mathcal{M}(Y)$, il existe $V \in \operatorname{Flt}(q)$ et $U \in \operatorname{Flt}(f(q))$ tel que V est un revêtement étale de U . On a ainsi montré la première partie de l'énoncé.

Montrons la deuxième partie. Soit $p \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal et notons comme tout à l'heure $\{q_1, \dots, q_r\}$ la fibre de p . Par la proposition 1.1.33, si $q_i \in \mathcal{P}(\bar{Y} - Z)$ on a $\overline{\{q_i\}} \subset \mathcal{P}(\bar{Y} - Z)$. Il existe donc deux ouverts affinoïdes V_e et V_s de \bar{Y} tels que :

- 1) $V_e \cap V_s = \emptyset$, $V_s \cap Y = \emptyset$ et $V_e \cap Z = \emptyset$,
- 2) si $q_i \in \mathcal{P}(\bar{Y} - Z)$, alors V_e contient $\overline{\{q_i\}}$,
- 3) si $q_i \in \mathcal{P}(Z)$, alors V_s contient $\overline{\{q_i\}}$.

Par la discussion ci-dessus, on peut trouver un voisinage U de p dans X tel que $U \widehat{\times}_X \bar{Y}$ est contenu dans $V_e \cup V_s$. On a donc une décomposition en somme disjointe $U \widehat{\times}_X \bar{Y} = W_e \amalg W_s$ avec $W_e \subset V_e$ et $W_s \subset V_s$. Par construction, $U \times_X Y$ est un ouvert admissible de W_e . Comme $U \times_X \bar{Y}$ est fini sur U , on déduit que W_e est aussi fini sur U . De plus, il est étale. Pour conclure, il suffit d'utiliser le fait que $\mathcal{P}(X)$ est quasi-compact, i.e., si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de domaines de X telle que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(U_i) = \mathcal{P}(X)$, il existe une partie finie $I_0 \subset I$, telle que $\bigcup_{i \in I_0} \mathcal{P}(U_i) = \mathcal{P}(X)$. C.Q.F.D.

Remarque 1.1.54. — La preuve de la proposition 1.1.53 est inspirée de la preuve de [18, Proposition 8.1.2]. Toutefois, l'argument présenté ici est plus complexe puisque nous nous sommes efforcés d'éviter un point qui nous a paru obscur dans *loc. cit.* Il semble en effet qu'un « cercle vicieux » s'est introduit dans la preuve proposée dans [18] : la démonstration du point (1) de 8.1.2 utilise le lemme 8.1.3 qui lui repose implicitement sur le point (3) de 8.1.2 affirmant que l'image d'un domaine rationnel par un morphisme étale est une réunion de domaines rationnels. Malheureusement, la preuve de 8.1.2 (3) utilise 8.1.2 (1).

Remarque 1.1.55. — La proposition 1.1.53 affirme que si $f : Y \rightarrow X$ est étale et $y \in \mathcal{M}(Y)$, le morphisme $\mathcal{O}_{X,f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ est fini et étale. On peut se demander si la généralisation suivante est vraie. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -affinoïdes tel que pour tout $x \in X$, la fibre $f^{-1}(x) = Y \times_X x$ est finie. Comme en géométrie algébrique, on pourra appeler *quasi-fini* un tel morphisme. Soit $y \in \mathcal{M}(Y)$. Est-il vrai que le morphisme $\mathcal{O}_{X,f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ est fini ? Cette question semble liée à une hypothétique version rigide du théorème de Zariski affirmant qu'un morphisme quasi-fini de schémas peut se factoriser en une immersion ouverte suivie d'un morphisme fini.

Corollaire 1.1.56. — *On suppose que la valuation de k est non triviale. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale et séparé de k -variétés rigides quasi-compactes, et soit $Z \subset X$ une sous-variété rigide fermée. On suppose que $Y \widehat{\times}_X Z \rightarrow Z$ admet une section s . Il existe alors un voisinage ouvert quasi-compact $Z \subset U \subset X$ et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Y \\ & & & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{\quad} & U & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

(with arrows $s: Z \rightarrow Y$ and $t: U \rightarrow Y$ also shown)

Démonstration. — Soit U un ouvert connexe de X . Puisque f est étale et séparé, il existe au plus un X -morphisme $U \rightarrow Y$ qui étend le X -morphisme $s|_{U \cap Z} : U \cap Z \rightarrow Y$ dès que $U \cap Z \neq \emptyset$. Il suffit donc de construire t localement au voisinage de Z . Plus précisément, si $(X_i)_{i \in I}$ est un recouvrement admissible de X par des k -variétés rigides quasi-compactes, il suffit de traiter le cas des morphismes étales $Y \widehat{\times}_X X_i \rightarrow X_i$ et des fermés $Z \cap X_i \subset X_i$. De même, soit $(Y_j)_{j \in J}$ un recouvrement admissible de Y par des k -variétés rigides quasi-compactes. On pose $Z_j = s^{-1}(Y_j)$. On choisit un ouvert quasi-compact $X_j \subset X$ tel que $X_j \cap Z = Z_j$ et on note $Y'_j = Y_j \cap f^{-1}(X_j)$. Il suffit alors de prouver la conclusion du corollaire pour les morphismes étales $Y'_j \rightarrow X_j$ et $Z_j \rightarrow Y'_j$. Par la proposition 1.1.53, on peut donc supposer que X est un k -affinoïde et que Y est un ouvert quasi-compact d'un revêtement étale $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow X$. On peut même supposer que f est lui-même un revêtement étale. En effet, si on trouve un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \bar{Y} \\ & & & & \downarrow \bar{f} \\ Z & \xrightarrow{\quad} & \bar{U} & \xrightarrow{\quad} & X, \end{array}$$

(with arrows $\bar{s}: Z \rightarrow \bar{Y}$ and $\bar{t}: \bar{U} \rightarrow \bar{Y}$ also shown)

on peut prendre $U = \bar{t}^{-1}(Y)$ et $t = \bar{t}|_U$.

Il est maintenant aisé de démontrer le résultat recherché. En effet, posons $T = Y \widehat{\times}_X Z \subset Y$. La section s fournit une décomposition en somme disjointe $T = Z \coprod T'$. Soient V et W deux ouverts quasi-compactes de Y tels que $Z \subset V$, $T' \subset W$ et $V \cap W = \emptyset$. Pour construire de tels ouverts, on procède de la manière suivante. On fixe $Z \subset V$ tel que $V \cap T' = \emptyset$. Soient f_1, \dots, f_n des générateurs de l'idéal de définition du sous-affinoïde T' . Alors, les f_i ne s'annulent pas simultanément sur V . Comme V est quasi-compact, il existe $\epsilon \in |k^\times|$ tel que $\max_{i=1, \dots, n} (|f_i(v)|) > \epsilon$ pour tout point fermé v de V . Il suffit alors de prendre $W = \bigcap_{i=1}^n D_X(\epsilon |f_i)$.

Par la propriété (i) établie pendant la preuve de la proposition 1.1.53, il existe un ouvert quasi-compact U de X contenant Z et tel que $f^{-1}(U) \subset V$. On prendra un tel U avec la propriété supplémentaire que toutes ses composantes connexes rencontrent Z . On a donc une décomposition $f^{-1}(U) = E \coprod F$ avec $E = f^{-1}(U) \cap V$ et $F = f^{-1}(U) \cap W$. Alors, E est un revêtement étale de U . De plus, les fibres de E/U en $z \in Z$ sont des singletons. Il vient que E/U est partout de degré 1. Ceci entraîne que $E \simeq U$. C.Q.F.D.

Voici une deuxième application du lemme 1.1.52.

Proposition 1.1.57. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme lisse de k -variétés rigides. Il existe alors des recouvrements admissibles $(Y_i = \mathrm{Spm}(B_i))_i$ et $(X_i = \mathrm{Spm}(A_i))_i$ de Y et X avec $f(Y_i) \subset X_i$ ainsi que des modèles affines $\mathcal{Y}_i = \mathrm{Spf}(B_i^\circ) \rightarrow \mathcal{X}_i = \mathrm{Spf}(A_i^\circ)$ tels que B_i° est le complété formel (π -adique) d'une A_i° -algèbre de présentation finie.*

Démonstration. — On écarte le cas trivial où k est muni de sa valuation triviale. Par le corollaire 1.1.51, on peut supposer que notre morphisme est la composition de

$$Y = \mathrm{Spm}(B) \xrightarrow{e} \mathrm{Spm}(A\{T_1, \dots, T_r\}) \xrightarrow{p} \mathrm{Spm}(A) = X$$

avec e étale et p la projection canonique. La $A\{T_1, \dots, T_n\}$ -algèbre B admet une présentation

$$A\{T_1, \dots, T_n\}\{S_1, \dots, S_m\}/(f_1, \dots, f_m) \simeq B,$$

avec $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(S_1, \dots, S_m)}$ inversible dans B . Par le lemme 1.1.52 on peut choisir les f_i dans $A^\circ[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]$. Le complété formel (π -adique) de la A° -algèbre

$$A^\circ[T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]/(f_1, \dots, f_m)$$

convient alors.

C.Q.F.D.

On termine le paragraphe avec la proposition suivante laissée en exercice.

Proposition 1.1.58. — 1) *Soit $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme lisse (resp. étale) de k° -schémas formels. Alors, f_η est un morphisme lisse (resp. étale) de k -variétés rigides.*

2) *Soient A un k -affinoïde et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme lisse (resp. étale) de A -schémas de type fini. Alors, f^{an} est un morphisme lisse (resp. étale) de A -variétés rigides.*

Il est peut-être utile de rappeler qu'un morphisme de k° -schémas formels $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est lisse (resp. étale) s'il est plat et si f_σ est lisse (resp. étale). Un théorème de Grothendieck (voir [20, Théorème 18.1.2]) affirme que la catégorie Et/\mathcal{X} des \mathcal{X} -schémas formels étales est équivalente à la catégorie $\mathrm{Et}/\mathcal{X}_\sigma$ des \mathcal{X}_σ -schémas étales.

1.1.7. Modèles semi-stables. — Dans ce paragraphe nous supposons que la valuation de k est discrète (et donc non triviale). On fixe une uniformisante $\pi \in k^\vee$. Pour simplifier, on supposera que k est d'égale caractéristique nulle. On fait la définition suivante (voir aussi [3, Définition 3.3.33]).

Définition 1.1.59. — *Soient \mathcal{X} un k° -schéma formel de type fini et x un point de \mathcal{X} . On dit que \mathcal{X} est semi-stable (resp. globalement semi-stable) de type $(a_1, \dots, a_n) \in$*

$(\mathbb{N} - \{0\})^n$ en x s'il existe un voisinage Nisnevich⁽⁶⁾ (resp. Zariski) $x \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ de x tels que :

- 1) \mathcal{U} est affine, plat sur k° et l'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ est régulier,
- 2) il existe $n + 1$ sections $u, t_1, \dots, t_n \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ vérifiant :
 - a) u est inversible et $\pi = ut_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$,
 - b) pour tout $1 \leq i \leq n$, le diviseur D_i d'équation $t_i = 0$ est lisse sur \tilde{k} et contient x ,
 - c) la réunion des D_i est un diviseur à croisements normaux.

Les diviseurs D_i sont appelés les branches de \mathcal{X} passant par x et les entiers a_i leurs multiplicités. Si $(a_1, \dots, a_n) = (1, \dots, 1)$, on dit que \mathcal{X} est strictement semi-stable en x . On dit que \mathcal{X} est (strictement, globalement) semi-stable lorsqu'il est (strictement, globalement) semi-stable en tous ses points.

Remarque 1.1.60. — On garde les notations de la définition 1.1.59. Soit $d = \text{p.g.c.d.}(a_1, \dots, a_n)$. S'il existe $v \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ avec $v^d = u$, on peut alors choisir $u = 1$. En effet, on peut trouver $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $d = b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n$. On pose $t'_i = v^{-b_i} t_i$. On a alors $ut_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} = t_1'^{a_1} \cdots t_n'^{a_n} = \pi$.

Notation 1.1.61. — Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet d'entiers. Si X (resp. \mathcal{X}) est un k° -schéma (resp. k° -schéma formel) et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ (resp. $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O})$) on pose

$$(1.31) \quad \text{St}_{X, \underline{a}}^f = X[T_1, \dots, T_n]/(T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - f)$$

(resp. $\text{St}_{\mathcal{X}, \underline{a}}^f = \mathcal{X}\{T_1, \dots, T_n\}/(T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - f)$).

De même, si X est une k -variété rigide et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$, on pose

$$(1.32) \quad \text{St}_{X, \underline{a}}^f = X\{T_1, \dots, T_n\}/(T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - f).$$

Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on notera simplement $\text{St}_{\underline{a}}^f$ et $\text{St}_{\underline{a}}^f$.

Si \mathcal{X} est k° -schéma formel, on a un isomorphisme canonique de k -variétés rigides $[\text{St}_{\mathcal{X}, \underline{a}}^f]_\eta \simeq \text{St}_{\mathcal{X}, \underline{a}}^f$. De même, si X est un k° -schéma, on a un isomorphisme canonique de k° -schémas formels $[\text{St}_{X, \underline{a}}^f]//(\pi) \simeq \text{St}_{X//(\pi), \underline{a}}^f$.

Lorsqu'on prend $\mathcal{X} = \text{Spf}(k^\circ)$ et f l'uniformisante, le schéma formel $\text{St}_{\underline{a}}^\pi$ est globalement semi-stable (de type (a_1, \dots, a_n) au point o défini par les annulations $T_1 = \cdots = T_n = 0$). Plus généralement, si \mathcal{X} est lisse sur k° et $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O})^\times$ est inversible, le k° -schéma formel $\text{St}_{\mathcal{X}, \underline{a}}^{f^{-1}\pi}$ est globalement semi-stable. Le cas universel est celui où $\mathcal{X} = \text{Spf}(k^\circ\{U, U^{-1}\})$ et $f = U$. On notera alors simplement $\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi}$. Ces schémas formels sont importants en vue de la proposition suivante.

⁽⁶⁾ Précisions que la notion de « voisinage Nisnevich » d'un point x équivaut à celle de « voisinage étale » et sous-entend simplement que le morphisme de schémas formels $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ est étale. Voir aussi la définition 1.2.7 ci-dessous.

Proposition 1.1.62. — Soit \mathcal{X} un k° -schéma formel semi-stable (resp. globalement semi-stable) de type (a_1, \dots, a_n) en un point $x \in \mathcal{X}$.

1) Si les multiplicités a_i sont premiers entre eux (i.e., $\text{p.g.c.d.}(a_1, \dots, a_n) = 1$), on peut trouver un voisinage Nisnevich (resp. Zariski) \mathcal{U} de x et un morphisme lisse de k° -schémas formels $\mathcal{U} \rightarrow \text{St}_a^\pi$.

2) Dans le cas général, on peut trouver un voisinage Nisnevich (resp. Zariski) \mathcal{U} de $x[R, R^{-1}]$ dans $\mathcal{X}\{R, R^{-1}\}$ et un morphisme lisse de k° -schémas formels $\mathcal{U} \rightarrow \text{St}_a^{U^{-1}\pi}$.

Démonstration. — La preuve est celle de [3, Proposition 3.3.39] avec la simplification inhérente au fait qu'on travaille en égale caractéristique nulle. On fixe un isomorphisme $k \simeq \tilde{k}((\pi))$ ce qui nous permettra de considérer un k° -schéma comme un \tilde{k} -schéma.

Quitte à remplacer \mathcal{X} par un voisinage Zariski (resp. Nisnevich) de x , on peut supposer que $\mathcal{X} = \text{Spm}(A^\circ)$ avec A° une k° -algèbre régulière topologiquement de type finie et qu'il existe $n + 1$ sections $u, t_1, \dots, t_n \in A^\circ$ comme dans la définition 1.1.59.

Lorsque $\text{p.g.c.d.}(a_1, \dots, a_n) = 1$, on peut supposer que $u = 1$ (par la remarque 1.1.60). Dans ce cas, on a un morphisme évident de k° -algèbres topologiques $k^\circ\{T_1, \dots, T_n\}/(T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - \pi) \rightarrow A^\circ$ qui envoie l'indéterminée T_i sur t_i . Il suffit alors de montrer que le morphisme $f : \mathcal{X} \rightarrow \text{St}_a^\pi$ ainsi obtenu est lisse au voisinage de x . La fibre de f en $o = (0, \dots, 0) \in \text{St}_a^\pi$ est donnée par $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Elle est donc égale à l'intersection des branches, ce qui montre qu'elle est lisse. Pour conclure, il reste à voir que f est plat en x . On montrera pour cela que le morphisme induit sur les complétés

$$(1.33) \quad (k^\circ\{T_1, \dots, T_n\}/(T_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - \pi)) // (T_1, \dots, T_n) \longrightarrow (A^\circ)_x // \mathfrak{m}_x$$

est plat. Comme A° est régulière, $(A^\circ)_x // \mathfrak{m}_x$ est isomorphe à l'anneau de séries formelles $\tilde{k}(x)[[z_1, \dots, z_r]]$. On peut de plus supposer que z_i est l'image de t_i pour $1 \leq i \leq n$. Le morphisme (1.33) s'identifie donc à

$$\tilde{k}[[T_1, \dots, T_n]] \longrightarrow \tilde{k}(x)[[z_1, \dots, z_r]], \quad T_i \rightsquigarrow z_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

La platitude de ce morphisme est claire.

On passe maintenant au cas général. On pose $u' = uR^{-a_1}$, $t'_1 = Rt_1$ et $t'_i = t_i$ pour $i \geq 2$. On a la relation $u't_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} = \pi$. Considérons le morphisme de k° -algèbres

$$k^\circ\{U, U^{-1}, T_1, \dots, T_n\}/(UT_1^{a_1} \cdots T_n^{a_n} - \pi) \longrightarrow A^\circ\{R, R^{-1}\}$$

qui envoie U sur u' et T_i sur t'_i . Montrons que le morphisme $f : \mathcal{X}\{R, R^{-1}\} \rightarrow \text{St}_a^{U^{-1}\pi}$, ainsi obtenu, est lisse au voisinage de $x[R, R^{-1}]$. Le changement de base de f suivant l'inclusion $o[U, U^{-1}] \hookrightarrow \text{St}_a^{U^{-1}\pi}$ est

$$(1.34) \quad \text{Spec}(A^\circ/(t_1, \dots, t_n)[R, R^{-1}]) \longrightarrow \text{Spec}(\tilde{k}[U, U^{-1}]), \quad U \rightsquigarrow uR^{-a_1}.$$

La \tilde{k} -algèbre $A^\circ/(t_1, \dots, t_n)$ est lisse puisqu'elle est égale à l'algèbre des fonctions sur l'intersection des branches de \mathcal{X} . Il vient que le morphisme (1.34) est lisse puisqu'il

est plat (car sans torsion) et qu'il admet pour fibre au-dessus de $v \in \tilde{k}^\times$ le revêtement étale $\text{Spec}((A^\circ/(t_1, \dots, t_n))[R]/(R^{a_1} - uv^{-1}))$ de $\text{Spec}(A^\circ/(t_1, \dots, t_n))$.

Pour terminer, il reste à voir que $f : \mathcal{X}\{R, R^{-1}\} \rightarrow \mathcal{S}t_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi}$ est plat au voisinage de $x[R, R^{-1}]$. Il suffit de considérer le morphisme induit sur les complétés

$$(1.35) \quad \begin{aligned} & (k^\circ\{U, U^{-1}, T_1, \dots, T_n\}/(UT_1^{a_1} \dots T_n^{a_n} - \pi)) // (T_1, \dots, T_n) \\ & \longrightarrow (A^\circ)_x\{R, R^{-1}\} // \mathfrak{m}_x. \end{aligned}$$

On peut identifier ce dernier au morphisme

$$\tilde{k}[[T_1, \dots, T_n]]\{U, U^{-1}\} \longrightarrow \tilde{k}(x)[[z_1, \dots, z_m]]\{R, R^{-1}\}$$

qui envoie U sur uR^{-a_1} , T_1 sur z_1R et T_i sur z_i pour $i \geq 2$. Il suffit donc de prouver que le morphisme horizontal dans le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{k}[[T_1]]\{U, U^{-1}\} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{k}(x)[[z_1]]\{R, R^{-1}\} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \tilde{k}[[T_1]] & \end{array}$$

est plat. Par le critère de platitude par fibres (voir [19, Théorème 11.3.10]), on est ramené à montrer que $\tilde{k}[U, U^{-1}] \rightarrow \tilde{k}(x)[R, R^{-1}]$ est plat. Ceci est clair. C.Q.F.D.

Le résultat suivant utilise la résolution des singularités de Hironaka [23] et plus précisément son extension aux schémas excellents de caractéristique nulle [42].

Proposition 1.1.63. — *Tout k -affinoïde lisse X admet un modèle globalement semi-stable.*

Démonstration. — On suppose que $X = \text{Spm}(A)$. On applique la résolution des singularités au schéma excellent de caractéristique nulle $\text{Spec}(A^\circ)$ (une norme résiduelle étant choisie sur A). On obtient alors un A° -schéma projectif $E \rightarrow \text{Spec}(A^\circ)$ avec E régulier et $E/(\pi)$ un diviseur à croisements normaux (non nécessairement réduit). Le complété formel $\mathcal{E} = E//(\pi)$ est alors un éclatement admissible de $\text{Spf}(A^\circ)$ puisque le lieu singulier de A° est contenu dans $\text{Spec}(A^\circ/\pi)$. Il vient que \mathcal{E} est un modèle globalement semi-stable de X . C.Q.F.D.

1.2. La topologie de Nisnevich en géométrie rigide

Conventions générales. — À partir de maintenant, tous les schémas, schémas formels et variétés rigides seront supposés séparés. Les schémas et schémas formels seront supposés quasi-compacts. On supposera également que les k -variétés rigides admettent un recouvrement admissible dénombrable par des ouverts affinoïdes; ceci est le cas des variétés analytiques rigides associées aux schémas séparés de type fini sur une k -algèbre affinoïde (voir le paragraphe 1.1.3). Enfin, dans ce travail, nous ne considérerons que des k° -schémas formels de type fini, i.e., localement de la forme $\text{Spf}(A)$ avec

A une k° -algèbre topologiquement de type fini (voir le début du paragraphe 1.1.4). Ainsi, même quand on ne le précise pas, par « k° -schéma formel » on entendra toujours k° -schéma formel de type fini. Par contre, certains k -schémas qui ne sont pas de type fini (comme le spectre d'une k -algèbre affinoïde) joueront un rôle important.

Dans cette section, on introduit l'analogie rigide de la topologie de Nisnevich [33]. Comme pour les motifs en géométrie algébrique, cette topologie semble la plus appropriée pour nos besoins.

1.2.1. Définition et propriétés basiques de la topologie de Nisnevich. — On fixe un corps valué complet k . Pour fixer les idées, on supposera que la valuation de k est non triviale bien que les résultats de ce paragraphe restent vrais lorsque la valuation de k est triviale. (Bien entendu, il faut alors adopter les conventions qui s'imposent : $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{P}(X)$ sont égaux à l'ensemble des points de X pour tout k -schéma de type fini X , le foncteur « fibre générique de Raynaud » est le foncteur identité, etc.) Toutefois, dans le cas de la valuation triviale, les résultats de ce paragraphe sont soit bien connus, soit tautologiques.

Définition 1.2.1. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale de k -variétés rigides. On dit que f vérifie la propriété de Nisnevich ponctuelle si pour toute extension (non nécessairement finie) de corps valués complets $k \subset K$, le morphisme $f \widehat{\otimes}_k K : Y \widehat{\otimes}_k K \rightarrow X \widehat{\otimes}_k K$ admet la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches $\emptyset \rightarrow \mathrm{Spm}(L)$ avec L une extension finie de K . En d'autres termes, pour tout point fermé $x \in X \widehat{\otimes}_k K$, il existe un point fermé $y \in Y \widehat{\otimes}_k K$ tel que $(f \widehat{\otimes}_k K)(y) = x$ et $K(x) \simeq K(y)$.*

Clairement, la propriété de Nisnevich ponctuelle est stable par changement de base suivant un morphisme $X' \rightarrow X$ ainsi que par changement du corps de base suivant une extension de corps valués complets l/k . On peut aussi reformuler la propriété de Nisnevich ponctuelle à l'aide des points maximaux (voir la définition 1.1.32). On note d'abord le lemme suivant.

Lemme 1.2.2. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale de k -variétés rigides. Soient $q \in \mathcal{M}(Y)$ un point maximal et $p = f(q)$ son image. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f induit un isomorphisme $k(p) \simeq k(q)$,
- (ii) f induit un isomorphisme $\widehat{k}(p) \simeq \widehat{k}(q)$.

Démonstration. — L'implication (i) \Rightarrow (ii) est claire. Il reste donc à voir l'implication (ii) \Rightarrow (i). Puisque f est étale, on sait grâce à la proposition 1.1.53 que $k(q)$ est une extension finie séparable de $k(p)$. Si $\widehat{k}(p) \simeq \widehat{k}(q)$, l'extension $k(q)/k(p)$ est contenue dans $\widehat{k}(p)/k(p)$. Or, d'après la proposition 1.1.35, $k(p)$ est séparablement clos dans $\widehat{k}(p)$. Ceci entraîne la trivialité de l'extension $k(q)/k(p)$. C.Q.F.D.

Corollaire 1.2.3. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale de k -variétés rigides. Alors f vérifie la propriété de Nisnevich ponctuelle si et seulement si pour tout point maximal $p \in \mathcal{M}(X)$ il existe $q \in f^{-1}(p)$ tel que $k(p) \simeq k(q)$.*

Démonstration. — Notons $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{M}(Y)$ les points de la fibre $f^{-1}(p)$. Remarquons que p détermine un point fermé (en fait rationnel) $p' \in X \widehat{\otimes}_k \widehat{k}(p)$ et que la fibre de $f \widehat{\otimes}_k \widehat{k}(p)$ en p' s'identifie canoniquement à un ensemble de points fermés q'_1, \dots, q'_n dont les corps résiduels sont naturellement isomorphes à $\widehat{k}(q_1), \dots, \widehat{k}(q_n)$. (On utilise ici que $k(p)$ est séparablement clos dans $\widehat{k}(p)$.) L'implication directe découle maintenant du lemme 1.2.2.

Réciproquement, étant donné une extension de corps valués complets $k \subset K$ et un point fermé $x \in X \widehat{\otimes}_k K$, on définit un point maximal $p_x \in \mathcal{M}(X)$ en prenant pour tout modèle \mathcal{X} de X , l'image de $\text{red}(x)$ par le morphisme évident $\mathcal{X} \widehat{\otimes}_{k^\circ} K^\circ \rightarrow \mathcal{X}$. Si $q \in \mathcal{M}(Y)$ est un point maximal dans la fibre en p_x tel que $k(p_x) = k(q)$, il induit un point fermé de $Y \widehat{\otimes}_k K$ au-dessus de x ayant $k(q) \otimes_{k(p_x)} K(x) \simeq K(x)$ pour corps résiduel. C.Q.F.D.

Remarque 1.2.4. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme étale de k -variétés rigides. Soit $q \in \mathcal{M}(Y)$ un point maximal tel que $k(p) \simeq k(q)$ avec $p = f(q)$. Le morphisme $\mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,q}$ est alors inversible puisqu'il est fini et étale (voir la remarque 1.1.55) et qu'il induit un isomorphisme sur les corps résiduels. Il existe donc des voisinages ouverts $V \in \text{Flt}(q)$ et $U \in \text{Flt}(p)$ tels que $f(V) = U$ et $f|_V : V \rightarrow U$ inversible. On en déduit de la proposition précédente que f vérifie la propriété de Nisnevich ponctuelle si et seulement si en tout point $p \in \mathcal{M}(X)$, il existe un ouvert $U \in \text{Flt}(p)$ et une section à f définie sur U :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow & \downarrow f \\ U & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Définition 1.2.5. — *Soit X une k -variété rigide. Une famille $\mathcal{R} = (Y_i \rightarrow X)_{i \in I}$ de morphismes étales de k -variétés rigides est appelée un recouvrement Nisnevich faible lorsque pour tout morphisme $U \rightarrow X$ avec U une k -variété rigide quasi-compacte, la famille $\mathcal{R} \widehat{\times}_X U = (Y_i \widehat{\times}_X U \rightarrow U)_{i \in I}$ se raffine par une famille finie $(V_j \rightarrow U)_{j \in J}$ de morphismes étales avec V_j des k -variétés rigides quasi-compactes et telle que $\coprod_j V_j \rightarrow U$ vérifie la propriété de Nisnevich ponctuelle.*

Un recouvrement ouvert admissible est clairement un recouvrement Nisnevich faible.

Proposition 1.2.6. — *Soient \mathcal{X} un k° -schéma formel de type fini et $\mathcal{R} = (u_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{X})_{i \in I}$ une famille de morphismes étales de k° -schémas formels. Supposons que la famille $\mathcal{R}_\sigma = ((u_i)_\sigma : (\mathcal{U}_i)_\sigma \rightarrow \mathcal{X}_\sigma)_{i \in I}$ est un recouvrement Nisnevich du \widetilde{k} -schéma \mathcal{X}_σ . Alors, la famille $\mathcal{R}_\eta = ((u_i)_\eta : (\mathcal{U}_i)_\eta \rightarrow \mathcal{X}_\eta)_{i \in I}$ est un recouvrement Nisnevich faible de la k -variété rigide \mathcal{X}_η .*

Démonstration. — On peut supposer que la famille est finie (puisque \mathcal{X}_σ est un \tilde{k} -schéma de type fini) et même réduite à un élément $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ (en prenant le coproduit des sources). Comme \mathcal{U}_η et \mathcal{X}_η sont quasi-compacts, il reste à vérifier la propriété de Nisnevich ponctuelle pour u_η . Soit $k \subset K$ une extension de corps valués complets. Le morphisme $u_\eta \widehat{\otimes}_k K : \mathcal{U}_\eta \widehat{\otimes}_k K \rightarrow \mathcal{X}_\eta \widehat{\otimes}_k K$ s'identifie canoniquement à la fibre générique du morphisme de K° -schémas formels $u \widehat{\otimes}_{k^\circ} K^\circ : \mathcal{U} \widehat{\otimes}_{k^\circ} K^\circ \rightarrow \mathcal{X} \widehat{\otimes}_{k^\circ} K^\circ$. La fibre spéciale $(u \widehat{\otimes}_{k^\circ} K^\circ)_\sigma$ s'identifie à $u_\sigma \otimes_{\tilde{k}} \tilde{K}$. Elle est donc encore un recouvrement Nisnevich de $(\mathcal{X} \widehat{\otimes}_{k^\circ} K^\circ)_\sigma$. Il vient que pour montrer que $u_\eta \widehat{\otimes}_k K$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes $\emptyset \rightarrow \mathrm{Spm}(L)$ avec L une extension finie de K , il suffit de considérer le cas de $k = K$.

Soit $x : \mathrm{Spm}(l) \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ un point fermé. C'est la fibre générique d'un morphisme de k° -schémas formels $x^\circ : \mathrm{Spf}(l^\circ) \rightarrow \mathcal{X}$. Il suffit donc de trouver un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{U} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(l^\circ) & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

ou encore une section de $a : \mathcal{U} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathrm{Spf}(l^\circ) \rightarrow \mathrm{Spf}(l^\circ)$. Étant donné que la catégorie des $\mathrm{Spf}(l^\circ)$ -schémas formels étales est équivalente à celle des $\mathrm{Spec}(\tilde{l})$ -schémas étales (voir [20, Théorème 18.1.2]), il suffit de trouver une section à $a_\sigma : \mathcal{U}_\sigma \times_{\mathcal{X}_\sigma} \mathrm{Spec}(\tilde{l}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\tilde{l})$. Ceci est possible puisque u_σ est un recouvrement Nisnevich. C.Q.F.D.

Il est donc utile de faire la définition suivante.

Définition 1.2.7. — Soient \mathcal{X} un k° -schéma formel de type fini et $\mathcal{R} = (u_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{X})_{i \in I}$ une famille de morphismes étales de k° -schémas formels. On dit que \mathcal{R} est un recouvrement Nisnevich si la famille \mathcal{R}_σ est un recouvrement Nisnevich du \tilde{k} -schéma \mathcal{X}_σ .

On vérifie facilement que la classe des recouvrements Nisnevich est une prétopologie sur SchF/k° , la catégorie des k° -schémas formels. Elle engendre la topologie de Nisnevich sur SchF/k° qu'on désigne par « Nis ».

Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Étant donné un modèle \mathcal{X} de X , on obtient des recouvrements Nisnevich faibles de X en prenant les fibres génériques de recouvrements Nisnevich de \mathcal{X} . On peut se demander si ces recouvrements de X , pour $\mathcal{X} \in \mathrm{Mdl}(X)$ variable, suffisent pour raffiner tout recouvrement Nisnevich faible de X . Malheureusement, nous ne connaissons pas la réponse à cette question. Or, dans la suite, nous aurons besoin de nous restreindre aux recouvrements Nisnevich faibles fournis par la proposition 1.2.6. Ainsi, nous sommes amenés à adopter dans ce travail une définition un peu artificielle de la topologie de Nisnevich en géométrie rigide ; c'est la suivante.

Définition 1.2.8. — Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Une famille de morphismes étales de k -variétés rigides $\mathcal{R} = (Y_i \rightarrow X)_{i \in I}$ est appelée un recouvrement Nisnevich s'il existe un modèle formel \mathcal{X} de X et un recouvrement Nisnevich $\mathcal{P} = (\mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{X})_{j \in J}$ tel que \mathcal{P}_η raffine \mathcal{R} .

Remarque 1.2.9. — On étend la définition 1.2.8 aux k -variétés rigides non nécessairement quasi-compactes de la manière usuelle. Une famille $\mathcal{R} = (Y_i \rightarrow X)_{i \in I}$ de morphismes étales de k -variétés rigides est donc appelée un *recouvrement Nisnevich* lorsque pour tout morphisme $U \rightarrow X$ avec U une k -variété rigide quasi-compacte, la famille $\mathcal{R} \widehat{\times}_X U = (Y_i \widehat{\times}_X U \rightarrow U)_{i \in I}$ est un recouvrement Nisnevich au sens de la définition 1.2.8.

Le résultat simple suivant est bien utile.

Théorème 1.2.10. — Soit X une k -variété rigide quasi-compacte et soit \mathcal{X} un modèle essentiel de X . Supposons donné un recouvrement Nisnevich $(f_i : Y_i \rightarrow X)_{i \in I}$. Alors, il existe un ouvert Zariski dense $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ et une section de $f : \coprod_{i \in I} Y_i \rightarrow X$ définie au-dessus de $U = \mathcal{U}_\eta$:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \coprod_{i \in I} Y_i \\
 & \nearrow & \downarrow f \\
 U & \longrightarrow & X.
 \end{array}$$

Démonstration. — On peut remplacer X par la fibre générique d'un ouvert dense de \mathcal{X} . Ainsi, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est de dimension pure d .

Quitte à raffiner le recouvrement Nisnevich de X , on peut supposer qu'il existe un modèle essentiel \mathcal{X}' plus fin que \mathcal{X} et un recouvrement Nisnevich $(g_i : \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{X}')_{i \in I}$ tel que $Y_i = (\mathcal{Y}_i)_\eta$ et $f_i = (g_i)_\eta$. Il existe alors un ouvert dense $\mathcal{U}' \subset \mathcal{X}'$ et un morphisme de \mathcal{X}' -schémas formels $\mathcal{U}' \rightarrow \coprod_{i \in I} \mathcal{Y}_i$. Notons $Z' = \mathcal{X}'_\sigma - \mathcal{U}'_\sigma$ qu'on munit de sa structure de sous-schéma réduit. Alors, Z' est un \tilde{k} -schéma de dimension plus petite ou égale à $d - 1$. Il en est donc de même de son image Z dans \mathcal{X}_σ . Ainsi, $\mathcal{U} = \mathcal{X} - Z$ est un ouvert dense et il convient puisque $\mathcal{U}_\eta \subset \mathcal{U}'_\eta$. C.Q.F.D.

Lemme 1.2.11. — La classe des recouvrements Nisnevich définit des prétopologies sur les catégories VarRig/k , Afd/k , SmRig/k , SmAfd/k , Et/X , etc. Les topologies engendrées sont appelées les topologies de Nisnevich. Elles seront désignées par « Nis ».

Démonstration. — Il s'agit d'une vérification standard qu'on laissera au lecteur. C.Q.F.D.

Étant donnée une k -variété rigide X , on notera $\text{Et}^{\text{qc}}/X \subset \text{Et}/X$ la sous-catégorie pleine formée des X -variétés étales qui sont quasi-compactes au-dessus de k (i.e., des morphismes étales de but X et de source quasi-compacte). De même, on note

$\text{VarRig}^{\text{qc}}/k \subset \text{VarRig}/k$, $\text{SmRig}^{\text{qc}}/k \subset \text{SmRig}/k$, etc. les sous-catégories pleines formées des k -variétés rigides quasi-compactes. Les morphismes de sites

$$\begin{aligned} (\text{Et}/X, \text{Nis}) &\rightarrow (\text{Et}^{\text{qc}}/X, \text{Nis}), & (\text{VarRig}/k, \text{Nis}) &\rightarrow (\text{VarRig}^{\text{qc}}/k, \text{Nis}) \\ & & \text{et } (\text{SmRig}/k, \text{Nis}) &\rightarrow (\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \text{Nis}) \end{aligned}$$

induisent des équivalences de topos.

Proposition 1.2.12. — *Soient X une k -variété rigide quasi-compacte et \mathcal{X} un modèle de X . On dispose d'un diagramme de morphismes de sites*

$$(\text{Et}/X, \text{Nis}) \xrightarrow{\eta} (\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis}) \xleftarrow{\sigma} (\text{Et}/\mathcal{X}_\sigma, \text{Nis}).$$

De plus, σ est une équivalence de catégories qui est continue ainsi que son quasi-inverse (et qui induit donc une équivalence de topos).

Démonstration. — Les foncteurs « fibre générique » et « fibre spéciale »

$$\text{Et}/\mathcal{X} \longrightarrow \text{Et}/\mathcal{X}_\eta \quad \text{et} \quad \text{Et}/\mathcal{X} \longrightarrow \text{Et}/\mathcal{X}_\sigma$$

commutent aux limites finies et préservent les recouvrements Nisnevich. Ils induisent donc des morphismes de sites. Le fait que σ est une équivalence de catégories découle immédiatement de [20, Théorème 18.1.2]. C.Q.F.D.

Considérons le site $\text{Lim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} (\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis})$, limite projective des sites $(\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis})$ suivant la catégorie cofiltrante $\text{Mdl}(X)$. La catégorie sous-jacente à ce site est la 2-colimite $\text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} \text{Et}/\mathcal{X}$. Ainsi, les objets sont des morphismes étales de schémas formels $(\mathcal{U}/\mathcal{X}) = (\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X})$ avec $\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)$ et les morphismes

$$\text{hom}((\mathcal{U}'/\mathcal{X}'), (\mathcal{U}/\mathcal{X})) = \text{Colim}_{\mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X} \wedge \mathcal{X}' \in \text{Mdl}(X)/\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}'} \text{hom}_{\mathcal{X}''}(\mathcal{U}' \widehat{\times}_{\mathcal{X}'} \mathcal{X}'', \mathcal{U} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'').$$

Le foncteur « fibre générique » définit un foncteur $\text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} \text{Et}/\mathcal{X} \rightarrow \text{Et}/X$. Ce foncteur est pleinement fidèle. En effet, soient \mathcal{U}/\mathcal{X} et $\mathcal{U}'/\mathcal{X}'$ deux objets de la catégorie $\text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} \text{Et}/\mathcal{X}$. Quitte à raffiner les modèles, on peut supposer que $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ et que \mathcal{X} est plat sur k° . L'application $\text{hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}', \mathcal{U}) \rightarrow \text{hom}_X(\mathcal{U}'_\eta, \mathcal{U}_\eta)$ est alors bijective si \mathcal{X} est suffisamment normal dans sa fibre générique. En effet, si $(\mathcal{U}'_i)_i$ désignent les composantes connexes de \mathcal{U}' , les éléments de $\text{hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ sont en bijection canonique avec les familles $(\mathcal{V}_i)_i$, où \mathcal{V}_i est une composante connexe de $\mathcal{U}'_i \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{U}$ qui s'envoie isomorphiquement sur \mathcal{U}'_i . Si \mathcal{X} est suffisamment normal dans sa fibre générique, cet ensemble s'identifie par passage à la fibre générique à l'ensemble des familles $(V_i)_i$, où V_i est une composante connexe de $U'_i \widehat{\times}_X U$ qui s'envoie isomorphiquement sur U'_i . Cet ensemble est en bijection canonique avec $\text{hom}_X(U', U)$. La pleine fidélité s'en déduit.

On note $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$ l'image essentielle du foncteur $\text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} \text{Et}/\mathcal{X} \rightarrow \text{Et}/X$. Les objets (U/X) de $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$ sont dit à *bonne réduction*. La topologie du site $\text{Lim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} (\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis})$ induit une topologie de Nisnevich, encore notée « Nis », sur $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$. On a la conséquence suivante de la définition 1.2.8.

Corollaire 1.2.13. — *Soit X une k -variété rigide. L'association :*

$$(U/X) \in \text{Ob}(\text{Et}^{\text{qc}}/X) \rightsquigarrow ((\text{Et}/U)_{\text{br}}, \text{Nis})$$

est une P -structure sur le site $(\text{Et}^{\text{qc}}/X, \text{Nis})$ au sens de [3, Définition 4.4.57]. De plus, le site $((\text{Et}/U)_{\text{br}}, \text{Nis})$ est canoniquement équivalent à $\text{Lim}_{\mathcal{U} \in \text{Mdl}(U)}(\text{Et}/\mathcal{U}, \text{Nis})$.

Démonstration. — La dernière assertion est mise pour mémoire. Soit U'/U un objet de $(\text{Et}/U)_{\text{br}}$. Il s'agit de raffiner tout recouvrement Nisnevich $V_i \rightarrow U'$ de k -variétés rigides par la fibre générique d'un recouvrement Nisnevich d'un modèle de U' . Ceci est possible par définition. C.Q.F.D.

On va utiliser le corollaire précédent pour décrire une famille conservative de points du topos $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X)$. On fait d'abord une définition.

Définition 1.2.14. — *Soient X une k -variété rigide et $y \in \mathcal{P}(Y)$ un point d'une X -variété rigide étale Y quasi-compacte (relativement à k). On note $\text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$ la catégorie dont les objets sont les couples (U, u) avec U dans $(\text{Et}/Y)_{\text{br}}$ et $u \in \mathcal{P}(U)$ au-dessus de y tel que $k^\circ(y) \rightarrow k^\circ(u)$ induit un isomorphisme $\tilde{k}(y) \simeq \tilde{k}(u)$ sur les corps résiduels. Étant donné un préfaisceau F sur Et/X , on pose*

$$(1.36) \quad f_{\text{Nis}, y}(F) = \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)} F(U).$$

La catégorie $\text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$ est cofiltrante et sa sous-catégorie pleine, dont les objets sont les couples (U, u) avec U connexes, est cofinale et équivalente à un ensemble ordonné. Ceci sera clair après la preuve de la proposition ci-dessous.

Proposition 1.2.15. — *Soit X une k -variété rigide. Le topos $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X)$ possède une famille conservative de points donnés par les $f_{\text{Nis}, y}$ avec $y \in \mathcal{P}(Y)$ des points dans des X -variétés rigides étales et quasi-compactes Y .*

Démonstration. — On peut supposer X quasi-compacte. Par le corollaire 1.2.13, il suffit de montrer que le topos $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}((\text{Et}/X)_{\text{br}})$ possède une famille conservative de points donnés par la formule (1.36) où F est un faisceau Nisnevich sur $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$ et $y \in \mathcal{P}(Y)$ des points dans des X -variétés rigides étales Y dans $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$. On divise la preuve en deux parties. Dans la première on démontre que $f_{\text{Nis}, y}$ est exact et qu'il définit donc un point. Dans la seconde, on montre que la famille de points ainsi obtenue est conservative.

Première partie : On sait que $((\text{Et}/X)_{\text{br}}, \text{Nis}) \simeq \text{Lim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)}(\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis})$. Pour \mathcal{X} un modèle formel de X , le topos $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis})$ possède une famille conservative de points indexée par les points $p \in \mathcal{Y}_\sigma$ pour \mathcal{Y} des \mathcal{X} -schémas formels étales. Au point p correspond le foncteur fibre

$$(1.37) \quad F \in \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis}) \rightsquigarrow (F)_p = \text{Colim}_{(\mathcal{U}, q) \in \mathcal{V}_{\mathcal{Y}}(p)} F(\mathcal{U}) = \text{Colim}_{p \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}} F(\mathcal{U})$$

où la colimite est prise selon la catégorie $\mathcal{V}_y(p)$ des voisinages Nisnevich de p dans \mathcal{Y} . Rappelons qu'un objet $(\mathcal{U}, q) \in \mathcal{V}_y(p)$ est un couple formé d'un \mathcal{Y} -schéma formel étale \mathcal{U} et d'un point $q \in \mathcal{U}_\sigma$ au-dessus de p tel que $\tilde{k}(p) \simeq \tilde{k}(q)$.

Soient Y une X -variété rigide dans $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$ et $y = (p_y)_{y \in \text{Mdl}(Y)} \in \mathcal{P}(Y)$. On pose

$$\mathcal{V}_Y(y) = \text{Colim}_{y \in \text{Mdl}(Y)} \mathcal{V}_y(p_y).$$

Les objets de $\mathcal{V}_Y(y)$ sont les couples $(\mathcal{U}/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}})$ avec \mathcal{Y} un modèle formel de Y , \mathcal{U} un \mathcal{Y} -schéma formel étale et $q_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}_\sigma$ un point au-dessus de p_y tel que $\tilde{k}(p_y) \simeq \tilde{k}(q_{\mathcal{U}})$. Étant donnés deux tels objets $(\mathcal{U}_1/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}_1})$ et $(\mathcal{U}_2/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}_2})$, on a

$$\begin{aligned} & \text{hom}_{\mathcal{V}_Y(y)}((\mathcal{U}_1/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}_1}), (\mathcal{U}_2/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}_2})) \\ &= \text{Colim}_{y \in \text{Mdl}(Y)/\mathcal{Y}_1 \wedge \mathcal{Y}_2} \text{hom}_{\mathcal{V}_y(p_y)}((\mathcal{U}_1 \widehat{\times}_{\mathcal{Y}_1} \mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}_1} \times_{p_{\mathcal{Y}_1}} p_y), (\mathcal{U}_2 \widehat{\times}_{\mathcal{Y}_2} \mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}_2} \times_{p_{\mathcal{Y}_2}} p_y)). \end{aligned}$$

La catégorie $\mathcal{V}_Y(y)$ est cofiltrante étant une colimite filtrante de catégories cofiltrantes. De plus, sa sous-catégorie pleine formée des couples $(\mathcal{U}/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}})$ avec \mathcal{U} connexe est cofinale et équivalente à un ensemble ordonné. On définit un foncteur

$$(1.38) \quad \begin{aligned} F &\in \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Colim}_{x \in \text{Mdl}(X)} (\text{Et}/\mathcal{X})) \\ &\rightsquigarrow F_y = \text{Colim}_{(\mathcal{U}/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{V}_Y(y)} F(\mathcal{U}) = \text{Colim}_{p_y \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}} F(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Montrons que (1.38) est un foncteur fibre, i.e., qu'il est exact. Il est clair que (1.38) commute aux limites finies. Montrons qu'il commute aux colimites. Remarquons pour cela que (1.38) garde un sens pour F un préfaisceau sur $\text{Colim}_{x \in \text{Mdl}(X)} (\text{Et}/\mathcal{X})$ et qu'il commute avec les colimites de préfaisceaux. Or, la colimite d'un système inductif de faisceaux est le faisceau associé à la colimite du même système inductif, calculée dans la catégorie des préfaisceaux. Il suffit donc de montrer que le morphisme évident $F_y \rightarrow (a_{\text{Nis}}(F))_y$ est inversible. Ceci découle de la construction du foncteur a_{Nis} et du fait que pour tout recouvrement Nisnevich $(\mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{Y})_{i \in I}$ avec $\mathcal{Y} \in \text{Mdl}(Y)$, il existe $i_0 \in I$, $q_{i_0} \in (\mathcal{Y}_{i_0})_\sigma$ au-dessus de p_y tel que $\tilde{k}(q_{i_0}) = \tilde{k}(p_y)$ (i.e., $(\mathcal{Y}_{i_0}/\mathcal{Y}, q_{i_0}) \in \mathcal{V}_Y(y)$).

On dispose d'un foncteur $\mathcal{V}_Y(y) \rightarrow \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$ qui à un couple $(\mathcal{U}/\mathcal{Y}, q_{\mathcal{U}})$ associe le couple (U, u) avec $U = \mathcal{U}_\eta$ et $u = (q_{\mathcal{U}} \times_{p_y} p_{y'})_{y' \in \text{Mdl}(Y)/y}$. L'existence d'un tel foncteur dépend du lemme 1.2.16 ci-dessous qui assure que le foncteur $\text{Mdl}(Y) \rightarrow \text{Mdl}(U)$, qui à un modèle \mathcal{Y}' de Y associe $\mathcal{Y}' \widehat{\times}_{\mathcal{Y}} \mathcal{U}$, est cofinal. Ce foncteur $\mathcal{V}_Y(y) \rightarrow \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$ est une équivalence de catégories. De plus, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_Y(y) & \longrightarrow & \text{Colim}_{x \in \text{Mdl}(X)} (\text{Et}/\mathcal{X}) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Flt}_{\text{Nis}}(y) & \longrightarrow & (\text{Et}/X)_{\text{br}} \end{array}$$

commute. Ci-dessus, les foncteurs horizontaux sont les foncteurs d'oubli des points. Ainsi, modulo l'équivalence de catégories $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}((\text{Et}/X)_{\text{br}}) \simeq \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Lim}_x \text{Et}/\mathcal{X})$,

le foncteur (1.38) correspond au foncteur $f_{\text{Nis},y}$. C'est donc un point du topos $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}((\text{Et}/X)_{\text{br}})$.

Deuxième partie : On vérifie ici que les $f_{\text{Nis},y}$ forment une famille conservative de points pour le site $((\text{Et}/X)_{\text{br}}, \text{Nis})$. Soit $f : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux tel que $f_{\text{Nis}}(f)$ est bijective pour tout point $y \in \mathcal{P}(Y)$ dans une X -variété rigide étale Y dans $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$. Il nous faut montrer que f est inversible.

Montrons d'abord que f est injectif. Soient $a_1, a_2 \in F(Y)$ tels que $f(a_1) = f(a_2)$. Pour $y \in \mathcal{P}(Y)$, les sections a_1 et a_2 sont identifiées dans $f_{\text{Nis},y}(F)$. Il existe donc $(U(y), u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$ tel que $(a_1)_{|U(y)} = (a_2)_{|U(y)}$. Or, par le lemme 1.2.17 ci-dessous, la famille $(U(y) \rightarrow Y)_{y \in \mathcal{P}(Y)}$ est un recouvrement Nisnevich. Comme F est un faisceau, on a $a_1 = a_2$.

Montrons que f est surjective (en tant que morphisme de préfaisceaux). Soit $b \in G(Y)$. Pour $y \in \mathcal{P}(Y)$, l'image de b dans $f_{\text{Nis},y}(G)$ possède un antécédent dans $f_{\text{Nis},y}(F)$. Il existe donc $(U(y), u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$ et $b_y \in F(U(y))$ tels que $f(b_y) = b_{|U(y)}$. Étant donné que f est injective, on a $(b_{y_1})_{|U(y_1) \cap U(y_2)} = (b_{y_2})_{|U(y_1) \cap U(y_2)}$ pour $(y_1, y_2) \in \mathcal{P}(Y)^2$. Par le lemme 1.2.17 ci-dessous, la famille $(U(y) \rightarrow Y)_{y \in \mathcal{P}(Y)}$ est un recouvrement Nisnevich. Comme F est un faisceau, il existe $b' \in F(Y)$ tel que $b'_{|U(y)} = b_y$. On a alors $f(b') = b$ puisque G est un faisceau et que cette égalité est vraie après restriction aux ouverts $U(y)$. La proposition est démontrée. C.Q.F.D.

Lemme 1.2.16. — *Soit \mathcal{X} un k° -schéma formel essentiel et soit \mathcal{Y} un \mathcal{X} -schéma formel étale.*

1) *Soit $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de \mathcal{X} -schémas formels. On suppose que \mathcal{Z} est plat sur \mathcal{X} . Alors, \mathcal{Z} est plat sur \mathcal{Y} . Si de plus u_η est inversible, alors u est aussi inversible.*

2) *Notons $X = \mathcal{X}_\eta$ et $Y = \mathcal{Y}_\eta$. Le foncteur $\text{Mdl}(X)/\mathcal{X} \rightarrow \text{Mdl}(Y)$, qui associe à $\mathcal{X}' \in \text{Mdl}(X)/\mathcal{X}$ le modèle $\mathcal{Y} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$, est cofinal.*

Démonstration. — La seconde assertion découle de la première en utilisant le théorème de platification de Raynaud-Gruson (voir [22]). On se concentre donc sur la première assertion. Le \mathcal{Y} -schéma $\mathcal{Y} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$ est plat. Comme \mathcal{Y}/\mathcal{X} est étale, l'immersion diagonale $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}$ est ouverte. Il vient que le morphisme $(u, \text{id}) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$ est aussi une immersion ouverte. En particulier, il est plat. Il suffit alors de remarquer que u est le morphisme composé $\text{pr}_1 \circ (u, \text{id})$ où pr_1 est la projection sur le premier facteur de $\mathcal{Y} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$.

Supposons maintenant que u_η est inversible. Par le lemme 1.1.28, on sait que u est fini. Étant donné qu'il est plat, on peut supposer que $\Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{O})$ est un $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O})$ -module libre. Puisque $\pi \in \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O})$ n'est pas un diviseur de zéro, ce module est forcément de rang 1. Le résultat est maintenant clair. C.Q.F.D.

Lemme 1.2.17. — *Soit Y une k -variété rigide quasi-compacte et considérons une famille $\mathcal{R} = (Y_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ de morphismes étales dans $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$. On suppose que pour*

tout $y \in \mathcal{P}(Y)$, il existe $i_0 \in I$ et $q_{i_0} \in \mathcal{P}(Y_{i_0})$ tels que $(Y_{i_0}, q_{i_0}) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$. Alors, \mathcal{R} est un recouvrement pour la topologie de Nisnevich.

Démonstration. — Pour un modèle formel \mathcal{Y} de Y , on note $\mathcal{W}_{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$ le plus gros ouvert Zariski tel que $\mathcal{R} \widehat{\times}_Y (\mathcal{W}_{\mathcal{Y}})_{\eta}$ est un recouvrement pour la topologie de Nisnevich. On note $Z_{\mathcal{Y}}$ le complémentaire de $\mathcal{W}_{\mathcal{Y}}$. Si \mathcal{Y}' est un modèle plus fin que \mathcal{Y} , le morphisme $Z_{\mathcal{Y}'} \rightarrow Z_{\mathcal{Y}}$ est surjectif. En effet, comme c'est un morphisme propre, son image est un fermé $T \subset Z_{\mathcal{Y}}$. Étant donné que $(\mathcal{Y} - T)_{\eta} \subset (\mathcal{Y}' - Z_{\mathcal{Y}'})_{\eta}$, on voit que $\mathcal{R} \widehat{\times}_Y (\mathcal{Y} - T)_{\eta}$ est un recouvrement Nisnevich. Par la maximalité de $\mathcal{W}_{\mathcal{Y}}$ on a forcément $T = Z_{\mathcal{Y}}$.

On suppose par l'absurde que les fermés $Z_{\mathcal{Y}}$ sont non vides. Notons $Z = \text{Lim}_{\mathcal{Y}} Z_{\mathcal{Y}}$; c'est un fermé non vide de $\mathcal{P}(Y)$. Soit $z \in Z$ un point dont l'image $z_{\mathcal{Y}}$ dans \mathcal{Y}_{σ} est un point générique de $Z_{\mathcal{Y}}$ pour tout modèle formel \mathcal{Y} de Y . Par hypothèse, il existe $i_0 \in I$ et $q_{i_0} \in \mathcal{P}(Y_{i_0})$ tels que $(Y_{i_0}, q_{i_0}) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(z)$. Soit \mathcal{Y} un modèle formel de Y tel que Y_{i_0} est la fibre générique d'un \mathcal{Y} -schéma formel étale \mathcal{Y}_{i_0} . Puisque \mathcal{Y}_{i_0} est un voisinage étale de $z_{\mathcal{Y}}$ et que $z_{\mathcal{Y}}$ est un point générique de $Z_{\mathcal{Y}}$, il existe un ouvert $R_{\mathcal{Y}} \subset Z_{\mathcal{Y}}$ contenant $z_{\mathcal{Y}}$ et tel que \mathcal{Y}_{i_0} est un voisinage étale de $R_{\mathcal{Y}}$. On pose $\mathcal{W}'_{\mathcal{Y}} = \mathcal{W}_{\mathcal{Y}} \cup R_{\mathcal{Y}}$ qu'on considère comme un ouvert du schéma formel \mathcal{Y} . Montrons que $\mathcal{R} \widehat{\times}_Y (\mathcal{W}'_{\mathcal{Y}})_{\eta}$ est un recouvrement Nisnevich. Ceci terminera la preuve du lemme par contradiction avec l'hypothèse de maximalité de $\mathcal{W}_{\mathcal{Y}}$.

Soit $I_0 \subset I$ un ensemble fini tel que $(Y_i \widehat{\times}_Y (\mathcal{W}_{\mathcal{Y}})_{\eta}) \rightarrow (\mathcal{W}_{\mathcal{Y}})_{\eta})_{i \in I_0}$ est un recouvrement Nisnevich de $(\mathcal{W}_{\mathcal{Y}})_{\eta}$. On peut trouver un éclatement admissible $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ tel que les Y_i sont les fibres génériques de \mathcal{Y}' -schémas formels étales \mathcal{Y}'_i , pour $i \in I_0$, et tel que $(\mathcal{Y}'_i \widehat{\times}_{\mathcal{Y}} \mathcal{W}_{\mathcal{Y}})_{i \in I_0}$ est un recouvrement Nisnevich de $\mathcal{Y}' \widehat{\times}_{\mathcal{Y}} \mathcal{W}_{\mathcal{Y}}$. Or, $\mathcal{Y}'_{i_0} = \mathcal{Y}' \widehat{\times}_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}_{i_0}$ est encore un voisinage étale de la partie localement fermée $\mathcal{Y}'_{\sigma} \times_{\mathcal{Y}_{\sigma}} R$. Il vient que $(\mathcal{Y}'_i \widehat{\times}_{\mathcal{Y}} \mathcal{W}'_{\mathcal{Y}})_{i \in I_0 \cup \{i_0\}}$ est un recouvrement Nisnevich du k° -schéma formel $\mathcal{Y}' \widehat{\times}_{\mathcal{Y}} \mathcal{W}'_{\mathcal{Y}}$. D'où la contradiction recherchée. C.Q.F.D.

Le résultat suivant est un corollaire de la preuve de la proposition 1.2.15.

Corollaire 1.2.18. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -variétés rigides quasi-compactes. Soit $y \in \mathcal{P}(Y)$ et notons $x = f(y)$. Il existe un foncteur*

$$\text{Flt}_{\text{Nis}}(x) \longrightarrow \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$$

qui à un couple $(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)$ associe le couple $(V, v) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$ avec $V = Y \widehat{\times}_X U$ et $v \in \mathcal{P}(V)$, au-dessus de y , caractérisé par la propriété d'être envoyé sur u par $V \rightarrow U$.

Supposons maintenant que f est fini et notons $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_r\}$. Pour $(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)$ on note $(V = Y \widehat{\times}_X U, v_i) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(y_i)$ son image par le foncteur ci-dessus. Pour $U \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)$ connexe et suffisamment fin, V admet une unique décomposition en somme disjointe $V = \coprod_{i=1}^r V_i$ telle que V_i contient le point v_i . De plus, l'association $(U, u) \rightsquigarrow (V_i, v_i)$ est cofinale dans $\text{Flt}_{\text{Nis}}(y_i)$.

Démonstration. — Rappelons qu'on dispose d'une équivalence de catégories $(\text{Et}/X)_{\text{br}} \simeq \text{Colim}_{\mathcal{X}}(\text{Et}/\mathcal{X})$ et que, modulo cette équivalence, $\text{Flt}_{\text{Nis}}(x)$ s'identifie avec

$$\mathcal{V}_X(x) = \text{Colim}_x \mathcal{V}_{\mathcal{X}}((\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{X}_{\sigma})(x))$$

avec $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}((\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{X}_{\sigma})(x))$ la catégorie des voisinages étales de l'image de x dans \mathcal{X} .

Lorsqu'on traduit l'énoncé du lemme en termes de voisinages étales dans des schémas formels, la première partie devient évidente. La seconde découle immédiatement du fait que l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X},p}^h = \text{Colim}_{\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, où \mathcal{U} parcourt la catégorie des voisinages étales d'un point $p \in \mathcal{X}$, est hensélien. Les détails seront laissés au lecteur.

C.Q.F.D.

Soit \mathcal{X} un modèle d'une k -variété rigide quasi-compacte X . On note

$$\eta_{\mathcal{X}} : ((\text{Et}/X)_{\text{br}}, \text{Nis}) \longrightarrow (\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis})$$

le morphisme de sites évident.

Lemme 1.2.19. — *Soient X une k -variété rigide quasi-compacte et F un préfaisceau sur $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$ à valeurs dans une catégorie cocomplète. Le morphisme évident*

$$\text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} (\eta_{\mathcal{X}})^* (\eta_{\mathcal{X}})_* F \longrightarrow F$$

est inversible.

Démonstration. — Soit $(U/X) \in \text{Ob}((\text{Et}/X)_{\text{br}})$. Pour calculer

$$\left[\text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} (\eta_{\mathcal{X}})^* (\eta_{\mathcal{X}})_* F \right](U)$$

il suffit de prendre la colimite suivant la sous-catégorie cofinale $\text{Mdl}'(X) \subset \text{Mdl}(X)$ formée des modèles plats \mathcal{X} pour lesquels il existe un \mathcal{X} -schéma formel étale \mathcal{U} de fibre générique U . Rappelons que

$$(1.39) \quad (\eta_{\mathcal{X}})^* (\eta_{\mathcal{X}})_* F(U) = \text{Colim}_{U \rightarrow \mathcal{V}_{\eta} \in U \setminus (\text{Et}/\mathcal{X})} F(\mathcal{V}_{\eta}).$$

Lorsque $\mathcal{X} \in \text{Mdl}'(X)$, la catégorie $U \setminus (\text{Et}/\mathcal{X})$ admet alors \mathcal{U} pour objet final de sorte que (1.39) se réécrit simplement

$$(1.40) \quad (\eta_{\mathcal{X}})^* (\eta_{\mathcal{X}})_* F(U) = F(\mathcal{U}_{\eta}) = F(U).$$

D'où le résultat.

C.Q.F.D.

Si X est une k -variété rigide (resp. \mathcal{X} un k° -schéma formel, X un \tilde{k} -schéma), on note

$$\mathbb{H}_{\text{Nis}}^p(X, -) = \mathbb{R}^p \Gamma_{\text{Nis}}(\text{Et}/X, -)$$

$$\left(\text{resp. } \mathbb{H}_{\text{Nis}}^p(\mathcal{X}, -) = \mathbb{R}^p \Gamma_{\text{Nis}}(\text{Et}/\mathcal{X}, -), \quad \mathbb{H}_{\text{Nis}}^p(X, -) = \mathbb{R}^p \Gamma_{\text{Nis}}(\text{Et}/X, -) \right)$$

le p -ième foncteur dérivé du foncteur « sections globales » pour les faisceaux Nisnevich de groupes abéliens. On étend ces foncteurs de la manière habituelle aux catégories de préfaisceaux de groupes abéliens en composant d'abord par le foncteur de faisceauti-

sation. On a le théorème ci-dessous qui ramène le calcul de la cohomologie Nisnevich en géométrie rigide au calcul de la cohomologie Nisnevich en géométrie algébrique.

Théorème 1.2.20. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Soit F un pré-faisceau de groupes abéliens sur Et/X . Il existe alors des isomorphismes canoniques*

$$(1.41) \quad H_{\text{Nis}}^p(X, F) \simeq \text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} H_{\text{Nis}}^p(\mathcal{X}, (\eta_{\mathcal{X}})_* F) \simeq \text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} H_{\text{Nis}}^p(\mathcal{X}_{\sigma}, \sigma^*(\eta_{\mathcal{X}})_* F)$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Le deuxième isomorphisme dans (1.41) provient de l'isomorphisme de sites de la proposition 1.2.12.

Notons $e : (\text{Et}/X, \text{Nis}) \rightarrow ((\text{Et}/X)_{\text{br}}, \text{Nis})$ le morphisme de sites défini par l'inclusion $(\text{Et}/X)_{\text{br}} \hookrightarrow \text{Et}/X$. Par le corollaire 1.2.13, le foncteur e_* est exact sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens. Il vient que le morphisme évident $e_* F \rightarrow \text{Re}_* F$ est un quasi-isomorphisme. Il suffit donc de prouver que la flèche évidente

$$\text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} H_{\text{Nis}}^p(\mathcal{X}, (\eta_{\mathcal{X}})_* F) \longrightarrow R^p \Gamma_{\text{Nis}}((\text{Et}/X)_{\text{br}}, F)$$

est inversible. Comme le site $((\text{Et}/X)_{\text{br}}, \text{Nis})$ est naturellement équivalent à $\text{Lim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} (\text{Et}/\mathcal{X}, \text{Nis})$ et que $F \simeq \text{Colim}_{\mathcal{X} \in \text{Mdl}(X)} (\eta_{\mathcal{X}})^*(\eta_{\mathcal{X}})_* F$, le résultat découle de [1, Exposé VI]. C.Q.F.D.

On déduit immédiatement le corollaire suivant de son correspondant en géométrie algébrique (voir [43, Lemme E.6.c]).

Corollaire 1.2.21. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. La dimension cohomologique du site $(\text{Et}/X, \text{Nis})$ est plus petite ou égale à la dimension de X .*

1.2.2. Carrés Nisnevich et propriété de Brown-Gersten. — Lorsque la valuation de k est triviale, le lecteur vérifiera que les notions et résultats de ce paragraphe correspondent bien aux notions et résultats classiques en géométrie algébrique.

Définition 1.2.22. — *Un carré commutatif (C) de k -variétés rigides quasi-compactes*

$$(1.42) \quad \begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{u'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

est appelé un carré Nisnevich si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) le carré (C) est cartésien,
- (ii) f est un morphisme étale à bonne réduction (i.e., $X' \in \text{Ob}((\text{Et}/X)_{\text{br}})$) et u est une immersion ouverte,
- (iii) pour tout point fermé $x \in X - U$ la fibre $f^{-1}(x)$ est réduite à un point x' et $k(x) \simeq k(x')$.

La k -variété rigide X est parfois appelée la base de (C) .

La classe des carrés Nisnevich est stable par changement de base suivant les morphismes de k -variétés rigides quasi-compactes $Y \rightarrow X$.

Lemme 1.2.23. — *On garde les notations de la définition 1.2.22. Sous les conditions (i) et (ii), la condition (iii) est équivalente à :*

(iii') *le morphisme de k -variétés rigides $X' - U' \rightarrow X - U$ est inversible.*

Démonstration. — L'implication (iii') \Rightarrow (iii) est claire. Pour l'implication (iii) \Rightarrow (iii') on supposera que la valuation de k est non triviale (le cas de la valuation triviale est laissé au lecteur). Les variétés rigides $X - U$ et $X' - U'$ sont alors naturellement des ouverts admissibles (mais pas nécessairement quasi-compacts) de X et X' . Il suffit donc de montrer que si $Y \subset X$ est un ouvert admissible quasi-compacts et disjoint de U , le morphisme $Y' = Y \widehat{\times}_X X' \rightarrow Y$ est inversible.

Ceci nous ramène à démontrer (iii) \Rightarrow (iii') dans le cas où $U = \emptyset$. L'immersion diagonale $\Delta_f : X' \rightarrow X' \widehat{\times}_X X'$ est ouverte puisque f est étale. La condition (iii) montre que Δ_f est surjective sur les points fermés. Ceci montre que Δ_f est inversible. Il s'ensuit que les projections $X' \widehat{\times}_X X' \rightarrow X'$ sont aussi inversibles. Puisque f est fidèlement plat (car étale et surjectif), il s'ensuit que f est un isomorphisme. C.Q.F.D.

On déduit du lemme précédent que la classe des carrés Nisnevich est aussi stable par changement de base suivant les extensions $k \subset K$ de corps valués complets.

Proposition 1.2.24. — *On garde les notations de la définition 1.2.22. Si le carré (C) est Nisnevich, alors le couple $(u : U \rightarrow X, f : X' \rightarrow X)$ est un recouvrement Nisnevich de X .*

Démonstration. — Considérons un modèle cartésien du carré (C) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{\tilde{u}'} & \mathcal{X}' \\ \tilde{f}' \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{\tilde{u}} & \mathcal{X} \end{array}$$

avec \tilde{u} une immersion ouverte et \tilde{f} un morphisme étale. Supposons aussi que \mathcal{X} est essentiel. Il suffit de montrer qu'en passant aux fibres spéciales dans le carré ci-dessus, on trouve un carré Nisnevich au sens usuel. On pose $Z = \mathcal{X}_\sigma - \mathcal{U}_\sigma$ et $Z' = \mathcal{X}'_\sigma - \mathcal{U}'_\sigma$ qu'on munit de leurs structures de schémas réduits. On doit montrer que $Z' \rightarrow Z$ est un isomorphisme. Étant donné que Z et Z' sont des \tilde{k} -schémas de type fini et que le morphisme en question est étale, il suffit de montrer qu'il induit un isomorphisme $Z' \times_Z \text{Spec}(\tilde{k}^a) \simeq \text{Spec}(\tilde{k}^a)$ pour tout point $\text{Spec}(\tilde{k}^a) \rightarrow Z$ à valeur dans une clôture algébrique \tilde{k}^a de \tilde{k} . Puisque \mathcal{X} est essentiel, un tel point provient d'un morphisme de schémas formels $z : \text{Spf}(l^\circ) \rightarrow \mathcal{X}$, avec l/k une extension finie, et du choix d'un plongement $\tilde{l}/\tilde{k} \hookrightarrow \tilde{k}^a/\tilde{k}$. Puisque le \tilde{l} -point z_σ appartient à Z , le l -point z_η est dans $X - U$. Il s'ensuit un isomorphisme $X' \widehat{\times}_X \text{Spm}(l) \simeq \text{Spm}(l)$. Puisque \mathcal{X}' est plat

sur \mathcal{X} , on en déduit un isomorphisme $\mathcal{X}' \widehat{\times}_x \mathrm{Spf}(l^\circ) \simeq \mathrm{Spf}(l^\circ)$. Ceci entraîne que $Z' \times_Z \mathrm{Spec}(\tilde{l}) \simeq \mathrm{Spec}(\tilde{l})$ comme souhaité. C.Q.F.D.

Les recouvrements associés aux carrés Nisnevich par la proposition précédente seront appelés les *recouvrements Nisnevich élémentaires*. La preuve de la proposition précédente donne le résultat suivant.

Proposition 1.2.25. — *Soit (\mathcal{C}) un carré cartésien de k° -schémas formels*

$$(1.43) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{X}' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{u} & \mathcal{X} \end{array}$$

avec f étale et u une immersion ouverte. Si (\mathcal{C}_σ) est un carré Nisnevich de \tilde{k} -schémas, alors (\mathcal{C}_η) est un carré Nisnevich de k -variétés rigides quasi-compactes. Si \mathcal{X} est plat sur k° , la réciproque est aussi vraie.

Dans la suite, un carré (\mathcal{C}) comme dans la proposition 1.2.25 sera appelé un *carré Nisnevich* si (\mathcal{C}_σ) est un carré Nisnevich.

Le reste de ce paragraphe est consacré aux analogues rigides de quelques propriétés classiques de la topologie de Nisnevich en géométrie algébrique. Il y a deux façons d'obtenir ces propriétés : par voie directe en suivant de près les démonstrations dans le cas algébrique ; par voie indirecte en utilisant le corollaire 1.2.13 pour se ramener à l'énoncé correspondant sur la fibre spéciale d'un modèle bien choisi. Nous avons préféré suivre la première voie.

Proposition 1.2.26. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Soit F un faisceau d'ensembles sur $\mathrm{Et}^{\mathrm{qc}}/X$. Alors, F est un faisceau Nisnevich si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $F(\emptyset) \simeq *$ (où $*$ est un singleton),
- (ii) tout carré Nisnevich de X -variétés rigides dans $\mathrm{Et}^{\mathrm{qc}}/X$

$$(1.44) \quad \begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{v'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

induit un isomorphisme d'ensembles $F(Y) \xrightarrow{\sim} F(Y') \times_{F(V')} F(V)$. En d'autres termes, F transforme un carré Nisnevich de $\mathrm{Et}^{\mathrm{qc}}/X$ en un carré cartésien d'ensembles.

Démonstration. — Supposons d'abord que F est un faisceau Nisnevich. On a bien $F(\emptyset) = *$ puisque le préfaisceau vide est un crible couvrant de la k -variété vide.

D'autre part, étant donné un carré Nisnevich comme dans (ii), la famille (g, v) est un recouvrement Nisnevich. On a alors une suite exacte d'ensembles

$$F(Y) \longrightarrow F(V) \times F(Y') \xrightarrow[\quad (2) \quad]{\quad (1) \quad} F(V \times_Y V) \times F(V \times_Y Y') \times F(Y' \times_Y V) \times F(Y' \times_Y Y').$$

La flèche (1) envoie $(a, b) \in F(V) \times F(Y')$ sur $(\text{pr}_1^*(a), \text{pr}_1^*(a), \text{pr}_1^*(b), \text{pr}_1^*(b))$ alors que la flèche (2) envoie cet élément sur $(\text{pr}_2^*(a), \text{pr}_2^*(b), \text{pr}_2^*(a), \text{pr}_2^*(b))$. Comme V est une immersion ouverte, les deux projections $V \times_Y V \rightrightarrows V$ sont égales. Ainsi, les premiers éléments dans les deux quadruplets ci-dessus sont toujours égaux. L'égalité entre les deuxièmes éléments est équivalente à l'égalité entre les troisièmes éléments. Montrons que l'égalité entre les quatrièmes éléments est automatique lorsque $\text{pr}_1^*(a) = \text{pr}_2^*(b)$. En effet, on a $Y' \times_Y Y' = Y' \amalg Z$ avec $Z \in \text{Et}/Y$ au-dessus de V . Il vient que les deux possibles images de b dans $F(Z)$ coïncident avec l'unique image de a dans $F(Z)$. Il suffit alors d'utiliser que $F(Y' \times_Y Y') \simeq F(Y') \times F(Z)$. On a ainsi montré que la suite

$$F(Y) \longrightarrow F(V) \times F(Y') \rightrightarrows F(Y' \times_Y V)$$

est exacte. Ceci équivaut à dire que $F(Y) \rightarrow F(Y') \times_{F(V')} F(V)$ est bijective. Les conditions (i) et (ii) sont donc nécessaires.

Pour la réciproque, on montre d'abord que F est séparé. Soient U/X un objet de Et^{qc}/X et $\gamma_1, \gamma_2 \in F(U)$ deux sections qui coïncident sur un recouvrement de U . On peut supposer que $U = X$ et on note \mathcal{R} le recouvrement de X au-dessus duquel γ_1 et γ_2 deviennent égales. Par le lemme 1.2.27 ci-dessous, il existe une suite croissante d'ouverts $(X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X)$ et des carrés Nisnevich (pour $0 \leq i \leq n - 1$)

$$\begin{array}{ccc} Y'_{i+1} & \longrightarrow & Y_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \longrightarrow & X_{i+1} \end{array}$$

tels que le recouvrement Nisnevich $(X_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ raffine \mathcal{R} . Montrons par récurrence sur i que $(\gamma_1)|_{X_i} = (\gamma_2)|_{X_i}$. Lorsque $i = 0$, ceci est clair. Supposons le résultat vrai pour i . On sait que $(\gamma_1)|_{Y_{i+1}} = (\gamma_2)|_{Y_{i+1}}$. Mais par (ii), la flèche $F(X_{i+1}) \rightarrow F(X_i) \times F(Y_{i+1})$ est injective. Ceci montre que $(\gamma_1)|_{X_{i+1}} = (\gamma_2)|_{X_{i+1}}$.

Maintenant que l'on sait que F est séparé, il suffira de montrer que $\ell(F) : F \rightarrow \text{LF}$ est surjectif. On se ramène facilement à considérer les sections au-dessus de X . Soit $\gamma \in \text{LF}(X)$ et $\mathcal{R} = (X_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ un recouvrement au-dessus duquel γ est défini. On peut supposer que $\mathcal{R} = (X_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ comme ci-dessus. On va montrer par récurrence sur i qu'il existe $\gamma_i \in F(X_i)$ qui est envoyé sur $\gamma|_{X_i} \in \text{LF}(X_i)$. Ceci est vrai pour $i = 0$. Supposons γ_i construite. Par hypothèse, il existe $\delta \in F(Y_{i+1})$ qui est envoyé sur $\gamma|_{Y_{i+1}}$. Il vient que $\delta|_{Y'_{i+1}}$ et $(\gamma_i)|_{Y'_{i+1}}$ sont envoyés par $\ell(F)$ sur le même élément $\gamma|_{Y'_{i+1}}$. Ils sont donc égaux puisque F est séparé. On obtient l'élément γ_{i+1} en prenant l'image inverse de (δ, γ_i) par la bijection $F(X_{i+1}) \xrightarrow{\sim} F(Y_{i+1}) \times_{F(Y'_{i+1})} F(X_i)$. C.Q.F.D.

Lemme 1.2.27. — Soit X une k -variété rigide quasi-compacte et séparée, et soit \mathcal{R} un recouvrement Nisnevich de X . Il existe alors une suite croissante d'ouverts $(X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X)$ et des carrés Nisnevich $(0 \leq i \leq n-1)$

$$\begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & Y_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \longrightarrow & X_{i+1} \end{array}$$

tels que le recouvrement Nisnevich (X_0, Y_1, \dots, Y_n) raffine \mathcal{R} .

Démonstration. — On peut supposer que \mathcal{R} est la fibre générique d'un recouvrement Nisnevich de k° -schémas formels $\mathcal{Q} = (\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{X})_i$ avec \mathcal{X} un modèle plat de X . Il suffit alors de construire une suite croissante $(\mathcal{X}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{X}_n = \mathcal{X})$ d'ouverts du k° -schéma formel \mathcal{X} et des carrés Nisnevich

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_i & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_i & \longrightarrow & \mathcal{X}_{i+1} \end{array}$$

tels que le recouvrement $\mathcal{Q} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_r$ est raffiné par $(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_r)$.

On raisonne par récurrence en posant $\mathcal{X}_{-1} = \emptyset$. Supposons \mathcal{X}_i et \mathcal{Y}_i construits pour $i < r$. Soit Z le complémentaire de \mathcal{X}_{r-1} dans \mathcal{X} . Si Z est non vide, on choisit un point générique p de Z . Ce point admet un relèvement à \mathcal{U}_α pour un certain indice α . Il existe alors un voisinage Zariski Z_0 de p dans Z et un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{U}_\alpha \\ & \nearrow & \downarrow \\ Z_0 & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

On pose $\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_{r-1} \cup Z_0$. On prend alors pour \mathcal{Y}_r l'ouvert de $\mathcal{U}_\alpha \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_r$ complémentaire du fermé F tel que $\mathcal{U}_\alpha \widehat{\times}_{\mathcal{X}} Z_0 = Z_0 \amalg F$. Les propriétés recherchées sont évidentes. Le fait que $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n$, pour n suffisamment grand, découle du fait que la suite des \mathcal{X}_r est strictement croissante et que \mathcal{X} est noethérien. C.Q.F.D.

Corollaire 1.2.28. — Soit X une k -variété rigide. L'image d'un carré Nisnevich par le plongement de Yoneda $\text{Et}^{\text{qc}}/X \rightarrow \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X)$ est un carré cartésien et cocartésien. La même propriété est vraie pour les carrés Nisnevich de k -variétés rigides dans $\text{SmRig}^{\text{qc}}/k$, $\text{VarRig}^{\text{qc}}/k$, etc.

Démonstration. — Le foncteur $\text{Et}/X \rightarrow \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X)$ commute aux limites finies. Il envoie donc un carré cartésien sur un carré cartésien. Pour montrer qu'un carré Nisnevich est envoyé sur un carré cocartésien, on utilise le lemme de Yoneda et la proposition 1.2.26. C.Q.F.D.

La proposition 1.2.26 admet une variante homotopique. Soit \mathfrak{M} une catégorie de modèles. On fait la définition suivante.

Définition 1.2.29. — On dit qu'un préfaisceau F sur Et^{qc}/X à valeurs dans \mathfrak{M} admet la propriété de Brown-Gersten si $F(\emptyset/X) \rightarrow *$ est une équivalence faible et si F transforme un carré Nisnevich en un carré homotopiquement cartésien.

Pour simplifier, on supposera dans la suite que \mathfrak{M} est une catégorie de modèles stables (voir [25] et aussi [3, Définition 4.1.44]). En particulier, un carré de \mathfrak{M} est homotopiquement cartésien si et seulement si il est homotopiquement cocartésien. Étant donné un préfaisceau F (sur Et^{qc}/X , etc.) à valeurs dans \mathfrak{M} , on note $\Pi_0(A, F)$ le préfaisceau $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, F(-))$ et $\Pi_0^{\text{Nis}}(A, F)$ son faisceau Nisnevich associé. On a le théorème suivant dont la preuve est calquée sur celle de [14, Théorème 1'].

Théorème 1.2.30. — Soit $F \rightarrow G$ un morphisme dans $\mathbf{PreShv}(\text{Et}^{\text{qc}}/X, \mathfrak{M})$ tel que F et G possèdent la propriété de Brown-Gersten. Soit A un objet de \mathfrak{M} et supposons que les morphismes $\Pi_0^{\text{Nis}}(A, F[n]) \rightarrow \Pi_0^{\text{Nis}}(A, G[n])$ sont inversibles pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors, les morphismes $\Pi_0(A, F[n]) \rightarrow \Pi_0(A, G[n])$ sont également inversibles pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — En prenant la fibre homotopique de $F \rightarrow G$, on est ramené au cas $G = *$. Il s'agit alors de montrer que les préfaisceaux $\Pi_0(A, F[n])$ sont nuls sachant que leurs faisceaux Nisnevich associés sont nuls.

Soient (U_1/X) et (U_2/X) deux objets de Et^{qc}/X . On déduit du carré homotopiquement cartésien

$$\begin{array}{ccc} F(U_1 \amalg U_2/X) & \longrightarrow & F(U_1/X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U_2/X) & \longrightarrow & F(\emptyset/X) \end{array}$$

et de l'équivalence faible $F(\emptyset) \simeq *$, un isomorphisme

$$\Pi_0(A, F[n])(U_1 \amalg U_2) \simeq \Pi_0(A, F[n])(U_1) \oplus \Pi_0(A, F[n])(U_2).$$

Le foncteur $\Pi_0(A, F[n])$ est donc additif.

Soit $d \geq 0$ un entier. On considère la propriété (P_d) suivante. Soient $n \in \mathbb{Z}$, $U/X \in \text{Ob}(\text{Et}^{\text{qc}}/X)$ et $\gamma \in \Pi_0(A, F[n])(U)$. Pour tout modèle essentiel \mathcal{U} de U , il existe un ouvert Zariski $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ dont le complémentaire est de codimension supérieure ou égale à d et tel que $\gamma|_{(\mathcal{U}_0)_\eta} = 0$.

La propriété (P_0) est vraie puisque l'on peut prendre pour \mathcal{U}_0 l'ouvert vide. Si $d \geq \dim(X)$, la propriété (P_d) implique la trivialité des préfaisceaux $\Pi_0(A, F[n])$. Pour conclure, il suffit de montrer l'implication $(P_d) \Rightarrow (P_{d+1})$.

On fixe l'entier $n \in \mathbb{Z}$ et la classe γ comme ci-dessus. On peut supposer que $U = X$ (et donc que X est quasi-compacte). Soit $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme de modèles essentiels. Supposons trouvé un ouvert $\mathcal{X}'_0 \subset \mathcal{X}'$ tel que $Z' = \mathcal{X}' - \mathcal{X}'_0$ est de codimension $\geq d+1$ et $\gamma|_{(\mathcal{X}'_0)_\eta} = 0$. Notons Z l'image de Z' dans \mathcal{X} et $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X} - Z$. Il est clair que $(\mathcal{X}_0)_\eta \subset (\mathcal{X}'_0)_\eta$. Il vient que $\gamma|_{(\mathcal{X}_0)_\eta} = 0$. D'autre part, Z est de codimension $\geq d+1$. Il suffit donc de prouver (P_{d+1}) pour les modèles suffisamment fins.

On peut donc supposer l'existence d'un recouvrement Nisnevich $\mathcal{R} = (\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{X})_i$ tel que γ s'annule sur les $(\mathcal{U}_i)_\eta$. Comme $\Pi_0(A, F[n])$ est additif, on peut supposer que ce recouvrement est réduit à une seule flèche $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un ouvert Zariski \mathcal{X}_d dont le complémentaire Z est de codimension supérieure ou égale à d et tel que γ est nulle sur $(\mathcal{X}_d)_\eta$. Soient $Z_0 \subset Z$ un ouvert dense et $s : Z_0 \rightarrow \mathcal{U}$ une section. On pose $\mathcal{W} = \mathcal{X}_d \cup Z_0$ et $\mathcal{V} = [\mathcal{U} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{W}] - F$ où F est le fermé tel que $\mathcal{U} \widehat{\times}_{\mathcal{X}} Z_0 = F \amalg Z_0$. Le fermé $\mathcal{X} - \mathcal{W}$ est alors de codimension supérieure ou égale à $d + 1$. D'autre part, γ est nulle sur \mathcal{V}_η et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_d & \longrightarrow & \mathcal{W} \end{array}$$

est un carré Nisnevich (avec $\mathcal{Y} = \mathcal{V} \widehat{\times}_{\mathcal{W}} \mathcal{X}_d$). La propriété de Brown-Gersten fournit alors la suite exacte

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, F(\mathcal{Y}_\eta)[n-1]) &\xrightarrow{\partial} \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, F(\mathcal{W}_\eta)[n]) \\ &\longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, F((\mathcal{X}_d)_\eta)[n] \oplus F(\mathcal{V}_\eta)[n]). \end{aligned}$$

Il existe donc un élément $\alpha \in \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, F(\mathcal{Y}_\eta)[n-1])$ tel que $\partial(\alpha) = \gamma|_{\mathcal{W}_\eta}$.

Appliquons maintenant la propriété (P_d) à α . Il existe alors un ouvert \mathcal{Y}_d de \mathcal{Y} dont le complémentaire est de codimension supérieure ou égale à d et tel que $\alpha|_{(\mathcal{Y}_d)_\eta} = 0$. Notons T le complémentaire de \mathcal{Y}_d et \bar{T} son adhérence dans \mathcal{V}_σ . La partie fermée $\bar{T} - T$ s'envoie donc isomorphiquement sur son image S dans \mathcal{W} . Comme S est de codimension supérieure ou égale à $d + 1$ dans \mathcal{W} , on voit que le complémentaire de $\mathcal{X}_{d+1} = \mathcal{W} - S$ dans \mathcal{X} est encore de codimension supérieure ou égale à $d + 1$. D'autre part, la carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} - T & \longrightarrow & \mathcal{V} - \bar{T} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_d & \longrightarrow & \mathcal{X}_{d+1} \end{array}$$

est encore de Nisnevich. Or, $\gamma|_{(\mathcal{X}_{d+1})_\eta}$ est l'image de $0 = \alpha|_{(\mathcal{Y}-T)_\eta}$ par ∂ . D'où la propriété (P_{d+1}) . C.Q.F.D.

Un objet A d'une catégorie de modèles \mathfrak{M} est dit *homotopiquement compact* si le foncteur

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[n], -) : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

commute aux petites colimites filtrantes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous adoptons une définition légèrement plus restrictive d'une catégorie de coefficients (comparer avec [3, Définition 4.4.23]).

Définition 1.2.31. — Une catégorie de modèles \mathfrak{M} est appelée une catégorie de coefficients lorsqu'elle vérifie les propriétés suivantes.

- (i) \mathfrak{M} est propre à gauche, présentable par cofibrations (au sens de [3, Déf. 4.2.39]) et stable.
- (ii) Les équivalences faibles et les fibrations de \mathfrak{M} sont stables par coproduits finis et colimites filtrantes.
- (iii) Il existe un ensemble \mathcal{E} d'objets homotopiquement compacts de \mathfrak{M} qui engendre la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.

L'ensemble \mathcal{E} sera fixé une fois pour toute. On supposera que tous les objets dans \mathcal{E} sont cofibrants et que pour tout $A \in \mathcal{E}$ les objets $\Sigma(A) \simeq A[+1]$ et $\Omega(A) \simeq A[-1]$ admettent des représentants dans \mathcal{E} .

Soit \mathcal{S} l'une des catégories Et^{qc}/X , Et/X , VarRig/k , SmRig/k , etc., munie de la topologie de Nisnevich. Par [3, Définition 4.4.33], on dispose sur $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$, la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{S} à valeurs dans \mathfrak{M} , d'une structure de catégorie de modèles Nis-locale. Un morphisme $K \rightarrow L$ est une *équivalence Nis-locale* si et seulement si $\Pi_0^{\text{Nis}}(A[n], K) \rightarrow \Pi_0^{\text{Nis}}(A[n], L)$ est inversible pour $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$. Un objet K de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ est dit *Nis-local* si le foncteur $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))}(-, K)$ transforme les équivalences Nis-locales en des isomorphismes. (Précisons que $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M}))$ est la catégorie homotopique de $\mathbf{PreShv}(\mathcal{S}, \mathfrak{M})$ relativement à la structure de modèles non localisée, i.e., où les équivalences faibles sont les morphismes de préfaisceaux $K \rightarrow L$ tel que $K(U) \rightarrow L(U)$ est une équivalence faible de \mathfrak{M} pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$; ces équivalences faibles seront appelées les *équivalences faibles de préfaisceaux* dans la suite.)

Corollaire 1.2.32. — *Soit \mathfrak{M} une catégorie de coefficients et soit K un objet de $\mathbf{PreShv}(\text{Et}^{\text{qc}}/X, \mathfrak{M})$. Alors, K est Nis-local si et seulement si il vérifie la propriété de Brown-Gersten.*

Démonstration. — La propriété de Brown-Gersten est préservée par équivalences faibles de préfaisceaux. Il en est de même de la propriété d'être Nis-local. On peut donc supposer que K est injectivement fibrant (voir [3, Définition 4.4.18]). En particulier, pour tout préfaisceau d'ensembles F , $\text{hom}_{\mathfrak{M}}(F, K)$ est un objet fibrant de \mathfrak{M} (voir [3, Définition 4.4.2 et Lemme 4.4.19]). De même, étant donné un monomorphisme de préfaisceaux d'ensembles $F_0 \rightarrow F_1$, la flèche $\text{hom}_{\mathfrak{M}}(F_1, K) \rightarrow \text{hom}_{\mathfrak{M}}(F_0, K)$ est une fibration.

Montrons d'abord qu'un préfaisceau K injectivement fibrant et Nis-local vérifie la propriété de Brown-Gersten. Si \emptyset désigne le préfaisceau vide et \emptyset/X la X -variété vide, le morphisme $\text{hom}_{\mathfrak{M}}(\emptyset/X, K) = K(\emptyset/X) \rightarrow \text{hom}_{\mathfrak{M}}(\emptyset, K) = *$ est une équivalence faible puisque $\mathfrak{a}_{\text{Nis}}(\emptyset) \simeq \mathfrak{a}_{\text{Nis}}(\emptyset/X)$. D'où la première propriété de la définition 1.2.29. Supposons donné un carré Nisnevich (C) de X -variétés rigides étales quasi-compactes

(au-dessus de k)

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{a'} & U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{a} & U. \end{array}$$

Montrons que $K(C)$ est homotopiquement cartésien. Étant donné que a et a' sont des monomorphismes de préfaisceaux d'ensembles, les flèches $K(a)$ et $K(a')$ sont des fibrations entre objets fibrants. Il suffit donc de montrer que le morphisme induit sur les fibres $\text{Fib}(K(a)) \rightarrow \text{Fib}(K(a'))$ est une équivalence faible.

Considérons le carré cocartésien de préfaisceaux d'ensembles

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & U/V. \end{array}$$

Le foncteur $\text{hom}_{\mathfrak{M}}(-, K)$ envoie une colimite de préfaisceaux d'ensembles sur une limite de \mathfrak{M} . On en déduit un carré cartésien dans \mathfrak{M}

$$\begin{array}{ccc} K(U/V) & \longrightarrow & K(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(*) & \longrightarrow & K(V) \end{array}$$

à flèches verticales des fibrations entre objets fibrants de \mathfrak{M} . Le morphisme

$$\text{Fib}(a) \longrightarrow \text{Fib}(K(U/V) \rightarrow K(*))$$

est donc une équivalence faible. Il en est de même de

$$\text{Fib}(a') \longrightarrow \text{Fib}(K(U'/V') \rightarrow K(*)).$$

On est donc ramené en fin de compte à montrer que $K(U/V) \rightarrow K(U'/V')$ est une équivalence faible. Ceci découle de [3, Proposition 4.4.39] et du fait que $V'/U' \rightarrow V/U$ induit un isomorphisme sur les faisceaux Nisnevich associés (par le corollaire 1.2.28).

Pour la réciproque, on considère le morphisme $\alpha : K \rightarrow \text{Loc}_{\text{Nis}}(K)$ où Loc_{Nis} est le foncteur de localisation associé à la localisation de Bousfield suivant les équivalences Nis-locales (voir [3, Proposition 4.2.72]). Ce morphisme est une équivalence Nis-locale, i.e., induit un isomorphisme après application de $\Pi_0^{\text{Nis}}(A[n], -)$ pour $A \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par le théorème 1.2.30, et le fait que $\text{Loc}_{\text{Nis}}(K)$ est Nis-local, on déduit que α induit un isomorphisme sur $\Pi_0(A[n], -)$. Ceci montre que α est une équivalence faible de préfaisceaux. Le corollaire est prouvé. C.Q.F.D.

Pour des références ultérieures, on note le résultat simple suivant.

Proposition 1.2.33. — *Soit \mathfrak{M} une catégorie de coefficients. La classe des préfaisceaux sur Et^{qc}/X à valeurs dans \mathfrak{M} vérifiant la propriété de Brown-Gersten est stable par colimites filtrantes.*

Démonstration. — Les équivalences faibles et les fibrations de \mathfrak{M} sont stables par colimites filtrantes. De plus, les colimites filtrantes dans \mathfrak{M} commutent aux limites finies et, en particulier, aux produits fibrés. Il s'ensuit que les carrés homotopiquement cartésiens de \mathfrak{M} sont stables par colimites filtrantes. Ceci permet de conclure.

C.Q.F.D.

1.2.3. Engendrement par des k -affinoïdes ayant potentiellement bonne réduction. — Soient \mathcal{S} un site et \mathcal{C} une catégorie complète et cocomplète. Pour les notions concernant les préfaisceaux et les faisceaux sur \mathcal{S} à valeurs dans \mathcal{C} , le lecteur pourra consulter [3, Section 4.4]. Étant donné un préfaisceau d'ensembles E et un préfaisceau F à valeurs dans \mathcal{C} , on dispose d'un préfaisceau $E \otimes F$ à valeurs dans \mathcal{C} (voir [3, Définition 4.4.2]). Rappelons aussi que pour $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on note A_{cst} le préfaisceau constant sur \mathcal{S} de valeur A . On commence par un résultat général. (Ci-dessous, « $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(-)$ » désigne le passage à la catégorie homotopique relativement à la structure Nis-locale, i.e., la catégorie obtenue en inversant formellement les équivalences Nis-locales.)

Proposition 1.2.34. — *Soit \mathfrak{M} une catégorie de coefficients (au sens de la définition 1.2.31). La catégorie triangulée $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$ est compactement engendrée (en tant que catégorie triangulée avec sommes infinies) par les objets de la forme $X \otimes A_{\text{cst}}$ avec X une k -variété rigide quasi-compacte et lisse, et $A \in \mathcal{E}$.*

Démonstration. — L'inclusion évidente $\text{SmRig}^{\text{qc}}/k \hookrightarrow \text{SmRig}/k$ induit une équivalence de topos $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k) \simeq \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k)$ par [1, Exposé III, Théorème 4.1]. Par [3, Proposition 4.4.55], on en déduit une équivalence de Quillen entre $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$ et $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})$ munies des structures Nis-locales. Il suffit donc de prouver l'énoncé du lemme pour la catégorie triangulée (avec sommes infinies) $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))$.

Montrons d'abord que les objets $X \otimes A_{\text{cst}}$ sont compacts. Il suffit plus généralement de montrer que le foncteur

$$(1.45) \quad \text{hom}_{\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))}(X \otimes A_{\text{cst}}, -) : \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

commute aux colimites filtrantes. Le foncteur (1.45) est isomorphe à

$$(1.46) \quad \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, \Gamma(X, -)) : \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}) \xrightarrow{\text{R}\Gamma(X, -)} \mathfrak{M} \xrightarrow{\text{hom}(A, -)} \mathcal{A}b.$$

Étant donné que A est homotopiquement compact, il suffit de montrer que $\text{R}\Gamma(X, -)$ commute aux colimites filtrantes à équivalence faible près. Par définition, $\text{R}\Gamma(X, K)$ est isomorphe dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ à $\Gamma(X, \text{Loc}_{\text{Nis}}(K))$ (voir la fin de la preuve du corollaire 1.2.32). Par le corollaire 1.2.32 et la proposition 1.2.33, les préfaisceaux Nis-locales sont stables par colimites filtrantes. De plus, les équivalences Nis-locales sont

stables par colimites filtrantes. Il s'ensuit que le foncteur Loc_{Nis} commute aux colimites filtrantes à équivalence faible de préfaisceaux près. Le résultat recherché s'ensuit.

Pour conclure, il reste à vérifier que la famille des foncteurs (1.45) détecte les équivalences faibles. Soit $K \rightarrow L$ un morphisme de préfaisceaux induisant un isomorphisme après application des foncteurs (1.45) (et donc aussi (1.46)). On peut supposer que K et L sont Nis-locaux. Par la condition (iii) de la définition 1.2.31, on déduit que pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse X , $K(X) \rightarrow L(X)$ est une équivalence faible. Il vient que $K \rightarrow L$ est une équivalence faible de préfaisceaux.

C.Q.F.D.

Dans la suite de ce paragraphe, on supposera que la valuation de k est discrète et que le corps résiduel \tilde{k} est de caractéristique nulle. En particulier, k est d'égale caractéristique nulle et même isomorphe à $\tilde{k}((\pi))$. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que $k = \tilde{k}((\pi))$. Ceci permettra de voir $\text{Spec}(k)$ et $\text{Spec}(k^\circ)$ comme des \tilde{k} -schémas et donc de faire des changements de base suivant les morphismes $\text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{k})$ et $\text{Spec}(k^\circ) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{k})$. On introduit quelques notations.

Notation 1.2.35. — Soient X un \tilde{k} -schéma de type fini, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. On définit un k° -schéma

$$Q_p^{\text{sch}}(X, f) = (X \times_{\tilde{k}} k^\circ)[V]/(V^p - f\pi).$$

On note alors $Q_p^{\text{for}}(X, f)$ la complétion formelle de $Q_p^{\text{sch}}(X, f)$ en sa fibre spéciale. Enfin, $Q_p^{\text{rig}}(X, f)$ désignera la fibre générique de $Q_p^{\text{for}}(X, f)$.

Lorsque $p = 1$, ces schémas, schémas formels et variétés rigides ne dépendent pas de f . Ils seront respectivement notés $Q^{\text{sch}}(X)$, $Q^{\text{for}}(X)$ et $Q^{\text{rig}}(X)$.

Avec les notations 1.1.61, on a

$$(1.47) \quad Q_p^{\text{sch}}(X, f) = \text{St}_{X \times_{\tilde{k}} k^\circ, p}^{f\pi}, \quad Q_p^{\text{for}}(X, f) = \text{St}_{X \times_{\tilde{k}} k^\circ // (\pi), p}^{f\pi}, \\ Q_p^{\text{rig}}(X, f) = \text{St}_{(X \times_{\tilde{k}} k^\circ // (\pi))_{\eta, p}}^{f\pi}.$$

Le théorème principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 1.2.36. — *Soit \mathfrak{M} une catégorie de coefficients (au sens de la définition 1.2.31). La catégorie triangulée $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$ est compactement engendrée (en tant que catégorie triangulée avec sommes infinies) par les objets de la forme*

$$(1.48) \quad [Q_p^{\text{rig}}(X, f)] \otimes A_{\text{cst}}$$

avec $p \in \mathbb{N} - \{0\}$, X un \tilde{k} -schéma affine et lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$, et $A \in \mathcal{E}$.

On note \mathcal{T} la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$ stable par facteurs directs engendrée par les objets de la forme (1.48). Par la proposition 1.2.34, il suffit de montrer que si X est une k -variété rigide quasi-compacte et lisse, et $A \in \mathcal{E}$, le préfaisceau $X \otimes A_{\text{cst}}$ est dans $\text{Ob}(\mathcal{T})$.

Lemme 1.2.37. — *Supposons donné un recouvrement fini $(U_i)_{i \in I}$ de X par des ouverts admissibles quasi-compacts. Pour $\emptyset \neq J \subset I$, on note $U_J = \bigcap_{j \in J} U_j$. Pour $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$, l'objet $X \otimes A_{\text{cst}}$ appartient à la sous-catégorie triangulée engendrée par $\{U_J \otimes A_{\text{cst}}; \emptyset \neq J \subset I\}$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le cardinal de I . Lorsque I est un singleton, il n'y a rien à montrer. Supposons que $I = \{1, 2\}$. On a un triangle distingué de Mayer-Vietoris dans $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$

$$(1.49) \quad (U_1 \cap U_2) \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow U_1 \otimes A_{\text{cst}} \coprod U_2 \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow X \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow .$$

En effet, le faisceau Nisnevich associé à la cofibre de la flèche de gauche est isomorphe au faisceau Nisnevich associé à $X \otimes A_{\text{cst}}$. Le triangle distingué (1.49) montre que $X \otimes A_{\text{cst}}$ est dans la sous-catégorie triangulée engendrée par $U_1 \otimes A_{\text{cst}}$, $U_2 \otimes A_{\text{cst}}$ et $(U_1 \cap U_2) \otimes A_{\text{cst}}$.

Soit $i_0 \in I$ et notons $I' = I - \{i_0\}$. Les k -variétés rigides quasi-compactes $V = \bigcup_{j \in I'} U_j$ et $V \cap U_{i_0} = \bigcup_{j \in I'} U_j \cap U_{i_0}$ sont couvertes par $(U_j)_{j \in I'}$ et $(U_j \cap U_{i_0})_{j \in I'}$ respectivement. Par récurrence, on sait que $V \otimes A$ et $(V \cap U_{i_0}) \otimes A$ sont dans la sous-catégorie engendrée par $\{U_j \otimes A; \emptyset \neq J \subset I\}$. Pour conclure, il suffit d'appliquer le cas $\text{card}(I) = 2$ de la récurrence au recouvrement $X = U_{i_0} \cup V$. C.Q.F.D.

Soient X une k -variété rigide quasi-compacte et lisse, et $A \in \mathcal{E}$. Montrons que $X \otimes A_{\text{cst}} \in \text{Ob}(\mathcal{T})$. En utilisant le lemme 1.2.37 et la proposition 1.1.63, on se ramène à traiter le cas $X = \mathcal{X}_\eta$ avec \mathcal{X} un k° -schéma formel globalement semi-stable. On raisonne par récurrence sur le nombre maximal de branches de \mathcal{X} passant par un point. Comme $X \otimes A_{\text{cst}}$ est un facteur direct de $(X\{R, R^{-1}\}) \otimes A_{\text{cst}}$, on peut supposer par la proposition 1.1.62 (quitte à appliquer à nouveau le lemme 1.2.37) qu'il existe un morphisme étale $f : \mathcal{X} \rightarrow \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi}\{S_1, \dots, S_r\}$ pour un certain n -uplet $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Rappelons que $\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi}$ est le spectre formel de

$$k^\circ\{U, U^{-1}, T_1, \dots, T_n\}/(T_1^{a_1} \dots T_n^{a_n} - U^{-1}\pi).$$

Notons D_1, \dots, D_n les branches de \mathcal{X} d'équations respectives $T_1 = 0, \dots, T_n = 0$. Soit $C = D_1 \cap \dots \cap D_n$ leur intersection. Par l'hypothèse de récurrence, $(\mathcal{X} - C)_\eta \otimes A_{\text{cst}}$ est dans \mathcal{T} . Il suffit donc de montrer que

$$\frac{\mathcal{X}_\eta \otimes A_{\text{cst}}}{(\mathcal{X} - C)_\eta \otimes A_{\text{cst}}} = \text{Cofib}((\mathcal{X} - C)_\eta \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow \mathcal{X}_\eta \otimes A_{\text{cst}})$$

appartient à \mathcal{T} .

Notons $e_0 : C \rightarrow \text{Spec}(\tilde{k}[U, U^{-1}, S_1, \dots, S_r])$ le morphisme étale obtenu de f par changement de base suivant l'inclusion $o[U, U^{-1}, S_1, \dots, S_r] \hookrightarrow \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi}\{S_1, \dots, S_r\}$. (On rappelle que $o[U, U^{-1}] = \text{Spec}(\tilde{k}[U, U^{-1}])$ est l'intersection des branches de $\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi}$.) En appliquant Q^{for} (voir les notations 1.2.35) à ce morphisme, on obtient le morphisme étale $Q^{\text{for}}(e_0) : Q^{\text{for}}(C) \rightarrow \text{Spf}(k^\circ\{U, U^{-1}, S_1, \dots, S_r\})$. Le changement

de base suivant le morphisme évident $\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \rightarrow \text{Spf}(k^\circ\{U, U^{-1}\})$ nous donne un morphisme étale de k° -schémas formels

$$(1.50) \quad e : \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \widehat{\times}_{k^\circ\{U, U^{-1}\}} Q^{\text{for}}(C) \longrightarrow \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \{S_1, \dots, S_r\}.$$

Notons que par construction, e_0 est le changement de base de e suivant l'inclusion de l'intersection des branches de $\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \{S_1, \dots, S_r\}$.

On forme le carré cartésien de k° -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_1 & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \widehat{\times}_{k^\circ\{U, U^{-1}\}} Q^{\text{for}}(C) & \xrightarrow{e} & \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \{S_1, \dots, S_r\}. \end{array}$$

Par changement de base suivant $o[U, U^{-1}, S_1, \dots, S_r] \hookrightarrow \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \{S_1, \dots, S_r\}$, on obtient le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow e_0 \\ C & \xrightarrow{e_0} & o[U, U^{-1}, S_1, \dots, S_r]. \end{array}$$

Puisque e_0 est étale, l'immersion diagonale de C dans P est ouverte et fermée. On a donc une décomposition en somme disjointe $P = C \coprod P_0$. Soit \mathcal{Y} l'ouvert $\mathcal{Y}_1 - P_0$. On obtient ainsi deux carrés Nisnevich de k° -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} - C & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} - o[U, U^{-1}]) \widehat{\times}_{k^\circ\{U, U^{-1}\}} Q^{\text{for}}(C) & \longrightarrow & \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \widehat{\times}_{k^\circ\{U, U^{-1}\}} Q^{\text{for}}(C) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} - C & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} - C & \longrightarrow & \mathcal{X}. \end{array}$$

Par le corollaire 1.2.28, en passant aux fibres génériques dans les deux carrés ci-dessus, on obtient des carrés cocartésiens dans $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k)$. On en déduit des équivalences Nis-locales

$$\begin{aligned} \frac{[\mathcal{X}_\eta \otimes A_{\text{cst}}]}{[(\mathcal{X} - C)_\eta \otimes A_{\text{cst}}]} &\simeq \frac{[\mathcal{Y}_\eta \otimes A_{\text{cst}}]}{[(\mathcal{Y} - C)_\eta \otimes A_{\text{cst}}]} \\ &\simeq \frac{[(\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi})_\eta \widehat{\times}_{k\{U, U^{-1}\}} Q^{\text{rig}}(C) \otimes A_{\text{cst}}]}{[(\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} - o[U, U^{-1}])_\eta \widehat{\times}_{k\{U, U^{-1}\}} Q^{\text{rig}}(C) \otimes A_{\text{cst}}]}. \end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse de récurrence, on a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}_\eta \otimes A_{\text{cst}}] \in \text{Ob}(\mathcal{T}) &\iff [\mathcal{Y}_\eta \otimes A_{\text{cst}}] \in \text{Ob}(\mathcal{T}) \\ &\iff [((\text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi}) \times_{k\{U, U^{-1}\}} Q^{\text{rig}}(C)) \otimes A_{\text{cst}}] \in \text{Ob}(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Appelons $f \in \Gamma(C, \mathcal{O}^\times)$ l'image de U^{-1} par le morphisme de \tilde{k} -algèbres

$$\tilde{k}[U, U^{-1}, S_1, \dots, S_r] \longrightarrow \Gamma(C, \mathcal{O})$$

induit par e_0 . La k -variété rigide $\mathrm{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}\pi} \widehat{\otimes}_{k\{U, U^{-1}\}} Q^{\mathrm{rig}}(C)$ s'identifie avec la $Q^{\mathrm{rig}}(C)$ -variété rigide $\mathrm{St}_{Q^{\mathrm{rig}}(C), \underline{a}}^{f\pi}$. Ainsi, pour terminer la preuve du théorème 1.2.36, il suffit de montrer le lemme suivant.

Lemme 1.2.38. — *Soient X une k -variété rigide lisse, $v \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et \underline{a} un n -uplet d'entiers non nuls. Pour $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M})$, l'objet $\mathrm{St}_{X, \underline{a}}^v \otimes A_{\mathrm{cst}}$ est dans la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$ stable par facteurs directs engendrée par l'ensemble*

$$(1.51) \quad \left\{ \left[\frac{X\{U_1, U_1^{-1}, \dots, U_r, U_r^{-1}, R\}}{(R^p - U_1^{m_1} \dots U_r^{m_r} v)} \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^{n-r} \right] \otimes A_{\mathrm{cst}}; \right. \\ \left. p \in \mathbb{N} - \{0\}, 0 \leq r \leq n \text{ et } (m_i)_{i=1}^r \in \mathbb{Z}^r \right\}.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la longueur n du n -uplet \underline{a} . Lorsque $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $n \geq 2$. On procède en deux étapes.

Étape 1 : On veut se ramener au cas $\underline{a} = (p, \dots, p)$. On commence par une discussion générale. Soient $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ un n -uplet et $1 \leq i < j \leq n$. Comme v est inversible, les sections T_i et T_j engendrent $\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_n\}/(T_1^{b_1} \dots T_n^{b_n} - v)$ comme idéal. On peut donc considérer le recouvrement standard $D(T_i|T_j)$ et $D(T_j|T_i)$ de $\mathrm{St}_{X, \underline{b}}^v$. Par le triangle distingué de Mayer-Vietoris

$$(D(T_i|T_j) \cap D(T_j|T_i)) \otimes A_{\mathrm{cst}} \longrightarrow (D(T_i|T_j) \otimes A_{\mathrm{cst}}) \oplus (D(T_j|T_i) \otimes A_{\mathrm{cst}}) \longrightarrow \mathrm{St}_{X, \underline{b}}^v \otimes A_{\mathrm{cst}} \rightarrow$$

on déduit que $D(T_i|T_j) \otimes A_{\mathrm{cst}}$ et $D(T_j|T_i) \otimes A_{\mathrm{cst}}$ sont dans la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs engendrée par $\{\mathrm{St}_{X, \underline{b}}^v \otimes A_{\mathrm{cst}}, (D(T_i|T_j) \cap D(T_j|T_i)) \otimes A_{\mathrm{cst}}\}$. Le k -variété rigide $D(T_i|T_j)$ est le spectre de la \mathcal{O}_X -algèbre affinoïde

$$\frac{\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_n\}}{(T_1^{b_1} \dots T_n^{b_n} - v)} \{S_j\} / (T_i S_j - T_j) \\ = \frac{\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_i, \dots, T_{j-1}, S_j, T_{j+1}, \dots, T_n\}}{(T_1^{b_1} \dots T_{i-1}^{b_{i-1}} T_i^{b_i + b_j} T_{i+1}^{b_{i+1}} \dots T_{j-1}^{b_{j-1}} S_j^{b_j} T_{j+1}^{b_{j+1}} \dots T_n^{b_n} - v)}.$$

On a donc un isomorphisme

$$D(T_i|T_j) \simeq \mathrm{St}_{X, \underline{b}^i}^v$$

avec $\underline{b}^i = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + b_j, b_{i+1}, \dots, b_n)$. De même, on a un isomorphisme

$$D(T_j|T_i) \simeq \mathrm{St}_{X, \underline{b}^j}^v$$

où $\underline{b}^j = (b_1, \dots, b_{j-1}, b_i + b_j, b_{j+1}, \dots, b_n)$. L'intersection $D(T_i|T_j) \cap D(T_j|T_i)$ coïncide avec l'ouvert rationnel $\{x \in D(T_i|T_j); |T_j/T_i(x)| = 1\}$. Cette intersection est donc

donnée par $D(T_i|T_j)\{1/S_j\}$. Son algèbre affinoïde est

$$\frac{\mathcal{O}_X\{S_j, S_j^{-1}\}\{T_1, \dots, T_i, \dots, T_{j-1}, T_{j+1}, \dots, T_n\}}{(T_1^{b_1} \dots T_{i-1}^{b_{i-1}} T_i^{b_i+b_j} T_{i+1}^{b_{i+1}} \dots T_{j-1}^{b_{j-1}} T_{j+1}^{b_{j+1}} \dots T_n^{b_n} - S_j^{-b_j} v)}$$

On peut donc identifier $D(T_i|T_j) \cap D(T_j|T_i)$ à $\text{St}_{X\{U, U^{-1}\}, \underline{c}}^{U^{-b_j} v}$ avec

$$\underline{c} = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + b_j, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n).$$

Par la récurrence sur la longueur n des n -uplets, on sait que pour $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\text{St}_{X\{U, U^{-1}\}, \underline{c}}^{U^{-m} v} \otimes A_{\text{cst}}$ est dans la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs engendrée par

$$(1.52) \quad \left\{ \left[\frac{X\{U, U^{-1}\}\{U_1, U_1^{-1}, \dots, U_r, U_r^{-1}, R\}}{(R^p - U_1^{m_1} \dots U_r^{m_r} U^{-m} v)} \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^{n-1-r} \right] \otimes A_{\text{cst}}; \right. \\ \left. p \in \mathbb{N} - \{0\}, 0 \leq r \leq n-1 \text{ et } (m_i)_i \in \mathbb{Z}^r \right\}.$$

Il vient que $\text{St}_{X, \underline{b}^j}^v \otimes A_{\text{cst}}$ et $\text{St}_{X, \underline{b}^i}^v \otimes A_{\text{cst}}$ sont dans la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs engendrée par l'ensemble (1.51) auquel on adjoint le singleton $\{\text{St}_{X, \underline{b}}^v \otimes A_{\text{cst}}\}$. Ainsi, si l'on connaît l'énoncé du lemme pour le n -uplet \underline{b} , on le connaît aussi pour \underline{b}_i^j et \underline{b}_j^i . Or, on peut obtenir tout n -uplet \underline{a} à partir d'un n -uplet constant en appliquant suffisamment de fois la construction $\underline{b} \rightsquigarrow \underline{b}_i^j$ avec (i, j) bien choisi. Il nous reste donc à traiter le cas du n -uplet $\underline{p}_n = (p, \dots, p)$ pour conclure.

Étape 2 : Considérons la k -variété rigide

$$\text{St}_{X\{T_n\}, \underline{p}_{n-1}}^v = X\{T_1, \dots, T_n\}/(T_1^p \dots T_{n-1}^p - v).$$

La section T_{n-1} engendre $\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_n\}/(T_1^p \dots T_{n-1}^p - v)$ comme idéal. On peut donc considérer le recouvrement standard de la variété rigide $\text{St}_{X\{T_n\}, \underline{p}_{n-1}}^v$ par les ouverts $D(T_{n-1}|T_n)$ et $D(T_n|T_{n-1})$. On a :

$$\begin{aligned} D(T_{n-1}|T_n) &= \text{Spm} \left(\frac{\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_n\}\{S_n\}}{T_1^p \dots T_{n-1}^p - v} / (S_n T_{n-1} - T_n) \right) \\ &= \text{Spm} \left(\frac{\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_{n-1}, S_n\}}{T_1^p \dots T_{n-1}^p - v} \right) \simeq \text{St}_{X\{S_n\}, \underline{p}_{n-1}}^v, \\ D(T_n|T_{n-1}) &= \text{Spm} \left(\frac{\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_n\}\{S_{n-1}\}}{(T_1^p \dots T_{n-1}^p - v, S_{n-1} T_n - T_{n-1})} \right) \\ &= \text{Spm} \left(\frac{\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_{n-2}, S_{n-1}, T_n\}}{T_1^p \dots T_{n-2}^p S_{n-1}^p T_n^p - v} \right) \simeq \text{St}_{X, \underline{p}_n}^v, \\ D(T_{n-1}|T_n) \cap D(T_n|T_{n-1}) &= \text{Spm} \left(\frac{\mathcal{O}_X\{T_1, \dots, T_{n-1}, S_n, S_n^{-1}\}}{T_1^p \dots T_{n-1}^p - v} \right) \\ &\simeq \text{St}_{X\{S_n, S_n^{-1}\}, \underline{p}_{n-1}}^v. \end{aligned}$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence et le triangle distingué de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} (D(T_{n-1}|T_n) \cap D(T_n|T_{n-1})) \otimes A_{\text{cst}} &\longrightarrow D(T_{n-1}|T_n) \otimes A_{\text{cst}} \oplus D(T_n|T_{n-1}) \otimes A_{\text{cst}} \\ &\longrightarrow \text{St}_X^v\{T_n\}_{p_{n-1}} \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow \end{aligned}$$

pour conclure. Le lemme est démontré.

C.Q.F.D.

1.2.4. Topologies de Nisnevich et foncteur d'analytification. — Dans le paragraphe 1.1.3, on a construit un foncteur d'analytification. L'analytification d'un recouvrement Nisnevich est encore un recouvrement Nisnevich du fait du résultat plus précis suivant.

Théorème 1.2.39. — *On suppose que la valuation de k est non triviale et on se donne une k -algèbre affinoïde A . Soient X un A -schéma de type fini et $\mathcal{R} = (u_i : U_i \rightarrow X)_i$ un recouvrement Nisnevich de X . La famille*

$$\mathcal{R}^{\text{an}} = (u_i^{\text{an}} : U_i^{\text{an}} \rightarrow X^{\text{an}})_i$$

se raffine par un recouvrement ouvert admissible de X^{an} .

Démonstration. — On peut trouver une suite strictement croissante d'ouverts Zariski $\emptyset \neq X_0 \subset \dots \subset X_n = X$ et des carrés Nisnevich

$$\begin{array}{ccc} V_i & \longrightarrow & Y_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \longrightarrow & X_{i+1} \end{array}$$

tels que le recouvrement Nisnevich $(X_0 = Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ raffine \mathcal{R} . Démontrons par récurrence sur $0 \leq r \leq n$ que $(Y_0^{\text{an}}, \dots, Y_r^{\text{an}})$ se raffine par un recouvrement ouvert admissible de X_r^{an} . Ceci étant évident pour $r = 0$, on supposera que $r > 0$ et que le résultat est connu pour $r - 1$.

On fixe un recouvrement ouvert admissible $(P_j)_{j \in J}$ de X_{r-1}^{an} qui raffine le recouvrement $(Y_0^{\text{an}}, \dots, Y_{r-1}^{\text{an}})$. Soit $(Q_t)_{t \in T}$ un recouvrement ouvert admissible de X_r^{an} par des k -affinoïdes. Notons $Z = X_r - X_{r-1}$ et $Z_t = Q_t \cap Z^{\text{an}}$.

Soit $p \in \mathcal{P}(Z_t)$. L'anneau $\mathcal{O}_{Q_t,p}$ est hensélien par la proposition 1.1.35. Or, le morphisme évident $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Q_t,p}) \rightarrow X_r$ envoie le point fermé de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Q_t,p})$ sur un point de Z . Il existe donc un unique morphisme $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Q_t,p}) \rightarrow Y_r$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & Y_r \\ & \nearrow & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathcal{O}_{Q_t,p}) & \longrightarrow & X_r \end{array}$$

Le X_r -schéma Y_r étant de présentation finie, on peut trouver un voisinage affinoïde $O_p \subset Q_t$ de p et un morphisme $v_p : O_p \rightarrow Y_r^{\text{an}}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y_r^{\text{an}} \\ & \nearrow v_p & \downarrow \\ O_p & \longrightarrow & Q_t \longrightarrow X_r^{\text{an}} \end{array}$$

Étant donné que $\mathcal{P}(Z_t)$ est quasi-compact, il existe un nombre fini de points $p_1, \dots, p_s \in \mathcal{P}(Z_t)$ tels que $Z_t = (O_{p_1} \cap Z) \cup \dots \cup (O_{p_s} \cap Z)$. Notons $D_t = O_{p_1} \cup \dots \cup O_{p_s}$. Les morphismes v_{p_1}, \dots, v_{p_s} se recollent en un morphisme de X_r^{an} -variétés rigides $D_t \rightarrow Y_r^{\text{an}}$. Il est alors clair que la famille d'immersions ouvertes $(P_j)_{j \in J} \coprod (D_t)_{t \in T}$ raffine (Y_0, \dots, Y_r) . Pour terminer, il reste à voir que cette famille est un recouvrement admissible. Il suffit pour cela de montrer que la famille $(P_j \widehat{\times}_{X^{\text{an}}} Q_t)_{j \in J} \coprod \{D_t\}$ est un recouvrement admissible de Q_t . Ceci découle du lemme 1.2.40 ci-dessous. C.Q.F.D.

Lemme 1.2.40. — Soient X un k -affinoïde et $Z \subset X$ une sous-variété rigide fermée. On suppose donné un recouvrement ouvert admissible \mathcal{U} de $X - Z$ et un domaine $D \subset X$ contenant Z . Alors, $\mathcal{U} \coprod \{D\}$ est un recouvrement admissible de X .

Démonstration. — Soit \mathcal{X} un modèle de X tel que $D = \mathcal{D}_\eta$ pour \mathcal{D} un ouvert Zariski de \mathcal{X} et $Z = \mathcal{Z}_\eta$ pour \mathcal{Z} un sous-schéma formel fermé de \mathcal{D} . En supposant que \mathcal{Z} est essentiel, on a $\mathcal{Z} \subset \mathcal{D}$. Ainsi, si \mathcal{V} est l'ouvert $\mathcal{X} - \mathcal{Z}_\sigma$, on a $\mathcal{X} = \mathcal{D} \cup \mathcal{V}$. Il s'ensuit que $X = D \cup \mathcal{V}_\eta$. Soit (V_1, \dots, V_n) un recouvrement admissible de \mathcal{V}_η qui raffine $\mathcal{U} \widehat{\times}_X \mathcal{V}_\eta$. Le recouvrement (V_1, \dots, V_n, D) est alors admissible et raffine $\mathcal{U} \coprod \{D\}$. C.Q.F.D.

On obtient immédiatement les deux corollaires suivants.

Corollaire 1.2.41. — Soient A une k -algèbre affinoïde et X un A -schéma de type fini. Le foncteur $\text{Rig} : \text{Et}/X \rightarrow \text{Et}/X^{\text{an}}$ induit un morphisme de sites

$$(\text{Et}/X^{\text{an}}, \text{Nis}) \longrightarrow (\text{Et}/X, \text{Nis}).$$

Pour la notion de P -structures sur un site, le lecteur est renvoyé à [3, Définition 4.4.57].

Corollaire 1.2.42. — Soit A une k -algèbre affinoïde. On munit le site $(\text{Sm}/A, \text{Nis})$ de sa P -structure étale qui à un A -schéma X associe le petit site $(\text{Et}/X, \text{Nis})$. De même, on munit le site $(\text{SmRig}/A, \text{Nis})$ de sa P -structure étale qui à une A -variété rigide X associe le petit site $(\text{Et}/X, \text{Nis})$. Le foncteur d'analytification $\text{Rig} : \text{Sm}/A \rightarrow \text{SmRig}/A$ induit alors un pré-morphisme de sites⁽⁷⁾ $(\text{SmRig}/A, \text{Nis}) \rightarrow (\text{Sm}/A, \text{Nis})$ compatible aux P -structures étales (au sens de [3, Définition 4.4.59]).

Remarque 1.2.43. — Le foncteur continu Rig est en fait un morphisme de sites. Cette propriété repose sur le théorème de Popescu (voir [34, 35]). Étant donné que

⁽⁷⁾ Un pré-morphisme de sites est simplement un foncteur continu écrit dans le sens opposé (voir [3, Définition 4.4.46]).

le corollaire 1.2.42 est suffisant pour les besoins de ce chapitre, on reportera la preuve de cette propriété au chapitre suivant (voir le lemme 2.5.23).

Notons également le résultat simple suivant.

Proposition 1.2.44. — *Soient X un k -schéma de type fini et (C) un carré Nisnevich de X -schémas étales. Notons (C^{an}) le carré de k -variétés rigides obtenu à partir de (C) en appliquant le foncteur d'analytification. L'image de (C^{an}) par le plongement de Yoneda est un carré cartésien et cocartésien dans $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X^{\text{an}})$.*

Le même énoncé reste vrai pour les carrés Nisnevich dans Sch/k , Sm/A (où A une k -algèbre affinoïde), etc.

Démonstration. — Les plongements de Yoneda

$$\text{Et}/X \hookrightarrow \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X) \quad \text{et} \quad \text{Et}/X^{\text{an}} \hookrightarrow \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X^{\text{an}})$$

seront notés h . Le fait que $h(C^{\text{an}})$ est cartésien découle de la commutation de h aux limites finies.

Montrons que $h(C^{\text{an}})$ est cocartésien. Le prémorphisme de sites

$$\text{Rig} : (\text{Et}/X^{\text{an}}, \text{Nis}) \longrightarrow (\text{Et}/X, \text{Nis})$$

induit un foncteur image inverse $\text{Rig}^* : \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X) \rightarrow \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X^{\text{an}})$ qui commute aux colimites. On a un isomorphisme naturel $\text{Rig}^* \circ h \simeq h \circ \text{Rig}$. Le résultat découle alors du fait que $h(C)$ est cocartésien dans $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/X)$. Les autres variantes se démontrent exactement de la même manière. C.Q.F.D.

1.3. Les catégories \mathbb{B}^1 -homotopiques des k -variétés rigides

On fixe une catégorie de coefficients \mathfrak{M} (voir la définition 1.2.31). On pourra prendre pour \mathfrak{M} la catégorie des complexes de groupes abéliens ou, plus généralement, des complexes de Λ -modules sur un anneau Λ . On peut également prendre la catégorie des spectres $\mathbf{Spect}_{S^1}(\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns)$ ou celle des spectres symétriques $\mathbf{Spect}_{S^1}^{\Sigma}(\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns)$.

Comme d'habitude, k sera un corps valué complet. Sauf mention explicite du contraire, la valuation de k ne sera pas supposée non triviale. (Toutefois, dans les preuves, on supposera implicitement que la valuation de k est non triviale puisque c'est le cas qui nous intéresse le plus.) Enfin, π désignera un élément de k^{\vee} qu'on supposera non nul lorsque la valuation de k est non triviale.

1.3.1. Construction et propriétés élémentaires : cas instable. — Rappelons que l'on dispose d'une structure de modèles projective Nis-locale sur $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$ dont les équivalences faibles sont les *équivalences Nis-locales*, i.e., les morphismes de préfaisceaux induisant des isomorphismes sur les faisceaux d'homotopie $\Pi_0^{\text{Nis}}(A[n], -)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$. (Voir la définition 1.2.31 pour la signification de « \mathcal{E} » ; étant donné que \mathcal{E} est stable à homotopie près par suspension et cosuspension, il suffit que ceci soit vrai pour $n = 0$.)

On renvoie le lecteur au [3, §4.4.2] (et notamment aux définitions 4.4.15 et 4.4.43 de *loc. cit.*) pour plus de détails sur les catégories de modèles de nature faisceautique. Nous nous contenterons ici de rappeler quelques points de terminologie :

- Une *équivalence faible de préfaisceaux* est un morphisme de préfaisceaux $K \rightarrow L$ induisant une équivalence faible $K(U) \rightarrow L(U)$ pour toute k -variété rigide lisse U .
- Une *fibration projective de préfaisceaux* est un morphisme de préfaisceaux $K \rightarrow L$ induisant une fibration $K(U) \rightarrow L(U)$ pour toute k -variété rigide lisse U . Un préfaisceau K est dit *projectivement fibrant* si $K \rightarrow *$ est une fibration projective.
- Une *cofibration projective de préfaisceaux* est un morphisme admettant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations projectives triviales de préfaisceaux (i.e., des fibrations projectives qui sont aussi des équivalences faibles). Un préfaisceau K est dit *projectivement cofibrant* si $* \rightarrow K$ est une cofibration projective.
- Une *fibration projective Nis-locale* (ou *Nis-fibration projective*) est un morphisme admettant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations projectives de préfaisceaux qui sont en plus des équivalences Nis-locales. Un préfaisceau K est dit *projectivement Nis-fibrant* si $K \rightarrow *$ est une Nis-fibration projective.

Un préfaisceau projectivement Nis-fibrant est automatiquement Nis-local; la réciproque est vraie pour les préfaisceaux projectivement fibrants.

La structure de modèles projective Nis-locale sur $\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/k, \mathfrak{M})$ est donnée par les classes des cofibrations projectives, des équivalences Nis-locales et des Nis-fibrations projectives. On localise cette structure de modèles suivant la classe \mathcal{B} des flèches $\mathbb{B}_X^1 \otimes A_{\text{cst}} \rightarrow X \otimes A_{\text{cst}}$ avec X une k -variété rigide lisse et $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$. L'existence de cette localisation découle de la proposition suivante et du théorème de localisation de Hirschhorn ([24], voir aussi [3, Théorème 4.2.71]).

Proposition 1.3.1. — *Soit α un cardinal suffisamment grand. On note $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}$ la sous-classe de \mathcal{B} formée des flèches de buts α -accessibles (voir [3, Définition 4.2.5]). Soit K un objet Nis-local de $\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/k, \mathfrak{M})$. Alors, K est \mathcal{B}_α -local (au sens de [3, Définition 4.2.64]) si et seulement si le morphisme $K \rightarrow \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_k^1, K)$ est une équivalence faible de préfaisceaux. En particulier, pour tout $\beta \geq \alpha$, K est \mathcal{B}_β -local si et seulement si il est \mathcal{B}_α -local.*

Démonstration. — Pour B dans \mathbf{SmRig}/k , le préfaisceau $\underline{\text{hom}}(B, K)$ est défini⁽⁸⁾ par $\underline{\text{hom}}(B, K)(-) = K(B \widehat{\otimes}_k -)$.

⁽⁸⁾ Pour une construction plus générale (où B est remplacé par un préfaisceau d'ensembles général), le lecteur peut consulter [3, Définition 4.4.2].

On reprend l'argument de [3, Proposition 4.5.11]. Dire que K est \mathcal{B}_α -local, revient à dire que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))(X \otimes A_{\mathrm{cst}}[n], K) \\ \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))(\mathbb{B}_X^1 \otimes A_{\mathrm{cst}}[n], K) \end{aligned}$$

est bijective pour toute k -variété rigide lisse X , tout objet α -accessible A de \mathfrak{M} et tout entier $n \in \mathbb{N}$. Par adjonction, et puisque K est Nis-local, cela revient à demander que $\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[n], K(X)) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A[n], K(\mathbb{B}_X^1))$ est bijective. Pour α suffisamment grand (de sorte que A admet un représentant α -accessible pour $A \in \mathcal{E}$), ces applications sont bijectives si et seulement si $K(X) \rightarrow K(\mathbb{B}_X^1)$ est une équivalence faible pour tout X . Ceci revient à dire que $K \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{B}_k^1, K)$ est une équivalence faible de préfaisceaux. C.Q.F.D.

Définition 1.3.2. — *La localisation de la structure projective Nis-locale sur $\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M})$ par rapport à la classe \mathcal{B} sera notée $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{B}^1})$; c'est la structure projective \mathbb{B}^1 -locale (alias $(\mathbb{B}^1, \mathrm{Nis})$ -locale). Sa catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$ sera notée $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{eff}}(k)$. C'est la catégorie homotopique effective des k -variétés rigides à coefficients dans \mathfrak{M} . Voici les cas les plus importants :*

- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des spectres symétriques, on notera simplement $\mathbf{RigSH}^{\mathrm{eff}}(k)$ la catégorie ainsi définie.
- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des complexes de groupes abéliens (resp. de Λ -modules pour un anneau Λ) on notera $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff}}(k)$ (resp. $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)$) la catégorie ainsi définie.

Les flèches de $\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}$ seront appelées les équivalences \mathbb{B}^1 -locales (ou \mathbb{B}^1 -équivalences faibles). Les flèches de $\mathbf{Fib}_{\mathbb{B}^1}$ sont appelées les fibrations projectives \mathbb{B}^1 -locales (ou les \mathbb{B}^1 -fibrations projectives). Un préfaisceau K est projectivement \mathbb{B}^1 -fibrant si $K \rightarrow *$ est une \mathbb{B}^1 -fibration projective.

La catégorie de modèles introduite ci-dessus est stable puisque \mathfrak{M} a été supposée stable. Elle est également monoïdale symétrique et unitaire si \mathfrak{M} l'est.

On note $\mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1}$ le foncteur de \mathbb{B}^1 -localisation, i.e., le foncteur de localisation (voir [3, Proposition 4.2.72]) associé à la localisation de Bousfield simultanée par rapport aux équivalences Nis-locales et aux morphismes dans \mathcal{B} . Ce foncteur est muni d'une transformation naturelle $\mathrm{id} \rightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1}$ et il est caractérisé, aux équivalences faibles de préfaisceaux près, par deux propriétés :

- pour tout préfaisceau K à valeurs dans \mathfrak{M} , le morphisme $K \rightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1}(K)$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale,
- pour tout préfaisceau K à valeurs dans \mathfrak{M} , le préfaisceau $\mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1}(K)$ est \mathbb{B}^1 -local.

Précisons qu'un préfaisceau L à valeurs dans \mathfrak{M} sera dit \mathbb{B}^1 -local si le foncteur $\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))}(-, L)$ transforme les équivalences \mathbb{B}^1 -locales en des isomorphismes. Un préfaisceau projectivement \mathbb{B}^1 -fibrant est automatiquement \mathbb{B}^1 -local; la réciproque est vraie pour les préfaisceaux projectivement fibrants.

Définition 1.3.3. — *Supposons fixé un objet \bullet de \mathfrak{M} (par exemple un objet unité pour la structure monoïdale si \mathfrak{M} est une catégorie de modèles monoïdale). On appelle alors motif effectif d'une k -variété rigide lisse X l'objet $X \otimes \bullet_{\mathrm{cst}}$ considéré dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{eff}}(k)$. D'une manière équivalente, le motif effectif de X est la \mathbb{B}^1 -localisation de $X \otimes \bullet_{\mathrm{cst}}$ considérée comme un objet de $\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$. Le motif effectif de X sera noté $M^{\mathrm{eff}}(X)$ (ou encore $M^{\mathrm{eff}}(X, \bullet)$).*

On regroupe quelques exemples simples d'équivalences \mathbb{B}^1 -locales dans la proposition ci-dessous (voir l'exemple 1.1.15 pour les notations).

Proposition 1.3.4. — *Soient X une k -variété rigide, $f, g, h \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et $p, q, r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tels que $|g(x)|^{1/q} \leq |h(x)|^{1/r} \leq |f(x)|^{1/p}$ pour tout point fermé x de X . Soit E un préfaisceau sur SmRig/k à valeurs dans \mathfrak{M} . Les morphismes suivants sont des équivalences \mathbb{B}^1 -locales :*

- 1) $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E \rightarrow X \otimes E$,
- 2) $((\mathbb{A}_k^1)^{\mathrm{an}} \widehat{\times}_k X) \otimes E \rightarrow X \otimes E$,
- 3) $\partial \mathbb{B}_X^1(o, h^{1/r}) \otimes E \rightarrow \mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p}) \otimes E$,
- 4) $\partial \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E \rightarrow ((\mathbb{A}_k^1 - o)^{\mathrm{an}} \widehat{\times}_k X) \otimes E$,
- 5) $\partial \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E \rightarrow (\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) - o_X) \otimes E$.

Démonstration. — Étant donné que les coproduits directs dans \mathfrak{M} préservent les équivalences faibles, on ne restreint pas la généralité en supposant que E est injectivement cofibrant, i.e., que $E(U)$ est cofibrant pour toute k -variété rigide lisse U . (Ceci ne sera utile que pour traiter les deux dernières flèches de l'énoncé.)

Considérons la première flèche. On traite d'abord le cas $f = 1$. Il suffit de montrer que l'application

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))}(X \otimes E, K) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))}(\mathbb{B}_X^1 \otimes E, K)$$

est bijective pour tout préfaisceau \mathbb{B}^1 -local K . Par adjonction, cette application s'identifie à

$$\begin{aligned} & \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))}(X \otimes E, K) \\ & \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M}))}(X \otimes E, \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{B}_k^1, K)). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors de la proposition 1.3.1. Revenons au cas général. On dispose d'une action par homothétie $m : \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \rightarrow \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$ de \mathbb{B}_k^1 sur $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$. La flèche $m \otimes E$ fournit une homotopie entre l'identité de $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E$

et la composition de

$$\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E \longrightarrow X \otimes E \xrightarrow{o \otimes E} \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E.$$

Ces deux morphismes deviennent donc égaux dans la catégorie homotopique, ce qui montre que $o \otimes E : X \otimes E \rightarrow \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E$ est un inverse à gauche et à droite de la flèche qui nous intéresse. Pour la deuxième flèche, on raisonne de la même manière en utilisant l'action par homothétie $m : \mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}} \rightarrow (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$.

On considère maintenant la troisième flèche. On suppose d'abord que $h = g$ et $q = r$. Le recouvrement admissible de $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$ par $\mathbb{B}_X^1(o, g^{1/q})$ et $\mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p})$ fournit le carré homotopiquement cocartésien (relativement à la structure Nis-locale)

$$\begin{array}{ccc} \partial \mathbb{B}_X^1(o, g^{1/q}) \otimes E & \longrightarrow & \mathbb{B}_X^1(o, g^{1/q}) \otimes E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p}) \otimes E & \longrightarrow & \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) \otimes E. \end{array}$$

Par stabilité de la structure de modèles \mathbb{B}^1 -locale, le résultat découle du fait que la flèche verticale de droite est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale (ce qui découle de la discussion précédente). Le cas $h = f$ et $r = p$, se déduit du cas précédent via les isomorphismes

$$\begin{aligned} (-)^{-1} : \mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p}) &\longrightarrow \mathbb{C}r_X^1(o, f^{-1/p}, g^{-1/q}), \\ (-)^{-1} : \partial \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) &\longrightarrow \partial \mathbb{B}_X^1(o, f^{-1/p}). \end{aligned}$$

Pour le cas général, on utilise le recouvrement admissible de $\mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p})$ par les couronnes $\mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, h^{1/r})$ et $\mathbb{C}r_X^1(o, h^{1/r}, f^{1/p})$. On obtient alors un carré homotopiquement cocartésien (relativement à la structure Nis-locale)

$$\begin{array}{ccc} \partial \mathbb{B}_X^1(o, h^{1/r}) \otimes E & \xrightarrow{(1)} & \mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, h^{1/r}) \otimes E \\ (2) \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}r_X^1(o, h^{1/r}, f^{1/p}) \otimes E & \longrightarrow & \mathbb{C}r_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p}) \otimes E \end{array}$$

avec (1) et (2) des équivalences \mathbb{B}^1 -locales. Toutes les flèches du carré ci-dessus sont alors des équivalences \mathbb{B}^1 -locales.

Pour la quatrième flèche, on utilise le fait que

$$\text{Colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}r_X^1(o, |\pi|^n, |\pi|^{-n}) \otimes E \longrightarrow ((\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}} \widehat{\times}_k X) \otimes E$$

est une équivalence Nis-locale et qu'une composition transfinie de cofibrations injectives \mathbb{B}^1 -triviales est une cofibration injective \mathbb{B}^1 -triviale. (On utilise ici l'existence d'une structure de modèles *injective \mathbb{B}^1 -locale*, voir [3, Définition 4.5.12] pour le cas algébrique.) La cinquième flèche se traite de la même manière en utilisant le recouvrement admissible $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p}) - o_X = \text{Colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}r_X^1(o, (\pi^n f)^{1/p}, f^{1/p})$. C.Q.F.D.

On note une conséquence qui sera utile plus tard.

Corollaire 1.3.5. — *Soit E un préfaisceau sur SmRig/k à valeurs dans \mathfrak{M} . La flèche*

$$[(\mathbb{A}_{k^\circ}^n - o) // (\pi)]_\eta \otimes E \longrightarrow (\mathbb{A}_k^n - o)^{\text{an}} \otimes E$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, on retrouve la quatrième flèche de la proposition 1.3.4. Supposons $n \geq 2$. On peut couvrir $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n - o$ par les ouverts $U = (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n-1} - o) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ et $V = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n-1} \times_{\mathbb{Z}} (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o)$ dont l'intersection est $W = (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n-1} - o) \times_{\mathbb{Z}} (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o)$. On obtient ainsi un morphisme de triangles distingués de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} [W_{k^\circ} // (\pi)]_\eta \otimes E & \rightarrow & [U_{k^\circ} // (\pi)]_\eta \otimes E \oplus [V_{k^\circ} // (\pi)]_\eta \otimes E & \rightarrow & [(\mathbb{A}_{k^\circ}^n - o) // (\pi)]_\eta \otimes E & \rightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ W_k^{\text{an}} \otimes E & \longrightarrow & U_k^{\text{an}} \otimes E \oplus V_k^{\text{an}} \otimes E & \longrightarrow & (\mathbb{A}_k^n - o)^{\text{an}} \otimes E & \longrightarrow & . \end{array}$$

Les deux premières flèches verticales sont inversibles dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k)$ par l'hypothèse de récurrence. C.Q.F.D.

Par le corollaire 1.2.42 et [3, Théorème 4.4.60], on dispose d'une adjonction de Quillen relativement aux structures Nis-locales projectives

$$(\text{Rig}^*, \text{Rig}_*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/k, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}).$$

On a la proposition suivante.

Proposition 1.3.6. — *La paire $(\text{Rig}^*, \text{Rig}_*)$ est une adjonction de Quillen si on munit $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/k, \mathfrak{M})$ de sa structure projective \mathbb{A}^1 -locale et $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$ de sa structure projective \mathbb{B}^1 -locale. En particulier, on dispose d'un foncteur triangulé*

$$\text{Rig}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que le foncteur Rig^* envoie les flèches de la forme $\mathbb{A}_X^1 \otimes A_{\text{cst}} \rightarrow X \otimes A_{\text{cst}}$ sur des équivalences \mathbb{B}^1 -locales. On utilise pour cela la proposition 1.3.4. C.Q.F.D.

On peut aussi localiser la structure Nis-locale sur $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})$ relativement à la classe \mathcal{B}^{qc} des flèches $\mathbb{B}_X^1 \otimes A_{\text{cst}} \rightarrow X \otimes A_{\text{cst}}$ avec X une k -variété rigide, quasi-compacte et lisse, et $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$. En effet, l'analogie de la proposition 1.3.1 est encore valable. On obtient ainsi la structure \mathbb{B}^1 -locale. Il est clair que $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})$ et $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$, munies des structures projectives \mathbb{B}^1 -locales, sont Quillen équivalentes.

Proposition 1.3.7. — *Un préfaisceau K de $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})$ est fibrant pour la structure projective \mathbb{B}^1 -locale si et seulement si il vérifie les conditions suivantes :*

- (i) *pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse X , $K(X)$ est un objet fibrant de \mathfrak{M} ,*

- (ii) le préfaisceau K vérifie la propriété de Brown-Gersten (voir la définition 1.2.29),
- (iii) pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse X , le morphisme $K(\mathbb{B}_X^1) \rightarrow K(X)$ est une équivalence faible.

En particulier, la classe des objets \mathbb{B}^1 -fibrants de $\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/k, \mathfrak{M})$ est stable par colimites filtrantes.

Démonstration. — Les deux premières conditions affirment que K est projectivement fibrant pour la structure Nis-locale (voir le corollaire 1.2.32). Il reste à voir que K est \mathbb{B}^1 -local si et seulement si il vérifie (iii). Ceci découle immédiatement de la proposition 1.3.1 (en fait, de sa version pour les variétés rigides quasi-compactes). C.Q.F.D.

Corollaire 1.3.8. — La catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{eff}}(k)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $X \otimes A_{\mathrm{cst}}$ avec X une k -variété rigide, quasi-compacte et lisse, et $A \in \mathcal{E}$.

Démonstration. — On montre d'abord que les objets $X \otimes A_{\mathrm{cst}}$ sont compacts. Il est plus précis de montrer que le foncteur

$$(1.53) \quad \mathrm{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{eff}}(k)}(X \otimes A_{\mathrm{cst}}, -) : \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/k, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

commute aux colimites filtrantes. Ce foncteur peut s'écrire comme la composition de

$$(1.54) \quad \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/k, \mathfrak{M}) \xrightarrow{\mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1}} \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/k, \mathfrak{M}) \xrightarrow{\pi_0(A, \Gamma(X, -))} \mathcal{A}b$$

où $\mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1}$ est le foncteur de \mathbb{B}^1 -localisation. Par la proposition 1.3.7, la transformation naturelle $\mathrm{Colim}_{\mathcal{J}} \circ \mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1} \rightarrow \mathrm{Loc}_{\mathbb{B}^1} \circ \mathrm{Colim}_{\mathcal{J}}$ induit des équivalences faibles de préfaisceaux pour toute petite catégorie filtrante \mathcal{J} . D'où le résultat recherché.

Pour terminer, il reste à vérifier que la famille des foncteurs (1.53) détecte les équivalences \mathbb{B}^1 -locales. Il suffit pour cela de considérer des morphismes entres objets projectivement \mathbb{B}^1 -fibrants. Le résultat découle alors de la condition (iii) de la définition 1.2.31. C.Q.F.D.

Lorsque k est d'égale caractéristique nulle et que sa valuation est discrète, on a un résultat plus précis.

Théorème 1.3.9. — Supposons que $k = \tilde{k}((\pi))$ avec \tilde{k} un corps de caractéristique nulle. Avec les notations 1.2.35, la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{eff}}(k)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $Q_p^{\mathrm{rig}}(X, f) \otimes A_{\mathrm{cst}}$ avec X un \tilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$, $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $A \in \mathcal{E}$.

Démonstration. — Les objets de l'énoncé sont compacts d'après le corollaire 1.3.8. Il reste à voir que ces objets engendrent la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{eff}}(k)$. Ceci découle du théorème 1.2.36 puisque le foncteur

$$\mathbf{Ho}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{eff}}(k)$$

est essentiellement surjectif (en fait, c'est l'identité sur les objets).

C.Q.F.D.

1.3.2. Motifs rigides de quelques variétés algébriques. — On fixe un objet \bullet de \mathfrak{M} (par exemple, un objet unité pour la structure monoïdale si \mathfrak{M} est une catégorie de modèles monoïdale). Étant donné un k -schéma lisse X , le *motif rigide effectif* de X est par définition le motif effectif de la k -variété rigide lisse X^{an} ; c'est donc un objet de $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k)$.

Dans cette section, on suppose que la valuation de k est discrète et que \tilde{k} est de caractéristique nulle. On fixe un isomorphisme $k \simeq \tilde{k}((\pi))$. Soient X un \tilde{k} -schéma, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ et p un entier naturel non nul. On rappelle et on complète les notations 1.2.35.

Notation 1.3.10. — On définit un k° -schéma

$$Q_p^{\text{sch}}(X, f) = (X \times_{\tilde{k}} k^\circ)[V]/(V^p - f\pi).$$

On note alors $Q_p^{\text{for}}(X, f)$ la complétion formelle de $Q_p^{\text{sch}}(X, f)$ en sa fibre spéciale et $Q_p^{\text{rig}}(X, f) = Q_p^{\text{for}}(X, f)_\eta$ la fibre générique de $Q_p^{\text{for}}(X, f)$. On définit le k -schéma $Q_p^{\text{geo}}(X, f) = Q_p^{\text{sch}}(X, f)[1/\pi]$ et on note $Q_p^{\text{an}}(X, f) = (Q_p^{\text{geo}}(X, f))^{\text{an}}$ son analytifié. Par la proposition 1.1.31, on dispose d'une immersion ouverte

$$Q_p^{\text{rig}}(X, f) \hookrightarrow Q_p^{\text{an}}(X, f).$$

Lorsque $p = 1$, on notera simplement $Q^{\text{sch}}(X)$, $Q^{\text{for}}(X)$, $Q^{\text{rig}}(X)$, $Q^{\text{geo}}(X)$ et $Q^{\text{an}}(X)$.

Voici le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 1.3.11. — *Soient X un \tilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et p un entier naturel non nul. Pour tout préfaisceau E sur SmRig/k à valeurs dans \mathfrak{M} , le morphisme $Q_p^{\text{rig}}(X, f) \otimes E \rightarrow Q_p^{\text{an}}(X, f) \otimes E$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.*

On peut supposer que X est connexe (donc irréductible). On raisonne par récurrence sur la dimension de X . On commence par un dévissage.

Lemme 1.3.12. — *Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé strict. On suppose que Y est lisse. Sous l'hypothèse de récurrence, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $Q_p^{\text{rig}}(X, f) \otimes E \rightarrow Q_p^{\text{an}}(X, f) \otimes E$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale,
- (ii) $Q_p^{\text{rig}}(X - Y, f) \otimes E \rightarrow Q_p^{\text{an}}(X - Y, f) \otimes E$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Démonstration. — Notons $U = X - Y$. Nous allons montrer que le morphisme évident

$$(1.55) \quad [Q_p^{\text{rig}}(X, f) \otimes E]/[Q_p^{\text{rig}}(U, f) \otimes E] \longrightarrow [Q_p^{\text{an}}(X, f) \otimes E]/[Q_p^{\text{an}}(U, f) \otimes E]$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Cela suffit pour conclure puisqu'on dispose d'un morphisme de triangles distingués dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k)$

$$\begin{array}{ccccccc} Q_p^{\text{rig}}(U, f) \otimes E & \longrightarrow & Q_p^{\text{rig}}(X, f) \otimes E & \longrightarrow & [Q_p^{\text{rig}}(X, f) \otimes E]/[Q_p^{\text{rig}}(U, f) \otimes E] & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Q_p^{\text{an}}(U, f) \otimes E & \longrightarrow & Q_p^{\text{an}}(X, f) \otimes E & \longrightarrow & [Q_p^{\text{an}}(X, f) \otimes E]/[Q_p^{\text{an}}(U, f) \otimes E] & \longrightarrow & . \end{array}$$

On procède en deux étapes.

Étape 1 : Soit $X = X_1 \cap X_2$ un recouvrement Zariski de X . Supposons que (1.55) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale lorsqu'on remplace X (resp. U) par X_1, X_2 et $X_{12} = X_1 \cap X_2$ (resp. $U_1 = X_1 \cap U, U_2 = X_2 \cap U$ et $U_{12} = U_1 \cap U_2$). On dispose d'un morphisme de triangles distingués dans $\mathbf{RigSH}_{\text{eff}}^{\text{an}}(k)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{Q_p^{\text{rig}}(X_{12}, f) \otimes E}{Q_p^{\text{rig}}(U_{12}, f) \otimes E} & \rightarrow & \frac{Q_p^{\text{rig}}(X_1, f) \otimes E}{Q_p^{\text{rig}}(U_1, f) \otimes E} & \oplus & \frac{Q_p^{\text{rig}}(X_2, f) \otimes E}{Q_p^{\text{rig}}(U_2, f) \otimes E} & \rightarrow & \frac{Q_p^{\text{rig}}(X, f) \otimes E}{Q_p^{\text{rig}}(U, f) \otimes E} \rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{Q_p^{\text{an}}(X_{12}, f) \otimes E}{Q_p^{\text{an}}(U_{12}, f) \otimes E} & \rightarrow & \frac{Q_p^{\text{an}}(X_1, f) \otimes E}{Q_p^{\text{an}}(U_1, f) \otimes E} & \oplus & \frac{Q_p^{\text{an}}(X_2, f) \otimes E}{Q_p^{\text{an}}(U_2, f) \otimes E} & \rightarrow & \frac{Q_p^{\text{an}}(X, f) \otimes E}{Q_p^{\text{an}}(U, f) \otimes E} \rightarrow \end{array}$$

montrant que (1.55) est aussi une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Plus généralement, soit $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement Zariski fini de X . Pour $\emptyset \neq J \subset I$, on note $X_J = \bigcap_{j \in J} X_j$ et $U_J = U \cap X_J$. Supposons que (1.55) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale lorsqu'on remplace X et U par X_J et U_J pour tout $\emptyset \neq J \subset I$. Alors, (1.55) est elle-même une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. En effet, si $\text{card}(I) > 2$, on choisit une partition $I = J \amalg \{i_0\}$. Par récurrence sur le cardinal de I , on peut supposer que (1.55) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale pour X remplacé par $\bigcup_{j \in J} X_j$ et $\bigcup_{j \in J} (X_j \cap X_{i_0})$ et U remplacé par $\bigcup_{j \in J} U_j$ et $\bigcup_{j \in J} (U_j \cap U_{i_0})$. Il suffit alors d'appliquer la discussion précédente au recouvrement de X par les deux ouverts X_{i_0} et $\bigcup_{j \in J} X_j$.

Étape 2 : Par l'étape précédente, le problème de savoir si (1.55) est une \mathbb{B}^1 -équivalence faible est local en X . On peut donc supposer qu'il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_{\tilde{k}}^{n-d} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\tilde{k}}^d \times_{\tilde{k}} \mathbb{A}_{\tilde{k}}^{n-d} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des morphismes étales. On a bien entendu $n = \dim(X)$ et $d = \text{codim}_X(Y)$. On peut écrire $Y \times_{\mathbb{A}_{\tilde{k}}^{n-d}} Y = Y \amalg F$. Si $X' = X \times_{\mathbb{A}_{\tilde{k}}^{n-d}} Y - F$, on obtient deux carrés Nisnevich de \tilde{k} -schémas

$$(1.56) \quad \begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow a \\ U & \longrightarrow & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow b \\ (\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d - o) \times_{\tilde{k}} Y & \longrightarrow & (\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d) \times_{\tilde{k}} Y. \end{array}$$

Notons $g = 1 \otimes f|_Y$ la fonction inversible sur $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d \times_{\tilde{k}} Y$ et constante relativement à $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d$. La fonction inversible $h = \frac{f \circ a}{g \circ b} \in \Gamma(X', \mathcal{O}^\times)$ vaut 1 sur Y . Le changement de base du X' -schéma étale $X'[T]/(T^p - h)$ suivant $Y \hookrightarrow X'$ est donnée par

$$Y[T]/(T^p - 1) = Y \amalg Y[T]/(T^{p-1} + \dots + T + 1).$$

On a donc un carré Nisnevich

$$\begin{array}{ccc} U'' & \longrightarrow & X'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

avec $X'' = X'[T]/(T^p - h) - Y[T]/(T^{p-1} + \dots + T + 1)$. Par composition verticale avec (1.56), on obtient les deux carrés Nisnevich

$$(1.57) \quad \begin{array}{ccc} U'' & \longrightarrow & X'' \\ \downarrow & & \downarrow a' \\ U & \longrightarrow & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U'' & \longrightarrow & X'' \\ \downarrow & & \downarrow b' \\ (\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d - o) \times_{\tilde{k}} Y & \longrightarrow & (\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d) \times_{\tilde{k}} Y. \end{array}$$

De plus, la fonction $h' = \frac{f \circ a'}{g \circ b'} \in \Gamma(X'', \mathcal{O}^\times)$ admet une racine p -ème que l'on notera l . On a alors un isomorphisme

$$\begin{aligned} Q_p^{\text{sch}}(X'', f \circ a') &= (X'' \times_{\tilde{k}} k^\circ)[V_1]/(V_1^p - (f \circ a')\pi) \\ &\xrightarrow{\sim} Q_p^{\text{sch}}(X'', f \circ b') = (X'' \times_{\tilde{k}} k^\circ)[V_2]/(V_2^p - (g \circ b')\pi) \end{aligned}$$

qui consiste à identifier V_1 avec V_2 . On en déduit des isomorphismes

$$Q_p^?(X'', f \circ a) \simeq Q_p^?(X'', g \circ b) \quad \text{et} \quad Q_p^?(U'', f \circ a) \simeq Q_p^?(U'', g \circ b)$$

pour $? \in \{\text{rig}, \text{geo}\}$. On obtient deux carrés Nisnevich de k -variétés rigides (resp. de k -schémas)

$$\begin{array}{ccc} Q_p^?(U'', f \circ a) & \longrightarrow & Q_p^?(X'', f \circ a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_p^?(U, f) & \longrightarrow & Q_p^?(X, f) \\ Q_p^?(U'', f \circ a) & \longrightarrow & Q_p^?(X'', f \circ a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_p^?((\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d - o) \times_{\tilde{k}} Y, 1 \otimes f|_Y) & \longrightarrow & Q_p^?((\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d) \times_{\tilde{k}} Y, 1 \otimes f|_Y) \end{array}$$

avec $? \in \{\text{rig}, \text{geo}\}$ respectivement. En utilisant la proposition 1.2.44 dans le cas respé, on obtient des équivalences Nis-locales

$$\frac{Q_p^?(X, f) \otimes E}{Q_p^?(U, f) \otimes E} \simeq \frac{Q_p^?(X'', f \circ a') \otimes E}{Q_p^?(U'', f \circ a') \otimes E} \simeq \frac{Q_p^?((\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d - o) \times_{\tilde{k}} Y, 1 \otimes f|_Y) \otimes E}{Q_p^?((\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d) \times_{\tilde{k}} Y, 1 \otimes f|_Y) \otimes E}$$

pour $? \in \{\text{rig}, \text{an}\}$. Il suffit donc de montrer que (1.55) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale pour $X = \mathbb{A}_Y^d$ et f constant relativement à Y . Dans ce cas, la flèche (1.55) s'écrit

$$Q_p^{\text{rig}}(Y, f|_Y) \otimes \left[\frac{\mathbb{B}_{\tilde{k}}^d \otimes E}{((\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d - o) // (\pi))_\eta \otimes E} \right] \longrightarrow Q_p^{\text{an}}(Y, f|_Y) \otimes \left[\frac{(\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d)^{\text{an}} \otimes E}{(\mathbb{A}_{\tilde{k}}^d - o)^{\text{an}} \otimes E} \right].$$

Le résultat découle maintenant de l'hypothèse de récurrence et du corollaire 1.3.5.

C.Q.F.D.

En utilisant le lemme 1.3.12, il est aisé d'obtenir le théorème 1.3.11 dans le cas où f est localement constante (i.e., algébrique sur k). En effet, par la résolution des singularités de Hironaka [23], on peut trouver une compactification $X \hookrightarrow \bar{X}$ avec \bar{X} projectif et lisse, et $\bar{X} - X$ un diviseur à croisements normaux. La fonction localement constante f s'étend alors à \bar{X} . Écrivons

$$\bar{X} - X = D_1 \cup \dots \cup D_n$$

avec D_i irréductibles (donc lisses). Par le lemme 1.3.12, il suffit de traiter le cas de $\bar{X} - \bigcup_{i=2}^n D_i$. Une récurrence simple, nous ramène à traiter le cas de \bar{X} . Par la proposition 1.1.31, l'immersion ouverte $Q_p^{\text{rig}}(\bar{X}, f) \hookrightarrow Q_p^{\text{an}}(\bar{X}, f)$ est un isomorphisme. Ceci permet de conclure dans ce cas.

À partir de maintenant, on supposera que f n'est pas localement constante. Le morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}} = \text{Spec}(\tilde{k}[T, T^{-1}])$ envoyant T sur f est donc plat (puisque X a été supposé irréductible). Par la résolution des singularités de Hironaka [23], on peut compactifier f en un morphisme propre $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\tilde{k}}^1$ tel que :

- 1) \bar{X} est un \tilde{k} -schéma propre et lisse,
- 2) le complémentaire de X dans \bar{X} est un diviseur à croisements normaux.

La fonction inversible f s'étend en une fonction inversible sur $\bar{f}^{-1}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}})$. Par le lemme 1.3.12 et puisque X est un ouvert dense de $\bar{f}^{-1}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}})$, il est suffisant de traiter le cas de $\bar{f}^{-1}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}})$. En d'autres termes, on peut supposer que le morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}$ est propre.

Considérons le k° -schéma propre $W = [\bar{X} \times_{\tilde{k}} k^\circ] \times_{\mathbb{P}_{k^\circ}^1} P$ avec $P \rightarrow \mathbb{P}_{k^\circ}^1$ le normalisé de $\mathbb{G}_{m_{k^\circ}}[V]/(V^p - \pi T)$. Notons $h : W \rightarrow \mathbb{P}_{k^\circ}^1$ le morphisme évident. Remarquons les deux faits suivants :

- (i) La k -variété rigide $Q_p^{\text{rig}}(X, f)$ s'identifie à l'image inverse par $(h//(\pi))_\eta$: $[W//(\pi)]_\eta \rightarrow [\mathbb{P}_{k^\circ}^1//(\pi)]_\eta$ de l'ouvert $\partial\mathbb{B}_k^1 = [\mathbb{G}_{m_{k^\circ}}//(\pi)]_\eta$.
- (ii) La k -variété rigide $Q_p^{\text{an}}(X, f)$ s'identifie à l'image inverse par $(h[1/\pi])^{\text{an}}$: $(W[1/\pi])^{\text{an}} \rightarrow (\mathbb{P}_{k^\circ}^1)^{\text{an}}$ de l'ouvert $(\mathbb{G}_{m_k})^{\text{an}} \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$.

Étant donné que W et $\mathbb{P}_{k^\circ}^1$ sont propres sur k° , on a, par la proposition 1.1.31, des isomorphismes canoniques $[W//(\pi)]_\eta = (W[1/\pi])^{\text{an}}$ et $[\mathbb{P}_{k^\circ}^1//(\pi)]_\eta = (\mathbb{P}_{k^\circ}^1)^{\text{an}}$. On en déduit le fait suivant :

- (ii') La k -variété rigide $Q_p^{\text{an}}(X, f)$ s'identifie à l'image inverse par $(h//(\pi))_\eta$: $[W//(\pi)]_\eta \rightarrow [\mathbb{P}_{k^\circ}^1//(\pi)]_\eta$ de l'ouvert $(\mathbb{G}_{m_k})^{\text{an}} \subset [\mathbb{P}_{k^\circ}^1//(\pi)]_\eta$.

Le résultat recherché découlera alors du résultat plus général ci-dessous dans lequel on ne supposera plus que le morphisme $g : Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ est propre.

Proposition 1.3.13. — *Soit $g : Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ un morphisme de \tilde{k} -schémas avec Y lisse et $g^{-1}(o \amalg \infty)$ un diviseur à croisements normaux. Notons $P \rightarrow \mathbb{P}_{k^\circ}^1$ le normalisé de $\mathbb{P}_{k^\circ}^1$ dans $\mathbb{G}_{m_{k^\circ}}[V]/(V^p - \pi T)$, W le k° -schéma $(Y \times_{\tilde{k}} k^\circ) \times_{\mathbb{P}_{k^\circ}^1} P$ et $h : W \rightarrow \mathbb{P}_{k^\circ}^1$.*

le morphisme évident. Pour tout préfaisceau E sur SmRig/k à valeurs dans \mathfrak{M} , le morphisme

$$(1.58) \quad [h//(\pi)]_{\eta}^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \longrightarrow [h//(\pi)]_{\eta}^{-1}(\mathbb{G}_{mk})^{\text{an}} \otimes E$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Considérons le recouvrement de l'ouvert $(\mathbb{G}_{mk})^{\text{an}} \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ par les deux boules épointées $\mathbb{B}_k^1(o, 1) - o$ et $\mathbb{B}_k^1(\infty, 1) - \infty$ qui s'intersectent en $\partial\mathbb{B}_k^1$. On déduit ainsi un carré homotopiquement cocartésien pour la structure Nis-locale

$$\begin{array}{ccc} [h//(\pi)]_{\eta}^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \xrightarrow{(1)} & [h//(\pi)]_{\eta}^{-1}(\mathbb{B}_k^1(\infty, 1) - \infty) \otimes E \\ (2) \downarrow & & \downarrow \\ [h//(\pi)]_{\eta}^{-1}(\mathbb{B}_k^1(o, 1) - o) \otimes E & \longrightarrow & [h//(\pi)]_{\eta}^{-1}(\mathbb{G}_{mk})^{\text{an}} \otimes E. \end{array}$$

Il suffira donc de démontrer que les flèches (1) et (2) sont des équivalences \mathbb{B}^1 -locales. Ceci nous ramène donc à l'énoncé suivant.

Proposition 1.3.14. — *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ un morphisme de \tilde{k} -schémas avec X lisse et $f^{-1}(o)$ un diviseur à croisements normaux. Considérons le k -affinoïde $B = \text{Spm}(k\{T, V\}/(V^p - \mu T))$ avec $\mu \in k^{\circ} - \{0\}$. Le morphisme $B \rightarrow \text{Spm}(k\{T\}) = \mathbb{B}_k^1$ est alors fini. Formons le k -affinoïde $R = Q^{\text{rig}}(X) \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^1} B$ où le morphisme $Q^{\text{rig}}(X) \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ est $Q^{\text{rig}}(f)$ modulo l'identification $Q^{\text{rig}}(\mathbb{A}_k^1) = \mathbb{B}_k^1$. Notons $h : R \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ le morphisme canonique. Pour tout préfaisceau E sur SmRig/k à valeurs dans \mathfrak{M} , le morphisme*

$$(1.59) \quad h^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \longrightarrow h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Avant de se lancer dans la preuve, expliquons comment écrire, à isomorphisme près, le morphisme

$$(1.60) \quad P^{\text{an}} \times_{(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}} \mathbb{B}_k^1(?, 1) \longrightarrow \mathbb{B}_k^1(?, 1)$$

(avec P comme dans la proposition 1.3.13 et $? \in \{o, \infty\}$) sous la forme d'un morphisme $B \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ comme dans l'énoncé ci-dessus (avec μ bien choisi). Au voisinage de o , le morphisme (1.60) correspond au normalisé de la k -algèbre affinoïde $k\{T\}$ dans $k\{T\}[T^{-1}][V]/(V^p - \pi T)$. Ce normalisé est donc simplement

$$k\{T\}[V]/(V^p - \pi T) \simeq k\{T, V\}/(V^p - \pi T)$$

et il faut prendre $\mu = \pi$ dans ce cas. Au voisinage de ∞ , le morphisme (1.60) correspond au normalisé de $k\{T\}$ dans

$$k\{T\}[T^{-1}][V]/(V^p - \pi T^{-1}) \simeq k\{T\}[T^{-1}][V']/(V'^p - \pi^{p-1}T)$$

avec $V' = V^{-1}\pi$. Ce normalisé est donc isomorphe à $k\{T, V\}/(V^p - \pi^{p-1}T)$ et il faut prendre $\mu = \pi^{p-1}$ dans ce cas.

Pour démontrer la proposition 1.3.14, notons que $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ est à réduction semi-stable en o . On raisonne alors par récurrence sur le nombre maximal de branches passant par un point de $f^{-1}(o)$. Lorsque ce nombre est nul, la fonction f se factorise par l'inclusion $\mathbb{G}_{m\bar{k}} \hookrightarrow \mathbb{A}_k^1$. On en déduit que l'image de h est contenue dans $\partial\mathbb{B}_k^1$ de sorte que $h^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) = h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) = R$. Il n'y a donc rien à démontrer dans ce cas. On suppose dans la suite que $f^{-1}(o)$ est non vide. On démontre d'abord un dévissage.

Lemme 1.3.15. — 1) Soit $(X_i)_i$ un recouvrement Zariski de X et notons $X_J = \bigcap_{j \in J} X_j$ pour $\emptyset \neq J \subset I$. Il suffit de montrer la conclusion de la proposition 1.3.14 pour les X_J .

2) Supposons donné un carré Nisnevich de \mathbb{A}_k^1 -schémas

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X. \end{array}$$

On suppose que la conclusion de la proposition 1.3.14 est vraie pour U et U' . Alors, la conclusion de la proposition 1.3.14 est vraie pour X si et seulement si elle l'est pour X' .

Démonstration. — Considérons d'abord le cas d'un recouvrement par deux ouverts $X = X_1 \cup X_2$ et notons $X_{12} = X_1 \cap X_2$. On note aussi $R_J = Q^{\text{rig}}(X_J) \widehat{\otimes}_{\mathbb{B}_k^1} B$ et $h_J : R_J \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ pour $\emptyset \neq J \subset \{1, 2\}$. On a alors un morphisme de triangles distingués de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} h_{12}^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \longrightarrow & h_1^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \oplus h_2^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \longrightarrow & h^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ h_{12}^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E & \longrightarrow & h_1^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E \oplus h_2^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E & \longrightarrow & h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E & \longrightarrow & \end{array}$$

ce qui fournit le résultat recherché. Pour le cas général, on écrit $I = J \coprod \{i_0\}$. On applique la récurrence à $\bigcup_{j \in J} X_j$ et $\bigcup_{j \in J} (X_j \cap X_{i_0})$ et la discussion précédente au recouvrement de X par X_{i_0} et $\bigcup_{j \in J} X_j$.

On passe à la deuxième partie du lemme. Notons $R' = Q^{\text{rig}}(X') \widehat{\otimes}_{\mathbb{B}_k^1} B$, $R_U = Q^{\text{rig}}(U) \widehat{\otimes}_{\mathbb{B}_k^1} B$ et $R'_U = Q^{\text{rig}}(U') \widehat{\otimes}_{\mathbb{B}_k^1} B$. On note aussi h' , h_U et h'_U les morphismes évidents vers \mathbb{B}_k^1 . Il suffira de montrer que les deux carrés

$$\begin{array}{ccc} (h'_U)^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \longrightarrow & h'^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h_U)^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \longrightarrow & h^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \\ \\ (h'_U)^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E & \longrightarrow & h'^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h_U)^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E & \longrightarrow & h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E \end{array}$$

sont homotopiquement cocartésiens (pour la structure Nis-locale). Il suffit pour cela de montrer que les images par le plongement de Yoneda $\mathbf{SmRig}/k \hookrightarrow \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\mathbf{SmRig}/k)$ des carrés

$$\begin{array}{ccc} (h'_U)^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) & \longrightarrow & h'^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h_U)^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) & \longrightarrow & h^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (h'_U)^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) & \longrightarrow & h'^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h_U)^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) & \longrightarrow & h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \end{array}$$

sont cocartésiens. Le premier carré est un carré de Nisnevich. On peut donc appliquer le corollaire 1.2.28 pour conclure. Le second carré, considéré dans $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\mathbf{SmRig}/k)$, est l'image du carré Nisnevich

$$\begin{array}{ccc} R'_U & \longrightarrow & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_U & \longrightarrow & R, \end{array}$$

considéré dans $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/R)$, par la composition de deux foncteurs qui sont des adjoints à gauche (et qui commutent donc aux colimites)

$$\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/R) \xrightarrow{(1)} \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Et}/h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o)) \xrightarrow{(2)} \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\mathbf{SmRig}/k).$$

Le foncteur (1) est le foncteur « image inverse » suivant le morphisme de sites $(\text{Et}/h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o), \text{Nis}) \rightarrow (\text{Et}/R, \text{Nis})$ dont le foncteur sous-jacent est $h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \widehat{\times}_R -$. Le foncteur (2) est le foncteur « image inverse » suivant le prémorphisme de sites $(\text{Et}/h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o), \text{Nis}) \rightarrow (\mathbf{SmRig}/k, \text{Nis})$ dont le foncteur sous-jacent est simplement la composition à droite avec le morphisme structural de la k -variété rigide $h^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o)$.

C.Q.F.D.

Si la proposition 1.3.14 est démontrée pour $X \times_{\widetilde{k}} \mathbb{G}_{m, \widetilde{k}}$ on peut la déduire facilement pour X en utilisant le fait que les équivalences \mathbb{B}^1 -locales sont stables par rétracte. Par le lemme précédent et la proposition 1.1.62 (et plus précisément par son analogue algébrique (voir [3, Proposition 3.3.39])) on peut supposer l'existence d'un morphisme étale de $\mathbb{A}_{\widetilde{k}}^1 = \text{Spec}(\widetilde{k}[T])$ -schémas

$$e : X \longrightarrow \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}T}[S_1, \dots, S_m] = \text{Spec}\left(\frac{\widetilde{k}[T, U, U^{-1}, T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m]}{(UT_1^{a_1} \dots T_n^{a_n} - T)}\right).$$

On procède alors comme dans la preuve du théorème 1.2.36. Notons C l'intersection des branches de X . On obtient un morphisme étale $e_0 : C \rightarrow o[U, U^{-1}, S_1, \dots, S_m]$. On forme alors le carré cartésien de morphismes étales

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}T} \times_{\widetilde{k}[U, U^{-1}]} C & \longrightarrow & \text{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}T}[S_1, \dots, S_m] \end{array}$$

et on définit $Y = Y_1 - F$, où F est le fermé complémentaire de la diagonale de $C \times_{o[U, U^{-1}, S_1, \dots, S_m]} C$. On obtient ainsi deux carrés Nisnevich

$$\begin{array}{ccc} Y - C & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}T} - o[U, U^{-1}]) \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C & \longrightarrow & \mathrm{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y - C & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X - C & \longrightarrow & X. \end{array}$$

En utilisant la récurrence sur le nombre de branches passant par un point de la fibre en o et la deuxième partie du lemme 1.3.15, on voit qu'il suffit de traiter le cas du \mathbb{A}_k^1 -schéma $\mathrm{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$. On notera dans la suite $h_{\underline{a}} : R_{\underline{a}} \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ le morphisme construit dans la proposition 1.3.14 dans le cas où $X = \mathrm{St}_{\underline{a}}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$. On a le lemme suivant.

Lemme 1.3.16. — *Soit $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ un n -uplet. Supposons que la conclusion de la proposition 1.3.14 est vraie pour $X = \mathrm{St}_{\underline{b}}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$. Alors, elle est également vraie pour $X = \mathrm{St}_{\underline{b}^j}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$ avec \underline{b}^j le n -uplet obtenu à partir de \underline{b} en remplaçant b_j par $b_i + b_j$ et en gardant le reste inchangé (avec $1 \leq i \neq j \leq n$).*

Démonstration. — On peut supposer que $i < j$. On éclate l'idéal (T_i, T_j) dans $\mathrm{St}_{\underline{b}}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$ pour obtenir un \mathbb{A}_k^1 -schéma M . Notons $h_M : R_M \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ le morphisme obtenu en prenant $X = M$ dans l'énoncé de la proposition 1.3.14. On vérifie immédiatement que $h_{\underline{b}}$ coïncide avec h_M au-dessus de $\mathbb{B}_k^1 - o$. On en déduit des isomorphismes canoniques $h_{\underline{b}}^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \simeq h_M^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1)$ et $h_{\underline{b}}^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \simeq h_M^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o)$.

L'éclaté M admet un recouvrement Zariski par des ouverts $\mathrm{St}_{\underline{b}^j}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$ et $\mathrm{St}_{\underline{b}^i}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$ (voir [3, Lemme 3.3.30]). Notons N l'intersection de ces deux ouverts. C'est un \mathbb{A}_k^1 -schéma semi-stable à $n-1$ branches. Par l'hypothèse de récurrence, on connaît la proposition 1.3.14 pour N . Notons $h_N : R_N \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ le morphisme obtenu en prenant $X = N$ dans l'énoncé de cette proposition. On dispose d'un morphisme de triangles distingués de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccc} h_N^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \longrightarrow & h_{\underline{b}^j}^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \oplus h_{\underline{b}^i}^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E & \longrightarrow & h_{\underline{b}}^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ h_N^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E & \longrightarrow & h_{\underline{b}^j}^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E \oplus h_{\underline{b}^i}^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E & \longrightarrow & h_{\underline{b}}^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E \longrightarrow \end{array}$$

où les deux flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes dans $\mathbf{RigSH}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{eff}}(k)$. On en déduit que la flèche médiane est inversible. Le lemme est prouvé. C.Q.F.D.

Par le lemme 1.3.16, il suffit de considérer le cas où $\underline{a} = (q, \dots, q) = \underline{q}_n$ est constant. Le lemme ci-dessous nous ramènera au cas où la longueur de \underline{a} est égale à 1.

Lemme 1.3.17. — *Si la conclusion de la proposition 1.3.14 est vraie pour le \mathbb{A}_k^1 -schéma $\text{St}_{\underline{q}_n}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$ pour $n = 1$, alors elle l'est aussi pour $n \geq 2$.*

Démonstration. — Par la récurrence sur le nombre de branches passant par un point, on connaît la proposition 1.3.14 pour $X = \text{St}_{\underline{q}_{n-1}}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C[T_n]$. Soit M l'éclaté de X en l'idéal (T_{n-1}, T_n) . On connaît alors la proposition 1.3.14 pour M puisque $Q^{\text{rig}}(M) \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^1} B \rightarrow Q^{\text{rig}}(X) \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^1} B$ est un isomorphisme au-dessus de $\mathbb{B}_k^1 - o$. Par [3, Lemme 3.3.19], M admet un recouvrement par deux ouverts dont l'un est isomorphe à X et l'autre est isomorphe à $\text{St}_{\underline{q}_n}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C$. L'intersection de ces deux ouverts est isomorphe à $\text{St}_{\underline{q}_{n-1}}^{U^{-1}T} \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C[T_n, T_n^{-1}]$. La deuxième partie du lemme 1.3.15 permet alors de conclure. C.Q.F.D.

Il nous reste donc à considérer le cas

$$X = \text{Spec}(\tilde{k}[T, U, U^{-1}, T_1]/(UT_1^q - T)) \times_{\tilde{k}[U, U^{-1}]} C.$$

Un calcul facile montre que le k -affinoïde R est donné par

$$\begin{aligned} \text{Spm}\left(\frac{k\{T, U, U^{-1}, T_1, V\}}{(UT_1^q - T, V^p - \mu T)}\right)_{k\{U, U^{-1}\}} \widehat{\times} Q^{\text{rig}}(C) \\ = \text{Spm}\left(\frac{k\{U, U^{-1}, T_1, V\}}{(V^p - \mu UT_1^q)}\right)_{k\{U, U^{-1}\}} \widehat{\times} Q^{\text{rig}}(C). \end{aligned}$$

Notons $d = \text{p.g.c.d.}(p, q)$ et soit $sp + tq = d$ une relation de Bézout. La normalisée de la k -algèbre $k[U, U^{-1}, T_1, V]/(V^p - \mu UT_1^q)$ est égale à $k[U, U^{-1}, W, S]/(W^d - \mu U)$ et le morphisme

$$(1.61) \quad k[U, U^{-1}, T_1, V]/(V^p - \mu UT_1^q) \longrightarrow k[U, U^{-1}, W, S]/(W^d - \mu U)$$

est donné par $V \rightsquigarrow S^{q/d}W^s$ et $T_1 \rightsquigarrow S^{p/d}W^{-t}$. Lorsqu'on inverse T_1 , le morphisme (1.61) admet un inverse donné par $W \rightsquigarrow V^{p/d}T_1^{-q/d}$ et $S \rightsquigarrow T_1^sV^t$. Montrons le lemme suivant.

Lemme 1.3.18. — *La normalisée de la k -algèbre affinoïde*

$$k\{U, U^{-1}, T_1, V\}/(V^p - \mu UT_1^q)$$

est égale à

$$\frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\mu^{-t/p}S\}$$

avec $V = S^{q/d}W^s$ et $T_1 = S^{p/d}W^{-t}$.

Démonstration. — Par la discussion précédente, la normalisée de $A = \frac{k\{U, U^{-1}, T_1, V\}}{(V^p - \mu UT_1^q)}$ est la A -algèbre A' donnée par

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k\{U, U^{-1}, T_1, V\}}{(V^p - \mu UT_1^q)} \right) \otimes_{\frac{k[U, U^{-1}, T_1, V]}{(V^p - \mu UT_1^q)}} \left(\frac{k[U, U^{-1}, W, S]}{(W^d - \mu U)} \right) \\ &= \frac{k\{U, U^{-1}, T_1, V\}}{V^p - \mu UT_1^q} [W, S] / (W^d - \mu U, S^{p/d} - T_1 W^t, S^{q/d} - VW^{-s}). \end{aligned}$$

Comme A' est finie sur A , c'est encore une k -algèbre affinoïde. Ainsi, pour $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, l'algèbre A' admet la présentation suivante :

$$A' = \frac{k\{U, U^{-1}, T_1, V, \pi^{r_1} W, \pi^{r_2} S\}}{(V^p - \mu UT_1^q, W^d - \mu U, S^{p/d} - T_1 W^t, S^{q/d} - VW^{-s})}.$$

De la relation $W^d - \mu U = 0$, on déduit que l'on peut choisir $r_1 = 0$. D'autre part, la relation $V^p - \mu UT_1^q = 0$ peut être déduites des trois autres. Il vient

$$\begin{aligned} A' &= \frac{k\{U, U^{-1}, W, T_1, V, \pi^{r_2} S\}}{(W^d - \mu U, S^{p/d} - T_1 W^t, S^{q/d} - VW^{-s})} \\ &\simeq \frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\pi^{r_2} S\} \langle W^t | S^{p/d} \rangle \langle W^{-s} | S^{q/d} \rangle \\ &= \frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\pi^{r_2} S\} \langle W^{dt} | S^p \rangle \langle W^{-sd} | S^q \rangle \\ &= \frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\pi^{r_2} S\} \langle \mu^t | S^p \rangle \langle \mu^{-s} | S^q \rangle \\ &= \frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\pi^{r_2} S\} \langle \mu^{tq} | S^{pq} \rangle \langle \mu^{-sp} | S^{pq} \rangle \\ &= \frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\pi^{r_2} S\} \langle \mu^{tq} | S^{pq} \rangle \langle \mu^{tq-1} | S^{pq} \rangle \\ &= \frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\pi^{r_2} S\} \langle \mu^{tq} | S^{pq} \rangle \\ &= \frac{k\{U, U^{-1}, W\}}{(W^d - \mu U)} \{\mu^{-t/p} S\}. \end{aligned}$$

Les deux dernières égalités viennent du fait que $\mu \in k^\circ - \{0\}$ et que r_2 est suffisamment grand. C.Q.F.D.

Appelons H le k -affinoïde $\text{Spm}(k\{U, U^{-1}, W\} / (W^d - \mu U)) \widehat{\times}_{k\{U, U^{-1}\}} C$ et notons $w \in \Gamma(H, \mathcal{O})$ la classe de W . On a alors un morphisme fini

$$H\{\mu^{-t/p} S\} \longrightarrow Q^{\text{rig}}(X) \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^1} B$$

qui est un isomorphisme au-dessus de $\mathbb{B}_k^1 - o$. Notons $h' : H\{\mu^{-t/p}S\} \rightarrow \mathbb{B}_k^1$ le morphisme canonique. Il s'agit donc de prouver que

$$(1.62) \quad h'^{-1}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes E \longrightarrow h'^{-1}(\mathbb{B}_k^1 - o) \otimes E$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Remarquons pour cela que l'image de T dans $\Gamma(H\{\mu^{-t/p}S\}, \mathcal{O})$ est égale à $US^{p/d}w^{-t}$. La norme de T en un point x de $H\{\mu^{-t/p}S\}$ coïncide avec la norme de $|S(x)| \cdot |\mu|^{-t/p}$. Ainsi, l'image inverse de $\partial\mathbb{B}^1$ par h' est le k -affinoïde $\partial\mathbb{B}_H^1(o, \mu^{t/p})$. Le morphisme (1.62) se réécrit donc

$$\partial\mathbb{B}_H^1(o, \mu^{t/p}) \otimes E \longrightarrow (\mathbb{B}_H^1(o, \mu^{t/p}) - o) \otimes E$$

Le résultat découle maintenant de la proposition 1.3.4. La preuve du théorème 1.3.11 est achevée.

1.3.3. Construction et propriétés élémentaires : cas stable. — À partir de maintenant, on suppose que la catégorie de coefficients \mathfrak{M} est monoïdale symétrique et unitaire. On notera \bullet son objet unité qu'on supposera dans \mathcal{E} . En particulier, il est cofibrant et homotopiquement compact. (Ces hypothèses sur l'objet unité ne sont pas essentielles, mais sont satisfaites dans les exemples qui nous intéressent.)

On fixe un remplacement projectivement cofibrant T de

$$(1.63) \quad \frac{\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}}{(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}}} = \text{Cofib}((\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}})$$

dans $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M})$. Pour des raisons techniques, on supposera même que T provient d'un remplacement projectivement cofibrant T' de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}}$ dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmAf}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M})$ avec $\text{SmAf}/\mathbb{Z} \subset \text{Sm}/\mathbb{Z}$ la sous-catégorie pleine des schémas affines et lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. En d'autres termes, on fixe une équivalence faible de préfaisceaux $T' \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}}$ dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmAf}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M})$ avec T' projectivement cofibrant et on pose⁽⁹⁾ $T = a^*T'$ avec a le prémorphisme de sites (munis des topologies grossières) $\text{Sm}/\mathbb{Z} \rightarrow \text{SmAf}/\mathbb{Z}$.

⁽⁹⁾ Pour vérifier que $a^*T' \rightarrow a^*(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}}) = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux, on procède de la manière suivante. On peut trouver un carré commutatif dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmAf}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M})$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{c} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} \end{array}$$

avec A projectivement cofibrant, c une cofibration projective et les flèches verticales des équivalences faibles. On peut alors supposer que T' est la cofibre de c . Il vient que a^*T' est la cofibre de $a^*(c)$. Le résultat s'obtient alors en appliquant a^* au carré ci-dessus et en utilisant le fait que a^* préserve les équivalences faibles entre préfaisceaux projectivement cofibrants.

Cet argument, convenablement adapté, montre aussi que T^{an} est un remplacement projectivement cofibrant de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}} \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}} \otimes \bullet_{\text{cst}}$.

On note T^{an} l'image de T dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$ par le foncteur « image inverse » associé à la composition des prémorphismes de sites

$$\text{SmRig}/k \longrightarrow \text{Sm}/k \longrightarrow \text{Sm}/\mathbb{Z}.$$

C'est un remplacement projectivement cofibrant de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}} \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}} \otimes \bullet_{\text{cst}}$. La catégorie des T^{an} -spectres symétriques $\mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$ sera munie de sa structure projective stable déduite de la structure projective \mathbb{B}^1 -locale sur $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$. Cette structure de modèles sera simplement appelée la structure *projective \mathbb{B}^1 -locale stable*. Pour la définition des catégories de spectres et la construction des structures de modèles stables, le lecteur pourra consulter [3, Section 4.3].

Définition 1.3.19. — *On note $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ la catégorie homotopique de $\mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$ relativement à la structure \mathbb{B}^1 -locale stable. C'est la catégorie homotopique stable des k -variétés rigides à coefficients dans \mathfrak{M} . Voici les cas les plus importants :*

- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des spectres symétriques, on notera simplement $\mathbf{RigSH}(k)$ la catégorie ainsi définie.
- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des complexes de groupes abéliens (resp. de Λ -modules pour un anneau commutatif Λ) on notera $\mathbf{RigDA}(k)$ (resp. $\mathbf{RigDA}(k, \Lambda)$) la catégorie ainsi définie.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on dispose d'un foncteur « spectre de suspension »

$$\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k).$$

Ce foncteur provient d'une adjonction de Quillen $(\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p, \text{Ev}_p)$ avec Ev_p le foncteur qui à un T^{an} -spectre symétrique $(\mathbf{E}_n)_n$ associe le préfaisceau \mathbf{E}_p . (On renvoie le lecteur à [3, Définition 4.3.10] pour plus de détails.) Si X une k -variété rigide lisse, le motif de X est le T^{an} -spectre symétrique $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(X \otimes \bullet_{\text{cst}})$ considéré dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$; il est noté $M(X)$.

La catégorie $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ est une catégorie triangulée monoïdale symétrique et unitaire (voir [3, Théorème 4.3.76]). Par la proposition 1.3.6 et [3, Lemme 4.3.34], on dispose d'une adjonction de Quillen

$$(\text{Rig}^*, \text{Rig}_*) : \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/k, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$$

induisant un foncteur triangulé et monoïdal

$$\text{Rig}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k).$$

Considérons le foncteur $\text{cpl}_{\eta} : \text{Sm}/k^{\circ} \rightarrow \text{SmRig}^{\text{qc}}/k$ qui à un k° -schéma lisse X associe la k -variété rigide quasi-compacte $(X//(\pi))_{\eta}$. Notons T^{qc} l'image inverse de T suivant la composition des prémorphismes de sites (munis des topologies grossières)

$$\text{SmRig}^{\text{qc}}/k \xrightarrow{\text{cpl}_{\eta}} \text{Sm}/k^{\circ} \longrightarrow \text{Sm}/\mathbb{Z}.$$

Alors, T^{qc} est un remplacement projectivement cofibrant de $\mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / \partial \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}$ dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})$. On note aussi T^{qc} l'image inverse de cet objet suivant le prémorphisme de sites $\text{SmRig}/k \rightarrow \text{SmRig}^{\text{qc}}/k$. C'est un remplacement projectivement cofibrant de $\mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / \partial \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}$ dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$. On dispose d'une transformation naturelle $\text{cpl}_\eta \rightarrow \text{Rig} \circ (-)_\eta$ induite par le morphisme naturel de la proposition 1.1.31. On a alors un carré commutatif d'équivalences \mathbb{B}^1 -locales dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})$:

$$\begin{array}{ccc} T^{\text{qc}} & \xrightarrow{\sim_{\mathbb{B}^1}} & T^{\text{an}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}}{\partial \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}} & \longrightarrow & \frac{(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}} \otimes \bullet_{\text{cst}}}{(\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}} \otimes \bullet_{\text{cst}}} \end{array}$$

Par [3, Proposition 4.3.42], on déduit une suite d'équivalences de Quillen à gauche relativement aux structures projectives \mathbb{B}^1 -locales stables

$$\begin{array}{c} \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})) \\ \downarrow \\ \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})) \\ \downarrow T^{\text{an}} \otimes_{T^{\text{qc}}} - \\ \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})). \end{array}$$

La catégorie $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ est donc équivalente à la catégorie homotopique de $\mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))$. Pour $p \in \mathbb{N}$, le diagramme de foncteurs de Quillen à gauche

$$(1.64) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\text{Sus}_{T^{\text{qc}}}^p} & \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})) \\ \downarrow & \nearrow \text{Sus}_{T^{\text{qc}}}^p & \downarrow \\ & & \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})) \\ & \searrow \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p & \downarrow T^{\text{an}} \otimes_{T^{\text{qc}}} - \\ \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p} & \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})) \end{array}$$

est commutatif à 2-isomorphisme près. L'intérêt de la catégorie de modèles $\mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))$ vient de la caractérisation suivante de ses objets fibrants. (Ci-dessous, $\underline{\text{Hom}}(-, -)$ désigne le bifoncteur « homomorphisme interne » relativement à la structure monoïdale fermée sur $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})$.)

Proposition 1.3.20. — *Un T^{qc} -spectre symétrique $(\mathbf{E}_n)_n$ est fibrant pour la structure projective stable sur $\mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))$ déduite de la structure projective \mathbb{B}^1 -locale sur $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse X , et tout $n \in \mathbb{N}$, l'objet $\mathbf{E}_n(X) \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$ est fibrant,
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le préfaisceau \mathbf{E}_n vérifie la propriété de Brown-Gersten (voir la définition 1.2.29),
- (iii) pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse X , et tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\mathbf{E}_n(\mathbb{B}_X^1) \rightarrow \mathbf{E}_n(X)$ est une équivalence faible de \mathfrak{M} ,
- (iv) pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'adjoint du morphisme d'assemblage $\mathbf{E}_n \rightarrow \underline{\text{Hom}}(T^{\text{qc}}, \mathbf{E}_{n+1})$ est une équivalence faible de préfaisceaux (i.e., $(\mathbf{E}_n)_n$ est un Ω_T -spectre).

En particulier, la classe des objets stablement \mathbb{B}^1 -fibrants dans

$$\mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))$$

est stable par colimites filtrantes.

Démonstration. — Seule la dernière assertion demande une preuve. En effet, il n'est pas tout à fait clair qu'une colimite de Ω_T -spectres est encore un Ω_T -spectre puisque le foncteur $\underline{\text{Hom}}(T^{\text{qc}}, -)$ ne commute pas forcément aux colimites filtrantes. Toutefois, il suffira qu'il y commute à équivalences faibles près de préfaisceaux. On est ainsi ramené à vérifier que les foncteurs

$$\text{hom}_{\mathbf{Ho}}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))(T^{\text{qc}} \otimes X, -) : \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

commutent aux colimites filtrantes pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse X . Ceci découle immédiatement du fait que T^{qc} est faiblement équivalent à $\mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / \partial \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}$ et que les colimites filtrantes sont exactes dans la catégorie des groupes. C.Q.F.D.

Corollaire 1.3.21. — La catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(X \otimes A_{\text{cst}})$ avec X une k -variété rigide quasi-compacte et lisse, et $A \in \mathcal{E}$.

Démonstration. — Par le diagramme (1.64), il est équivalent de montrer que la catégorie triangulée avec sommes infinies

$$\mathbf{RigSH}'_{\mathfrak{M}}(k) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}(\mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})))$$

est compactement engendrée par les objets $\text{Sus}_{T^{\text{qc}}}^p(X \otimes A_{\text{cst}})$. On commence d'abord par montrer que ces objets sont compacts. Il est plus général de montrer que le foncteur

$$(1.65) \quad \text{hom}_{\mathbf{RigSH}'_{\mathfrak{M}}(k)}(\text{Sus}_{T^{\text{qc}}}^p(X \otimes A_{\text{cst}}), -) : \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

commute aux colimites filtrantes. Ce foncteur est la composition de

$$(1.66) \quad \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})) \\ \xrightarrow{\text{Loc}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}} \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M})) \\ \downarrow E_{V_p} \\ \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}) \xrightarrow{\pi_0(A, \Gamma(X, -))} \mathcal{A}b$$

où $\text{Loc}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}$ est un foncteur de remplacement stablement \mathbb{B}^1 -fibrant. Par la proposition 1.3.7, la transformation naturelle $\text{Colim}_{\mathcal{J}} \circ \text{Loc}_{\mathbb{B}^1\text{-st}} \rightarrow \text{Loc}_{\mathbb{B}^1\text{-st}} \circ \text{Colim}_{\mathcal{J}}$ induit des équivalences faibles de préfaisceaux niveau par niveau pour toute petite catégorie filtrante \mathcal{J} . D'où le résultat recherché.

Pour terminer, il reste à vérifier que la familles des foncteurs (1.65) détecte les équivalences \mathbb{B}^1 -locales stables. Il suffit pour cela de considérer les morphismes entres spectres fibrants pour la structure \mathbb{B}^1 -locale stable. Le résultat découle alors de la condition (iii) de la définition 1.2.31. C.Q.F.D.

Remarque 1.3.22. — L'objet $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^1(\bullet_{\text{cst}})[2]$ sera noté $\bullet(-1)$. Le produit tensoriel $-\otimes \bullet(-1)$ sera simplement noté $-(-1)$. On définit par récurrence les foncteurs $-(-n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par [3, Corollaire 4.3.72], on a un isomorphisme canonique

$$\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(-) \otimes \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^q(-) \simeq \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^{p+q}(- \otimes -).$$

Le T^{an} -spectre symétrique $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(X \otimes A_{\text{cst}})$ du corollaire 1.3.21 est donc isomorphe à $M(X) \otimes \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(A_{\text{cst}})(-p)[-2p]$ (qui est isomorphe à $M(X)(-p)[-2p]$ lorsque $A = \bullet$). Il découle aussi de [3, Théorème 4.3.38] que le foncteur $-(-1)$ est une auto-équivalence de $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ dont l'inverse est donné par $(\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(T^{\text{an}}) \otimes -)[-2]$. Ceci permet donc de définir les $-(-n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ces foncteurs sont appelés les *twists de Tate*.

Lorsque k est d'égale caractéristique nulle et que sa valuation est discrète, on a un résultat plus précis.

Théorème 1.3.23. — *Supposons que $k = \tilde{k}((\pi))$ avec \tilde{k} un corps de caractéristique nulle. Avec les notations 1.2.35, la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Q_r^{\text{rig}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})$ avec X un \tilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$, $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $A \in \mathcal{E}$.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{T} \subset \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par les objets de l'énoncé. En vue du corollaire 1.3.21, il suffit de montrer $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Y \otimes A_{\text{cst}}) \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse et $p \in \mathbb{N}$. On utilise alors le foncteur triangulé $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k) \rightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ et le théorème 1.2.36 pour conclure. C.Q.F.D.

1.3.4. Énoncé du résultat principal et réductions. — Dans ce paragraphe, on reprend l’hypothèse $k = \tilde{k}((\pi))$ avec \tilde{k} un corps de caractéristique nulle. Pour énoncer notre théorème, nous aurons besoin d’une notation et d’une définition.

Notation 1.3.24. — Soient X un \tilde{k} -schéma de type fini, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. On définit un $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schéma $Q_r^{\text{gm}}(X, f)$ par le morphisme

$$(1.67) \quad X[T, T^{-1}, V]/(V^r - fT) \longrightarrow \text{Spec}(\tilde{k}[T, T^{-1}]) = \mathbb{G}_{m\tilde{k}}.$$

Lorsque $r = 1$, ce $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schéma ne dépend pas de f et sera simplement noté $Q^{\text{gm}}(X)$.

Définition 1.3.25. — Soit $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$ engendrée par les objets de la forme $\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})$ avec $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, X un \tilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et $A \in \mathcal{E}$. Les objets de $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$ sont appelés les motifs quasi-unipotents de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$. Voici les cas les plus importants :

- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des spectres symétriques, on notera simplement $\mathbf{QUSH}(\tilde{k})$ la sous-catégorie de $\mathbf{SH}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$ ainsi définie.
- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des complexes de groupes abéliens (resp. de Λ -modules pour un anneau Λ) on notera $\mathbf{QUDA}(\tilde{k})$ (resp. $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$) la sous catégorie de $\mathbf{DA}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$ (resp. $\mathbf{DA}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}, \Lambda)$) ainsi définie.

On note $\underline{G}(\tilde{k}) \subset \text{Ob}(\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}))$ l’ensemble des objets $\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})$ comme ci-dessus ; c’est un système de générateurs compacts de $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$.

On note $\pi : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ le morphisme de schémas correspondant à l’élément inversible π de $k = \tilde{k}((\pi))$. Voici le résultat principal de ce chapitre⁽¹⁰⁾.

SCHOLIE 1.3.26. — On suppose que $k = \tilde{k}((\pi))$ est le corps des séries de Laurent en π à coefficients dans le corps de caractéristique nulle \tilde{k} .

1) Le foncteur composé

$$(1.68) \quad \mathfrak{F} : \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \hookrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$$

est une équivalence de catégories. Soit $\mathfrak{R} : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$ un quasi-inverse à \mathfrak{F} .

2) Considérons le diagramme de \tilde{k} -schémas : $\text{Spec}(k) \xrightarrow{j} \text{Spec}(k^\circ) \xleftarrow{i} \text{Spec}(\tilde{k})$. Notons $q : \mathbb{G}_{m\tilde{k}} \rightarrow \text{Spec}(\tilde{k})$ la projection structurale et 1 sa section unité. Alors, la

⁽¹⁰⁾ Il est possible de formuler l’équivalence de catégories \mathfrak{F} d’une manière invariante, i.e., qui ne dépend pas du choix d’un isomorphisme $k \simeq \tilde{k}((\pi))$, en utilisant [7, Proposition 2.38 et Lemme 2.39]. On obtient ainsi une équivalence de catégories

$$\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$$

avec $\mathbb{T}^* = \text{Spec}(\tilde{k}[k^\vee/(k^\vee)^2]) - o$, l’espace tangent époiné de $\text{Spec}(k^\circ)$ en son point fermé. On laisse les détails au lecteur intéressé.

composition de

$$(1.69) \quad \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow[\simeq]{\mathfrak{R}} \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \hookrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}) \xrightarrow{q_*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$$

s'identifie au foncteur $\chi = i^*j_*$. De même, la composition de

$$(1.70) \quad \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow[\simeq]{\mathfrak{R}} \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \hookrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}) \xrightarrow{1^*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$$

s'identifie au foncteur « motif proche » Ψ_π associé à l'uniformisante π (voir [3, Définition 3.5.6]).

Remarque 1.3.27. — Dans [3, Chapitre III], nous avons considéré les foncteurs « motif proche » au-dessus des schémas de type fini sur des traits géométriques, i.e., ceux obtenus comme anneaux locaux (pour la topologie de Zariski ou celle de Nisnevich) en des points de codimension 1 dans des variétés algébriques normales. Dans l'appendice 1.A, nous montrons que le formalisme des cycles proches motiviques fonctionne tout aussi bien au-dessus d'un anneau de valuation discrète complet et d'égale caractéristique nulle.

Notons le corollaire amusant suivant.

Corollaire 1.3.28. — Soient X un \tilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Le motif $M(Q_r^{\text{gm}}(X, f))$ de $Q_r^{\text{gm}}(X, f)$ (i.e., le T -spectre symétrique

$$\text{Sus}_T^0(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes \bullet_{\text{cst}})$$

considéré comme un objet de la catégorie homotopique stable des $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schémas) admet un dual fort dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$.

Démonstration. — En effet, l'image par \mathfrak{F} de cet objet coïncide avec l'image de $M(Q_r^{\text{geo}}(X, f)) = \text{Sus}_T^0(Q_r^{\text{geo}}(X, f) \otimes \bullet_{\text{cst}})$ par le foncteur monoïdal Rig^* (voir les notations 1.3.10). Par le lemme 1.3.29 ci-dessous, les motifs des schémas lisses sur un corps de caractéristique nulle admettent des duaux forts. Le résultat découle maintenant du fait que \mathfrak{F} est une équivalence de catégories. C.Q.F.D.

Lemme 1.3.29. — Soit K un corps de caractéristique nulle. Soit M un objet de la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K)$ stable par facteurs directs engendrée par les motifs des K -schémas lisses ainsi que leurs twists de Tate. Alors M admet un dual fort.

Démonstration. — Ce résultat est dû à J. Riou (voir [37]) et a été annoncé par V. Voevodsky. On donne ici une preuve rapide reposant sur des résultats de [2, 3]. (En particulier, on renvoie le lecteur à [3, §4.5.1 et §4.5.2] pour la construction des opérations f^* , f_* et f_\sharp , et à [2, Scholie 1.4.2] pour des informations sur les opérations extraordinaires $f_!$ et $f^!$; voir aussi la section 1.4 ci-dessous et notamment le paragraphe 1.4.2.)

Par [2, Proposition 2.2.27], on sait que la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs engendrée par les motifs de K -schémas lisses et leurs twists coïncide avec la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs engendrée par les $f_* \bullet_X(n)$ pour X un K -schéma projectif et lisse, f son morphisme structural et $n \in \mathbb{Z}$. Or, les objets admettant des duals forts forment une sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k)$. Il suffit donc de montrer que si X est un K -schéma projectif et lisse de morphisme structural f , l'objet $f_* \bullet_X$ admet un dual fort. Il suffira de construire un isomorphisme de foncteurs

$$\underline{\mathcal{H}om}(f_* \bullet_X, -) \simeq \underline{\mathcal{H}om}(f_* \bullet_X, \bullet_K) \otimes -.$$

Comme f est projectif, on dispose d'un isomorphisme $f_! \simeq f_*$ par [2, Théorème 1.7.17]. On a la chaîne d'isomorphismes naturels en $A \in \text{Ob}(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(K))$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{H}om}(f_! \bullet_X, A) &\simeq f_* \underline{\mathcal{H}om}(\bullet_X, f^! A) \simeq f_! f^! A \\ &\simeq f_! f^! \bullet_X \otimes A \simeq f_* f^! \bullet_X \otimes A \\ &\simeq \underline{\mathcal{H}om}(f_! \bullet_X, \bullet) \otimes A. \end{aligned}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé l'isomorphisme de projection $f_{\sharp} f^* A \simeq f_{\sharp} \bullet_X \otimes A$ modulo l'identification

$$f_! f^! = f_{\sharp} \text{Th}^{-1}(\Omega_f) \text{Th}(\Omega_f) f^* \simeq f_{\sharp} f^*$$

valable pour f lisse. Le lemme est démontré.

C.Q.F.D.

Remarque 1.3.30. — La preuve du lemme 1.3.29 montre que pour tout schéma noethérien S , et tout morphisme projectif et lisse $f : X \rightarrow S$, l'objet $f_* \bullet_X$ admet un dual fort dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(S)$ qui n'est autre que le motif $M(X) = f_{\sharp} \bullet_X$ de X . Notons (suivant [37]) $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{parf}}(S)$ la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs engendrée par les motifs des S -schémas projectifs et lisses, ainsi que leurs twists de Tate. Les objets de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{parf}}(S)$ sont donc fortement dualisables. Réciproquement, on peut se demander si tout objet fortement dualisable de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(S)$ est dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{parf}}(S)$. Notons que ceci est vrai lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique nulle (ou le spectre d'un corps parfait de caractéristique quelconque, sous réserve de pouvoir résoudre les singularités) et $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ compactement engendrée par son objet unité \bullet . Le corollaire 1.3.28 nous semble amusant puisqu'il fournit des motifs fortement dualisables dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$ qui n'ont aucune raison apparente d'appartenir à $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{parf}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$. C'est à notre connaissance, les premiers exemples de tels motifs.

Calculons l'image par \mathfrak{F} des générateurs de la catégorie triangulée $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$. Soient X un \tilde{k} -schéma lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{E}$. L'objet $\mathfrak{F}(\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}))$ est donné par

$$(1.71) \quad \begin{aligned} \text{Rig}^* \pi^* (\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})) &\simeq \text{Rig}^* (\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{geo}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})) \\ &\simeq \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Q_r^{\text{an}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}). \end{aligned}$$

D'autre part, l'immersion ouverte canonique $Q_r^{\text{rig}}(X, f) \hookrightarrow Q_r^{\text{an}}(X, f)$ induit un morphisme de T^{an} -spectres symétriques

$$(1.72) \quad \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Q_r^{\text{rig}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}) \longrightarrow \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Q_r^{\text{an}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}).$$

Puisque $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p$ est un foncteur de Quillen à gauche, il préserve les équivalences \mathbb{B}^1 -locales entre préfaisceaux projectivement cofibrants. Le théorème 1.3.11 entraîne donc que (1.72) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale niveau par niveau. On en déduit par composition avec (1.71), un isomorphisme dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$

$$(1.73) \quad \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Q_r^{\text{rig}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}) \xrightarrow{\sim} \text{Rig}^* \pi^*(\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})).$$

En utilisant le théorème 1.3.23, on obtient le lemme suivant.

Lemme 1.3.31. — *Le foncteur \mathfrak{F} envoie le système de générateurs compacts $\underline{G}(\tilde{k})$ de $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$ (voir la définition 1.3.25) sur un système de générateurs compacts de $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$.*

On est donc tenté d'appliquer le lemme suivant au foncteur \mathfrak{F} .

Lemme 1.3.32. — *Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux catégories triangulées avec sommes infinies, compactement engendrées, et \underline{G} un système de générateurs compacts de \mathcal{T} . Pour qu'un foncteur triangulé $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ soit une équivalence de catégories, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

- (i) *le foncteur F commute aux sommes infinies,*
- (ii) *l'ensemble $F(\underline{G})$ est un système de générateurs compacts de \mathcal{T}' ,*
- (iii) *pour tout $A, B \in \underline{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$, l'homomorphisme suivant est inversible :*

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(A, B[n]) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}'}(F(A), F(B)[n]).$$

Démonstration. — Les conditions (i) à (iii) sont clairement nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Pour $A \in \underline{G}$, on note \mathcal{T}_A la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des objets B tels que le morphisme

$$(1.74) \quad \text{hom}_{\mathcal{T}}(A, B[n]) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{T}'}(F(A), F(B)[n])$$

est bijectif. Il est clair que \mathcal{T}_A est une sous-catégorie triangulée. Elle contient \underline{G} par (iii). Comme F commute aux sommes infinies (par (i)) et que A et $F(A)$ sont compacts (par (ii)) la sous-catégorie \mathcal{T}_A est stable par sommes infinies. On en déduit que $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}$. En d'autres termes, pour tout $A \in \underline{G}$ et $B \in \text{Ob}(\mathcal{T})$, l'homomorphisme (1.74) est inversible.

Étant donné $B \in \text{Ob}(\mathcal{T})$, on note \mathcal{T}^B la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des A rendant (1.74) inversible pour tout $n \in \mathbb{Z}$. C'est une sous-catégorie triangulée de \mathcal{T} , contenant \underline{G} et stable par sommes infinies (on utilise encore une fois que F commute aux sommes infinies). On en déduit que $\mathcal{T}^B = \mathcal{T}$.

Nous avons donc montré que le foncteur F est pleinement fidèle. Ainsi, l'image essentielle $F(\mathcal{T})_{\text{ess}}$ de F (qui est équivalente à \mathcal{T}) s'identifie à une sous-catégorie triangulée de \mathcal{T}' stable par sommes infinies (puisque F commute aux sommes infinies). Comme $F(\underline{G})$ engendre \mathcal{T}' , on en déduit que $F(\mathcal{T})_{\text{ess}} = \mathcal{T}'$. Le lemme est prouvé.

C.Q.F.D.

Il est clair que le foncteur \mathfrak{F} commute aux sommes infinies. Pour montrer que \mathfrak{F} est une équivalence de catégories, il faut donc vérifier que les homomorphismes

$$(1.75) \quad \begin{array}{c} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})} (\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}), \text{Sus}_T^q(Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \otimes B_{\text{cst}})) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)} (\mathfrak{F}(\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})), \mathfrak{F}(\text{Sus}_T^q(Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \otimes B_{\text{cst}}))) \end{array}$$

sont bijectifs pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $(r, s) \in (\mathbb{N} - \{0\})^2$, $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, X et Y des \tilde{k} -schémas affines lisses, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et $g \in \Gamma(Y, \mathcal{O}^\times)$. On peut écrire

$$\text{Sus}_T^p(-) = (\text{Sus}_T^p \bullet_{\text{cst}}) \otimes \text{Sus}_T^0(-)$$

(voir [3, Corollaire 4.3.72]). L'objet $\text{Sus}_T^p \bullet_{\text{cst}} = (\text{Sus}_T^1 \bullet_{\text{cst}})^{\otimes p}$ est inversible pour la structure monoïdale sur $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$ (voir [3, Théorème 4.3.38]). Étant donné que \mathfrak{F} est un foncteur monoïdal, on voit que l'on peut supposer $p = 0$ ou $q = 0$ quitte à remplacer q par $q - p$ si $p \leq q$ et p par $p - q$ sinon. Supposons pour fixer les idées que $q = 0$. L'inverse pour la structure monoïdale de $\text{Sus}_T^p \bullet_{\text{cst}}$ est donné par $\text{Sus}_T^0(T)^{\otimes p}$. Rappelons que T est \mathbb{A}^1 -équivalent à $\mathbb{A}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}^1 - o) \otimes \bullet_{\text{cst}}$. Ainsi, quitte à remplacer Y par des \tilde{k} -schémas du type $Y \times \mathbb{A}^i \times (\mathbb{A}^1 - o)^j$ pour $i + j = p$, on se ramène à considérer uniquement les homomorphismes

$$(1.76) \quad \begin{array}{c} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})} (\text{Sus}_T^0(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}), \text{Sus}_T^0(Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \otimes B_{\text{cst}})) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)} (\mathfrak{F}(\text{Sus}_T^0(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})), \mathfrak{F}(\text{Sus}_T^0(Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \otimes B_{\text{cst}}))) \end{array}$$

Dans la suite, et lorsque cela n'induit pas de confusion, on omettra de noter le foncteur $\text{Sus}_T^0(-)$.

Lemme 1.3.33. — *Pour montrer la première partie de la scholie 1.3.26, i.e., que \mathfrak{F} est une équivalence de catégories, il suffit de montrer que (1.76) est un isomorphisme dans le cas où s divise r .*

Démonstration. — Soit d un entier non nul. Considérons le $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schéma

$$Q_{\text{rd}}^{\text{gm}}(X[U, U^{-1}], U^r f).$$

Il est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{X[T, T^{-1}, U, U^{-1}, V]}{(V^{rd} - U^r T f)} &= \frac{X[T, T^{-1}, U, U^{-1}, V, W]}{(W^r - T f, V^d - W U)} \\ &= \frac{X[T, T^{-1}, V, V^{-1}, W]}{(W^r - T f)} \simeq Q_r^{\text{gm}}(X, f)[V, V^{-1}]. \end{aligned}$$

Ainsi, dans les catégories homotopiques, $Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}$ est un facteur direct de $Q_{\text{rd}}^{\text{gm}}(X[U, U^{-1}], U^r f) \otimes A_{\text{cst}}$. Il suffit alors de prendre $d = s$ pour conclure. C.Q.F.D.

L'intérêt du lemme 1.3.33 vient de la proposition suivante.

Proposition 1.3.34. — *Considérons le diagramme commutatif de \tilde{k} -schémas*

$$\begin{array}{ccccc} Q_r^{\text{gm}}(X, f) & \xrightarrow{j} & \bar{Q}_r^{\text{gm}}(X, f) & \xleftarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}} = \text{Spec}(\tilde{k}[T, T^{-1}]) & \longrightarrow & \mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 = \text{Spec}(\tilde{k}[T]) & \longleftarrow & o = \text{Spec}(\tilde{k}) \end{array}$$

avec $\bar{Q}_r^{\text{gm}}(X, f) = X[T, V]/(V^r - fT)$. C'est un diagramme à carrés cartésiens à nil-immersions près. Si s divise r , la composition de

$$(1.77) \quad \begin{aligned} &\text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}})}(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}, Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \otimes B_{\text{cst}}) \\ &\quad \sim \downarrow (1) \\ &\text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Q_r^{\text{gm}}(X, f))}(A_{\text{cst}}, [Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \times_{\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}} Q_r^{\text{gm}}(X, f)] \otimes B_{\text{cst}}) \\ &\quad \downarrow (2) \\ &\text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(A_{\text{cst}}, i^* j_*([Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \times_{\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}} Q_r^{\text{gm}}(X, f)] \otimes B_{\text{cst}})) \end{aligned}$$

est inversible.

Démonstration. — L'isomorphisme (1) de (1.77) s'obtient via l'adjonction $(\text{pr}_{\#}, \text{pr}^*)$ où pr est la projection de $Q_r^{\text{gm}}(X, f)$ sur $\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}$. Il faut montrer que l'homomorphisme (2) de (1.77) est inversible.

Notons d l'entier tel que $r = sd$. Le \tilde{k} -schéma $Q_r^{\text{gm}}(X, f) \times_{\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}} Q_s^{\text{gm}}(Y, g)$ est égal à

$$\begin{aligned} \frac{X \times_{\tilde{k}} Y[T, T^{-1}, V, W]}{(V^{ds} - fT, W^s - gT)} &= \frac{X \times_{\tilde{k}} Y[V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{(gV^{ds} - fW^s)} \\ &\simeq \left(X \times_{\tilde{k}} Y[R]/(R^s - \frac{f}{g}) \right) [V, V^{-1}, W, W^{-1}]/(V^d - RW) \\ &= \left(X \times_{\tilde{k}} Y[R]/(R^s - \frac{f}{g}) \right) [V, V^{-1}]. \end{aligned}$$

On note Z le \tilde{k} -schéma $X \times_{\tilde{k}} Y[R]/(R^d - (f/g))$ et h la classe de R . On dispose d'un morphisme lisse évident $p_X^Z : Z \rightarrow X$. Modulo les identifications

$$Q_r^{\text{gm}}(X, f) \times_{\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}} Q_r^{\text{gm}}(Y, g) = Z[V, V^{-1}],$$

$$Q_r^{\text{gm}}(X, f) = X[T, T^{-1}, V]/(V^p - fT) = X[V, V^{-1}],$$

la projection sur le premier facteur de $Q_r^{\text{gm}}(X, f) \times_{\mathbb{G}_{m, \bar{k}}} Q_r^{\text{gm}}(Y, g)$ est simplement

$$Z[V, V^{-1}] \xrightarrow{p_X^Z \times \text{id}} X[V, V^{-1}].$$

On a un diagramme cartésien de \tilde{k} -schémas

$$\begin{array}{ccccc} Z[V, V^{-1}] & \xrightarrow{j} & Z[V] & \xleftarrow{i} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X[V, V^{-1}] & \xrightarrow{j} & X[V] & \xleftarrow{i} & X \end{array}$$

où les flèches verticales sont toutes déduites de p_X^Z . En particulier, elles sont lisses. Modulo les identifications précédentes, l'homomorphisme (2) de (1.77) s'écrit

$$(1.78) \quad \begin{aligned} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X[V, V^{-1}])}(A_{\text{cst}}, Z[V, V^{-1}] \otimes B_{\text{cst}}) \\ \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(A_{\text{cst}}, i^* j_*(Z[V, V^{-1}] \otimes B_{\text{cst}})). \end{aligned}$$

Considérons le diagramme de X -schémas

$$\begin{array}{ccccc} X[V, V^{-1}] & \xrightarrow{j} & X[V] & \xleftarrow{i} & X \\ & \searrow q & \downarrow p & & \nearrow \\ & & X & & \end{array}$$

L'adjonction (q^*, q_*) fournit un isomorphisme

$$(1.79) \quad \begin{aligned} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(A_{\text{cst}}, q_*(Z[V, V^{-1}] \otimes B_{\text{cst}})) \\ \simeq \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X[V, V^{-1}])}(A_{\text{cst}}, Z[V, V^{-1}] \otimes B_{\text{cst}}). \end{aligned}$$

En composant (1.78) et (1.79), on obtient un homomorphisme

$$(1.80) \quad \begin{aligned} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(A_{\text{cst}}, q_*(Z[V, V^{-1}] \otimes B_{\text{cst}})) \\ \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(A_{\text{cst}}, i^* j_*(Z[V, V^{-1}] \otimes B_{\text{cst}})). \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera immédiatement que cet homomorphisme est induit par la composition des transformations naturelles $q_* \simeq p_* j_* \rightarrow p_* i_* i^* j_* \rightarrow i^* j_*$. Or, cette transformation naturelle composée est inversible lorsqu'on l'applique à q^* , et en particulier à l'objet $q^*(Z \otimes B_{\text{cst}}) = Z[V, V^{-1}] \otimes B_{\text{cst}} \in \text{Ob}(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X[V, V^{-1}]))$. Pour une preuve de cela, le lecteur peut consulter la fin de la démonstration du [3, Lemme 3.4.10].

C.Q.F.D.

Remarque 1.3.35. — La proposition 1.3.34 reste vraie sans l'hypothèse que s divise r . Ceci est une conséquence de la scholie 1.3.26 (modulo les théorèmes 1.3.37 et 1.3.38 ci-dessous). Pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser le diagramme commutatif (1.102). Toutefois, nous n'avons pas réussi à fournir un argument direct dans le cas général.

La proposition 1.3.34 fournit une description du premier membre de (1.76) qui fait apparaître le système de spécialisation χ (voir [3, Exemple 3.1.4]). On voudrait une description analogue du second membre de (1.76). Pour cela, nous aurons besoin d'une construction qui, à première vue, paraîtra peu naturelle.

Soit $\mathcal{D} : \text{SmAfd}/k \rightarrow \text{Sch}/k^\circ$ le foncteur qui à un k -affinoïde lisse X associe le k° -schéma affine $\text{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}^\circ))$; voir la notation 1.1.13 pour la définition du faisceau \mathcal{O}° . Si $X = \text{Spm}(A)$, alors $\mathcal{D}(X) = \text{Spec}(A^\circ)$ avec $A^\circ = \{f \in A; |f|_\infty \leq 1\}$; voir la remarque 1.1.7 pour la définition de la norme infinie.

On considérera \mathcal{D} comme un diagramme de schémas (au sens de [2, Définition 2.4.4]) et on utilisera les notations de la section 2.4 de *loc. cit.* Bien entendu les schémas $\mathcal{D}(X)$ ne sont pas de type fini. Toutefois, ils sont normaux, topologiquement de présentation finie et donc noethériens (puisque la valuation de k est discrète).

On note également $\mathcal{D}_\eta : \text{SmAfd}/k \rightarrow \text{Sch}/k$ le foncteur qui à un k -affinoïde X associe $\text{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}))$ et $\mathcal{D}_\sigma : \text{SmAfd}/k \rightarrow \text{Sch}/\tilde{k}$ celui qui à X associe $\tilde{X} = \text{Spec}(\frac{\Gamma(X, \mathcal{O}^\circ)}{\Gamma(X, \mathcal{O}^\vee)})$. On a ainsi un diagramme dans la catégorie DiaSch des diagrammes de schémas à carrés cartésiens (à nil-immersions près)

$$(1.81) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_\eta & \xrightarrow{j} & \mathcal{D} & \xleftarrow{i} & \mathcal{D}_\sigma \\ \mathbf{u}_\eta \downarrow & & \downarrow \mathbf{u} & & \downarrow \mathbf{u}_\sigma \\ k & \xrightarrow{j} & k^\circ & \xleftarrow{i} & \tilde{k}. \end{array}$$

Étant donné $X \in \text{Ob}(\text{SmAfd}/k)$, on note $\mathbf{u}_X : \mathcal{D}(X) \rightarrow \text{Spec}(k^\circ)$ le morphisme structural du k° -schéma $\mathcal{D}(X)$; c'est aussi la composition de \mathbf{u} avec l'inclusion évidente $\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}$. Les morphismes $(\mathbf{u}_X)_\eta : \mathcal{D}_\eta(X) \rightarrow \text{Spec}(k)$ et $(\mathbf{u}_X)_\sigma : \mathcal{D}_\sigma(X) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{k})$ sont alors définis par changement de base, comme d'habitude.

Rappelons (voir le début de [3, §4.5.1]) que Sm/\mathcal{D} est la catégorie des couples (Y, X) avec X un k -affinoïde lisse et Y un $\mathcal{D}(X)$ -schéma lisse. On dispose d'un foncteur diagonal évident

$$(1.82) \quad \text{diag} : \text{SmAfd}/k \longrightarrow \text{Sm}/\mathcal{D}$$

qui à un k -affinoïde lisse $X = \text{Spm}(A)$ associe le couple $(\text{Spec}(A), X)$. En composant avec les foncteurs

$$- \times_{\mathcal{D}} \mathcal{D}_\eta : \text{Sm}/\mathcal{D} \longrightarrow \text{Sm}/\mathcal{D}_\eta \quad \text{et} \quad - \times_{\mathcal{D}} \mathcal{D}_\sigma : \text{Sm}/\mathcal{D} \longrightarrow \text{Sm}/\mathcal{D}_\sigma,$$

on obtient deux autres foncteurs diagonaux

$$(1.83) \quad \text{diag}_\eta : \text{SmAfd}/k \longrightarrow \text{Sm}/\mathcal{D}_\eta \quad \text{et} \quad \text{diag}_\sigma : \text{SmAfd}/k \longrightarrow \text{Sm}/\mathcal{D}_\sigma.$$

Les foncteurs (1.82) et (1.83) induisent par composition à gauche des foncteurs

$$(1.84) \quad \text{diag}^* : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathcal{D}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M}),$$

$$(1.85) \quad \text{diag}_\eta^* : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathcal{D}_\eta, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M}),$$

$$(1.86) \quad \text{diag}_\sigma^* : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathcal{D}_\sigma, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M}).$$

On fera attention que, contrairement aux notations choisies, diag^* , diag_η^* et diag_σ^* sont des foncteurs « image directe » de préfaisceaux suivant (1.82) et (1.83). En particulier, ils préservent les équivalences faibles de préfaisceaux ainsi que les fibrations projectives.

Lemme 1.3.36. — 1) Soit K un préfaisceau sur Sm/k à valeurs dans une catégorie cocomplète. Notons $r : \text{SmAfd}/k \hookrightarrow \text{SmRig}/k$ l'inclusion évidente. Il existe un isomorphisme naturel

$$(1.87) \quad \text{diag}_\eta^* \mathbf{u}_\eta^* K \xrightarrow{\sim} r_* \text{Rig}^* K.$$

2) Soit L un préfaisceau sur SmAf/k° à valeurs dans une catégorie cocomplète. On note $a : \text{SmAf}/k^\circ \hookrightarrow \text{Sm}/k^\circ$ l'inclusion évidente et $\text{cpl}_\eta : \text{SmAf}/k^\circ \rightarrow \text{SmAfd}/k$ le foncteur qui à X associe $(X//(\pi))_\eta$. Il existe un isomorphisme naturel

$$(1.88) \quad \text{diag}^* \mathbf{u}^* a^* L \xrightarrow{\sim} \text{cpl}_\eta^* L.$$

Démonstration. — 1) Soit $X = \text{Spm}(A)$ un k -affinoïde lisse. La restriction du préfaisceau $\mathbf{u}_\eta^* K$ à $\text{Sm}/\mathcal{D}_\eta(X)$ est l'image inverse de K suivant le prémorphisme de sites (munis des topologies grossières) $\text{Sm}/\mathcal{D}_\eta(X) \rightarrow \text{Sm}/k$ induit par la projection $(\mathbf{u}_X)_\eta$. Il vient que

$$(1.89) \quad [\text{diag}_\eta^* \mathbf{u}_\eta^* K](X) = [(\mathbf{u}_X)_\eta^* K](\mathcal{D}_\eta(X)) = \underset{\text{Spec}(A) \rightarrow U \in \text{Ob}(\text{Spec}(A) \setminus (\text{Sm}/k))}{\text{Colim}} K(U).$$

D'autre part, $[r_* \text{Rig}^* K](X) = [\text{Rig}^* K](X)$ est donné par la colimite

$$(1.90) \quad \underset{\text{Spm}(A) \rightarrow U^{\text{an}} \in \text{Spm}(A) \setminus (\text{Sm}/k)}{\text{Colim}} K(U).$$

L'identification entre (1.89) et (1.90) découle alors de la bijection $\text{hom}(\text{Spec}(A), U) \simeq \text{hom}(\text{Spm}(A), U^{\text{an}})$ (voir la proposition 1.1.21).

2) Soit $X = \text{Spm}(A)$ un k -affinoïde lisse. La restriction du préfaisceau $\mathbf{u}^* a^* L$ à $\text{Sm}/\mathcal{D}(X)$ est l'image inverse de $a^* L$ suivant le prémorphisme de sites (munis des topologies grossières) $\text{Sm}/\mathcal{D}(X) \rightarrow \text{Sm}/k^\circ$ induit par la projection \mathbf{u}_X . Il vient que

$$(1.91) \quad \begin{aligned} [\text{diag}^* \mathbf{u}^* a^* L](X) &= [(\mathbf{u}_X)^* a^* L](\mathcal{D}(X)) \\ &= \underset{\text{Spec}(A^\circ) \rightarrow U \in \text{Ob}(\text{Spec}(A^\circ) \setminus (\text{SmAf}/k^\circ))}{\text{Colim}} L(U). \end{aligned}$$

D'autre part, $[\text{cpl}_\eta^* L](X)$ est donné par la colimite

$$(1.92) \quad \underset{\text{Spm}(A) \rightarrow (U//\pi)_\eta \in \text{Ob}(\text{Spm}(A) \setminus (\text{SmAf}/k^\circ))}{\text{Colim}} K(U).$$

L'identification entre (1.91) et (1.92) découle alors des bijections naturelles

$$\text{hom}(\text{Spec}(A^\circ), U) \simeq \text{hom}(\text{Spf}(A^\circ), U//\pi) \simeq \text{hom}(\text{Spm}(A), (U//\pi)_\eta).$$

La première bijection provient de la propriété universelle de la complétion d'une k° -algèbre. La seconde bijection découle du fait qu'un morphisme de k -algèbres affinoïdes

est contractant lorsque le but est muni de sa norme infinie (et que la source est munie d'une norme résiduelle). C.Q.F.D.

On dispose d'un isomorphisme de préfaisceaux d'ensembles $\mathbb{B}_k^1 \simeq \text{diag}^* \mathbb{A}_{\mathcal{D}}^1$ correspondant, pour un k -affinoïde lisse $\text{Spm}(A)$, à l'identification

$$\text{hom}(\text{Spm}(A), \mathbb{B}_k^1) = A^\circ = \text{hom}(\text{Spec}(A^\circ), \mathbb{A}_{k^\circ}^1).$$

Cet isomorphisme identifie le sous-préfaisceau $\partial \mathbb{B}_k^1 \subset \mathbb{B}_k^1$ à $\text{diag}^*(\mathbb{A}^1 - o)_{\mathcal{D}}$. On en déduit un isomorphisme de préfaisceaux à valeurs dans \mathfrak{M} :

$$\frac{\mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}}{\partial \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}} \simeq \text{diag}^* \left(\frac{\mathbb{A}_{\mathcal{D}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}}{(\mathbb{A}^1 - o)_{\mathcal{D}} \otimes \bullet_{\text{cst}}} \right).$$

Cet isomorphisme n'est autre que (1.88) dans le cas

$$L = (\mathbb{A}_{k^\circ}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}) / ((\mathbb{A}_{k^\circ}^1 - o) \otimes \bullet_{\text{cst}}).$$

Comme diag^* préserve les équivalences faibles de préfaisceaux, on obtient une équivalence faible de préfaisceaux $\text{diag}^* T_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / \partial \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}$. De plus, $\text{diag}^* T_{\mathcal{D}}$ est projectivement cofibrant puisqu'il est isomorphe à $\text{cpl}_\eta^* T'_{k^\circ}$ (où T' est le modèle cofibrant de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}} / (\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\text{cst}}$ dans $\mathbf{PreShv}(\text{SmAf}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M})$ que l'on a fixé au début du paragraphe 1.3.3; on rappelle aussi que $T = a^* T'$). En particulier, on a clairement $r^* \text{diag}^* T_{\mathcal{D}} \simeq r^* \text{cpl}_\eta^* T' \simeq T^{\text{qc}}$.

On munit la catégorie $\mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M})$ de sa structure projective \mathbb{B}^1 -locale obtenue par localisation de Bousfield de la structure projective Nis-locale suivant la classe des morphismes $\mathbb{B}_U^1 \otimes A \rightarrow U \otimes A$ avec U un k -affinoïde lisse et $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$. Comme $\text{diag}^* T$ est cofibrant, on peut munir $\mathbf{Spect}_{\text{diag}^* T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M}))$ d'une structure de modèles projective \mathbb{B}^1 -locale stable. La catégorie homotopique de cette catégorie de modèles est équivalente à $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$. En effet, on a une suite d'équivalences de Quillen à gauche

$$(1.93) \quad \begin{array}{c} \mathbf{Spect}_{\text{diag}^* T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M})) \\ \downarrow \mathbf{I}^* \\ \mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})) \\ \downarrow T^{\text{an}} \otimes_{T^{\text{qc}}} - \\ \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M})). \end{array}$$

On dispose d'un foncteur entre catégories de spectres

$$(1.94) \quad \begin{array}{c} \text{diag}^* : \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathcal{D}, \mathfrak{M})) \\ \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\text{diag}^* T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M})). \end{array}$$

Ce foncteur préserve clairement les équivalences faibles entre préfaisceaux niveau par niveau. Étant donné que les équivalences \mathbb{A}^1 -locales stables entre objets stablement

\mathbb{A}^1 -fibrants sont des équivalences faibles de préfaisceaux niveau par niveau, on déduit l'existence d'un foncteur dérivé à droite (voir [3, Proposition 4.1.22])

$$\begin{aligned} \mathbf{Rdiag}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}) &\simeq \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1\text{-st}}(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/\mathcal{D}, \mathfrak{M}))) \\ &\longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Spect}_{\mathbf{diag}^*T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmAfd}/k, \mathfrak{M}))). \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème 1.3.37. — *L'image de la composition de*

$$(1.95) \quad \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{u_\eta^*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}_\eta) \xrightarrow{i_*i^*j_*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{Rdiag}^*} \mathbf{Ho}(\mathbf{Spect}_{\mathbf{diag}^*T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmAfd}/k, \mathfrak{M})))$$

est contenue dans la sous-catégorie des objets stablement \mathbb{B}^1 -locaux.

La sous-catégorie pleine des objets stablement \mathbb{B}^1 -locaux de

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Spect}_{\mathbf{diag}^*T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmAfd}/k, \mathfrak{M})))$$

est canoniquement équivalente à $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ via la suite (1.93) d'équivalences de Quillen. Le théorème 1.3.37 fournit donc un foncteur $\mathfrak{L} : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \rightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$.

Soit $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/k, \mathfrak{M})))$ un T -spectre symétrique projectivement cofibrant. Par le lemme 1.3.36, on a un isomorphisme $r_*\mathbf{Rig}^*\mathbf{E} \simeq \mathbf{diag}_\eta^*u_\eta^*\mathbf{E}$ de $r_*T^{\text{an}} = \mathbf{diag}_\eta^*T_{\mathcal{D}_\eta}$ -spectres symétriques. En utilisant le morphisme évident $\mathbf{diag}^*T_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{diag}_\eta^*T_{\mathcal{D}_\eta}$, on peut considérer $r_*\mathbf{Rig}^*\mathbf{E} \simeq \mathbf{diag}_\eta^*u_\eta^*\mathbf{E}$ comme un isomorphisme de $\mathbf{diag}^*T_{\mathcal{D}}$ -spectres symétriques. D'autre part, on a un morphisme de T -spectres symétriques dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D})$

$$\mathbf{R}j_*u_\eta^*\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R}i_*\mathbf{L}i^*\mathbf{R}j_*u_\eta^*\mathbf{E}.$$

On peut alors considérer la composition de

$$(1.96) \quad r_*\mathbf{Rig}^*\mathbf{E} \simeq \mathbf{diag}_\eta^*u_\eta^*\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Rdiag}^*\mathbf{R}j_*u_\eta^*\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Rdiag}^*\mathbf{R}i_*\mathbf{L}i^*\mathbf{R}j_*u_\eta^*\mathbf{E}.$$

C'est une flèche de $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spect}_{\mathbf{diag}^*T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmAfd}/k, \mathfrak{M})))$.

Théorème 1.3.38. — *Pour tout T -spectre symétrique projectivement cofibrant \mathbf{E} , la composition de (1.96) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable.*

Remarque 1.3.39. — Le dernier membre de (1.96) est stablement \mathbb{B}^1 -local par le théorème 1.3.37. Ainsi, le théorème 1.3.38 affirme que (1.96) fournit un remplacement stablement \mathbb{B}^1 -local de $\mathbf{Rig}^*\mathbf{E}$. On en déduit un isomorphisme naturel $\theta : \mathbf{Rig}^*\mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}\mathbf{E}$ dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$. Ceci montre que le foncteur \mathbf{Rig}^* est canoniquement isomorphe à \mathfrak{L} .

La preuve du théorème 1.3.37 sera donnée dans ce paragraphe. La preuve du théorème 1.3.38 nécessite malheureusement beaucoup plus de préliminaires et ne sera donnée qu'à la fin de la section 1.4. Montrons d'abord comment démontrer la scholie 1.3.26 en admettant les théorèmes 1.3.37 et 1.3.38.

Démonstration de la scholie 1.3.26. — On divise la preuve en plusieurs étapes. Dans la première, on montre que \mathfrak{F} est une équivalence de catégories.

Étape 1 : Rappelons que pour montrer que \mathfrak{F} est une équivalence de catégories il restait à voir que les homomorphismes (1.76) étaient inversibles pour s divisant r (voir le lemme 1.3.33).

Soit $\text{Sus}_T^0(Q_s^{\text{gm}}(Y, g) \otimes B_{\text{cst}}) \longrightarrow \mathbf{E} = (\mathbf{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une cofibration projective stablement \mathbb{A}^1 -triviale avec \mathbf{E} stablement \mathbb{A}^1 -fibrant dans $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathbb{G}_{m\tilde{k}}, \mathfrak{M}))$. Soit $\text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} = (\mathbf{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une cofibration projective stablement \mathbb{B}^1 -triviale avec \mathbf{F} stablement \mathbb{B}^1 -fibrant dans $\mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$. La flèche (1.76) s'obtient en appliquant $\pi_0(A, -)$ à la composition de

$$(1.97) \quad \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{gm}}(X, f)) \longrightarrow \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) \longrightarrow \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)).$$

Il suffit donc de montrer que la composition de (1.97) est une équivalence faible (dans \mathfrak{M}). Étant donné que \mathbf{F}_0 est \mathbb{B}^1 -fibrant, la flèche

$$(1.98) \quad \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) \xrightarrow{\text{w.e.}} \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f))$$

est une équivalence faible par le théorème 1.3.11. Il suffira donc de prouver que la composition de

$$(1.99) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{gm}}(X, f)) &\longrightarrow \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) \\ &\longrightarrow \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) \longrightarrow \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) \end{aligned}$$

est une équivalence faible. En utilisant le carré commutatif évident

$$\begin{array}{ccc} \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) &\longrightarrow & \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) &\longrightarrow & \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f)), \end{array}$$

on est ramené à considérer la composition de

$$(1.100) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{gm}}(X, f)) &\longrightarrow \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) \\ &\longrightarrow \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) \longrightarrow \mathbf{F}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f)). \end{aligned}$$

Par les théorèmes 1.3.37 et 1.3.38, la dernière flèche dans (1.100) est isomorphe dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ à la composition de

$$(1.101) \quad \begin{aligned} \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) &\simeq (\mathbf{u}_{Q_r^{\text{rig}}(X, f)})^* \pi^* \mathbf{E}_0(\mathcal{D}_\eta(Q_r^{\text{rig}}(X, f))) \\ &\downarrow \\ \left[\text{Rj}_*(\mathbf{u}_{Q_r^{\text{rig}}(X, f)})^* \pi^* \mathbf{E} \right]_0 &(\mathcal{D}(Q_r^{\text{rig}}(X, f))) \\ &\downarrow \\ \left[\text{Ri}_* \text{Li}^* \text{Rj}_*(\mathbf{u}_{Q_r^{\text{rig}}(X, f)})^* \pi^* \mathbf{E} \right]_0 &(\mathcal{D}(Q_r^{\text{rig}}(X, f))). \end{aligned}$$

Le schéma $\mathcal{D}(Q_r^{\text{rig}}(X, f))$ est le spectre de la k° -algèbre $\frac{(\Gamma(X, \mathcal{O}) \otimes_{\tilde{k}} k^\circ)[V]}{(V^r - f\pi)} // (\pi)$. On le notera $\bar{D}_r(X, f)$. On pose aussi $D_r(X, f) = \mathcal{D}_\eta(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) = \bar{D}_r(X, f)[1/\pi]$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{D}_\sigma(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) = X$. On a un carré commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} D_r(X, f) & \xrightarrow{j} & \bar{D}_r(X, f) & \xleftarrow{i} & X \\ c_\eta \downarrow & & \downarrow c & & \parallel \\ Q_r^{\text{gm}}(X, f) & \xrightarrow{j} & \bar{Q}_r^{\text{gm}}(X, f) & \xleftarrow{i} & X. \end{array}$$

La flèche c du milieu correspond donc au spectre du morphisme de complétion en l'idéal de l'immersion i . Par le corollaire 1.A.5, on sait que le 2-morphisme canonique $i^*j_* = c_\sigma^*i^*j_* \rightarrow i^*j_*c_\eta^*$ est inversible. (Bien entendu, c_σ est l'identité de X .) Le diagramme

$$(1.102) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{gm}}(X, f)) & \longrightarrow & \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{an}}(X, f)) & \longrightarrow & \text{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_0(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) \\ & \searrow & & & \uparrow \sim \\ & & & & (\mathbf{u}_{Q_r^{\text{rig}}(X, f)})^* \pi^* \mathbf{E}_0(D_r(X, f)) \\ & \downarrow (1) & & & \downarrow \\ [\text{Li}^* \text{R}j_* ((\mathbf{E})|_{Q_r^{\text{gm}}(X, f)})]_0(X) & \xrightarrow{\sim} & & & [\text{Li}^* \text{R}j_* ((\mathbf{E})|_{D_r(X, f)})]_0(X) \end{array}$$

est clairement commutatif. (Ci-dessus, $(\mathbf{E})|_{\dagger}$ désigne l'image inverse de \mathbf{E} par un morphisme $\dagger \rightarrow \mathbb{G}_{m, \tilde{k}}$.) Or, la flèche (1) dans le diagramme (1.102) est une équivalence faible. En effet, d'après la proposition 1.3.34, elle induit un isomorphisme après application de $\pi_0(A, -)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$. Ceci permet de conclure.

Étape 2 : On passe à la seconde partie de la scholie 1.3.26. Rappelons que SmAf/\tilde{k} désigne la sous-catégorie pleine de Sm/\tilde{k} formée des schémas affines. On note $\mathcal{Q} : \text{SmAf}/\tilde{k} \rightarrow \text{Sm}/k^\circ$ le diagramme de k° -schémas qui à X associe $Q^{\text{sch}}(X)$. On pose alors $\mathcal{Q}_\eta = \mathcal{Q} \times_{k^\circ} k$ et $\mathcal{Q}_\sigma = \mathcal{Q} \times_{k^\circ} \tilde{k}$. On dispose également d'un foncteur $\mathfrak{q} : \text{SmAf}/\tilde{k} \rightarrow \text{SmAfn}/k$ qui à un \tilde{k} -schéma affine et lisse X associe le k -affinoïde $Q^{\text{rig}}(X)$. On a alors un diagramme commutatif dans DiaSch à carrés cartésiens (à nil-immersions près)

$$\mathfrak{w}_\eta \left(\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_\eta \circ \mathfrak{q} & \xrightarrow{j} & \mathcal{D} \circ \mathfrak{q} & \xleftarrow{i} & \mathcal{D}_\sigma \circ \mathfrak{q} \\ \mathfrak{c}_\eta \downarrow & & \downarrow \mathfrak{c} & & \parallel \\ \mathcal{Q}_\eta & \xrightarrow{j} & \mathcal{Q} & \xleftarrow{i} & \mathcal{Q}_\sigma \\ \mathfrak{v}_\eta \downarrow & & \downarrow \mathfrak{v} & & \downarrow \mathfrak{v}_\sigma \\ k^\circ & \xrightarrow{j} & k & \xleftarrow{i} & \tilde{k}. \end{array} \right)$$

Par le corollaire 1.A.5, on déduit un 2-isomorphisme $i^*j_* \simeq i^*j_*\mathfrak{c}_\eta^*$. Par le théorème de changement de base par un morphisme lisse, on a également un 2-isomorphisme $\mathfrak{v}_\sigma^*i^*j_* \simeq i^*j_*\mathfrak{v}_\eta^*$. On déduit que le 2-morphisme canonique suivant est inversible :

$$\mathfrak{v}_\sigma^*i^*j_* \longrightarrow i^*j_*\mathfrak{w}_\eta^*.$$

Appelons $\Delta : \text{SmAf}/\tilde{k} \rightarrow \text{Sm}/\mathcal{Q}_\sigma$ le foncteur diagonal qui à un \tilde{k} -schéma affine X associe (X, X) . On note Δ^* , le foncteur qui à un préfaisceau sur $\text{Sm}/\mathcal{Q}_\sigma$ associe sa composition à gauche avec Δ . On obtient alors, pour \mathbf{E} dans $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/k, \mathfrak{M}))$, des isomorphismes naturels dans la catégorie homotopique

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{E}) &= \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_*(\mathbf{E}) \simeq \mathbf{R}\Delta^* \mathbf{v}_\sigma^* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_*(\mathbf{E}) \\ &\simeq \mathbf{R}\Delta^* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{L}\mathbf{w}_\eta^*(\mathbf{E}) \simeq \mathbf{R}q^* \mathbf{R}\text{diag}_\sigma^* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{L}\mathbf{u}_\eta^*(\mathbf{E}) \\ &\simeq \mathbf{R}q^* \mathbf{R}\text{diag}^* \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{L}\mathbf{u}_\eta^*(\mathbf{E}) = \mathbf{R}q^* \mathcal{L}(\mathbf{E}). \end{aligned}$$

(Ci-dessus, q^* est le foncteur de composition à gauche avec q .) Par les théorèmes 1.3.37 et 1.3.38, le spectre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Rig}^* \mathbf{E} \in \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$ (voir la remarque 1.3.39). Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\mathbf{R}q^*$ coïncide avec le foncteur q_* modulo l'équivalence de catégories $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \simeq \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$. Il faut donc exhiber un isomorphisme entre les compositions de

$$\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \xrightarrow{\mathbf{Rig}^* \pi^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k) \xrightarrow{\mathbf{R}q^*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \quad \text{et} \quad \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \xrightarrow{q_*} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}).$$

Soit \mathbf{E} un T -spectre symétrique projectivement cofibrant et stablement \mathbb{B}^1 -fibrant de $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/\mathbb{G}_{m\tilde{k}}, \mathfrak{M}))$ qui appartient à $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$. Soit $\mathbf{Rig}^* \pi^* \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une cofibration stablement \mathbb{B}^1 -triviale avec \mathbf{F} un T^{an} -spectre symétrique stablement \mathbb{B}^1 -fibrant. Pour X un \tilde{k} -schéma affine, on considère la composition de

$$\mathbf{E}_n(Q^{\text{gm}}(X)) \longrightarrow \mathbf{Rig}^* \pi^* \mathbf{E}_n(Q^{\text{an}}(X)) \longrightarrow \mathbf{F}_n(Q^{\text{an}}(X)) \longrightarrow \mathbf{F}_n(Q^{\text{rig}}(X)).$$

Ces flèches, s'organisent en un morphisme de T -spectres symétriques $q_* \mathbf{E} \rightarrow q^* \mathbf{F}$. On obtient ainsi une transformation naturelle

$$\mathbf{R}q_* \longrightarrow \mathbf{R}q^* \mathbf{Rig}^* \pi^*.$$

Il reste à montrer que cette transformation naturelle est inversible. Pour cela, on lui applique la famille conservative des foncteurs $\text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})}(\text{Sus}_T^p(X \otimes A_{\text{cst}}), -)$ pour $X \in \text{Ob}(\text{Sm}/\tilde{k})$, $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{E}$. On retrouve alors l'application

$$\begin{array}{c} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})}(\text{Sus}_T^p(Q^{\text{gm}}(X) \otimes A_{\text{cst}}), \mathbf{E}) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}(\mathfrak{F}(\text{Sus}_T^p(Q^{\text{gm}}(X) \otimes A_{\text{cst}})), \mathbf{F}) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}((\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Q^{\text{rig}}(X) \otimes A_{\text{cst}})), \mathbf{F}). \end{array}$$

Le résultat découle maintenant du fait que \mathfrak{F} est une équivalence de catégories et du théorème 1.3.11.

Étape 3 : Il nous reste à traiter la composition de (1.70). Rappelons brièvement la construction du foncteur Ψ_π . On dispose d'un diagramme de $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schémas lisses \mathcal{R} indexé par $\mathbf{\Delta} \times \mathbb{N}^\times$ (où $\mathbf{\Delta}$ est la catégorie des ensembles ordonnés $\mathbf{n} = \{0 \leq \dots \leq n\}$,

pour $n \in \mathbb{N}$, et \mathbb{N}^\times est l'ensemble des entiers non nuls ordonné par l'opposée de la relation de divisibilité). Pour la définition précise de \mathcal{R} , on renvoie le lecteur à [3, Définition 3.5.3]. Pour $(\underline{n}, r) \in \text{Ob}(\Delta \times \mathbb{N}^\times)$ le $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schéma $\mathcal{R}(\underline{n}, r)$ est donné par

$$\mathbb{G}_{m\tilde{k}} \times_{\tilde{k}} (\mathbb{G}_{m\tilde{k}})^n \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{G}_{m\tilde{k}} \xrightarrow{(-)^r} \mathbb{G}_{m\tilde{k}}.$$

C'est donc le $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ -schéma $Q_r^{\text{gm}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, 1)$. On note $(\theta^{\mathcal{R}}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})$ la projection de \mathcal{R} sur $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}$ et $(\theta_\pi^{\mathcal{R}}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})$ son changement de base suivant $\pi : \text{Spec}(k) \rightarrow \mathbb{G}_{m\tilde{k}}$.

Étant donné un T -spectre symétrique $\mathbf{E} \in \text{Ob}(\text{Spect}_T^\Sigma(\text{PreShv}(\text{Sm}/k, \mathfrak{M})))$, on a par définition (voir [3, Définition 3.5.6])

$$(1.103) \quad \begin{aligned} \Psi_\pi(\mathbf{E}) &= L(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} \text{Li}^* \text{R}j_* \text{R}(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* (\theta_\pi^{\mathcal{R}})^* (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \mathbf{E} \\ &\simeq L(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} \text{Li}^* \text{R}j_* [(R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \mathbf{E}]. \end{aligned}$$

L'isomorphisme (1.103), provient du fait que les objets $\text{Sus}_T^0((\mathcal{R}(\underline{n}, r) \times_{\mathbb{G}_{m\tilde{k}}} k) \otimes \bullet)_{\text{cst}}$ sont fortement dualisables (par le lemme 1.3.29).

On peut voir $[(R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \mathbf{E}]$ comme un objet de

$$\text{Spect}_T^\Sigma(\text{PreShv}(\text{Sm}/k, \mathfrak{M}'))$$

avec $\mathfrak{M}' = \underline{\text{HOM}}((\Delta \times \mathbb{N}^\times)^{\text{op}}, \mathfrak{M})$. D'après la seconde étape de la preuve, on déduit des isomorphismes naturels

$$(1.104) \quad \begin{aligned} \Psi_\pi(\mathbf{E}) &\simeq L(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} \text{R}q_* \mathfrak{R}\text{Rig}^* [(R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \mathbf{E}] \\ &\simeq L(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} \text{R}q_* ((\mathfrak{R}\text{Rig}^*(R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet)) \otimes (\mathfrak{R}\text{Rig}^*(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \mathbf{E})). \end{aligned}$$

Par le corollaire 1.A.4, on a un isomorphisme $\pi^*(R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \simeq R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet$. Comme \mathfrak{R} est un quasi-inverse à $\text{Rig}^* \pi^*$, on déduit un isomorphisme

$$\mathfrak{R}\text{Rig}^*(R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \simeq R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet.$$

On a donc des isomorphismes naturels

$$(1.105) \quad \begin{aligned} \Psi_\pi(\mathbf{E}) &\simeq L(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} \text{R}q_* ((R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (\mathfrak{R}\text{Rig}^*(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \mathbf{E})) \\ &\simeq L(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} \text{R}q_* ((R(\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes ((p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \mathfrak{R}\text{Rig}^* \mathbf{E})). \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à construire un isomorphisme entre

$$1^* : \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \longrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$$

et le foncteur

$$\Psi^{\text{qu}}(-) = (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} q_* (((\theta_\pi^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^*(-)) : \mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}) \longrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k}).$$

(Remarquons en passant que Ψ^{qu} est isomorphe à la restriction de

$$\Psi_{\text{id}} : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}) \longrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$$

à la sous-catégorie $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$.) En utilisant le 2-morphisme $q_* \rightarrow q_* 1_* 1^* \simeq 1^*$, on déduit un 2-morphisme

$$(1.106) \quad \begin{aligned} \Psi^{\text{qu}} &\longrightarrow (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} 1^* (((\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^*(-)) \\ &\xrightarrow{\sim} (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} ((1^*(\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* 1^*(-)). \end{aligned}$$

On forme le carré cartésien de diagrammes de schémas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_1 & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ (\alpha, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\tilde{k}) & \xrightarrow{1} & \mathbb{G}_{\mathfrak{m}_{\tilde{k}}} \end{array}$$

Le morphisme de changement de base nous donne alors une flèche

$$1^*(\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet \longrightarrow \alpha_* \bullet.$$

D'autre part, on vérifie facilement que les morphismes

$$(1, \dots, 1) : \text{Spec}(\tilde{k}) \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathfrak{m}_{\tilde{k}}}^{n+1} \simeq \mathcal{R}(\underline{\mathbf{n}}, r)$$

fournissent un morphisme de $\Delta \times \mathbb{N}^\times$ -diagrammes de \tilde{k} -schémas

$$u : (\text{Spec}(k), \Delta \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow (\mathcal{R}_1, \Delta \times \mathbb{N}^\times).$$

On obtient alors une flèche $\alpha_* \bullet \rightarrow \alpha_* u_* u^* \bullet \simeq \bullet$ et donc en fin de compte une flèche $1^*(\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet \rightarrow \bullet$. En composant avec (1.106), on obtient la transformation naturelle

$$(1.107) \quad \sigma : \Psi^{\text{qu}} \longrightarrow (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} ((p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* 1^*(-)) \simeq 1^*.$$

On montrera que σ est inversible dans une quatrième étape.

Étape 4 : Montrons d'abord que σ est inversible lorsqu'on l'applique à q^* . Le morphisme d'unité $\bullet \rightarrow (\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet$, induit une transformation naturelle

$$q_* \simeq (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} q_* (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^* \longrightarrow (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})_{\#} q_* (((\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet) \otimes (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^*(-)).$$

Il est clair que le morphisme $\bullet \rightarrow 1^*(\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet$ est une section au morphisme $1^*(\theta^{\mathcal{R}})_* \bullet \rightarrow \bullet$ qu'on a utilisé pour construire σ . Ainsi, la composition de

$$q_* \longrightarrow \Psi^{\text{qu}} \xrightarrow{\sigma} 1^*$$

est le morphisme évident $q_* \rightarrow 1^*$. Ceci montre que la composition de

$$\text{id} \longrightarrow q_* q^* \longrightarrow \Psi^{\text{qu}} q^* \longrightarrow 1^* q^* \simeq \text{id}$$

est l'identité du foncteur identité. Le résultat découle alors du fait que la composition de $\text{id} \rightarrow q_* q^* \rightarrow \Psi^{\text{qu}} q^*$ est inversible (voir [3, Lemme 3.5.10]).

Passons au cas général. Soit $r \in \mathbb{N}^\times$ et notons $e_r : \mathbb{G}_{\mathfrak{m}_{\tilde{k}}} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathfrak{m}_{\tilde{k}}}$ l'élevation à la puissance r . On dispose d'un isomorphisme de diagrammes de $\mathbb{G}_{\mathfrak{m}_{\tilde{k}}}$ -schémas entre

$$(e_r \circ \theta^{\mathcal{R}}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathfrak{m}_{\tilde{k}}} \xrightarrow{e_r} \mathbb{G}_{\mathfrak{m}_{\tilde{k}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} \circ (\text{id}_{\Delta} \times m_r)$$

avec $m_r : \mathbb{N}^\times \rightarrow \mathbb{N}^\times$ la multiplication par r . Par [3, Proposition 3.5.9], on dispose d'un isomorphisme $\Psi^{\text{qu}} \circ e_r^* \simeq \Psi^{\text{qu}}$. On vérifie facilement que le carré

$$(1.108) \quad \begin{array}{ccc} \Psi^{\text{qu}} & \xrightarrow{\sim} & \Psi^{\text{qu}} \circ e_r^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1^* & \xlongequal{\quad} & 1 \simeq 1^* e_r^* \end{array}$$

est commutatif.

Il est maintenant aisé de montrer que (1.107) est inversible. Il suffit en effet d'évaluer sur les générateurs de $\mathbf{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$. Soit $\mathbf{E} = \text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})$. Par le carré commutatif (1.108), on peut remplacer \mathbf{E} par

$$e_r^* \mathbf{E} = \text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X[W]/(W^r - f)) \otimes A_{\text{cst}}).$$

Cet objet est égal à $q^* \text{Sus}_T^p((X[W]/(W^r - f)) \otimes A_{\text{cst}})$. Or, on a montré que σq^* est inversible. D'où le résultat. C.Q.F.D.

Dans le reste de ce paragraphe, on se propose de montrer le théorème 1.3.37. Pour cela, nous aurons besoin d'un critère de Nis-localité en géométrie rigide. Si X est une k -variété rigide, on note Et^{af}/X la sous-catégorie pleine des X -variétés rigides étales qui sont affinoïdes (en tant que k -variétés rigides). De même, si \mathcal{X} est un k° -schéma formel, on note $\text{Et}^{\text{af}}/\mathcal{X}$ la sous-catégorie pleine des \mathcal{X} -schémas formels étales et affines sur k° .

Lemme 1.3.40. — *Soit X un k -affinoïde normal et soit F un préfaisceau sur Et^{af}/X à valeurs dans \mathfrak{M} . Pour que F soit Nis-local, il suffit que la propriété (P) ci-dessous soit satisfaite pour tout $U \in \text{Ob}(\text{Et}^{\text{af}}/X)$, et tout modèle $\mathcal{U} \in \text{Mdl}(U)$ essentiel et projectif sur $\text{Spf}(\Gamma(U, \mathcal{O}^\circ))$.*

(P) : *Le morphisme évident $F(U) \rightarrow \text{R}\Gamma_{\text{Nis}}(\mathcal{U}, F|_{\mathcal{U}})$ est une équivalence faible.*

Ci-dessus, $F|_{\mathcal{U}}$ est l'image directe de F suivant le prémorphisme de sites

$$(\text{Et}^{\text{af}}/X, \text{Nis}) \rightarrow (\text{Et}^{\text{af}}/\mathcal{U}, \text{Nis})$$

donné par le foncteur « fibre générique ».

Démonstration. — On pose $\mathcal{X}_0 = \text{Spf}(\Gamma(X, \mathcal{O}^\circ))$. On note \mathcal{M} la catégorie dont les objets sont les \mathcal{X}_0 -schémas formels essentiels \mathcal{U} tels que \mathcal{U}_η est étale sur X . On munit \mathcal{M} de la topologie de Nisnevich (sur les schémas formels). On dispose d'un foncteur $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \text{Et}^{\text{qc}}/X$ qui à \mathcal{U} associe \mathcal{U}_η . Ce foncteur est continu et induit un prémorphisme de sites

$$\alpha : (\text{Et}^{\text{qc}}/X, \text{Nis}) \rightarrow (\mathcal{M}, \text{Nis}).$$

Remarquons que α est en fait un morphisme de sites. En effet, \mathcal{M} possède les limites projectives finies. Elles sont obtenues en prenant le schéma formel essentiel associé à la limite projective calculée dans la catégorie des \mathcal{X}_0 -schémas formels. De plus α envoie

ces limites projectives finies sur des limites projectives finies de X -variétés rigides étales.

Étant donné un préfaisceau H sur \mathcal{M} on montre facilement qu'on a

$$(1.109) \quad [\alpha^* H](U) = \operatorname{Colim}_{\mathcal{U} \in \operatorname{Mdl}_{\text{es}}(U)} H(\mathcal{U})$$

avec, rappelons-le, $\operatorname{Mdl}_{\text{es}}(U)$ la catégorie cofiltrante des modèles essentiels de U . En particulier, on voit que le morphisme de counité $\alpha^* \alpha_* \rightarrow \operatorname{id}$ est inversible.

Soit G un préfaisceau sur $\operatorname{Et}^{\text{qc}}/X$ à valeurs dans \mathfrak{M} . On choisit une cofibration projective Nis-triviale $\alpha_* G \rightarrow H$ avec H projectivement Nis-fibrant. Considérons alors le morphisme

$$(1.110) \quad G \simeq \alpha^* \alpha_* G \longrightarrow \alpha^* H.$$

On a les propriétés suivantes :

- (i) le morphisme (1.110) est une équivalence Nis-locale,
- (ii) $\alpha^* H$ est projectivement Nis-fibrant.

Le point (i) découle du fait que α^* est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures Nis-locales. Il préserve donc les cofibrations projectives Nis-triviales.

Montrons (ii). Par (1.109) et la stabilité des objets fibrants de \mathfrak{M} par colimites filtrantes, on sait que $\alpha^* H$ est projectivement fibrant. Il reste à voir qu'il est Nis-local. Soit U une X -variété étale quasi-compacte et \mathcal{U} un modèle formel de U (au-dessus de \mathcal{X}_0). Étant donné un préfaisceau \dagger sur $\operatorname{Et}^{\text{qc}}/X$ (resp. \mathcal{M}) on note $\dagger|_{\mathcal{U}}$ sa restriction à $\operatorname{Et}/\mathcal{U}$. De la formule (1.109), on déduit immédiatement

$$(1.111) \quad (\alpha^* H)|_{\mathcal{U}} = \operatorname{Colim}_{\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U} \in \operatorname{Mdl}_{\text{es}}(U)/\mathcal{U}} (\mathcal{U}'/\mathcal{U})_* H|_{\mathcal{U}'}$$

avec $(\mathcal{U}'/\mathcal{U})_*$ le foncteur image directe induit par le morphisme de k° -schémas formels $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$. Étant donné que les images directes, préservent les objets projectivement Nis-fibrants, on déduit que $(\mathcal{U}'/\mathcal{U})_* H|_{\mathcal{U}'}$ est projectivement Nis-fibrant. Il vient que $(\alpha^* H)|_{\mathcal{U}}$ est Nis-fibrant, puisque la classe des préfaisceaux projectivement Nis-fibrants est stable par colimites filtrantes. En particulier, $(\alpha^* H)|_{\mathcal{U}}$ vérifie la propriété de Brown-Gersten. Ceci étant vrai pour tout $U \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Et}^{\text{qc}}/X)$ et tout modèle essentiel \mathcal{U} de U , il s'ensuit que $\alpha^* H$ vérifie la propriété de Brown-Gersten (pour les carrés Nisnevich de variétés rigides). Le préfaisceau $\alpha^* H$ est donc Nis-fibrant par le corollaire 1.2.32.

On applique la discussion précédente à $G = a^* F$ avec

$$a : (\operatorname{Et}^{\text{qc}}/X, \operatorname{Nis}) \longrightarrow (\operatorname{Et}^{\text{af}}/X, \operatorname{Nis})$$

l'équivalence de sites donnée par l'inclusion évidente. On dispose d'un morphisme évident $f : F \rightarrow a_* \alpha^* H$. Par (ii) ci-dessus, il suffira de montrer que f est une équivalence faible de préfaisceaux. Par (1.109), on est ramené à montrer que le morphisme

$$F(U) \longrightarrow \operatorname{Colim}_{\mathcal{U} \in \operatorname{Mdl}_{\text{es}}(U)} H(\mathcal{U})$$

est une équivalence faible pour tout $U = \mathrm{Spm}(A) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/X)$. On peut même se restreindre aux \mathcal{U} qui sont dans la sous-catégorie cofiltrante $\mathrm{Mdl}'_{\mathrm{es}}(U) \subset \mathrm{Mdl}_{\mathrm{es}}(U)$ formée des modèles projectifs sur $\mathrm{Spf}(\Gamma(U, \mathcal{O}^\circ))$. Par construction, $H|_{\mathcal{U}}$ est un remplacement projectivement Nis-fibrant de $G|_{\mathcal{U}}$. On a donc un isomorphisme $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{U}, F|_{\mathcal{U}}) \simeq H(\mathcal{U})$ dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Par la propriété (P), on déduit que pour tout $\mathcal{U} \in \mathrm{Mdl}'_{\mathrm{es}}(U)$, la flèche $F(U) \rightarrow H(\mathcal{U})$ est une équivalence faible. Le résultat découle alors de la stabilité des équivalences faibles de \mathfrak{M} par colimites filtrantes. C.Q.F.D.

Voici une formulation plus détaillée du théorème 1.3.37.

Théorème 1.3.41. — *Soit \mathbf{E} un objet projectivement cofibrant de*

$$\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/k)).$$

*Le diag^*T -spectre symétrique $\mathbf{F} = \mathrm{Rdiag}^* \mathrm{R}i_* \mathrm{L}i^* \mathrm{R}j_* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E}$ vérifie les propriétés suivantes (avec $p \in \mathbb{N}$) :*

- (i) \mathbf{F}_p est projectivement Nis-fibrant en tant qu'objet de $\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmAfd}/k, \mathfrak{M})$,
- (ii) le morphisme $\mathbf{F}_p \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{B}_k^1, \mathbf{F}_p)$ est une équivalence faible de préfaisceaux,
- (iii) l'adjoint du morphisme d'assemblage $\mathbf{F}_p \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{diag}^*T, \mathbf{F}_{p+1})$ est une équivalence faible de préfaisceaux.

Démonstration. — On divise la preuve en trois parties. On démontre successivement les propriétés (i), (iii) et (ii).

Étape 1 : Par construction, le diag^*T -spectre \mathbf{F} est projectivement fibrant niveau par niveau. Ainsi, pour montrer que \mathbf{F}_p est Nis-fibrant, il reste à voir qu'il est Nis-local. Par le lemme 1.3.40, il suffit de montrer que le morphisme

$$(1.112) \quad \mathbf{F}_p(X) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{X}, (\mathbf{F}_p)|_{\mathcal{X}})$$

est une équivalence faible pour tout k -affinoïde lisse $X = \mathrm{Spm}(A)$ et tout modèle essentiel $\mathcal{X} \in \mathrm{Mdl}_{\mathrm{es}}(X)$ projectif sur $\mathrm{Spf}(A^\circ)$. Il existe un $\mathrm{Spec}(A^\circ)$ -schéma projectif $e : P \rightarrow \mathrm{Spec}(A^\circ)$ tel que \mathcal{X} est la complétion formelle de P en sa fibre spéciale.

Notons comme avant $\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/P$ la catégorie des P -schémas étales affines sur k° . La complétion formelle induit un foncteur $\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/P \rightarrow \mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/\mathcal{X}$ qui est clairement continu. On note $c_P : (\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/\mathcal{X}, \mathrm{Nis}) \rightarrow (\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/P, \mathrm{Nis})$ le morphisme de sites ainsi obtenu. Via l'équivalence de catégories $\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/\mathcal{X} \simeq \mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/\mathcal{X}_\sigma$, ce morphisme de sites correspond au morphisme de sites $\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/P_\sigma \rightarrow \mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/P$ induit par l'immersion fermée $P_\sigma \hookrightarrow P$. On en déduit que $(c_P)_*$ préserve les équivalences Nis-locales entre les t_\emptyset -faisceaux. (Rappelons qu'un préfaisceau \dagger sur $\mathrm{Et}^{\mathrm{af}}/X$ est dit un t_\emptyset -faisceau si $\dagger(\emptyset) \simeq *$; voir le début de [3, §4.5.3].) Pour une preuve de cela, le lecteur trouvera tous les ingrédients nécessaires dans la preuve de la proposition 1.4.18 ci-dessous. Puisque $\mathbf{F}_p(\emptyset)$ est contractile, on est ainsi ramené à montrer que la composition de

$$(1.113) \quad \mathbf{F}_p(X) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, (\mathbf{F}_p)|_{\mathcal{X}}) \simeq \Gamma(P, (c_P)_*((\mathbf{F}_p)|_{\mathcal{X}})) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{Nis}}(P, (c_P)_*((\mathbf{F}_p)|_{\mathcal{X}}))$$

est une équivalence faible. Pour cela, on va d'abord construire un isomorphisme

$$(1.114) \quad ([Ri_* Li^* Rj_*(f_\eta^* \mathbf{E})]_p)_{|\text{Et}^{\text{af}}/P} \simeq (c_P)_*((\mathbf{F}_p)|_X)$$

avec $f : P \rightarrow \text{Spec}(k^\circ)$ la projection structurale.

On note $\delta : \text{Et}^{\text{af}}/P \rightarrow \text{SmAfd}/k$ le foncteur qui à Y/P associe $(Y//\pi)_\eta$ et on considère le diagramme de schémas $\mathcal{D} \circ \delta$ indexé par Et^{af}/P . On note $\text{diag}_P : \text{Et}^{\text{af}}/P \rightarrow \text{Sm}/\mathcal{D} \circ \delta$ le foncteur diagonal qui à (Y/P) associe $(\text{Spec}(\Gamma(Y, \mathcal{O})//\pi), (Y//\pi)_\eta)$. Par construction, on a un isomorphisme

$$(c_P)_*((\mathbf{F}_p)|_X) \simeq \text{Rdiag}_P^*[\delta^* Ri_* Li^* Rj_* u_\eta^* \mathbf{E}]_p$$

où δ^* désigne le foncteur « image inverse » suivant le morphisme de diagrammes de schémas $\delta : \mathcal{D} \circ \delta \rightarrow \mathcal{D}$. (Comme avant, nous avons noté diag_P^* le foncteur « image directe » suivant diag_P .) Notons $\mathcal{J} : \text{Et}^{\text{af}}/P \rightarrow \text{Sch}/k^\circ$ le diagramme de schémas qui à U/P associe U et notons $\text{diag}_\mathcal{J} : \mathcal{J} \rightarrow \text{Sm}/\mathcal{J}$ le foncteur diagonal. On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens (à nil-immersions près)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_\eta \circ \delta & \xrightarrow{j} & \mathcal{D} \circ \delta & \xleftarrow{i} & \mathcal{D}_\sigma \circ \delta \\ c_\eta \downarrow & & \downarrow c & & \parallel \\ \mathcal{J}_\eta & \xrightarrow{j} & \mathcal{J} & \xleftarrow{i} & \mathcal{J}_\sigma \\ \mathfrak{v} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{v} & & \downarrow \mathfrak{v}_\sigma \\ P_\eta & \xrightarrow{j} & P & \xleftarrow{i} & P_\sigma \\ f_\eta \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_\sigma \\ \text{Spec}(k) & \xrightarrow{j} & \text{Spec}(k^\circ) & \xleftarrow{i} & \text{Spec}(\tilde{k}) \end{array}$$

où c correspond au spectre du morphisme de complétion formelle en l'idéal (π) . On déduit du corollaire 1.A.5, un 2-isomorphisme $i^* j_* = c_\sigma^* i^* j_* \simeq i^* j_* c_\sigma^*$. On a alors la chaîne d'isomorphismes dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D} \circ \delta)$:

$$\delta^* Ri_* Li^* Rj_* u_\eta^* \mathbf{E} \simeq Ri_* Li^* Rj_* c_\eta^* \mathfrak{v}_\eta^* f_\eta^* \mathbf{E} \simeq Lc^* Ri_* Li^* Rj_* \mathfrak{v}_\eta^* f_\eta^* \mathbf{E}.$$

Par ailleurs, il est immédiat que $\text{Rdiag}_P^*[-]_p = \text{Rdiag}_\mathcal{J}^*[\text{Rc}_*(-)]_p$. (Ici encore, nous avons noté $\text{diag}_\mathcal{J}^*$ le foncteur « image directe » suivant $\text{diag}_\mathcal{J}$.) De plus, on a les 2-isomorphismes canoniques $\text{Rc}_* Lc^* Ri_* \simeq Ri_* \text{R}(c_\sigma)_* Lc_\sigma^* = Ri_*$. Il s'ensuit un isomorphisme canonique

$$\text{Rdiag}_P^*[\delta^* Ri_* Li^* Rj_* u_\eta^* \mathbf{E}]_p \simeq \text{Rdiag}_\mathcal{J}^*[\text{Ri}_* Li^* Rj_* \mathfrak{v}_\eta^* f_\eta^* \mathbf{E}]_p.$$

Or, on a les identifications évidentes

$$\text{Rdiag}_\mathcal{J}^*[\text{Ri}_* Li^* Rj_* \mathfrak{v}_\eta^* f_\eta^* \mathbf{E}]_p \simeq \text{Rdiag}_\mathcal{J}^*[\mathfrak{v}^* Ri_* Li^* Rj_* f_\eta^* \mathbf{E}]_p = ([Ri_* Li^* Rj_* f_\eta^* \mathbf{E}]_p)_{|\text{Et}^{\text{af}}/P}.$$

D'où l'isomorphisme (1.114) recherché. Modulo cet isomorphisme, la composition de (1.113) s'identifie au morphisme évident

$$\mathbf{F}_p(X) = ([Ri_* Li^* Rj_*(g_\eta^* \mathbf{E})]_p)(\text{Spec}(A^\circ)) \longrightarrow \text{R}\Gamma_{\text{Nis}}(P, ([Ri_* Li^* Rj_*(f_\eta^* \mathbf{E})]_p)_{|\text{Et}^{\text{af}}/P})$$

(où l'on a noté g le morphisme structural du k° -schéma $\text{Spec}(A^\circ)$). Pour terminer, il est donc suffisant de montrer que le 2-morphisme

$$i_* i^* j_* g_\eta^* \longrightarrow e_* i_* i^* j_* f_\eta^*$$

est inversible (avec e la projection de P sur $\text{Spec}(A^\circ)$). Ceci découle du théorème de changement de base pour le morphisme projectif e (voir [2, Corollaire 1.7.18]) et du fait que e_η est un isomorphisme.

Étape 2 : Montrons que le morphisme

$$\mathbf{F}_p \longrightarrow \underline{\text{RHom}}(\text{diag}^* T_{\mathcal{D}}, \mathbf{F}_{p+1})$$

est une équivalence faible de préfaisceaux. Soit $\mathbf{G} = \text{R}i_* \text{L}i^* \text{R}j_* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E}$ de sorte que $\text{Rdiag}^* \mathbf{G} = \mathbf{F}$. On peut supposer que \mathbf{G} est injectivement fibrant niveau par niveau. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_p & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\text{diag}^* T, \mathbf{F}_{p+1}) \xleftarrow{\text{w.e.}} \underline{\text{Hom}}\left(\frac{\mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}}{\partial \mathbb{B}_k^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}}, \mathbf{F}_{p+1}\right) \\ \parallel & & \uparrow (1') \\ \text{diag}^* \mathbf{G}_p & \xrightarrow{\text{w.e.}} & \text{diag}^* \underline{\text{Hom}}(T, \mathbf{G}_{p+1}) \xleftarrow{\text{w.e.}} \text{diag}^* \underline{\text{Hom}}\left(\frac{\mathbb{A}_{\mathcal{D}}^1 \otimes \bullet_{\text{cst}}}{(\mathbb{A}^1 - o)_{\mathcal{D}} \otimes \bullet_{\text{cst}}}, \mathbf{G}_{p+1}\right). \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que (1') est une équivalence faible. Ceci revient à dire que pour tout k -affinoïde lisse $\text{Spm}(A)$ et tout $B \in \mathcal{E}$, l'application

$$\pi_0\left(\frac{(\mathbb{A}_{\text{Spec}(A^\circ)}^1, \text{Spm}(A)) \otimes B_{\text{cst}}}{((\mathbb{A}^1 - o)_{\text{Spec}(A^\circ)}, \text{Spm}(A)) \otimes B_{\text{cst}}}, \mathbf{G}_{p+1}\right) \longrightarrow \pi_0\left(\frac{\mathbb{B}_A^1 \otimes B_{\text{cst}}}{\partial \mathbb{B}_A^1 \otimes B_{\text{cst}}}, \mathbf{F}_{p+1}\right)$$

est bijective. En calculant le membre de droite, on se retrouve avec l'application

$$\begin{aligned} \pi_0\left(\frac{(\mathbb{A}_{\text{Spec}(A^\circ)}^1, \text{Spm}(A)) \otimes B_{\text{cst}}}{((\mathbb{A}^1 - o)_{\text{Spec}(A^\circ)}, \text{Spm}(A)) \otimes B_{\text{cst}}}, \mathbf{G}_{p+1}\right) \\ \longrightarrow \pi_0\left(\frac{(\text{Spec}(A^\circ\{T\}), \text{Spm}(A\{T\})) \otimes B_{\text{cst}}}{(\text{Spec}(A^\circ\{T, T^{-1}\}), \text{Spm}(A\{T, T^{-1}\})) \otimes B_{\text{cst}}}, \mathbf{G}_{p+1}\right). \end{aligned}$$

Il sera donc plus général de montrer que si $Y = \text{Spec}(R)$ est un \tilde{k} -schéma affine et lisse, l'application

$$(1.115) \quad \begin{aligned} \pi_0\left((\text{Spec}(A^\circ \otimes_{\tilde{k}} R), \text{Spm}(A)) \otimes B_{\text{cst}}, \mathbf{G}_{p+1}\right) \\ \longrightarrow \pi_0\left((\text{Spec}(A^\circ \otimes_{\tilde{k}} R // (\pi)), \text{Spf}(A^\circ \otimes_{\tilde{k}} R // (\pi))_\eta) \otimes B_{\text{cst}}, \mathbf{G}_{p+1}\right) \end{aligned}$$

est bijective. On forme pour cela le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(A^\circ \otimes_{\tilde{k}} R // (\pi))[1/\pi] & \xrightarrow{j} & \text{Spec}(A^\circ \otimes_{\tilde{k}} R // (\pi)) & \xleftarrow{i} & \text{Spec}(\tilde{A} \otimes_{\tilde{k}} R) \\ c_\eta \downarrow & & \downarrow c & & \parallel \\ \text{Spec}(A^\circ \otimes_{\tilde{k}} R)[1/\pi] & \xrightarrow{j} & \text{Spec}(A^\circ \otimes_{\tilde{k}} R) & \xleftarrow{i} & \text{Spec}(\tilde{A} \otimes_{\tilde{k}} R). \end{array}$$

La flèche (1.115) s'écrit alors

$$\begin{array}{c} \mathrm{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{Spec}(A^\circ \otimes_{\bar{k}} R))}(B_{\mathrm{cst}}, \mathrm{R}i_* \mathrm{L}i^* \mathrm{R}j_* \mathbf{E}|_{\mathrm{Spec}(A^\circ \otimes_{\bar{k}} R)[1/\pi]}) \\ \downarrow \\ \mathrm{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{Spec}(A^\circ \otimes_{\bar{k}} R // (\pi)))(B_{\mathrm{cst}}, \mathrm{R}i_* \mathrm{L}i^* \mathrm{R}j_* c_\eta^* \mathbf{E}|_{\mathrm{Spec}(A^\circ \otimes_{\bar{k}} R)[1/\pi]})}. \end{array}$$

Le résultat découle maintenant du 2-isomorphisme $i^* j_* = c_\sigma^* i^* j_* \simeq i^* j_* c_\eta^*$ (voir le corollaire 1.A.5).

Étape 3 : Il reste à montrer que les \mathbf{F}_p sont \mathbb{B}^1 -locaux, i.e., que

$$(1.116) \quad \mathbf{F}_p \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{B}_k^1, \mathbf{F}_p)$$

est une équivalence faible de préfaisceaux. Soit \mathbf{G} comme dans l'étape précédente de sorte que $\mathbf{F}_p = \mathrm{diag}^* \mathbf{G}_p$. L'évaluation en un k -affinoïde $X = \mathrm{Spm}(A)$ du morphisme (1.116) est

$$\mathbf{G}_p(\mathrm{Spec}(A^\circ), X) \longrightarrow \mathbf{G}_p(\mathrm{Spec}(A^\circ \{T\}), X \{T\}).$$

On peut factoriser cette flèche de la manière suivante

$$\mathbf{G}_p(\mathrm{Spec}(A^\circ), X) \xrightarrow{(1)} \mathbf{G}_p(\mathrm{Spec}(A^\circ [T]), X) \xrightarrow{(2)} \mathbf{G}_p(\mathrm{Spec}(A^\circ \{T\}), X \{T\}).$$

La flèche (1) est une équivalence faible du fait que \mathbf{G}_p est \mathbb{A}^1 -fibrant. Soit $B \in \mathcal{E}$. Remarquons que si on applique $\pi_0(B, -)$ à la flèche (2) ci-dessus on retrouve (1.115) dans le cas $R = \tilde{k}[T]$. On a montré dans l'étape précédente que (1.115) était bijective pour tout $B \in \mathcal{E}$. Il en découle que (2) est une équivalence faible. Ceci achève la preuve du théorème 1.3.41. C.Q.F.D.

1.4. Le 2-foncteur homotopique stable $\mathbf{RigSH}(-)$

Dans cette section nous allons construire un 2-foncteur $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(-)$ à valeurs dans les catégories triangulées. Ce 2-foncteur est défini sur des k° -schémas rigides (voir la définition 1.4.1 ci-dessous). Sa restriction aux k° -schémas quasi-projectifs est un 2-foncteur homotopique stable (au sens de [2, Définition 1.4.1]) et on peut donc lui appliquer les résultats de [2, 3]. En particulier, nous utiliserons un résultat fondamental sur les systèmes de spécialisation [3, Théorème 3.3.45] pour établir le théorème 1.3.38 (et terminer ainsi la preuve de la scholie 1.3.26).

1.4.1. Les k° -schémas rigides. — Comme avant, k désignera un corps valué complet. On supposera que la valuation de k est non triviale et on fixe un élément non nul $\pi \in k^\vee$.

Définition 1.4.1. — *Un k° -schéma rigide est un triplet $\bar{X} = (X, \mathcal{X}, j)$ avec X une k -variété rigide, \mathcal{X} un k° -schéma formel de type fini et $j : \mathcal{X}_\eta \rightarrow X$ une immersion ouverte. On omettra souvent l'immersion j et on notera simplement $\bar{X} = (X, \mathcal{X})$.*

Un morphisme $\bar{X} = (X, \mathcal{X}) \rightarrow \bar{X}' = (X', \mathcal{X}')$ de k° -schémas rigides est un couple $(X' \rightarrow X, \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X})$ formé d'un morphisme de k -variétés rigides et d'un morphisme de k° -schémas formels tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}'_\eta & \xrightarrow{j'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

commute. On note SchRig/k° la catégorie des k° -schémas rigides.

Remarque 1.4.2. — On dispose de deux foncteurs d'oubli de SchRig/k° dans VarRig/k et SchF/k° . Le premier, $(-)_\eta : \mathrm{SchRig}/k^\circ \rightarrow \mathrm{VarRig}/k$, sera appelé le foncteur *fibre générique* . Le second, $(-)//\pi : \mathrm{SchRig}/k^\circ \rightarrow \mathrm{SchF}/k^\circ$, sera appelé le foncteur *de complétion formelle* . Étant donné un k° -schéma rigide $\bar{X} = (X, \mathcal{X})$, on a donc $X = \bar{X}_\eta$ et $\mathcal{X} = \bar{X} // \pi$, ainsi qu'une immersion ouverte naturelle $j_{\bar{X}} : (\bar{X} // \pi)_\eta \rightarrow \bar{X}_\eta$.

La catégorie SchRig/k° admet les limites finies et les foncteurs d'oubli y commutent. On notera $\dagger_1 \widehat{\times}_{\dagger_2} \dagger_3$ le produit fibré dans la catégorie des k° -schémas rigides. Étant donné un k° -schéma rigide \bar{X} , on appelle \bar{X} -schéma rigide un morphisme de SchRig/k° de but \bar{X} . On note SchRig/\bar{X} la catégorie des \bar{X} -schémas rigides.

Exemple 1.4.3. — Voici des exemples fondamentaux de k° -schémas rigides.

1) Étant donné un k° -schéma formel \mathcal{X} , le triplet $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{X}, \mathrm{id}_{\mathcal{X}_\eta})$ est un k° -schéma rigide que l'on note encore \mathcal{X} . On obtient ainsi un foncteur $\mathrm{SchF}/k^\circ \rightarrow \mathrm{SchRig}/k^\circ$ qui est pleinement fidèle.

2) Étant donné une k -variété rigide X , le triplet $(X, \emptyset, \emptyset)$ est un k° -schéma rigide que l'on note encore X . On obtient ainsi un foncteur $\mathrm{VarRig}/k \rightarrow \mathrm{SchRig}/k^\circ$ qui est pleinement fidèle.

3) Soit $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A^\circ)$ un k° -schéma formel affine. Étant donné un A° -schéma de type fini X , on définit le \mathcal{X} -schéma rigide X^{an} par le triplet $((X[1/\pi])^{\mathrm{an}}, X // \pi, j_X)$ avec j_X l'immersion ouverte canonique de la proposition 1.1.31. On obtient ainsi un foncteur $\mathrm{Rig} : \mathrm{Sch}^{\mathrm{tf}}/A^\circ \rightarrow \mathrm{SchRig}/\mathcal{X}$. Notons que $X^{\mathrm{an}} // \pi = X // \pi$.

Un morphisme $\bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ de k° -schémas rigides est dit *lisse* (resp. *étale* , une *immersion ouverte*) si les deux morphismes $\bar{X}'_\eta \rightarrow \bar{X}_\eta$ et $\bar{X}' // \pi \rightarrow \bar{X} // \pi$ sont lisses (resp. étales, des immersions ouvertes). Étant donné un k° -schéma rigide \bar{X} , on note SmRig/\bar{X} la sous-catégorie pleine de SchRig/\bar{X} formée des \bar{X} -schémas rigides lisses. On note de même Et/\bar{X} la sous-catégorie pleine des \bar{X} -schémas rigides étales. Il est immédiat que les trois foncteurs de l'exemple 1.4.3 préservent les morphismes lisses et étales.

Définition 1.4.4. — Soit \bar{X} un k° -schéma rigide. Une famille $\mathcal{R} = (\bar{U}_i \rightarrow \bar{X})_{i \in I}$ de morphismes étales est un recouvrement Nisnevich si les familles $((\bar{U}_i)_\eta \rightarrow \bar{X}_\eta)_{i \in I}$ et $(\bar{U}_i // \pi \rightarrow \bar{X} // \pi)_{i \in I}$ sont des recouvrements Nisnevich.

Un exemple simple mais important de recouvrements Nisnevich d'un k° -schéma rigide $\bar{X} = (X, \mathcal{X}_\eta)$ est donné par les immersions ouvertes $(X, \emptyset) \rightarrow \bar{X}$ et $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{X}) \rightarrow \bar{X}$.

La classe des recouvrements Nisnevich de k° -schémas rigides définit une prétopologie sur les catégories Et/\bar{X} , SmRig/\bar{X} , SchRig/\bar{X} , etc. Les topologies associées seront appelées les topologies de Nisnevich et seront désignées par « Nis ».

Définition 1.4.5. — Un morphisme $i : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ de k° -schémas rigides est une immersion fermée s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1) $i_\eta : \bar{Z}_\eta \rightarrow \bar{X}_\eta$ est une immersion fermée de variétés rigides,
- 2) $i // \pi : \bar{Z} // \pi \rightarrow \bar{X} // \pi$ est une immersion fermée de schémas formels,
- 3) le morphisme évident $(\bar{Z} // \pi)_\eta \rightarrow \bar{Z}_\eta \cap (\bar{X} // \pi)_\eta$ est un isomorphisme.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dira par abus de langage que \bar{Z} est un sous- k° -schéma rigide fermé de \bar{X} .

La troisième condition ci-dessus affirme simplement que le carré de variétés rigides

$$\begin{array}{ccc} (\bar{Z} // \pi)_\eta & \xrightarrow{(i // \pi)_\eta} & (\bar{X} // \pi)_\eta \\ j_{\bar{Z}} \downarrow & i_\eta & \downarrow j_{\bar{X}} \\ \bar{Z}_\eta & \longrightarrow & \bar{X}_\eta \end{array}$$

est cartésien.

Remarque 1.4.6. — 1) Si \mathcal{X} est un k° -schéma formel, il y a une bijection entre les sous- k° -schémas formels fermés de \mathcal{X} et les sous- k° -schémas rigides fermés de $(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{X})$ donnée par l'association $\mathcal{Z} \rightsquigarrow (\mathcal{Z}_\eta, \mathcal{Z})$. De même, si X est une k -variété rigide, l'association $Z \rightsquigarrow (Z, \emptyset)$ définit une bijection entre les sous- k -variétés rigides fermées de X et les sous- k° -schémas rigides fermés de (X, \emptyset) . Enfin, une immersion fermée de k° -schémas de type fini $i : Z \rightarrow X$ induit une immersion fermée de k° -schémas rigides $j^{\text{an}} : Z^{\text{an}} \rightarrow X^{\text{an}}$.

2) Étant donnée une immersion fermée de k° -schémas rigides $i : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$, le couple $(\mathcal{X}_\eta - \mathcal{Z}_\eta, \mathcal{X} // \pi - \mathcal{Z} // \pi)$ est naturellement un k° -schéma rigide que l'on notera $\bar{X} - \bar{Z}$ et qu'on appellera le complémentaire de \bar{Z} dans \bar{X} . On dispose également d'une immersion ouverte $j : \bar{X} - \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$.

1.4.2. La construction des dérivateurs $\text{RigSH}(-)$ et $\text{FSH}(-)$. — On appelle Dia la catégorie des catégories essentiellement petites. On considèrera uniquement la structure de 1-catégorie sur Dia, i.e., on n'utilisera pas les transformations naturelles entre 1-morphismes de Dia. La définition suivante est l'analogue de [2, Définition 2.4.4] pour les k° -schémas rigides (resp. formels).

Définition 1.4.7. — On appelle diagramme de k° -schémas rigides (resp. formels), un foncteur covariant $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{J} \rightarrow \text{SchRig}/k^\circ$ (resp. $\mathcal{F} : \mathcal{J} \rightarrow \text{SchF}/k^\circ$) de source une catégorie essentiellement petite.

Un 1-morphisme $(\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{J}) \rightarrow (\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J})$ (resp. $(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$) entre diagrammes de k° -schémas rigides (resp. formels) est la donnée d'un foncteur $\alpha : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ et d'une transformation naturelle $f : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{F}} \circ \alpha$ (resp. $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \circ \alpha$). En d'autres termes, c'est une face

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} & \xrightarrow{\overline{\mathcal{G}}} & \text{SchRig}/k^\circ \\ \alpha \downarrow & \searrow f \swarrow & \uparrow \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{\overline{\mathcal{F}}} & \end{array} \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{J} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \text{SchF}/k^\circ \\ \alpha \downarrow & \searrow f \swarrow & \uparrow \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \end{array} \right)$$

dans la 2-catégorie des catégories. On appelle $\text{DiaSchRig}/k^\circ$ (resp. $\text{DiaSchF}/k^\circ$) la catégorie dont les objets sont les diagrammes de k° -schémas rigides (resp. formels) et les morphismes comme ci-dessus.

Remarque 1.4.8. — On peut définir les 2-morphismes entre 1-morphismes de diagrammes de k° -schémas rigides (resp. formels) comme dans [2, Définition 2.4.4]. Toutefois, nous aurons à considérer uniquement les structures de 1-catégorie sur les 2-catégories $\text{DiaSchRig}/k^\circ$ et $\text{DiaSchF}/k^\circ$.

Étant donné un diagramme de k° -schémas rigides (resp. formels) $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J})$ (resp. $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$), on note $\text{SmRig}/(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J})$ (resp. $\text{SmF}/(\mathcal{F}, \mathcal{J})$) la catégorie dont les objets sont les couples (\overline{U}, i) (resp. (U, i)) avec $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ et \overline{U} (resp. U) un $\overline{\mathcal{F}}(i)$ -schéma rigide lisse (resp. $\mathcal{F}(i)$ -schéma formel lisse). Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on notera aussi $\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}$ (resp. SmF/\mathcal{F}) cette catégorie.

On suppose donnée une catégorie cocomplète \mathcal{C} . Soit (f, α) un morphisme de diagrammes de k° -schémas rigides (resp. formels) comme dans la définition 1.4.7. Ce morphisme se factorise en un morphisme « géométrique » suivi par un morphisme « catégorique » :

$$(\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{J}) \xrightarrow{f} (\overline{\mathcal{F}} \circ \alpha, \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} (\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J}) \quad \left(\text{resp.} \quad (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{f} (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \right);$$

voir [2, Remarque 2.4.7]. On définit un foncteur

$$(f, \alpha)^* : \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/(\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{J}), \mathcal{C})$$

$$\left(\text{resp.} \quad (f, \alpha)^* : \mathbf{PreShv}(\text{SmF}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmF}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) \right)$$

par le foncteur composé $f^* \circ \alpha^*$ où

- f^* est le foncteur « image inverse » suivant le foncteur de changement de base donné par $(\overline{U}/\overline{\mathcal{F}}(\alpha(j)), j) \rightsquigarrow (\overline{U} \times_{\overline{\mathcal{F}}(\alpha(j))} \overline{\mathcal{G}}(j)/\overline{\mathcal{G}}(j), j)$, et
- α^* est le foncteur « image directe » suivant le foncteur de changement d'indice donné par $(\overline{U}/\overline{\mathcal{F}}(\alpha(j)), j) \rightsquigarrow (\overline{U}/\overline{\mathcal{F}}(\alpha(j)), \alpha(j))$.

(On fait de même dans le cas respé.) On a la proposition suivante qui se démontre de la même façon que [3, Propositions 4.5.3 et 4.5.4].

Proposition 1.4.9. — 1) *L'association $(f, \alpha) \rightsquigarrow (f, \alpha)^*$ s'étend naturellement en un 2-foncteur*

$$\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/(-), \mathcal{C}) : \mathbf{DiaSchRig}/k^\circ \longrightarrow \mathbf{Cat}.$$

Il en est de même dans le cas respé.

2) *Si (f, α) est lisse argument par argument, le foncteur $(f, \alpha)^*$ admet un adjoint à gauche que l'on note $(f, \alpha)_\#$. Lorsque \mathcal{C} est complète, $(f, \alpha)^*$ admet un adjoint à droite que l'on note $(f, \alpha)_*$.*

Soit $\overline{\mathcal{F}}$ un diagramme de k° -schémas rigides. En appliquant le foncteur $(-)//\pi$, on déduit un diagramme de k° -schémas formels $\overline{\mathcal{F}}//\pi$. Le foncteur $(-)//\pi$ induit alors un foncteur $\text{cpl} : \mathbf{SmRig}/\overline{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbf{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi)$. D'autre part, on dispose d'un plongement pleinement fidèle $\mathbf{P} : \mathbf{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi) \rightarrow \mathbf{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}$ qui consiste à regarder un k° -schéma formel comme un k° -schéma rigide de la manière évidente (voir l'exemple 1.4.3). On vérifie immédiatement qu'on obtient ainsi un couple de foncteurs adjoints (\mathbf{P}, cpl) .

On note $(\text{cpl}^*, \text{cpl}_*)$ et $(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}_*)$ les couples de foncteurs adjoints « image inverse » et « image directe » sur les préfaisceaux induits par cpl et \mathbf{P} . On a alors une adjonction $(\mathbf{P}^*, \text{cpl}^*)$ et donc un isomorphisme canonique $\text{cpl}^* \simeq \mathbf{P}_*$. Le lemme ci-dessous est facile et sa preuve sera laissée au lecteur.

Lemme 1.4.10. — *Soit $(f, \alpha) : (\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{J}) \rightarrow (\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J})$ un morphisme de diagrammes de k° -schémas rigides. On note $(\hat{f}, \alpha) : (\overline{\mathcal{G}}//\pi, \mathcal{J}) \rightarrow (\overline{\mathcal{F}}//\pi, \mathcal{J})$ le morphisme obtenu en appliquant le foncteur cpl . On a alors un carré commutatif à un 2-isomorphisme près*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) & \xrightarrow[\mathbf{P}_*]{\text{cpl}^*} & \mathbf{PreShv}(\mathbf{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi, \mathcal{J}), \mathcal{C}) \\ (f, \alpha)^* \downarrow & & \downarrow (\hat{f}, \alpha)^* \\ \mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/(\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) & \xrightarrow[\mathbf{P}_*]{\text{cpl}^*} & \mathbf{PreShv}(\mathbf{SmF}/(\overline{\mathcal{G}}//\pi, \mathcal{J}), \mathcal{C}). \end{array}$$

Soit $(\mathcal{B}', \mathcal{K})$ un diagramme de k° -schémas formels affines. On note $(\mathcal{B}, \mathcal{K})$ le diagramme de k° -schémas donné par $l \in \mathcal{K} \rightsquigarrow \text{Spec}(\Gamma(\mathcal{B}'(l), \mathcal{O}))$. Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un diagramme de k° -schémas muni d'un morphisme de diagrammes $(p, \gamma) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{K})$ tel que $p(i)$ est de type fini pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$. On dira simplement que $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ est de type fini sur $(\mathcal{B}, \mathcal{K})$ (ou encore sur $(\mathcal{B}', \mathcal{K})$).

En appliquant le foncteur d'analytification, on obtient un diagramme de k° -schémas rigides $(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{J})$ et un foncteur $\text{Rig} : \mathbf{Sm}/\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{SmRig}/\mathcal{F}^{\text{an}}$. On note Rig^* le foncteur « image inverse » sur les préfaisceaux suivant ce foncteur. En appliquant le foncteur de complétion formelle, on obtient un diagramme $(\overline{\mathcal{F}}//\pi, \mathcal{J})$ et un foncteur $\text{cpl} : \mathbf{Sm}/\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi)$. On note cpl^* le foncteur « image inverse » sur les préfaisceaux suivant ce foncteur. On a un isomorphisme canonique $\text{cpl} \simeq \text{cpl} \circ \text{Rig}$ induisant les isomorphismes

$\text{cpl}^* \simeq \text{cpl}^* \circ \text{Rig}^* \simeq \text{P}_* \circ \text{Rig}^*$. Notons le lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

Lemme 1.4.11. — *Soit $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un morphisme de diagrammes de schémas de type fini au-dessus de $(\mathcal{B}, \mathcal{K})$. On note $(f^{\text{an}}, \alpha) : (\mathcal{G}^{\text{an}}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{J})$ le morphisme obtenu en appliquant le foncteur Rig . On a alors un carré commutatif à un 2-isomorphisme près*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Rig}^*} & \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) \\ (f, \alpha)^* \downarrow & & \downarrow (f^{\text{an}}, \alpha)^* \\ \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Rig}^*} & \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/(\mathcal{G}^{\text{an}}, \mathcal{J}), \mathcal{C}). \end{array}$$

On peut munir la catégorie $\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{M})$ (resp. $\mathbf{PreShv}(\text{SmF}/\mathcal{F}, \mathfrak{M})$) de trois structures de modèles (voir [3, Définitions 4.4.15 et 4.5.8]) :

- (i) la structure projective $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj}})$, où les fibrations sont données argument par argument,
- (ii) la structure injective $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj}})$, où les cofibrations sont données argument par argument,
- (iii) la structure semi-projective $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{s-pr}}, \mathbf{Fib}_{\text{s-pr}})$, où les cofibrations sont les flèches qui deviennent des cofibrations projectives après restriction à $\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}(i)$ (resp. $\text{SmF}/\mathcal{F}(i)$) pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$.

Munissons la catégorie $\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}$ (resp. SmF/\mathcal{F}) de sa topologie de Nisnevich. On peut localiser les trois structures de modèles ci-dessus relativement aux équivalences Nis-locales (voir [3, Définition 4.4.33]). On obtient alors les trois structures Nis-locales :

- (i) la structure projective Nis-locale $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-Nis}})$,
- (ii) la structure injective Nis-locale $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-Nis}})$,
- (iii) la structure semi-projective Nis-locale $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{s-pr}}, \mathbf{Fib}_{\text{s-pr-Nis}})$.

Notons $\mathbb{B}_{k^\circ}^1$ le k° -schéma rigide $(\text{Spm}(k\{t\}), \text{Spf}(k^\circ\{t\}))$ et $\mathbb{B}_{\overline{X}}^1 = \mathbb{B}_{k^\circ}^1 \widehat{\times}_{k^\circ} \overline{X}$ pour tout k° -schéma rigide \overline{X} . La généralisation évidente de la proposition 1.3.1, montre qu'on peut localiser ces trois structures suivant la classe \mathcal{B} des morphismes $(\mathbb{B}_{\overline{U}}^1, i) \otimes A_{\text{cst}} \rightarrow (\overline{U}, i) \otimes A_{\text{cst}}$ (resp. $(\mathbb{B}_{\mathcal{U}}^1, i) \otimes A_{\text{cst}} \rightarrow (\mathcal{U}, i) \otimes A_{\text{cst}}$) avec $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$, \overline{U} (resp. \mathcal{U}) un $\overline{\mathcal{F}}(i)$ -schéma rigide lisse (resp. $\mathcal{F}(i)$ -schéma formel lisse) et $A \in \text{Ob}(\mathfrak{M})$. On obtient ainsi les trois structures de modèles :

- (i) la structure projective \mathbb{B}^1 -locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-}\mathbb{B}^1})$,
- (ii) la structure injective \mathbb{B}^1 -locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-}\mathbb{B}^1})$,
- (iii) la structure semi-projective \mathbb{B}^1 -locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{s-pr}}, \mathbf{Fib}_{\text{s-pr-}\mathbb{B}^1})$.

Définition 1.4.12. — *La catégorie homotopique des trois structures \mathbb{B}^1 -locales ci-dessus, sera notée $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\overline{\mathcal{F}})$ (resp. $\mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{F})$). C'est la catégorie homotopique*

effective des schémas rigides (*resp.* formels) au-dessus de $\overline{\mathcal{F}}$ (*resp.* \mathcal{F}) à coefficients dans \mathfrak{M} . Voici les cas les plus importants :

- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des spectres symétriques, on notera simplement $\mathbf{RigSH}^{\text{eff}}(\overline{\mathcal{F}})$ (*resp.* $\mathbf{FSH}^{\text{eff}}(\mathcal{F})$) la catégorie ainsi définie.
- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des complexes de Λ -modules pour un anneau Λ , on notera $\mathbf{RigDA}^{\text{eff}}(\overline{\mathcal{F}}, \Lambda)$ (*resp.* $\mathbf{FDA}^{\text{eff}}(\mathcal{F}, \Lambda)$) la catégorie ainsi définie.

On a le théorème suivant dont la preuve est la même que celle de [3, Théorème 4.5.14].

Théorème 1.4.13. — *Soit (f, α) un 1-morphisme de diagrammes de k° -schémas rigides (*resp.* formels).*

1) *On a, relativement aux trois structures semi-projectives, deux adjonctions de Quillen :*

- $((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*)$,
- $(f_\# , f^*)$ lorsque f est cartésien et lisse argument par argument.

2) *On a, relativement aux trois structures projectives, trois adjonctions de Quillen :*

- (f^*, f_*) ,
- $(\alpha_\# , \alpha^*)$,
- $((f, \alpha)_\# , (f, \alpha)^*)$ lorsque (f, α) est lisse argument par argument.

3) *Enfin, (α^*, α_*) est une adjonction de Quillen relativement aux trois structures injectives.*

Démonstration. — On commence par les structures Nis-locales. Le cas des structures projectives découle immédiatement de [3, Théorème 4.4.60]. L’assertion concernant la structure injective est claire puisque α^* préserve les cofibrations injectives et les cofibrations injectives Nis-triviales. On se concentre donc sur les structures semi-projectives. Le foncteur $(f, \alpha)^*$ préserve les cofibrations semi-projectives et les cofibrations semi-projectives Nis-triviales. En effet, il suffit de vérifier cela dans le cas où \mathcal{I} et \mathcal{J} sont la catégorie finale. Le résultat découle alors du cas projectif. Le même raisonnement s’applique au foncteur $f_\#$. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter la preuve de [3, Théorème 4.5.10].

Pour terminer, il reste à vérifier que nos foncteurs de Quillen à gauche passent à la \mathbb{B}^1 -localisation, i.e., qu’ils envoient les flèches de \mathcal{B} sur des équivalences \mathbb{B}^1 -locales. Ceci se démontre exactement comme dans la preuve de [3, Théorème 4.5.14]. C.Q.F.D.

On a également le résultat ci-dessous dont la preuve est laissée au lecteur.

Proposition 1.4.14. — 1) *Soit $\overline{\mathcal{F}}$ un diagramme de k° -schémas rigides. Les foncteurs*

$$\text{cpl}^* : \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi), \mathfrak{M})$$

$$\text{P}^* : \mathbf{PreShv}(\text{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{M})$$

sont de Quillen à gauche relativement aux trois structures projectives et semi-projectives.

2) Soit \mathcal{F} un diagramme de k° -schémas de type fini au-dessus d'un diagramme de k° -schémas formels affines. Le foncteur

$$\mathbf{Rig}^* : \mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/\mathcal{F}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathfrak{M})$$

est de Quillen à gauche relativement aux trois structures projectives et semi-projectives.

Dans le paragraphe 1.3.3, nous avons fixé un remplacement projectivement cofibrant T de $(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\mathrm{cst}})/((\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\mathrm{cst}})$ dans $\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M})$. On note T^{an} (resp. T^{for}) l'image inverse de T par la composition des foncteurs images inverses

$$\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/k^\circ, \mathfrak{M})$$

$$\xrightarrow{\mathbf{Rig}^*} \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k^\circ, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{M})$$

$$\text{(resp. } \mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/\mathbb{Z}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/k^\circ, \mathfrak{M})$$

$$\xrightarrow{[-//\pi]^*} \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmF}/k^\circ, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmF}/\mathcal{F}, \mathfrak{M})).$$

Alors, T^{an} (resp. T^{for}) est un remplacement semi-projectivement cofibrant de $((\mathbb{A}_{k^\circ}^1)^{\mathrm{an}} \otimes \bullet_{\mathrm{cst}})/((\mathbb{A}_{k^\circ}^1 - o_{k^\circ})^{\mathrm{an}} \otimes \bullet_{\mathrm{cst}})$ (resp. $(\mathbb{B}_{k^\circ}^1 \otimes \bullet_{\mathrm{cst}})/(\partial\mathbb{B}_{k^\circ}^1 \otimes \bullet_{\mathrm{cst}})$). En effet, le préfaisceau $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\mathrm{cst}}/(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\mathrm{cst}}$ est faiblement équivalent à la cofibre homotopique de $(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 - o_{\mathbb{Z}}) \otimes \bullet_{\mathrm{cst}} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \otimes \bullet_{\mathrm{cst}}$ puisque ce morphisme est une cofibration injective.

On pose, pour un diagramme de k° -schémas rigides (resp. formels) $\overline{\mathcal{F}}$ (resp. \mathcal{F}),

$$\mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}}) = \mathbf{Spect}_{T^{\mathrm{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{M}))$$

$$\text{(resp. } \mathbb{M}(\mathcal{F}) = \mathbf{Spect}_{T^{\mathrm{for}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmF}/\mathcal{F}, \mathfrak{M})).$$

Bien que l'objet T^{an} (resp. T^{for}) est seulement semi-projectivement cofibrant, le foncteur $T^{\mathrm{an}} \otimes -$ (resp. $T^{\mathrm{for}} \otimes -$) est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures projectives (voir [3, Lemme 4.5.20]). On peut alors munir $\mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}})$ (resp. $\mathbb{M}(\mathcal{F})$) de sa structure de modèles projective stable déduite de l'une de ses structures \mathbb{B}^1 -locales. On obtient ainsi trois structures de modèles sur $\mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}})$ (resp. $\mathbb{M}(\mathcal{F})$) :

- (i) la structure projective \mathbb{B}^1 -locale stable ($\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}$, $\mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}$, $\mathbf{Fib}_{\mathrm{proj}\text{-}\mathbb{B}^1\text{-st}}$),
- (ii) la structure injective \mathbb{B}^1 -locale stable ($\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}$, $\mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}$, $\mathbf{Fib}_{\mathrm{inj}\text{-}\mathbb{B}^1\text{-st}}$),
- (iii) la structure semi-projective \mathbb{B}^1 -locale stable ($\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}$, $\mathbf{Cof}_{\mathrm{s-pr}}$, $\mathbf{Fib}_{\mathrm{s-pr}\text{-}\mathbb{B}^1\text{-st}}$).

Définition 1.4.15. — La catégorie homotopique des trois structures \mathbb{B}^1 -locales stables ci-dessus sera notée $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}})$ (resp. $\mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F})$). C'est la catégorie homotopique stable des schémas rigides (resp. formels) au-dessus de $\overline{\mathcal{F}}$ (resp. \mathcal{F}) à coefficients dans \mathfrak{M} . Voici les cas les plus importants :

- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des spectres symétriques, on notera simplement $\mathbf{RigSH}(\overline{\mathcal{F}})$ (resp. $\mathbf{FSH}(\mathcal{F})$) la catégorie ainsi définie.
- Lorsque \mathfrak{M} est la catégorie des complexes de Λ -modules pour un anneau commutatif Λ , on notera $\mathbf{RigDA}(\overline{\mathcal{F}}, \Lambda)$ (resp. $\mathbf{FDA}(\mathcal{F}, \Lambda)$) la catégorie ainsi définie.

Le résultat ci-dessous découle du théorème 1.4.13 et de [3, Lemme 4.3.34]. Notons toutefois que pour le cas des opérations f_{\sharp} , on utilise la formule de projection $f_{\sharp}(f^*T \otimes -) \simeq T \otimes f_{\sharp}$ pour étendre le foncteur f_{\sharp} aux catégories des spectres.

Théorème 1.4.16. — Soit (f, α) un 1-morphisme de diagrammes de k° -schémas rigides (resp. formels).

1) On a, relativement aux structures projectives stables déduites des structures semi-projectives \mathbb{B}^1 -locales sur les catégories de préfaisceaux, deux adjonctions de Quillen :

- $((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*)$,
- (f_{\sharp}, f^*) lorsque f est cartésien et lisse argument par argument.

2) On a, relativement aux structures projectives stables déduites des structures semi-projectives \mathbb{B}^1 -locales sur les catégories de préfaisceaux, trois adjonctions de Quillen :

- (f^*, f_*) ,
- $(\alpha_{\sharp}, \alpha^*)$,
- $((f, \alpha)_{\sharp}, (f, \alpha)^*)$ lorsque (f, α) est lisse argument par argument.

3) Enfin, (α^*, α_*) est une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives stables déduites des structures injectives \mathbb{B}^1 -locales sur les catégories de préfaisceaux.

La première partie de la proposition 1.4.9, montre que $\mathbb{M}(-)$ s'étend naturellement en un 2-foncteur contravariant qui à (f, α) associe $(f, \alpha)^*$. Par le théorème 1.4.16, on obtient ainsi deux 2-foncteurs contravariants

$$\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}} : \text{DiaSchRig}/k^\circ \longrightarrow \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}} : \text{DiaSchF}/k^\circ \longrightarrow \mathfrak{A}.$$

De plus, pour tout morphisme de diagrammes de k° -schémas rigides (resp. formels) (f, α) , le foncteur $(f, \alpha)^*$ possède un adjoint à droite $(f, \alpha)_*$. Lorsque f est lisse argument par argument, $(f, \alpha)^*$ possède aussi un adjoint à gauche $(f, \alpha)_{\sharp}$. On déduit de la proposition 1.4.14 le résultat suivant.

Proposition 1.4.17. — 1) Soit $\overline{\mathcal{F}}$ un diagramme de k° -schémas rigides. Les foncteurs

$$\text{cpl}^* : \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T^{\text{for}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi), \mathfrak{M}))$$

$$\text{P}^* : \mathbf{Spect}_{T^{\text{for}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}}, \mathfrak{M}))$$

sont de Quillen à gauche relativement aux structures projectives stables déduites des structures projectives et semi-projectives \mathbb{B}^1 -locales.

2) Soit \mathcal{F} un diagramme de k° -schémas de type fini au-dessus d'un diagramme de k° -schémas formels affines. Le foncteur

$$\mathbf{Rig}^* : \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/\mathcal{F}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T^{\mathrm{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathfrak{M}))$$

est de Quillen à gauche relativement aux structures projectives stables déduites des structures projectives et semi-projectives \mathbb{B}^1 -locales.

On déduit de la proposition précédente des foncteurs

$$(1.117) \quad \begin{aligned} \mathbf{Rig}^* & : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}), \\ \mathrm{cpl}^* & : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}//\pi), \\ \mathbf{P}^* & : \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}//\pi) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}). \end{aligned}$$

On a encore un isomorphisme naturel $\mathrm{cpl}^* \simeq \mathbf{P}_*$ et des carrés commutatifs à 2-isomorphisme près

$$(1.118) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\mathrm{cpl}^*} & \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}//\pi, \mathcal{J}) & \quad & \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\mathbf{Rig}^*} & \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{J}) \\ (f, \alpha)^* \downarrow & & \downarrow (\hat{f}, \alpha)^* & & (f, \alpha)^* \downarrow & & \downarrow (f^{\mathrm{an}}, \alpha)^* \\ \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\mathrm{cpl}^*} & \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{G}}//\pi, \mathcal{J}) & \quad & \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\mathbf{Rig}^*} & \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{G}^{\mathrm{an}}, \mathcal{J}). \end{array}$$

1.4.3. L'axiome de localité pour $\mathbf{RigSH}(-)$ et $\mathbf{FSH}(-)$. — Étant donné un k° -schéma rigide \overline{X} (resp. formel \mathcal{X}), on note t_\emptyset la topologie sur $\mathrm{SmRig}/\overline{X}$ (resp. SmF/\mathcal{X}) engendrée par le crible $\emptyset \rightarrow \emptyset/\overline{X}$ (resp. $\emptyset \rightarrow \emptyset/\mathcal{X}$) avec \emptyset le préfaisceau vide et \emptyset/\overline{X} (resp. \emptyset/\mathcal{X}) le préfaisceau représenté par le schéma rigide (resp. formel) vide. Un préfaisceau F sur $\mathrm{SmRig}/\overline{X}$ (resp. SmF/\mathcal{X}) à valeurs dans une catégorie complète et cocomplète \mathcal{C} est un t_\emptyset -faisceau si et seulement si $F(\emptyset/\overline{X})$ (resp. $F(\emptyset/\mathcal{X})$) est un objet final. Le t_\emptyset -faisceau $a_{t_\emptyset} F$ associé à un préfaisceau F est donné par

$$a_{t_\emptyset} F(\overline{U}/\overline{X}) = \begin{cases} F(\overline{U}/\overline{X}) & \text{si } \overline{U}/\overline{X} \not\simeq \emptyset/\overline{X}, \\ * & \text{si } \overline{U}/\overline{X} \simeq \emptyset/\overline{X}. \end{cases}$$

(La formule analogue est également vraie dans le cas respé.) Lorsque \mathcal{C} est pointée, l'inclusion

$$\begin{aligned} \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\overline{X}, \mathcal{C}) & \subset \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/\overline{X}, \mathcal{C}) \\ (\text{resp. } \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmF}/\mathcal{X}, \mathcal{C}) & \subset \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmF}/\mathcal{X}, \mathcal{C})) \end{aligned}$$

admet un adjoint à droite b. Il est donné par $bF(\overline{U}/\overline{X}) = F(\overline{U}/\overline{X}) \times_{F(\emptyset/\overline{X})} *$. (Il en est de même dans le cas respé.)

Proposition 1.4.18. — Soit $i : \overline{Z} \rightarrow \overline{X}$ une immersion fermée de k° -schémas rigides. Le foncteur $i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\overline{Z}, \mathfrak{M}) \rightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\overline{X}, \mathfrak{M})$ est de Quillen à

gauche relativement aux structures injectives Nis-locales et \mathbb{B}^1 -locales. L'énoncé analogue pour les immersions fermées de k° -schémas formels est également vrai.

Démonstration. — Le foncteur

$$i_* : \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/\bar{Z}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/\bar{X}, \mathfrak{M})$$

admet un adjoint à droite $i^!$ qui à un préfaisceau H sur SmRig/\bar{X} associe le préfaisceau $i^!H$ donné par

$$i^!H : (\bar{V} \rightarrow \bar{Z}) \in \mathrm{SmRig}/\bar{Z} \rightsquigarrow \lim_{\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z} \rightarrow \bar{V} \in (\mathrm{SmRig}/\bar{X})/\bar{V}} H(\bar{U}).$$

On en déduit que le foncteur

$$i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\bar{Z}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\bar{X}, \mathfrak{M})$$

admet un adjoint à droite donné par $b \circ i^! \circ \mathrm{inc}$. On le notera encore $i^!$.

Les cofibrations de la structure injective sur $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(-, \mathfrak{M})$ sont les t_\emptyset -faisceautisées des cofibrations injectives de préfaisceaux. C'est donc exactement les morphismes de t_\emptyset -faisceaux $H \rightarrow K$ tels que $H(\bar{U}) \rightarrow K(\bar{U})$ est une cofibration pour tout \bar{X} -schéma rigide lisse \bar{U} . De même, un morphisme de t_\emptyset -faisceaux $f : H \rightarrow K$ est une équivalence faible si et seulement si $f(\bar{U})$ est une équivalence faible pour tout \bar{X} -schéma rigide \bar{U} .

On déduit immédiatement que le foncteur

$$i_* : \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\bar{Z}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\bar{X}, \mathfrak{M})$$

préserve les cofibrations et les équivalences faibles de la structure $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{inj}})$. C'est donc bien un foncteur de Quillen à gauche.

Montrons que i_* envoie les équivalences Nis-locales sur des équivalences Nis-locales. Soit $u : H \rightarrow K$ une équivalence Nis-locale de $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\bar{Z}, \mathfrak{M})$. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathcal{E}$. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} i_*\Pi_0(A[-n], H) & \longrightarrow & i_*\Pi_0(A[-n], K) \\ \parallel & & \parallel \\ \Pi_0(A[-n], i_*H) & \longrightarrow & \Pi_0(A[-n], i_*K). \end{array}$$

Il faut donc prouver que $a_{\mathrm{Nis}}i_*\Pi_0(A[-n], H) \rightarrow a_{\mathrm{Nis}}i_*\Pi_0(A[-n], K)$ est inversible. Le résultat découle immédiatement de la commutation $a_{\mathrm{Nis}} \circ i_* \simeq i_* \circ a_{\mathrm{Nis}}$ pour les t_\emptyset -faisceaux d'ensembles (voir le lemme 1.4.19 ci-dessous).

Pour montrer que i_* préserve les équivalences \mathbb{B}^1 -locales, il suffit de montrer que Li_* envoie les flèches de la forme $\mathbb{B}_{\bar{V}}^1 \otimes A_{\mathrm{cst}} \rightarrow \bar{V} \otimes A_{\mathrm{cst}}$ (avec $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M})$ et \bar{V} un \bar{Z} -schéma rigide lisse) sur des équivalences \mathbb{B}^1 -locales. Par la discussion précédente, on sait que i_* se dérive trivialement. Il faut donc montrer que

$$p : i_*(\mathbb{B}_{\bar{V}}^1 \otimes A_{\mathrm{cst}}) \longrightarrow i_*(\bar{V} \otimes A_{\mathrm{cst}})$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. La flèche p admet une section s (induite par le zéro de $\mathbb{B}_{k^\circ}^1$). Il suffit donc de montrer que l'identité de $i_*(\mathbb{B}_{\bar{V}}^1 \otimes A_{\mathrm{cst}})$ est \mathbb{B}^1 -homotope à la

flèche induite par $s \circ p$. On obtient une telle homotopie en prenant la composition de

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{\bar{X}}^1 \otimes i_*(\mathbb{B}_{\bar{V}}^1 \otimes A_{\text{cst}}) &\longrightarrow i_*(\mathbb{B}_{\bar{Z}}^1) \otimes i_*(\mathbb{B}_{\bar{V}}^1 \otimes A_{\text{cst}}) \\ &= i_*((\mathbb{B}_{\bar{Z}}^1 \widehat{\times}_{\bar{Z}} \mathbb{B}_{\bar{Z}}^1 \widehat{\times}_{\bar{Z}} \bar{V}) \otimes A_{\text{cst}}) \xrightarrow{m} i_*((\mathbb{B}_{\bar{Z}}^1 \widehat{\times}_{\bar{Z}} \bar{V}) \otimes A_{\text{cst}}) \end{aligned}$$

avec m la flèche induite par la multiplication du k° -schéma rigide en anneau \mathbb{B}_k^1 .

Le cas des k° -schémas formels se traite de la même manière.

C.Q.F.D.

Lemme 1.4.19. — *Soit $i : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ (resp. $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$) une immersion fermée de k° -schémas rigides (resp. formels). La transformation naturelle $\mathfrak{a}_{\text{Nis}} \circ i_* \rightarrow i_* \circ \mathfrak{a}_{\text{Nis}}$ est inversible lorsqu'elle est évaluée sur les t_\varnothing -faisceaux d'ensembles.*

Démonstration. — On traite seulement le cas non respé. Soient F un préfaisceau d'ensembles sur SmRig/\bar{Z} et \bar{U} un \bar{X} -schéma rigide lisse. On a (avec les notations de [1, Exposé II, §3])

$$L(i_*F)(\bar{U}) = \underset{(\bar{U}_i \rightarrow \bar{U})_{i \in \text{Cov}_{\text{Nis}}(\bar{U})}}{\text{Colim}} \text{Eq}\left(\prod_i F(\bar{U}_i \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}) \rightrightarrows \prod_{i,j} F((\bar{U}_i \widehat{\times}_{\bar{U}} \bar{U}_j) \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})\right)$$

où la colimite est prise selon la catégorie cofiltrante $\text{Cov}_{\text{Nis}}(\bar{U})$ des familles $(\bar{U}_i \rightarrow \bar{U})_i$ de morphismes étales qui sont couvrantes pour la topologie de Nisnevich.

Le foncteur évident $\text{Cov}_{\text{Nis}}(\bar{U}) \rightarrow \text{Cov}_{\text{Nis}}(\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})$ qui à une famille $(\bar{U}_i \rightarrow \bar{U})_i$ associe la famille $(\bar{U}_i \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z} \rightarrow \bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})_i$ est cofinal dès que $\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$ est non vide⁽¹¹⁾. En effet, soit $(\bar{V}_j \rightarrow \bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})_j$ une famille couvrante pour la topologie de Nisnevich (l'ensemble indexant est donc non vide). Quitte à raffiner la famille en question, on peut supposer qu'il existe pour tout j un \bar{U} -schéma rigide étale \bar{U}_j tel que $\bar{V}_j = \bar{U}_j \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$. (En effet, vu le recouvrement $\bar{U} = \bar{U}_\eta \cup \bar{U} // \pi$, il suffit de traiter le cas des k -variétés rigides et celui des k° -schémas formels. Le cas des k -variétés rigides quasi-compactes découle du cas des k° -schémas formels. Le cas des k° -schémas formels découle du cas classique des \tilde{k} -schémas grâce à la proposition 1.2.6.) La famille $(\bar{U}_j \rightarrow \bar{U})_j \coprod \{(\bar{U} - \bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}) \rightarrow \bar{U}\}$ est alors un recouvrement Nisnevich de \bar{U} dont la restriction à $\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$ raffine notre recouvrement de départ (puisque $\varnothing = (\bar{U} - \bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}) \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z} \rightarrow \bar{Z}$ se factorise par tous les \bar{V}_j et qu'il y en a au moins un).

Ainsi, lorsque $\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$ est non vide, $L(i_*F)(\bar{U})$ est isomorphe à

$$\underset{(\bar{V}_j \rightarrow \bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})_{j \in \text{Cov}(\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})}}{\text{Colim}} \text{Eq}\left(\prod_i F(\bar{V}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(\bar{V}_i \widehat{\times}_{\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}} \bar{V}_j)\right) = LF(\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}).$$

De plus, pour F un t_\varnothing -faisceau, on a évidemment $L(i_*F)(\bar{U}) = *$ lorsque $\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z} \simeq \varnothing/\bar{Z}$. On obtient donc un isomorphisme de préfaisceaux $L(i_*F) \simeq i_*(LF)$. Puisque $\mathfrak{a}_{\text{Nis}} = L \circ L$, on en déduit un isomorphisme de faisceaux Nisnevich $\mathfrak{a}_{\text{Nis}}(i_*F) \simeq i_*(\mathfrak{a}_{\text{Nis}}F)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cet isomorphisme coïncide avec la transformation naturelle de l'énoncé.

C.Q.F.D.

⁽¹¹⁾ Lorsque \bar{U} est non vide et que $\bar{U} \widehat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$ est vide, ce foncteur est bien entendu non cofinal!

On suppose donné un diagramme dans SchRig/k° (resp. SchF/k°)

$$\bar{U} \xrightarrow{j} \bar{X} \xleftarrow{i} \bar{Z} \quad (\text{resp. } \mathcal{U} \xrightarrow{j} \mathcal{X} \xleftarrow{i} \mathcal{Z})$$

avec i une immersion fermée et j l'immersion ouverte complémentaire (voir la remarque 1.4.6). Soit F un t_\emptyset -faisceau sur SmRig/\bar{X} (resp. SmF/\mathcal{X}) à valeurs dans \mathfrak{M} . Le carré de t_\emptyset -faisceaux

$$(1.119) \quad \begin{array}{ccc} j_{\sharp}j^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & i_*i^*F \end{array}$$

commute. En effet, toute flèche de $j_{\sharp}j^*F$ vers i_*i^*F est nulle puisqu'elle correspond par adjonction à une flèche vers $j^*i_*i^*F = *$. (On utilise ici l'hypothèse que F est un t_\emptyset -faisceau.) On a le théorème crucial suivant.

Théorème 1.4.20. — *Soit F un t_\emptyset -faisceau projectivement cofibrant. Le carré (1.119) est homotopiquement cocartésien relativement à la structure de modèles \mathbb{B}^1 -locale.*

Il s'agit d'adapter la preuve de [30, §3.2, Theorem 2.21]. On suivra toutefois le traitement dans [3, §4.5.3]. On se ramène par l'analogie de [3, Lemme 4.5.37] au cas $F = a_{t_\emptyset}(\bar{X}' \otimes A_{\text{cst}})$ (resp. $F = a_{t_\emptyset}(\mathcal{X}' \otimes A_{\text{cst}})$) avec \bar{X}' (resp. \mathcal{X}') un \bar{X} -schéma rigide lisse (resp. \mathcal{X} -schéma formel lisse). En adaptant [3, Lemme 4.5.41] au cas des schémas rigides (resp. formels), on se ramène à montrer que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}' \otimes A_{\text{cst}} & \longrightarrow & \bar{X}' \otimes A_{\text{cst}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{U} \otimes A_{\text{cst}} & \longrightarrow & (i_*\bar{Z}') \otimes A_{\text{cst}} \end{array} \quad (\text{resp. } \begin{array}{ccc} \mathcal{U}' \otimes A_{\text{cst}} & \longrightarrow & \mathcal{X}' \otimes A_{\text{cst}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U} \otimes A_{\text{cst}} & \longrightarrow & (i_*\mathcal{Z}') \otimes A_{\text{cst}} \end{array})$$

est homotopiquement cocartésien. En d'autres termes, il faut montrer que le morphisme

$$\left[\bar{X}' \coprod_{\bar{U}'} \bar{U} \right] \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow (i_*\bar{Z}') \otimes A_{\text{cst}} \quad \left(\text{resp. } \left[\mathcal{X}' \coprod_{\mathcal{U}'} \mathcal{U} \right] \otimes A_{\text{cst}} \longrightarrow (i_*\mathcal{Z}') \otimes A_{\text{cst}} \right)$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. En utilisant [3, Corollaire 4.5.40], on se ramène à prouver la proposition suivante.

Proposition 1.4.21. — 1) *Soit \bar{X}' un \bar{X} -schéma rigide lisse et $s : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}'$ une section partielle définie sur le fermé \bar{Z} . On note $T_{\bar{X}',s}$ le préfaisceau d'ensembles sur SmRig/\bar{X} défini par*

$$T_{\bar{X}',s}(\bar{P}) = \begin{cases} \text{hom}_{\bar{X}}(\bar{P}, \bar{X}') \times_{\text{hom}_{\bar{Z}}(\bar{P} \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}, \bar{X}' \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})} * & \text{si } \bar{P} \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z} \neq \emptyset, \\ * & \text{si } \bar{P} \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z} = \emptyset. \end{cases}$$

Ci-dessus, l'ensemble $\mathrm{hom}_{\bar{Z}}(\bar{P} \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}, \bar{X}' \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z})$ est pointé par la composition de

$$\bar{P} \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z} \longrightarrow \bar{Z} \xrightarrow{s} \bar{X}' \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}.$$

Alors, la flèche $T_{\bar{X}',s} \otimes A_{\mathrm{cst}} \rightarrow \bar{X} \otimes A_{\mathrm{cst}}$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

2) Soit \mathcal{X} un \mathcal{X} -schéma formel lisse et $s : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}'$ une section partielle définie sur \mathcal{Z} . On note $T_{\mathcal{X}',s}$ le préfaisceau d'ensembles sur SmF/\mathcal{X} défini par

$$T_{\mathcal{X}',s}(\mathcal{P}) = \begin{cases} \mathrm{hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}, \mathcal{X}') \times_{\mathrm{hom}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{P} \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}, \mathcal{X}' \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z})} * & \text{si } \mathcal{P} \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} \neq \emptyset, \\ * & \text{si } \mathcal{P} \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} = \emptyset. \end{cases}$$

Ci-dessus, l'ensemble $\mathrm{hom}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{P} \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}, \mathcal{X}' \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z})$ est pointé par la composition de

$$\mathcal{P} \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{s} \mathcal{X}' \hat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}.$$

Alors, la flèche $T_{\mathcal{X}',s} \otimes A_{\mathrm{cst}} \rightarrow \mathcal{X} \otimes A_{\mathrm{cst}}$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Démonstration. — On traite uniquement le cas des k° -schémas rigides. Le cas des k° -schémas formels est plus simple. On procède en trois étapes.

Étape 1 : Soit $(u_i : \bar{X}_i \rightarrow \bar{X})_{i \in I}$ un recouvrement Nisnevich du k° -schéma rigide \bar{X} . On note $\bar{X}'_i, \bar{Z}_i, s_i$, etc. les objets obtenus par changement de base de \bar{X}', \bar{Z}, s , etc. suivant u_i . Le préfaisceau $u_i^* T_{\bar{X}',s}$ s'identifie canoniquement à $T_{\bar{X}'_i, s_i}$. Par le lemme 1.4.22 ci-dessus, il suffit de démontrer la proposition pour chaque \bar{X}_i . On peut donc supposer les conditions ci-dessus satisfaites.

- (i) \bar{X} et \bar{Z} sont tous les deux des k° -schémas formels affines ou des k -affinoïdes (modulo les plongements pleinement fidèles de l'exemple 1.4.3).
- (ii) Lorsque \bar{Z} est un k° -schéma formel affine, $s : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}'$ admet un voisinage qui est un k° -schéma formel affine. De plus, le faisceau normal de l'immersion $s : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}' \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$ est libre.
- (iii) Lorsque \bar{Z} est un k -affinoïde, $s : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}'$ admet un voisinage qui est un k -affinoïde. De plus, le faisceau normal de l'immersion $s : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}' \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$ est libre.

En effet, en utilisant le recouvrement canonique $\bar{X} = \bar{X}_\eta \cup \bar{X} // \pi$ on se ramène immédiatement au cas où \bar{X} est un k° -schéma formel affine ou un k -affinoïde. Pour déduire (i) on utilise la remarque 1.4.6. Les assertions (ii) et (iii) sont également faciles.

Étape 2 : Soient $\bar{X}'' \rightarrow \bar{X}'$ un morphisme étale et s, s' des sections partielles définies sur \bar{Z} rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \bar{Z} & \xrightarrow{s'} & \bar{X}'' \\ & \searrow s & \downarrow \\ & & \bar{X}' \end{array}$$

On en déduit un morphisme de préfaisceaux

$$(1.120) \quad T_{\bar{X}'',s'} \longrightarrow T_{\bar{X}',s}.$$

On montrera qu'il induit un isomorphisme sur les faisceaux Nisnevich associés. Soit \bar{Y} un \bar{X} -schéma rigide lisse. Tout recouvrement Nisnevich \mathcal{R} de \bar{Y} se raffine par

un recouvrement $\mathcal{R}_1 \coprod \mathcal{R}_2$ avec \mathcal{R}_1 un recouvrement Nisnevich de la k -variété rigide $\bar{Y}_\eta = Y$ et \mathcal{R}_2 un recouvrement Nisnevich du k° -schéma formel $\bar{Y} // \pi = \mathcal{Y}$. Il suffit donc de montrer qu'après faisceautisation, les restrictions de (1.120) suivant les inclusions évidentes $\text{Et}/Y \subset \text{Et}/\bar{Y} \subset \text{SmRig}/\bar{X}$ et $\text{Et}/\mathcal{Y} \subset \text{Et}/\bar{Y} \subset \text{SmRig}/\bar{X}$ sont des isomorphismes. On traite les cas de Et/Y et Et/\mathcal{Y} séparément.

Cas 1 : On suppose que $\bar{Y} = (Y, \emptyset)$ avec Y un k -affinoïde. On note $X = \bar{X}_\eta$ et $Z = \bar{Z}_\eta$. On montrera que la restriction de (1.120) à $\text{Ouv}(Y)$ devient inversible après faisceautisation pour la topologie des recouvrements admissibles. Il suffit alors de vérifier que les fibres de (1.120) sont inversibles en tous les points $p \in \mathcal{P}(Y)$, i.e., que l'application

$$(1.121) \quad \text{Colim}_{V \in \text{Flt}(p)} T_{\bar{X}'', s'}(V) \longrightarrow \text{Colim}_{V \in \text{Flt}(p)} T_{\bar{X}', s}(V)$$

est bijective. Lorsque $p \notin \mathcal{P}(Y \hat{\times}_X Z)$, il existe $V \in \text{Flt}(p)$ tel que $V \hat{\times}_X Z = \emptyset$. Dans ce cas, les deux membres de (1.121) sont des singletons.

Supposons donc que $p \in \mathcal{P}(Y \hat{\times}_X Z)$. Soit \bar{X}'_0 un voisinage ouvert de s dans \bar{X}' . Pour tout $V \in \text{Flt}(p)$ et $a \in T_{\bar{X}', s}(V)$, il existe $V_0 \in \text{Flt}(p)$ contenu dans V tel que $a|_{V_0} \in T_{\bar{X}'_0, s}(V_0)$. Il vient que $\text{Colim}_{V \in \text{Flt}(p)} T_{\bar{X}', s}(V) \simeq \text{Colim}_{V \in \text{Flt}(p)} T_{\bar{X}'_0, s}(V)$. La même discussion s'applique à \bar{X}'' . On peut donc remplacer \bar{X}'' et \bar{X}' par des voisinages ouverts de s et s' . En particulier, on peut supposer qu'ils sont des k -affinoïdes qu'on notera X' et X'' respectivement. Étant donné que $X'' \rightarrow X'$ est étale, on peut trouver un voisinage ouvert X''_0 de s' tel que $X''_0 \rightarrow X'$ est une immersion ouverte (par le corollaire 1.1.56). Ceci nous ramène au cas trivial où $X'' = X'$.

Cas 2 : On suppose que $\bar{Y} = (\mathcal{Y}_\eta, \mathcal{Y})$ avec \mathcal{Y} un k° -schéma formel affine. On note $\mathcal{X} = \bar{X} // \pi$ et $\mathcal{Z} = \bar{Z} // \pi$. Il suffit de vérifier que les fibres de la restriction de (1.120) au petit site Nisnevich $(\text{Et}/\mathcal{Y}, \text{Nis})$ sont inversibles pour tout $y \in \mathcal{Y}_\sigma$. Fixons donc un point $y \in \mathcal{Y}_\sigma$. Il s'agit de montrer que l'application

$$(1.122) \quad \text{Colim}_{y \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Y}} T_{\bar{X}'', s'}(\mathcal{V}) \longrightarrow \text{Colim}_{y \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Y}} T_{\bar{X}', s}(\mathcal{V})$$

est bijective (avec \mathcal{V} parcourant les voisinages étales de $y \in \mathcal{Y}$). Lorsque $y \notin \mathcal{Y}_\sigma \times_{x_\sigma} \mathcal{Z}_\sigma$ les deux membres ci-dessus sont des singletons. On supposera donc dans la suite que $y \in \mathcal{Y}_\sigma \times_{x_\sigma} \mathcal{Z}_\sigma$.

On définit une application inverse à (1.122) de la manière suivante. Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \bar{X}'$ un morphisme de \mathcal{X} -schémas rigides tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} \hat{\times}_x \mathcal{Z} & \xrightarrow{f \hat{\times}_x \mathcal{Z}} & \bar{X}' \hat{\times}_x \mathcal{Z} \\ \downarrow & \nearrow s & \\ \mathcal{Z} & & \end{array}$$

commute. Le carré ci-dessous est aussi commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} \widehat{\times}_X \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z} & \longrightarrow & \overline{X}'' \longrightarrow \overline{X}' \end{array}$$

Ceci donne une section partielle $\mathcal{V} \widehat{\times}_X \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{V} \widehat{\times}_{\overline{X}', \overline{X}''}$ du morphisme étale $\mathcal{V} \widehat{\times}_{\overline{X}', \overline{X}''} \rightarrow \mathcal{V}$. Ainsi, le \mathcal{Y} -schéma formel $\mathcal{V}' = (\mathcal{V} \widehat{\times}_{\overline{X}', \overline{X}''}) // \pi$ est naturellement un voisinage étale de y . (On utilise ici l'hypothèse $y \in \mathcal{Y}_\sigma \times_{x_\sigma} \mathcal{Z}_\sigma$.) On note $f' : \mathcal{V}' \rightarrow \overline{X}''$ le morphisme évident. On vérifie aisément que l'association $f \rightsquigarrow f'$ est un inverse à droite et à gauche de (1.122).

Étape 3 : Par l'étape précédente, on peut remplacer \overline{X}' par un voisinage Nisnevich de s . En utilisant la première étape, on peut alors supposer que \overline{X}' est un k° -schéma formel affine (resp. un k -affinoïde) selon le type de \overline{Z} . Toujours par la première étape, le faisceau normal \mathcal{N}_s de l'immersion $s : \overline{Z} \rightarrow \overline{X}' \widehat{\times}_{\overline{X}} \overline{Z}$ est libre. Soient $a_1, \dots, a_n \in \Gamma(\overline{X}', \mathcal{O})$ des éléments qui appartiennent à l'idéal de l'immersion $\overline{Z} \rightarrow \overline{X}'$ et dont les classes dans $\Gamma(\overline{Z}, \mathcal{N}_s)$ forment une base de \mathcal{N}_s . (Dans le cas respé, on multiplie les a_i par une puissance convenable de π de sorte que $|a_i|_\infty \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.) On peut alors considérer le morphisme $(a_1, \dots, a_n) : \overline{X}' \rightarrow \mathbb{B}_{k^\circ}^n \widehat{\times}_{k^\circ} \overline{X}$. Ce morphisme est étale au voisinage de la section s . Par la seconde étape, on peut donc supposer que $\overline{X}' = \mathbb{B}_{\overline{X}}^n$ et que s est la section nulle au-dessus de Z . On conclut alors comme dans l'étape 3 de la preuve de [3, Proposition 4.5.42]. C.Q.F.D.

Le lemme suivant a été utilisé dans la preuve de la proposition 1.4.21 ci-dessus.

Lemme 1.4.22. — *Soient \overline{X} un k° -schéma rigide et $u : \overline{U} \rightarrow \overline{X}$ un morphisme lisse couvrant pour la topologie de Nisnevich. Le foncteur*

$$u^* : \mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/\overline{X}, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/\overline{U}, \mathfrak{M})$$

préserve et détecte les équivalences \mathbb{B}^1 -locales. L'énoncé correspondant pour les k° -schémas formels est également vrai.

Démonstration. — Rappelons que $u^* \simeq (c_u)_*$ avec c_u le foncteur de composition à gauche par u . Le fait que $(c_u)_*$ préserve les équivalences Nis-locales est clair. Pour montrer que $(c_u)_*$ détecte les équivalences Nis-locales, il suffit de remarquer que $(c_u)_*$ commute au foncteur de faisceautisation et qu'un morphisme de faisceaux d'ensembles $a : H \rightarrow K$ sur $\mathbf{SmRig}/\overline{X}$ est un isomorphisme si et seulement si $u^*(a)$ est un isomorphisme (car u est couvrante).

Soit $f : H \rightarrow K$ une flèche de $\mathbf{PreShv}(\mathbf{SmRig}/\overline{X}, \mathfrak{M})$. On suppose que $u^*(f)$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Comme u^* est de Quillen à gauche pour la structure projective \mathbb{B}^1 -locale, on peut supposer que H et K sont fibrants pour la structure $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-}\mathbb{B}^1})$. Comme u^* est de Quillen à droite relativement à cette structure, on déduit que $u^*(f)$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale entre objets \mathbb{B}^1 -fibrants.

C'est donc une équivalence Nis-locale. Ceci montre que f est aussi une équivalence Nis-locale. C.Q.F.D.

Voici quelques corollaires de la proposition 1.4.21.

Corollaire 1.4.23. — *Soit $i : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ (resp. $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$) une immersion fermée de k° -schémas rigides (resp. formels). La counité $i^*i_* \rightarrow \text{id}$ de l'adjonction*

$$(i^*, i_*) : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\bar{X}) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\bar{Z})$$

$$\text{(resp. } (i^*, i_*) : \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{Z}) \text{)}$$

est inversible.

Démonstration. — On traite uniquement la cas des k° -schémas rigides. Les foncteurs i_* et i^* commutent aux sommes infinies (puisqu'ils sont dérivés de foncteurs de Quillen à gauche). Il suffit donc de montrer que le morphisme de counité est inversible après évaluation sur les générateurs compacts de $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\bar{Z})$ fournis par le lemme 1.4.31 ci-dessous. Il s'agit alors de montrer que le morphisme

$$(1.123) \quad \text{Li}^*i_*a_{t_\emptyset}(\bar{Z}' \otimes A_{\text{cst}}) \longrightarrow a_{t_\emptyset}(\bar{Z}' \otimes A_{\text{cst}})$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale pour tout \bar{Z}' quasi-compact et lisse sur \bar{Z} . La question est locale sur \bar{Z}' . Plus précisément, si $(\bar{Z}'_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert fini de \bar{Z}' par des k° -schémas rigides quasi-compacts, il suffira de montrer que (1.123) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale pour les $\bigcap_{i \in J} \bar{Z}'_i$ avec $\emptyset \neq J \subset I$.

Comme en géométrie algébrique, on peut montrer que tout \bar{Z} -schéma rigide lisse est localement (pour la topologie usuelle) le « pull-back » d'un \bar{X} -schéma rigide lisse. On peut donc supposer qu'il existe un \bar{X} -schéma rigide lisse \bar{X}' tel que $\bar{Z}' = \bar{X}' \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Z}$. Par la proposition 1.4.21, $i_*a_{t_\emptyset}(\bar{Z}' \otimes A_{\text{cst}})$ est \mathbb{B}^1 -équivalent au cône du morphisme

$$a_{t_\emptyset}((\bar{X}' \hat{\times}_{\bar{X}} (\bar{X} - \bar{Z})) \otimes A_{\text{cst}}) \longrightarrow a_{t_\emptyset}(\bar{X}' \otimes A_{\text{cst}}).$$

Étant donné que les deux t_\emptyset -faisceaux ci-dessus sont projectivement cofibrants, on déduit que $\text{Li}^*i_*a_{t_\emptyset}(\bar{Z}' \otimes A_{\text{cst}})$ est isomorphe au cône de

$$a_{t_\emptyset}((\bar{Z}' \hat{\times}_{\bar{X}} (\bar{X} - \bar{Z})) \otimes A_{\text{cst}}) \longrightarrow a_{t_\emptyset}(\bar{Z}' \otimes A_{\text{cst}}).$$

Mais le k° -schéma rigide $\bar{Z}' \hat{\times}_{\bar{X}} (\bar{X} - \bar{Z})$ est vide. D'où le résultat recherché. C.Q.F.D.

Corollaire 1.4.24. — *Soit \mathcal{X} un k° -schéma formel et notons $i : \mathcal{X}_\sigma \rightarrow \mathcal{X}$ l'immersion fermée de sa fibre spéciale. Alors le foncteur*

$$i^* : \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\sigma) = \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\sigma)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Le complémentaire de \mathcal{X}_σ dans \mathcal{X} est vide. On déduit de la proposition 1.4.21 que le morphisme d'unité $\text{id} \rightarrow i_*i^*$ est inversible. D'autre part, le corollaire 1.4.23 affirme que la counité $i^*i_* \rightarrow \text{id}$ est inversible. D'où le résultat. C.Q.F.D.

Remarque 1.4.25. — Soit \mathcal{X} un k° -schéma formel. On définit un foncteur $\mathfrak{P} : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\sigma) \rightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta)$ par la composition de

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\sigma) \xrightarrow[\sim]{i_*} \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{j^* \circ P^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta)$$

(avec j l'inclusion de \mathcal{X}_η dans \mathcal{X} vu comme un k° -schéma rigide). Contrairement à la composition de

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\sigma) \xrightarrow{i_*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{j^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta),$$

le foncteur \mathfrak{P} n'est pas nul. De plus, si \mathfrak{M} est une catégorie de modèles monoïdale et unitaire, \mathfrak{P} est monoïdal et unitaire (et, en particulier, envoie $\bullet_{\mathcal{X}_\sigma}$ sur $\bullet_{\mathcal{X}_\eta}$) comme il découle facilement du corollaire 1.4.24.

Dans le reste de ce paragraphe, on établit les analogues stables des résultats précédents. Soit $\bar{\mathcal{X}}$ (resp. \mathcal{X}) un k° -schéma rigide (resp. formel). Le foncteur $\mathbf{a}_{t_\emptyset} : \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{X}}, \mathfrak{M}) \rightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{X}}, \mathfrak{M})$ (resp. $\mathbf{a}_{t_\emptyset} : \mathbf{PreShv}(\text{SmF}/\mathcal{X}, \mathfrak{M}) \rightarrow \mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmF}/\mathcal{X}, \mathfrak{M})$) est une équivalence de Quillen à gauche relativement aux structures \mathbb{B}^1 -locales. Il induit donc une équivalence de Quillen à gauche

$$\mathbf{a}_{t_\emptyset} : \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{X}}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{X}}, \mathfrak{M}))$$

$$\text{(resp. } \mathbf{a}_{t_\emptyset} : \mathbf{Spect}_{T^{\text{for}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmF}/\mathcal{X}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{for}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmF}/\mathcal{X}, \mathfrak{M})).$$

Pour une immersion fermée $i : \bar{\mathcal{Z}} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ (resp. $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$) on dispose d'une transformation naturelle

$$(1.124) \quad T^{\text{an}} \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(T^{\text{an}} \otimes -) \quad \text{(resp. } T^{\text{for}} \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(T^{\text{for}} \otimes -))$$

qui induit le prolongement

$$i_* : \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{Z}}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{X}}, \mathfrak{M}))$$

$$\text{(resp. } i_* : \mathbf{Spect}_{T^{\text{for}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmF}/\mathcal{Z}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T^{\text{for}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmF}/\mathcal{X}, \mathfrak{M})).$$

Le lecteur vérifiera facilement que (1.124) induit une transformation naturelle

$$(1.125) \quad \mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}) \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(\mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}) \otimes -)$$

$$\text{(resp. } \mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{for}}) \otimes i_*(-) \longrightarrow i_*(\mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{for}}) \otimes -))$$

où le produit tensoriel est pris dans la catégorie des t_\emptyset -faisceaux. On obtient de plus un carré commutatif de catégories

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spect}_{\mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{Z}}, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{i_*} & \mathbf{Spect}_{\mathbf{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{X}}, \mathfrak{M})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{Z}}, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{i_*} & \mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/\bar{\mathcal{X}}, \mathfrak{M})) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions évidentes (qui sont donc des équivalences de Quillen à droite). On a également le carré commutatif analogue pour les k° -schémas formels. Notons le théorème suivant.

Théorème 1.4.26. — 1) Soit $i : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ une immersion fermée de k° -schémas rigides. Le foncteur

$$(1.126) \quad i_* : \mathbf{Spect}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmRig}/\bar{Z}, \mathfrak{M})) \\ \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmRig}/\bar{X}, \mathfrak{M}))$$

est de Quillen à gauche relativement aux structures injectives stables sur les catégories de spectres symétriques déduites des structures injectives \mathbb{B}^1 -locales $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj}-\mathbb{B}^1})$ sur les catégories de t_\emptyset -faisceaux.

2) Soit $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ une immersion fermée de k° -schémas formels. Le foncteur

$$(1.127) \quad i_* : \mathbf{Spect}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{for}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmF}/\mathcal{Z}, \mathfrak{M})) \\ \longrightarrow \mathbf{Spect}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{for}})}^\Sigma(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{Sm}/\mathcal{X}, \mathfrak{M}))$$

est de Quillen à gauche relativement aux structures injectives stables sur les catégories de spectres symétriques déduites des structures injectives \mathbb{B}^1 -locales $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj}-\mathbb{B}^1})$ sur les catégories de t_\emptyset -faisceaux.

Démonstration. — On traite seulement le cas des k° -schémas rigides. Le foncteur (1.126) admet un adjoint à droite (voir le lemme 1.4.27 ci-dessous). Le fait que (1.126) préserve les cofibrations injectives et les cofibrations injectives \mathbb{B}^1 -triviales niveau par niveau découle de la proposition 1.4.18. Il reste à voir que (1.126) envoie les flèches de la forme ω_K^p (voir [3, §4.3.2]) sur des équivalences \mathbb{B}^1 -locales stables pour tout $K \in \text{Ob}(\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\text{SmRig}/\bar{Z}, \mathfrak{M}))$ injectivement cofibrant et $p \in \mathbb{N}$. On dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Sus}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}), \Sigma}^{p+1}(\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}) \otimes i_* K) & \xrightarrow{\omega_{i_* K}^p} & \text{Sus}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}), \Sigma}^p(i_* K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_* \text{Sus}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}), \Sigma}^{p+1}(\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}) \otimes K) & \xrightarrow{i_* \omega_K^p} & i_* \text{Sus}_{\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\text{an}}), \Sigma}^p(K). \end{array}$$

Il suffira de montrer que les flèches verticales sont des équivalences \mathbb{B}^1 -locales niveau par niveau. On se ramène ainsi à montrer que les morphismes

$$(1.128) \quad \mathfrak{a}_{t_\emptyset}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes i_* K \longrightarrow i_*(\mathfrak{a}_{t_\emptyset}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes K)$$

sont des équivalences \mathbb{B}^1 -locales. Notons j l'immersion ouverte complémentaire à i . Le couple de foncteurs $(\mathbf{L}i^*, j^*)$ est conservatif par le théorème 1.4.20. Il suffit donc

de prouver que

$$(1.129) \quad \begin{aligned} j^*[\mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes i_*K] &\longrightarrow j^*[i_*(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes K)], \\ \mathbf{Li}^*[\mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes i_*K] &\longrightarrow \mathbf{Li}^*[i_*(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes K)], \end{aligned}$$

sont inversibles dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(-)$. La flèche de gauche est le morphisme nul entre objets nuls puisque $j^*i_* = 0$; elle est donc inversible. Pour la seconde flèche, on considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Li}^*[\mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes i_*K] & \longrightarrow & \mathbf{Li}^*[i_*(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes K)] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes \mathbf{Li}^*i_*K & \longrightarrow & \mathfrak{a}_{t_\varnothing}((T^{\text{an}})^{\otimes r}) \otimes K. \end{array}$$

Or, la counité de (\mathbf{Li}^*, i_*) est inversible par le corollaire 1.4.23. D'où le résultat.

C.Q.F.D.

Lemme 1.4.27. — *On garde les hypothèses du théorème 1.4.26. Le foncteur (1.126) (resp. (1.127)) admet un adjoint à droite.*

Démonstration. — Soit \mathbf{E} un $\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})$ -spectre symétrique à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\text{SmRig}/\bar{X}, \mathfrak{M})$. On définit une suite symétrique $(\mathbf{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Shv}_{t_\varnothing}(\text{SmRig}/\bar{Z}, \mathfrak{M})$ par

$$(1.130) \quad \mathbf{F}_n = \text{Eq} \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})^{\otimes k}, i^! \mathbf{E}_{k+n}) \right. \\ \left. \rightrightarrows \prod_{l \in \mathbb{N}} \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})^{\otimes l}, i^! \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}}), \mathbf{E}_{l+1+n})) \right)$$

où l'action de Σ_n sur \mathbf{F}_n est déduite des restrictions des actions de Σ_{m+n} sur \mathbf{E}_{m+n} suivant $1 \times \Sigma_n \subset \Sigma_m \times \Sigma_n \subset \Sigma_{m+n}$. L'une des deux flèches dans (1.130) est déduite par adjonction du morphisme d'assemblage du $\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})$ -spectre \mathbf{E} et l'autre est la composition de

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})^{\otimes k}, i^!(-)) &\simeq \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})^{\otimes k-1}, \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}}), i^!(-))) \\ &\downarrow \\ \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})^{\otimes k-1}, i^! \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}}), -)). \end{aligned}$$

On vérifie facilement qu'en prenant le produit sur les $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, la flèche diagonale déduite des compositions de

$$\mathbf{F}_n \rightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})^{\otimes k}, i^! \mathbf{E}_{k+n}) \simeq \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}}), \underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})^{\otimes k-1}, i^! \mathbf{E}_{k-1+1+n}))$$

se factorise par le sous-objet $\underline{\mathcal{H}om}(\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}}), \mathbf{F}_{n+1})$. On obtient ainsi un $\mathfrak{a}_{t_\varnothing}(T^{\text{an}})$ -spectre symétrique \mathbf{F} . Le lecteur vérifiera que le foncteur $\text{hom}(i_*(-), \mathbf{E})$ est représenté par \mathbf{F} .

C.Q.F.D.

On déduit maintenant l'axiome de localité pour les catégories $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(-)$ et $\mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(-)$.

Corollaire 1.4.28. — Soient $i : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ (resp. $i : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$) une immersion fermée de k° -schémas rigides (resp. formels) et j l'immersion ouverte complémentaire. Le couple de foncteurs (Li^*, j^*) est conservatif sur $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\bar{X})$ (resp. $\mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X})$). De plus, le morphisme de counité $\mathrm{Li}^* \mathrm{Ri}_* \rightarrow \mathrm{id}$ est inversible.

Démonstration. — Comme d'habitude, on traite le cas des k° -schémas rigides et on laisse au lecteur le soin d'adapter l'argument au cas des schémas formels. Soit \mathbf{E} est un $\mathfrak{a}_{t_\emptyset}(T^{\mathrm{an}})$ -spectre projectivement cofibrant à valeurs dans $\mathbf{Shv}_{t_\emptyset}(\mathrm{SmRig}/\bar{X}, \mathfrak{M})$. Le carré commutatif

$$(1.131) \quad \begin{array}{ccc} j_{\sharp} j^* \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & i_* i^* \mathbf{E} \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien niveau par niveau. Comme i_* préserve les équivalences \mathbb{B}^1 -locales stables, il se dérive trivialement. On déduit ainsi un 2-triangle distingué dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\bar{X})$:

$$(1.132) \quad \mathrm{L}j_{\sharp} j^* \longrightarrow \mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Ri}_* \mathrm{Li}^* \longrightarrow .$$

Ceci montre que le couple de foncteurs (Li^*, j^*) est conservatif. La seconde assertion découle de son analogue instable (et du fait que i_* se dérive trivialement). C.Q.F.D.

Corollaire 1.4.29. — Soit \mathcal{X} un k° -schéma formel et notons $i : \mathcal{X}_\sigma \rightarrow \mathcal{X}$ l'immersion fermée de sa fibre spéciale. Le foncteur

$$i^* : \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}_\sigma) = \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}_\sigma)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Le complémentaire de \mathcal{X}_σ dans \mathcal{X} étant vide, on déduit que le morphisme d'unité $\mathrm{id} \rightarrow i_* i^*$ est inversible. Par le corollaire 1.4.28, la counité $i^* i_* \rightarrow \mathrm{id}$ est également inversible. D'où le résultat. C.Q.F.D.

Remarque 1.4.30. — Soit \mathcal{X} un k° -schéma formel. Comme dans la remarque 1.4.25, on définit un foncteur $\mathfrak{P} : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}_\sigma) \rightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}_\eta)$ par la composition de

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}_\sigma) \xrightarrow[\sim]{i^*} \mathbf{FSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{j^* \circ \mathrm{P}^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{X}_\eta).$$

C'est un foncteur monoïdal unitaire (et, en particulier, non nul).

1.4.4. Fin de la vérification des axiomes et quelques compléments. — Dans ce paragraphe, on démontre quelques résultats utiles pour la preuve du théorème 1.3.38 qui sera donnée dans le paragraphe suivant.

Lemme 1.4.31. — Soit \bar{X} un k° -schéma rigide. Alors $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\bar{X})$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\mathrm{Sus}_{T^{\mathrm{an}}}^p(\bar{U} \otimes A_{\mathrm{cst}})$ avec $p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{E}$ et \bar{U}

un \bar{X} -schéma rigide quasi-compact (i.e., \bar{U}_η est une k -variété rigide quasi-compacte). L'énoncé analogue pour la catégorie instable $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\bar{X})$ est également vrai.

Démonstration. — Notons $\text{SmRig}^{\text{qc}}/\bar{X}$ la catégorie des \bar{X} -schémas rigides lisses et quasi-compacts. On a une équivalence de sites $(\text{SmRig}/\bar{X}, \text{Nis}) \xrightarrow{\sim} (\text{SmRig}^{\text{qc}}/\bar{X}, \text{Nis})$. Remarquons d'autre part qu'un préfaisceau projectivement fibrant F sur $\text{SmRig}^{\text{qc}}/\bar{X}$ est Nis-local si et seulement si ses restrictions à $\text{SmRig}^{\text{qc}}/\bar{X}_\eta$ et $\text{SmF}/(\bar{X} // \pi)$ sont Nis-locaux (i.e., vérifient la propriété de Brown-Gersten) et si pour tout \bar{X} -schéma rigide lisse \bar{U} , le carré

$$\begin{array}{ccc} F(\bar{U}) & \longrightarrow & F(\bar{U}_\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\bar{U} // \pi) & \longrightarrow & F((\bar{U} // \pi)_\eta) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien. On en déduit que les préfaisceaux projectivement Nis-fibrants sur $\text{SmRig}^{\text{qc}}/\bar{X}$ sont stables par colimites filtrantes.

À partir de là, il est facile de se convaincre que la classe des T^{qc} -spectres symétriques de préfaisceaux sur $\text{SmRig}^{\text{qc}}/\bar{X}$ projectivement stablement \mathbb{B}^1 -fibrants est stable par colimites filtrantes. Ceci montre que les objets $\text{Sus}_{T^{\text{qc}}}^p(\bar{U} \otimes A_{\text{cst}})$ (avec p , A et \bar{U} comme dans l'énoncé) sont compacts. Par ailleurs, il est facile de voir que ces objets forment une famille conservative dans

$$\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\bar{X}) \simeq \mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}(\mathbf{Spect}_{T^{\text{qc}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/\bar{X}, \mathfrak{M}))).$$

Ceci permet de conclure.

C.Q.F.D.

Lemme 1.4.32. — *Soit un carré cartésien de k° -schémas rigides*

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y}' & \xrightarrow{g'} & \bar{X}' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bar{Y} & \xrightarrow{g} & \bar{X}. \end{array}$$

On suppose que f est lisse. Alors le 2-morphisme d'échange $f'_\# g'^* \rightarrow g^* f_\#$ est inversible (où les opérations sont prises entre les catégories $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(-)$ ou $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(-)$).

Démonstration. — Il suffit de montrer que le morphisme d'échange est inversible après évaluation sur les générateurs $\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((\bar{U}' \rightarrow \bar{X}') \otimes A_{\text{cst}})$ avec \bar{U}' quasi-compact sur k° et lisse sur \bar{X}' , $p \in \mathbb{N}$, et $A \in \mathcal{E}$. Or, on a

$$\begin{aligned} f'_\# g'^* \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((\bar{U}' \rightarrow \bar{X}') \otimes A_{\text{cst}}) &\simeq f'_\# \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((\bar{U}' \hat{\times}_{\bar{X}'} \bar{Y}' \rightarrow \bar{Y}') \otimes A_{\text{cst}}) \\ &\simeq \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((\bar{U}' \hat{\times}_{\bar{X}'} \bar{Y}' \rightarrow \bar{Y}') \otimes A_{\text{cst}}), \\ g^* f_\# \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((\bar{U}' \rightarrow \bar{X}') \otimes A_{\text{cst}}) &\simeq g^* \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((\bar{U}' \rightarrow \bar{X}) \otimes A_{\text{cst}}) \\ &\simeq \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((\bar{U}' \hat{\times}_{\bar{X}} \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}) \otimes A_{\text{cst}}). \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera facilement que modulo les isomorphismes ci-dessus, le morphisme d'échange est induit par l'isomorphisme de transitivité du produit fibré $\overline{U}' \widehat{\times}_{\overline{X}'} \overline{Y}' \simeq \overline{U}' \widehat{\times}_{\overline{X}} \overline{Y}$. C.Q.F.D.

Étant donné un schéma S , on notera Sch^{qp}/S la catégorie des S -schémas quasi-projectifs.

Théorème 1.4.33. — *Soit $X = \text{Spf}(A^\circ)$ un k° -schéma formel affine. Le 2-foncteur contravariant*

$$\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}}) : \text{Sch}^{\text{qp}}/A^\circ \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

qui à un A° -schéma quasi-projectif X associe la catégorie triangulée $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(X^{\text{an}})$ est un 2-foncteur homotopique stable au sens de [2, Définition 1.4.1].

Démonstration. — Il s'agit de vérifier les axiomes 1 à 6 de *loc. cit.*. L'axiome 1 est trivial. Les axiomes 2 et 4 sont contenus dans le théorème 1.4.16 et le corollaire 1.4.28. L'axiome 3 découle du lemme 1.4.32. Pour les axiomes 5 et 6, le lecteur est prié d'adapter les preuves de [3, Proposition 4.5.49 et Corollaire 4.5.51]. C.Q.F.D.

En particulier, pour f un morphisme de A° -schémas quasi-projectifs, on dispose des opérations $(f^{\text{an}})_!$ et $(f^{\text{an}})^!$. De même, le théorème de changement de base pour un morphisme projectif est valable dans $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(-)$ pour l'analytifié d'un carré cartésien de A° -schémas quasi-projectifs (et dont les flèches verticales sont des morphismes projectifs).

Définition 1.4.34. — *Soit S un schéma, et soient H_1 et H_2 deux 2-foncteurs homotopiques stables de domaine la catégorie des S -schémas quasi-projectifs. Rappelons qu'un 1-morphisme de 2-foncteurs $\Theta : H_1 \rightarrow H_2$ est la donnée :*

(i) *pour tout S -schéma quasi-projectif X , d'un foncteur triangulé*

$$\Theta_X : H_1(X) \longrightarrow H_2(X),$$

(ii) *pour tout morphisme de S -schémas quasi-projectifs $f : Y \rightarrow X$, d'un 2-isomorphisme $\alpha_f : f^* \circ \Theta_X \xrightarrow{\sim} \Theta_Y \circ f^*$ compatible avec les 2-isomorphismes de connexion de la manière usuelle.*

Étant donné Θ comme ci-dessus, on déduit par adjonction, à partir de α_f , une transformation naturelle $\beta_f : \Theta_X \circ f_ \rightarrow f_* \circ \Theta_Y$. Lorsque f est lisse on déduit par adjonction, à partir de α_f^{-1} , une transformation naturelle $\gamma_f : f_{\sharp} \circ \Theta_Y \rightarrow \Theta_X \circ f_{\sharp}$. On dit que Θ est un pré-morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables lorsque les γ_f sont inversibles. On dit que Θ est un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables si les β_f et les γ_f sont inversibles.*

Lemme 1.4.35. — *Soit $\text{Spf}(A^\circ)$ un k° -schéma formel affine. La famille des foncteurs*

$$\mathbf{Rig}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(X^{\text{an}}),$$

pour X un $\text{Spec}(A^\circ)$ -schéma quasi-projectif, s'étend naturellement en un pré-morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$ vers $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$.

Démonstration. — Les transformations naturelles $(f^{\text{an}})^*\mathbf{Rig}^* \simeq \mathbf{Rig}^*f^*$ proviennent des carrés de droite dans (1.118). Montrons que γ_f est inversible pour $f : Y \rightarrow X$ lisse. Étant donné que \mathbf{Rig}^* et $f_{\#}$ commutent aux sommes infinies, il suffit de montrer que $f_{\#}\mathbf{Rig}^* \rightarrow \mathbf{Rig}^*f_{\#}$ est inversible après évaluation sur les générateurs compacts de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y)$. Soient donc V un Y -schéma lisse, $B \in \mathcal{E}$ et $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} f_{\#}^{\text{an}}\mathbf{Rig}^*\text{Sus}_T^p((V \rightarrow Y) \otimes B_{\text{cst}}) &\simeq f_{\#}^{\text{an}}\text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((V^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}) \otimes B_{\text{cst}}) \\ &\simeq \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((V^{\text{an}} \rightarrow X^{\text{an}}) \otimes B_{\text{cst}}), \\ \mathbf{Rig}^*f_{\#}\text{Sus}_T^p((V \rightarrow Y) \otimes B_{\text{cst}}) &\simeq \mathbf{Rig}^*\text{Sus}_T^p((V \rightarrow X) \otimes B_{\text{cst}}) \\ &\simeq \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p((V^{\text{an}} \rightarrow X^{\text{an}}) \otimes B_{\text{cst}}). \end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de se convaincre que, modulo ces identifications, γ_f est l'identité. C.Q.F.D.

À présent, nous allons dériver quelques propriétés des prémorphismes de 2-foncteurs homotopiques stables. On fixe donc un prémorphisme $\Theta : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ comme dans la définition 1.4.34. Dans la suite, on notera Θ à la place de Θ_X lorsque cela n'induit pas un risque de confusion. Notons le lemme suivant.

Lemme 1.4.36. — *Soit $i : Z \rightarrow X$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs. La transformation naturelle*

$$\beta_i : \Theta \circ i_* \longrightarrow i_* \circ \Theta$$

est inversible.

Démonstration. — Notons $j : U \rightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire. Par l'axiome de localité, il suffit de montrer que $i^*\beta_i$ et $j^*\beta_i$ sont inversibles. Pour le premier 2-morphisme on utilise le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} i^*\Theta i_* & \longrightarrow & i^*i_*\Theta \\ \sim \downarrow & & \downarrow \\ \Theta i^*i_* & \longrightarrow & \Theta \end{array}$$

et le fait que la couinté de (i^*, i_*) est inversible. Pour le second 2-morphisme, on remarque que $j^*\Theta i_* \simeq \Theta j^*i_* \simeq 0$ et que $j^*i_*\Theta \simeq 0$. Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Soit \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module localement libre sur un S -schéma quasi-projectif X . On lui associe l'équivalence de Thom $\text{Th}(\mathcal{M}) = p_{\#}s_*$ avec

$$p : \mathbb{V}(\mathcal{M}) = \text{Spec}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Sym}^n \mathcal{M}\right) \longrightarrow X$$

la projection du fibré vectoriel associé à \mathcal{M} et s sa section nulle. Du lemme 1.4.36, on déduit un isomorphisme canonique $\text{Th}(\mathcal{M}) \circ \Theta \simeq \Theta \circ \text{Th}(\mathcal{M})$ donné par la composition de

$$p_{\#}s_*\Theta \xrightarrow[\sim]{\beta_s^{-1}} p_{\#}\Theta s_* \xrightarrow[\sim]{\gamma_p} \Theta p_{\#}s_*.$$

Étant donné que $\text{Th}(\mathcal{M})$ est une équivalence de quasi-inverse $\text{Th}^{-1}(\mathcal{M}) = s^!p^*$ (voir [2, Théorème 1.5.7]), on a aussi un isomorphisme $\text{Th}^{-1}(\mathcal{M}) \circ \Theta \simeq \Theta \circ \text{Th}^{-1}(\mathcal{M})$.

Proposition 1.4.37. — *Il existe une unique famille de 2-isomorphismes*

$$\delta_f : f_! \circ \Theta \xrightarrow{\sim} \Theta \circ f_!$$

indexée par les morphismes de S -schémas quasi-projectifs $f : Y \rightarrow X$ et vérifiant les propriétés ci-dessous.

- 1) Les δ_f sont compatibles à la composition des S -morphisms.
- 2) Pour une immersion fermée i , on a $\delta_i = \beta_i^{-1}$ modulo l'identification $i_! = i_*$.
- 3) Lorsque f est lisse, δ_f est donnée par la composition de

$$(1.133) \quad f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f)\Theta \xrightarrow{\sim} f_{\#}\Theta\text{Th}^{-1}(\Omega_f) \xrightarrow{\sim} \Theta f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f).$$

Démonstration. — L'unicité est claire puisque tout morphisme de S -schémas quasi-projectifs se factorise par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse.

Soit f un morphisme de S -schémas quasi-projectifs et $f = p \circ s$ une factorisation de f en une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse. On a alors un 2-isomorphisme de connexion $f_! \simeq p_! \circ s_!$ qui permet de définir $\delta_f = (\delta_p s_!) \circ (p_! \delta_s)$ avec δ_s et δ_p comme dans l'énoncé. Il s'agit de montrer que δ_f est indépendante de la factorisation $f = p \circ s$.

Soit $f = q \circ t$ une autre factorisation de f en une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse. On se ramène immédiatement au cas où il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{t} & \bullet & \xrightarrow{q} & \bullet \\ \parallel & & \downarrow d & & \parallel \\ \bullet & \xrightarrow{s} & \bullet & \xrightarrow{p} & \bullet \end{array}$$

avec d lisse. Il est facile de voir que (1.133) définit des 2-isomorphismes compatibles à la composition des morphismes lisses. Il suffit donc de montrer la commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} d_!t_!\Theta & \xrightarrow{\sim} & d_!\Theta t_! & \xrightarrow{\sim} & \Theta d_!t_! \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ s_!\Theta & \xrightarrow{\sim} & & & \Theta s_!. \end{array}$$

On forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{t'} & \bullet & \xrightarrow{s'} & \bullet \\ \curvearrowright & & \downarrow d' & & \downarrow d \\ \bullet & \xrightarrow{s} & \bullet & \xrightarrow{p} & \bullet \end{array}$$

ayant son carré cartésien. Par construction, les 2-morphismes $\delta_?$, pour ? lisse, et $\beta_{?}$ vérifient une compatibilité pour le morphisme d'échange du type $Ex_{!*}$. On est donc ramené à montrer une compatibilité avec le 2-isomorphisme de pureté (en fait, celui obtenu par adjonction de l'isomorphisme de pureté de [2, Théorème 1.6.19]). Plus précisément, nous devons montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}(\mathcal{N}_{t'})\Theta & \xrightarrow{\Pi} & t'_*d'_{\#}\Theta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Theta\mathrm{Th}(\mathcal{N}_{t'}) & \xrightarrow{\Pi} & t'_*d'_{\#}\Theta \end{array}$$

est commutatif. Pour vérifier cela, le lecteur peut s'inspirer de la preuve de [2, Théorème 2.3.31].

C.Q.F.D.

Lemme 1.4.38. — *Soit un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} g^*f_!\Theta & \xrightarrow{\sim} & g^*\Theta f_! & \xrightarrow{\sim} & \Theta g^*f_! \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f'_!g'^*\Theta & \xrightarrow{\sim} & f'_!\Theta g'^* & \longrightarrow & \Theta f'_!g'^*. \end{array}$$

Démonstration. — On se ramène à traiter le cas où f est une immersion fermée et celui où f est un morphisme lisse. La commutation du diagramme est facile dans ces deux cas.

C.Q.F.D.

Corollaire 1.4.39. — *Soit f un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} f_! \circ \Theta & \xrightarrow{\sim} & \Theta \circ f_! \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_* \circ \Theta & \longleftarrow & \Theta \circ f_* \end{array}$$

où les 2-morphismes verticaux sont donnés par [2, Définition 1.7.1]. En particulier, lorsque f est projectif, β_f est inversible.

Démonstration. — En effet, la définition des 2-morphismes $f_! \rightarrow f_*$ ne fait apparaître que des 2-isomorphismes de connexion et des 2-morphismes d'échange de type $Ex_{*!}$ obtenus par adjonction à partir des $Ex_!^*$. La commutation du diagramme de l'énoncé découle alors du lemme 1.4.38. Les détails sont laissés au lecteur. Pour la dernière assertion, on utilise le fait que $f_! \rightarrow f_*$ est un 2-isomorphisme pour f projectif (par [2, Théorème 1.7.17]).

C.Q.F.D.

Le corollaire 1.4.39 est suffisant pour les besoins de la preuve du théorème 1.3.38. Toutefois, nous n'avons pas résisté à inclure le résultat suivant, qui ne sera pas utilisé dans la suite.

Théorème 1.4.40. — *On suppose que k est de caractéristique nulle. Soit A une k -algèbre affinoïde. Le prémorphisme*

$$\mathbf{Rig}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{ct}}(-) \longrightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$$

est un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables sur Sch^{qp}/A . (Ci-dessus, $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{ct}}(-) \subset \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$ désigne la sous-catégorie des objets compacts, appelés aussi constructibles dans [2, 3].)

Ainsi, en se restreignant aux objets compacts, les foncteurs \mathbf{Rig}^ commutent aux quatre opérations f^* , f_* , $f_!$ et $f^!$ pour f un morphisme de A -schémas quasi-projectifs.*

Démonstration. — On sait que \mathbf{Rig}^* est un prémorphisme de 2-foncteurs homotopiques stables. Par le corollaire 1.4.39, il reste à montrer que, pour $j : U \rightarrow X$ une immersion ouverte, β_j devient inversible après restriction aux objets compacts. Notons $i : Y \rightarrow X$ l'immersion fermée complémentaire.

On obtient par adjonction à partir de β_i^{-1} un 2-morphisme $\xi_i : \mathbf{Rig}^* \circ i^! \rightarrow (i^{\text{an}})^! \circ \mathbf{Rig}^*$. Pour que β_j soit inversible, il suffirait que ξ_i soit inversible. En effet, de l'axiome de localité, on déduit que la paire $(i^!, j^*)$ est conservative. Comme la counité $j^* j_* \xrightarrow{\sim} \text{id}$ est inversible, on voit que le 2-morphisme $j^* \beta_j$ est inversible. D'autre part, on a $(i^{\text{an}})^! j_*^{\text{an}} \mathbf{Rig}^* = 0$ et, si ξ_i était inversible, $(i^{\text{an}})^! \mathbf{Rig}^* j_* \simeq \mathbf{Rig}^* i^! j_* = 0$, i.e., $i^! \beta_j$ serait le morphisme nul entre les 1-morphismes nuls (et en particulier inversible).

Puisqu'on se restreint aux objets compacts, il suffit de montrer que ξ_i est inversible lorsqu'on l'évalue sur des générateurs compacts de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$. Comme k est supposé de caractéristique nulle, on dispose de la résolution des singularités pour les A -schémas de type fini (A étant excellent). Par [2, Proposition 2.2.27], la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ est donc compactement engendrée par les objets de la forme $g_*(\text{Sus}_T^p(B_{\text{cst}}))$ avec $p \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{E}$ et $g : X' \rightarrow X$ un A -morphisme vérifiant les propriétés suivantes :

- g est projectif,
- X' est régulier et connexe,
- $g^{-1}(Z)$ est soit X' tout entier, soit un diviseur à croisements normaux.

Fixons g , B et p comme ci-dessus. On forme le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

On a un diagramme commutatif exprimant la compatibilité de ξ_γ et β_γ avec l'isomorphisme d'échange de type $Ex_*^!$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Rig}^* g'_* i'^! & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Rig}^* i'^! g_* & \xrightarrow{\xi_i} & (i^{\text{an}})^! \mathbf{Rig}^* g_* \\ \beta_{g'} \downarrow \sim & & & & \sim \downarrow \beta_g \\ g_*^{\text{an}} \mathbf{Rig}^* i'^! & \xrightarrow{\xi_{i'}} & g_*^{\text{an}} (i'^{\text{an}})^! \mathbf{Rig}^* & \xrightarrow{\sim} & (i^{\text{an}})^! g_*^{\text{an}} \mathbf{Rig}^* . \end{array}$$

Ainsi, il suffit de montrer que $\xi_{i'}$ évalué en l'objet $\text{Sus}_T^p(B_{\text{cst}}) \in \text{Ob}(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X'))$ est inversible. En d'autres termes, on peut supposer que $Y \subset X$ est un diviseur à croisements normaux (le cas $Y = X$ étant trivial) et qu'on cherche à montrer que

$$\mathbf{Rig}^* i'^! \text{Sus}_T^p(B_{\text{cst}}) \longrightarrow (i^{\text{an}})^! \mathbf{Rig}^* \text{Sus}_T^p(B_{\text{cst}})$$

est inversible. Par une récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de Y , on se ramène au cas où Y est un sous-schéma régulier. D'autre part, la question étant locale pour la topologie de Nisnevich sur le schéma X , on peut supposer qu'il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ \mathring{o} & \xrightarrow{o} & \mathbb{A}_k^d \end{array}$$

avec o la section nulle et p un morphisme régulier. En utilisant le corollaire 1.A.4 (et le triangle de localité reliant $i^!$ et j_*) on déduit que $i^! \text{Sus}_T^p(B_{\text{cst}}) = i^! p^* \text{Sus}_T^p(B_{\text{cst}}) \simeq q^* o^! \text{Sus}_T^p(B_{\text{cst}})$. De même, on a $(i^{\text{an}})^! \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(B_{\text{cst}}) \simeq (q^{\text{an}})^* (o^{\text{an}})^! \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(B_{\text{cst}})$. On est donc ramené au cas où i est la section nulle d'un fibré vectoriel sur k . On retrouve alors l'isomorphisme de commutation avec l'équivalence de Thom inverse $\text{Th}^{-1}(k^{\oplus d})$. D'où le résultat.

Pour terminer, il reste à montrer que \mathbf{Rig}^* commute aux opérations $f^!$. On déduit par adjonction de δ_f un 2-morphisme $\xi_f : \mathbf{Rig}^* f^! \rightarrow (f^{\text{an}})^! \mathbf{Rig}^*$. Remarquons que pour une immersion fermée i , on retrouve bien le ξ_i ci-dessus. Pour vérifier que ξ_f est inversible, on factorise f par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse. On vient de traiter le cas des immersions fermées. Lorsque f est lisse, on utilise la formule $f^! = \text{Th}(\Omega_f) \circ f^*$ et on vérifie que ξ_f est la composition de α_f et l'isomorphisme de commutation avec l'équivalence de Thom inverse. C.Q.F.D.

1.4.5. Démonstration du théorème 1.3.38. — Soit $(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J})$ un diagramme de k° -schémas rigides. On a le diagramme suivant à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} (\overline{\mathcal{F}}_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (\overline{\mathcal{F}}_\sigma, \mathcal{J}) \\ (f_\eta, p_{\mathcal{J}}) \downarrow & & \downarrow (f, p_{\mathcal{J}}) & & \downarrow (f_\sigma, p_{\mathcal{J}}) \\ \mathrm{Spm}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(k^\circ) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\tilde{k}). \end{array}$$

On définit un foncteur composé

$$(1.134) \quad \bar{\chi}_f : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}_\eta) \xrightarrow{j^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}) \xrightarrow{i^*} \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}_\sigma) = \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}}_\sigma).$$

Étant donné un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} (\overline{\mathcal{G}}_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (\overline{\mathcal{G}}_\sigma, \mathcal{J}) \\ (g_\eta, \alpha) \downarrow & & \downarrow (g, \alpha) & & \downarrow (g_\sigma, \alpha) \\ (\overline{\mathcal{F}}_\eta, \mathcal{J}) & \xrightarrow{j} & (\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{J}) & \xleftarrow{i} & (\overline{\mathcal{F}}_\sigma, \mathcal{J}) \\ (f_\eta, p_{\mathcal{J}}) \downarrow & & \downarrow (f, p_{\mathcal{J}}) & & \downarrow (f_\sigma, p_{\mathcal{J}}) \\ \mathrm{Spm}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(k^\circ) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\tilde{k}), \end{array}$$

on déduit une transformation naturelle $\alpha_g : g_\sigma^* \bar{\chi}_f \rightarrow \bar{\chi}_{f \circ g} g_\sigma^*$. Les α_g vérifient une compatibilité évidente avec la composition des morphismes de diagrammes de k° -schémas rigides comme dans [3, Définition 3.1.1]. Lorsque g est lisse argument par argument, α_g est inversible par le théorème de changement de base par un morphisme lisse (qui découle du lemme 1.4.32). Par adjonction, on dispose aussi d'un morphisme $\beta_g : \bar{\chi}_f g_{\eta^*} \rightarrow g_{\sigma^*} \bar{\chi}_{g \circ f}$. On a la proposition suivante.

Proposition 1.4.41. — Soit $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ un k° -schéma formel affine. Alors $\bar{\chi}$ définit un système de spécialisation au sens de [3, Définition 3.1.1] de base

$$\eta = \mathrm{Spec}(A^\circ[1/\pi]) \xrightarrow{j} B = \mathrm{Spec}(A^\circ) \xleftarrow{i} \sigma = \mathrm{Spec}(\tilde{A})$$

dans le 2-foncteur homotopique stable $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}((-)^{\mathrm{an}}) : \mathrm{Sch}^{\mathrm{qp}}/A^\circ \rightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$. De même, $\bar{\chi} \circ \mathrm{Rig}^*$ définit un système de spécialisation sur $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$ restreint aux A° -schémas quasi-projectifs.

Démonstration. — En effet, $\bar{\chi}$ est le système de spécialisation canonique de base (B, j, i) (voir [3, Exemple 3.1.4]). Pour $\bar{\chi} \circ \mathrm{Rig}^*$, on utilise le corollaire 1.4.39 (appliqué à $\Theta = \mathrm{Rig}^*$). C.Q.F.D.

Le lemme ci-dessous est évident.

Lemme 1.4.42. — Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un diagramme de k° -schémas de type fini au-dessus d'un diagramme de k° -schémas formels affines. Notons $(f, p_{\mathcal{J}})$ la projection de $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ sur $\mathrm{Spec}(k^\circ)$. On a alors une transformation naturelle $\chi_f \rightarrow \bar{\chi}_{f^{\mathrm{an}}} \circ \mathrm{Rig}^*$ de foncteurs

entre $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}_\eta)$ et $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}_\sigma)$. La famille de ces transformations naturelles pour les k° -schémas quasi-projectifs définit un morphisme de systèmes de spécialisation.

On note également le résultat suivant qui servira plus tard.

Lemme 1.4.43. — Soit \overline{X} un k° -schéma rigide de morphisme structural $f : \overline{X} \rightarrow \mathrm{Spf}(k^\circ)$. Alors, le foncteur

$$\overline{\chi}_f : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{X}_\eta) \longrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\overline{X}_\sigma)$$

commute aux sommes infinies.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $j_* : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{X}_\eta) \rightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{X})$ commute aux sommes infinies. Il revient au même de montrer que son adjoint à gauche $j^* : \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{X}) \rightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{X}_\eta)$ préserve les objets compacts. Or, d'après le lemme 1.4.31, $\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{X})$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\mathrm{Sus}_{T^{\mathrm{an}}}^p(\overline{U} \otimes A_{\mathrm{cst}})$ avec $p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{E}$ et \overline{U} un \overline{X} -schéma rigide quasi-compact (i.e., tel que \overline{U}_η est une k -variété rigide quasi-compacte). L'image d'un tel générateur par j^* est donnée par $\mathrm{Sus}_{T^{\mathrm{an}}}^p((\overline{U} \widehat{\times}_{\overline{X}} \overline{X}_\eta) \otimes A_{\mathrm{cst}})$. Le résultat découle maintenant du fait que $\overline{U} \widehat{\times}_{\overline{X}} \overline{X}_\eta \simeq \overline{U}_\eta$ est une k -variété rigide quasi-compacte. C.Q.F.D.

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème 1.3.38. Rappelons d'abord son énoncé. Soit \mathcal{D} le diagramme de k° -schémas indexé par la catégorie des k -affinoïdes lisses et qui à $\mathrm{Spm}(A)$ associe $\mathrm{Spec}(A^\circ)$. On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_\eta & \xrightarrow{j} & \mathcal{D} & \xleftarrow{i} & \mathcal{D}_\sigma \\ \mathbf{u}_\eta \downarrow & & \downarrow \mathbf{u} & & \downarrow \mathbf{u}_\sigma \\ k & \xrightarrow{j} & k^\circ & \xleftarrow{i} & \tilde{k}. \end{array}$$

Étant donné un objet projectivement cofibrant \mathbf{E} de $\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/k, \mathfrak{M}))$, le théorème 1.3.38 affirme que dans la catégorie

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Spect}_{\mathrm{diag}^* T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmAfd}/k, \mathfrak{M}))),$$

le morphisme naturel

$$(1.135) \quad r_* \mathbf{Rig}^* \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Rdiag}^* \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E} = \mathbf{Rdiag}^* i_* \chi_u \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E}$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable, du moins lorsque $k = \tilde{k}((\pi))$ avec \tilde{k} de caractéristique nulle; on mentionnera explicitement l'endroit où cette hypothèse servira. (Rappelons que $r : \mathrm{SmAfd}/k \hookrightarrow \mathrm{SmRig}/k$ est l'inclusion évidente.)

On dispose d'un foncteur $\mathbf{Rig} : \mathrm{Sm}/\mathcal{D} \rightarrow \mathrm{SmRig}/\mathcal{D}^{\mathrm{an}}$ induit par le foncteur d'analytification. Remarquons que $\mathcal{D}^{\mathrm{an}}$ est simplement le diagramme de k° -schémas rigides qui à $X = \mathrm{Spm}(A)$ associe $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ considéré comme un k° -schéma rigide. On dispose d'un foncteur $\mathbf{Rig}^* : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}^{\mathrm{an}})$ et d'une transformation naturelle

$\chi_u \rightarrow \bar{\chi}_{u^{\text{an}}} \circ \text{Rig}^*$ (par le lemme 1.4.42). Considérons la composition de

$$(1.136) \quad \begin{aligned} r_* \text{Rig}^* \mathbf{E} &\longrightarrow \text{Rdiag}^* i_* \chi_u \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E} \\ &\longrightarrow \text{Rdiag}^* i_* \bar{\chi}_{u^{\text{an}}} \text{Rig}^* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E} \simeq \text{Rdiag}^* i_* \bar{\chi}_{u^{\text{an}}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \text{Rig}^* \mathbf{E}. \end{aligned}$$

On a la proposition suivante.

Proposition 1.4.44. — *La composition de (1.136) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable. De plus, le $\text{diag}^* T$ -spectre $\text{Rdiag}^* i_* \bar{\chi}_{u^{\text{an}}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \text{Rig}^* \mathbf{E}$ est stablement \mathbb{B}^1 -local (en tant qu'objet de $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spect}_{\text{diag}^* T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M})))$).*

Démonstration. — On dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} r_* \text{Rig}^* \mathbf{E} & \longrightarrow & \text{Rdiag}^* i_* \chi_u \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rdiag}^* i_* \bar{\chi}_{u^{\text{an}}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \text{Rig}^* \mathbf{E} & \xrightarrow{\sim} & \text{Rdiag}^* i_* \bar{\chi}_{u^{\text{an}}} \text{Rig}^* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E}. \end{array}$$

Il sera donc plus général de montrer que la composition de

$$(1.137) \quad r_* \mathbf{F} \simeq \text{diag}_\eta^* (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F} \longrightarrow \text{Rdiag}^* \text{R}i_*^{\text{an}} \text{L}(i^{\text{an}})^* \text{R}j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable de but stablement \mathbb{B}^1 -local pour tout objet projectivement cofibrant \mathbf{F} de $\mathbf{Spect}_{T^{\text{an}}}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$. (Dans (1.137), diag désigne le foncteur $\text{SmAfd}/k \rightarrow \text{SmRig}/\mathcal{D}^{\text{an}}$ qui à $X = \text{Spm}(A)$ associe le couple $(\text{Spf}(A^\circ), \text{Spm}(A))$ où $\text{Spf}(A^\circ)$ est considéré comme un k° -schéma rigide.)

On ne restreint pas la généralité en supposant que \mathbf{F} est stablement \mathbb{B}^1 -local. Sous cette hypothèse, nous allons montrer que (1.137) est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spect}_{\text{diag}^* T}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/k, \mathfrak{M})))$ ce qui entraînera simultanément les deux propriétés à démontrer.

Du corollaire 1.4.29, on déduit facilement que le foncteur $i_*^{\text{an}} (i^{\text{an}})^*$ est isomorphe à $\text{cpl}_* \text{cpl}^* \simeq \text{cpl}_* \text{P}_*$. On a donc un isomorphisme

$$\text{Rdiag}^* \text{Rcpl}_* \text{R}P_* \text{R}j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F} \simeq \text{Rdiag}^* \text{R}i_*^{\text{an}} \text{L}(i^{\text{an}})^* \text{R}j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}.$$

Comme $\mathcal{D}_\eta^{\text{an}}$ est lisse argument par argument sur k , $(\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}$ est encore stablement \mathbb{B}^1 -local. De plus, pour un k -affinoïde lisse $X = \text{Spm}(A)$, on a :

$$\begin{aligned} [\text{diag}^* \text{cpl}_* \text{P}_* j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}]_p(X) &= [\text{cpl}_* \text{P}_* j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}]_p(\text{Spf}(A^\circ), X) \\ &= [\text{P}_* j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}]_p(\text{Spf}(A^\circ), X) \\ &= [j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}]_p(\text{Spf}(A^\circ), X) \\ &= [(\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \mathbf{F}]_p(X, X) = \mathbf{F}_p(X). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que modulo ces identifications, le morphisme (1.137) est l'identité. C.Q.F.D.

Lemme 1.4.45. — *On suppose ici que $k = \tilde{k}((\pi))$ avec \tilde{k} de caractéristique nulle. Pour montrer le théorème 1.3.38, il suffit de montrer que le morphisme de systèmes de spécialisation $\chi \rightarrow \bar{\chi} \circ \text{Rig}^*$ dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-) : \text{Sch}^{\text{qp}}/k^\circ \rightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$ est inversible.*

Démonstration. — On suppose que le morphisme de systèmes de spécialisation de l'énoncé est inversible et on démontre le théorème 1.3.38. Par la proposition 1.4.44, il reste à voir que le morphisme

$$(1.138) \quad \mathbf{Rdiag}^* \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Rdiag}^* \mathbf{R}i_*^{\text{an}} \mathbf{L}(i^{\text{an}})^* \mathbf{R}j_*^{\text{an}} \mathbf{Rig}^* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E}$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable. On montrera plus précisément que c'est une équivalence faible de préfaisceaux niveau par niveau. La source de (1.138) est stablement \mathbb{B}^1 -fibrante par le théorème 1.3.37. Il en est de même du but de (1.138) par la proposition 1.4.44. Par le théorème 1.2.36, il suffira donc de montrer que

$$\begin{aligned} & [\mathbf{Rdiag}^* \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E}]_p(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) \\ & \longrightarrow [\mathbf{Rdiag}^* \mathbf{R}i_*^{\text{an}} \mathbf{L}(i^{\text{an}})^* \mathbf{R}j_*^{\text{an}} \mathbf{Rig}^* \mathbf{u}_\eta^* \mathbf{E}]_p(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) \end{aligned}$$

est une équivalence faible pour tout \tilde{k} -schéma lisse X , $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $p \in \mathbb{N}$. Il est donc plus général de montrer que la transformation naturelle évidente

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}_\eta(Q_r^{\text{rig}}(X, f))) & \xrightarrow{j_*} & \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}(Q_r^{\text{rig}}(X, f))) & \xrightarrow{i^*} & \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X) \\ \mathbf{Rig}^* \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) & \xrightarrow{j_*^{\text{an}}} & \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}^{\text{an}}(Q_r^{\text{rig}}(X, f))) & \xrightarrow{(i^{\text{an}})^*} & \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(X) \end{array}$$

devient inversible lorsqu'on l'applique au foncteur $(\mathbf{u}_\eta(Q_r^{\text{rig}}(X, f)))^*$. Reprenons les notations 1.3.10 et formons les diagrammes commutatifs à carrés cartésiens (à nil-immersions près)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_\eta(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) & \xrightarrow{j} & \mathcal{D}(Q_r^{\text{rig}}(X, f)) & \xleftarrow{i} & X \\ c_\eta \downarrow & & \downarrow c & & \parallel \\ Q_r^{\text{geo}}(X, f) & \xrightarrow{j} & Q_r^{\text{sch}}(X, f) & \xleftarrow{i} & X \\ h_\eta \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h_\sigma \\ k & \xrightarrow{j} & k^\circ & \xleftarrow{i} & \tilde{k}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Q_r^{\text{rig}}(X, f) & \xrightarrow{j^{\text{an}}} & Q_r^{\text{for}}(X, f) & \xleftarrow{i^{\text{an}}} & X \\ c'_\eta \downarrow & & \downarrow c' & & \parallel \\ Q_r^{\text{an}}(X, f) & \xrightarrow{j^{\text{an}}} & (Q_r^{\text{sch}}(X, f))^{\text{an}} & \xleftarrow{i^{\text{an}}} & X \\ h_\eta^{\text{an}} \downarrow & & \downarrow h^{\text{an}} & & \downarrow h_\sigma \\ k & \xrightarrow{j^{\text{an}}} & k^\circ & \xleftarrow{i^{\text{an}}} & \tilde{k}. \end{array}$$

Par le corollaire 1.A.5, on dispose d'un 2-isomorphisme $\chi_h = c_\sigma^* \chi_h \simeq \chi_{h \circ c} c_\eta^*$. De même, puisque c' est une immersion ouverte, on dispose d'un 2-isomorphisme $\bar{\chi}_{h^{\text{an}}} = c_\sigma'^* \bar{\chi}_{h^{\text{an}}} \simeq \bar{\chi}_{h^{\text{an}} \circ c'} c_\eta'^*$. On voit donc qu'il suffit de montrer que la transformation

naturelle évidente

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Q_r^{\text{geo}}(X, f)) & \xrightarrow{j^*} & \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Q_r^{\text{sch}}(X, f)) & \xrightarrow{i^*} & \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X) \\
 \text{Rig}^* \downarrow & & \Downarrow & & \parallel \\
 \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(Q_r^{\text{an}}(X, f)) & \xrightarrow{j_*^{\text{an}}} & \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}((Q_r^{\text{sch}}(X, f))^{\text{an}}) & \xrightarrow{(j^{\text{an}})^*} & \mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(X)
 \end{array}$$

est inversible. Le lemme est démontré.

C.Q.F.D.

On garde l'hypothèse $k = \tilde{k}((\pi))$ avec \tilde{k} de caractéristique nulle. Remarquons que les systèmes de spécialisation χ et $\bar{\chi} \circ \text{Rig}^*$ commutent aux sommes infinies. (Pour $\bar{\chi} \circ \text{Rig}^*$, on utilise le lemme 1.4.43 et le fait que Rig^* est un adjoint à gauche.) Ainsi, d'après [3, Théorème 3.3.45], pour vérifier que le morphisme de systèmes de spécialisation $\chi \rightarrow \bar{\chi} \circ \text{Rig}^*$ dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-) : \text{Sch}^{\text{qp}}/k^\circ \rightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{R}$ est inversible, il suffit de le vérifier après évaluation en $\text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}}) \in \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Q_r^{\text{sch}}(\tilde{k}[U, U^{-1}], U)_\eta)$ pour $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $B \in \mathcal{E}$. On vérifiera ceci dans le lemme ci-dessous et son corollaire. Vu le lemme 1.4.45, cela terminera la preuve du théorème 1.3.38.

Lemme 1.4.46. — *On suppose que $k = \tilde{k}((\pi))$ avec \tilde{k} de caractéristique nulle. Soient X un \tilde{k} -schéma affine et lisse, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$ et $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Considérons le diagramme à carrés cartésiens (à nil-immersions près)*

$$\begin{array}{ccccc}
 Q_r^{\text{geo}}(X, f) & \xrightarrow{j} & Q_r^{\text{sch}}(X, f) & \xleftarrow{i} & X \\
 h_\eta \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h_\sigma \\
 k & \xrightarrow{j} & k^\circ & \xleftarrow{i} & \tilde{k}.
 \end{array}$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{E}$, le morphisme suivant est inversible dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$:

$$[\chi_h \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})]_p(X) \longrightarrow [\bar{\chi}_{h^{\text{an}}} \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})]_p(X).$$

Démonstration. — On reprend notre diagramme de k° -schémas \mathcal{D} et son analytifié \mathcal{D}^{an} . Par la proposition 1.4.44, la composition de

$$\begin{aligned}
 (1.139) \quad r_* \text{Rig}^* \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}}) &\longrightarrow \text{Rdiag}^* \text{Ri}_* \text{Li}^* \text{Rj}_* \mathbf{u}_\eta^* \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}}) \\
 &\longrightarrow \text{Rdiag}^* \text{Ri}_*^{\text{an}} \text{L}(i^{\text{an}})^* \text{Rj}_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})
 \end{aligned}$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable. Soit $A \in \mathcal{E}$ et posons

$$M = \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^p(Q_r^{\text{rig}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}).$$

En utilisant les 2-isomorphismes $\chi_h = c_\sigma^* \chi_h \simeq \chi_{h \circ c} c_\eta^*$ et $\bar{\chi}_{h^{\text{an}}} = c_\sigma'^* \bar{\chi}_{h^{\text{an}}} \simeq \bar{\chi}_{h^{\text{an}} \circ c'} c_\eta'^*$ (voir la preuve du Lemme 1.4.45), on a les identifications :

$$\begin{aligned} & \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}(M, \mathbf{Rdiag}^* \mathbf{R}i_* \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{u}_\eta^* \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})) \\ & \simeq \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, [\chi_h \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})]_p(X)), \\ & \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}(M, \mathbf{Rdiag}^* \mathbf{R}i_*^{\text{an}} \mathbf{L}(i^{\text{an}})^* \mathbf{R}j_*^{\text{an}} (\mathbf{u}_\eta^{\text{an}})^* \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})) \\ & \simeq \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, [\bar{\chi}_{h^{\text{an}}} \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})]_p(X)). \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant $\text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}(M, -)$ à (1.139), on obtient une suite de morphismes dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$:

$$(1.140) \quad \begin{array}{c} \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}(M, \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, [\chi_h \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})]_p(X)) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, [\bar{\chi}_{h^{\text{an}}} \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})]_p(X)) \end{array}$$

dont la composition est un isomorphisme. Pour terminer, il suffit de montrer que le morphisme

$$\text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}(M, \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, [\chi_h \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})]_p(X))$$

admet une section. Or, la composition de

$$\begin{array}{c} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}_{\mathfrak{m}, \bar{k}})}(\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}), \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)}(M, \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})) \\ \downarrow \\ \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, [\chi_h \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})]_p(X)) \end{array}$$

s'identifie au morphisme de la proposition 1.3.34 qui est donc un isomorphisme. (Strictement parlant, il faut travailler un peu plus pour conclure. D'abord, il faut utiliser le type de réduction faite juste avant le lemme 1.3.33 pour se convaincre que la proposition 1.3.34 reste vraie si on remplace « $Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}}$ » par « $\text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes A_{\text{cst}})$ ». Ensuite il faut utiliser le corollaire 1.A.5 pour faire le lien entre le système de spécialisation canonique sur $\mathbb{A}_{\bar{k}}^1$ (utilisé dans la proposition 1.3.34) et le système de spécialisation canonique sur $\text{Spec}(k^\circ)$ (utilisé dans l'énoncé du lemme que nous sommes entrain de démontrer). Ces détails seront laissés au lecteur.) C.Q.F.D.

Corollaire 1.4.47. — *On garde les hypothèses et les notations du lemme 1.4.46. Alors, le morphisme canonique $\chi_h \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}}) \rightarrow \bar{\chi}_{h^{\text{an}}} \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})$ est inversible.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le morphisme

$$(1.141) \quad [\chi_h \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})]_p(Y) \longrightarrow [\bar{\chi}_{h^{\text{an}}} \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})]_p(Y)$$

est inversible pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout X -schéma affine et lisse Y . Appelons

$$g : Q_r^{\text{sch}}(Y, f) \longrightarrow Q_r^{\text{sch}}(X, f)$$

le morphisme déduit du morphisme structural du X -schéma Y . Puisque g est lisse, le morphisme (1.141) s'identifie à

$$[\chi_{h \circ g} \text{Sus}_T^0(B_{\text{cst}})]_p(Y) \longrightarrow [\bar{\chi}_{(h \circ g)^{\text{an}}} \text{Sus}_{T^{\text{an}}}^0(B_{\text{cst}})]_p(Y).$$

On peut maintenant appliquer le lemme 1.4.46 pour conclure.

C.Q.F.D.

1.A. Appendice : complément sur les opérations de Grothendieck dans le monde motivique

Le but de cet appendice est d'étendre certaines propriétés des opérations f^* pour des morphismes f qui ne sont pas supposés de type fini. On fixe une catégorie de coefficients \mathfrak{M} (voir la définition 1.2.31).

Étant donné un schéma X , la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(X)$ est la catégorie homotopique de $\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M})$ munie de sa structure projective \mathbb{A}^1 -locale. Rappelons que la structure \mathbb{A}^1 -locale est obtenue en localisant la structure Nis-locale suivant les flèches $\mathbb{A}_U^1 \otimes A_{\text{cst}} \rightarrow U \otimes A_{\text{cst}}$ avec $A \in \mathcal{E}$ et U un X -schéma lisse (voir [3, Définition 4.5.12]). De même lorsque \mathfrak{M} est monoïdale symétrique, la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ est la catégorie homotopique de $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M}))$ munie de sa structure projective \mathbb{A}^1 -locale stable (voir [3, Définition 4.5.21]). Étant donné un morphisme de schémas $f : Y \rightarrow X$ on dispose de deux adjonctions de Quillen (voir [3, Théorèmes 4.5.14 et 4.5.23])

$$(f^*, f_*) : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/Y, \mathfrak{M}),$$

$$(f^*, f_*) : \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/Y, \mathfrak{M}))$$

qui induisent des couples de foncteurs adjoints $(L f^*, R f_*)$ de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(X)$ et $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ vers $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(Y)$ et $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y)$ respectivement. Pour les énoncés portant uniquement sur les catégories homotopiques, on notera simplement f^* et f_* à la place de $L f^*$ et $R f_*$. Contrairement aux opérations f_{\sharp} , $f_!$ et $f^!$, les foncteurs f^* et f_* existent sans hypothèse de finitude (ou de lissité) sur le morphisme de schémas f . Les résultats de cet appendice reposent sur la proposition suivante.

Proposition 1.A.1. — *Soient I une petite catégorie cofiltrante et $(X_i)_{i \in I}$ un pro-objet dans la catégorie des schémas. On suppose que les X_i sont noethériens, de dimension de Krull finie et que les morphismes $f_{j \rightarrow i} : X_j \rightarrow X_i$ sont affines pour toutes les flèches $j \rightarrow i$ dans I . En particulier, la limite projective $X = \text{Lim}_{i \in I} X_i$ existe dans la catégorie des schémas. On supposera alors que X est noethérien, de dimension de Krull finie et on notera $f_{\infty \rightarrow i} : X \rightarrow X_i$ le morphisme canonique pour $i \in I$.*

Soient $i_0 \in I$, et M et N deux objets de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_{i_0})$. Lorsque M est compact, l'homomorphisme

$$\operatorname{Colim}_{j \in I/i_0} \operatorname{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_j)}(f_{j \rightarrow i_0}^* M, f_{j \rightarrow i_0}^* N) \longrightarrow \operatorname{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(f_{\infty \rightarrow i_0}^* M, f_{\infty \rightarrow i_0}^* N)$$

est bijectif. L'énoncé correspondant pour les catégories effectives $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(-)$ est également vrai.

Démonstration. — On traite uniquement le cas stable (le cas effectif étant plus simple). Le foncteur d'oubli $I/i_0 \rightarrow I$ est cofinal de sorte que $X = \operatorname{Lim}_{j \in I/i_0} X_j$. Ainsi, on peut remplacer I par I/i_0 et supposer que I possède un objet final $o \in I$, et que M et N sont dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_o)$. Étant donné que M est compact et que les colimites filtrantes sont exactes dans la catégorie des groupes abéliens, on se ramène immédiatement au cas où $M = \operatorname{Sus}_T^p(Y_o \otimes A_{\text{cst}})$ avec Y_o un X_o -schéma lisse, $p \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{E}$. On choisit enfin un T -spectre symétrique projectivement cofibrant $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui représente N , i.e., qui lui est isomorphe dans la catégorie homotopique. On divise l'argument en plusieurs parties.

Partie A : On peut considérer le pro-schéma $(X_i)_{i \in I}$ comme un diagramme de schémas (\tilde{X}, I) (où l'on pose $\tilde{X}(i) = X_i$). On note $\pi : (\tilde{X}, I) \rightarrow X_o$ la projection évidente. On a alors un π^*T -spectre symétrique $\pi^*\mathbf{N}$ qui est un objet de $\mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\operatorname{Sm}/(\tilde{X}, I), \mathfrak{M}))$. Pour $i \in I$, on a $i^*(\pi^*\mathbf{N}) = f_{i \rightarrow o}^*\mathbf{N}$ (où l'on note par i le morphisme de diagrammes de schémas $X_i \rightarrow (\tilde{X}, I)$ qui est l'identité sur X_i).

On choisit maintenant une cofibration projective stablement \mathbb{A}^1 -triviale $\pi^*\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ avec \mathbf{R} stablement \mathbb{A}^1 -fibrant. Pour tout $i \in I$, le morphisme évident $f_{i \rightarrow o}^*\mathbf{N} \rightarrow i^*\mathbf{R}$ est une cofibration stablement \mathbb{A}^1 -triviale et $i^*\mathbf{R}$ est stablement \mathbb{A}^1 -fibrant. En particulier, on a des isomorphismes

$$(1.142) \quad \begin{aligned} \operatorname{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_i)}(f_{i \rightarrow o}^* M, f_{i \rightarrow o}^* N) &\simeq \pi_0(\operatorname{Sus}_T^p((Y_o \times_{X_o} X_i) \otimes A_{\text{cst}}), i^*\mathbf{R}) \\ &\simeq \pi_0(A, i^*\mathbf{R}_p(Y_o \times_{X_o} X_i)). \end{aligned}$$

D'autre part, pour une flèche $j \rightarrow i$ dans I , on a un morphisme de spectres $f_{j \rightarrow i}^* i^*\mathbf{R} \rightarrow j^*\mathbf{R}$. C'est une équivalence \mathbb{A}^1 -locale stable comme il découle immédiatement de la propriété « 2 de 3 » appliquée à

$$\begin{array}{ccc} & \text{w.e.} & \\ & \curvearrowright & \\ f_{j \rightarrow o}^* \mathbf{N} & \xrightarrow{\text{w.e.}} & f_{j \rightarrow i}^* i^* \mathbf{R} \longrightarrow j^* \mathbf{R}. \end{array}$$

(Pour voir que $f_{j \rightarrow o}^* \mathbf{N} = f_{j \rightarrow i}^* f_{i \rightarrow o}^* \mathbf{N} \rightarrow f_{j \rightarrow i}^* i^* \mathbf{R}$ est une équivalence \mathbb{A}^1 -locale stable, on utilise le fait que $f_{j \rightarrow i}^*$ est un foncteur de Quillen à gauche et qu'il préserve donc

les équivalences \mathbb{A}^1 -locales stables entre T -spectres symétriques projectivement cofibrants.) Pour toute flèche $j \rightarrow i$ dans I , on dispose d'un carré commutatif

$$(1.143) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_i)}(f_{i \rightarrow o}^* M, f_{i \rightarrow o}^* N) & \xleftarrow{\sim} & \pi_0(A, i^* \mathbf{R}_p(Y_o \times_{X_o} X_i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_j)}(f_{j \rightarrow o}^* M, f_{j \rightarrow o}^* N) & \xleftarrow{\sim} & \pi_0(A, j^* \mathbf{R}_p(Y_o \times_{X_o} X_j)). \end{array}$$

Partie B : Considérons maintenant le T -spectre symétrique $\widehat{\mathbf{R}} = \mathrm{Colim}_{i \in I} f_{\infty \rightarrow i}^* i^* \mathbf{R}$. Montrons que le morphisme évident $f_{\infty \rightarrow o}^* \mathbf{N} \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}$ est une équivalence \mathbb{A}^1 -locale stable. On sait que le morphisme $f_{\infty \rightarrow o}^* \mathbf{N} \rightarrow f_{\infty \rightarrow i}^* i^* \mathbf{R}$ est une cofibration stablement \mathbb{A}^1 -triviale puisque $f_{\infty \rightarrow i}^*$ est un foncteur de Quillen à gauche. Il suffit donc de montrer que le foncteur

$$\mathrm{Colim}_I : \underline{\mathrm{HOM}}(I, \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/X, \mathfrak{M}))) \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/X, \mathfrak{M}))$$

préserve les équivalences \mathbb{A}^1 -locales stables. Étant donné que dans \mathfrak{M} , une colimite filtrante d'équivalences faibles est une équivalence faible (voir la définition 1.2.31), on déduit immédiatement que Colim_I préserve les équivalences faibles de préfaisceaux niveau par niveau. Il suffit donc de montrer que Colim_I préserve les équivalences \mathbb{A}^1 -locales stables entre objets projectivement cofibrants. Ceci découle du fait que Colim_I est un foncteur de Quillen à gauche (lorsque $\underline{\mathrm{HOM}}(I, \mathbf{Spect}_T^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/X, \mathfrak{M})))$ est munie de sa structure projective déduite de la structure projective \mathbb{A}^1 -locale stable).

Partie C : Dans les trois parties qui suivent, on montrera que $\widehat{\mathbf{R}}$ est un T -spectre projectivement stablement \mathbb{A}^1 -fibrant. Pour ce faire, nous aurons besoin de la formule (1.144) ci-dessous qui sera démontrée dans cette partie.

Soient $p \in \mathbb{N}$ et Z un X -schéma lisse. Il existe (voir le lemme 1.A.2 ci-dessous) $i \in I$ et Z_i un X_i -schéma lisse tels que $Z = Z_i \times_{X_i} X$. On a par définition,

$$\widehat{\mathbf{R}}_p(Z) = \mathrm{Colim}_{j \in I, Z \rightarrow U \in Z \setminus (\mathrm{Sm}/X_j)} \mathbf{R}_p(U, j).$$

Étant donné un morphisme de X_j -schémas $a : Z \rightarrow U$, il existe $l \in I$ et une factorisation

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ & \curvearrowright & \\ Z & \longrightarrow & Z_i \times_{X_i} X_l \longrightarrow U. \end{array}$$

Il vient que le foncteur qui associe à $j \in I/i$ le couple $(j, Z \rightarrow Z_i \times_{X_i} X_j)$ est cofinal. On en déduit la formule

$$(1.144) \quad \widehat{\mathbf{R}}_p(Z) = \mathrm{Colim}_{j \in I/i} j^* \mathbf{R}_p(Z_{j \rightarrow i})$$

avec $Z_{j \rightarrow i} = Z_i \times_{X_i} X_j$.

Partie D : Ici on vérifie que les préfaisceaux $\widehat{\mathbf{R}}_p$ sont projectivement Nis-fibrants.

Étant donné que les objets fibrants de \mathfrak{M} sont stables par colimites filtrantes, la formule (1.144) montre que les préfaisceaux $\widehat{\mathbf{R}}_p$ sont projectivement fibrants. Il reste donc à montrer qu'ils sont Nis-locaux. Comme X est noethérien de dimension de Krull finie, il suffira de vérifier la propriété de Brown-Gersten pour $\widehat{\mathbf{R}}_p$. Soit $Z = Z_i \times_{X_i} X$ un X -schéma lisse comme ci-dessus. Soit

$$\begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & Z \end{array}$$

un carré Nisnevich. Par le lemme 1.A.2 ci-dessous, quitte à raffiner l'indice i , on peut supposer que ce carré provient par changement de base suivant $f_{\infty \rightarrow i}$ d'un carré Nisnevich

$$\begin{array}{ccc} V'_i & \longrightarrow & Z'_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_i & \longrightarrow & Z_i. \end{array}$$

Les carrés

$$\begin{array}{ccc} j^* \mathbf{R}_p(Z_{j \rightarrow i}) & \longrightarrow & j^* \mathbf{R}_p(Z'_{j \rightarrow i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j^* \mathbf{R}_p(V_{j \rightarrow i}) & \longrightarrow & j^* \mathbf{R}_p(V'_{j \rightarrow i}) \end{array}$$

sont homotopiquement cartésiens pour tout $j \in I/i$. Or, dans une catégorie de coefficients, une colimite filtrante de carrés homotopiquement cartésiens est un carré homotopiquement cartésien. La formule (1.144) montre alors que le carré

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{R}}_p(Z) & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{R}}_p(Z') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathbf{R}}_p(V) & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{R}}_p(V') \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Partie E : Vérifions que $\widehat{\mathbf{R}}_p$ est \mathbb{A}^1 -local. Soit $Z = Z_i \times_{X_i} X$ un X -schéma lisse. Pour tout $j \in I/i$, on a une équivalence faible $j^* \mathbf{R}_p(Z_{j \rightarrow i}) \rightarrow j^* \mathbf{R}_p(\mathbb{A}^1_{Z_{j \rightarrow i}})$. En utilisant (1.144) et la stabilité des équivalences faibles par colimites filtrantes, on déduit que $\widehat{\mathbf{R}}_p(Z) \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}_p(\mathbb{A}^1_Z)$ est une équivalence faible.

Pour terminer la preuve que $\widehat{\mathbf{R}}$ est projectivement stablement \mathbb{A}^1 -fibrant, il reste à vérifier que $\widehat{\mathbf{R}}$ est un Ω_T -spectre. Soit $Z = Z_i \times_{X_i} X$ un X -schéma lisse. Pour tout $j \in I/i$, le morphisme

$$(1.145) \quad j^* \mathbf{R}_p(Z_{j \rightarrow i}) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(T, j^* \mathbf{R}_{p+1})(Z_{j \rightarrow i})$$

est une équivalence faible. Par le choix de T , on a un triangle distingué dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$:

$$\underline{\mathcal{H}om}(T, j^* \mathbf{R}_{p+1})(Z_{j \rightarrow i}) \longrightarrow j^* \mathbf{R}_{p+1}(\mathbb{A}^1_{Z_{j \rightarrow i}}) \longrightarrow j^* \mathbf{R}_{p+1}(\mathbb{A}^1_{Z_{j \rightarrow i}} - o_{Z_{j \rightarrow i}}) \longrightarrow .$$

En passant à la colimite et en utilisant (1.144), on trouve le triangle distingué

$$\operatorname{Colim}_{j \in I/i} \underline{\mathcal{H}om}(T, j^* \mathbf{R}_{p+1})(Z_{j \rightarrow i}) \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}}_{p+1}(\mathbb{A}_Z^1) \longrightarrow \widehat{\mathbf{R}}_{p+1}(\mathbb{A}_Z^1 - o_Z) \longrightarrow .$$

On a donc un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Colim}_{j \in I/i} \underline{\mathcal{H}om}(T, j^* \mathbf{R}_{p+1})(Z_{j \rightarrow i}) \simeq \underline{\mathcal{H}om}(T, \widehat{\mathbf{R}}_{p+1})(Z).$$

Ainsi, en passant à la colimite dans (1.145), on trouve que $\widehat{\mathbf{R}}_p(Z) \rightarrow \underline{\mathcal{H}om}(T, \widehat{\mathbf{R}}_p)(Z)$ est une équivalence faible.

Partie F : Il est maintenant aisé de prouver la proposition. En effet, puisque $\widehat{\mathbf{R}}$ est projectivement stablement \mathbb{A}^1 -fibrant, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)}(f_{\infty \rightarrow o}^* M, f_{\infty \rightarrow o}^* N) &\simeq \pi_0(\operatorname{Sus}_T^p((Y_o \times_{X_o} X) \otimes A_{\text{cst}}), \widehat{\mathbf{R}}) \\ &\simeq \pi_0(A, \widehat{\mathbf{R}}_p(Y_o \times_{X_o} X)). \end{aligned}$$

Mais par (1.144), on a

$$\pi_0(A, \widehat{\mathbf{R}}_p(Y_o \times_{X_o} X)) \simeq \operatorname{Colim}_{i \in I} \pi_0(A, i^* \mathbf{R}_p(Y_o \times_{X_o} X_i)).$$

Par (1.142), le i -ème terme de la colimite ci-dessus s'identifie à

$$\operatorname{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_i)}(f_{i \rightarrow o}^* M, f_{i \rightarrow o}^* N).$$

La proposition est démontrée. C.Q.F.D.

Lemme 1.A.2. — Soit $(X_i)_{i \in I}$ un pro-schéma avec X_i quasi-compacts et les morphismes de transitions $f_{j \rightarrow i} : X_j \rightarrow X_i$ affines pour toute flèche $j \rightarrow i$ dans I . Notons $X = \operatorname{Lim}_{i \in I} X_i$. Soit Y un X -schéma de présentation finie. Il existe alors $i \in I$ et un X_i -schéma de présentation finie Y_i tels que $Y \simeq Y_i \times_{X_i} X$. De plus, si Y est lisse (resp. étale), on peut trouver $j \in I/i$ tel que $Y_i \times_{X_i} X_j$ est lisse (resp. étale).

Démonstration. — La première assertion est démontrée dans [19, Théorème 8.8.2]. Montrons la seconde assertion (on traitera uniquement le cas non respé). On peut supposer que les X_i sont affines. Étant donné un recouvrement Zariski de Y , on peut supposer qu'il provient d'un recouvrement Zariski de Y_i (quitte à raffiner l'indice i). Ainsi, la question est locale et on peut supposer que $Y = (X[t_1, \dots, t_n, s]/P(s))[1/P'(s)]$ avec P un polynôme unitaire à coefficients dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)[t_1, \dots, t_n]$. Quitte à raffiner i , on peut supposer que P provient d'un polynôme P_i à coefficients dans $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})[t_1, \dots, t_n]$. Par [19, Théorème 8.8.2] on peut supposer que $Y_i = (X_i[t_1, \dots, t_n, s]/P_i(s))[1/P_i'(s)]$ (quitte à raffiner i). Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

On dérive maintenant quelques corollaires utiles de la proposition 1.A.1.

Corollaire 1.A.3. — Gardons les notations de la proposition 1.A.1. Soit M un objet compact de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ (resp. $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(X)$). Il existe alors $i \in I$ et un objet compact M_0 de

$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_i)$ (resp. $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(X_i)$) tels que M soit isomorphe à $f_{\infty \rightarrow i}^* M_0$. De plus, la sous-catégorie $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{ct}}(X)$ (resp. $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff, ct}}(X)$) des objets compacts (appelés aussi constructibles dans [2, 3]) est équivalente à la 2-colimite des $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{ct}}(X_i)$ (resp. $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff, ct}}(X_i)$).

Démonstration. — La seconde assertion découle formellement de la première et de la proposition 1.A.1. On montrera donc uniquement la première assertion et on se restreint au cas stable. Tout objet compact M est un facteur direct d'un objet obtenu à partir de l'objet nul par une succession finie de cônes de morphismes

$$\text{Sus}_T^p(Y \otimes A_{\text{cst}}) \longrightarrow \dagger.$$

On raisonnera alors par récurrence sur le nombre d'étapes nécessaires. On peut donc supposer que M est le cône d'un morphisme

$$(1.146) \quad \text{Sus}_T^p(Y \otimes A_{\text{cst}}) \longrightarrow f_{\infty \rightarrow i}^* N.$$

Par le lemme 1.A.2, on peut supposer que $Y = Y_i \times_{X_i} X$ (quitte à raffiner i). Par la proposition 1.A.1, on peut supposer que (1.146) provient par application de $f_{\infty \rightarrow i}^*$ d'un morphisme

$$\text{Sus}_T^p(Y_i \otimes A_{\text{cst}}) \longrightarrow N.$$

On prend alors pour M_0 le cône de ce morphisme.

C.Q.F.D.

Corollaire 1.A.4. — *Soit un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

de schémas noethériens de dimension de Krull finie. On suppose que g est régulier. Alors le morphisme de changement de base $g^* f_* \rightarrow f'_* g'^*$ (entre opérations sur $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$ ou $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(-)$) est inversible.

Démonstration. — On traite uniquement le cas stable. Par localité pour la topologie de Zariski, on se ramène au cas où Y et X sont affines. Étant donné que $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y)$ est compactement engendrée, il suffit de montrer que pour tout $M \in \text{Ob}(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y))$ compact et tout $N \in \text{Ob}(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X'))$, l'homomorphisme suivant est inversible :

$$(1.147) \quad \begin{aligned} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y)}(M, g^* f_* N) &\longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y)}(M, f'_* g'^* N) \\ &\simeq \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y')}(f'^* M, g'^* N). \end{aligned}$$

Par le théorème de Popescu (voir [34, 35]), Y est la limite projective cofiltrante de X -schémas affines et lisses : $Y = \text{Lim}_{i \in I} Y_i$. On forme les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} Y'_i & \xrightarrow{g'_i} & X' \\ f'_i \downarrow & & \downarrow f \\ Y_i & \xrightarrow{g_i} & X. \end{array}$$

Étant donné que M est compact, il existe (par le corollaire 1.A.3) $i_0 \in I$ et $M_0 \in \text{Ob}(\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{ct}}(Y_{i_0}))$ tels que $M \simeq g_{\infty \rightarrow i_0}^* M_0$ (où l'on note $g_{\infty \rightarrow i} : X \rightarrow X_i$ le morphisme évident). Par la proposition 1.A.1, on peut identifier l'homomorphisme (1.147) avec

$$\text{Colim}_{j \in I/i_0} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y_j)}(g_{j \rightarrow i_0}^* M_0, g_j^* f_* N) \longrightarrow \text{Colim}_{j \in I/i_0} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y_j)}(g_{j \rightarrow i_0}^* M_0, f_{j*} g_j'^* N).$$

En effet, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Colim}_{j \in I/i_0} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y_j)}(f_j'^* g_{j \rightarrow i_0}^* M_0, g_j'^* N) & \xrightarrow{\sim} & \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y')} (f'^* M, g'^* N) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Colim}_{j \in I/i_0} \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y_j)}(g_{j \rightarrow i_0}^* M_0, f_{j*}' g_j'^* N) & \longrightarrow & \text{hom}_{\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(Y')} (M, f'_* g'^* N) \end{array}$$

avec les flèches verticales inversibles. Le résultat découle maintenant du théorème de changement de base par un morphisme lisse. C.Q.F.D.

Un cas particulier du corollaire ci-dessus a été utilisé à plusieurs reprises dans ce chapitre.

Corollaire 1.A.5. — *Soient k un corps et π une indéterminée. On note $B = \text{Spec}(k[\pi])$, $\eta = \text{Spec}(k[\pi, \pi^{-1}]) \subset B$ et $\sigma = B - \eta = \text{Spec}(k)$. Soient A une $k[\pi]$ -algèbre de type fini et $\hat{A} = A//(\pi)$ son complété π -adique. On note $X = \text{Spec}(A)$ et $\hat{X} = \text{Spec}(\hat{A})$. On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens*

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X}_\eta & \xrightarrow{\hat{j}} & \hat{X} & \xleftarrow{\hat{i}} & \hat{X}_\sigma \\ c_\eta \downarrow & & \downarrow c & & \parallel \\ X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \\ f_\eta \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f_\sigma \\ \hat{\eta} & \longrightarrow & B & \longleftarrow & \hat{\sigma} \end{array}$$

On note $\hat{f} = f \circ c$. On pose $\chi_f = i^* j_*$ et $\chi_{\hat{f}} = \hat{i}^* \hat{j}_*$ (voir [3, Exemple 3.1.4]). Alors, le morphisme de changement de base

$$\chi_f \longrightarrow \chi_{\hat{f}} c_\eta^*$$

est inversible.

On peut utiliser les résultats précédents pour étendre le formalisme des cycles évanescents au cas où la base est un anneau de valuation discrète, complet et d'égale caractéristique nulle.

Soient \tilde{k} un corps de caractéristique nulle, $k^\circ = \tilde{k}[[\pi]]$ et $k = \tilde{k}((\pi))$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$ un morphisme de schémas (non nécessairement de type fini). Dans [3, Définition 3.5.6] nous avons défini les foncteurs « motif proche » Ψ_f lorsque f est quasi-projectif. Cette définition admet encore un sens pour f quelconque. On la rappelle brièvement ici ; voir aussi l'étape 3 de la preuve de la scholie 1.3.26 donnée dans le paragraphe 1.3.4. On

dispose d'un diagramme de \tilde{k} -schémas $(\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$ (avec \mathbb{N}^\times ordonné par l'opposée de la relation de divisibilité) et d'un morphisme $(\theta^\mathcal{R}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{G}_{m, \tilde{k}}$. On note \mathcal{R}_f le « pull-back » de \mathcal{R} suivant $f_\eta : X_\eta \rightarrow \mathbb{G}_{m, \tilde{k}}$ et $(\theta_f^\mathcal{R}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})$ sa projection sur X_η . On a alors

$$\Psi_f(-) = \mathbf{L}p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times} \mathbf{L}i^* \mathbf{R}j_* \mathbf{R}(\theta_f^\mathcal{R})_* (\theta_f^\mathcal{R})^* (p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^*(-).$$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.A.6. — Soit $f : X = \text{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ un \mathbb{A}_k^1 -schéma affine de type fini. On note $\hat{A} = A//(\pi)$ et $\hat{X} = \text{Spec}(\hat{A})$. On forme le diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \hat{X}_\eta & \xrightarrow{\hat{j}} & \hat{X} & \xleftarrow{\hat{i}} & X_\sigma \\ c_\eta \downarrow & & \downarrow c & & \parallel \\ \hat{X}_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \end{array}$$

On pose aussi $\hat{f} = f \circ c$. Alors le morphisme $\Psi_f \rightarrow \Psi_{\hat{f}} c_\eta^*$ est inversible.

Démonstration. — On décompose le morphisme en question en une composition de morphismes d'échange. Le résultat découle alors immédiatement du corollaire 1.A.4.

C.Q.F.D.

Remarque 1.A.7. — On notera $\Psi_\pi : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(k) \rightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$ le foncteur « motif proche » déduit du morphisme $\pi : \text{Spec}(k^\circ) \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. On a par la proposition ci-dessus $\Psi_\pi \bullet \simeq \bullet$ et plus généralement $\Psi_{\pi^{1/n}} \bullet \simeq \bullet^{\oplus n}$. À partir de là, on peut reprendre les arguments de [3, Section 3.5] et montrer que Ψ_π préserve les objets compacts, qu'il est monoïdal et qu'il commute à la dualité. On ne reprendra pas ici l'étude menée dans *loc. cit.* étant donné que ces propriétés résultent immédiatement de la scholie 1.3.26.

CHAPITRE 2

MOTIFS DES VARIÉTÉS RIGIDES ANALYTIQUES II : ÉTUDE COHOMOLOGIQUE DES PRÉFAISCEAUX AVEC TRANSFERTS, SURCONVERGENTS ET INVARIANTS PAR HOMOTOPIE

Introduction. — Dans ce chapitre, on verra que la théorie des préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie de Voevodsky admet un analogue tout aussi riche en géométrie rigide. Après quelques rappels de géométrie rigide, notamment autour de la notion de surconvergence, on définit les correspondances finies entre variétés rigides lisses et on introduit les préfaisceaux avec transferts. Un paragraphe est ensuite consacré à la notion de fibre d'un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie. Cette notion est propre à la géométrie rigide et jouera un rôle technique important dans la preuve du résultat principal du chapitre.

Suivant l'approche de Voevodsky en géométrie algébrique, on fait le lien entre les groupes de correspondances finies à valeurs dans une courbe lisse et le groupe de Picard relatif de cette même courbe. Ceci nous permettra de construire des correspondances finies définies à homotopie près fort utiles dans l'étude cohomologique des préfaisceaux avec transferts surconvergentes et invariants par homotopie. En effet, dans la quatrième section de ce chapitre, ces correspondances finies seront utilisées pour montrer que la restriction d'un tel préfaisceau au petit site des ouverts de \mathbb{B}_k^1 est un faisceau acyclique pour la topologie des recouvrements admissibles. La preuve de ce résultat est en partie inspirée de la preuve du résultat correspondant en géométrie algébrique. Toutefois, étant donné que la topologie de la boule de Tate \mathbb{B}_k^1 est plus complexe que celle de la droite affine \mathbb{A}_k^1 , la preuve est nécessairement plus compliquée. Notons également que l'hypothèse de surconvergence est cruciale et même nécessaire pour la validité dudit résultat.

Dans le paragraphe 2.4.2, on démontre le résultat principal de ce chapitre, à savoir l'invariance par homotopie de la cohomologie d'un préfaisceau avec transferts surconvergent et invariant par homotopie. Ici, notre approche diverge nettement de celle de Voevodsky. On utilisera uniquement des propriétés spéciales à la topologie des recouvrements admissibles ainsi que les résultats techniques du paragraphe 2.2.5 pour ramener le problème à l'acyclicité au-dessus des boules de Tate. Notons également

que notre résultat principal est valable pour des préfaisceaux avec transferts surconvergens et invariants par homotopie sur les variétés rigides lisses au-dessus d'une base lisse quelconque. Ceci est curieux puisqu'en géométrie algébrique on construit facilement des exemples de préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie sur les schémas lisses au-dessus d'une courbe lisse mais dont la cohomologie n'est pas invariante par homotopie.

Dans la dernière section, on introduit la catégorie triangulée $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k)$ des motifs des variétés rigides. Cette catégorie est le cadre naturel pour les objets considérés dans ce chapitre. On montrera en effet que les faisceaux avec transferts surconvergens et invariants par homotopie sont les objets du cœur d'une t -structure naturelle sur $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k)$. On utilisera également notre résultat principal pour identifier certains groupes de morphismes dans cette catégorie avec l'homologie de certains complexes de cycles à la Suslin. On établira également un théorème de simplification à la Voevodsky. On termine ce chapitre par une variante avec transferts de la première partie de la scholie 1.3.26 du chapitre précédent.

2.1. Rappels et compléments de géométrie rigide (suite)

Dans cette section, on rassemble quelques résultats de géométrie rigide qui nous seront utiles dans la suite du chapitre. On commence d'abord par une description des domaines affinoïdes de la droite affine et on donne un critère pour que la cohomologie d'un tel domaine à valeurs dans un faisceau soit nulle en degrés strictement positifs. On rappelle ensuite la notion de surconvergence qui jouera un rôle crucial dans la suite.

2.1.1. Domaines de la droite affine et leur cohomologie. — Soit k un corps valué complet de valuation non triviale et fixons un élément non nul $\pi \in k^\vee$. On cherche à décrire les ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Supposons d'abord que k est algébriquement clos. L'ensemble des points fermés de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ s'identifie alors à l'ensemble $\mathbb{A}^1(k) = k$ des points k -rationnels. Cet ensemble est naturellement un espace métrique complet, la distance entre deux éléments $a, b \in k$ étant $|a - b|$. Pour $\lambda \in |k^\times|$, on notera

$$\mathbb{B}_k^1(a, \lambda) = \{b \in k; |a - b| \leq \lambda\} \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_k^1(a, \lambda)^\circ = \{b \in k; |a - b| < \lambda\}.$$

Ce sont des ouverts admissibles de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$; on les munit des structures de k -variété rigide déduites de celle de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Notons que $\mathbb{B}_k^1(a, \lambda)$ est en fait un k -affinoïde. Plus généralement, étant donnés $o, x_1, \dots, x_m \in k$ et $R, r_1, \dots, r_m \in |k^\times|$, l'ensemble

$$\{z \in k; |o - z| \leq R, |x_1 - z| \geq r_1, \dots, |x_m - z| \geq r_m\}$$

est l'ensemble des points k -rationnels d'un ouvert de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ qu'on notera

$$(2.1) \quad \mathbb{B}_k^1(o, R) - \bigcup_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ.$$

On a le résultat facile suivant.

Lemme 2.1.1. — *L'ouvert (2.1) est un domaine affinoïde. S'il est non vide, alors il est connexe et, quitte à modifier les centres o, x_1, \dots, x_m et les rayons R, r_1, \dots, r_m , on peut supposer qu'on a les conditions suivantes :*

- (i) $r_i \leq |o - x_i| \leq R$,
- (ii) $|x_i - x_j| \geq \max(r_i, r_j)$ pour $i \neq j$.

Ces conditions entraînent que $\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \cap \mathbb{B}_k^1(x_j, r_j)^\circ = \emptyset$ pour $i \neq j$. Ceci justifie l'écriture

$$(2.2) \quad \mathbb{B}_k^1(o, R) - \prod_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ$$

au lieu de (2.1).

Démonstration. — Si l'ouvert affinoïde (2.1) est non vide, on peut supposer qu'il contient le centre o de la boule de Tate $\mathbb{B}_k^1(o, R)$. On a alors $r_i \leq |x_i - o|$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

On peut bien sûr se débarrasser dans (2.1) des i tels que

$$\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \cap \mathbb{B}_k^1(o, R) = \emptyset.$$

D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on peut donc supposer que $\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \subset \mathbb{B}_k^1(o, R)$ pour tout $1 \leq i \leq m$, ce qui équivaut aux inégalités $|o - x_i| \leq R$.

Si $\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \cap \mathbb{B}_k^1(x_j, r_j)^\circ \neq \emptyset$, alors l'une des deux boules contient l'autre d'après l'inégalité triangulaire ultramétrique. On peut donc supposer que

$$\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \cap \mathbb{B}_k^1(x_j, r_j)^\circ = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

ce qui équivaut aux inégalités $|x_i - x_j| \geq \max(r_i, r_j)$.

Il nous reste à montrer que l'ouvert (2.1) est un domaine affinoïde connexe. On note D cet ouvert et on suppose que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites.

Montrons d'abord que D est affinoïde. Quitte à faire un changement de variable affine, on peut supposer que $o = 0$ et $R = 1$. Soient $a_1, \dots, a_m \in k^\times$ tels que $|a_i| = r_i$. Alors, on a $D = \text{Spm}(A)$ où

$$A = \frac{k\{t, u_1, \dots, u_m\}}{(u_1(t - x_1) - a_1, \dots, u_m(t - x_m) - a_m)}.$$

Montrons à présent que D est connexe. On raisonne par récurrence sur l'entier m . Lorsque $m = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $m \geq 1$. Quitte à renuméroter les boules $\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ$, on peut supposer que :

- $r_1 = \min(r_1, \dots, r_m)$,
- $|x_1 - x_i| = r_1$, pour $2 \leq i \leq s$, et $|x_1 - x_j| > r_1$, pour $s + 1 \leq j \leq m$.

D'après (ii), on a donc aussi $r_1 = \dots = r_s$. On pose $x = x_1$ et $r = r_1$. Remarquons d'abord que le domaine

$$D \cap \mathbb{B}_k^1(x, r) = \mathbb{B}_k^1(x, r) - \prod_{i=1}^s \mathbb{B}_k^1(x_i, r)^\circ$$

est connexe. En effet, en choisissant $a \in k^\times$, avec $|a| = r$, et en posant $e_i = a^{-1}(x_i - x)$, on dispose d'un isomorphisme $D \cap \mathbb{B}_k^1(x, r) \simeq \text{Spm}(B)$ avec

$$B = \frac{k\{t, u_1, \dots, u_s\}}{(u_1(t - e_1) - 1, \dots, u_s(t - e_s) - 1)}.$$

Or, la k -algèbre affinoïde B admet bonne réduction et sa \tilde{k} -algèbre résiduelle est intègre. Ceci entraîne que B est intègre comme souhaité.

Il est maintenant aisé de conclure. En effet, supposons que $D = D_1 \amalg D_2$ et montrons que D_1 ou D_2 est vide. Puisque $D \cap \mathbb{B}_k^1(x, r)$ est connexe, on peut supposer que $D_2 \cap \mathbb{B}_k^1(x, r) = \emptyset$. Ainsi, $D \cup \mathbb{B}_k^1(x, r) = (D_1 \cup \mathbb{B}_k^1(x, r)) \amalg D_2$. Par ailleurs, on a

$$D \cup \mathbb{B}_k^1(x, r) = \mathbb{B}_k^1(o, R) - \prod_{j=s+1}^m \mathbb{B}_k^1(x_j, r_j)^\circ.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que le domaine $D \cup \mathbb{B}_k^1(x, r)$ est connexe. Il s'ensuit que $D_2 = \emptyset$. C.Q.F.D.

Le résultat suivant est proposé en exercice dans [18]. Pour la commodité du lecteur on inclut une preuve ici.

Proposition 2.1.2. — *On suppose que k est algébriquement clos. Tout ouvert quasi-compact et connexe (en particulier non vide) de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ est de la forme (2.1).*

Démonstration. — On appellera provisoirement ouvert standard un ouvert de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ qui peut s'écrire comme une union finie et disjointe d'ouverts de la forme (2.1). Il s'agit donc de montrer que tout ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ est standard. On procède en plusieurs étapes.

Étape 1 : On démontre ici que la classe des ouverts standards est stable par intersections et unions finies.

Soient D et D' deux ouverts standards. On peut supposer que D et D' sont connexes (et donc non vides). On peut alors écrire

$$(2.3) \quad D = \mathbb{B}_k^1(o, R) - \bigcup_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \quad \text{et} \quad D' = \mathbb{B}_k^1(o', R') - \bigcup_{j=1}^n \mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ.$$

Lorsque $D \cap D' = \emptyset$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on a $\mathbb{B}_k^1(o, R) \subset \mathbb{B}_k^1(o', R')$ ou $\mathbb{B}_k^1(o', R') \subset \mathbb{B}_k^1(o, R)$. Par symétrie, on peut supposer que $\mathbb{B}_k^1(o, R) \subset \mathbb{B}_k^1(o', R')$. Il vient que

$$D \cap D' = \mathbb{B}_k^1(o, R) - \left(\bigcup_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n \mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \right).$$

D'où le résultat pour $D \cap D'$.

Pour traiter le cas de $D \cup D'$, on introduit l'ensemble J des entiers $1 \leq j \leq n$ tels que $\mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \cap \mathbb{B}_k^1(o, R) \neq \emptyset$. Si $j \in J$, on a

$$\mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \subset \mathbb{B}_k^1(o, R) \text{ ou } \mathbb{B}_k^1(o, R) \subset \mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ.$$

La seconde alternative est impossible puisque $D \cap D' \neq \emptyset$. On a donc $\mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \subset \mathbb{B}_k^1(o, R)$ pour tout $j \in J$. Il s'ensuit que

$$D \cup D' = \mathbb{B}_k^1(o', R') - \left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \notin J}} \mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \in J}} \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \cap \mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \right).$$

La stabilité par unions découle alors du fait que si $\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \cap \mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \neq \emptyset$, on a forcément $\mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ \subset \mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ$ ou $\mathbb{B}_k^1(x'_j, r'_j)^\circ \subset \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ$.

Étape 2 : Soient D un ouvert standard et $f \in \Gamma(D, \mathcal{O})$. Alors $D(1|f)$ et $D(f|1)$ sont des ouverts standards.

On peut supposer que $D = \mathbb{B}_k^1(o, R) - \prod_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ$ comme dans le lemme 2.1.1. Si $g \in \Gamma(D, \mathcal{O})$ avec $|g|_\infty < 1$, on a $D(1|f+g) = D(1|f)$ et $D(f+g|1) = D(f|1)$. Or, le sous-anneau $k[t, \frac{1}{t-x_1}, \dots, \frac{1}{t-x_m}] \subset \Gamma(D, \mathcal{O})$ est dense. On peut donc supposer que f appartient à ce sous-anneau. Comme k est algébriquement clos, on peut écrire

$$f(t) = u \prod_{i=1}^s (t - a_i)^{n_i}$$

avec $u \in k^\times$, $a_i \in k$ et $n_i \in \mathbb{Z}$; de plus, on a $a_i \in \{x_1, \dots, x_m\}$ si $n_i < 0$. On raisonne par récurrence sur s . On peut supposer que les n_i sont tous non nuls et que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Lorsque $s = 1$, le résultat est vrai. En effet si $n_1 > 0$, on a $D(1|f) = D \cap \mathbb{B}_k^1(a_1, |u|^{-1/n_1})$ et $D(f|1) = D - \mathbb{B}_k^1(a_1, |u|^{-1/n_1})^\circ$. De même si $n_1 < 0$, on a $D(f|1) = D \cap \mathbb{B}_k^1(a_1, |u|^{-1/n_1})$ et $D(1|f) = D - \mathbb{B}_k^1(a_1, |u|^{-1/n_1})^\circ$.

Supposons maintenant que $s \geq 2$ et notons $\lambda = |a_1 - a_2| > 0$. On considère les trois ouverts affinoïdes :

- $U_0 = \{z; |o - z| \leq R, |a_1 - z| \geq \lambda, |a_2 - z| \geq \lambda\}$,
- $U_1 = \{z; |o - z| \leq R, |a_1 - z| = \lambda\}$,
- $U_2 = \{z; |o - z| \leq R, |a_2 - z| = \lambda\}$.

Ce sont clairement des ouverts standards de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. On a de plus $U_0 \cup U_1 \cup U_2 = \mathbb{B}_k^1(o, R)$. En effet, soit $z \in \mathbb{B}_k^1(o, R)$. Si $|a_1 - z| > \lambda$ alors $|a_2 - z| = |a_1 - z| > \lambda$ et $z \in U_0$. Si $|a_1 - z| = \lambda$ alors $z \in U_1$. Enfin, si $|a_1 - z| < \lambda$ alors $|a_2 - z| = \lambda$ et $z \in U_2$.

Par la première étape, il suffit de montrer que $D(1|f) \cap U_i$ et $D(f|1) \cap U_i$ sont standards pour $0 \leq i \leq 2$. Notons $D_i = D \cap U_i$. On remarque alors que, sur D_0 , f a partout la même norme que

$$g_0(t) = u(t - a_1)^{n_1+n_2} \prod_{i=3}^s (t - a_i)^{n_i}.$$

En effet, pour $t \in U_0(k)$ on a $|t - a_1| = |t - a_2|$. On déduit que $D(1|f) \cap U_0$ et $D(f|1) \cap U_0$ sont standards par l'hypothèse de récurrence.

De même, sur D_1 , f a partout la même norme que

$$g_1(t) = u_1 \prod_{i=2}^s (t - a_i)^{n_i}$$

avec u_1 un scalaire de norme $\lambda^{n_1}|u|$. On déduit que $D(1|f) \cap U_1$ et $D(f|1) \cap U_1$ sont standards par l'hypothèse de récurrence. Le cas de $D(1|f) \cap U_2$ et $D(f|1) \cap U_2$ s'obtient par symétrie.

Étape 3 : On termine ici la preuve.

Tout ouvert quasi-compact de \mathbb{A}_k^1 est contenu dans une boule de Tate $\mathbb{B}_k^1(o, R)$ avec R suffisamment grand. En faisant un changement de variable affine, on peut supposer que $o = 0$ et $R = 1$. Les domaines de $\mathbb{B}_k^1 = \mathbb{B}_k^1(o, 1)$ sont des unions finies de domaines rationnels. Par la première étape, il suffit de montrer que

$$D_{\mathbb{B}_k^1}(f_0|f_1, \dots, f_n)$$

est un ouvert standard pour $f_0, \dots, f_n \in k\{t\}$ engendrant $k\{t\}$ en tant qu'idéal.

Par hypothèse, on peut trouver $g_0, \dots, g_n \in k\{t\}$ tels que

$$(2.4) \quad \sum_{i=0}^n f_i g_i = 1.$$

Notons $M = \max_i(|g_i|_\infty)$ et $m = \frac{1}{2}M^{-1}$. On déduit de (2.4) que $\max_i |f_i(x)| > m$ pour tout $x \in \mathbb{B}_k^1(k)$. Considérons le recouvrement

$$\mathbb{B}_k^1 = D_{\mathbb{B}_k^1}(m|f_0) \cup D_{\mathbb{B}_k^1}(f_0|m).$$

On a $D_{\mathbb{B}_k^1}(f_0|f_1, \dots, f_n) \cap D_{\mathbb{B}_k^1}(m|f_0) = \emptyset$ puisqu'un point x dans cette intersection vérifiera les inégalités contradictoires $m \geq |f_0(x)| \geq |f_i(x)|$, pour $1 \leq i \leq n$, et $\max_i |f_i(x)| > m$. Notons $D = D_{\mathbb{B}_k^1}(f_0|m)$. C'est un ouvert standard sur lequel f_0 est inversible. On a alors

$$D_{\mathbb{B}_k^1}(f_0|f_1, \dots, f_n) = D_D(f_0|f_1, \dots, f_n) = D_D(1|f_0^{-1}f_1, \dots, f_0^{-1}f_n) = \bigcap_{i=1}^n D_D(1|f_0^{-1}f_i).$$

Par la seconde étape, on sait que chacun des $D_D(1|f_0^{-1}f_i)$ est un ouvert standard. Par la première étape, une intersection finie d'ouverts standards est un ouvert standard. La proposition est démontrée. C.Q.F.D.

Revenons maintenant au cas général où k n'est plus supposé algébriquement clos. Pour $o, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{A}^1(k)$ et $R, r_1, \dots, r_m \in \sqrt{|k^\times|}$, on dispose encore des domaines affinoïdes

$$(2.5) \quad \mathbb{B}_k^1(o, R) = \bigcup_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ.$$

Le lemme 2.1.1 reste vrai pour k non nécessairement algébriquement clos. Toutefois, les domaines (2.5) ne suffisent plus pour décrire tous les ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. On a tout de même le résultat suivant.

Corollaire 2.1.3. — Soit $D \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert quasi-compact et connexe. Il existe une extension finie galoisienne (et donc séparable) l/k telle que

$$(2.6) \quad D \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R) - \coprod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right)$$

avec $o_\alpha, x_\beta \in \mathbb{A}^1(l)$ et $R, r_\beta \in \sqrt{|k^\times|}$ vérifiant :

- (i) $|o_\alpha - o_{\alpha'}| > R$ pour $\alpha \neq \alpha'$,
- (ii) $r_\beta \leq |o_\alpha - x_\beta| \leq R$ pour $\beta \in J_\alpha$,
- (iii) $|x_\beta - x_{\beta'}| \geq \max(r_\beta, r_{\beta'})$ pour $\beta \neq \beta'$.

De plus, le groupe de Galois de l/k permute transitivement les boules de Tate $\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R)$.

Démonstration. — Notons \bar{k} la complétion d’une clôture algébrique de k . Par la proposition 2.1.2 et le lemme 2.1.1, on peut écrire

$$(2.7) \quad D \widehat{\otimes}_k \bar{k} = \coprod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_{\bar{k}}^1(o_\alpha, R_\alpha) - \coprod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_{\bar{k}}^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right)$$

avec $r_\beta \leq |o_\alpha - x_\beta| \leq R_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$ et $\beta \in J_\alpha$. On peut aussi supposer que la condition (iii) de l’énoncé est satisfaite.

La clôture séparable de k est dense dans \bar{k} . On peut donc supposer que les o_α et les x_β ont leurs coordonnées dans une extension finie séparable et galoisienne l/k . On en déduit que

$$(2.8) \quad D \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R_\alpha) - \coprod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right).$$

(En effet, les domaines de $(\mathbb{A}_l^1)^{\text{an}}$ sont déterminés par leurs points fermés, et donc aussi par leurs points \bar{k} -rationnels.) Puisque D est connexe, le groupe de Galois de l/k permute transitivement les composantes connexes de $D \widehat{\otimes}_k l$. Il s’ensuit que les R_α sont tous égaux ; on note R leur valeur commune. La propriété (i) est maintenant immédiate. C.Q.F.D.

Le corollaire 2.1.3 décrit tous les ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. En effet, par descente galoisienne, se donner un ouvert quasi-compact $D \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ revient à se donner un ouvert quasi-compact $D' \subset (\mathbb{A}_l^1)^{\text{an}}$ invariant par l’action de $\text{Gal}(l/k)$ (avec l/k une extension galoisienne).

Définition 2.1.4. — 1) Soit $D \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert quasi-compact. On dit que D est localement convexe s’il existe une extension finie séparable l/k telle que

$$D \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{\alpha \in I} \mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R_\alpha).$$

On dit que D est convexe s’il est localement convexe et si l’ensemble I est un singleton (ce qui revient à demander que D est géométriquement connexe).

2) Soit $D \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert quasi-compact et connexe, et soit l/k une extension finie séparable telle que

$$D \widehat{\otimes}_k l = \prod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R) - \prod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right)$$

avec les centres et les rayons vérifiant les conditions (i) à (iii) du corollaire 2.1.3. L'enveloppe localement convexe de D , notée D^\natural , est l'unique ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ tel que

$$D^\natural \widehat{\otimes}_k l = \prod_{\alpha \in I} \mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R_\alpha).$$

Il est clair que D^\natural est convexe si et seulement si D est géométriquement connexe.

Lorsque D n'est plus supposé connexe, on pose $D^\natural = \bigcup_i D_i^\natural$ où $(D_i)_i$ est la famille des composantes connexes de D . Par construction, D^\natural est le plus petit ouvert localement convexe contenant D . (On fera attention que le nombre de composantes connexes de D^\natural peut être strictement inférieur à celui de D . De même, la caractérisation de la convexité donnée ci-dessus n'est plus valable quand D n'est pas connexe.)

Lorsque k est d'égale caractéristique nulle, on a la description plus précise suivante des ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$.

Proposition 2.1.5. — *Supposons que k est d'égale caractéristique nulle et soit $D \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert quasi-compact.*

1) *Supposons que D est connexe et localement convexe. Alors, il existe un point fermé $o \in D$ et une rétraction $D \rightarrow o = \text{Spm}(k(o))$. De plus, le morphisme*

$$D \longrightarrow (\mathbb{A}_{k(o)}^1)^{\text{an}} = (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}} \widehat{\times}_k o,$$

déduit de cette rétraction, identifie D avec une boule de Tate $\mathbb{B}_{k(o)}^1(o', R)$ pour un certain $R \in \sqrt{|k^\times|}$ et avec $o' = (o, o) \in (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}} \widehat{\times}_k o$.

En particulier, si D est convexe (i.e., géométriquement connexe et localement convexe), alors $D = \mathbb{B}_k^1(o, R)$ pour un certain $R \in \sqrt{|k^\times|}$ et $o \in D(k)$.

2) *Supposons que D est géométriquement connexe et soit $o \in D^\natural(k)$ un point k -rationnel (dont l'existence est assurée par la première partie de l'énoncé). Il existe une extension finie galoisienne l/k de groupe de Galois G telle que*

$$D \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, R) - \prod_{i \in I} \mathbb{B}_l^1(x_i, r_i)^\circ$$

avec $x_i \in \mathbb{A}^1(l)$, $R, r_i \in \sqrt{|k^\times|}$ vérifiant les conditions suivantes :

- (a) $|o - x_i| \leq R$ et⁽¹⁾ $r_i \leq R$,
- (b) $|x_i - x_j| \geq \max(r_i, r_j)$ si $i \neq j$,
- (c) l'action de G sur $l = \mathbb{A}^1(l)$ stabilise l'ensemble $\{x_i; i \in I\}$.

⁽¹⁾ En général, il n'est pas possible de choisir le point $o \in D^\natural(k)$ dans $D(k)$ car ce dernier peut être vide. (C'est par exemple le cas pour $\partial \mathbb{B}_k^1(o, |\pi|^{\frac{1}{2}})$ avec $k = \tilde{k}((\pi))$.) Ainsi, en général, on ne peut pas supposer les inégalités $r_i \leq |o - x_i|$.

Démonstration. — 1) On démontre d’abord la première partie de l’énoncé. Par le corollaire 2.1.3 et puisque D est localement convexe, on peut trouver une extension finie séparable l_1/k telle que

$$D \widehat{\otimes}_k l_1 = \prod_{\alpha \in I} \mathbb{B}_{l_1}^1(o_\alpha, R)$$

avec $|o_\alpha - o_{\alpha'}| > R$ pour $\alpha \neq \alpha'$. On peut également supposer que l_1/k est galoisienne de groupe de Galois G_1 permutant transitivement les boules $\mathbb{B}_{l_1}^1(o_\alpha, R)$. Pour $\alpha \in I$, on notera $\text{Stab}_{G_1}(\alpha)$ le stabilisateur de α dans G_1 . On fixe $\delta \in I$ et on pose

$$o'_\delta = \frac{1}{|\text{Stab}_{G_1}(\delta)|} \sum_{g \in \text{Stab}_{G_1}(\delta)} g \cdot o_\delta.$$

Alors $o'_\delta \in \mathbb{B}_{l_1}^1(o_\delta, R)$ comme on déduit des inégalités

$$|o'_\delta - o_\delta| = \left| \frac{1}{|\text{Stab}_{G_1}(\delta)|} \sum_{g \in \text{Stab}_{G_1}(\delta)} g \cdot o_\delta - o_\delta \right| \leq \max_{g \in \text{Stab}_{G_1}(\delta)} |g \cdot o_\delta - o_\delta| \leq R.$$

La première inégalité ci-dessus utilise le fait que la norme d’un nombre rationnel non nul est égale à 1 lorsque k est d’égale caractéristique nulle.

Il est maintenant facile d’obtenir la première partie de la proposition. Notons $l = l_1^{\text{Stab}_{G_1}(\delta)}$ le sous-corps des invariants par $\text{Stab}_{G_1}(\delta)$. Par construction, o'_δ est un point l -rationnel de D . La composition de

$$\mathbb{B}_l^1(o'_\delta, R) \hookrightarrow (\mathbb{A}_l^1)^{\text{an}} \longrightarrow (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$$

est l’inclusion d’un domaine quasi-compact ; plus précisément, elle est isomorphe à l’inclusion $D \hookrightarrow (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Pour vérifier cela, on peut étendre les scalaires à l’extension l_1/k . On retrouve alors le morphisme

$$\prod_{\sigma: l \rightarrow l_1} \mathbb{B}_{l_1}^1(\sigma(o'_\delta), R) = \prod_{g \in G_1/\text{Stab}_{G_1}(\delta)} \mathbb{B}_{l_1}^1(g \cdot o'_\delta, R) = \prod_{\alpha} \mathbb{B}_{l_1}^1(o_\alpha, R) \rightarrow (\mathbb{A}_{l_1}^1)^{\text{an}}.$$

Étant donné que $|o_\alpha - o_{\alpha'}| > R$ si $\alpha \neq \alpha'$, notre morphisme est bien une inclusion ; c’est même l’inclusion de $D \widehat{\otimes}_k l_1$ dans $(\mathbb{A}_{l_1}^1)^{\text{an}}$.

2) On passe maintenant à la preuve de la seconde partie de l’énoncé. Il existe une extension finie galoisienne l/k de groupe de Galois G telle que

$$(2.9) \quad D \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, R) - \prod_{i \in I} \mathbb{B}_l^1(x_i, r_i)^\circ$$

avec $R, r_i \in \sqrt{|k^\times|}$ et $x_i \in \mathbb{A}^1(l) = l$ vérifiant les conditions du corollaire 2.1.3 (sauf, peut-être, les inégalités $r_i \leq |o - x_i|$). Autrement dit, les conditions (a) et (b) de l’énoncé sont vérifiées. Il reste à expliquer comment modifier les centres x_i pour avoir la propriété (c).

L'action de G sur \mathbb{A}_l^1 stabilise la partie $\prod_{i \in I} \mathbb{B}_l^1(x_i, r_i)^\circ$. Ainsi, pour $g \in G$ et $i \in I$, il existe (un unique) $g(i) \in I$ tel que $|g \cdot x_i - x_{g(i)}| < r_{g(i)}$. On obtient ainsi une action de G sur l'ensemble I . On a aussi $r_i = r_{g(i)}$ pour tout $i \in I$.

On choisit un sous-ensemble $E \subset I$ tel que $I = \coprod_{e \in E} G \cdot e$ (i.e., on choisit un élément dans chaque orbite de G agissant sur I). Pour $e \in E$, on pose

$$x'_e = \frac{1}{|\text{Stab}_G(e)|} \sum_{g \in \text{Stab}_G(e)} g \cdot x_e.$$

On a alors (puisque k est d'égale caractéristique nulle)

$$|x'_e - x_e| = \left| \frac{1}{|\text{Stab}_G(e)|} \sum_{g \in \text{Stab}_G(e)} (g \cdot x_e - x_e) \right| \leq \max_{g \in \text{Stab}_G(e)} |g \cdot x_e - x_e| < r_e,$$

ce qui montre que $x'_e \in \mathbb{B}_l^1(x_e, r_e)^\circ$.

Pour $i \in I$, il existe un unique $e \in E$ et un élément $g \in G$ tel que $i = g \cdot e$. Alors $x'_i = g \cdot x'_e$ est indépendant du choix de g et $|x'_i - x_i| < r_i$. On peut maintenant écrire

$$X \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, R) - \prod_{i \in I} \mathbb{B}_l^1(x'_i, r_i)^\circ.$$

Par construction, G stabilise l'ensemble $\{x'_i; i \in I\}$. La proposition est démontrée.

C.Q.F.D.

Remarque 2.1.6. — Lorsque la caractéristique résiduelle de k est positive, la conclusion de la proposition 2.1.5 est fautive en général. En effet, on peut construire un ouvert affinoïde $Y \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ sans points k -rationnels tel que $Y \widehat{\otimes}_k l \simeq \mathbb{B}_k^1(z, R)$ pour une certaine extension galoisienne l/k . Voici un exemple simple. On prend $k = \mathbb{Q}_3$ et l/k un corps de décomposition du polynôme d'Eisenstein $P = X^3 + 3X + 3$. Si $\xi \in l$ est une racine de P , alors il existe un ouvert quasi-compact $Y \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ tel que

$$Y \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(\xi, |3|^{\frac{1}{2}}).$$

En effet, si $\xi' \neq \xi$ est une autre racine de P , alors $|\xi' - \xi| = |3|^{\frac{1}{2}}$. Par ailleurs, on a $\mathbb{B}_l^1(\xi, |3|^{\frac{1}{2}}) \cap \mathbb{A}^1(k) = \emptyset$. En effet, on a $|\xi| = |3|^{\frac{1}{3}}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{A}^1(k)$, $|x - \xi|$ est soit égal à $|3|^{\frac{1}{3}}$, soit égal à $|3|^n$ avec $n \leq 0$. Dans les deux cas, on a bien⁽²⁾ $|x - \xi| > |3|^{\frac{1}{2}}$.

Dans la suite de ce paragraphe, on étudiera la cohomologie de Čech des ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. On rappelle d'abord quelques notions classiques.

Définition 2.1.7. — Soit F un préfaisceau de groupes abéliens sur une catégorie \mathcal{C} admettant des produits fibrés. Soit $\mathcal{R} = (U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ une famille de flèches dans \mathcal{C} .

(2) Pour la commodité du lecteur, on donne le calcul des normes utilisées. Notons ξ, ξ' et ξ'' les racines de P . On a clairement $|\xi| = |\xi'| = |\xi''| = |3|^{\frac{1}{3}}$. D'autre part, $\alpha' = \xi' - \xi$ et $\alpha'' = \xi'' - \xi$ sont les racines du polynôme du second degré $X^{-1} \cdot P(X + \xi) = X^2 + 3\xi \cdot X + 3\xi^2 + 3$. Si $|\alpha'| > |\alpha''|$, alors nécessairement $|\alpha'| = |3\xi| = |3|^{\frac{4}{3}}$. Il s'ensuit que $|\alpha'| \cdot |\alpha''| < |3|^{\frac{8}{3}}$ ce qui contredit l'égalité $|\alpha'| \cdot |\alpha''| = |3\xi^2 + 3| = |3|$. On a donc $|\alpha'| \leq |\alpha''|$. Par symétrie, il s'ensuit que $|\alpha'| = |\alpha''| = |3|^{\frac{1}{2}}$.

On dit que F est acyclique pour \mathcal{R} (ou simplement \mathcal{R} -acyclique) si l'augmentation évidente $F(X) \rightarrow C_F^\bullet(\mathcal{R})$, avec $C_F^\bullet(\mathcal{R})$ le complexe de Čech

$$\left[\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{i_1, i_2 \in I} F(U_{i_1} \times_X U_{i_2}) \\ \longrightarrow \cdots \longrightarrow \prod_{i_1, \dots, i_n \in I} F(U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n}) \longrightarrow \cdots \end{array} \right],$$

est un quasi-isomorphisme. (Ci-dessus, « $\prod_{i \in I} F(U_i)$ » est placé en degré zéro.)

Autrement dit, F est \mathcal{R} -acyclique si et seulement si $C_F^\bullet(\mathcal{R})$ est acyclique sauf en degré zéro et son groupe de cohomologie en degré zéro est isomorphe à $F(X)$.

Il est facile de voir que tout préfaisceau F est \mathcal{R} -acyclique si l'une des flèches $U_i \rightarrow X$ admet une section (on dira dans ce cas que la famille \mathcal{R} est *scindée*). Les deux lemmes suivants sont bien connus.

Lemme 2.1.8. — Soit F un préfaisceau de groupes abéliens sur une catégorie \mathcal{C} admettant des produits fibrés. Soient $\mathcal{R} = (U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ et $\mathcal{P} = (V_j \rightarrow X)_{j \in J}$ deux familles de morphismes dans \mathcal{C} . Supposons que F est

- 1) \mathcal{P} -acyclique,
- 2) $(\mathcal{P} \times_X (U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n}))$ -acyclique pour tout $i_1, \dots, i_n \in I$ (avec $n \geq 1$),
- 3) $(\mathcal{R} \times_X (V_{j_1} \times_X \cdots \times_X V_{j_n}))$ -acyclique pour tout $j_1, \dots, j_n \in J$ (avec $n \geq 1$).

Alors, F est également \mathcal{R} -acyclique.

Démonstration. — De la deuxième condition, on déduit une suite exacte de complexes de groupes abéliens

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C_F^\bullet(\mathcal{R}) \longrightarrow \prod_{j_1 \in J} C_F^\bullet(\mathcal{R} \times_X V_{j_1}) \\ \longrightarrow \cdots \longrightarrow \prod_{j_1, \dots, j_n \in J} C_F^\bullet(\mathcal{R} \times_X (V_{j_1} \times_X \cdots \times_X V_{j_n})) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Étant donné que F est $(\mathcal{R} \times_X (V_{j_1} \times_X \cdots \times_X V_{j_n}))$ -acyclique, on obtient un isomorphisme, dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, entre $C_F^\bullet(\mathcal{R})$ et $C_F^\bullet(\mathcal{P}) \simeq F$. D'où le résultat. C.Q.F.D.

Lemme 2.1.9. — Soit F un préfaisceau de groupes abéliens sur une catégorie \mathcal{C} admettant des produits fibrés. Soit $\mathcal{R} = (U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ une famille de flèches dans \mathcal{C} telle que :

- I est un ensemble fini totalement ordonné,
- pour $i \in I$, le morphisme diagonal $U_i \rightarrow U_i \times_X U_i$ est inversible.

Alors le complexe de Čech $C_F^\bullet(\mathcal{R})$ est quasi-isomorphe à son quotient borné $C'_F(\mathcal{R})$ donné par

$$\left[\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{i < j \in I} F(U_i \times_X U_j) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \prod_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n \in I} F(U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n}) \longrightarrow \cdots \right].$$

Démonstration. — Ce lemme se démontre par la même méthode que le lemme précédent. Lorsque l'un des constituants de $\mathcal{R} \times_X V$ est un isomorphisme, le complexe $C'_F(\mathcal{R} \times_X V)$ est quasi-isomorphe à $F(V)$. On en déduit que

$$0 \longrightarrow C'_F(\mathcal{R}) \longrightarrow \prod_{i \in I} C'_F(\mathcal{R} \times_X U_i) \longrightarrow \prod_{i < j \in I} C'_F(\mathcal{R} \times_X (U_i \times_X U_j)) \longrightarrow \cdots$$

est une suite exacte de complexes. De même, les complexes

$$C'_F(\mathcal{R} \times_X (U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n}))$$

sont quasi-isomorphes à $F(U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_n})$, si $n \geq 1$. Ceci permet de conclure.

C.Q.F.D.

Étant donnée une k -variété rigide X , on notera $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ l'ensemble ordonné des ouverts quasi-compacts de X munie de la topologie des recouvrements admissibles, qu'on notera « ad ». Sauf mention explicite du contraire, un faisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ sera toujours un faisceau pour la topologie des recouvrements admissibles.

Proposition 2.1.10. — Soient X une k -variété rigide et F un préfaisceau de groupes abéliens sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. On suppose les deux conditions suivantes :

- (i) $F(\emptyset) = 0$,
- (ii) pour U et V des ouverts quasi-compacts de X ,

$$0 \longrightarrow F(U \cup V) \longrightarrow F(U) \oplus F(V) \longrightarrow F(U \cap V) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

Alors F est un faisceau et $H_{\text{ad}}^i(U, F) = 0$ pour tout $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ et $i > 0$.

Démonstration. — Si on considère F comme un objet de la catégorie des préfaisceaux sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ à valeurs dans la catégorie des complexes de groupes abéliens, la condition (ii) se traduit en disant que F envoie un carré

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & U \cup V \end{array}$$

sur un carré homotopiquement cartésien. Ainsi, F vérifie la propriété de Brown-Gersten (voir définition 1.2.29) relativement à la topologie des recouvrements admissibles sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. Les preuves du théorème 1.2.30 et du corollaire 1.2.32 s'appliquent littéralement au cas de la topologie des recouvrements admissibles. On en

déduit que le préfaisceau F est projectivement ad-fibrant. En d'autres termes, F est un faisceau et $H_{\text{ad}}^i(U, F) = 0$ pour $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ et $i > 0$ comme souhaité. C.Q.F.D.

On revient maintenant au cas de la variété rigide $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Nous allons décrire deux types de recouvrements admissibles qui interviendront dans le critère d'annulation de la cohomologie des ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ (voir le théorème 2.1.12 ci-dessous).

Soit $W \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert quasi-compact connexe et soit l/k une extension galoisienne de groupe de Galois G telle que

$$W \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R) - \coprod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right)$$

avec $R, r_\beta \in \sqrt{|k^\times|}$ et $o_\alpha, x_\beta \in \mathbb{A}^1(l)$ comme dans le corollaire 2.1.3. On relaxera toutefois l'hypothèse sur les o_α en supposant seulement que $|o_\alpha - x_\beta| \leq R$ pour $\beta \in J_\alpha$. En particulier, on n'exclut pas la possibilité d'avoir $o_\alpha = x_\beta$ pour un certain $\beta \in J_\alpha$. On dira que l/k est une extension trivialisante pour W .

On note $J = \coprod_{\alpha \in I} J_\alpha$. Comme G permute les boules fermées $\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R)$ et les boules ouvertes $\mathbb{B}_l^1(x_\beta, r_\beta)^\circ$, on déduit une action de G sur les ensembles I et J . La connexité de W entraîne que l'action de G sur I est transitive. Pour $\alpha \in I$ et $g \in G$, on a $g \cdot J_\alpha = J_{g \cdot \alpha}$. En particulier, le cardinal de J_α est indépendant de $\alpha \in I$; on le notera $t(W)$. Les boules ouvertes $\mathbb{B}_l^1(x_\beta, r_\beta)^\circ$ seront appelées les *trous* de W (au-dessus de l/k). Elles sont au nombre de $t(W) \cdot |I|$ (qui est indépendant de l'extension galoisienne trivialisante l/k).

Recouvrements du premier type : On fixe un point $z_0 \in W(l)$. Soit $\epsilon \in \sqrt{|k^\times|}$ tel que $\epsilon < |z_0 - x_\beta|$ pour $\beta \in J$ et $\epsilon < |z_0 - g \cdot z_0|$ pour $g \in G$ avec $z_0 \neq g \cdot z_0$. Les deux ouverts affinoïdes de $(\mathbb{A}_l^1)^{\text{an}}$

$$\coprod_{z \in G \cdot z_0} \mathbb{B}_l^1(z, \epsilon) \quad \text{et} \quad \coprod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R) - \left(\coprod_{z \in G \cdot z_0 \cap \mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R)} \mathbb{B}_l^1(z, \epsilon)^\circ \right) \right)$$

sont invariants par G et définissent par descente galoisienne des ouverts affinoïdes $D_1(z_0, \epsilon)$ et $D_2(z_0, \epsilon)$ de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. On pose $W_i(z_0, \epsilon) = W \cap D_i(z_0, \epsilon)$. (Bien entendu, on a $W_1(z_0, \epsilon) = D_1(z_0, \epsilon)$ car $D_1(z_0, \epsilon) \subset W$.) Le recouvrement admissible $\mathcal{R}_{W, z_0, \epsilon}^I = (W_i(z_0, \epsilon) \hookrightarrow W)_{i=1,2}$ est appelé un recouvrement du premier type de W .

Recouvrements du deuxième type : On suppose ici que $t(W) \geq 1$. On fixe $\gamma \in J$ et $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$ tels que $r_\gamma < \lambda < R$ et $|x_\gamma - x_\beta| \neq \lambda$ pour tout $\beta \in J$. On note encore $J(\gamma)$ l'orbite galoisienne de γ et $J_\alpha(\gamma)$ son intersection avec J_α .

Les ouverts affinoïdes de $(\mathbb{A}_l^1)^{\text{an}}$

$$\bigcup_{\beta \in J(\gamma)} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, \lambda) \quad \text{et} \quad \coprod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R) - \bigcup_{\beta \in J_\alpha(\gamma)} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, \lambda)^\circ \right)$$

sont stables par G et définissent par descente galoisienne des ouverts affinoïdes

$D_1(\gamma, \lambda)$ et $D_2(\gamma, \lambda)$ de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. On note alors $W_i(\gamma, \lambda) = W \cap D_i(\gamma, \lambda)$. Le recouvrement admissible $\mathcal{R}_{W, \gamma, \lambda}^{II} = (W_i(\gamma, \lambda) \hookrightarrow W)_{i=1,2}$ est appelé un recouvrement du deuxième type de W .

Pour énoncer concisément notre critère (i.e., le théorème 2.1.12 ci-dessous), nous introduisons une propriété.

Définition 2.1.11. — *On dit qu'un préfaisceau F sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$ satisfait l'invariance combinatoire s'il vérifie la propriété suivante.*

- Soient $W \subset W'$ deux ouverts quasi-compacts connexes de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ tels que, pour une extension finie séparable l/k trivialisante pour W et W' , on a

$$W \widehat{\otimes}_k l = \prod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R) - \prod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right),$$

$$W' \widehat{\otimes}_k l = \prod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R') - \prod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(x_\beta, r'_\beta)^\circ \right),$$

avec $r'_\beta \leq r_\beta \leq R \leq R'$, $|o_\alpha - o_{\alpha'}| > R'$ pour $\alpha \neq \alpha'$ et $|x_\beta - x_{\beta'}| \geq \max(r_\beta, r_{\beta'})$ pour $\beta \neq \beta'$. Alors, le morphisme $F(W') \rightarrow F(W)$ est un isomorphisme.

Théorème 2.1.12. — *Soit F un préfaisceau de groupes abéliens sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (a) $F(\emptyset) = 0$ et $F(D_1 \cup D_2) \simeq F(D_1) \oplus F(D_2)$ pour $D_1, D_2 \in \text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,
- (b) F est acyclique pour les recouvrements du type I et II comme ci-dessus,
- (c) F satisfait l'invariance combinatoire.

Alors, F est un faisceau pour la topologie des recouvrements admissibles et $H_{\text{ad}}^i(D, F) = 0$ pour tout ouvert quasi-compact $D \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ et $i > 0$.

Démonstration. — Soit F un préfaisceau de groupes abéliens vérifiant (a), (b) et (c). Nous allons montrer qu'il vérifie aussi les propriétés (i) et (ii) de la proposition 2.1.10 ce qui permettra de conclure. La propriété (i) découle de (a). Seule la propriété (ii) demande une preuve. Étant donnés deux ouverts quasi-compacts U et V de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$, on notera $\text{MV}(U, V)$ le complexe de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow F(U \cup V) \longrightarrow F(U) \oplus F(V) \longrightarrow F(U \cap V) \longrightarrow 0.$$

Il s'agit de montrer que $\text{MV}(U, V)$ est acyclique, ce qui revient à dire que F est acyclique pour le recouvrement $(U \hookrightarrow U \cup V, V \hookrightarrow U \cup V)$. On procède en plusieurs étapes.

Étape 1 : Le but de cette étape est de se ramener au cas où U, V et $U \cup V$ sont connexes.

On démontre d'abord un résultat préliminaire :

Supposons que $U = U_1 \amalg U_2 \amalg \dots \amalg U_n$. Pour que $\text{MV}(U, V)$ soit acyclique, il suffit que les complexes $\text{MV}(U_i, U_{i+1} \cup \dots \cup U_n \cup V)$ soient acycliques pour tout $1 \leq i \leq n$.

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où $n = 2$. On suppose donc que les complexes $MV(U_1, U_2 \cup V)$ et $MV(U_2, V)$ sont acycliques et on cherche à montrer que $MV(U_1 \amalg U_2, V)$ est acyclique. On dispose d'un morphisme de complexes $MV(U_1, U_2 \cup V) \rightarrow MV(U_1 \amalg U_2, V)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow F(U_1 \cup U_2 \cup V) & \longrightarrow & F(U_1) \oplus F(U_2 \cup V) & \longrightarrow & F(U_1 \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow F(U_1 \cup U_2 \cup V) & \rightarrow & F(U_1) \oplus F(U_2) \oplus F(V) & \rightarrow & F(U_1 \cap V) \oplus F(U_2 \cap V) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Puisque $MV(U_2, V)$ est acyclique, la flèche verticale au milieu est injective et son conoyau est isomorphe à $F(U_2 \cap V)$ qui est aussi isomorphe au conoyau de la flèche verticale à droite. Le morphisme $MV(U_1, U_2 \cup V) \rightarrow MV(U_1 \amalg U_2, V)$ est donc injectif et son conoyau est acyclique. L'acyclicité de $MV(U_1, U_2 \cup V)$ entraîne maintenant celle de $MV(U_1 \amalg U_2, V)$.

Grâce au résultat ci-dessus, on peut supposer que U est connexe. Écrivons $V = \amalg_{i=1}^{r+s} V_i$, avec V_i les composantes connexes de V , et tel que $V_i \cap U \neq \emptyset$ lorsque $1 \leq i \leq s$ et $V_i \cap U = \emptyset$ lorsque $s + 1 \leq i \leq s + r$. Par (a), on a $MV(U, V) = MV(U, \amalg_{i=1}^s V_i) \oplus MV(\emptyset, \amalg_{i=s+1}^{s+r} V_i)$. Il suffit donc de considérer le cas où toutes les composantes connexes de V rencontrent U . En utilisant une deuxième fois le résultat ci-dessus (et en remarquant que $V_{i+1} \cup \dots \cup V_s \cup U$ est connexe pour tout $1 \leq i \leq s$), on se ramène au cas où V est lui aussi supposé connexe. Enfin, si $U \cap V = \emptyset$, $MV(U, V)$ est acyclique par (a). On peut donc supposer que $U \cap V \neq \emptyset$ et donc que $U \cup V$ est connexe.

Étape 2 : À partir de maintenant, on suppose que U , V et $U \cup V$ sont connexes. Le but de cette étape est d'introduire quelques notations.

Soit l/k une extension galoisienne de groupe de Galois G telle que

$$U \widehat{\otimes}_k l = \prod_{a \in A} \left(\mathbb{B}_l^1(u_a, R) - \prod_{b \in B_a} \mathbb{B}_l^1(x_b, r_b)^\circ \right),$$

$$V \widehat{\otimes}_k l = \prod_{c \in C} \left(\mathbb{B}_l^1(v_c, S) - \prod_{e \in E_c} \mathbb{B}_l^1(y_e, s_e)^\circ \right).$$

Comme d'habitude, on suppose que $|u_a - x_b| \leq R$ et $r_b \leq R$ pour $b \in B_a$, et que $|u_b - u_{b'}| \geq \max(r_b, r_{b'})$ si $b \neq b'$. On suppose de même les conditions correspondantes pour V . Le groupe G opère sur les ensembles A , C , $B = \amalg_{a \in A} B_a$ et $E = \amalg_{c \in C} E_c$. Les actions sur A et C sont transitives car U et V sont connexes.

Par symétrie, on peut supposer que $R \geq S$. Comme $U \cap V$ est non vide, on voit que chaque boule $\mathbb{B}_l^1(v_c, S)$ est incluse dans une unique boule $\mathbb{B}_l^1(u_a, R)$. Ceci fournit une application G -équivariante $C \rightarrow A$ (qui est donc forcément surjective). Pour $a \in A$, on note C_a la fibre de cette application en a de sorte que $C = \amalg_{a \in A} C_a$. Les hypothèses

$R \geq S$ et $U \cap V \neq \emptyset$ entraînent que

$$(U \cup V) \widehat{\otimes}_k l = \prod_{a \in A} \left(\mathbb{B}_l^1(u_a, R) - \prod_{h \in H_a} \mathbb{B}_l^1(z_h, m_h)^\circ \right).$$

Notons que pour $h \in H = \coprod_{a \in A} H_a$, il existe un unique $b \in B$ tel que $\mathbb{B}_l^1(z_h, m_h)^\circ$ est contenue dans $\mathbb{B}_l^1(x_b, r_b)^\circ$. Ceci fournit une application G -équivariante $\theta : H \rightarrow B$. De même, notons $H' \subset H$ l'ensemble des h tels que $\mathbb{B}_l^1(z_h, m_h)^\circ \subset \prod_{c \in C} \mathbb{B}_l^1(v_c, S)$. Alors, pour tout $h \in H'$, il existe un unique $e \in E$ tel que $\mathbb{B}_l^1(z_h, m_h)^\circ$ est contenue dans $\mathbb{B}_l^1(y_e, s_e)^\circ$. Ceci fournit une application G -équivariante $\theta' : H' \rightarrow E$. Remarquons aussi qu'on dispose d'une décomposition $H' = \prod_{c \in C} H'_c$ (telle que $h \in H'_c$ si et seulement si $\mathbb{B}_l^1(z_h, m_h)^\circ \subset \mathbb{B}_l^1(v_c, S)$) et que $H_a \cap H' = \prod_{c \in C_a} H'_c$.

Étape 3 : Dans cette étape, on se ramène au cas où θ et θ' sont surjectives, i.e., pour tout $b \in B$ (resp. $e \in E$) il existe au moins un indice $h \in H$ tel que $\mathbb{B}_l^1(z_h, m_h)^\circ$ est contenue dans $\mathbb{B}_l^1(x_b, r_b)^\circ$ (resp. $\mathbb{B}_l^1(y_e, s_e)^\circ$).

Pour fixer les idées, on se concentre sur le cas de θ . On procède de la manière suivante. Soit $b_0 \in B$ tel que $\mathbb{B}_l^1(x_{b_0}, r_{b_0})^\circ$ ne contient aucune des boules ouvertes $\mathbb{B}_l^1(z_h, m_h)^\circ$. Il vient que $\mathbb{B}_l^1(x_{b_0}, r_{b_0})^\circ \subset (U \cup V) \widehat{\otimes}_k l$ et donc forcément $\mathbb{B}_l^1(x_{b_0}, r_{b_0})^\circ \subset V \widehat{\otimes}_k l$. Soit $\epsilon \in \sqrt{|k^\times|}$ suffisamment petit. Considérons le recouvrement de $U \cup V$ par les ouverts affinoïdes D_1 et D_2 définis par

$$D_1 \widehat{\otimes}_k l = \prod_{b \in G \cdot b_0} \mathbb{B}_l^1(x_b, \epsilon) \quad \text{et} \quad D_2 \widehat{\otimes}_k l = (U \cup V) \widehat{\otimes}_k l - \prod_{b \in G \cdot b_0} \mathbb{B}_l^1(x_b, \epsilon)^\circ.$$

C'est un recouvrement de $U \cup V$ du premier type. On sait donc que $\text{MV}(D_1, D_2)$ est acyclique. Remarquons d'autre part que $D_1 \cap U = \emptyset$, $D_1 \subset V$ et $U \subset D_2$. En utilisant le lemme 2.1.8, on voit que l'acyclicité de $\text{MV}(U, V)$ découle de l'acyclicité de $\text{MV}(U \cap D_2, V \cap D_2)$ et $\text{MV}(V \cap D_1, V \cap D_2)$. Pour le second complexe, on remarque que

$$V = (V \cap D_1) \cup (V \cap D_2)$$

est lui aussi un recouvrement du premier type. Ceci nous ramène donc à traiter le cas de $U' = U \cap D_2$ et $V' = V \cap D_2$. En itérant cette construction pour U et V , on obtient la propriété recherchée.

Étape 4 : À partir de maintenant, on suppose qu'on a des surjections $\theta : H \twoheadrightarrow B$ et $\theta' : H' \twoheadrightarrow E$. Lorsque $H = B = \emptyset$, on a $V \subset U$ et il n'y a rien à montrer dans ce cas. De même, on peut écarter le cas $H' = E = \emptyset$ qui entraîne également que $V \subset U$.

À partir de maintenant, on raisonne par récurrence sur le cardinal des H_a .

Lorsque H_a est un singleton, B_a est aussi un singleton et $H \simeq B \simeq A$. Comme G opère transitivement sur A , il opère aussi transitivement sur H . Puisque $H' \subset H$ est non vide et stable par l'action de G , on a forcément $H' = H$. La relation $H_a = H_a \cap H' = \prod_{c \in C_a} H'_c$ montre que C_a et H'_c sont aussi des singletons. La surjectivité de θ' entraîne que les E_c sont aussi des singletons. Il vient que $H = H' \simeq E \simeq C \simeq A$.

Quitte à changer les positions des centres u_a , on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
 U \widehat{\otimes}_k l &= \prod_{a \in A} (\mathbb{B}_l^1(u_a, R) - \mathbb{B}_l^1(u_a, r)^\circ), & V \widehat{\otimes}_k l &= \prod_{a \in A} (\mathbb{B}_l^1(u_a, S) - \mathbb{B}_l^1(u_a, s)^\circ), \\
 (U \cup V) \widehat{\otimes}_k l &= \prod_{a \in A} (\mathbb{B}_l^1(u_a, R) - \mathbb{B}_l^1(u_a, \min(r, s))^\circ), \\
 (U \cap V) \widehat{\otimes}_k l &= \prod_{a \in A} (\mathbb{B}_l^1(u_a, S) - \mathbb{B}_l^1(u_a, \max(r, s))^\circ).
 \end{aligned}$$

(Ci-dessus, on utilise la connexité de $U \cup V$ pour voir que $S \geq r$.) Puisque F satisfait l'invariance combinatoire, on déduit que toutes les flèches dans le carré

$$\begin{array}{ccc}
 F(U \cup V) & \longrightarrow & F(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(U) & \longrightarrow & F(U \cap V)
 \end{array}$$

sont inversibles ce qui entraîne que F est acyclique pour le recouvrement ouvert $(U \hookrightarrow U \cup V, V \hookrightarrow U \cup V)$.

Étape 5 : À partir de maintenant, on suppose que H_a possède au moins deux éléments (et $H' \neq \emptyset$). Quitte à modifier les centres x_b et y_e , on peut supposer que

$$\{x_b; b \in B\} \cup \{y_e; e \in E\} \subset \{z_h; h \in H\}.$$

Dans cette étape, on suppose qu'il existe $h_0, h_1, h_2 \in H_a$ tels que $0 < |z_{h_0} - z_{h_1}| < |z_{h_0} - z_{h_2}| \leq R$ et on explique comment conclure que F est acyclique pour le recouvrement $(U \hookrightarrow U \cup V, V \hookrightarrow U \cup V)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

On fixe $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$ tel que $|z_{h_0} - z_{h_1}| < \lambda < |z_{h_0} - z_{h_2}|$ et λ différent de tous les $|z_{h'} - z_{h''}|$ avec $h', h'' \in H_a$. Ainsi, λ est aussi différent de tous les $|x_b - x_{b'}|$ et $|y_e - y_{e'}|$. On considère les ouverts quasi-compacts D_1 et D_2 tels que

$$D_1 \widehat{\otimes}_k l = \bigcup_{h \in G \cdot h_0} \mathbb{B}_l^1(z_h, \lambda) \quad \text{et} \quad D_2 \widehat{\otimes}_k l = \prod_{a \in A} \left(\mathbb{B}_l^1(u_a, R) - \bigcup_{h \in G \cdot h_0 \cap H_a} \mathbb{B}_l^1(z_h, \lambda)^\circ \right).$$

Les recouvrements $(D_i \cap U \hookrightarrow U)_{i=1,2}$ et $(D_i \cap (U \cup V) \hookrightarrow (U \cup V))_{i=1,2}$ sont du deuxième type. Par la condition (b) de l'énoncé, F est acyclique pour ces deux recouvrements. Montrons que F est acyclique pour le recouvrement $(D_i \cap V \hookrightarrow V)_{i=1,2}$. Si $D_1 \cap V = \emptyset$ ou si $V \subset D_1$, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer que $\emptyset \neq D_1 \cap V \neq V$. Ceci entraîne que la boule $\mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda)$ est strictement contenue dans l'une des boules $\mathbb{B}_l^1(v_{c_0}, S)$ (et en particulier $h_0 \in H'$). Il est alors facile de voir que dans ce cas, le recouvrement $(D_i \cap V \hookrightarrow V)_{i=1,2}$ est du deuxième type. On utilise de nouveau la condition (b) de l'énoncé pour conclure. Le même raisonnement s'applique pour montrer que F est acyclique pour le recouvrement $(D_i \cap U \cap V \hookrightarrow U \cap V)_{i=1,2}$.

D'après la discussion précédente et le lemme 2.1.8, pour montrer que F est acyclique pour le recouvrement $(U \hookrightarrow U \cup V, V \hookrightarrow U \cup V)$, il suffira de montrer qu'il est acyclique

pour les trois recouvrements suivants :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} D_1 &= (D_1 \cap U) \cup (D_1 \cap V), \\ D_2 &= (D_2 \cap U) \cup (D_2 \cap V), \\ D_1 \cap D_2 &= (D_1 \cap D_2 \cap U) \cup (D_1 \cap D_2 \cap V). \end{aligned}$$

On commence par le dernier recouvrement. Comme λ est différent de tous les $|z_{h'} - z_{h''}|$, on a les deux alternatives suivantes :

$$(\mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda) - \mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda)^\circ) \subset (U \widehat{\otimes}_k l) \quad \text{ou} \quad (\mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda) - \mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda)^\circ) \cap (U \widehat{\otimes}_k l) = \emptyset.$$

De même, on a les deux alternatives suivantes (la première ne pouvant se produire que si $h_0 \in H'$) :

$$(\mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda) - \mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda)^\circ) \subset (V \widehat{\otimes}_k l) \quad \text{ou} \quad (\mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda) - \mathbb{B}_l^1(z_{h_0}, \lambda)^\circ) \cap (V \widehat{\otimes}_k l) = \emptyset.$$

On en déduit que le dernier recouvrement de (2.10) est scindé (i.e., contient un isomorphisme). Pour les deux premiers, recouvrements de (2.10), on remarque que :

- les composantes connexes de $(D_i \cap (U \cup V)) \widehat{\otimes}_k l$ possèdent strictement moins de trous que celles de $(U \cap V) \widehat{\otimes}_k l$,
- si $D_i \cap U$ (resp. $D_i \cap V$) est non vide, alors il est connexe et chacun de ses trous contient au moins un trou de $D_i \cap (U \cup V)$.

On peut donc appliquer la récurrence sur le cardinal des H_a pour conclure.

Étape 6 : Pour terminer, il nous reste à traiter le cas où la valeur de $|z_h - z_{h'}|$ est indépendante de $h \neq h'$ dans H_a . On a alors les trois cas de figure :

- 1) les applications $\theta : H \rightarrow B$ et $\theta' : H' \rightarrow E$ sont bijectives ;
- 2) l'application $\theta : H \rightarrow B$ est bijective, $H' = H$ et E est un singleton ;
- 3) B est un singleton, $H = H'$ et l'application $\theta' : H \rightarrow E$ est bijective.

Puisque F vérifie l'invariance combinatoire, les flèches du carré

$$\begin{array}{ccc} F(U \cup V) & \longrightarrow & F(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U) & \longrightarrow & F(U \cap V) \end{array}$$

vérifient respectivement :

- 1) les flèches verticales sont inversibles ;
- 2) les flèches verticales sont inversibles ;
- 3) les flèches horizontales sont inversibles.

Dans les trois cas, F est acyclique pour le recouvrement $(U \hookrightarrow U \cup V, V \hookrightarrow U \cup V)$. Ceci achève la preuve du théorème. C.Q.F.D.

2.1.2. Préfaisceaux et faisceaux surconvergents. — Soit k un corps valué complet de valuation non triviale et soit $\pi \in k^\vee$ un élément non nul. Dans ce paragraphe, on étudie la notion de surconvergence en géométrie rigide. On rappelle que toutes nos variétés rigides sont implicitement supposées séparées (bien que, souvent, cette hypothèse est superflue ou peut être remplacée par l'hypothèse de quasi-séparabilité). On renvoie au paragraphe 1.1.5 pour les généralités sur les points en géométrie rigide.

Proposition 2.1.13. — *Soient X une k -variété rigide quasi-compacte et $U, V \subset X$ des ouverts quasi-compacts de X . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe un ouvert quasi-compact $W \subset X$ tel que $X = V \cup W$ et $U \cap W = \emptyset$.*
- (ii) *Il existe des modèles formels \mathcal{X}, \mathcal{U} et \mathcal{V} de X, U et V tels que :*
 - *\mathcal{U} et \mathcal{V} sont des ouverts Zariski de \mathcal{X} ,*
 - *\mathcal{V}_σ contient l'adhérence de \mathcal{U}_σ dans \mathcal{X}_σ .*
- (iii) *L'adhérence de $\mathcal{P}(U)$ dans $\mathcal{P}(X)$ est contenue dans $\mathcal{P}(V)$.*
- (iv) *Pour tout $p \in \mathcal{P}(U)$, l'adhérence de p dans $\mathcal{P}(X)$ est contenue dans $\mathcal{P}(V)$.*

Lorsque l'une des quatre conditions ci-dessus est satisfaite (et donc les trois autres aussi), nous dirons que U est dans l'intérieur de V relativement à X et on écrit $U \Subset_X V$.

Démonstration. — On montre d'abord l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii). Soient \mathcal{X}, \mathcal{U} et \mathcal{V} des modèles formels comme dans (ii). L'ouvert quasi-compact $W = [\mathcal{X} - \overline{(\mathcal{U}_\sigma)}]_\eta$ convient alors pour (i). Réciproquement, soit W comme dans (i). Soit \mathcal{X} un modèle plat suffisamment fin de sorte que U, V et W soient les fibres génériques d'ouverts Zariski \mathcal{U}, \mathcal{V} et \mathcal{W} de \mathcal{X} . Alors, $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \emptyset$ puisqu'il est plat sur k° et que sa fibre générique est vide. Il vient que $\overline{(\mathcal{U}_\sigma)} \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Comme $\mathcal{X} = \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$, on a forcément $\overline{(\mathcal{U}_\sigma)} \subset \mathcal{V}$.

Montrons l'implication (ii) \Rightarrow (iii). Soient \mathcal{X}, \mathcal{U} et \mathcal{V} comme dans (ii). Pour \mathcal{X}' plus fin que \mathcal{X} , notons $\mathcal{U}' = \mathcal{X}' \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}' = \mathcal{X}' \widehat{\times}_{\mathcal{X}} \mathcal{V}$. On a alors $\overline{(\mathcal{U}'_\sigma)} \subset \mathcal{V}'_\sigma$. En passant à la limite suivant les \mathcal{X}' plus fins que \mathcal{X} , on obtient que $\overline{\mathcal{P}(U)} \subset \mathcal{P}(V)$.

L'implication (iii) \Rightarrow (iv) est claire. Pour terminer, il reste à montrer que (iv) \Rightarrow (ii). Soit \mathcal{X} un modèle suffisamment fin de sorte que U et V soient les fibres génériques d'ouverts $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{X}$. On supposera aussi que \mathcal{X} est plat sur k° . Soient g_1, \dots, g_n les points génériques de \mathcal{U}_σ . L'application $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{U}_\sigma$ est surjective. On peut donc trouver des points $\tilde{g}_i \in \mathcal{P}(U)$ qui s'envoient sur les g_i . La condition (iv) entraîne que $\overline{\{\tilde{g}_i\}} \subset \mathcal{P}(V)$. Il vient que l'image de $\overline{\{\tilde{g}_i\}} \rightarrow \mathcal{X}_\sigma$, qui n'est autre que $\overline{\{g_i\}}$, est contenue dans \mathcal{V}_σ . Comme $\overline{(\mathcal{U}_\sigma)} = \bigcup_i \overline{\{g_i\}}$, on a la propriété (ii). C.Q.F.D.

La condition (iii) ci-dessus garde un sens sans l'hypothèse de quasi-compactité sur X, U ou V . On l'utilisera alors comme définition de la relation d'intériorité « $U \Subset_X V$ » lorsque la k -variété rigide X et ses ouverts admissibles $U, V \subset X$ ne sont pas tous supposés quasi-compacts. On regroupe quelques propriétés de permanence dans le lemme suivant.

Lemme 2.1.14. — Soient U et V deux ouverts admissibles d'une k -variété rigide X .

1) Supposons que $U \Subset_X V$. Alors, pour tout morphisme de k -variétés rigides $Y \rightarrow X$, on a $U \widehat{\times}_X Y \Subset_Y V \widehat{\times}_X Y$.

2) Soient $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement admissible de X . Si $U \widehat{\times}_X X_i \Subset_{X_i} V \widehat{\times}_X X_i$, pour tout $i \in I$, alors $U \Subset_X V$.

3) Soient U' et V' deux autres ouverts admissibles de X . Supposons que $U \Subset_X V$ et $U' \Subset_X V'$. Alors, on a aussi $U \cap U' \Subset_X V \cap V'$ et $U \cup U' \Subset_X V \cup V'$.

Démonstration. — La première assertion découle des inclusions

$$\overline{\mathcal{P}(U \widehat{\times}_X Y)} \subset (\mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X))^{-1}(\overline{\mathcal{P}(U)}) \subset (\mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X))^{-1}(\mathcal{P}(V)) = \mathcal{P}(V \widehat{\times}_X Y).$$

La seconde assertion découle du fait que la famille $(\mathcal{P}(X_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{P}(X)$. La troisième assertion découle des inclusions

$$\overline{\mathcal{P}(U \cap U')} = \overline{\mathcal{P}(U) \cap \mathcal{P}(U')} \subset \overline{\mathcal{P}(U)} \cap \overline{\mathcal{P}(U')} \subset \mathcal{P}(V) \cap \mathcal{P}(V') = \mathcal{P}(V \cap V'),$$

et les inclusions analogues où « \cap » est remplacé par « \cup ».

C.Q.F.D.

Proposition 2.1.15. — Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Soient U et V deux ouverts quasi-compacts de X tels que $U \cap V = \emptyset$. Il existe alors un ouvert quasi-compact U' de X tel que $U \Subset_X U'$ et $U' \cap V = \emptyset$.

Démonstration. — Soit \mathcal{X} un modèle formel suffisamment fin de X de sorte que U et V sont les fibres génériques de sous-schémas formels ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} de \mathcal{X} avec $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Alors $Z = \overline{(\mathcal{U}_\sigma)} \cap \overline{(\mathcal{V}_\sigma)}$ est un sous-schéma fermé de \mathcal{X}_σ partout de codimension supérieure ou égale à 1 dans $\overline{(\mathcal{U}_\sigma)}$ et $\overline{(\mathcal{V}_\sigma)}$.

Soient \mathcal{I} et \mathcal{J} des idéaux de type fini ayant pour cosupport $\overline{(\mathcal{U}_\sigma)}$ et $\overline{(\mathcal{V}_\sigma)}$ respectivement. Soit \mathcal{X}' l'éclaté de $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ dans \mathcal{X} . Étant donné que le centre de l'éclatement est disjoint de \mathcal{U} et \mathcal{V} , ces derniers sont naturellement des ouverts de \mathcal{X}' qu'on notera \mathcal{U}' et \mathcal{V}' . Les adhérences $\overline{(\mathcal{U}'_\sigma)}$ et $\overline{(\mathcal{V}'_\sigma)}$ s'identifient aux transformés purs de $\overline{(\mathcal{U}_\sigma)}$ et $\overline{(\mathcal{V}_\sigma)}$. Par le lemme 1.1.34, $\overline{(\mathcal{U}'_\sigma)} \cap \overline{(\mathcal{V}'_\sigma)} = \emptyset$. L'ouvert $U' = [\mathcal{X}' - \overline{(\mathcal{V}'_\sigma)}]_\eta$ convient donc.

C.Q.F.D.

La proposition suivante illustre la relation d'intériorité dans le cas concret des ouverts rationnels.

Proposition 2.1.16. — Soient X un k -affinoïde, U un ouvert quasi-compact de X et $f_0, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ engendrant $\Gamma(X, \mathcal{O})$ comme idéal. Pour que $D_X(f_0|f_1, \dots, f_n) \Subset_X U$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$, avec $\lambda > 1$, tel que⁽³⁾ $D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n) \subset U$. En particulier, on a

$$(2.11) \quad D_X(f_0|f_1, \dots, f_n) \Subset_X D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n).$$

⁽³⁾ Bien entendu, le produit « λf_0 » n'est pas défini. La notation abusive $D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n)$ désigne l'ensemble des $x \in X$ tel que $\lambda|f_0(x)| \geq |f_i(x)|$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Démonstration. — On montre d'abord (2.11). Soit $\epsilon \in \sqrt{|k^\times|}$ suffisamment petit de sorte que $\lambda\epsilon < \max_{i=0,\dots,n} |f_i(x)|$ pour tout $x \in X$. Alors, $D_X(\epsilon|f_0) \cap D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n) = \emptyset$. Par le lemme 2.1.14, il suffit donc de vérifier que

$$D_X(f_0|f_1, \dots, f_n) \Subset_{D_X(f_0|\epsilon)} D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n).$$

On peut ainsi supposer que f_0 est inversible sur X . On pose $g_i = f_0^{-1}f_i$. Il s'agit alors de montrer que

$$D_X(1|g_1, \dots, g_n) = \bigcap_{i=1}^n D_X(1|g_i) \Subset_X D_X(\lambda|g_1, \dots, g_n) = \bigcap_{i=1}^n D_X(\lambda|g_i).$$

En utilisant la troisième assertion du lemme 2.1.14, on se ramène à montrer que $D_X(1|g) \Subset_X D_X(\lambda|g)$ pour $g \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. Or, $X = D_X(\lambda|g) \cup D_X(g|\lambda)$ et $D_X(g|\lambda) \cap D_X(1|g) = \emptyset$. D'où le résultat.

On suppose maintenant que $D_X(f_0|f_1, \dots, f_n) \Subset_X U$. Soit $W \subset X$ un ouvert quasi-compact tel que $X = W \cup U$ et $W \cap D_X(f_0|f_1, \dots, f_n) = \emptyset$. Il existe alors $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$, avec $\lambda > 1$, tel que $\max_{i=1,\dots,n} |f_i(x)| > \lambda|f_0(x)|$ pour tout $x \in W$. Il vient que $W \cap D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n) = \emptyset$. On a alors forcément $D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n) \subset U$.

C.Q.F.D.

Corollaire 2.1.17. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte, et soient U et W deux ouverts quasi-compacts de X tels que $U \Subset_X W$. Il existe alors un ouvert quasi-compact V de X tel que $U \Subset_X V$ et $V \Subset_X W$.*

Démonstration. — La question est locale sur X . On peut donc supposer que X est un k -affinoïde. De même, si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement admissible fini et $U_i \Subset_X V_i \Subset_X W$, alors $U \Subset_X \bigcup_{i \in I} V_i \Subset_X W$. On peut donc supposer que U est un domaine rationnel de X . Le résultat découle maintenant de la proposition 2.1.16.

C.Q.F.D.

Corollaire 2.1.18. — *Soient X une k -variété rigide quasi-compacte, $U \subset X$ un ouvert quasi-compact et $q \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal. On suppose que $q \notin \mathcal{M}(U)$. Il existe alors un ouvert quasi-compact V de X tel que $U \Subset_X V$ et $q \notin \mathcal{M}(V)$.*

Démonstration. — La question est locale en X et U . On peut donc supposer que X est un k -affinoïde et $U = D_X(f_0|f_1, \dots, f_n)$ avec f_0, \dots, f_n engendrant $\Gamma(X, \mathcal{O})$ en tant qu'idéal. D'après la proposition 1.1.37, dire que $q \notin \mathcal{M}(U)$ revient à dire que, pour au moins un indice $1 \leq i \leq n$, on a $\|f_0\|_q < \|f_i\|_q$. Ceci montre que $q \notin \mathcal{M}(D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n))$ pour $\lambda \in \sqrt{|k^\times|} \cap]1, +\infty[$ suffisamment proche de 1. Le résultat découle maintenant de la proposition 2.1.16.

C.Q.F.D.

Corollaire 2.1.19. — *Soient X une k -variété rigide quasi-compacte, $q \in \mathcal{M}(X)$ un point maximal et V un ouvert quasi-compact de X tel que $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)$. Il existe un ouvert quasi-compact U de X tel que $U \Subset_X V$ et $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(U)$.*

Démonstration. — En effet, comme $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)$, il existe un ouvert quasi-compact W de X tel que $X = V \cup W$ et $q \notin \mathcal{P}(W)$. Par le corollaire 2.1.18, on peut trouver $W \Subset_X W'$ tel que $q \notin \mathcal{P}(W')$. Il existe donc un ouvert quasi-compact U' de X tel que $U' \cup W' = X$ et $U' \cap W = \emptyset$. On a donc $q \in U'$ et $U' \Subset_X V$. Par le corollaire 2.1.17, on peut trouver $U' \Subset_X U \Subset_X V$. Comme $q \in \mathcal{P}(U')$, on a $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(U)$. C.Q.F.D.

Étant donné une k -variété rigide X et un ouvert quasi-compact $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$, on note $\mathcal{V}_X(U)$ le sous-ensemble des $V \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ tels que $U \Subset_X V$. S'il est non vide (par exemple, si la k -variété rigide X est elle-même quasi-compacte), l'ensemble $\mathcal{V}_X(U)$, ordonné par l'inclusion, est cofiltrant puisqu'il est stable par intersections finies.

Définition 2.1.20. — Soient X une k -variété rigide quasi-compacte et F un pré-faisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ (à valeurs dans une catégorie complète et cocomplète \mathcal{C}). On dit que F est surconvergent lorsque le morphisme évident

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V) \rightarrow F(U)$$

est inversible pour tout $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. Si de plus F est un faisceau pour la topologie des recouvrements admissibles, on parlera alors de faisceaux surconvercents.

On notera $\mathbf{OPreShv}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$ (resp. $\mathbf{OShv}_{\text{ad}}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$) la sous-catégorie pleine des pré-faisceaux (resp. faisceaux) surconvercents à valeurs dans \mathcal{C} .

Lorsque la k -variété rigide X n'est plus supposée quasi-compacte, nous dirons qu'un pré-faisceau F sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ est *surconvergent* si la restriction de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}(U)$ est un pré-faisceau surconvergent pour tout $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ (au sens de la définition 2.1.20). Le lemme ci-dessous assure qu'on retrouve la notion de surconvergence de départ lorsque la variété X est quasi-compacte.

Lemme 2.1.21. — Soit X une k -variété rigide quasi-compacte et soit F un pré-faisceau surconvergent sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ (au sens de la définition 2.1.20). Soit $Y \subset X$ un ouvert quasi-compact de X . Alors, la restriction $F|_Y$ de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}(Y)$ est un pré-faisceau surconvergent.

Démonstration. — Soit U un ouvert quasi-compact de Y . Puisque F est surconvergent, on a

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_Y(U)} F(V) \simeq \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_Y(U)} \text{Colim}_{W \in \mathcal{V}_X(V)} F(W).$$

Si $V \in \mathcal{V}_Y(U)$ et $W \in \mathcal{V}_X(V)$ alors $W \in \mathcal{V}_X(U)$. Réciproquement, soit $W \in \mathcal{V}_X(U)$. Par le corollaire 2.1.17, il existe un ouvert $W_0 \in \mathcal{V}_X(U)$ avec $W_0 \Subset_X W$. Alors $W_0 \cap Y \in \mathcal{V}_Y(U)$ et $W_0 \cap Y \Subset_X W$. Il vient que

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_Y(U)} \text{Colim}_{W \in \mathcal{V}_X(V)} F(W) \simeq \text{Colim}_{W \in \mathcal{V}_X(U)} F(W) = F(U).$$

Le lemme est démontré.

C.Q.F.D.

On aura également besoin d'une notion de surconvergence plus faible mais plus facile à vérifier en pratique. Étant donnée une k -variété rigide, on note $\text{Ouv}^{\text{af}}(X)$ le sous-ensemble de $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ formé des ouverts affinoïdes.

Définition 2.1.22. — Soit X une k -variété rigide et soit F un préfaisceau sur $\text{Ouv}^{\text{af}}(X)$. On dit que F est faiblement surconvergent si pour tout $U \in \text{Ouv}^{\text{af}}(X)$ et toute suite d'éléments f_0, f_1, \dots, f_n engendrant $\Gamma(U, \mathcal{O})$ comme idéal, le morphisme naturel

$$\text{Colim}_{\lambda \in \sqrt{|k^\times|}, \lambda > 1} F(D_U(\lambda f_0 | f_1, \dots, f_n)) \longrightarrow F(D_U(f_0 | f_1, \dots, f_n))$$

est inversible.

Un préfaisceau F sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ est dit faiblement surconvergent si sa restriction à $\text{Ouv}^{\text{af}}(X)$ est un préfaisceau faiblement surconvergent.

De la proposition 2.1.16, on déduit qu'un préfaisceau surconvergent sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ est un préfaisceau faiblement surconvergent. Cette implication est stricte en général. Toutefois, on montrera plus loin qu'un faisceau faiblement surconvergent sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ est automatiquement surconvergent (voir la proposition 2.1.29 ci-dessous).

Proposition 2.1.23. — Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Soit \mathcal{C} une catégorie complète, cocomplète et où les colimites filtrantes sont exactes. L'inclusion de $\mathbf{OPreShv}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$ dans $\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$ admet un adjoint à droite

$$\text{ov}_X : \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{OPreShv}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$$

qui à un préfaisceau F associe le préfaisceau surconvergent $\text{ov}_X(F)$ donné par

$$(2.12) \quad \text{ov}_X(F)(U) = \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V) \quad \text{pour } U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X).$$

De plus, le foncteur ov_X est exact.

Démonstration. — Il est clair que (2.12) définit un préfaisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. En effet, si $U' \subset U$, on a une inclusion $\mathcal{V}_X(U) \subset \mathcal{V}_X(U')$ qui fournit le morphisme de restriction $\text{ov}_X(F)(U) \rightarrow \text{ov}_X(F)(U')$.

Montrons que $\text{ov}(F)$ est surconvergent. Soit U un ouvert quasi-compact de X . On a

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} \text{ov}_X(F)(V) = \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} \text{Colim}_{W \in \mathcal{V}_X(V)} F(W).$$

Par le corollaire 2.1.17, pour tout $W \in \mathcal{V}_X(U)$ il existe $V \in \mathcal{V}_X(U)$ tel que $W \in \mathcal{V}_X(V)$. Il vient que

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} \text{Colim}_{W \in \mathcal{V}_X(V)} F(W) \simeq \text{Colim}_{W \in \mathcal{V}_X(U)} F(W) = \text{ov}_X(F)(U).$$

Le fait que ov_X est exact est clair puisque sa définition ne fait apparaître que des colimites filtrantes. Il reste à montrer que ov_X est l'adjoint à droite de l'inclusion évidente inc . Pour un préfaisceau F sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ et $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$, on dispose de flèches naturelles $\text{ov}_X(F)(U) = \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V) \rightarrow F(U)$ qui fournissent un morphisme de préfaisceaux $\text{ov}_X(F) \rightarrow F$ et donc une transformation naturelle $\delta : \text{inc} \circ \text{ov}_X \rightarrow \text{id}$.

D'autre part, si G est un préfaisceau surconvergent sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$, on a $\text{ov}_X(G) = G$, ce qui fournit une transformation naturelle inversible $\eta : \text{id} \simeq \text{ov}_X \circ \text{inc}$. Le lecteur vérifiera immédiatement que η et δ définissent un couple de foncteurs adjoints $(\text{inc}, \text{ov}_X)$. La proposition est démontrée. C.Q.F.D.

Pour étudier le foncteur ov_X , on aura besoin de quelques résultats de cofinalité pour les ensembles ordonnés $\mathcal{V}_X(U)$.

Lemme 2.1.24. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts quasi-compacts. Alors, l'application*

$$\prod_{i \in I} \mathcal{V}_X(U_i) \longrightarrow \mathcal{V}_X\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right),$$

qui à $(V_i)_{i \in I}$ associe $\bigcup_{i \in I} V_i$, est cofinale.

Démonstration. — C'est évident puisque l'application en question est surjective. En effet, si $V \in \mathcal{V}_X(\bigcup_{i \in I} U_i)$ alors $V \in \mathcal{V}_X(U_i)$ pour tout $i \in I$. C.Q.F.D.

Lemme 2.1.25. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts quasi-compacts. Alors, l'application*

$$\prod_{i \in I} \mathcal{V}_X(U_i) \longrightarrow \mathcal{V}_X\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right),$$

qui à $(V_i)_{i \in I}$ associe $\bigcap_{i \in I} V_i$, est cofinale.

Démonstration. — Par récurrence on se ramène au cas où $I = \{1, 2\}$. Soit $U_1 \cap U_2 \in_X V$ et choisissons $W \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ tel que $W \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$ et $W \cup V = X$. Comme $(W \cap U_1) \cap (W \cap U_2) = \emptyset$, il existe par la proposition 2.1.15 des ouverts quasi-compacts $V'_i \subset W$ tels que $(W \cap U_i) \in_W V'_i$ et $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$. On pose alors $V_i = V'_i \cup V$. On a bien $V_i \in \mathcal{V}_X(U_i)$ et $V_1 \cap V_2 = V$. C.Q.F.D.

Lemme 2.1.26. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte, et soient Y, U, Q des ouverts quasi-compacts de X . On suppose que $Q \subset Y$ et $Y \cap U \in_Y Q$. Il existe alors un ouvert quasi-compact W dans X tel que $U \in_X W$ et $Y \cap W \subset Q$. En d'autres termes, l'application $\mathcal{V}_X(U) \rightarrow \mathcal{V}_Y(Y \cap U)$, qui à $U \in_X W$ associe $Y \cap U \in_Y Y \cap W$, est cofinale.*

Démonstration. — Soit N un ouvert quasi-compact de Y tel que $Y = N \cup Q$ et $N \cap (Y \cap U) = \emptyset$. Comme $N \subset Y$, on a également $N \cap U = \emptyset$. Par la proposition 2.1.15, il existe $W \in \mathcal{V}_X(U)$ tel que $N \cap W = \emptyset$. On a forcément $Y \cap W \subset Q$. Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Proposition 2.1.27. — *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme de k -variétés rigides quasi-compacts. Soit U un ouvert quasi-compact de X et notons $U' = X' \widehat{\times}_X U$. L'application évidente $\mathcal{V}_X(U) \rightarrow \mathcal{V}_{X'}(U')$, qui à $U \in_X V$ associe $U' \in_{X'} X' \widehat{\times}_X V$, est cofinale.*

Démonstration. — Soit $(X'_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini par des ouverts quasi-compacts de X' . On note $f_i : X'_i \rightarrow X$ la restriction de f à X'_i et $U'_i = U' \cap X'_i$. Étant donné $V' \in \mathcal{V}_{X'}(U')$, on note $V'_i = V' \cap X'_i \in \mathcal{V}_{X'_i}(U'_i)$. Supposons le lemme démontré pour f_i . Il existe alors $V_i \in \mathcal{V}_X(U)$ tels que $f_i^{-1}(V_i) \subset V'_i$. Alors $V = \bigcap_{i \in I} V_i$ convient pour f .

On peut donc supposer que X' est un k -affinoïde et que $f(X')$ est contenu dans un ouvert affinoïde $W \subset X$. Il suffit de traiter le cas $X' \rightarrow W$. En effet, la conclusion du lemme est stable par composition des morphismes de variétés rigides quasi-compactes et le cas des immersions ouvertes est traité dans le lemme 2.1.26. Autrement dit, on peut supposer que X est aussi un k -affinoïde.

Pour terminer, remarquons que la propriété à démontrer est locale en U , i.e., qu'il suffit de la vérifier pour les ouverts d'un recouvrement admissible par des ouverts quasi-compacts de U . (Ceci découle immédiatement du lemme 2.1.24 appliqué à l'ouvert U' de X' .) Puisqu'on s'est ramené à traiter le cas où X est un k -affinoïde, on peut donc supposer que $U = D_X(f_0|f_1, \dots, f_n)$ avec f_0, \dots, f_n engendrant $\Gamma(X, \mathcal{O})$ comme idéal. Le résultat découle alors du fait que $X' \widehat{\times}_X D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n) \simeq D_{X'}(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n)$ et de la proposition 2.1.16 appliquée au k -affinoïde X' . C.Q.F.D.

Proposition 2.1.28. — *Soit X une k -variété rigide et soit F un faisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} complète, cocomplète et où les colimites filtrantes sont exactes. On suppose qu'il existe un recouvrement admissible $(X_i)_{i \in I}$ de X tel que la restriction $F|_{X_i}$ de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X_i)$ est un faisceau surconvergent. Alors F est un faisceau surconvergent.*

Démonstration. — On peut supposer que X est quasi-compacte et que les ouverts X_i sont quasi-compacts. On peut aussi supposer que I est fini. Soit U un ouvert quasi-compact de X et montrons que le morphisme évident

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V) \longrightarrow F(U)$$

est inversible. Comme F est un faisceau, la flèche ci-dessus s'identifie à

$$\begin{aligned} \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} \text{Eq} \left(\prod_{i \in I} F(V \cap X_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(V \cap X_i \cap X_j) \right) \\ \longrightarrow \text{Eq} \left(\prod_{i \in I} F(U \cap X_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} F(U \cap X_i \cap X_j) \right). \end{aligned}$$

Étant donné que les colimites filtrantes sont exactes dans \mathcal{C} , il suffit de montrer que

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V \cap X_i) \longrightarrow F(U \cap X_i) \quad \text{et} \quad \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V \cap X_i \cap X_j) \longrightarrow F(U \cap X_i \cap X_j)$$

sont inversibles. Par le lemme 2.1.26, les flèches ci-dessus s'identifient à

$$\text{Colim}_{Q \in \mathcal{V}_{X_i}(U \cap X_i)} F(Q) \longrightarrow F(U \cap X_i) \quad \text{et} \quad \text{Colim}_{R \in \mathcal{V}_{X_i \cap X_j}(U \cap X_i \cap X_j)} F(R) \longrightarrow F(U \cap X_i \cap X_j).$$

Ces flèches sont inversibles puisque $F|_{X_i}$ et $F|_{X_i \cap X_j}$ sont des faisceaux surconvergens.

C.Q.F.D.

Proposition 2.1.29. — *Soit X une k -variété rigide. On considère des préfaisceaux sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} complète, cocomplète et où les colimites filtrantes sont exactes.*

1) *Supposons que X est quasi-compacte. Alors, le foncteur ov_X préserve les faisceaux.*

2) *Supposons que \mathcal{C} possède une famille de foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ coreprésentables, qui commutent aux colimites filtrantes et qui détectent les isomorphismes. Soit F est un préfaisceau faiblement surconvergent sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. Alors, le faisceau $\mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)$ est surconvergent.*

Démonstration. — 1) Supposons que F est un faisceau et montrons que $\text{ov}_X(F)$ est encore un faisceau. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement admissible de $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ (avec I un ensemble fini). Il s'agit de montrer que le morphisme évident

$$(2.13) \quad \text{ov}(F)(U) \longrightarrow \text{Eq} \left(\prod_{i \in I} \text{ov}(F)(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \text{ov}(F)(U_i \cap U_j) \right)$$

est inversible.

Par le lemme 2.1.24, on a

$$\text{ov}(F)(U) = \underset{(V_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{V}_X(U_i)}{\text{Colim}} F \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right).$$

De même, par le lemme 2.1.25, on a

$$\text{ov}(F)(U_i \cap U_j) = \underset{(V_i, V_j) \in \mathcal{V}_X(U_i) \times \mathcal{V}_X(U_j)}{\text{Colim}} F(V_i \cap V_j).$$

Comme les colimites filtrantes sont exactes dans \mathcal{C} , la flèche (2.13) s'identifie à

$$\begin{aligned} & \underset{(V_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{V}_X(U_i)}{\text{Colim}} F \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \\ & \longrightarrow \underset{(V_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{V}_X(U_i)}{\text{Colim}} \text{Eq} \left(\prod_{i \in I} F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(V_i \cap V_j) \right). \end{aligned}$$

Comme F est un faisceau, $F(\bigcup_i V_i)$ est isomorphe à l'égalisateur de la double flèche $\prod_i F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(V_i \cap V_j)$. Ceci démontre la première partie de la proposition.

2) Supposons maintenant que F est un préfaisceau faiblement surconvergent et montrons que le faisceau associé $\mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)$ est surconvergent. Par la proposition 2.1.28, on peut supposer que la k -variété rigide X est un k -affinoïde (et en particulier quasi-compacte). L'hypothèse sur \mathcal{C} nous ramène au cas des préfaisceaux d'ensembles. On divisera la preuve en trois étapes.

Étape 1 : Il suffira de montrer que le morphisme évident

$$(2.14) \quad \text{ov}_X(\mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)) \longrightarrow \mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)$$

est inversible. (En effet, la source de ce morphisme est surconvergente.) Or, par la première partie de la démonstration, $\text{ov}_X(\mathfrak{a}_{\text{ad}}(F))$ est encore un faisceau. Il suffit donc de vérifier que (2.14) induit des isomorphismes sur les fibres en tout $p \in \mathcal{P}(X)$.

Fixons $p \in \mathcal{P}(X)$. Par la construction du foncteur ov_X (voir la proposition 2.1.23), on a

$$\text{ov}_X(\mathfrak{a}_{\text{ad}}(F))_p = \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(p)} \text{ov}(\mathfrak{a}_{\text{ad}}(F))(U) \simeq \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(p)} \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} \mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)(V).$$

Notons $q \in \mathcal{M}(X)$ l'unique point maximal tel que $p \in \overline{\{q\}}$. Pour un ouvert quasi-compact V de X , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $U \in \text{Flt}(p)$ tel que $U \Subset_X V$;
- (ii) $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)$.

(L'implication (i) \Rightarrow (ii) est claire puisque $q \in \mathcal{P}(U)$ et que $\overline{\mathcal{P}(U)} \subset \mathcal{P}(V)$; la réciproque est assurée par le corollaire 2.1.19.) Il s'ensuit une bijection naturelle

$$(2.15) \quad \text{Colim}_{\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)} \mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)(V) \xrightarrow{\sim} \text{ov}_X(\mathfrak{a}_{\text{ad}}(F))_p.$$

Étape 2 : On garde les notations de l'étape précédente. Ici, on montrera que l'application évidente

$$(2.16) \quad \text{Colim}_{\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)} F(V) \longrightarrow \text{Colim}_{\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)} \mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)(V)$$

est bijective.

Montrons d'abord que (2.16) est injective. Les colimites dans (2.16) sont indexées par les voisinages quasi-compacts de $\overline{\{q\}}$, i.e., les ouverts quasi-compacts $V \subset X$ tels que $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)$. Étant donné un tel V , quitte à le rétrécir, on peut le supposer affinoïde. (En effet, si $U = D_X(f_0|f_1, \dots, f_n)$ est un domaine rationnel de X avec $q \in \mathcal{P}(U)$ et si $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$ avec $\lambda > 1$, on a $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)$ avec $V = D_X(\lambda f_0|f_1, \dots, f_n)$. De plus, cette construction fournit un système cofiltrant de voisinages affinoïdes de $\overline{\{q\}}$.) Soient maintenant $a_1, a_2 \in F(V)$ deux sections de F au-dessus d'un voisinage affinoïde V de $\overline{\{q\}}$. On suppose que les images de a_1 et a_2 dans le but de (2.16) coïncident. Il s'ensuit que a_1 et a_2 ont même image dans F_p . On peut donc trouver un ouvert quasi-compact $V_0 \subset V$, avec $q \in \mathcal{P}(V_0)$, tel que $(a_1)|_{V_0} = (a_2)|_{V_0}$. Quitte à rétrécir V_0 , on peut supposer que c'est un domaine rationnel de V . Comme F est supposé faiblement surconvergent, il existe $V_0 \Subset_V V_1$ tel que $(a_1)|_{V_1} = (a_2)|_{V_1}$. Puisque $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)$, on a aussi $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V_1)$. Mais alors, a_1 et a_2 ont la même image dans la source de (2.16). Ceci démontre l'injectivité.

Pour la surjectivité de (2.16), on fixe une section $c \in \mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)(V)$ au-dessus d'un ouvert affinoïde V de X tel que $\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)$. On peut trouver un domaine rationnel $V_0 \subset V$ tel que $q \in \mathcal{P}(V_0)$ et $c|_{V_0}$ est l'image par $F \rightarrow \mathfrak{a}_{\text{ad}}(F)$ d'une section $d \in F(V_0)$. Comme F est faiblement surconvergent, on peut trouver $V_0 \Subset_V V_1$ et une section $e \in F(V_1)$ telle que $e|_{V_0} = d$. Ainsi, quitte à remplacer V par V_1 , on peut supposer

qu'il existe une section $e \in F(V)$ telle que $c|_{V_0}$ est l'image de $e|_{V_0}$ par $F \rightarrow a_{ad}(F)$. Soit $r \in \overline{\{q\}}$ et montrons que c et l'image de e dans $a_{ad}(F)$ sont égales au voisinage de r ; ceci terminera la preuve de la surjectivité. Il existe un ouvert affinoïde W de V tel que $r \in \mathcal{P}(W)$ et $c|_W$ est l'image d'une section $f \in F(W)$. Comme c et l'image de e dans $a_{ad}(F)$ coïncident au voisinage de q , il existe un domaine rationnel W_0 de W tel que $q \in \mathcal{P}(W_0)$ et $f|_{W_0} = e|_{W_0}$. Par la faible surconvergence de F , il existe $W_0 \Subset_W W_1$ tel que cette égalité a lieu sur W_1 . L'égalité $f|_{W_1} = e|_{W_1}$ montre que $c|_{W_1}$ est égale à l'image de $e|_{W_1}$ dans $a_{ad}(F)$. Or, on a bien $r \in \mathcal{P}(W_1)$ puisque $\mathcal{P}(W_1)$ contient l'adhérence de q dans $\mathcal{P}(W)$. On a donc montré que c et l'image de e dans $a_{ad}(F)$ sont égales au voisinage de r .

Étape 3 : Par l'étape précédente et la bijection (2.15), on déduit une bijection naturelle

$$(2.17) \quad \operatorname{Colim}_{\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)} F(V) \longrightarrow \operatorname{ov}_X(a_{ad}(F))_p.$$

De plus, le carré suivant

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Colim}_{\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)} F(V) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{ov}_X(a_{ad}(F))_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} F(U) & \xrightarrow{\sim} & a_{ad}(F)_p \end{array}$$

commute. Il nous reste donc à montrer que l'application évidente

$$(2.18) \quad \operatorname{Colim}_{\overline{\{q\}} \subset \mathcal{P}(V)} F(V) \longrightarrow \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} F(U)$$

est bijective. En raisonnant comme dans la première étape de la preuve de la seconde partie de l'énoncé (avec F au lieu de $a_{ad}(F)$), on voit que la source de (2.18) s'identifie à

$$\operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} \operatorname{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V).$$

Comme F est faiblement surconvergent, l'application (2.18) est bien bijective. La proposition est démontrée. C.Q.F.D.

La preuve précédente met en évidence une propriété importante des faisceaux surconvergents que l'on dégage dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.30. — *Les faisceaux et les préfaisceaux sont supposés à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} vérifiant l'hypothèse de la seconde partie de la proposition 2.1.29. Soit X une k -variété rigide et soit $f : F \rightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux faiblement surconvergents sur $\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. Pour que le morphisme $a_{ad}(f) : a_{ad}(F) \rightarrow a_{ad}(G)$ soit inversible, il faut et il suffit que le morphisme $f_p : F_p \rightarrow G_p$ soit inversible pour tout point maximal $p \in \mathcal{M}(X)$.*

Démonstration. — On peut supposer que \mathcal{C} est la catégorie des ensembles. On ne restreint pas la généralité en supposant que X est un k -affinoïde. Soit $p \in \mathcal{P}(X)$ et notons

$q \in \mathcal{M}(X)$ le point maximal tel que $p \in \overline{\{q\}}$. Nous allons construire, pour F faiblement surconvergent, une bijection naturelle $F_p \simeq F_q$. Ceci entraînera immédiatement le lemme.

En effet, on a une chaîne d'isomorphismes naturels (en F faiblement surconvergent) :

$$\begin{aligned} F_q &= \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(q)} F(U) \simeq \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(q)} \operatorname{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V) \simeq \operatorname{Colim}_{\{\overline{q}\} \subset \mathcal{P}(V)} F(V) \\ &\simeq \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} \operatorname{Colim}_{V \in \mathcal{V}_X(U)} F(V) \simeq \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}(p)} F(U) = F_p. \end{aligned}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) de la première étape de la preuve de la seconde partie de la proposition 2.1.29 pour obtenir les deuxième et troisième isomorphismes. Pour les premier et dernier isomorphismes, nous avons utilisé la surconvergence faible de F , le fait que les domaines rationnels sont cofiltrants dans $\operatorname{Flt}(q)$ et $\operatorname{Flt}(p)$, et la proposition 2.1.16. C.Q.F.D.

Voici un autre corollaire important de la proposition 2.1.29.

Proposition 2.1.31. — *Supposons que \mathcal{C} vérifie l'hypothèse de la seconde partie de la proposition 2.1.29 et soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Alors, $\mathbf{OShv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$ est complète et cocomplète, et le foncteur d'inclusion*

$$\mathbf{OShv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbf{Shv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$$

commute aux limites finies et colimites quelconques. De même, le foncteur

$$\operatorname{ov}_X : \mathbf{Shv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{OShv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$$

commute aux limites et colimites quelconques.

Démonstration. — Soit $(F_i)_{i \in I}$ un système projectif de faisceaux surconvergens. Alors $\operatorname{Lim}_i F_i$ est un faisceau. Par la proposition 2.1.29, $\operatorname{ov}_X \operatorname{Lim}_i F_i$ est un faisceau surconvergent. Il est facile de voir qu'il représente la limite projective de $(F_i)_{i \in I}$ dans $\mathbf{OShv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$.

De même, soit $(F_i)_{i \in I}$ est un système inductif de faisceaux surconvergens. Alors, la colimite des F_i dans la catégorie des préfaisceaux est un préfaisceau surconvergent. Par la proposition 2.1.29, $\operatorname{a}_{\text{ad}} \operatorname{Colim}_i F_i$ est un faisceau surconvergent. Il représente clairement la colimite de $(F_i)_{i \in I}$ dans $\mathbf{OShv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$.

Pour les autres assertions, on utilise les descriptions ci-dessus des limites et colimites dans $\mathbf{OShv}_{\text{ad}}(\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$, le fait que ov_X est un adjoint à droite à l'inclusion évidente et le fait qu'une limite finie de préfaisceaux surconvergens et un préfaisceau surconvergent. C.Q.F.D.

Pour la suite, on aura besoin d'une version homotopique de la notion de surconvergence que l'on introduit dans le lemme ci-dessous.

Lemme 2.1.32. — Soit X une k -variété rigide et soit F un préfaisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ à valeurs dans une catégorie de coefficients \mathfrak{M} (voir la définition 1.2.31). Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) Pour tout $A \in \mathcal{E}$, le préfaisceau d'ensembles $U \rightsquigarrow \text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, F(U))$ est surconvergent.
- (ii) Pour tout $Y \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ et $U \in \text{Ouv}^{\text{qc}}(Y)$, le morphisme

$$\text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_Y(U)} F(V) \longrightarrow F(U)$$

est une équivalence faible.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, nous dirons que F est homotopiquement surconvergent.

Démonstration. — L'implication (ii) \Rightarrow (i) découle du fait que $\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, -)$ commute aux colimites filtrantes pour $A \in \mathcal{E}$. Pour l'implication réciproque, on utilise en plus le fait que la famille $(\text{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, -))_{A \in \mathcal{E}}$ est conservative sur $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.

C.Q.F.D.

Soit X une k -variété rigide. On dit qu'un préfaisceau F sur Et^{qc}/X est *surconvergent* (resp. *faiblement surconvergent*, *homotopiquement surconvergent*) si la restriction de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}(U)$ possède cette propriété pour tout $U \in \text{Et}^{\text{qc}}/X$. On a le résultat suivant.

Proposition 2.1.33. — Soit X une k -variété rigide.

1) Soit F un préfaisceau sur Et^{qc}/X à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} complète, cocomplète et où les colimites filtrantes sont exactes. On suppose que F est surconvergent et qu'il est un faisceau pour la topologie des recouvrements admissibles. Alors, F est aussi un faisceau pour la topologie de Nisnevich.

2) Soit F un préfaisceau sur Et^{qc}/X à valeurs dans une catégorie de coefficients \mathfrak{M} . On suppose que F est homotopiquement surconvergent et qu'il vérifie la propriété de Brown-Gersten pour la topologie des recouvrements admissibles. Alors, F vérifie aussi la propriété de Brown-Gersten pour la topologie de Nisnevich.

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que la k -variété rigide X est quasi-compacte. Supposons donné un carré Nisnevich dans Et^{qc}/X

$$(2.19) \quad \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow e \\ V & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

avec e étale, j une immersion ouverte et $Y' - V' \simeq Y - V$. Nous allons montrer que F transforme ce carré en un carré cartésien (resp. homotopiquement cartésien) dans la situation de la première (resp. deuxième) partie de l'énoncé. Ceci permettra de conclure en utilisant la proposition 1.2.26 (resp. par la définition même de la propriété de Brown-Gersten).

Étant donné $W \in \mathcal{V}_Y(V)$, on forme le carré cartésien

$$(2.20) \quad \begin{array}{ccc} W' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow e \\ W & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Puisque F est surconvergent (resp. homotopiquement surconvergent), les morphismes

$$\operatorname{Colim}_{W \in \mathcal{V}_Y(V)} F(W) \longrightarrow F(V) \quad \text{et} \quad \operatorname{Colim}_{W \in \mathcal{V}_Y(V)} F(W') \longrightarrow F(V')$$

sont des isomorphismes (resp. des équivalences faibles). (Pour le deuxième morphisme, on utilise la proposition 2.1.27.) Il suffit donc de vérifier que F envoie le carré (2.20) sur un carré cartésien dans \mathcal{C} (resp. homotopiquement cartésien dans \mathfrak{M}). (On utilise pour cela l'hypothèse que les colimites filtrantes sont exactes (et préservent les équivalences faibles dans le cas respé).)

Comme $V \Subset_Y W$, on peut trouver un ouvert quasi-compact U dans Y tel que $W \cup U = Y$ et $V \cap U = \emptyset$. En particulier, $U' = Y' \widehat{\times}_Y U \simeq U$. Ainsi, le recouvrement admissible $(W \hookrightarrow Y, U \hookrightarrow Y)$ est plus fin que le recouvrement Nisnevich $(W \hookrightarrow Y, Y' \rightarrow Y)$. On se ramène alors à montrer que F transforme les carrés

$$\begin{array}{ccc} U \cap W & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} U' \cap W' & \longrightarrow & U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ W' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

en des carrés cartésiens (resp. homotopiquement cartésiens). Le résultat découle maintenant de l'hypothèse que F est un faisceau (resp. vérifie la propriété de Brown-Gersten) pour la topologie des recouvrements admissibles. C.Q.F.D.

Lemme 2.1.34. — *Soit X une k -variété rigide quasi-compacte et soit F un préfaisceau sur $\operatorname{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ à valeurs dans une catégorie de coefficients \mathfrak{M} . On suppose que F vérifie la propriété de Brown-Gersten pour la topologie des recouvrements admissibles. Alors, il est en de même de $\operatorname{ov}_X(F)$.*

Démonstration. — Soient U et V des ouverts quasi-compacts de X . Il s'agit de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{ov}_X(F)(U \cup V) & \longrightarrow & \operatorname{ov}_X(F)(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{ov}_X(F)(V) & \longrightarrow & \operatorname{ov}_X(F)(U \cap V) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien. Par les lemmes 2.1.24 et 2.1.25, ce carré est la colimite filtrante suivant $(U', V') \in \mathcal{V}_X(U) \times \mathcal{V}_X(V)$ des carrés

$$\begin{array}{ccc} F(U' \cup V') & \longrightarrow & F(U') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(V') & \longrightarrow & F(U' \cap V'). \end{array}$$

Le résultat découle maintenant du fait que les colimites filtrantes dans \mathfrak{M} sont exactes et préservent les équivalences faibles (et donc les carrés homotopiquement cartésiens).

C.Q.F.D.

On retient le résultat suivant.

Proposition 2.1.35. — *Soit X une k -variété rigide.*

1) *Soit F un complexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. On suppose que F est faiblement surconvergent. Alors, les préfaisceaux d'hypercohomologie $H_{\text{ad}}^i(-, F)$ sont surconvergents pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

2) *Soit F un complexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur Et^{qc}/X . On suppose que F est faiblement surconvergent. Le morphisme évident $H_{\text{ad}}^i(U, F) \rightarrow H_{\text{Nis}}^i(U, F)$ est inversible pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $U \in \text{Et}^{\text{qc}}/X$.*

Démonstration. — Dans la suite, on suppose que la k -variété rigide X est quasi-compacte, ce qui ne restreint pas la généralité.

1) Puisque $H_{\text{ad}}^i(-, F) \simeq H_{\text{ad}}^i(-, \mathfrak{a}_{\text{ad}}(F))$ et grâce à la proposition 2.1.29, il suffit de traiter le cas où F est un complexe de faisceaux surconvergents. Soit $F \rightarrow I$ un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux avec I projectivement fibrant (voir [3, Définition 4.4.40 et Corollaire 4.4.42]). En particulier, I vérifie la propriété de Brown-Gersten pour la topologie des recouvrements admissibles. Par la proposition 2.1.31, le foncteur ov_X est exact sur les faisceaux. Il s'ensuit que

$$F \simeq \text{ov}_X(F) \longrightarrow \text{ov}_X(I)$$

est encore un quasi-isomorphisme de faisceaux. Par le lemme 2.1.34, $\text{ov}_X(I)$ vérifie encore la propriété de Brown-Gersten pour la topologie des recouvrements admissibles. On a donc des isomorphismes $H_{\text{ad}}^i(U, F) \simeq H^i(\Gamma(U, \text{ov}_X(I)))$, ce qui permet de conclure. Remarquons au passage que notre argument entraîne aussi que le morphisme $\text{ov}_X(I) \rightarrow I$ est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux.

2) Comme ci-dessus, on peut supposer que F est un complexe de faisceaux surconvergents sur le site $(\text{Et}^{\text{qc}}/X, \text{ad})$. Soit $F \rightarrow I$ un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux avec I projectivement fibrant (voir [3, Définition 4.4.40 et Corollaire 4.4.42]). En particulier, I vérifie la propriété de Brown-Gersten pour la topologie des recouvrements admissibles. Par la première partie de la preuve, I est homotopiquement surconvergent. On en déduit, grâce à la proposition 2.1.33, que F vérifie la propriété de Brown-Gersten pour les carrés Nisnevich. Il s'ensuit que $H_{\text{Nis}}^i(U, F) \simeq H^i(\Gamma(U, I)) \simeq H_{\text{ad}}^i(U, F)$. La proposition est prouvée. C.Q.F.D.

2.2. Correspondances finies et préfaisceaux avec transferts en géométrie rigide

On fixe un corps valué complet k dont la valuation n'est pas supposée non triviale. Les conventions générales du début de la section 1.2 sont en vigueur. Dans cette section, on étend la notion de correspondance finie, bien connue en géométrie algébrique (voir [46]), au cadre de la géométrie rigide.

2.2.1. Faisceaux fh et multiplicités d'intersection. — En géométrie algébrique, les correspondances finies apparaissent naturellement en considérant la topologie fh comme le montre l'article de Suslin-Voevodsky [41]⁽⁴⁾. Ce point de vue facilite la vérification de certaines propriétés, notamment l'associativité de la composition des correspondances finies. De plus, il fournit beaucoup d'exemples de préfaisceaux avec transferts. Ainsi, nous avons choisi d'introduire les correspondances finies en géométrie rigide via les faisceaux fh . Nous suivrons de près l'article [41] en l'adaptant à la géométrie rigide. Rappelons que Afd/k désigne la catégorie des k -affinoïdes.

Définition 2.2.1. — *La topologie fh sur Afd/k est la topologie associée à la prétopologie formée des familles $(f_i : Y_i \rightarrow X)_{i \in I}$ telles que l'ensemble I est fini, et le morphisme $\bigcup_i f_i : \coprod_{i \in I} Y_i \rightarrow X$ est fini et surjectif.*

Étant donné un k -affinoïde X , le morphisme de normalisation $X' \rightarrow X$ est un recouvrement fh . Grâce à [1, Exposé III, Théorème 4.1], on a donc une équivalence de sites

$$(\text{Afd}/k, fh) \longrightarrow (\text{NorAfd}/k, fh),$$

où $\text{NorAfd}/k \subset \text{Afd}/k$ est la sous-catégorie pleine des k -affinoïdes normaux munie de la topologie induite de la topologie fh sur Afd/k ; cette topologie induite est encore notée « fh ».

On fera attention que la topologie fh sur NorAfd/k ne provient pas d'une prétopologie car les morphismes finis et surjectifs ne sont pas quarrables dans NorAfd/k . Un sous-préfaisceau H du préfaisceau représenté par $X \in \text{Ob}(\text{NorAfd}/k)$ est un crible couvrant pour la topologie fh si et seulement si, pour tout $F \in \text{Ob}(\mathbf{Shv}_{fh}(\text{Afd}/k))$, l'application

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\text{NorAfd}/k)}(X, \text{inc}_*(F)) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\text{NorAfd}/k)}(H, \text{inc}_*(F))$$

est bijective (avec $\text{inc} : \text{NorAfd}/k \hookrightarrow \text{Afd}/k$ le foncteur d'inclusion). La définition suivante est l'extension aux k -affinoïdes de [41, Définition 5.5].

Définition 2.2.2. — *Un morphisme de k -affinoïdes*

$$f : Y = \text{Spm}(B) \longrightarrow X = \text{Spm}(A)$$

⁽⁴⁾ Dans *loc. cit.*, les auteurs montrent qu'un faisceau pour la topologie qfh admet naturellement des transferts. Toutefois, leur argument n'utilise que les propriétés d'une topologie moins fine, à savoir, la topologie fh engendrée par les familles surjectives de morphismes finis.

est un revêtement pseudo-galoisien si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) X et Y sont intègres, et f est fini et surjectif;
- (ii) l'extension finie $\text{Frac}(A) \subset \text{Frac}(B)$ est pseudo-galoisienne de groupe de Galois G ;
- (iii) le sous-anneau $B \subset \text{Frac}(B)$ est invariant par l'action de G .

Il est clair que sous les conditions (i) et (ii) de la définition 2.2.2, la condition (iii) équivaut à ce que le morphisme de groupes $\text{Aut}(Y/X)^{\text{op}} \rightarrow G$ soit inversible. La condition (iii) est automatique lorsque le k -affinoïde Y est normal.

Lemme 2.2.3. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un revêtement pseudo-galoisien de k -affinoïdes. Lorsque X est normal, on a les propriétés suivantes.

- 1) Pour toute extension finie l/k et tout point l -rationnel $x \in X(l)$, l'action de $\text{Aut}(Y/X)$ sur les points fermés de $Y \widehat{\times}_X x$ est transitive.
- 2) Plus généralement, si $X' \rightarrow X$ est un morphisme de k -affinoïdes avec X' intègre, le groupe $\text{Aut}(Y/X)$ permute transitivement les composantes irréductibles de $Y' = Y \widehat{\times}_X X'$. De plus, si Y'_0 est une composante irréductible de Y' (considérée comme un k -affinoïde réduit), le morphisme $Y'_0 \rightarrow X'$ est un revêtement pseudo-galoisien.

Démonstration. — Pour démontrer la première partie du lemme, on peut supposer que k est algébriquement clos (quitte à le remplacer par la complétion d'une clôture algébrique). Ceci permettra d'identifier les points fermés aux points k -rationnels. On pose $A = \Gamma(X, \mathcal{O})$ et $B = \Gamma(Y, \mathcal{O})$. Alors B est une A -algèbre finie munie d'une action de $G = \text{Aut}(Y/X)^{\text{op}} = \text{Gal}(\text{Frac}(B)/\text{Frac}(A))$. La A -algèbre B^G est finie et l'extension $\text{Frac}(A) \subset \text{Frac}(B^G)$ est purement inséparable. Comme l'anneau A est normal, la A -algèbre B^G est radicielle. Or, le morphisme $\text{Spec}(B^G) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est fini et surjectif. C'est donc un homéomorphisme universel. En particulier, les idéaux premiers de A sont en bijection avec ceux de B^G . Par ailleurs, d'après [13, Chapitre V, §2, n° 2, Théorème 2], si \mathfrak{p} est un idéal premier de B^G , le groupe G opère transitivement sur l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{q} \subset B$ tels que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap B^G$. En se restreignant aux idéaux premiers maximaux, on obtient la première partie du lemme.

On passe à la seconde partie du lemme. On montre d'abord que G permute transitivement les composantes irréductibles de Y' . Pour cela, on fixe une composante irréductible Y'_1 de Y' qui domine X' . (Il y en a au moins une car $Y' \rightarrow X'$ est surjectif.) Soit Y'_2 une autre composante irréductible de Y' , distincte de Y'_1 . Nous allons montrer que Y'_2 est l'image de Y'_1 par un élément de G (ce qui suffit pour conclure). Soit y_2 un point fermé de Y'_2 appartenant au lieu régulier de Y'_{red} . Comme Y'_1 se surjecte sur X' , on peut trouver un point fermé y_1 de Y'_1 admettant la même image que y_2 dans X' . Par la première partie du lemme, il existe $\sigma \in \text{Aut}(Y/X)$ tel que $\sigma(y_2) = y_1$. En particulier, y_1 appartient aussi au lieu régulier de Y'_{red} . Comme $y_1 \in Y'_1 \cap \sigma(Y'_2)$,

on a forcément $Y'_1 = \sigma(Y'_2)$. En effet, l'intersection de deux composantes irréductibles distinctes ne peut pas contenir de points réguliers.

Il reste à voir que $f'_0 : Y'_0 \rightarrow X'$ est un revêtement pseudo-galoisien. Notons $f' : Y' \rightarrow X'$ le morphisme naturel. Notons aussi $G_0 = \text{Stab}_G(Y'_0)$ le stabilisateur dans G de la composante irréductible Y'_0 . Posons $A' = \Gamma(X', \mathcal{O})$, $B' = \Gamma(Y', \mathcal{O})$ et $B'_0 = \Gamma(Y'_0, \mathcal{O})$. Il existe un ouvert non vide $U \subset \text{Spec}(A')$ au-dessus duquel $\text{Spec}(B')$ est la somme disjointe de ses composantes irréductibles. Si $x \in U(l)$ est un point l -rationnel de U , avec l/k une extension finie, les composantes irréductibles de Y' induisent une partition de $Y' \widehat{\times}_{X'} x$. D'après la première partie du lemme, on déduit que G_0 agit transitivement sur les points fermés de $Y'_0 \widehat{\times}_{X'} x$. Ceci entraîne que le morphisme $\text{Spec}(B_0^{G_0}) \rightarrow \text{Spec}(A')$ est radiciel (alias universellement injectif, purement inséparable) au-dessus de U . L'extension $\text{Frac}(A') \subset \text{Frac}(B'_0)$ est donc pseudo-galoisienne de groupe de Galois G_0 . C.Q.F.D.

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.2.4. — *Soit F un faisceau fh sur Afn/k (resp. NorAfn/k) à valeurs dans une catégorie complète et cocomplète \mathcal{C} . Soit $f : Y \rightarrow X$ un revêtement pseudo-galoisien de k -affinoïdes avec X normal (resp. avec X et Y normaux). Alors, le morphisme évident $F(X) \xrightarrow{\sim} F(Y)^{\text{Aut}(Y/X)}$ est inversible.*

Démonstration. — Un faisceau fh sur NorAfn/k est la restriction d'un faisceau fh sur Afn/k , vue l'équivalence de catégories $\mathbf{Shv}_{fh}(\text{Afn}/k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Shv}_{fh}(\text{NorAfn}/k)$. Il suffit donc de traiter le cas non respé.

Considérons la famille des morphismes $(\text{id}, g) : Y \rightarrow Y \widehat{\times}_X Y$, indexée par $g \in \text{Aut}(Y/X)$. Le morphisme

$$\bigcup_{g \in \text{Aut}(Y/X)} (\text{id}, g) : \prod_{g \in \text{Aut}(Y/X)} Y \longrightarrow Y \widehat{\times}_X Y$$

est fini. Il est aussi surjectif (sur les points fermés) d'après le lemme 2.2.3. La famille $((\text{id}, g) : Y \rightarrow Y \widehat{\times}_X Y)_{g \in \text{Aut}(Y/X)}$ est donc un recouvrement fh . Il vient que le morphisme $F(Y \widehat{\times}_X Y) \rightarrow \prod_{g \in \text{Aut}(Y/X)} F(Y)$ est un monomorphisme. On en déduit que la suite

$$F(X) \longrightarrow F(Y) \rightrightarrows \prod_{g \in \text{Aut}(Y/X)} F(Y)$$

est exacte. D'où le résultat. C.Q.F.D.

Lorsqu'on se restreint aux k -affinoïdes normaux, on obtient la caractérisation suivante des faisceaux fh .

Corollaire 2.2.5. — *Soit F un préfaisceau d'ensembles sur NorAfn/k . Alors, F est un faisceau fh si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes.*

- (i) $F(\emptyset/k) = *$ et l'application évidente $F(X_1 \amalg X_2) \rightarrow F(X_1) \times F(X_2)$ est bijective (pour tous k -affinoïdes normaux X_1 et X_2).

- (ii) Si $f : Y \rightarrow X$ est un revêtement pseudo-galoisien de k -affinoïdes avec X et Y normaux, l'application évidente $F(X) \rightarrow F(Y)^{\text{Aut}(Y/X)}$ est bijective.

Démonstration. — Les conditions sont nécessaires par la proposition 2.2.4. Montrons qu'elles suffisent. On note $\text{inc} : \text{NorAfd}/k \hookrightarrow \text{Afd}/k$ le foncteur d'inclusion. Soit F un préfaisceau sur NorAfd/k vérifiant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. On montrera que le morphisme canonique $F \rightarrow \text{inc}_* \text{a}_{fh} \text{inc}^*(F)$ est inversible (où l'on note inc^* le foncteur « image inverse » sur les préfaisceaux suivant le foncteur inc), ce qui permet de conclure.

Soit X un k -affinoïde normal et connexe (donc non vide). Il faut montrer que l'application

$$(2.21) \quad F(X) \longrightarrow \underset{X' \rightarrow X \text{ fini et surjectif}}{\text{Colim}} \text{Eq} \left(\text{inc}^*(F)_{\text{sep}}(X') \rightrightarrows \text{inc}^*(F)_{\text{sep}}(X' \widehat{\otimes}_X X') \right)$$

est inversible (avec $\text{inc}^*(F)_{\text{sep}}$ le préfaisceau séparé associé au préfaisceau $\text{inc}^*(F)$). En effet, la condition (i) entraîne que le membre de droite dans (2.21) est l'ensemble des sections au-dessus de X du faisceau associé au préfaisceau séparé $\text{inc}^*(F)_{\text{sep}}$ (voir [1, Exposé II, §3]). Or, tout morphisme fini et surjectif $X' \rightarrow X$ se raffine par un revêtement pseudo-galoisien de X de source un k -affinoïde normal. On peut donc se restreindre dans (2.21) aux $X' \rightarrow X$ qui sont des revêtements pseudo-galoisiens de source normale. En reprenant le raisonnement dans la preuve de la proposition 2.2.4, on voit que pour $X' \rightarrow X$ un revêtement pseudo-galoisien, l'égalisateur dans (2.21) est simplement $(\text{inc}^*(F)_{\text{sep}}(X'))^{\text{Aut}(X'/X)}$. Ainsi, grâce à la condition (ii), on terminera la preuve du corollaire en montrant que, pour X' un k -affinoïde normal, l'application évidente $F(X') \rightarrow \text{inc}^*(F)_{\text{sep}}(X')$ est bijective.

L'application évidente $F(X') \rightarrow \text{inc}^*(F)(X')$ est bijective. En effet, c'est le cas pour F représentable, et cette propriété est stable par colimites arbitraires. Il reste à voir que l'application $\text{inc}^*(F)(X') \rightarrow \text{inc}^*(F)_{\text{sep}}(X')$ est injective (la surjectivité étant claire). Il faut donc montrer que l'application $F(X') = \text{inc}^*(F)(X') \rightarrow \prod_{i \in I} \text{inc}^*(F)(Y'_i)$ est injective pour toute famille $(f_i : Y'_i \rightarrow X')_{i \in I}$ couvrante pour la topologie fh . Or, on peut raffiner une telle famille par un revêtement pseudo-galoisien $Y' \rightarrow X'$ avec Y' normal. On se ramène alors à montrer que l'application $F(X') \rightarrow F(Y')$ est injective, ce qui découle de la condition (ii) de l'énoncé. C.Q.F.D.

Remarque 2.2.6. — Soit F un préfaisceau sur Afd/k et notons F_{sep} le préfaisceau séparé pour la topologie fh associé à F . La preuve du corollaire 2.2.5 montre que

$$\text{a}_{fh}(F)(X) = \underset{Y \rightarrow X \text{ pseudo-galoisien}}{\text{Colim}} F_{\text{sep}}(Y)^{\text{Aut}(Y/X)}$$

pour tout k -affinoïde normal et connexe X . De plus, on peut se restreindre dans la colimite ci-dessus aux revêtements pseudo-galoisiens de X de source normale. Ce fait servira dans la preuve de la proposition 2.2.7 ci-dessous.

Soit V une k -variété rigide. On note $\mathbb{Z} \otimes V$ le préfaisceau sur Afd/k qui à un k -affinoïde X associe le \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z} \otimes \text{hom}_k(X, V)$ librement engendré par les éléments de $\text{hom}_k(X, V)$. On note alors $\mathbb{Z}_{fh}(V)$ le faisceau fh associé à $\mathbb{Z} \otimes V$.

Proposition 2.2.7. — *Soit V une k -variété rigide. Pour X un k -affinoïde normal, le groupe $\mathbb{Z}_{fh}(V)(X) = \Gamma(X, \mathbb{Z}_{fh}(V))$ est naturellement isomorphe au \mathbb{Z} -module librement engendré par l'ensemble des sous-variétés rigides intègres $Z \subset X \widehat{\times}_k V$ telles que la projection évidente $Z \rightarrow X$ est finie et surjective au-dessus d'une composante connexe de X .*

Démonstration. — Il est facile de voir que $(\mathbb{Z} \otimes V)(Y) \simeq (\mathbb{Z} \otimes V)_{\text{sep}}(Y)$ pour tout k -affinoïde intègre Y . Soit X un k -affinoïde normal et connexe. D'après la remarque 2.2.6, on a :

$$\mathbb{Z}_{fh}(V)(X) = \underset{Y \rightarrow X}{\text{Colim}}_{\text{pseudo-galoisien}} (\mathbb{Z} \otimes \text{hom}_k(Y, V))^{\text{Aut}(Y/X)}.$$

On note $\text{hom}_k(Y, V)/\text{Aut}(Y/X)$ l'ensemble des orbites de l'action de $\text{Aut}(Y/X)$ sur $\text{hom}_k(Y, V)$. On vérifie aisément que l'application

$$\mathbb{Z} \otimes \left(\frac{\text{hom}_k(Y, V)}{\text{Aut}(Y/X)} \right) \longrightarrow (\mathbb{Z} \otimes \text{hom}_k(Y, V))^{\text{Aut}(Y/X)},$$

qui à une orbite $O \in \text{hom}_k(Y, V)/\text{Aut}(Y/X)$ associe la somme $\sum_{f \in O} f$, est bijective. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{fh}(V)(X) &= \underset{Y \rightarrow X}{\text{Colim}}_{\text{pseudo-galoisien}} \mathbb{Z} \otimes \left(\frac{\text{hom}_k(Y, V)}{\text{Aut}(Y/X)} \right) \\ &= \mathbb{Z} \otimes \left(\underset{Y \rightarrow X}{\text{Colim}}_{\text{pseudo-galoisien}} \frac{\text{hom}_k(Y, V)}{\text{Aut}(Y/X)} \right). \end{aligned}$$

On note $\text{sv}_0(X, V)$ l'ensemble des sous-variétés rigides de $X \widehat{\times}_k V$ qui sont intègres, finies et surjectives sur X . (Rappelons que X est supposé connexe.) Étant donné un revêtement pseudo-galoisien $c : Y \rightarrow X$ et un morphisme $f : Y \rightarrow V$, on note $Z(c, f) \subset X \widehat{\times}_k V$ l'image du morphisme fini⁽⁵⁾ $(c, f) : Y \rightarrow X \widehat{\times}_k V$. C'est un élément de $\text{sv}_0(X, V)$. Si $\sigma \in \text{Aut}(Y/X)$, on a $Z(c, f \circ \sigma) = Z(c, f)$. Ainsi, l'application $Z(-, -) : \text{hom}_k(Y, V) \rightarrow \text{sv}_0(X, V)$ se factorise par $\text{hom}_k(Y, V)/\text{Aut}(Y, X)$. On obtient ainsi une application

$$\underset{Y \rightarrow X}{\text{Colim}}_{\text{pseudo-galoisien}} \frac{\text{hom}_k(Y, V)}{\text{Aut}(Y/X)} \longrightarrow \text{sv}_0(X, V).$$

Nous allons montrer que cette application est bijective, ce qui terminera la preuve de la proposition.

On montre d'abord la surjectivité. Soit $Z \subset X \widehat{\times}_k V$ une sous-variété rigide intègre, finie et surjective sur X . Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement pseudo-galoisien qui domine le

⁽⁵⁾ On rappelle que toutes nos variétés rigides sont supposées séparées. Le fait que V soit séparée est utilisé ici pour assurer la finitude du morphisme (c, f) .

morphisme $Z \rightarrow X$. On dispose donc d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & & & & \\
 \searrow & \xrightarrow{f} & & & \\
 & & Z & \longrightarrow & V \\
 \searrow & & \downarrow & & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

On a alors $Z = Z(c, f)$.

Pour l'injectivité, on considère des revêtements pseudo-galoisiens $c_i : Y_i \rightarrow X$ et des morphismes de k -variétés rigides $f_i : Y_i \rightarrow V$ (pour $i \in \{1, 2\}$). On suppose que $Z(c_1, f_1) = Z(c_2, f_2)$. On peut trouver un revêtement pseudo-galoisien $c : Y \rightarrow X$ qui domine c_1 et c_2 . Soient $d_1 : Y \rightarrow Y_1$ et $d_2 : Y \rightarrow Y_2$ des morphismes de X -affinoïdes. Étant donné que f_i et $f_i \circ d_i$ ont même classe dans $\text{Colim}_{X'/X} \text{hom}_k(X', V)/\text{Aut}(X'/X)$, on peut supposer que $Y_1 = Y_2 = Y$. On pose $Z = Z(c, f_1) = Z(c, f_2)$, et on note $e_i : Y \rightarrow Z$ l'unique morphisme fini et surjectif qui factorise (c, f_i) . Puisque $\text{Frac}(\Gamma(Z, \mathcal{O}))$ est une extension finie de $\text{Frac}(\Gamma(X, \mathcal{O}))$, l'action de $\text{Aut}(Y/X)$ sur $\text{hom}_X(Y, Z)$ est transitive. Il existe donc $\sigma \in \text{Aut}(Y, X)$ tel que $e_2 = e_1 \circ \sigma$. Il s'ensuit que $f_2 = f_1 \circ \sigma$. Ceci montre que f_1 et f_2 ont même classe dans $\text{hom}_k(Y, V)/\text{Aut}(Y/X)$. L'injectivité est démontrée. C.Q.F.D.

Dans la suite du paragraphe, il sera pratique d'utiliser la notation suivante.

Notation 2.2.8. — Si X est un k -affinoïde intègre, on pose $k(X) = \text{Frac}(\Gamma(X, \mathcal{O}))$.

Étant donnée une extension finie de corps L/K , on note $[L : K]_{\text{sep}}$ et $[L : K]_{\text{isp}}$ le degré et l'indice de la sous-extension séparable maximale de L/K . Ainsi, on a $[L : K] = [L : K]_{\text{sep}} \cdot [L : K]_{\text{isp}}$.

Proposition 2.2.9. — Soit F un faisceau fh de groupes abéliens sur Afd/k . Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et surjectif entre k -affinoïdes intègres. On suppose que X est normal et on choisit un revêtement pseudo-galoisien $g : R \rightarrow X$ tel que $\text{hom}_X(R, Y)$ est non vide. (Par exemple, on peut prendre pour R le normalisé de X dans la clôture pseudo-galoisienne de l'extension $k(Y)/k(X)$.) Étant donné $a \in F(Y)$, on note $\text{Tr}_f(a)$ ou encore $\text{Tr}_{Y/X}(a)$ l'unique élément de $F(X)$ dont la restriction à $F(R)$ est donnée par

$$(2.22) \quad \left([k(Y) : k(X)]_{\text{isp}} \sum_{\sigma \in \text{hom}_X(R, Y)} F(\sigma)(a) \right) \in F(R)^{\text{Aut}(R/X)}.$$

L'élément $\text{Tr}_f(a)$ est alors indépendant du choix du revêtement pseudo-galoisien g . On obtient ainsi un morphisme canonique de groupes abéliens $\text{Tr}_f : F(Y) \rightarrow F(X)$ qu'on appelle le morphisme trace.

Démonstration. — Seule l'indépendance du choix de g nécessite une démonstration. Soit $h : P \rightarrow X$ un deuxième revêtement pseudo-galoisien avec $\text{hom}_X(P, Y) \neq \emptyset$.

On se ramène immédiatement au cas $\text{hom}_X(P, R) \neq \emptyset$ et on fixe $t : P \rightarrow R$ un X -morphisme. Notons provisoirement $\text{Tr}_f^g(a)$ et $\text{Tr}_f^h(a)$ les traces de a calculées à l'aide de g et h respectivement. Étant donné que les morphismes $F(X) \rightarrow F(R)$ et $F(t) : F(R) \rightarrow F(P)$ sont injectifs, il suffit de montrer l'égalité $(\text{Tr}_f^g(a))|_P = (\text{Tr}_f^h(a))|_P$ dans $F(P)$. Il s'agit donc de comparer les éléments

$$F(t)\left([k(Y) : k(X)]_{\text{isp}} \sum_{\sigma \in \text{hom}_X(R, Y)} F(\sigma)(a)\right) \quad \text{et} \quad \left([k(Y) : k(X)]_{\text{isp}} \sum_{\sigma \in \text{hom}_X(P, Y)} F(\sigma)(a)\right).$$

Le résultat découle maintenant du fait que $(-) \circ t : \text{hom}_X(R, Y) \rightarrow \text{hom}_X(P, Y)$ est une application bijective. C.Q.F.D.

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et surjectif de k -affinoïdes intègres. Soit $g : R \rightarrow X$ un revêtement pseudo-galoisien tel que $\text{hom}_X(R, Y) \neq \emptyset$. Soit $s : X' \rightarrow X$ un morphisme quelconque de k -affinoïdes avec X' intègre. Supposons de plus que X et X' sont normaux. Par le lemme 2.2.3, le groupe $\text{Aut}(R/X)$ agit transitivement sur les composantes irréductibles de $R' = R \widehat{\times}_X X'$. On en fixe une, $R'_0 \subset R'$, et on note $g'_0 : R'_0 \rightarrow X'$ le morphisme évident. C'est un revêtement pseudo-galoisien. L'ensemble des composantes irréductible de R' est naturellement paramétré par $\text{Aut}(R/X)/\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)$ via $\sigma \text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0) \rightsquigarrow \sigma(R'_0)$. On note $\{Y'_i, i \in I\}$ l'ensemble des composantes irréductibles de $Y' = Y \widehat{\times}_X X'$. Pour $i \in I$, le morphisme $f'_i : Y'_i \rightarrow X'$ est fini et surjectif car Y'_i est l'image d'une composante irréductible de R' (qui est nécessairement finie et surjective sur X' par le lemme 2.2.3).

Considérons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R'_0 & \xrightarrow{t'_0} & R \\ g'_0 \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{s} & X. \end{array}$$

Soit F un faisceau fh de groupes abéliens sur Afd/k . Pour $a \in F(Y)$, on a les égalités

$$\begin{aligned} (2.23) \quad F(g'_0)F(s)\text{Tr}_f(a) &= F(t'_0)F(g)\text{Tr}_f(a) \\ &= [k(Y) : k(X)]_{\text{isp}} F(t'_0) \sum_{\sigma \in \text{hom}_X(R, Y)} F(\sigma)(a) \\ &= [k(Y) : k(X)]_{\text{isp}} \sum_{\sigma \in \text{hom}_X(R, Y)} F(\sigma t'_0)(a). \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$m : \text{hom}_X(R, Y) \longrightarrow \coprod_{i \in I} \text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)$$

qui à $\sigma \in \text{hom}_X(R, Y)$ associe l'unique morphisme $R'_0 \rightarrow Y'_{i(\sigma)}$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} R'_0 & \xrightarrow{t'_0} & R \\ \vdots & & \downarrow \sigma \\ Y'_{i(\sigma)} & \xrightarrow{s'_{i(\sigma)}} & Y. \end{array}$$

Cette application est surjective. Ses fibres forment une partition de $\text{hom}_X(R, Y)$. La dernière expression dans (2.23) se réécrit

$$\begin{aligned} (2.24) \quad [k(Y) : k(X)]_{\text{isp}} & \sum_{i \in I} \sum_{\sigma'_i \in \text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)} \sum_{\sigma \in m^{-1}(\sigma'_i)} F(\sigma t'_0)(a) \\ & = [k(Y) : k(X)]_{\text{isp}} \sum_{i \in I} \sum_{\sigma'_i \in \text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)} |m^{-1}(\sigma'_i)| F(\sigma'_i) F(s'_i)(a). \end{aligned}$$

Le lemme suivant calcule les cardinaux des fibres de l'application m .

Lemme 2.2.10. — *Notons l le nombre des composantes irréductibles de R' . Pour $i \in I$, choisissons un X -morphisme $R \rightarrow Y$ et notons l_i le nombre des composantes irréductibles de R' dont l'image par le X' -morphisme $R' \rightarrow Y'$, obtenu par changement de base du X -morphisme $R \rightarrow Y$, est Y'_i . (Le nombre l_i ne dépend pas du choix du X -morphisme $R \rightarrow Y$.)*

Soit $\sigma'_i : R'_0 \rightarrow Y'_i$ un X' -morphisme. Alors, on a

$$(2.25) \quad |m^{-1}(\sigma'_i)| = \frac{[k(Y) : k(X)]_{\text{sep}} \cdot l_i}{[k(Y'_i) : k(X')]_{\text{sep}} \cdot l}.$$

En particulier, $|m^{-1}(\sigma'_i)|$ ne dépend que de i .

Démonstration. — Le groupe $\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)$ agit sur les ensembles

$$\text{hom}_X(R, Y) \quad \text{et} \quad \coprod_{i \in I} \text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)$$

par composition à gauche et le morphisme m est $\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)$ -équivariant. De plus, l'action de $\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)$ sur $\text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)$ est transitive. On en déduit que les fibres des éléments de $\text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)$ ont le même cardinal qu'on notera m_i . On a clairement

$$m_i = \frac{|\text{hom}_X^{(i)}(R, Y)|}{|\text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)|}$$

où $\text{hom}_X^{(i)}(R, Y) = m^{-1}(\text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i))$ est l'ensemble des $\sigma \in \text{hom}_X(R, Y)$ tels que $\sigma(R'_0) = Y'_i$.

On fixe un X -morphisme $\sigma : R \rightarrow Y$ tel que $\sigma(R'_0) = Y'_i$. Notons $H \subset \text{Aut}(R/X)$ le sous-ensemble des τ tels que $\sigma(\tau(R'_0)) = Y'_i$. On a bien sûr $\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0) \subset H$ et H est stable par multiplication à droite (i.e., composition à gauche) par les éléments de $\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)$. Le quotient $H/\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)$ s'identifie à l'ensemble

de composantes irréductibles de R' qui s'envoient sur Y'_i par σ via l'association $\tau\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0) \rightsquigarrow \tau(R'_0)$. On a donc

$$l_i = \frac{|H|}{|\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)|}.$$

Par ailleurs, H est stable par multiplication à gauche par le sous-groupe $\text{Aut}(R/Y) \subset \text{Aut}(R/X)$ (où R est considéré comme un Y -affinoïde via le morphisme σ). De plus, on a une bijection $\sigma \circ H \simeq \text{Aut}(R/Y) \setminus H$. Il s'ensuit que $\sigma \circ H \subset \text{hom}_X(R, Y)$ est de cardinal

$$\frac{|H|}{|\text{Aut}(R/Y)|} = \frac{|\text{Stab}_{\text{Aut}(R/X)}(R'_0)| \cdot l_i}{|\text{Aut}(R/Y)|} = \frac{|\text{Aut}(R/X)| \cdot l_i}{|\text{Aut}(R/Y)| \cdot l} = \frac{[k(Y) : k(X)]_{\text{sep}} \cdot l_i}{l}.$$

Étant donné que $\text{Aut}(R/X)$ agit transitivement sur $\text{hom}_X(R, Y)$, on voit que $\text{hom}_X^{(i)}(R, Y) = \sigma \circ H$. On déduit en fin de compte que

$$m_i = \frac{[k(Y) : k(X)]_{\text{sep}} \cdot l_i}{[k(Y'_i) : k(X')]_{\text{sep}} \cdot l}.$$

Le lemme est démontré.

C.Q.F.D.

Grâce au lemme 2.2.10, la dernière expression dans (2.24) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & [k(Y) : k(X)]_{\text{isip}} \sum_{i \in I} \frac{[k(Y) : k(X)]_{\text{sep}} \cdot l_i}{[k(Y'_i) : k(X')]_{\text{sep}} \cdot l} \sum_{\sigma'_i \in \text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)} F(\sigma'_i)F(s'_i)(a) \\ &= \sum_{i \in I} \frac{[k(Y) : k(X)]_{\text{isip}} \cdot [k(Y) : k(X)]_{\text{sep}} \cdot l_i}{[k(Y'_i) : k(X')]_{\text{isip}} \cdot [k(Y'_i) : k(X')]_{\text{sep}} \cdot l} \left([k(Y'_i) : k(X')]_{\text{isip}} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \times \sum_{\sigma'_i \in \text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)} F(\sigma'_i)F(s'_i)(a) \left. \right) \\ &= \sum_{i \in I} \frac{[k(Y) : k(X)] \cdot l_i}{[k(Y'_i) : k(X')] \cdot l} \left([k(Y'_i) : k(X')]_{\text{isip}} \sum_{\sigma'_i \in \text{hom}_{X'}(R'_0, Y'_i)} F(\sigma'_i)F(s'_i)(a) \right) \\ &= F(g'_0) \sum_{i \in I} \frac{[k(Y) : k(X)] \cdot l_i}{[k(Y'_i) : k(X')] \cdot l} \cdot \text{Tr}_{Y'_i/X'}(F(s'_i)(a)). \end{aligned}$$

On fera attention que les coefficients

$$n_i = \frac{[k(Y) : k(X)] \cdot l_i}{[k(Y'_i) : k(X')] \cdot l}$$

sont a priori dans $\mathbb{Z}[1/p]$ avec p l'exposant caractéristique de k . Ainsi, l'égalité ci-dessus n'a de sens qu'après multiplication par le p.p.c.m. des dénominateurs des représentants irréductibles des rationnels n_i . Étant donné que $F(g'_0)$ est injectif, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.2.11. — *Supposons donné un carré cartésien de k -affinoïdes*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{s'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec f fini et surjectif, Y intègre, et X et X' normaux et connexes. On note $\{Y'_i, i \in I\}$ l'ensemble des composantes irréductibles de Y' , et f'_i et s'_i les restrictions de f' et s' à Y'_i . Il existe alors une unique famille $(n_i)_{i \in I} \in (\mathbb{Z}[1/p])^I$ telle que, pour tout faisceau fh de groupes abéliens F , on a

$$p^r F(s) \circ \mathrm{Tr}_f = \sum_{i \in I} (p^r n_i) \mathrm{Tr}_{f'_i} \circ F(s'_i)$$

avec $r \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que les $p^r n_i$ sont tous dans \mathbb{Z} .

Démonstration. — L'existence est claire par le calcul précédent. Pour l'unicité, on prend $F = \mathbb{Z}_{fh}(Y)$ et l'élément $\mathrm{id}_Y \in \mathbb{Z}_{fh}(Y)(Y)$. On a alors

$$p^r (\mathrm{Tr}_{Y/X}(\mathrm{id}_Y))|_{X'} = \sum_{i \in I} (p^r n_i) \mathrm{Tr}_{Y'_i/X'}(s'_i).$$

Il suffit alors de montrer que les éléments $\mathrm{Tr}_{Y'_i/X'}(s'_i)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{Z}_{fh}(Y)(X')$. Modulo l'identification de la proposition 2.2.7, $\mathrm{Tr}_{Y'_i/X'}(s'_i)$ est un multiple non nul de Y'_i vue comme sous-variété rigide de $X' \widehat{\times}_k Y$. Mais $\mathbb{Z}_{fh}(Y)(X')$ est librement engendré par les sous-variétés rigides de $X' \widehat{\times}_k Y$ intègres, finies et surjectives sur X' . C.Q.F.D.

Définition 2.2.12. — *Le nombre n_i défini ci-dessus est appelé la multiplicité galoisienne de la composante Y'_i . On le notera aussi $n(Y'_i)$, $n_f(Y'_i)$ ou $n_{Y/X}(Y'_i)$ selon le contexte.*

Corollaire 2.2.13. — *On suppose donné un diagramme commutatif de k -affinoïdes à carrés cartésiens*

$$\begin{array}{ccccc} Y'' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y \\ f'' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ X'' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

avec Y intègre, X , X' et X'' normaux et connexes. Soit Y''_0 une composante irréductible de Y'' . On note $\{Y'_i; i \in I_0\}$ l'ensemble des composantes irréductibles de Y' telles que $Y''_0 \subset Y'_i \widehat{\times}_{X'} X''$. On a alors l'égalité

$$n_{Y/X}(Y''_0) = \sum_{i \in I_0} n_{Y/X}(Y'_i) n_{Y'_i/X'}(Y''_0).$$

Démonstration. — Ceci découle immédiatement de l'unicité dans le théorème 2.2.11.

C.Q.F.D.

Lorsque X est lisse, les multiplicités galoisiennes coïncident avec les multiplicités de Serre (voir [39]). Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 2.2.14. — *On garde les notations et les hypothèses du théorème 2.2.11. On suppose de plus que le k -affinoïde X est lisse. Notons $A = \Gamma(X, \mathcal{O})$, $B = \Gamma(Y, \mathcal{O})$, $A' = \Gamma(X', \mathcal{O})$, $B' = \Gamma(Y', \mathcal{O})$ et $\mathfrak{p}_i \subset B'$ l'idéal premier (minimal) définissant Y'_i . On a alors la formule*

$$(2.26) \quad n_{Y/X}(Y'_i) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \operatorname{lg}_{B'_{\mathfrak{p}_i}} (\operatorname{Tor}_r^A(A', B) \otimes_{B'} B'_{\mathfrak{p}_i}).$$

En particulier, $n_{Y/X}(Y'_i)$ est un entier (strictement positif).

Démonstration. — On note provisoirement $n'_i = n'_{Y/X}(Y'_i)$ les nombres donnés par le membre de droite dans l'égalité (2.26). On procède en deux étapes.

Étape 1 : Le but de cette étape est de se ramener au cas où Y' est irréductible. Soit $t : X'' \rightarrow X'$ un morphisme dominant de k -affinoïdes avec X'' intègre et $k(X') \subset k(X'')$ une extension séparable mais non nécessairement algébrique (c'est le cas, par exemple, si X'' est un ouvert affinoïde connexe de X'). Reprenons les notations du corollaire 2.2.13. L'ensemble I_0 est un singleton ; il correspond en effet à l'unique composante irréductible Y'_0 de Y' dominée par le morphisme $Y''_0 \rightarrow Y'$. (On utilise ici le fait que le morphisme $Y'' \rightarrow Y'$ est dominant.) Le corollaire 2.2.13 fournit donc l'égalité $n_{Y/X}(Y''_0) = n_{Y/X}(Y'_0)$. Par ailleurs, il est immédiat que $n'_{Y/X}(Y''_0) = n'_{Y/X}(Y'_0)$. Il suffit donc de montrer la proposition en remplaçant X' par X'' . En prenant pour X'' un X' -affinoïde étale suffisamment fin, on peut supposer que X' est régulier et que Y' est une somme disjointe de ses composantes irréductibles qui sont régulières et purement inséparables au-dessus de X' . On peut aussi supposer qu'il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & E \\ \parallel & & \downarrow e \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

tel que :

- E est un k -affinoïde connexe et e est un morphisme étale,
- $E \widehat{\times}_X Y$ est une somme disjointe $\coprod_{i \in I} F_i$ telle que $(F_i \widehat{\times}_E X')_{\text{red}} = X'_i$.

En utilisant une deuxième fois le corollaire 2.2.13, on se ramène à traiter le cas du carré cartésien (à nil-immersion près)

$$\begin{array}{ccc} Y'_i & \longrightarrow & F_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & E. \end{array}$$

On peut donc supposer que I est un singleton.

Étape 2 : Par l'étape précédente, on peut supposer que Y' est irréductible. Avec les notations du lemme 2.2.10, on a donc $l_i = l$ et la multiplicité galoisienne de Y' est simplement

$$n(Y') = \frac{[k(Y) : k(X)]}{[k(Y') : k(X')]}.$$

Soit $P_\bullet \rightarrow B$ une résolution projective du A -module de type fini B . Comme l'anneau A est régulier, on peut supposer que le complexe P_\bullet est borné. La caractéristique d'Euler-Poincaré de $P_\bullet \otimes_A l$, avec l un corps muni d'un morphisme $A \rightarrow l$, ne dépend que de B . En prenant $l = k(A)$ et $l = k(A')$, on obtient les égalités

$$[k(Y) : k(X)] = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \operatorname{lg}_{k(A')} (\operatorname{Tor}_r^A(A', B) \otimes_{B'} B'_\mathfrak{p}) = [k(Y') : k(X')] n'(Y')$$

avec \mathfrak{p} le nilradical de B' . La proposition est démontrée.

C.Q.F.D.

On aura besoin de généraliser le théorème 2.2.11 à des changements de base par des morphismes d'affinoïdes définis sur des corps valués complets différents. Notons Afd/k la catégorie dont les objets sont les couples (X, K) avec K/k une extension de corps valués complets et X un K -affinoïde. Un morphisme $(Y, L) \rightarrow (X, K)$ est la donnée d'un morphisme isométrique d'extensions $K \hookrightarrow L$ et d'un morphisme de L -affinoïdes $Y \rightarrow X \widehat{\otimes}_K L$. Cette catégorie est munie de la topologie fh de la manière évidente; un préfaisceau F sur Afd/k est un faisceau fh si la restriction de F à Afd/K est un faisceau fh pour toute extension de corps valués complets K/k . En particulier, on dispose de morphismes traces pour les faisceaux fh de groupes abéliens.

Théorème 2.2.15. — *Supposons donné un carré cartésien dans Afd/k*

$$\begin{array}{ccc} (Y', L) & \xrightarrow{s'} & (Y, K) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (X', L) & \xrightarrow{s} & (X, K) \end{array}$$

avec f fini et surjectif, Y intègre, et X et X' normaux et connexes. On note $\{Y'_i, i \in I\}$ l'ensemble des composantes irréductibles de Y' , et f'_i et s'_i les restrictions de f' et s' à Y'_i . Il existe alors une unique famille $(n_i)_{i \in I} \in (\mathbb{Z}[1/p])^I$ telle que, pour tout faisceau fh de groupes abéliens F sur Afd/k , on a

$$p^r F(s) \circ \operatorname{Tr}_f = \sum_{i \in I} (p^r n_i) \operatorname{Tr}_{f'_i} \circ F(s'_i)$$

avec $r \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que les $p^r n_i$ sont tous dans \mathbb{Z} .

Le nombre n_i est appelé la multiplicité galoisienne de la composante Y'_i et on le notera $n(Y'_i)$ (ou $n_{Y/X}(Y'_i)$). Ces multiplicités galoisiennes vérifient une formule d'associativité comme dans le corollaire 2.2.13. De plus, si X est régulier, les n_i sont des entiers naturels qui sont donnés par la formule de Serre comme dans la proposition 2.2.14.

Démonstration. — La preuve du théorème 2.2.11 se transporte sans modifications au cas des faisceaux fh sur Afd/k . Il en est de même de la preuve du corollaire 2.2.13 et de la proposition 2.2.14. C.Q.F.D.

2.2.2. Correspondances finies et préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/k .

— Soit V une k -variété rigide. Étant donné un k -affinoïde normal et connexe X , on note $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X) \subset \mathbb{Z}_{fh}(V)(X)$ le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $\text{Tr}_f(a)$ avec $f : X' \rightarrow X$ un morphisme fini surjectif, X' un k -affinoïde intègre et $a \in \text{hom}_k(X', V)$. Lorsque X est normal mais non nécessairement connexe, on pose $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X_i)$ où $(X_i)_{i \in I}$ est la famille des composantes connexes de X . Notons $Z(f, a)$ l'image dans $X \widehat{\times}_k V$ du morphisme fini $(f, a) : X' \rightarrow X \widehat{\times}_k V$. Par la définition du morphisme trace (voir la proposition 2.2.9) et modulo l'identification fournie par la proposition 2.2.7, on a

$$\text{Tr}_f(a) = [k(X') : k(Z(f, a))] \cdot [k(Z(f, a)) : k(X)]_{\text{isp}} Z(f, a).$$

Il s'ensuit que $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] = \mathbb{Z}_{fh}(V)(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ avec p l'exposant caractéristique de k . On en déduit aussi le résultat suivant.

Lemme 2.2.16. — *Soit X un k -affinoïde normal. Le groupe $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X)$ est librement engendré par les éléments $\text{Tr}_{X'/X}(a)$ avec X' une sous-variété fermée de $X \widehat{\times}_k V$, intègre, finie et surjective sur une composante connexe de X , et $a : X' \rightarrow V$ la restriction à X' de la projection $\text{pr}_2 : X \widehat{\times}_k V \rightarrow V$.*

Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de k -affinoïdes avec X lisse. Par la proposition 2.2.14, le morphisme de restriction $\mathbb{Z}_{fh}(V)(X) \rightarrow \mathbb{Z}_{fh}(V)(Y)$ envoie $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X)$ dans $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(Y)$. On obtient ainsi un préfaisceau $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$ sur la catégorie SmAfd/k qui est un sous-préfaisceau de la restriction de $\mathbb{Z}_{fh}(V)$ à SmAfd/k .

Remarque 2.2.17. — Par la proposition 2.2.7 et le lemme 2.2.16, les groupes $\mathbb{Z}_{fh}(V)(X)$ et $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X)$ sont abstraitement isomorphes puisqu'ils admettent des bases en bijection. Toutefois, si la caractéristique de k est non nulle, cet isomorphisme est différent de l'inclusion évidente et il n'est pas fonctoriel en X lisse.

On considère la catégorie $\mathbf{Shv}_{fh}(\text{Afd}/k, \mathbb{Z})$ des faisceaux fh de \mathbb{Z} -modules. On note $\mathbb{Z}_{fh}(\text{Afd}/k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Shv}_{fh}(\text{Afd}/k, \mathbb{Z})$ ayant pour objets les $\mathbb{Z}_{fh}(X)$ pour X un k -affinoïde.

Lemme 2.2.18. — *On obtient une sous-catégorie de $\mathbb{Z}_{fh}(\text{Afd}/k)$ en prenant pour objets les $\mathbb{Z}_{fh}(X)$ avec X des k -affinoïdes lisses et pour flèches de $\mathbb{Z}_{fh}(X)$ vers $\mathbb{Z}_{fh}(Y)$ les éléments du sous-groupe $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)(X) \subset \mathbb{Z}_{fh}(Y)(X)$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que les sous-groupes $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)(X) \subset \mathbb{Z}_{fh}(Y)(X) = \text{hom}(\mathbb{Z}_{fh}(X), \mathbb{Z}_{fh}(Y))$ sont stables par composition. On prend trois k -affinoïdes lisses

et connexes X , Y et Z . On considère un diagramme de k -affinoïdes

$$\begin{array}{ccccc} X' & & Y' & & \\ f \downarrow & \searrow a & g \downarrow & \searrow b & \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

avec X' et Y' intègres, et f et g finis et surjectifs. Il s'agit de montrer que l'élément $\mathrm{Tr}_g(b) \circ \mathrm{Tr}_f(a)$ est dans $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Z)(X)$. On peut pour cela supposer que X' et Y' sont normaux.

On a $\mathrm{Tr}_g(b) \circ \mathrm{Tr}_f(a) = \mathrm{Tr}_f(a^* \mathrm{Tr}_g(b))$, où a^* désigne le morphisme de restriction suivant a sur les préfaisceaux. Par le théorème 2.2.11 et la proposition 2.2.14, $a^* \mathrm{Tr}_g(b)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\mathrm{Tr}_{g_i}(b \circ a_i)$ où $(T_i)_{i \in I}$ est la famille des composantes irréductibles de $X' \widehat{\times}_Y Y'$, g_i la projection de T_i sur X' et a_i celle de T_i sur Y' . Le résultat découle maintenant de la formule $\mathrm{Tr}_f \circ \mathrm{Tr}_{g_i} = \mathrm{Tr}_{f \circ g_i}$ qui est facile à vérifier. C.Q.F.D.

Définition 2.2.19. — On note $\mathbf{AfnCor}(k)$ la sous-catégorie (non pleine si la caractéristique de k est non nulle) de $\mathbb{Z}_{f_h}(\mathbf{Afn}/k)$ ayant pour objets les $\mathbb{Z}_{f_h}(X)$ avec X des k -affinoïdes lisses et pour flèches de $\mathbb{Z}_{f_h}(X)$ vers $\mathbb{Z}_{f_h}(Y)$ les éléments du sous-groupe $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y)(X) \subset \mathbb{Z}_{f_h}(Y)(X)$. Pour X un k -affinoïde lisse, on notera $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ (au lieu de $\mathbb{Z}_{f_h}(X)$) l'objet correspondant dans $\mathbf{AfnCor}(k)$.

La catégorie $\mathbf{AfnCor}(k)$ est clairement additive. La somme directe est donnée par $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \oplus \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \amalg Y)$. C'est aussi une catégorie monoïdale symétrique et unitaire pour le produit tensoriel défini par $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \otimes \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \widehat{\times}_k Y)$.

Étant donnée une catégorie abélienne \mathcal{A} , on notera $\mathbf{AfnPST}(k, \mathcal{A})$ la catégorie des foncteurs additifs contravariants de $\mathbf{AfnCor}(k)$ à valeurs dans \mathcal{A} . Les objets de cette catégorie seront appelés des préfaisceaux avec transferts sur SmAfn/k à valeurs dans \mathcal{A} . Lorsque \mathcal{A} est la catégorie des groupes abéliens on écrit simplement $\mathbf{AfnPST}(k)$.

Notation 2.2.20. — Soient X un k -affinoïde lisse et V une k -variété rigide. À partir de maintenant, on utilisera le lemme 2.2.16 pour identifier le groupe $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(V)(X)$ avec le groupe $\mathbf{Cor}(X, V)$ librement engendré par l'ensemble des sous-variétés intègres de $X \widehat{\times}_k V$ finies et surjectives sur une composante connexe de X . Les éléments de $\mathbf{Cor}(X, V)$ sont appelés les *correspondances finies* de X dans V .

Soit $Z \subset X \widehat{\times}_k V$ une sous-variété fermée réduite telle que toute composante irréductible de Z est finie et surjective sur une composante connexe de X . Alors Z définit une correspondance finie $[Z] \in \mathbf{Cor}(X, V)$ égale à la somme des composantes irréductibles de Z .

Une *correspondance finie élémentaire* de X dans V est un élément $[Z] \in \mathbf{Cor}(X, V)$ comme ci-dessus avec Z irréductible. Les correspondances finies élémentaires forment une base du \mathbb{Z} -module $\mathbf{Cor}(X, V)$. Une correspondance finie est dite *effective* si elle peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{N} de correspondances

finies élémentaires. On note $\mathbf{Cor}^+(X, V)$ le monoïde des correspondances finies effectives de X dans V .

Remarque 2.2.21. — La catégorie $\mathbf{AfnCor}(k)$ admet la description plus concrète suivante. Les objets de $\mathbf{AfnCor}(k)$ sont les k -affinoïdes lisses X qu'on notera $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)$, et même simplement X si le contexte s'y prête. Pour X et Y deux k -affinoïdes lisses, le groupe de morphismes $\text{hom}_{\mathbf{AfnCor}(k)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X), \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y))$ est le groupe abélien $\mathbf{Cor}(X, Y)$ librement engendré par les sous-affinoïdes intègres de $X \widehat{\otimes}_k Y$ qui sont finis et surjectifs sur une composante connexe de X . La composition est donnée par la formule de Serre. La construction de $\mathbf{AfnCor}(k)$ comme une sous-catégorie de $\mathbb{Z}_{fh}(\mathbf{Afn}/k)$ nous dispense de la vérification de l'associativité de la composition.

Proposition 2.2.22. — *Soit l/k une extension de corps valués complets. Le foncteur « image inverse » suivant le morphisme de sites $(\mathbf{Afn}/l, fh) \rightarrow (\mathbf{Afn}/k, fh)$ fournit un foncteur $\mathbb{Z}_{fh}(\mathbf{Afn}/k) \rightarrow \mathbb{Z}_{fh}(\mathbf{Afn}/l)$ qui se restreint en un foncteur*

$$(2.27) \quad \mathbf{AfnCor}(k) \longrightarrow \mathbf{AfnCor}(l).$$

De plus, si l'extension l/k est algébrique et purement inséparable et si les degrés sur k des éléments de l sont uniformément bornés, alors le foncteur (2.27) induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{AfnCor}(k)[1/p] \xrightarrow{\sim} \mathbf{AfnCor}(l)[1/p]$$

avec p l'exposant caractéristique de k .

Démonstration. — Cette proposition est un cas particulier de la proposition 2.2.37. Ici, on démontre seulement la première partie de l'énoncé qui servira à justifier la première partie de la proposition 2.2.37. La seconde partie de l'énoncé sera démontrée, dans un cas plus général, dans la preuve de la proposition 2.2.37.

Il est clair que le foncteur « image inverse » envoie les objets de $\mathbf{AfnCor}(k)$ dans ceux de $\mathbf{AfnCor}(l)$; en effet le foncteur $-\widehat{\otimes}_k l$ préserve la lissité. Considérons maintenant une flèche $\text{Tr}_f(a)$ dans $\mathbf{AfnCor}(k)$ avec $f : X' \rightarrow X$ fini surjectif, X' intègre et $a : X' \rightarrow Y$. Soient Z une composante connexe de $X \widehat{\otimes}_k l$ et $Z' = Z \widehat{\otimes}_X X'$. Notons $\{Z'_i; i \in I\}$ l'ensemble des composantes irréductibles de Z' . Par le théorème 2.2.15, l'image de $\text{Tr}_f(a)$ dans

$$\text{hom}_{\mathbb{Z}_{fh}(\mathbf{Afn}/l)}(\mathbb{Z}_{fh}(Z), \mathbb{Z}_{fh}(Y \widehat{\otimes}_k l)) = \text{hom}_{\mathbb{Z}_{fh}(\mathbf{Afn}/k)}(\mathbb{Z}_{fh}(Z, l), \mathbb{Z}_{fh}(Y, k))$$

est donnée par $\sum_{i \in I} n_{X'/X}(Z'_i) \cdot \text{Tr}_{Z'_i/Z}(a \circ (Z'_i \rightarrow X'))$. Comme X est régulier, les $n_{X'/X}(Z'_i)$ sont des entiers. La proposition est démontrée. C.Q.F.D.

Proposition 2.2.23. — *Soit V une k -variété rigide. Le préfaisceau $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$, défini sur SmAfn/k , est un faisceau pour la topologie étale.*

Démonstration. — Rappelons que la topologie étale sur SmAfn/k est engendrée par la prétopologie formée des familles finies de morphismes étales de k -affinoïdes

$(f_i : U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ telles que $\bigcup_i f_i : \coprod_{i \in I} U_i \rightarrow X$ est surjectif (sur les points fermés). On procède en plusieurs étapes.

Étape 1 : Ici on montre que le préfaisceau $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$ est séparé pour la topologie étale. Puisque $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$ transforme les coproduits finis en sommes directes, il suffit de montrer que le morphisme $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(U)$ est injectif pour tout morphisme étale $u : U \rightarrow X$ entre k -affinoïdes lisses et connexes. (On ne demande pas que u soit surjectif ; la connexité de U et X entraîne que u est dominant, ce qui sera suffisant pour l'injectivité de $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X) \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(U)$.)

Soit $a \in \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(X) = \mathbf{Cor}(X, V)$ une correspondance finie. Écrivons $a = a_+ - a_-$ avec a_+ et a_- des correspondances finies effectives de support Z_+ et Z_- n'ayant aucune composante irréductible en commun. (Rappelons que le *support* d'une correspondance finie est l'union des sous-variétés fermées intègres de $X \widehat{\times}_k V$ qui apparaissent avec des coefficients non nuls lorsqu'on écrit cette correspondance finie dans la base des correspondances finies élémentaires.)

Supposons que la correspondance finie a est non nulle et montrons que $a \circ u$ est non nulle. Pour fixer les idées, supposons que a_+ est non nulle, i.e., que Z_+ est non vide. Puisque $u : U \rightarrow X$ est dominant et étale, la sous-variété fermée $(u \times \text{id}_V)^{-1}(Z_+) \subset U \widehat{\times}_k V$, qui est isomorphe au k -affinoïde $U \widehat{\times}_X Z_+$, est non vide et n'a aucune composante irréductible en commun avec la sous-variété fermée $(u \times \text{id}_V)^{-1}(Z_-) \subset U \widehat{\times}_k V$. Comme $(u \times \text{id}_V)^{-1}(Z_{\pm})$ est le support de $a_{\pm} \circ u$, on voit que $a_+ \circ u \neq a_- \circ u$, ce qui permet de conclure.

Étape 2 : Soit $u : U \rightarrow X$ un morphisme étale surjectif entre k -affinoïdes lisses. On se donne une correspondance finie $b \in \mathbf{Cor}(U, V)$ telle que $b \circ \text{pr}_1 = b \circ \text{pr}_2$ où $\text{pr}_i : U \widehat{\times}_X U \rightarrow U$, pour $i \in \{1, 2\}$, sont les deux projections évidentes. On cherche à montrer qu'il existe une correspondance finie $a \in \mathbf{Cor}(X, V)$ telle que $b = a \circ u$.

Le but de cette étape est de se ramener au cas où tous les coefficients non nuls qui apparaissent dans l'écriture de b dans la base des correspondances finies élémentaires sont égaux à 1. En effet, on peut écrire

$$b = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} n \cdot \sum_{\alpha \in A_n} [T_\alpha]$$

avec $A = \coprod_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} A_n$ un ensemble fini d'indices, $T_\alpha \subset U \widehat{\times}_k V$ des sous-variétés fermées, intègres, finies et surjectives sur une composante connexe de U et tel que $T_\alpha \neq T_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$ dans A .

Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $(T_{\alpha, s}^i)_{s \in S_\alpha^i}$ la famille des composantes irréductibles de l'image inverse de T_α par le morphisme étale

$$\text{pr}_i \times \text{id}_V : (U \widehat{\times}_X U) \widehat{\times}_k V \longrightarrow U \widehat{\times}_k V.$$

Il est clair que $T_{\alpha,s}^i \neq T_{\beta,t}^i$ si $(\alpha, s) \neq (\beta, t)$. (Bien entendu, $\alpha, \beta \in A$, $s \in S_\alpha^i$ et $t \in S_\beta^i$.) Or, l'égalité $b \circ \text{pr}_1 = b \circ \text{pr}_2$ équivaut à

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} n \cdot \sum_{\alpha \in A_n} \sum_{s \in S_\alpha^1} [T_{\alpha,s}^1] = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} n \cdot \sum_{\alpha \in A_n} \sum_{s \in S_\alpha^2} [T_{\alpha,s}^2].$$

(En effet, les multiplicités galoisiennes $n(T_{\alpha,s}^i)$ sont égales à 1 car le morphisme pr_i est étale.) Ceci entraîne que

$$\sum_{\alpha \in A_n} \sum_{s \in S_\alpha^1} [T_{\alpha,s}^1] = \sum_{\alpha \in A_n} \sum_{s \in S_\alpha^2} [T_{\alpha,s}^2]$$

pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Autrement dit, les correspondances finies $b_n = \sum_{\alpha \in A_n} [T_\alpha]$ vérifient aussi $b_n \circ \text{pr}_1 = b_n \circ \text{pr}_2$. Ceci permet d'obtenir la réduction souhaitée.

Étape 3 : On suppose maintenant que la correspondance finie b est réduite, i.e., qu'elle s'écrit $b = \sum_{\alpha \in A} [T_\alpha]$ avec $T_\alpha \neq T_\beta$ si $\alpha \neq \beta$ dans A . Notons T le support de b , i.e., $T = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$, que l'on munit de sa structure de sous-variété fermée réduite de $U \widehat{\times}_k V$; ainsi b est la correspondance finie $[T]$ associée à la sous-variété fermée réduite T . Puisque le morphisme $\text{pr}_i \times \text{id}_V$ est étale, la k -variété rigide $T \widehat{\times}_{U, \text{pr}_i} (U \widehat{\times}_X U)$ est aussi réduite. De plus, elle s'identifie canoniquement à la sous-variété fermée réduite $(\text{pr}_i \times \text{id}_V)^{-1}(T)$ de $(U \widehat{\times}_X U) \widehat{\times}_k V$ qui est aussi le support de la correspondance finie $b \circ \text{pr}_i$. Ainsi, l'égalité $b \circ \text{pr}_1 = b \circ \text{pr}_2$ entraîne l'égalité des sous-variétés fermées de $(U \widehat{\times}_X U) \widehat{\times}_k V$:

$$T \widehat{\times}_{U, \text{pr}_1} (U \widehat{\times}_X U) = T \widehat{\times}_{U, \text{pr}_2} (U \widehat{\times}_X U).$$

Par la descente fidèlement plate en géométrie rigide [9, Theorem 3.1] (appliquée à l'idéal de définition de la sous-variété fermée $T \subset U \widehat{\times}_k V$), il existe une sous-variété fermée $Z \subset X \widehat{\times}_k V$ telle que $Z \widehat{\times}_X U = T$. Puisque le morphisme u est étale et surjectif, Z est réduite et toutes ses composantes irréductibles sont finies et surjectives sur une composante connexe de X . Clairement, la correspondance finie $a = [Z]$ vérifie $b = a \circ u$. C.Q.F.D.

Remarque 2.2.24. — On a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\text{SmRig}/k) \simeq \mathbf{Shv}_{\text{ét}}(\text{SmAfd}/k).$$

Grâce à la proposition 2.2.23, on peut donc prolonger d'une manière unique $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$ en un faisceau étale sur SmRig/k . On note encore $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$ ce prolongement.

L'énoncé ci-dessous devient faux si on y remplace la topologie de Nisnevich par la topologie des recouvrements admissibles⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ L'énoncé en question reste vrai si on y remplace la topologie de Nisnevich par la topologie étale. On ne démontrera pas cette variante car on n'en aura pas besoin. Toutefois, notons à l'intention du lecteur intéressé qu'il est possible d'adapter la preuve de la proposition 2.2.25 au cas de la topologie étale.

Proposition 2.2.25. — Soient V une k -variété rigide et $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ un recouvrement Nisnevich de V par des morphismes étales. Alors, le complexe de Čech

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V_{i_1} \widehat{\times}_V \cdots \widehat{\times}_V V_{i_n}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V_i) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V) \longrightarrow 0$$

est acyclique en tant que complexe de faisceaux pour la topologie de Nisnevich (i.e., en tant que complexe dans la catégorie abélienne $\mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmAfd}/k)$).

Démonstration. — Puisque $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(-)$ transforme un coproduit de k -variétés rigides en une somme directe de faisceaux Nisnevich, il suffit de traiter le cas d'un recouvrement Nisnevich constitué par un seul morphisme étale $V' \rightarrow V$. Dans ce cas, le complexe qui nous intéresse s'écrit plus simplement

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(\widehat{X}_V^n V') \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V') \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V) \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition 1.2.15, il s'agit de montrer que le complexe de groupes abéliens

$$(2.28) \quad \cdots \longrightarrow \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(\widehat{X}_V^n V')(U) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V')(U) \longrightarrow \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)(U) \longrightarrow 0$$

est acyclique pour tout k -affinoïde lisse X et tout point $x \in \mathcal{P}(X)$. On rappelle que $\text{Flt}_{\text{Nis}}(x)$ est la catégorie dont les objets sont les couples (U, u) où U est dans $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$ et $u \in \mathcal{P}(U)$ est un point au-dessus de x tel que le morphisme $k^\circ(x) \hookrightarrow k^\circ(u)$ induit un isomorphisme $\widetilde{k}(x) \simeq \widetilde{k}(u)$ (voir la définition 1.2.14). On divise la preuve en trois parties.

Partie A : Soit $(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)$. Étant donné une k -variété rigide W et un point $w \in \mathcal{P}(W)$, on note $\mathbb{Z}_{\text{tr}}^w(W)(U)$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(W)(U)$ engendré par les sous-variétés $(d, g) : T \hookrightarrow U \widehat{\times}_k W$ intègres, finies et surjectives sur une composante connexe de U et telles que, pour tout $t \in d^{-1}(u)$, on a $g(t) = w$. Lorsque U est connexe, on a une inclusion $\bigoplus_{w \in \mathcal{P}(W)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}^w(W)(U) \subset \mathbb{Z}_{\text{tr}}(W)(U)$. Dans cette partie on montre qu'en passant à la colimite on obtient un isomorphisme

$$(2.29) \quad \bigoplus_{w \in \mathcal{P}(W)} \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}^w(W)(U) \simeq \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(W)(U).$$

Les colimites filtrantes préservent les inclusions; il reste donc à démontrer la surjectivité dans (2.29). On ne restreint pas la généralité en considérant seulement la classe (dans le membre de droite de (2.29)) d'une correspondance finie élémentaire $[Z] \in \mathbf{Cor}(X, W)$. (Bien entendu, $(c, f) : Z \hookrightarrow X \widehat{\times}_k W$ est une sous-variété intègre, finie et surjective au-dessus d'une composante connexe de X .)

Notons $c^{-1}(x) = \{z_j; j \in J\}$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}(Z)$ au-dessus de x . C'est un ensemble fini : son cardinal est majoré par le degré générique de $c : Z \rightarrow X$ (car le k -affinoïde X est lisse et donc normal). L'anneau

$$Q = \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \Gamma(U, \mathcal{O}^\circ)$$

est local hensélien. (En effet, il coïncide aussi avec la colimite des hensélisés de $\Gamma(U, \mathcal{O}^\circ)$ en l'idéal premier égal au noyau du morphisme $\Gamma(U, \mathcal{O}^\circ) \rightarrow \tilde{k}(u)$.) De plus, l'anneau

$$R = \operatorname{Colim}_{(U,u) \in \operatorname{Flt}_{\operatorname{Nis}}(x)} \Gamma(U \widehat{\times}_X Z, \mathcal{O}^\circ)$$

est entier sur Q . Il se décompose donc en un produit direct fini d'anneaux locaux henséliens $R = \prod_{j \in J} R_j$ tel que, pour $j \in J$, il existe un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(Z, \mathcal{O}^\circ) & \longrightarrow & \tilde{k}(z_j) \\ \downarrow & \nearrow & \\ R_j & & \end{array}$$

Il s'ensuit que pour (U, u) suffisamment fin dans $\operatorname{Flt}_{\operatorname{Nis}}(x)$, $T = Z \widehat{\times}_X U$ se décompose en une somme disjointe $T = \coprod_{j \in J} T_j$ telle que :

- si $d_j : T_j \rightarrow U$ est la projection évidente, $(d_j)^{-1}(u)$ est réduit à un seul point $t_j \in \mathcal{P}(T_j)$;
- $(T_j, t_j) \in \operatorname{Flt}_{\operatorname{Nis}}(z_j)$.

Notons w_j l'image de z_j par le morphisme $f : Z \rightarrow W$; c'est aussi l'image de t_j par le morphisme $g_j : T_j \rightarrow W$. Considérons l'immersion fermée $(d_j, g_j) : T_j \hookrightarrow U \widehat{\times}_k W$. On a clairement $[T_j] \in \mathbb{Z}_{\operatorname{tr}}^{w_j}(W)(U)$ et $[Z] \circ (U \rightarrow X) = \sum_{j \in J} [T_j]$. Ceci permet de conclure.

Partie B : Gardons les notations de la partie A. Pour $(W', w') \in \operatorname{Flt}_{\operatorname{Nis}}(w)$, on dispose d'un morphisme canonique $\mathbb{Z}_{\operatorname{tr}}^{w'}(W')(U) \rightarrow \mathbb{Z}_{\operatorname{tr}}^w(W)(U)$. Dans cette partie, on montre qu'en passant à la colimite on obtient un isomorphisme

$$\operatorname{Colim}_{(U,u) \in \operatorname{Flt}_{\operatorname{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\operatorname{tr}}^{w'}(W')(U) \simeq \operatorname{Colim}_{(U,u) \in \operatorname{Flt}_{\operatorname{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\operatorname{tr}}^w(W)(U).$$

On ne restreint pas la généralité en remplaçant W et W' par des voisinages ouverts de w et w' . Ainsi, on peut supposer que W et W' sont des k -affinoïdes. On fixe un morphisme étale $W' \rightarrow W$ de k° -schémas formels essentiels induisant $W' \rightarrow W$. (Ceci est possible puisque W' est dans $(\operatorname{Et}/W)_{\operatorname{br}}$.)

On expliquera seulement comment construire l'image inverse de la classe d'une correspondance finie élémentaire $[Z] \in \mathbb{Z}_{\operatorname{tr}}^w(W)(X)$. (Comme dans la partie A de la preuve, $(c, f) : Z \hookrightarrow X \widehat{\times}_k W$ est une sous-variété intègre, finie et surjective au-dessus d'une composante connexe de X .)

On reprend les anneaux Q et $R = \prod_{j \in J} R_j$ de la partie A de la preuve. Pour $j \in J$, on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(W, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \tilde{k}(w) & \longrightarrow & \tilde{k}(z_j) \\ \downarrow & & & \nearrow & \\ R_j & & & & \end{array}$$

où la flèche verticale est déduite de $f : Z \rightarrow W$. Puisque le $k^\circ/(\pi)$ -schéma $\mathcal{W}'/(\pi)$ est un voisinage Nisnevich du point $\text{Spec}(\widehat{k}(w)) \rightarrow \mathcal{W}/(\pi)$, le morphisme $\Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O})/(\pi) \rightarrow R/(\pi)$ se factorise d'une manière unique par un morphisme $\Gamma(\mathcal{W}', \mathcal{O})/(\pi) \rightarrow R/(\pi)$. Puisque les $k^\circ/(\pi)$ -algèbres $\Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O})/(\pi)$ et $\Gamma(\mathcal{W}', \mathcal{O})/(\pi)$ sont de présentation finie, pour $(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)$ suffisamment fin, le morphisme $\Gamma(\mathcal{W}', \mathcal{O})/(\pi) \rightarrow R/(\pi)$ provient d'un morphisme de $\Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O})/(\pi)$ -algèbres

$$\Gamma(\mathcal{W}', \mathcal{O})/(\pi) \rightarrow \Gamma(U \widehat{\times}_X Z, \mathcal{O}^\circ)/(\pi).$$

Puisque $\Gamma(\mathcal{W}', \mathcal{O})/(\pi)$ est étale sur $\Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O})/(\pi)$, le morphisme ci-dessus s'étend d'une manière unique en un morphisme de $\Gamma(\mathcal{W}, \mathcal{O})$ -algèbres formelles

$$\Gamma(\mathcal{W}', \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U \widehat{\times}_X Z, \mathcal{O}^\circ)$$

grâce à [20, Théorème 18.1.2]. Ainsi, en posant $T = U \widehat{\times}_X Z$, on a construit un morphisme $g' : T \rightarrow W'$. L'immersion fermée $(d, g') : T \hookrightarrow U \widehat{\times}_k W'$ fournit une correspondance finie $[T]$ telle que $(W' \rightarrow W) \circ [T] = [Z] \circ (U \rightarrow X)$. Ceci permet de conclure.

Partie C : Pour $v \in \mathcal{P}(V)$ et $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n(V, v) = \bigoplus_{v' \in \mathcal{P}(\widehat{\mathcal{X}}_V^n V')/v} \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}^{v'}(\widehat{\mathcal{X}}_V^n V')(U)$$

avec $\mathcal{P}(\widehat{\mathcal{X}}_V^n V')/v$ l'ensemble des points de $\widehat{\mathcal{X}}_V^n V'$ au-dessus de v . (Lorsque $n = 0$, cet ensemble est réduit à $\{v\}$.) D'après la partie A de la preuve, le complexe (2.28) s'identifie à $\bigoplus_{v \in \mathcal{P}(V)} A_\bullet(V, v)$. Il suffit donc de montrer que chaque complexe $A_\bullet(V, v)$ est acyclique.

On fixe $v \in \mathcal{P}(V)$. Soit $(W, w) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(v)$ et notons $W' = W \widehat{\times}_V V'$. Les applications évidentes

$$\mathcal{P}(\widehat{\mathcal{X}}_W^n W')/w \longrightarrow \mathcal{P}(\widehat{\mathcal{X}}_V^n V')/v$$

sont bijectives. De plus, pour $w' \in \mathcal{P}(\widehat{\mathcal{X}}_W^n W')/w$ d'image $v' \in \mathcal{P}(\widehat{\mathcal{X}}_V^n V')/v$, on a $(\widehat{\mathcal{X}}_W^n W', w') \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(v')$. D'après la partie B de la preuve, le morphisme

$$\text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}^{w'}(\widehat{\mathcal{X}}_W^n W')(U) \longrightarrow \text{Colim}_{(U, u) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(x)} \mathbb{Z}_{\text{tr}}^{v'}(\widehat{\mathcal{X}}_V^n V')(U)$$

est donc un isomorphisme. Ceci montre que $A_\bullet(W, w) \simeq A_\bullet(V, v)$ et il est donc suffisant de traiter le cas du morphisme $W' \rightarrow W$ et du point $w \in \mathcal{P}(W)$. Or, en prenant $(W, w) \in \text{Flt}_{\text{Nis}}(v)$ suffisamment fin, on peut supposer que le morphisme $W' \rightarrow W$ admet une section. L'acyclicité de $A_\bullet(W, w)$ est immédiate dans ce cas. C.Q.F.D.

Corollaire 2.2.26. — *Soit F un préfaisceau avec transferts sur SmAfd/k (i.e., un objet de $\mathbf{AfdPST}(k)$). Il existe alors une unique structure de préfaisceau avec transferts sur le faisceau Nisnevich $\mathfrak{a}_{\text{Nis}}(F)$ associé à F telle que le morphisme évident $F \rightarrow \mathfrak{a}_{\text{Nis}}(F)$ est un morphisme de préfaisceaux avec transferts.*

Démonstration. — L’unicité est facile et sera laissée au lecteur. Soit F un préfaisceau avec transferts sur SmAfd/k . On note comme de coutume F_{sep} (resp. $a_{\text{Nis}}(F)$) le préfaisceau séparé (resp. le faisceau) associé à F relativement à la topologie de Nisnevich. Ces préfaisceaux sont additifs ; nous allons munir les sections de F_{sep} et $a_{\text{Nis}}(F)$ d’une action naturelle des correspondances finies. On divise la preuve en deux étapes.

Étape 1 : On montre d’abord que F_{sep} admet des transferts. Il suffit pour cela de montrer que le noyau de $F \rightarrow F_{\text{sep}}$ est un sous-préfaisceau avec transferts de F , i.e., stable par l’action des correspondances finies.

Soit $f : U \rightarrow V$ une correspondance finie entre deux k -affinoïdes lisses et soit $a \in F(V)$ une section qui devient nulle dans $F_{\text{sep}}(a)$. Il s’agit de montrer que $f^*(a)$ est nulle dans $F_{\text{sep}}(U)$. Soit $(V_j \rightarrow V)_{j \in J}$ un recouvrement Nisnevich fini de V par des k -affinoïdes tel que $a|_{V_j} = 0$ pour tout $j \in J$. Par la proposition 2.2.25, il existe un recouvrement Nisnevich fini $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ de U par des k -affinoïdes, et des correspondances finies $f_{ij} : U_i \rightarrow V_j$ telles que le carré

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} U_i & \xrightarrow{\sum_{i,j} f_{ij}} & \coprod_{j \in J} V_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

commute. Pour $i \in I$, on a $f^*(a)|_{U_i} = \sum_{j \in J} f_{ij}^*(a|_{V_j}) = 0$. D’où le résultat.

Étape 2 : On traite maintenant le cas qui nous intéresse, i.e., celui de $a_{\text{Nis}}(F)$. Pour cela, nous allons donner une deuxième construction du faisceau associé à F qui sera automatiquement un préfaisceau avec transferts.

Soient U un k -affinoïde lisse et $\mathcal{R} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ un recouvrement Nisnevich de U par des k -affinoïdes. À un tel recouvrement, on associe un morphisme de préfaisceaux avec transferts :

$$a_{\mathcal{R}} : S(\mathcal{R}) = \text{Coker} \left(\bigoplus_{(i,j) \in I^2} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(U_i \widehat{\times}_U U_j) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(U_i) \right) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\text{tr}}(U) = B(\mathcal{R}).$$

Étant donné un préfaisceau avec transferts F , on note $\Phi(F)$ le préfaisceau séparé associé à la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\mathcal{R}; S(\mathcal{R}) \rightarrow F} S(\mathcal{R}) & \longrightarrow & F \\ \bigoplus_{\mathcal{R}} a_{\mathcal{R}} \downarrow & & \\ \bigoplus_{\mathcal{R}; S(\mathcal{R}) \rightarrow F} B(\mathcal{R}). & & \end{array}$$

On dispose d’un morphisme évident de préfaisceaux avec transferts $F \rightarrow \Phi(F)$. On note alors $\Phi^\infty(F)$ la colimite de la N-suite

$$F \longrightarrow \Phi(F) \longrightarrow \Phi^2(F) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Phi^n(F) \longrightarrow \dots$$

Comme $S(\mathcal{R})$ est un préfaisceau avec transferts de présentation finie, le préfaisceau avec transferts $\Phi^\infty(F)$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes $a_{\mathcal{R}}$. De plus, il est séparé puisqu'une colimite filtrante de préfaisceaux séparés est un préfaisceau séparé. On a donc montré que $\Phi(F)$ est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. Pour voir que $\Phi(F)$ est bien le faisceau associé à F , il suffit de montrer que $a_{\mathcal{R}}$ induit des isomorphismes sur les faisceaux Nisnevich associés ce qui découle de la proposition 2.2.25. C.Q.F.D.

Définition 2.2.27. — *La sous-catégorie pleine de $\mathbf{AfnDPST}(k)$ formée des préfaisceaux avec transferts F dont la restriction à \mathbf{SmAfnD}/k est un faisceau pour la topologie de Nisnevich sera notée $\mathbf{AfnDStr}_{\text{Nis}}(k)$. Les objets de cette catégorie seront appelés les faisceaux Nisnevich avec transferts.*

Lorsque V est une k -variété rigide séparée, la proposition 2.2.23 montre que $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$ est un objet de $\mathbf{AfnDStr}_{\text{Nis}}(k)$. Le corollaire 2.2.26 montre que l'inclusion évidente $\mathbf{AfnDStr}_{\text{Nis}}(k) \hookrightarrow \mathbf{AfnDPST}(k)$ possède un adjoint à gauche

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} : \mathbf{AfnDPST}(k) \longrightarrow \mathbf{AfnDStr}_{\text{Nis}}(k).$$

2.2.3. Préfaisceaux avec transferts sur \mathbf{SmRig}/k et compléments. — D'après la remarque 2.2.24, le préfaisceau $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)$, pour Y une k -variété rigide, admet une extension naturelle à \mathbf{SmRig}/k . Le résultat suivant donne une interprétation du groupe des sections de $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)$ au-dessus d'une k -variété rigide lisse (non nécessairement affinoïde).

Proposition 2.2.28. — *Soient X et Y deux k -variétés rigides, et supposons que X est lisse. Alors le groupe $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)(X)$ s'identifie au groupe*

$$\text{hom}_{\mathbf{AfnDPST}(k)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X), \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)).$$

Démonstration. — Lorsque X est un k -affinoïde, l'assertion découle du lemme de Yoneda. Soit $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affinoïdes. Comme X est supposée séparée (c'est par convention le cas pour toutes nos k -variétés rigides), $X_i \cap X_j$ est un ouvert affinoïde pour tout $(i, j) \in I^2$. Par la proposition 2.2.25, $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)$ s'identifie au conoyau de

$$\bigoplus_{i, j \in I} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(X_i \cap X_j) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(X_i)$$

dans la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts. Par la proposition 2.2.23, $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)$ est un faisceau Nisnevich avec transferts. Le groupe

$$\text{hom}_{\mathbf{AfnDPST}(k)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X), \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y))$$

s'identifie alors à l'égalisateur de la double flèche

$$\prod_{i \in I} \text{hom}_{\mathbf{AfnDPST}(k)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X_i), \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \text{hom}_{\mathbf{AfnDPST}(k)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X_i \cap X_j), \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)).$$

Cette double flèche n'est autre que

$$\prod_{i \in I} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)(X_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)(X_i \cap X_j).$$

Il suffit d'utiliser une deuxième fois la proposition 2.2.23 pour conclure. C.Q.F.D.

Définition 2.2.29. — La catégorie $\mathbf{RigCor}(k)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Afn dPST}(k)$ dont les objets sont les $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)$ avec X une k -variété rigide lisse. Pour X et Y deux k -variétés rigides lisses, les morphismes de $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)$ dans $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)$ sont les éléments du groupe $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y)(X)$ qui sera aussi noté $\mathbf{Cor}(X, Y)$. La catégorie $\mathbf{RigCor}(k)$ est additive et monoïdale symétrique. En fait, elle admet les sommes directs au plus dénombrables⁽⁷⁾ et le produit tensoriel y commute.

Étant donnée une catégorie abélienne \mathcal{A} admettant les produits directs au plus dénombrables, on note $\mathbf{RigPST}(k, \mathcal{A})$ la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathbf{RigCor}(k)$ à valeurs dans \mathcal{A} qui transforment les sommes directes au plus dénombrables en produits directs. Les objets de cette catégorie seront appelés des préfaisceaux avec transferts sur SmRig/k à valeurs dans \mathcal{A} . Lorsque \mathcal{A} est la catégorie des groupes abéliens on écrit simplement $\mathbf{RigPST}(k)$.

Remarque 2.2.30. — Soit F un préfaisceau sur SmRig/k à valeurs dans une catégorie admettant les produits directs au plus dénombrables. Dire que F transforme les coproduits directs au plus dénombrables en produits directs revient à dire que F est un faisceau pour la topologie engendrée par les familles $(X_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X_i)_{j \in I}$, où $(X_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'objets de SmRig/k . En particulier, on dispose d'un foncteur « faisceau associé » qui transforme un préfaisceau quelconque sur SmRig/k en un préfaisceau transformant les coproduits directs au plus dénombrables en produits directs. En utilisant ceci, on montre facilement que la catégorie $\mathbf{RigPST}(k, \mathcal{A})$ est abélienne. De plus, elle est de Grothendieck si \mathcal{A} l'est.

Remarque 2.2.31. — La sous-catégorie pleine de $\mathbf{RigPST}(k)$ formée des préfaisceaux avec transferts dont la restriction à SmRig/k est un faisceau pour la topologie de Nisnevich, est notée $\mathbf{RigStr}_{\text{Nis}}(k)$. Cette catégorie est équivalente à $\mathbf{Afn dStr}_{\text{Nis}}(k)$. On a le diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccccccc} \text{SmAfn d}/k & \longrightarrow & \mathbf{Afn dCor}(k) & \longrightarrow & \mathbf{Afn dPST}(k) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Afn dStr}_{\text{Nis}}(k) \\ \downarrow & & \downarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \sim \\ \text{SmRig}/k & \longrightarrow & \mathbf{RigCor}(k) & \longrightarrow & \mathbf{RigPST}(k) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{RigStr}_{\text{Nis}}(k). \end{array}$$

Lorsque X est un k -affinoïde lisse, le lemme 2.2.16 (voir aussi la notation 2.2.20) fournit une description des groupes de correspondances finies $\mathbf{Cor}(X, Y)$ en termes

⁽⁷⁾ On rappelle que, par convention, nos k -variétés rigides admettent des recouvrements admissibles au plus dénombrables par des ouverts affinoïdes. Ceci n'exclut pas les variétés rigides possédant un nombre infini dénombrable de composantes connexes.

de sous-variétés fermées de $X \widehat{\times}_k Y$. Une description similaire est encore valable pour toute k -variété rigide lisse ayant un nombre fini de composantes connexes. C'est l'objet de la proposition 2.2.35 ci-dessous. Pour énoncer cette proposition, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 2.2.32. — Soit $f : Z \rightarrow X$ un morphisme fini de k -variétés rigides. On dit que f est équidimensionnel (de dimension relative nulle), ou que Z est équidimensionnelle sur X , si pour tout morphisme $U \rightarrow X$, avec U un k -affinoïde intègre, toute composante irréductible du k -affinoïde $Z \widehat{\times}_X U$ est surjective sur U .

Remarque 2.2.33. — Lorsque la k -variété rigide X est normale et affinoïde, on sait (grâce au lemme 2.2.3) qu'un morphisme fini $f : Y \rightarrow X$ est équidimensionnel si et seulement si chaque composante irréductible de Y est surjective sur une composante connexe de X . Il est plausible que ceci reste vrai pour toute k -variété rigide normale, mais nous n'avons pas tenté de le prouver.

Lemme 2.2.34. — Soient X et Y deux k -variétés rigides, et supposons que X est lisse. Soit $\alpha \in \mathbf{Cor}(X, Y)$ une correspondance finie. Il existe alors une unique sous-variété fermée et réduite $Z \subset X \widehat{\times}_k Y$ telle que, pour tout ouvert affinoïde $U \subset X$, le support de la correspondance finie $\alpha \circ (U \hookrightarrow X)$ est égal à $Z \widehat{\times}_X U$. De plus, la sous-variété Z est finie et équidimensionnelle sur X ; elle est appelée le support de α .

Démonstration. — Pour chaque ouvert affinoïde $U \subset X$, notons $Z_U \subset U \widehat{\times}_k Y$ le support de la correspondance finie $\alpha \circ (U \hookrightarrow X)$. Il est clair que $Z_{U \cap V} = Z_U \cap Z_V$. Les sous-variétés réduites Z_U se recollent donc en une sous-variété fermée et réduite $Z \subset X \widehat{\times}_k Y$ qui est clairement finie sur X .

Pour montrer que Z est équidimensionnel au-dessus de X , on se donne un morphisme $W \rightarrow X$, avec W un k -affinoïde intègre, et on cherche à montrer que toutes les composantes irréductibles de $Z \widehat{\times}_X W$ sont surjectives sur W . La question est locale (pour la topologie des recouvrements admissibles) sur W . On peut donc supposer que W se factorise par un ouvert affinoïde $U \subset X$. Ceci permet de remplacer X par U et α par $\alpha \circ (U \hookrightarrow X)$. Le résultat recherché est alors clair (voir la remarque 2.2.33).

C.Q.F.D.

Pour la notion d'irréductibilité pour les k -variétés rigides non nécessairement affinoïdes, on renvoie le lecteur à [15].

Proposition 2.2.35. — Soient X et Y deux k -variétés rigides, et supposons que X est lisse et admet un nombre fini de composantes connexes. Alors

$$\mathbf{Cor}(X, Y) = \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y)(X)$$

est canoniquement isomorphe au \mathbb{Z} -module librement engendré par les sous-variétés rigides fermées, réduites et irréductibles $Z \subset X \widehat{\times}_k Y$, qui sont finies et équidimensionnelles sur X .

Démonstration. — Fixons la k -variété rigide lisse X et considérons le préfaisceau F sur $\text{Ouv}(X)$ défini de la manière suivante. Pour $U \subset X$ un ouvert admissible connexe, $F(U)$ est le \mathbb{Z} -module librement engendré par les sous-variétés rigides fermées, réduites et irréductibles $Z \subset U \widehat{\times}_k Y$, qui sont finies et équidimensionnelles sur U . Pour $U \subset X$ un ouvert admissible non nécessairement connexe, $F(U)$ est le produit direct $\prod_{i \in I} F(U_i)$, où $(U_i)_{i \in I}$ est la famille des composantes connexes de U . Si $V \subset U \subset X$ sont des ouverts admissibles connexes, le morphisme $F(U) \rightarrow F(V)$ envoie le générateur $Z \subset U \widehat{\times}_k Y$ sur la somme des composantes irréductibles de $Z \widehat{\times}_U V \subset V \widehat{\times}_k Y$. (Ceci a un sens car la variété rigide $Z \widehat{\times}_U V$ possède un nombre fini de composantes irréductibles; ce nombre est en effet majoré par le degré générique du morphisme fini et surjectif $Z \rightarrow U$.) Il est immédiat de voir que ceci définit bien un préfaisceau sur $\text{Ouv}(X)$. De plus, il est clair que la restriction de F à $\text{Ouv}^{\text{af}}(X)$ coïncide avec la restriction de $\mathbf{Cor}(-, Y)$. Par l'unicité de l'extension à $(\text{Ouv}(X), \text{ad})$ d'un faisceau sur $(\text{Ouv}^{\text{af}}(X), \text{ad})$, il est donc suffisant de vérifier que F est un faisceau pour la topologie des recouvrements admissibles. La preuve de cela repose sur les mêmes arguments utilisés dans la preuve de la proposition 2.2.23. On laisse les détails au lecteur. C.Q.F.D.

Dans le reste du paragraphe, nous allons étendre au cas relatif une partie des notions introduites au paragraphe 2.2.2. Soit B une k -variété rigide, et soient X et Y deux B -variétés rigides. On suppose que X et Y sont lisses sur k . On note $\mathbf{Cor}_B(X, Y)$ le sous-groupe de $\mathbf{Cor}(X, Y)$ formé des correspondances finies α dont le support est contenu dans $X \widehat{\times}_B Y$ (qui est un fermé de $X \widehat{\times}_k Y$). Étant donnée une troisième B -variété rigide Z lisse sur k , la composition des correspondances finies

$$\mathbf{Cor}(X, Y) \otimes \mathbf{Cor}(Y, Z) \longrightarrow \mathbf{Cor}(X, Z)$$

envoie $\mathbf{Cor}_B(X, Y) \otimes \mathbf{Cor}_B(Y, Z)$ dans $\mathbf{Cor}_B(X, Z)$. En effet, étant données deux correspondances finies $\alpha : X \rightarrow Y$ et $\beta : Y \rightarrow Z$ de support $T \subset X \widehat{\times}_B Y$ et $S \subset Y \widehat{\times}_B Z$, le support de $\beta \circ \alpha$ est contenu dans l'image de $T \widehat{\times}_Y S$ dans $X \widehat{\times}_k Z$. Or, le morphisme $T \widehat{\times}_Y S \rightarrow X \widehat{\times}_k Z$ se factorise comme suit :

$$T \widehat{\times}_Y S \longrightarrow (X \widehat{\times}_B Y) \widehat{\times}_Y (Y \widehat{\times}_B Z) \simeq X \widehat{\times}_B Y \widehat{\times}_B Z \longrightarrow X \widehat{\times}_B Z \hookrightarrow X \widehat{\times}_k Z.$$

On peut donc faire la définition suivante.

Définition 2.2.36. — Soit B une k -variété rigide. On note $\mathbf{RigCor}'(B)$ (resp. $\mathbf{AfnCor}'(B)$) la catégorie ayant pour objets les B -variétés rigides (resp. les B -affinoïdes⁽⁸⁾) qui sont lisses sur k et où les groupes de morphismes sont donnés par $\mathbf{Cor}_B(-, -)$. Lorsque B est lisse, on note aussi $\mathbf{RigCor}(B)$ (resp. $\mathbf{AfnCor}(B)$)

(8) Par « B -affinoïde » on entend un k -affinoïde X muni d'un morphisme de k -variétés rigides $f : X \rightarrow B$. À ne pas confondre avec la notion (moins restrictive sous l'hypothèse que B est séparée) de morphisme affinoïde qui demande plutôt que $f^{-1}(U)$ soit un ouvert affinoïde pour tout ouvert affinoïde $U \subset B$.

la sous-catégorie pleine de $\mathbf{RigCor}'(B)$ (resp. $\mathbf{AfnCor}'(B)$) formée des B -variétés rigides lisses.

Pour une référence future, on note le résultat suivant (qu'on n'a pas cherché à énoncer dans une généralité maximale).

Proposition 2.2.37. — Soit l/k une extension de corps valués complets. Soit $e : (D, l) \rightarrow (B, k)$ un morphisme dans \mathbf{Afn}/k avec B et D des affinoïdes lisses sur k et l . Alors, il existe un foncteur

$$(2.30) \quad D \widehat{\times}_B - : \mathbf{AfnCor}(B) \longrightarrow \mathbf{AfnCor}(D)$$

rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SmAfn}/B & \xrightarrow{D \widehat{\times}_B -} & \mathbf{SmAfn}/D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{AfnCor}(B) & \xrightarrow{D \widehat{\times}_B -} & \mathbf{AfnCor}(D). \end{array}$$

De plus, si l'extension l/k est algébrique et purement inséparable, si les degrés sur k des éléments de l sont uniformément bornés, et si le morphisme $e : D \rightarrow B \widehat{\otimes}_k l$ est fini, surjectif et radiciel, alors le foncteur

$$(2.31) \quad D \widehat{\times}_B - : \mathbf{AfnCor}(B)[1/p] \longrightarrow \mathbf{AfnCor}(D)[1/p]$$

est une équivalence de catégories (avec p l'exposant caractéristique de k).

Démonstration. — Notons $B' = B \widehat{\otimes}_k l$. Le foncteur en question se factorise :

$$\mathbf{AfnCor}(B) \xrightarrow{- \widehat{\otimes}_k l} \mathbf{AfnCor}(B') \xrightarrow{- \widehat{\otimes}_{B'} D} \mathbf{AfnCor}(D).$$

Le premier foncteur est celui défini dans la proposition 2.2.22. (Plus précisément, il s'agit de la variante relative de ce foncteur qui s'en déduit facilement). Le second foncteur envoie une correspondance finie $a \in \mathbf{Cor}_{B'}(X, Y)$, avec X et Y des B' -affinoïdes lisses, sur la correspondance finie $a \circ (D \widehat{\times}_{B'} X \rightarrow X)$ modulo l'identification

$$\mathbf{Cor}_D(D \widehat{\times}_{B'} X, D \widehat{\times}_{B'} Y) \simeq \mathbf{Cor}_{B'}(D \widehat{\times}_{B'} X, Y).$$

On se concentre maintenant sur la dernière partie de l'énoncé. Ainsi, dans la suite, l/k sera supposée purement inséparable, et $e : D \rightarrow B'$ sera supposé fini, surjectif et radiciel. On suppose aussi que les degrés sur k des éléments de l sont uniformément bornés, i.e., qu'il existe une puissance q de p telle que $a^q \in k$ pour tout $a \in l$. Ceci entraîne que $f^q \in \Gamma(\dagger, \mathcal{O})$ pour tout $f \in \Gamma(\dagger \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})$ pour tout k -affinoïde \dagger . (En effet, il suffit de vérifier cela pour une boule de Tate, ce qui est alors immédiat.) En particulier, le $\mathrm{Spec}(\Gamma(\dagger, \mathcal{O}))$ -schéma $\mathrm{Spec}(\Gamma(\dagger \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O}))$ est entier, surjectif et radiciel.

Montrons d'abord que le foncteur (2.31) est pleinement fidèle. Il s'agit de montrer que le morphisme de groupes

$$(2.32) \quad \mathbf{Cor}_B(X, Y)[1/p] \longrightarrow \mathbf{Cor}_D(Z, T)[1/p]$$

est un isomorphisme avec $Z = X \widehat{\times}_B D$ et $T = Y \widehat{\times}_B D$. Le morphisme de schémas

$$\mathrm{Spec}(\Gamma(Z \widehat{\times}_D T, \mathcal{O})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\Gamma(X \widehat{\times}_B Y, \mathcal{O}))$$

est entier, surjectif et radiciel. Il induit donc une bijection entre les ensembles des fermés irréductibles finis et surjectifs sur les premiers facteurs dans $Z \widehat{\times}_D T$ et $X \widehat{\times}_B Y$. Les bases canoniques des deux $\mathbb{Z}[1/p]$ -modules $\mathbf{Cor}_B(X, Y)[1/p]$ et $\mathbf{Cor}_D(Z, T)[1/p]$, i.e., celles données par les correspondances finies élémentaires, sont donc en bijection. Dans ces bases, l'homomorphisme (2.32) est donné par une matrice diagonale (infinie) ; les entiers qui apparaissent sur la diagonale sont des multiplicités galoisiennes qui, dans le cas présent, sont des puissances de p . Ceci permet de conclure.

Il reste à voir que le foncteur (2.31) est essentiellement surjectif. Quitte à remplacer q par une puissance plus grande de p , on peut supposer que le q -ième morphisme de Frobenius absolu de $\Gamma(B, \mathcal{O})$ se factorise par $\Gamma(B, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(D, \mathcal{O})$. Il existe donc un morphisme $f : (B, k) \rightarrow (D, l)$ dans \mathbf{Afd}/k tel que $e \circ f : (B, k) \rightarrow (B, k)$ est le q -ième morphisme de Frobenius absolu⁽⁹⁾, i.e., correspond à l'élévation à la puissance q dans $\Gamma(B, \mathcal{O})$ et k . D'après la pleine fidélité pour le foncteur induit par $f : (B, k) \rightarrow (D, l)$, il est suffisant de montrer que le foncteur

$$B \widehat{\times}_{\mathrm{Frob}_q, B} - : \mathbf{AfdCor}(B)[1/p] \longrightarrow \mathbf{AfdCor}(B)[1/p],$$

induit par le morphisme $\mathrm{Frob}_q : (B, k) \rightarrow (B, k)$, est essentiellement surjectif. Or, pour X un B -affinoïde lisse, le Frobenius relatif $X \rightarrow B \widehat{\times}_{\mathrm{Frob}_q, B} X$ est inversible dans $\mathbf{AfdCor}(B)[1/p]$. Ceci permet de conclure. C.Q.F.D.

Soit B une k -variété rigide lisse. On fixe une sous-catégorie pleine $\mathcal{V} \subset \mathbf{SmRig}/B$ stable par coproduits finis et par passage aux composantes connexes. On note $\mathbf{Cor}(\mathcal{V})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{RigCor}(B)$ dont les objets sont ceux de \mathcal{V} . C'est une sous-catégorie additive.

Définition 2.2.38. — *Un préfaisceau avec transferts F sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} admettant les produits directs pertinents est un foncteur*

$$F : \mathbf{Cor}(\mathcal{V})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}$$

qui transforme les coproduits directs de \mathcal{V} en produits directs. (En particulier, un tel F est additif.) La catégorie des préfaisceaux avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans \mathcal{A} est notée $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$. Lorsque \mathcal{A} est la catégorie des groupes abéliens, on notera simplement $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V})$.

On réservera la notation $\mathbf{RigPST}(B, \mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{AfdPST}(B, \mathcal{A})$) pour la catégorie $\mathbf{PreStr}(\mathbf{SmRig}/B, \mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{PreStr}(\mathbf{SmAfd}/B, \mathcal{A})$). (Bien entendu, « \mathcal{A} » sera omis

⁽⁹⁾ On fera attention que le « k » dans le morphisme $(B, k) \rightarrow (D, l)$ désigne réellement l'extension de k donnée par $\mathrm{Frob}_q : k \hookrightarrow k$; pour que ceci soit une extension de corps valués complets, il faut remplacer la norme dans le second k par la racine q -ième de la norme originelle de k . On laissera ce genre de subtilité aux soins du lecteur.

de la notation lorsque \mathcal{A} est la catégorie des groupes abéliens.) On a le lemme facile suivant.

Lemme 2.2.39. — *La catégorie $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ est abélienne. Elle est de Grothendieck lorsque \mathcal{A} l'est.*

2.2.4. Préfaisceaux avec transferts \mathbb{B}^1 -invariants : propriétés élémentaires. — Soit B une k -variété rigide. Suivant [46], on fait la définition suivante.

Définition 2.2.40. — *Soient X et Y deux B -variétés rigides lisses sur k , et soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Cor}_B(X, Y)$ des correspondances finies. On dit que α est \mathbb{B}^1 -homotope (ou simplement homotope) à β s'il existe $\gamma \in \mathbf{Cor}_B(\mathbb{B}_X^1, Y)$ telle que $\alpha = \gamma \circ s_0$ et $\beta = \gamma \circ s_1$ avec $s_0, s_1 : X \rightarrow \mathbb{B}_X^1$ les sections nulle et unité. La correspondance finie γ est appelée une homotopie de α à β . On écrira $\alpha \sim_{\mathbb{B}^1} \beta$ lorsque α est \mathbb{B}^1 -homotope à β .*

On a le lemme facile suivant.

Lemme 2.2.41. — *La relation de \mathbb{B}^1 -homotopie est une relation d'équivalence compatible à l'addition et à la composition des correspondances finies.*

Démonstration. — On garde les notations de la définition 2.2.40. On a clairement $\alpha \sim_{\mathbb{B}^1} \alpha$. En effet, il suffit de prendre $\gamma = p \circ \alpha$ avec $p : \mathbb{B}_X^1 \rightarrow X$ la projection évidente. Si γ est une homotopie de α à β , on obtient une homotopie de β à α en prenant $\gamma \circ \tau$ avec $\tau : \mathbb{B}_X^1 \rightarrow \mathbb{B}_X^1$ un endomorphisme qui échange les sections nulle et unité (par exemple l'involution de $X\{t\}$ qui envoie t sur $1 - t$). Enfin, si γ est une homotopie de α vers β et ψ une homotopie de β vers δ , on obtient une homotopie de α vers δ en prenant $\gamma + \psi - \beta \circ p$. La compatibilité avec l'addition des correspondances finies et leur composition est claire. C.Q.F.D.

Définition 2.2.42. — *Pour X et Y deux B -variétés rigides lisses sur k , le quotient $\mathbf{Cor}_B(X, Y)/\sim_{\mathbb{B}^1}$ sera noté $\pi_0 \mathbf{Cor}_B(X, Y)$. C'est le groupe des correspondances finies à homotopie près. La catégorie obtenue de $\mathbf{RigCor}(B)$ (resp. $\mathbf{AfnCor}(B)$, $\mathbf{RigCor}'(B)$ et $\mathbf{AfnCor}'(B)$) par passage au quotient par la relation de \mathbb{B}^1 -homotopie sera notée $\pi_0 \mathbf{RigCor}(B)$ (resp. $\pi_0 \mathbf{AfnCor}(B)$, etc.).*

On peut également définir des groupes supérieurs de correspondances finies $\pi_i \mathbf{Cor}_B(X, Y)$ en utilisant le k -affinoïde cosimplicial $\Delta_{\mathbf{rig}}^\bullet$ donné en degré $n \in \mathbb{N}$ par

$$\Delta_{\mathbf{rig}}^n = \mathrm{Spm} \left(\frac{k\{t_0, \dots, t_n\}}{(1 - \sum_{i=0}^n t_i)} \right).$$

Définition 2.2.43. — *Soient X et Y deux B -variétés rigides lisses sur k . On note $\underline{\mathbf{Cor}}_B(X, Y)$ le complexe associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_B(\Delta_{\mathbf{rig}}^\bullet \widehat{\times}_k X, Y)$. Les groupes d'homologie $H_i(\underline{\mathbf{Cor}}_B(X, Y))$ seront notés $\pi_i \mathbf{Cor}_B(X, Y)$.*

Il est clair que le $\pi_0 \mathbf{Cor}(-, -)$ de la définition 2.2.42 est le même que celui de la définition 2.2.43. Le produit direct de groupes abéliens étant exact, on a

$\pi_i \mathbf{Cor}_B(\coprod_{\alpha \in I} X_\alpha, Y) = \prod_{\alpha \in I} \pi_i \mathbf{Cor}_B(X_\alpha, Y)$ pour toute famille au plus dénombrable $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ de k -variétés rigides lisses.

La proposition ci-dessous est un cas particulier de la proposition 2.2.52 où l'on prend K le préfaisceau $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y) = \mathbf{Cor}(-, Y)$ placé en degré zéro.

Proposition 2.2.44. — *Soient X et Y des B -variétés rigides lisses sur k . Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme*

$$\pi_i \mathbf{Cor}_B(X, Y) \longrightarrow \pi_i \mathbf{Cor}_B(\mathbb{B}_X^1, Y),$$

induit par la projection évidente $\mathbb{B}_X^1 \rightarrow X$, est inversible.

Dans la suite, on fixe une sous-catégorie pleine $\mathcal{V} \subset \text{SmRig}/B$ stable par coproduits finis et par passage aux composantes connexes. On suppose de plus que \mathcal{V} contient la boule de Tate \mathbb{B}_B^1 et qu'elle est stable par produits directs finis (i.e., produits fibrés au-dessus de B).

Définition 2.2.45. — *Soit F un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} (admettant les produits directs pertinents). On dit que F est invariant par homotopie (ou simplement \mathbb{B}^1 -invariant) si pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, le morphisme*

$$F(X) \longrightarrow F(\mathbb{B}_X^1),$$

induit par la projection évidente $\mathbb{B}_X^1 \rightarrow X$, est inversible. On notera $\mathbf{PreStr}_{\mathbb{B}^1}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dont les objets sont les préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie. (Comme d'habitude, « \mathcal{A} » sera omis de la notation lorsque \mathcal{A} est la catégorie des groupes abéliens.)

La définition 2.2.45 garde un sens pour des préfaisceaux sans transferts sur \mathcal{V} . On parlera alors de préfaisceaux *invariants par homotopie* (ou simplement \mathbb{B}^1 -invariants). Tous les résultats démontrés dans la suite de ce paragraphe sont encore valables pour les préfaisceaux de groupes abéliens sur \mathcal{V} .

Proposition 2.2.46. — *Pour une k -variété rigide $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, notons s_0 et s_1 les sections nulle et unité de la boule de Tate relative $p : \mathbb{B}_X^1 \rightarrow X$. Soit F un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} . Les deux conditions ci-dessous sont équivalentes.*

- (i) *F est invariant par homotopie.*
- (ii) *Pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, les deux flèches $F(s_0), F(s_1) : F(\mathbb{B}_X^1) \rightarrow F(X)$ sont égales.*

Démonstration. — Les deux flèches $F(s_0)$ et $F(s_1)$ sont des sections de la flèche $F(p)$. Lorsque F est invariant par homotopie, $F(p)$ est inversible et $F(s_0) = F(p)^{-1} = F(s_1)$. Ceci prouve l'implication (i) \Rightarrow (ii).

Pour montrer l'implication réciproque, on utilisera la structure d'objet en anneau sur \mathbb{B}_k^1 . Notons en effet

$$\mu : \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^1 \longrightarrow \mathbb{B}_k^1$$

la multiplication de \mathbb{B}_k^1 . Pour $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X \\ & \searrow s_1 & \nearrow \mu \\ & \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X & \longrightarrow \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X \\ & \nearrow s_0 & \searrow s_0 \circ p \\ \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X & \xrightarrow{s_0 \circ p} & \mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X \end{array}$$

La condition (ii) appliquée à la variété rigide $\mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X$ montre que l'identité de $F(\mathbb{B}_k^1 \widehat{\otimes}_k X)$ est égale à $F(s_0 \circ p) = F(p) \circ F(s_0)$. Étant donné que $p \circ s_0 = \text{id}_X$, on trouve que $F(s_0)$ est un inverse à droite et à gauche de $F(p)$. C.Q.F.D.

Soit F un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} . Pour une variété rigide X dans \mathcal{V} , on notera $\underline{\text{hom}}(X, F)$ le préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} défini par

$$\underline{\text{hom}}(X, F)(U) = F(X \widehat{\otimes}_B U)$$

pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{V})$. Pour $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés rigides dans \mathcal{V} , on notera

$$f^* : \underline{\text{hom}}(Y, F) \longrightarrow \underline{\text{hom}}(X, F)$$

le morphisme de préfaisceaux avec transferts déduit de f .

Définition 2.2.47. — Soit F un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} (admettant les produits directs pertinents). On pose

$$h_0^{\mathbb{B}^1}(F) = \text{Coker}(s_0^* - s_1^* : \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^1, F) \rightarrow F).$$

On obtient ainsi un endofoncteur $h_0^{\mathbb{B}^1}$ de $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$. Le préfaisceau avec transferts $h_0^{\mathbb{B}^1}(F)$ est appelé, vu le corollaire 2.2.48 ci-dessous, le préfaisceau avec transferts \mathbb{B}^1 -invariant associé à F .

Corollaire 2.2.48. — On garde les hypothèses et notations de la définition 2.2.47. Le préfaisceau avec transferts $h_0^{\mathbb{B}^1}(F)$ est \mathbb{B}^1 -invariant. De plus, le foncteur

$$h_0^{\mathbb{B}^1}(-) : \mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{PreStr}_{\mathbb{B}^1}(\mathcal{V}, \mathcal{A})$$

est un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion.

Démonstration. — L'invariance par homotopie de $h_0^{\mathbb{B}^1}(F)$ est un cas particulier de la proposition 2.2.52 où l'on prend $n = 0$ et K le préfaisceau F placé en degré zéro. On peut aussi l'obtenir directement en vérifiant la condition (ii) de la proposition 2.2.46 pour $h_0^{\mathbb{B}^1}(F)$. Le reste de l'énoncé est laissé au lecteur. C.Q.F.D.

On notera $\pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V})$ la sous-catégorie pleine de $\pi_0 \mathbf{RigCor}(B)$ admettant $\text{Ob}(\mathcal{V})$ pour objets.

Proposition 2.2.49. — *Soit F un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} (admettant les produits directs pertinents). Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) F est invariant par homotopie.
- (ii) Le foncteur F se factorise à travers $\pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V})$, i.e., il existe un foncteur additif $F' : \pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ et un isomorphisme $F \simeq F' \circ (\mathbf{Cor}(\mathcal{V}) \rightarrow \pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V}))$.

Ainsi, $\mathbf{PreStr}_{\mathbb{B}^1}(\mathcal{V})$ est canoniquement isomorphe à la catégorie

$$\underline{\mathbf{HOM}}^{\oplus}(\pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V})^{\text{op}}, \mathcal{A})$$

des foncteurs contravariants de $\pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V})$ dans \mathcal{A} qui transforme les coproduits directs de \mathcal{V} en produits directs.

Démonstration. — Supposons que F est invariant par homotopie et montrons que l'action des correspondances finies

$$\mathbf{Cor}_B(X, Y) \longrightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(F(Y), F(X))$$

se factorise par $\pi_0 \mathbf{Cor}_B(X, Y)$ pour X et Y dans \mathcal{V} . Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Cor}_B(X, Y)$ et $\gamma \in \mathbf{Cor}_B(\mathbb{B}_X^1, Y)$ une homotopie de α à β . On a alors les égalités

$$F(\alpha) = F(\gamma \circ s_0) = F(s_0) \circ F(\gamma) = F(s_1) \circ F(\gamma) = F(\gamma \circ s_1) = F(\beta).$$

D'où l'implication (i) \Rightarrow (ii).

Réciproquement, supposons que F se factorise par $\pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V})$. Soit U une B -variété rigide dans \mathcal{V} . Il suffit, compte tenu de la proposition 2.2.46, de montrer que $F(s_0) = F(s_1)$ avec $s_0, s_1 : U \rightarrow \mathbb{B}_U^1$ les sections nulle et unité. Mais, les deux correspondances finies $s_0, s_1 \in \mathbf{Cor}_B(U, \mathbb{B}_U^1)$ sont homotopes ; une homotopie est donnée par l'identité de \mathbb{B}_U^1 . C.Q.F.D.

La définition ci-dessous généralise la construction du préfaisceau \mathbb{B}^1 -invariant aux complexes de préfaisceaux.

Définition 2.2.50. — *Soit $K = K_{\bullet}$ un complexe de préfaisceaux avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} (admettant les coproduits directs et produits directs pertinents). Le complexe simple associé à l'objet simplicial en complexe $\underline{\text{hom}}(\Delta_{\text{rig}}^{\bullet}, K)$ sera noté $\underline{\text{Sing}}_{\bullet}^{\mathbb{B}^1}(K)$. C'est le complexe de chaînes rigides à valeurs dans K .*

Remarque 2.2.51. — Soit $\mathbf{n} \in \Delta \rightsquigarrow K_{\bullet}(\mathbf{n})$ un objet simplicial à valeurs dans la catégorie des complexes d'une catégorie abélienne admettant des coproduits dénombrables. Le complexe simple $S(K)$ associé à $K_{\bullet}(-)$ est le complexe simple associé au

bicomplexe $K_{\bullet\bullet}$ obtenu en prenant la somme alternée des faces simpliciales. Ainsi, on a :

$$S(K)_n = \bigoplus_{\substack{(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ r+s=n}} K_r(\mathbf{s}).$$

En particulier, le foncteur $S(-)$ commute aux colimites.

Proposition 2.2.52. — *Soit $K = K_{\bullet}$ un complexe de préfaisceaux avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} (admettant les coproduits directs et produits directs pertinents). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le préfaisceau d'homologie $H_n(\text{Sing}^{\mathbb{B}^1}(K))$ est invariant par homotopie.*

Démonstration. — La preuve de l'énoncé correspondant en géométrie algébrique (voir par exemple [46]) s'étend sans changement au cadre de la géométrie rigide. On la reprend pour la commodité du lecteur. On montrera que les deux morphismes d'objets simpliciaux

$$(2.33) \quad s_0^*, s_1^* : \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_k^1, \underline{\text{hom}}(\Delta_{\text{rig}}^{\bullet}, K)) \longrightarrow \underline{\text{hom}}(\Delta_{\text{rig}}^{\bullet}, K)$$

sont simplicialement homotopes. Ceci suffit par la proposition 2.2.46. On peut réécrire les deux morphismes (2.33)

$$(2.34) \quad s_0^*, s_1^* : \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k \Delta_{\text{rig}}^{\bullet}, K) \longrightarrow \underline{\text{hom}}(\Delta_{\text{rig}}^{\bullet}, K).$$

Il suffit donc de montrer que les deux morphismes de k -affinoïdes cosimpliciaux

$$(2.35) \quad s_0, s_1 : \Delta_{\text{rig}}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k \Delta_{\text{rig}}^{\bullet}$$

sont cosimplicialement cohomotopes. Pour cela, on identifiera \mathbb{B}_k^1 avec Δ_{rig}^1 . Une telle cohomotopie est la donnée pour tout $a : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{1}$ d'un morphisme $h(a) : \Delta_{\text{rig}}^n \rightarrow \Delta_{\text{rig}}^1 \times \Delta_{\text{rig}}^n$ tel que :

- $h(0 : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{1}) = s_0$ et $h(1 : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{1}) = s_1$,
- pour $c : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$, le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\text{rig}}^m & \xrightarrow{h(a \circ c)} & \Delta_{\text{rig}}^1 \widehat{\times}_k \Delta_{\text{rig}}^m \\ c \downarrow & & \downarrow \text{id} \times c \\ \Delta_{\text{rig}}^n & \xrightarrow{h(a)} & \Delta_{\text{rig}}^1 \widehat{\times}_k \Delta_{\text{rig}}^n. \end{array}$$

On construira un tel h avec $h(a)$ des applications affines. Par le lemme 2.2.53 ci-dessous, une application affine $h(a) : \Delta_{\text{rig}}^n \rightarrow \Delta_{\text{rig}}^1 \widehat{\times}_k \Delta_{\text{rig}}^n$ est uniquement déterminée par les images des $n + 1$ sommets de Δ_{rig}^n . Les sommets de Δ_{rig}^n sont les images des morphismes $\Delta_{\text{rig}}(e : \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{n})$, pour $0 \leq e \leq n$. On prendra alors pour $h(a)$ l'application affine qui à l'image de $\Delta_{\text{rig}}(e : \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{n})$ associe l'image de

$$\Delta_{\text{rig}}^0 \xrightarrow{(\Delta_{\text{rig}}(a \circ e), \Delta_{\text{rig}}(e))} \Delta_{\text{rig}}^1 \widehat{\times}_k \Delta_{\text{rig}}^n.$$

Il est clair que h définit une cohomotopie.

C.Q.F.D.

Un k -affinoïde X muni d'une action simplement transitive de \mathbb{B}_k^m (considéré comme un k -affinoïde en groupe pour la loi d'addition) est appelé un *espace affine rigide*. Le choix d'un point de X définit un isomorphisme $X \simeq \mathbb{B}_k^m$. Étant donnés deux espaces affines rigides (X, \mathbb{B}_k^m) et (Y, \mathbb{B}_k^n) , on appelle *application affine* (à ne pas confondre avec « morphisme affine ») la donnée d'un morphisme de \mathbb{B}_k^1 -modules $l : \mathbb{B}_k^m \rightarrow \mathbb{B}_k^n$ et d'un morphisme \mathbb{B}_k^m -équivariant $f : X \rightarrow Y$. On vérifie facilement que l est uniquement déterminé par f . On dira donc que f est un morphisme affine, s'il existe l comme ci-dessus.

Lemme 2.2.53. — *Soient (X, \mathbb{B}_k^m) et (Y, \mathbb{B}_k^n) deux espaces affines rigides. On suppose donnés des points k -rationnels x_0, \dots, x_m de X et y_0, \dots, y_m de Y . On suppose que la famille $(\overrightarrow{x_0 x_i})_{1 \leq i \leq m}$ est une base du k° -module libre $\mathbb{B}_k^m(k) = (k^\circ)^m$. Il existe alors une unique application affine $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour $0 \leq i \leq m$.*

Démonstration. — La preuve est laissée au lecteur.

C.Q.F.D.

2.2.5. Fibres d'un préfaisceau avec transferts \mathbb{B}^1 -invariant. — Soit F un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie au-dessus d'une k -variété rigide lisse B . Soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal. Si l'extension $\widehat{k}(p)/k(p)$ est séparable (voir ci-dessous pour la signification de $\widehat{k}(p)$) ou si la multiplication par l'exposant caractéristique de k est inversible dans F , nous construirons un préfaisceau avec transferts $F_{\widehat{p}}$ sur une sous-catégorie pleine des $\widehat{k}(p)$ -affinoïdes lisses (voir le théorème 2.2.69). Le préfaisceau $F_{\widehat{p}}$ sera appelé la *fibres* de F en p ; son existence dépend crucialement de l'invariance par homotopie de F . Toutefois, les transferts ne joueront qu'un rôle accessoire dans la construction de $F_{\widehat{p}}$ (voir notamment la remarque 2.2.59); ils n'interviennent que pour inverser les morphismes finis, surjectifs et radiciels qui apparaîtront dans la preuve du théorème 2.2.58 lorsque l'extension $\widehat{k}(p)/k(p)$ n'est pas séparable. En particulier, si k est de caractéristique nulle, le théorème 2.2.69 admet une variante pour les préfaisceaux de groupes abéliens sans transferts; il en est de même du lemme 2.2.71.

Définition 2.2.54. — *Soit B une k -variété rigide lisse et soit $p \in \mathcal{P}(B)$ un point de B . On appelle $\mathbf{AfnCor}(B, p)$ (resp. $\mathbf{SmAfn}/(B, p)$) la 2-colimite des catégories $\mathbf{AfnCor}(U)$ (resp. \mathbf{SmAfn}/U) suivant $U \in \mathbf{Flt}'(p)$. (On rappelle que $\mathbf{Flt}'(p)$ est le sous-ensemble de $\mathbf{Flt}(p)$ formé des voisinages affinoïdes de p .) Concrètement, les objets de cette catégorie sont des couples (X, U) avec $U \in \mathbf{Flt}'(p)$ et X un U -affinoïde lisse. Un tel objet sera simplement noté $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X/U)$ (resp. X/U). Étant donnés deux tels objets $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X/U)$ et $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y/V)$ (resp. (X/U) et (Y/V)), on a*

$$\text{hom}_{\mathbf{AfnCor}(B, p)}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X/U), \mathbb{Z}_{\text{tr}}(Y/V)) = \underset{W \subset U \cap V}{\text{Colim}}_{W \in \mathbf{Flt}'(p)} \mathbf{Cor}_W(X \widehat{\times}_U W, Y \widehat{\times}_V W)$$

$$\text{(resp. } \text{hom}_{\mathbf{SmAfn}/(B, p)}(X/U, Y/V) = \underset{W \subset U \cap V}{\text{Colim}}_{W \in \mathbf{Flt}'(p)} \text{hom}_{\mathbf{SmAfn}/W}(X \widehat{\times}_U W, Y \widehat{\times}_V W)\text{)}.$$

On notera simplement $\mathbf{Cor}_{B,p}(X/U, Y/V)$ le groupe ci-dessus. Un foncteur additif

$$F : \mathbf{AfnCor}(B, p)^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

(avec $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens) est appelé un préfaisceau avec transferts sur $\text{SmAfn}/(B, p)$. Ces préfaisceaux avec transferts forment une catégorie abélienne qu'on notera $\mathbf{AfnPST}(B, p)$.

Remarque 2.2.55. — Gardons les notations de la définition précédente et supposons que la k -variété rigide B est affinoïde (ce qui ne restreint pas la généralité). Alors, l'identité de X induit un isomorphisme entre X/U et X/B dans $\text{SmAfn}/(B, p)$. Ainsi, dans la suite on identifiera $\text{SmAfn}/(B, p)$ et $\mathbf{AfnCor}(B, p)$ avec leurs sous-catégories pleines formées des objets de la forme X/B . Par ailleurs, si X/B et Y/B sont deux objets de $\text{SmAfn}/(B, p)$, on dispose d'un isomorphisme évident

$$\mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B) = \text{Colim}_{W \in \text{Flt}(p)} \mathbf{Cor}_B(X \widehat{\times}_B W, Y).$$

En effet, on a une identification

$$\mathbf{Cor}_W(X \widehat{\times}_B W, Y \widehat{\times}_B W) = \mathbf{Cor}_B(X \widehat{\times}_B W, Y)$$

qui découle du fait que $(X \widehat{\times}_B W) \widehat{\times}_W (Y \widehat{\times}_B W) = (X \widehat{\times}_B W) \widehat{\times}_B Y$.

Le résultat suivant est une évidence. Il admet bien entendu une version sans transferts.

Lemme 2.2.56. — Soit B un k -affinoïde lisse et soit $p \in \mathcal{P}(B)$. Soit F un préfaisceau avec transferts sur SmAfn/B . On définit un préfaisceau avec transferts $F_{(B,p)}$ sur $\text{SmAfn}/(B, p)$ en posant

$$F_{(B,p)}(X/B) = \text{Colim}_{U \in \text{Flt}'(p)} F(X \widehat{\times}_B U)$$

pour X un B -affinoïde lisse. Le préfaisceau avec transferts $F_{(B,p)}$ est appelé la préfibres de F en p .

Soient X/B et Y/B des B -affinoïdes lisses. On définit $\pi_0 \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$ comme étant le coégalisateur de la double flèche

$$\mathbf{Cor}_{B,p}(\mathbb{B}_X^1/B, Y/B) \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1^*} \\ \xrightarrow{s_0^*} \end{array} \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B).$$

(Bien entendu, s_0^* et s_1^* sont les morphismes induits par les sections nulle et unité.) On a des identifications évidentes

$$\begin{aligned} \pi_0 \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B) &= \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(p)} \pi_0 \mathbf{Cor}_U(X \widehat{\times}_B U, Y \widehat{\times}_B U) \\ &= \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(p)} \pi_0 \mathbf{Cor}_B(X \widehat{\times}_B U, Y). \end{aligned}$$

De plus, les éléments de $\pi_0 \mathbf{Cor}_{B,p}(-, -)$ sont les flèches de la catégorie additive $\pi_0 \mathbf{AfnCor}(B, p)$ égale à la 2-colimite des $\pi_0 \mathbf{AfnCor}(U)$ suivant $U \in \text{Flt}'(p)$.

Le groupe $\pi_0 \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$ est le premier groupe d'homologie du complexe $\mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$ associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_{B,p}(\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\otimes}_k X/B, Y/B)$. Le i -ème groupe d'homologie du complexe $\mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$ est noté $\pi_i \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$. Il est clair que $\mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$ (resp. $\pi_i \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$) est la colimite des $\mathbf{Cor}_B(X \widehat{\otimes}_B U, Y)$ (resp. $\pi_i \mathbf{Cor}_B(X \widehat{\otimes}_B U, Y)$) suivant $U \in \text{Flt}(p)$.

Par la proposition 1.1.35, on dispose d'une valuation naturelle $\|\cdot\|_p$ sur le corps résiduel $k(p) = \mathcal{O}_{B,p}/\mathfrak{m}_p$. On note $\widehat{k}(p)$ le complété de $k(p)$ pour cette norme et $\widehat{p} = \text{Spm}(\widehat{k}(p))$. On dispose d'un foncteur de changement de base

$$\text{SmAfd}/(B, p) \longrightarrow \text{SmAfd}/\widehat{p}$$

qui à X/B associe le $\widehat{k}(p)$ -affinoïde lisse $X_{\widehat{p}} = X \widehat{\otimes}_B \widehat{p}$ (égal par définition au spectre maximal de la $\widehat{k}(p)$ -algèbre affinoïde $\Gamma(X, \mathcal{O}) \widehat{\otimes}_{\Gamma(B, \mathcal{O})} \widehat{k}(p)$). Ce foncteur s'étend aux catégories des correspondances finies comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.2.57. — *Pour tout k -affinoïde B et tout point $p \in \mathcal{P}(B)$, il existe un foncteur*

$$\phi_{B,p} : \mathbf{AfdCor}(B, p) \longrightarrow \mathbf{AfdCor}(\widehat{p})$$

qui envoie $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X/B)$ sur $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X_{\widehat{p}})$ et qui rend commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{SmAfd}/(B, p) & \longrightarrow & \text{SmAfd}/\widehat{p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{AfdCor}(B, p) & \xrightarrow{\phi_{B,p}} & \mathbf{AfdCor}(\widehat{p}). \end{array}$$

Les foncteurs $\phi_{B,p}$ sont caractérisés par les deux propriétés suivantes.

- (i) Soit $k \subset k'$ une extension de corps valués complets. Notons $B' = B \widehat{\otimes}_k k'$ et soit $p' \in \mathcal{P}(B')$ au-dessus de p . Alors le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AfdCor}(B, p) & \xrightarrow{\phi_{B,p}} & \mathbf{AfdCor}(\widehat{p}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{AfdCor}(B', p') & \xrightarrow{\phi_{B',p'}} & \mathbf{AfdCor}(\widehat{p}') \end{array}$$

commute modulo les isomorphismes d'associativité du produit fibré (les foncteurs verticaux étant ceux déduits de la proposition 2.2.22).

- (ii) Soit $D \rightarrow B$ un morphisme de k -affinoïdes lisses et soit $q \in \mathcal{P}(D)$ au-dessus de p . Alors le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AfdCor}(B, p) & \xrightarrow{\phi_{B,p}} & \mathbf{AfdCor}(\widehat{p}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{AfdCor}(D, q) & \xrightarrow{\phi_{D,q}} & \mathbf{AfdCor}(\widehat{q}) \end{array}$$

commute modulo les isomorphismes d'associativité du produit fibré (les foncteurs verticaux étant ceux déduits des propositions 2.2.22 et 2.2.37).

Démonstration. — En utilisant la propriété (i) avec $k' = \widehat{k}(p)$, on peut ramener la construction du foncteur $\phi_{B,p}$ au cas où p est un point fermé. Dans ce cas, le foncteur $\phi_{B,p}$ est déterminé par la propriété (ii). C.Q.F.D.

De la proposition précédente, on déduit un morphisme de complexes

$$(2.36) \quad \underline{\mathbf{Cor}}_{B,p}(X/B, Y/B) \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_{\widehat{p}}(X_{\widehat{p}}, Y_{\widehat{p}})$$

pour X/B et Y/B dans $\text{SmAfd}/(B, p)$. Dans la suite, il sera commode de fixer un sous-anneau $\Lambda \subset \mathbb{Q}$ et de considérer le morphisme de complexes de Λ -modules :

$$(2.37) \quad \underline{\mathbf{Cor}}_{B,p}(X/B, Y/B) \otimes \Lambda \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_{\widehat{p}}(X_{\widehat{p}}, Y_{\widehat{p}}) \otimes \Lambda.$$

(On ne perdra rien à supposer que $\Lambda = \mathbb{Z}$ ou $\Lambda = \mathbb{Z}[1/\text{ec}(k)]$ avec $\text{ec}(k)$ l'exposant caractéristique⁽¹⁰⁾ de k .) Le résultat principal de ce paragraphe affirme que (2.37) est un quasi-isomorphisme si p est un point maximal (et si certaines conditions techniques sont satisfaites).

Théorème 2.2.58. — *Soit B un k -affinoïde lisse et soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal. Soient X/B et Y/B deux B -affinoïdes lisses. On suppose qu'il existe des morphismes étales de B -affinoïdes $X \rightarrow \mathbb{B}_B^m$ et $Y \rightarrow \mathbb{B}_B^n$. On suppose aussi que l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :*

- les extensions $k(p)/k$ et $\widehat{k}(p)/k(p)$ sont séparables ;
- l'exposant caractéristique de k est inversible dans Λ .

Alors, le morphisme de complexes (2.37) est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. — On divise la preuve en deux parties. Dans la première, on se ramène au cas où $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$. Ce cas sera traité dans la deuxième partie.

Partie A : Réduction au cas où $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$.

Puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{B,p}$ est noethérien, son idéal maximal $\mathfrak{m}_{B,p}$ est de type fini. Il est donc engendré par des germes d'éléments de $\Gamma(U, \mathcal{O})$ pour un $U \in \text{Flt}(p)$ suffisamment petit. Quitte à remplacer B par un voisinage affinoïde de p , on peut donc supposer qu'il existe des éléments $a_1, \dots, a_r \in \Gamma(B, \mathcal{O})$ tels que $\mathfrak{m}_{B,p} = \sum_{i=1}^r a_i \cdot \mathcal{O}_{B,p}$. Le sous-affinoïde fermé et réduit $C = B/\sqrt{(a_1, \dots, a_r)}$ contient alors un unique point maximal $q \in \mathcal{M}(C)$ au-dessus de p . De plus, on a $\mathfrak{m}_{C,q} = 0$. (Bien entendu, en identifiant $\mathcal{M}(C)$ à un sous-ensemble de $\mathcal{M}(B)$, on a $p = q$; on a préféré noter q le point p vu comme élément de $\mathcal{M}(C)$ pour plus de clarté.)

Puisque C est réduit, son lieu non régulier $C_{\text{nr}} \subset C$ est un sous-affinoïde fermé partout de codimension non nulle. (En effet, l'anneau $\Gamma(C, \mathcal{O})$ est excellent d'après [28].) La propriété $\mathfrak{m}_{C,q} = 0$ entraîne alors que $q \notin C_{\text{nr}}$. Ainsi, quitte à remplacer une nouvelle fois B par un voisinage affinoïde de p , on peut supposer que C est régulier et

⁽¹⁰⁾ Dans ce paragraphe, on évitera de noter p l'exposant caractéristique de k pour ne pas le confondre avec le point $p \in \mathcal{P}(B)$.

intègre. On veut se ramener au cas où C est lisse sur k ; pour cela, on distingue deux cas.

- Supposons d’abord que l’extension $k(q)/k$ est séparable. Puisque $\mathfrak{m}_{C,q} = 0$, $k(C)/k$ est une sous-extension de $k(q)/k$. Il s’ensuit que l’extension $k(C)/k$ est séparable, ce qui entraîne que C est génériquement lisse sur k . Le même raisonnement utilisé ci-dessus (avec le lieu singulier à la place du lieu non régulier) permet alors de supposer que C est lisse sur k .
- Supposons maintenant que l’exposant caractéristique de k est inversible dans Λ . (C est le cas, par hypothèse, lorsque l’extension $k(q)/k$ est inséparable.)

On peut trouver une extension finie purement inséparable k'/k telle que $(C \widehat{\otimes}_k k')_{\text{red}}$ est génériquement lisse. (L’existence de k'/k découle du fait que $k(C)/k$ contient une sous-extension séparable d’indice fini que l’on peut obtenir en appliquant le lemme de normalisation de Noether en géométrie rigide.) Le même raisonnement utilisé ci-dessus (avec le lieu singulier à la place du lieu non régulier) permet alors de supposer que $(C \widehat{\otimes}_k k')_{\text{red}}$ est lisse sur k . Par ailleurs, d’après la proposition 2.2.37, il suffit de montrer que le morphisme

$$\underline{\text{Cor}}_{B',p'}(X'/B', Y'/B') \otimes \Lambda \longrightarrow \underline{\text{Cor}}_{\widehat{p}'}(X'_{\widehat{p}'}, Y'_{\widehat{p}'}) \otimes \Lambda,$$

avec $\dagger' = \dagger \widehat{\otimes}_k k'$ et $p' \in \mathcal{M}(B')$ l’unique point au-dessus de p , est un quasi-isomorphisme. Ceci nous ramène au cas où C est lisse sur k .

À ce stade, nous disposons d’un sous-affinoïde fermé $C \subset B$, lisse sur k , et d’un point $q \in \mathcal{M}(C)$ au-dessus de p avec $\mathfrak{m}_{C,q} = 0$. Quitte à remplacer une nouvelle fois B par un voisinage affinoïde de p , on peut trouver un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}_k^c & \longrightarrow & \mathbb{B}_k^c \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d \end{array}$$

où les flèches verticales sont étales et la flèche horizontale inférieure est déduite de la section nulle de \mathbb{B}_k^d .

Par le lemme 2.2.60 ci-dessous, il existe $\epsilon \in |k^\times|$ et un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} C \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d(o, \epsilon) & \xrightarrow{j_\epsilon} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}_k^c \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d(o, \epsilon) & \longrightarrow & \mathbb{B}_k^c \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d. \end{array}$$

D’autre part, grâce à la condition sur les B -affinoïdes X et Y , on dispose de carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}_k^{m+c} \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d & \longrightarrow & \mathbb{B}_k^c \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}_k^{n+c} \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d & \longrightarrow & \mathbb{B}_k^c \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^d \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont étales. On note $X_0 = X \widehat{\times}_B C$ et $Y_0 = Y \widehat{\times}_B C$. En utilisant la propriété de fonctorialité dans le lemme 2.2.60 ci-dessous, on obtient deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X_0 \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^d(o, \epsilon) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^d(o, \epsilon) & \longrightarrow & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y_0 \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^d(o, \epsilon) & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^d(o, \epsilon) & \longrightarrow & B. \end{array}$$

Étant donné qu'on peut remplacer B par n'importe quel voisinage affinoïde de p , on se ramène grâce à la discussion précédente à traiter le cas où $B = \mathbb{B}_C^d$, $X = \mathbb{B}_{X_0}^d$, $Y = \mathbb{B}_{Y_0}^d$, et $p = o \times q$ avec o le zéro de \mathbb{B}_k^d et $q \in \mathcal{M}(C)$ un point maximal vérifiant $\mathfrak{m}_{C,q} = 0$. On a dans ce cas un isomorphisme

$$\underline{\mathbf{Cor}}_{B,p}(X, Y) \simeq \operatorname{Colim}_{V \in \operatorname{Flt}(q)} \operatorname{Colim}_{\lambda \in |k^\times|} \underline{\mathbf{Cor}}_{\mathbb{B}_C^d(o,\lambda)}(\mathbb{B}_{X_0}^d \widehat{\times}_C V(o, \lambda), \mathbb{B}_{Y_0}^d(o, \lambda)).$$

En effet, le lemme 2.2.61 ci-dessous affirme que les ouverts de la forme $\mathbb{B}_V^d(o, \lambda)$, avec $V \in \operatorname{Flt}(q)$ et $\lambda \in |k^\times|$, forment un sous-ensemble cofinal de $\operatorname{Flt}(p)$. Le morphisme (2.36) se factorise de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{Colim}_{V \in \operatorname{Flt}(q)} \operatorname{Colim}_{\lambda \in |k^\times|} \underline{\mathbf{Cor}}_{\mathbb{B}_C^d(o,\lambda)}(\mathbb{B}_{X_0}^d \widehat{\times}_C V(o, \lambda), \mathbb{B}_{Y_0}^d(o, \lambda)) &\longrightarrow \operatorname{Colim}_{V \in \operatorname{Flt}(q)} \underline{\mathbf{Cor}}_C(X_0 \widehat{\times}_C V, Y_0) \\ &\longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_{\widehat{q}}((X_0)_{\widehat{q}}, (Y_0)_{\widehat{q}}). \end{aligned}$$

Pour se ramener au cas $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$ (remarquer que X_0/C et Y_0/C vérifient l'hypothèse technique de l'énoncé), il est donc suffisant de montrer que les morphismes de complexes

$$(2.38) \quad \underline{\mathbf{Cor}}_{\mathbb{B}_C^d(o,\lambda)}(\mathbb{B}_{X_0}^d \widehat{\times}_C V(o, \lambda), \mathbb{B}_{Y_0}^d(o, \lambda)) \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_C(X_0 \widehat{\times}_C V, Y_0)$$

sont des quasi-isomorphismes pour tout $V \in \operatorname{Flt}(q)$ et $\lambda \in |k^\times|$. Remarquons pour cela que

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Cor}}_{\mathbb{B}_C^d(o,\lambda)}(\mathbb{B}_{X_0}^d \widehat{\times}_C V(o, \lambda), \mathbb{B}_{Y_0}^d(o, \lambda)) &= \underline{\mathbf{Cor}}_C(\mathbb{B}_{X_0}^d \widehat{\times}_C V(o, \lambda), Y_0) \\ &\simeq \underline{\mathbf{Cor}}_C(\mathbb{B}_{X_0}^d \widehat{\times}_C V, Y_0) \end{aligned}$$

(la dernière identification provient du fait que $\lambda \in |k^\times|$). De plus, modulo ces identifications, le morphisme (2.38) est celui induit par la section nulle de \mathbb{B}_k^d . Le résultat découle maintenant de la proposition 2.2.44.

Partie B : Le cas où $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$.

À partir de maintenant, on travaille sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$; puisque B est lisse, l'extension $k(p)/k$ est séparable. (Le morphisme étale $X \rightarrow \mathbb{B}_B^m$ qui a servi dans la partie A de la preuve ne jouera plus aucun rôle dans la suite. Nous aurons besoin toutefois du morphisme étale $Y \rightarrow \mathbb{B}_B^n$ pour construire une immersion ouverte $Y \hookrightarrow P^{\text{an}}$ ci-dessous.)

On note $A = \Gamma(B, \mathcal{O})$ et $D = \Gamma(Y, \mathcal{O})$. Le morphisme étale $Y \rightarrow \mathbb{B}_B^n$ correspond à un morphisme étale de k -algèbres affinoïdes $A\{\tau_1, \dots, \tau_n\} \rightarrow D$. Par le lemme 1.1.52, il existe une présentation

$$D \simeq \frac{A\{\tau_1, \dots, \tau_{n+r}\}}{(f_1, \dots, f_r)}$$

avec $f_j \in A[\tau_1, \dots, \tau_{n+r}]$ pour $1 \leq j \leq r$. On pose

$$E = \frac{A[\tau_1, \dots, \tau_{n+r}]}{(f_1, \dots, f_r)} \quad \text{et} \quad P = \text{Spec}(E).$$

Alors P est un A -schéma affine de type fini et il existe une immersion ouverte canonique $Y \hookrightarrow P^{\text{an}}$. (Dans la suite dans la preuve, le morphisme étale $Y \rightarrow \mathbb{B}_B^n$ ne servira plus ; nous utiliserons uniquement l'immersion ouverte de Y dans l'analytifié du A -schéma de type fini P .)

Pour un anneau L et un entier $n \in \mathbb{N}$, rappelons que Δ_L^n désigne le schéma $\text{Spec}(L[t_0, \dots, t_n]/(1 - \sum_{i=0}^n t_i))$. Introduisons quelques notations supplémentaires.

– On pose

$$C^n = \Gamma(\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X, \mathcal{O}) = \frac{\Gamma(X, \mathcal{O})\{t_0, \dots, t_n\}}{(1 - \sum_{i=0}^n t_i)},$$

$$\widehat{C}^n = \Gamma((\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}, \mathcal{O}) = \frac{\Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})\{t_0, \dots, t_n\}}{(1 - \sum_{i=0}^n t_i)}.$$

Les anneaux C^n et \widehat{C}^n sont des algèbres affinoïdes sur k et $\widehat{k}(p)$ respectivement. D'après le lemme 2.2.62 ci-dessous, la $\mathcal{O}(\Delta_{\widehat{k}(p)}^n)$ -algèbre \widehat{C}^n est régulière. Grâce au théorème de Popescu [34, 35] (voir aussi [40]), \widehat{C}^n est une colimite filtrante de $\mathcal{O}(\Delta_L^n)$ -algèbres lisses de type fini avec $L \subset \widehat{k}(p)$ des sous- A -algèbres de type fini. L'hypothèse $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$ assure que $\text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est dominant. Ainsi, quitte à raffiner L (dans l'ensemble des sous- A -algèbres de type fini de $\widehat{k}(p)$), on peut supposer qu'il existe un B -affinoïde fini, surjectif et radiciel $B' = \text{Spm}(A')$ tel que la A' -algèbre $(L \otimes_A A')_{\text{red}}$ est lisse. (Bien entendu, lorsque l'extension $\widehat{k}(p)/k(p)$ est séparable, on peut prendre $B' = B$, i.e., on peut supposer que la A -algèbre L est lisse.)

– Identifions Y à son image par l'immersion ouverte $Y \hookrightarrow P^{\text{an}}$. Étant donné un B -affinoïde lisse Q , on notera $\mathbf{Cor}_B^Y(Q, P)$ le sous-groupe⁽¹¹⁾ de

$$\mathbf{Cor}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(\Gamma(Q, \mathcal{O})), P)$$

librement engendré par les correspondances finies élémentaires $[Z]$ avec $Z \subset \text{Spec}(\Gamma(Q, \mathcal{O})) \times_{\text{Spec}(A)} P$ intègre, fini et surjectif sur une composante connexe de $\text{Spec}(\Gamma(Q, \mathcal{O}))$, et vérifiant la condition supplémentaire suivante :

⁽¹¹⁾ Il s'agit du groupe de correspondances finies algébriques au-dessus de $\text{Spec}(A)$ entre les A -schémas $\text{Spec}(\Gamma(Q, \mathcal{O}))$ et P .

la A -algèbre $\Gamma(Z, \mathcal{O})$ est affinoïde puisqu'elle est finie sur $\Gamma(Q, \mathcal{O})$. On note Z^{an} le B -affinoïde $\text{Spm}(\Gamma(Z, \mathcal{O}))$. Par la proposition 1.1.21, le morphisme de A -schémas $Z \rightarrow P$ équivaut à la donnée d'un morphisme de B -variétés rigides $Z^{\text{an}} \rightarrow P^{\text{an}}$. Alors, $[Z]$ est dans $\mathbf{Cor}_B^Y(Q, P)$ si et seulement si l'image de Z^{an} dans P^{an} est contenue dans Y .

Il est clair que l'association $[Z] \rightsquigarrow [Z^{\text{an}}]$ fournit un isomorphisme

$$(2.39) \quad \mathbf{Cor}_B^Y(Q, P) \simeq \mathbf{Cor}_B(Q, Y).$$

– Étant donné un $\widehat{k}(p)$ -affinoïde lisse R , on notera $\mathbf{Cor}_B^Y(R, P)$ le sous-groupe de

$$\mathbf{Cor}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(\Gamma(R, \mathcal{O})), P)$$

librement engendré par les correspondances finies élémentaires $[Z]$ avec $Z \subset \text{Spec}(\Gamma(R, \mathcal{O})) \times_{\text{Spec}(A)} P$ intègre, fini et surjectif sur une composante connexe de $\text{Spec}(\Gamma(R, \mathcal{O}))$, et vérifiant la condition supplémentaire suivante :

la $\widehat{k}(p)$ -algèbre $\Gamma(Z, \mathcal{O})$ est affinoïde puisqu'elle est finie sur $\Gamma(R, \mathcal{O})$. On note Z^{an} le $\widehat{k}(p)$ -affinoïde $\text{Spm}(\Gamma(Z, \mathcal{O}))$. Par la proposition 1.1.21, le morphisme de A -schémas $Z \rightarrow P$ équivaut à la donnée d'un morphisme de $\widehat{k}(p)$ -variétés rigides $Z^{\text{an}} \rightarrow P^{\text{an}} \widehat{\otimes}_k \widehat{k}(p)$. Alors, $[Z]$ est dans $\mathbf{Cor}_B^Y(R, P)$ si et seulement si l'image de Z^{an} dans $P^{\text{an}} \widehat{\otimes}_k \widehat{k}(p)$ est contenue dans $Y \widehat{\otimes}_k \widehat{k}(p)$.

Il est clair que l'association $[Z] \rightsquigarrow [Z^{\text{an}}]$ fournit un isomorphisme

$$(2.40) \quad \mathbf{Cor}_B^Y(R, P) \simeq \mathbf{Cor}_{\widehat{p}}(R, Y_{\widehat{p}}).$$

Les isomorphismes (2.39) et (2.40) sont naturels en Q et R (où pour $\mathbf{Cor}_B^Y(-, P)$ on utilise le « pull-back » des cycles relatifs suivant des morphismes entre schémas noethériens réguliers). Avec ces notations, on doit prouver que

$$(2.41) \quad \text{Colim}_{W \in \text{Flt}'(p)} \mathbf{Cor}_B^Y((\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\otimes}_k X) \widehat{\otimes}_B W, P) \longrightarrow \mathbf{Cor}_B^Y((\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\otimes}_k X)_{\widehat{p}}, P)$$

est un quasi-isomorphisme (après application de $- \otimes \Lambda$). On divise la preuve en deux sous-parties : dans la première on traite la surjectivité en homologie et dans la seconde on traite l'injectivité. Étant donné que les preuves de la surjectivité et de l'injectivité se ressemblent, nous donnerons beaucoup plus de détails dans la première sous-partie que dans la seconde.

Sous-partie B.1 : On montre ici que (2.41) induit des morphismes surjectifs en homologie. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et soit $\alpha \in \mathbf{Cor}_B^Y((\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\otimes}_k X)_{\widehat{p}}, P) \otimes \Lambda$ une correspondance finie (à coefficients dans Λ) définissant un cycle dans le complexe normalisé associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_B^Y((\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\otimes}_k X)_{\widehat{p}}, P) \otimes \Lambda$, i.e., telle que $\alpha \circ d_{n,i} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$, avec

$$d_{n,i} : (\Delta_{\text{rig}}^{n-1} \widehat{\otimes}_k X)_{\widehat{p}} \hookrightarrow (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\otimes}_k X)_{\widehat{p}}$$

l'inclusion de la face d'équation $t_i = 0$. Nous allons construire successivement des correspondances finies, α' , α'' et α''' et nous montrerons que α''' fournit un antécédent à α . L'argument étant long, on le divise en trois étapes.

Étape B.1.1 : Puisque P est un A -schéma de type fini, il existe par le théorème de Popescu [34, 35] une sous- A -algèbre de type fini $L \subset \widehat{k}(p)$, un Δ_L^n -schéma affine et lisse \widetilde{H}_0 , un morphisme de Δ_L^n -schémas $\text{Spec}(\widehat{C}^n) \rightarrow \widetilde{H}_0$, et une correspondance finie $\widetilde{\alpha}'_0 \in \mathbf{Cor}_{\text{Spec}(A)}(\widetilde{H}_0, P) \otimes \Lambda$ telle que α est égale à la composition de

$$\text{Spec}(\widehat{C}^n) \longrightarrow \widetilde{H}_0 \xrightarrow{\widetilde{\alpha}'_0} P.$$

Quitte à raffiner L et \widetilde{H}_0 , on peut supposer aussi que $\widetilde{\alpha}'_0 \circ (\widetilde{H}_0/(t_i) \hookrightarrow \widetilde{H}_0) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$.

Quitte à raffiner L , on peut supposer qu'il existe un B -affinoïde fini, surjectif et radiciel $B' = \text{Spm}(A')$ tel que la A' -algèbre $(L \otimes_A A')_{\text{red}}$ est lisse. Soit q une puissance de l'exposant caractéristique de k telle que le q -ième morphisme de Frobenius absolu de A se factorise par le morphisme $A \rightarrow A'$. Par le choix de A' , la A -algèbre $(L \otimes_{A, \text{Frob}_q} A)_{\text{red}}$ est lisse. Il s'ensuit aussitôt que le Δ_A^n -schéma

$$H_0 = (\widetilde{H}_0 \times_{\Delta_A^n, \text{Frob}_q} \Delta_A^n)_{\text{red}}$$

est également lisse. (Ci-dessus, le changement de base est suivant le q -ième morphisme de Frobenius absolu de Δ_A^n qui se factorise par le morphisme

$$\text{id}_{\Delta^n} \times \text{Frob}_q : \Delta^n \times \text{Spec}(A) \longrightarrow \Delta^n \times \text{Spec}(A).)$$

Par ailleurs, le q -ième morphisme de Frobenius absolu de \widetilde{H}_0 fournit un morphisme de Δ_A^n -schémas $\widetilde{H}_0 \rightarrow H_0$. Ce dernier morphisme étant fini, surjectif et radiciel, il admet un inverse $\gamma \in \mathbf{Cor}_{\Delta_A^n}(H_0, \widetilde{H}_0) \otimes \Lambda$. On pose alors $\alpha'_0 = \widetilde{\alpha}'_0 \circ \gamma$.

On a ainsi trouvé un Δ_A^n -schéma affine et lisse H_0 , un morphisme de Δ_A^n -schémas $\text{Spec}(\widehat{C}^n) \rightarrow H_0$, et une correspondance finie $\alpha'_0 \in \mathbf{Cor}_{\text{Spec}(A)}(H_0, P) \otimes \Lambda$ telle que α est égale à la composition de

$$\text{Spec}(\widehat{C}^n) \longrightarrow H_0 \xrightarrow{\alpha'_0} P.$$

De plus, on a $\alpha'_0 \circ (H_0/(t_i) \hookrightarrow H_0) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$.

Pour la suite, on pose $H = H_0 \times_{\Delta_A^n} \text{Spec}(C^n)$ et on note α' la composition de α'_0 avec la projection $H \rightarrow H_0$. On dispose également d'un morphisme canonique de C^n -schémas $\text{Spec}(\widehat{C}^n) \rightarrow H$ et la composition de

$$\text{Spec}(\widehat{C}^n) \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha'} P$$

est égale à α . Bien entendu, on a encore $\alpha' \circ (H/(t_i) \hookrightarrow H) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$.

Étape B.1.2 : Notons $Z' \subset H \times_{\text{Spec}(A)} P$ le support de α' . C'est un schéma réduit, fini et surjectif sur H . On pose

$$Z = (\text{Spec}(\widehat{C}^n) \times_H Z')_{\text{red}}.$$

Alors $\Gamma(Z, \mathcal{O})$ est une \widehat{C}^n -algèbre affinoïde finie et $Z^{\text{an}} = \text{Spm}(\Gamma(Z, \mathcal{O}))$ est le support de la correspondance finie α de $(\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}$ dans $(P^{\text{an}})_{\widehat{p}}$. Par construction, on a un carré cartésien (à nil-immersion près)

$$\begin{array}{ccc} Z^{\text{an}} & \longrightarrow & (Z'^{\text{an}})_{\widehat{p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} = \text{Spm}(\widehat{C}^n) & \longrightarrow & (H^{\text{an}})_{\widehat{p}}. \end{array}$$

La flèche horizontale inférieure est une section au morphisme $(H^{\text{an}})_{\widehat{p}} \rightarrow (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}$ déduit du morphisme évident $H^{\text{an}} \rightarrow \Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X$. En particulier, les flèches horizontales dans le carré ci-dessus sont des immersions fermées.

Puisque α est dans $\mathbf{Cor}_B^Y((\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}, P)$, le morphisme $Z^{\text{an}} \rightarrow (P^{\text{an}})_{\widehat{p}}$ se factorise par l'ouvert affinoïde $Y_{\widehat{p}}$. On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^{\text{an}} & \longrightarrow & (Z'^{\text{an}})_{\widehat{p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{\widehat{p}} & \longrightarrow & (P^{\text{an}})_{\widehat{p}}. \end{array}$$

Ainsi, Z^{an} est contenu dans $(Z'^{\text{an}} \widehat{\times}_{P^{\text{an}}} Y)_{\widehat{p}}$. Puisque Z^{an} est un affinoïde (et donc quasi-compact) et que la k -variété rigide $Z'^{\text{an}} \widehat{\times}_{P^{\text{an}}} Y$ peut s'écrire comme une union croissante d'une suite d'ouverts affinoïdes, on peut trouver un ouvert affinoïde $R \subset Z'^{\text{an}}$ tel que :

- l'image de R par le morphisme $Z'^{\text{an}} \rightarrow P^{\text{an}}$ est contenue dans $Y \subset P^{\text{an}}$;
- $R_{\widehat{p}}$ contient le fermé $Z^{\text{an}} \hookrightarrow (Z'^{\text{an}})_{\widehat{p}}$.

On définit alors un sous-ensemble $T \subset H^{\text{an}}$ en posant $T = (Z'^{\text{an}} \rightarrow H^{\text{an}})_{\odot}(R)$ avec les notations du lemme 2.2.63 ci-dessous. (Le lemme en question suppose qu'on travaille avec des k -affinoïdes ; on se ramène à ce cas en remplaçant H^{an} par un ouvert affinoïde dont l'image inverse par $Z'^{\text{an}} \rightarrow H^{\text{an}}$ contient R .) Toujours d'après le lemme 2.2.63 ci-dessus, T est un ouvert affinoïde et $T_{\widehat{p}}$ contient le fermé $(\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} \hookrightarrow (H^{\text{an}})_{\widehat{p}}$. (En effet, l'image inverse de ce fermé par $(Z'^{\text{an}})_{\widehat{p}} \rightarrow (H^{\text{an}})_{\widehat{p}}$ est égale à Z^{an} qui est bien contenu dans $R_{\widehat{p}}$.) On note alors α'' la composition de α' avec $\text{Spec}(\Gamma(T, \mathcal{O})) \rightarrow H$. Par construction, α'' est un élément de $\mathbf{Cor}_B^Y(T, P) = \mathbf{Cor}_B(T, Y)$. De plus les compositions de α'' avec les inclusions $T/(t_i) \hookrightarrow T$ sont nulles pour $0 \leq i \leq n$.

Étape B.1.3 : À ce stade, nous avons construit un $\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X$ -affinoïde lisse T , muni d'une section

$$s : (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} \longrightarrow T_{\widehat{p}}$$

définie après extension des scalaires à $\widehat{k}(p)$, ainsi qu'une correspondance finie $\alpha'' \in \mathbf{Cor}_B(T, Y) \otimes \Lambda$ telle que $(\alpha'')_{\widehat{p}} \circ s = \alpha$ et $\alpha'' \circ (T/(t_i) \hookrightarrow T) = 0$ pour $0 \leq i \leq n$. Par le lemme 2.2.64 ci-dessous, on peut supposer que $T = \mathbb{B}_k^d \widehat{\times}_k (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X) = \Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d$ (quitte à remplacer B par un voisinage affinoïde de p). Dans ce cas, on peut considérer α'' comme un cycle dans le complexe $\mathbf{Cor}_B(\mathbb{B}_X^d, Y) \otimes \Lambda$. Appelons $\pi : \mathbb{B}_X^d \rightarrow$

X la projection évidente. D'après la proposition 2.2.44, il existe une correspondance finie $\alpha''' \in \mathbf{Cor}_B(\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X, Y) \otimes \Lambda$, qui est un cycle dans le complexe normalisé associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_B(\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\times}_k X, Y) \otimes \Lambda$, et telle que α'' est homologue à $\alpha''' \circ \pi$. Soit $\beta \in \mathbf{Cor}_B(\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d, Y) \otimes \Lambda$ une homologie entre α'' et $\alpha''' \circ \pi$. Ainsi, β vérifie $\beta \circ d_{n+1,0} = \alpha'' - \alpha''' \circ \pi$ et $\beta \circ d_{n+1,i} = 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

Appelons

$$h : (\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} \longrightarrow (\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d)_{\widehat{p}}$$

le morphisme obtenu du morphisme de $(\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}$ -affinoïdes $s : (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} \rightarrow T_{\widehat{p}} = (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d)_{\widehat{p}}$ par changement de base suivant le morphisme de dégénérescence $(\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} \rightarrow (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}$ correspondant à

$$(t_0, \dots, t_{n+1}) \rightsquigarrow (t_0 + t_1, t_2, \dots, t_{n+1}).$$

On a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} & \xrightarrow{h} & (\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d)_{\widehat{p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} & \xrightarrow{s} & (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d)_{\widehat{p}} \end{array}$$

et h est un morphisme de $(\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}$ -affinoïdes. En particulier, pour $0 \leq i \leq n+1$, on dispose de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} & \xrightarrow{h_i} & (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d)_{\widehat{p}} \\ \downarrow d_{n+1,i} & & \downarrow d_{n+1,i} \\ (\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} & \xrightarrow{h} & (\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d)_{\widehat{p}}. \end{array}$$

De plus, $h_0 = s$ de sorte que $h \circ d_{n+1,0} = d_{n+1,0} \circ s$. (Cette égalité est aussi vraie pour $i = 1$, mais nous n'en aurons pas besoin.) Ainsi, la correspondance finie $(\beta)_{\widehat{p}} \circ h \in \mathbf{Cor}_{\widehat{p}}((\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}, Y_{\widehat{p}}) \otimes \Lambda$ vérifie les identités suivantes

$$(\beta)_{\widehat{p}} \circ h \circ d_{n+1,i} = \begin{cases} (\alpha'')_{\widehat{p}} \circ s - (\alpha''')_{\widehat{p}} \circ \pi_{\widehat{p}} \circ s & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n+1. \end{cases}$$

Puisque $\alpha = (\alpha'')_{\widehat{p}} \circ s$ et que s est une section à la projection

$$\pi_{\widehat{p}} : (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d)_{\widehat{p}} \longrightarrow (\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}},$$

la correspondance finie $(\beta)_{\widehat{p}} \circ h$ fournit une homologie entre α et $(\alpha''')_{\widehat{p}}$. Ceci termine la preuve de la surjectivité.

Sous-partie B.2 : On montre maintenant que (2.41) induit des morphismes injectifs en homologie. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et soit $\alpha \in \mathbf{Cor}_B^Y(\Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X, P) \otimes \Lambda$ une correspondance finie définissant un cycle dans le complexe normalisé associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_B^Y(\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\times}_k X, P) \otimes \Lambda$, i.e., telle que $\alpha \circ d_{n,i} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$. On

suppose qu'il existe une correspondance finie $\beta \in \mathbf{Cor}_B^Y((\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}}, P) \otimes \Lambda$ telle que $\beta \circ d_{n+1,0} = \alpha_{\widehat{p}}$ et $\beta \circ d_{n+1,i} = 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

Puisque P est un A -schéma de type fini, on peut appliquer le théorème de Popescu [34, 35] et le raisonnement de l'étape B.1.1 pour obtenir un C^{n+1} -schéma affine, lisse et de type fini H , muni d'un morphisme de C^{n+1} -schémas $\text{Spec}(\widehat{C}^{n+1}) \rightarrow H$, et une correspondance finie $\beta' \in \mathbf{Cor}_{\text{Spec}(A)}(H, P) \otimes \Lambda$ telle que β est égale à la composition de

$$\text{Spec}(\widehat{C}^{n+1}) \longrightarrow H \xrightarrow{\beta'} P.$$

En raffinant L et \widetilde{H}_0 (voir le début de l'étape B.1.1), on peut aussi garantir que $\beta' \circ (H/(t_0) \hookrightarrow H) = \alpha \circ (H/(t_0) \rightarrow \text{Spec}(C^n))$ et $\beta' \circ (H/(t_i) \hookrightarrow H) = 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

En raisonnant comme dans l'étape B.1.2, on peut construire un ouvert affinoïde $T \subset H^{\text{an}}$ tel que $T_{\widehat{p}}$ contient le fermé $(\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X)_{\widehat{p}} \hookrightarrow (H^{\text{an}})_{\widehat{p}}$ et tel que la restriction de $(\beta')^{\text{an}}$ à T se factorise par Y . On note $\beta'' \in \mathbf{Cor}_B(T, Y) \otimes \Lambda$ la correspondance finie ainsi obtenue. Par construction, on a

$$(2.42) \quad \beta'' \circ (T/(t_0) \hookrightarrow T) = \alpha \circ (T/(t_0) \longrightarrow \Delta_{\text{rig}}^n \widehat{\times}_k X)$$

et $\beta'' \circ (T/(t_i) \hookrightarrow T) = 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

D'après le lemme 2.2.64 ci-dessus, on peut supposer que $T = \mathbb{B}_k^d \widehat{\times}_k (\Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k X) = \Delta_{\text{rig}}^{n+1} \widehat{\times}_k \mathbb{B}_X^d$ (quitte à remplacer B par un voisinage affinoïde de p). Notons s_0 la section nulle de \mathbb{B}_X^d et posons $\beta''' = \beta'' \circ s_0$. Alors $\beta''' \circ d_{n+1,i} = 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$. D'autre part, la relation (2.42) entraîne que $\beta''' \circ d_{n+1,0} = \alpha$. Ceci montre que α est homologue à zéro. Le théorème est démontré. C.Q.F.D.

Remarque 2.2.59. — Dans le cas où les extensions $k(p)/k$ et $\widehat{k}(p)/k(p)$ sont séparables (ce qui est automatique si k est de caractéristique nulle), la preuve du théorème 2.2.58 fonctionne encore en remplaçant partout « correspondances finies » par « combinaisons linéaires de morphismes ». Ainsi, le morphisme de groupes simpliciaux

$$\mathbb{Z} \otimes \text{hom}_{\text{Afd}/(B,p)}(\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\times}_k X/B, Y/B) \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \text{hom}_{\text{Afd}/\widehat{p}}(\Delta_{\text{rig}}^\bullet \widehat{\times}_k X_{\widehat{p}}, Y_{\widehat{p}})$$

induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés (en supposant bien entendu que X et Y admettent des morphismes étales vers des boules de Tate relatives).

Dans la preuve du théorème 2.2.58, nous avons utilisé quelques lemmes de géométrie rigide. Il s'agit des lemmes 2.2.60, 2.2.61, 2.2.62, 2.2.63 et 2.2.64 ci-dessous (que nous avons ordonnés par ordre d'utilisation).

Lemme 2.2.60. — Soient U et V des k -variétés rigides quasi-compactes. On suppose donné un morphisme étale $e : V \rightarrow U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n$. On note o le centre de \mathbb{B}_k^n , $Z = V \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^n} o$ et $e_0 : Z \rightarrow U$ le morphisme évident. Pour $\epsilon \in |k^\times|$ suffisamment petit, il existe un

unique morphisme $j_\epsilon : Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \rightarrow V$ rendant commutatif le carré

$$(2.43) \quad \begin{array}{ccc} Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \xrightarrow{j_\epsilon} & V \\ e_0 \times \text{id} \downarrow & & \downarrow e \\ U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longrightarrow & U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n \end{array}$$

et tel que $(j_\epsilon)|_{Z \widehat{\times}_k o} : Z \rightarrow V$ est l'inclusion évidente de Z dans V . De plus, le morphisme j_ϵ est une immersion ouverte et le carré ci-dessus est cartésien.

Le morphisme j_ϵ est fonctoriel au sens suivant. Supposons donné un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{g} & V \\ e' \downarrow & & \downarrow e \\ U' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n & \xrightarrow{f \times \text{id}} & U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n \end{array}$$

avec e et e' étales. Notons $j'_\epsilon : Z' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \rightarrow V'$ le morphisme associé à e' comme ci-dessus. Alors, le carré suivant commute

$$(2.44) \quad \begin{array}{ccc} Z' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \xrightarrow{g_0 \times \text{id}} & Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \\ j'_\epsilon \downarrow & & \downarrow j_\epsilon \\ V' & \xrightarrow{g} & V. \end{array}$$

Démonstration. — On construit d'abord le morphisme j_ϵ . On pose $W = V \widehat{\times}_U Z$. On a un morphisme diagonal $Z \rightarrow W$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \swarrow & \searrow \\ V & \longleftarrow W & \longrightarrow Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n \end{array}$$

commute et ses flèches horizontales sont étales. Par le corollaire 1.1.56 et le lemme 2.2.61 ci-dessous, il existe pour $\epsilon \in |k^\times|$ suffisamment petit un morphisme $Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \rightarrow W$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & & & W \\ & & & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longrightarrow & Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n \end{array}$$

Considérons la composition de

$$j_\epsilon : Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \longrightarrow W \longrightarrow V.$$

Par construction, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & W \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \searrow \\
 Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longrightarrow & Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n & & V \\
 e_0 \times \text{id} \downarrow & & e_0 \times \text{id} \downarrow & & \swarrow e \\
 U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longrightarrow & U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n & &
 \end{array}$$

Il vient que j_ϵ rend commutatif le carré (2.43).

Remarquons à présent que j_ϵ est un morphisme de $U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n$ -variétés rigides étales. Or, un tel morphisme est uniquement déterminé par son changement de base suivant l'inclusion $U \widehat{\times}_k o \hookrightarrow U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n$ car $Z \widehat{\times}_k o$ rencontre toutes les composantes connexes de $Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$. Ainsi, la condition que $(j_\epsilon)|_{Z \widehat{\times}_k o}$ est l'inclusion évidente force l'unicité du morphisme j_ϵ .

Montrons maintenant que j_ϵ est une immersion ouverte (quitte peut-être à prendre un ϵ plus petit). Étant donné que le triangle

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 Z & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

commute et que le morphisme vertical est étale, une deuxième application du corollaire 1.1.56 montre qu'il existe un voisinage quasi-compact $Q \subset Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$ de Z tel que la composition de

$$Q \longrightarrow Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \longrightarrow V$$

est une immersion ouverte. Par le lemme 2.2.61 ci-dessous, on peut trouver $0 < \epsilon' < \epsilon$, avec $\epsilon' \in |k^\times|$, tel que $Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon')$ est contenu dans Q . D'où le résultat.

On montre maintenant que (2.43) est cartésien (quitte peut-être à prendre un ϵ plus petit). On dispose d'une immersion ouverte $Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \hookrightarrow V \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^n} \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$. Or, la famille des $V \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^n} \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$ est cofinale parmi les voisinages ouverts de Z dans V . On peut donc trouver $0 < \epsilon' < \epsilon$, avec $\epsilon' \in |k^\times|$, tel que $V \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^n} \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon')$ est contenu dans $j_\epsilon(Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon))$. On a alors nécessairement $Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon') \simeq V \widehat{\times}_{\mathbb{B}_k^n} \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon')$.

Pour terminer, il reste à voir que le carré (2.44) commute. Comme (2.43) est cartésien, la functorialité du produit fibré fournit un morphisme $a : Z' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \rightarrow Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 U' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longleftarrow & Z' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longrightarrow & V' \\
 \downarrow & & \downarrow a & & \downarrow \\
 U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longleftarrow & Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

Comme $Z' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$ et $Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$ sont étales sur $U' \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$ et $U \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$ respectivement, il existe au plus un morphisme a induisant le morphisme $g_0 : Z' \rightarrow Z$. Comme $g_0 \times \text{id}$ convient, on a forcément $a = g_0 \times \text{id}$. Ceci termine la preuve du lemme.

C.Q.F.D.

Lemme 2.2.61. — Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Soit $U \subset X \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n$ un ouvert quasi-compact et notons $Z = U \cap (X \widehat{\times}_k o) \subset X$. Pour $\epsilon \in |k^\times|$ suffisamment petit, on a $Z \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon) \subset U$.

Démonstration. — La question est locale en X et U . On peut donc supposer que X est un k -affinoïde et que U est un domaine rationnel $D_{\mathbb{B}_X^n}(f_0|f_1, \dots, f_r)$ défini par des éléments f_0, \dots, f_r engendrant $\Gamma(X, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_n\}$ en tant qu'idéal. Écrivons, pour $0 \leq i \leq r$,

$$f_i = \sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n} f_i^\nu t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n}$$

avec $f_i^\nu \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. On fixe $M \in |k^\times|$ tel que $|f_i^\nu|_\infty < M$ pour tout i et ν comme ci-dessus, et $\epsilon_1 \in |k^\times|$ tel que $\epsilon_1 \leq \max_{0 \leq i \leq n} |f_i(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{B}_X^n$.

Montrons que ϵ convient dès que $\epsilon < \min(1, \epsilon_1/M)$. On note $f_i^0 = f_i^{(0, \dots, 0)}$ pour simplifier. Pour tout $x \in X \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon)$, on a les inégalités

$$|f_i(x) - f_i^0(x)| < \epsilon_1, \quad \epsilon_1 \leq \max_{0 \leq i \leq n} |f_i(x)| \quad \text{et} \quad \epsilon_1 \leq \max_{0 \leq i \leq n} |f_i^0(x)|.$$

(La deuxième inégalité est mise pour mémoire ; la troisième inégalité s'obtient à partir de la deuxième en se restreignant aux points de $X \widehat{\times}_k o$.) On en déduit aussitôt que

$$D_{\mathbb{B}_X^n(o, \epsilon)}(f_0|f_1, \dots, f_n) = D_{\mathbb{B}_X^n(o, \epsilon)}(f_0^0|f_1^0, \dots, f_n^0) = D_X(f_0^0|f_1^0, \dots, f_n^0) \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^n(o, \epsilon).$$

Le lemme est démontré.

C.Q.F.D.

Lemme 2.2.62. — Soit A une k -algèbre affinoïde. Alors, la $A[t_1, \dots, t_n]$ -algèbre $A\{t_1, \dots, t_n\}$ est régulière. En particulier, si le k -affinoïde $\text{Spm}(A)$ est lisse, l'anneau $A\{t_1, \dots, t_n\}$ est aussi régulier au-dessus de $k[t_1, \dots, t_n]$.

Démonstration. — Les anneaux A et $A\{t_1, \dots, t_n\}$ sont excellents d'après [28]. Il en est de même de $A[t_1, \dots, t_n]$. Or, pour tout point fermé $z \in \text{Spec}(A\{t_1, \dots, t_n\})$ d'image $y \in \text{Spec}(A[t_1, \dots, t_n])$, le morphisme induit sur les complétions (relativement aux idéaux maximaux) des anneaux locaux en y et z est inversible. Ceci montre que la $A[t_1, \dots, t_n]$ -algèbre $A\{t_1, \dots, t_n\}$ est régulière. La dernière assertion découle immédiatement du fait que la k -algèbre A est régulière lorsque le k -affinoïde $\text{Spm}(A)$ est lisse.

C.Q.F.D.

Lemme 2.2.63. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -affinoïdes et soit $V \subset Y$ un ouvert quasi-compact. Considérons le sous-ensemble $f_\odot(V) \subset X$ donné par :

$$f_\odot(V) = \{x \in X; f^{-1}(x) \subset V\}.$$

- (a) Supposons que X est normal et que toute composante irréductible de Y est finie et surjective sur une composante connexe de X (en particulier, f est fini). Alors $f_\odot(V)$ est un ouvert quasi-compact de X . De plus, pour $p \in \mathcal{P}(X)$, on a l'équivalence $p \in \mathcal{P}(f_\odot(V)) \Leftrightarrow f^{-1}(p) \subset \mathcal{P}(V)$. Enfin, si V est affinoïde, il en est de même de $f_\odot(V)$.

(b) *Supposons donné un carré cartésien de k -affinoïdes*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

Alors $f'_{\odot}(g'^{-1}(V)) = g^{-1}(f_{\odot}(V))$.

(c) *Supposons que les conditions de la partie (a) sont satisfaites. Alors, la formation de $f_{\odot}V$ est compatible aux extensions de corps valués complets k'/k . Plus précisément, on a $(f \widehat{\otimes}_k k')_{\odot}(V \widehat{\otimes}_k k') = f_{\odot}(V) \widehat{\otimes}_k k'$.*

Démonstration. — La partie (b) de l'énoncé est immédiate. En effet, pour $x' \in X'$, on a $f^{-1}(g(x')) = g'(f'^{-1}(x'))$ de sorte que $f^{-1}(g(x')) \subset V$ si et seulement si $f'^{-1}(x') \subset g'^{-1}(V)$. Autrement dit, $g(x') \in f_{\odot}(V)$ si et seulement si $x' \in f'_{\odot}(g'^{-1}(V))$. Remarquons aussi que (c) découle de (a) et plus précisément de l'équivalence $p \in \mathcal{M}(f_{\odot}(V)) \Leftrightarrow f^{-1}(p) \subset \mathcal{M}(V)$. (Interpréter les points fermés de $X \widehat{\otimes}_k k'$ et $Y \widehat{\otimes}_k k'$ comme des points maximaux de X et Y .)

On se concentre maintenant sur la partie (a) de l'énoncé. Si $(e_i : Y_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est une famille de morphismes de k -affinoïdes avec $\coprod_{i \in I} Y_i \rightarrow Y$ surjectif, on a

$$f_{\odot}(V) = \bigcap_{i \in I} (f \circ e_i)_{\odot}(e_i^{-1}(V)).$$

En prenant un recouvrement fh bien choisi, on se ramène à démontrer (a) dans le cas où X est connexe, Y normal et connexe, et $f : Y \rightarrow X$ un revêtement pseudo-galoisien de groupe de Galois G . Puisque le morphisme $Y/G \rightarrow X$ est radiciel, il induit une bijection entre les ouverts quasi-compacts de Y/G et ceux de X ; cette bijection et son inverse préservent les ouverts affinoïdes. Ainsi, on peut remplacer X par Y/G et supposer que $X = Y/G$.

Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} des modèles formels essentiels de X et Y . Quitte à raffiner ces modèles on peut supposer les propriétés suivantes.

- Le morphisme f provient d'un morphisme fini de k° -schémas formels $\tilde{f} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$.
- Il existe un ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{V}_{\eta} = V$.
- L'action de G sur Y s'étend en une action sur \mathcal{Y} .
- Le groupe G agit transitivement sur les fibres du morphisme $\tilde{f}_{\sigma} : \mathcal{Y}_{\sigma} \rightarrow \mathcal{X}_{\sigma}$.

Seule la dernière propriété demande un argument; expliquons comment on peut la garantir. Considérons $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ comme un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres finies. Considérons le sous-faisceau quasi-cohérent $(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})^G \subset \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$. Il s'écrit comme une union filtrante de sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres finies. En passant aux spectres formels, on obtient ainsi un système projectif de \mathcal{X} -schémas formels finis $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ tel que $(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})^G = \text{Colim}_{i \in I} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_i}$. Il s'ensuit que G agit transitivement sur les fibres du morphisme

$$\mathcal{Y}_{\sigma} \longrightarrow \text{Lim}_{i \in I} (\mathcal{X}_i)_{\sigma}.$$

(Pour vérifier cela, on peut supposer que \mathcal{X} est affine ; il suffit alors d'appliquer [13, Chapitre V, §2, n° 2, Théorème 2] à $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O})$ pour conclure.) Puisque \mathcal{Y}_σ est un \tilde{k} -schéma de type fini, il existe un indice $i \in I$ tel que G agit transitivement sur les fibres du morphisme $\mathcal{Y}_\sigma \rightarrow (\mathcal{X}_i)_\sigma$. De plus, il est clair que \mathcal{X}_i est encore un modèle formel de X . Ceci permet de conclure.

Revenons à la preuve de (a). On note $T = \mathcal{Y}_\sigma - \mathcal{V}_\sigma$, $Z = \tilde{f}_\sigma(T)$ et $\mathcal{U} = \mathcal{X} - Z$. Nous allons vérifier que $U = \mathcal{U}_\eta$ coïncide avec $f_\odot(V)$. Ceci montrera que $f_\odot(V)$ est un ouvert quasi-compact. Pour $x \in X$, on a une inclusion

$$\text{red}(f^{-1}(x)) \subset f_\sigma^{-1}(\text{red}(x)).$$

(Rappelons que $\text{red}(x)$ est l'image du morphisme canonique $\text{Spf}(k^\circ(x)) \rightarrow \mathcal{X}$ et de même pour les points fermés de Y .) Or G agit transitivement sur l'ensemble $f_\sigma^{-1}(\text{red}(x))$ d'après le choix des modèles formels et l'ensemble $\text{red}(f^{-1}(x))$ est non vide car f est surjectif. L'inclusion ci-dessus est donc une égalité : $\text{red}(f^{-1}(x)) = f_\sigma^{-1}(\text{red}(x))$. On en déduit les équivalences

$$f^{-1}(x) \subset V \Leftrightarrow \text{red}(f^{-1}(x)) \subset \mathcal{V}_\sigma \Leftrightarrow f_\sigma^{-1}(\text{red}(x)) \subset \mathcal{V}_\sigma \Leftrightarrow \text{red}(x) \in \mathcal{U}_\sigma \Leftrightarrow x \in U.$$

Ceci permet de conclure.

Remarquons aussi que les équivalences ci-dessus sont encore valables pour tout point $p \in \mathcal{P}(X)$ (avec $\text{red}(p)$ l'image du morphisme $\text{Spec}(\tilde{k}(p)) \rightarrow \mathcal{X}_\sigma$ et de même pour les points dans $\mathcal{P}(Y)$). Ceci permet d'obtenir l'équivalence $f^{-1}(p) \subset \mathcal{P}(V) \Leftrightarrow p \in \mathcal{P}(f_\odot(V))$.

Pour terminer la preuve du lemme, il reste à voir que $f_\odot(V)$ est affinoïde si V est affinoïde (toujours sous l'hypothèse que f est un revêtement pseudo-galoisien tel que $X = Y/G$). Puisque G agit transitivement sur les fibres du morphisme f (par le lemme 2.2.3), on a

$$f^{-1}f_\odot(V) = \bigcap_{g \in G} g^{-1}(V).$$

En particulier, l'ouvert $W = f^{-1}f_\odot(V)$ est un affinoïde. Puisque $f_\odot(V) = W/G$, ceci montre que $f_\odot(V)$ est isomorphe au spectre maximal de la k -algèbre affinoïde $\Gamma(W, \mathcal{O})^G$. C.Q.F.D.

Lemme 2.2.64. — *Soit B un k -affinoïde lisse et soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal tel que $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$. Soient X un B -affinoïde lisse et T un X -affinoïde lisse. On suppose que T admet une section $s : X_{\hat{p}} \rightarrow T_{\hat{p}}$ au-dessus de \hat{p} :*

$$X_{\hat{p}} \xrightarrow{s} T_{\hat{p}} \longrightarrow X_{\hat{p}}.$$

Il existe alors $U \in \text{Flt}'(p)$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{B}_X^n \widehat{\times}_B U & \xrightarrow{r} & T \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{B}_{X_{\widehat{p}}}^n & & \\
 & \nearrow^{s'} & \downarrow r_{\widehat{p}} & \searrow & \\
 X_{\widehat{p}} & \xrightarrow{s} & T_{\widehat{p}} & \longrightarrow & X_{\widehat{p}}
 \end{array}$$

avec r lisse et où les morphismes non nommés sont les morphismes évidents.

Démonstration. — Le \mathcal{O}_T -module $\Omega_{T/X}$ est un facteur direct d'un \mathcal{O}_T -module libre car T est un X -affinoïde lisse. Il existe donc un $\Gamma(T, \mathcal{O})$ -module projectif N tel que

$$\Omega_{T/X} \oplus \mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_T^n,$$

avec \mathcal{N} le \mathcal{O}_T -module cohérent associé à N . Quitte à remplacer le couple (T, s) par $(T_1, 0 \circ s)$ avec T_1 un voisinage affinoïde de la section nulle de l'analytifié du fibré vectoriel $\text{Spec}(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \text{Sym}^i N)$, on peut supposer que $\Omega_{T/X}$ est libre de rang n .

Choisissons une présentation $\Gamma(X, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_{n+m}\} \twoheadrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O})$ et notons I son noyau. On a une suite exacte courte de $\Gamma(T, \mathcal{O})$ -modules projectifs

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+m} \Gamma(T, \mathcal{O}) \cdot dt_i \xrightarrow{\theta} \Gamma(T, \Omega_{T/X}) \longrightarrow 0.$$

Comme $\Omega_{T/X}$ est libre, il existe une famille $(\omega_j)_{j=1, \dots, n}$ dans $\bigoplus_{i=1}^{n+m} \Gamma(T, \mathcal{O}) \cdot dt_i$ dont l'image par θ forme une base de $\Omega_{T/X}$. Écrivons

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n+m} f_{ij} dt_i, \quad f_{ij} \in \Gamma(T, \mathcal{O}).$$

Soient $\bar{f}_{ij} \in \Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$ les restrictions des f_{ij} à $X_{\widehat{p}}$ suivant la section s . Pour tout réel $\epsilon > 0$, on choisit $g_{ij}^\epsilon \in \text{Colim}_{U \in \text{Flt}'(p)} \Gamma(X \widehat{\times}_B U, \mathcal{O})$ tel que $|g_{ij}^\epsilon - \bar{f}_{ij}|_\infty \leq \epsilon$ (où $|\cdot|_\infty$ désigne la norme infinie relativement à $X_{\widehat{p}}$ et où l'on note par le même symbole un élément de $\text{Colim}_{U \in \text{Flt}'(p)} \Gamma(X \widehat{\times}_B U, \mathcal{O})$ et son image dans $\Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$). L'existence des g_{ij}^ϵ est assurée par le fait que l'image de $\text{Colim}_{U \in \text{Flt}'(p)} \Gamma(X \widehat{\times}_B U, \mathcal{O})$ dans $\Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$ est dense. On choisit enfin $U_\epsilon \in \text{Flt}'(p)$ tel que les g_{ij}^ϵ soient définis sur $X \widehat{\times}_B U_\epsilon$.

On considère l'élément $\omega_j^\epsilon = \sum_{i=1}^{n+m} g_{ij}^\epsilon dt_i \in \bigoplus_{i=1}^{n+m} \Gamma(X \widehat{\times}_B U_\epsilon, \mathcal{O}) \cdot dt_i$ et on note encore ω_j^ϵ l'image de cet élément dans $\bigoplus_{i=1}^{n+m} \Gamma(T \widehat{\times}_B U_\epsilon, \mathcal{O}) \cdot dt_i$. Puisque $(\theta(\omega_j))_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\Omega_{T/X}$, il existe une unique matrice $M_\epsilon \in \text{Mat}_{n,n}(\Gamma(T \widehat{\times}_B U_\epsilon, \mathcal{O}))$ telle que $M_\epsilon(\theta(\omega_j^\epsilon)) = \theta(\omega_j^\epsilon)$ pour $1 \leq j \leq n$. Pour $\eta \in \sqrt{|k^\times|}$, on considère le domaine rationnel $T_{\epsilon, \eta} = D_{T \widehat{\times}_B U_\epsilon}(\det(M_\epsilon)|\eta)$, de $T \widehat{\times}_B U_\epsilon$. Clairement, M_ϵ est inversible au-dessus de $T_{\epsilon, \eta}$, ce qui revient à dire que $(\theta(\omega_j^\epsilon))_{1 \leq j \leq n}$ forme une base de $\Omega_{T/X}$ au-dessus de $T_{\epsilon, \eta}$. Par ailleurs, pour ϵ et η suffisamment petits, la section s se factorise à travers $(T_{\epsilon, \eta})_{\widehat{p}}$. En effet, en notant \bar{M}_ϵ l'image de M_ϵ dans $\text{Mat}_{n,n}(\Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O}))$, on a

clairement :

$$\text{id}_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \bar{M}_\epsilon.$$

Ainsi, on peut trouver ϵ suffisamment petit de sorte que $|\det(\bar{M}_\epsilon) - 1|_\infty < 1$. Avec un tel ϵ , le couple (ϵ, η) convient dès que $\eta < 1$.

À présent, on remplace X et T par $X \widehat{\times}_B U_\epsilon$ et $T_{\epsilon, \eta}$ (avec ϵ et η suffisamment petit). On dispose alors :

- d'un morphisme de $\Gamma(X, \mathcal{O})$ -algèbres affinoïdes

$$\Gamma(X, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_{n+m}\} \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O})$$

qui n'est plus a priori surjectif,

- d'éléments $\omega'_j = \sum_{i=1}^{n+m} g'_{ij} dt_i \in \bigoplus_{i=1}^{n+m} \Gamma(X, \mathcal{O}) \cdot dt_i$ (les ω_i^ϵ considérés ci-dessus) tels que $(\theta(\omega'_j))_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\Omega_{T/X}$.

Quitte à multiplier les ω'_j par un élément non nul de k de norme suffisamment petite, on peut supposer que $|g'_{ij}|_\infty \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n+m$ et $1 \leq j \leq n$ (où la norme infinie $|\cdot|_\infty$ est relativement à X).

Considérons le morphisme de $\Gamma(X, \mathcal{O})$ -algèbres affinoïdes

$$\Gamma(X, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_n\} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_{n+m}\}$$

donné par l'association $t_j \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n+m} g'_{ij} t_i$ pour $1 \leq j \leq n$. D'après ce qui précède, la composition de

$$\Gamma(X, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_n\} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_{n+m}\} \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O})$$

envoie $(dt_j)_{1 \leq j \leq n}$ sur une base de $\Omega_{T/X}$. Ainsi, le X -morphisme $e : T \rightarrow \mathbb{B}_X^n = X\{t_1, \dots, t_n\}$, déduit de la composition des morphismes de k -algèbres ci-dessus, est étale. (On utilise ici la variante analytique rigide de [20, Corollaire 17.11.3].)

Considérons maintenant le morphisme $e_{\widehat{p}} \circ s : X_{\widehat{p}} \rightarrow \mathbb{B}_{X_{\widehat{p}}}^n$. On note $a_j \in \Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$ la restriction de t_j suivant le morphisme $e_{\widehat{p}} \circ s$. Par le corollaire 1.1.56, il existe, pour $\lambda \in |k^\times|$ suffisamment petit, un relèvement t :

$$\begin{array}{ccc} X_{\widehat{p}} & \xrightarrow[s]{t} & T_{\widehat{p}} \\ (a_1, \dots, a_n) \downarrow & \searrow & \downarrow e_{\widehat{p}} \\ \mathbb{B}_{X_{\widehat{p}}}^1(a_1, \lambda) \widehat{\times}_{X_{\widehat{p}}} \dots \widehat{\times}_{X_{\widehat{p}}} \mathbb{B}_{X_{\widehat{p}}}^1(a_n, \lambda) & \hookrightarrow & \mathbb{B}_{X_{\widehat{p}}}^n. \end{array}$$

Quitte à remplacer X par $X \widehat{\times}_B U$ avec $U \in \text{Flt}'(p)$ suffisamment petit, on peut trouver $b_1, \dots, b_n \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ tels que $|b_j - a_j|_\infty < \lambda$ pour tout $1 \leq j \leq n$ (où $|\cdot|_\infty$ est la norme infinie relativement à $X_{\widehat{p}}$). Il est alors clair que $\mathbb{B}_{X_{\widehat{p}}}^1(a_i, \lambda) = \mathbb{B}_{X_{\widehat{p}}}^1(b_i, \lambda) = (\mathbb{B}_X^1(b_i, \lambda))_{\widehat{p}}$. On applique maintenant le lemme 2.2.65 ci-dessus au morphisme étale obtenu par changement de base de e suivant l'inclusion $\mathbb{B}_X^1(b_1, \lambda) \widehat{\times}_X \dots \widehat{\times}_X \mathbb{B}_X^1(b_n, \lambda) \hookrightarrow \mathbb{B}_X^n$. Il s'ensuit que, quitte à remplacer X par $X \widehat{\times}_B U$ avec $U \in \text{Flt}'(p)$ suffisamment petit, il existe un morphisme s' faisant

commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & T \\ & \nearrow s' & \downarrow e \\ \mathbb{B}_X^1(b_1, \lambda) \widehat{\times}_X \dots \widehat{\times}_X \mathbb{B}_X^1(b_n, \lambda) & \hookrightarrow & \mathbb{B}_X^n \end{array}$$

et tel que $s'_p = t$. Ceci termine la preuve du lemme.

C.Q.F.D.

Lemme 2.2.65. — Soit B un k -affinoïde lisse et soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal tel que $\mathfrak{m}_{B,p} = 0$. Soit $e : E \rightarrow X$ un morphisme étale de B -affinoïdes lisses. On suppose que $e_{\widehat{p}}$ admet une section t . Il existe alors $U \in \text{Flt}'(p)$ et une section s à $e \widehat{\times}_B U$ telle que $s_{\widehat{p}} = t$.

Démonstration. — Par le théorème 1.1.49, on peut trouver une présentation

$$E = \frac{X\{t_1, \dots, t_n\}}{(f_1, \dots, f_n)}$$

avec $\text{Jac}(f_1, \dots, f_n) = \det \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} \right)$ inversible sur E . Le morphisme t correspond à un morphisme de $\Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$ -algèbres affinoïdes

$$\delta : \frac{\Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})\{t_1, \dots, t_n\}}{(f_1, \dots, f_n)} \longrightarrow \Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O}).$$

Pour $\epsilon > 0$, on choisit $U_\epsilon \in \text{Flt}'(p)$ et $a_i^\epsilon \in \Gamma(X \widehat{\times}_B U_\epsilon, \mathcal{O})$ avec $|(a_i^\epsilon)_{|X_{\widehat{p}}} - \delta(t_i)|_\infty \leq \epsilon$ (où $|\cdot|_\infty$ désigne la norme infinie relativement à $X_{\widehat{p}}$). En particulier, on a $|(a_i^\epsilon)_{|X_{\widehat{p}}}|_\infty \leq 1$ dès que $\epsilon \leq 1$. Par le lemme 2.2.66 ci-dessous, il existe alors $W \in \text{Flt}'(p)$ suffisamment petit et contenu dans U_ϵ tel que $|(a_i^\epsilon)_{|X \widehat{\times}_B W}|_\infty \leq 1$. Par ailleurs, quitte à raffiner ϵ et W , on peut rendre les normes

$$|f_i(a_1^\epsilon, \dots, a_n^\epsilon)_{|X \widehat{\times}_B W}|_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$$

aussi petites que l'on veut. Par la première partie de la preuve du lemme 1.1.52, on sait alors que la suite récurrente de Newton appliquée à $(a_1^\epsilon, \dots, a_n^\epsilon)$ converge dans $\Gamma(X \widehat{\times}_B W, \mathcal{O})$ vers une solution au système d'équations $(f_i(t_1, \dots, t_n) = 0)_{1 \leq i \leq n}$. Il est également facile de se convaincre que la limite de cette suite dans $\Gamma(X_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$ n'est autre que $(\delta(t_1), \dots, \delta(t_n))$. Ceci termine la preuve du lemme.

C.Q.F.D.

Le lemme qui suit est l'unique endroit où l'hypothèse que p est maximal est explicitement utilisée (et d'une manière cruciale) dans la preuve du théorème 2.2.58. Bien entendu, cette hypothèse est essentielle pour la validité dudit théorème. En effet, sa preuve repose sur le lemme 2.2.64 qui dépend du lemme 2.2.65 qui à son tour dépend du lemme 2.2.66.

Lemme 2.2.66. — Soit B un k -affinoïde et soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal. (On ne fait pas d'hypothèse sur $\mathfrak{m}_{B,p}$.) Soit X une B -variété rigide lisse et quasi-compacte, et soit $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. On suppose que $|f|_{X_{\widehat{p}}}|_\infty \leq 1$. Alors, il existe $W \in \text{Flt}'(p)$ tel que $|f|_{X \widehat{\times}_B W}|_\infty \leq 1$.

Démonstration. — L’hypothèse de lissité sur la B -variété rigide X est probablement superflue. Toutefois, elle permettra de simplifier la démonstration. Elle sera utilisée pour traiter le cas où $|f|_{X_{\widehat{p}}}|_{\infty} < 1$. En effet, dans ce cas on a $D_X(f|1)_{\widehat{p}} = \emptyset$. Comme X est lisse (plat aurait suffi) sur B , l’image de $D_X(f|1)$ dans B est un ouvert quasi-compact U tel que $p \notin \mathcal{P}(U)$. Comme p est maximal, on peut trouver $W \in \text{Flt}'(p)$ tel que $W \cap U = \emptyset$ (voir le corollaire 1.1.38). On a alors $X \widehat{\times}_B W \cap D_X(f|1) = \emptyset$. Ceci montre que f est de norme strictement plus petite que 1 en tout point de $X \widehat{\times}_B W$.

Revenons au cas général. Soit \mathcal{B} un modèle formel essentiel de B et \mathcal{X} un modèle formel essentiel de X au-dessus de \mathcal{B} . La question étant locale en X et B , on peut supposer que \mathcal{X} et \mathcal{B} sont des k° -schémas formels affines. Rappelons que $k^\circ(p)$ contient un anneau de valuation $k^\circ(p)$ donné par

$$k^\circ(p) = \left(\underset{\mathcal{U}/\mathcal{B}, \mathcal{U}_\eta \in \text{Flt}'(p)}{\text{Colim}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \right) / \mathfrak{m}_p.$$

Considérons la $k^\circ(p)$ -algèbre

$$R = \left(\underset{\mathcal{U}/\mathcal{B}, \mathcal{U}_\eta \in \text{Flt}'(p)}{\text{Colim}} \Gamma((\mathcal{X} \widehat{\times}_{\mathcal{B}} \mathcal{U}), \mathcal{O}) \right) / \mathfrak{m}_p.$$

Étant donné que p est maximal, le lemme 1.1.36 affirme que $k^\circ(p)$ est l’anneau de valuation de la norme $\|\cdot\|_p$. Il vient que l’anneau de valuation du corps $\widehat{k}(p)$ est le complété formel $k^\circ(p) // (\pi) = \widehat{k}^\circ(p)$. On déduit immédiatement que $\mathcal{X}_{\widehat{p}} = \text{Spf}(R // (\pi))$ est un modèle formel du $\widehat{k}(p)$ -affinoïde $X_{\widehat{p}}$.

Rappelons que par hypothèse, $|f|_{X_{\widehat{p}}}|_{\infty} = 1$. On déduit du lemme 1.1.28 que f est entier sur $\Gamma(\mathcal{X}_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$. Il existe donc une relation

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

avec $a_i \in R // (\pi) = \Gamma(\mathcal{X}_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$. On munit la $\widehat{k}(p)$ -algèbre affinoïde $(R // (\pi))[1/\pi]$ de la norme $|\cdot|$ déduite de la norme adique de $R // (\pi)$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\pi^N f^i| < 1$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On peut trouver $b_i \in R$, $c_i \in R // (\pi)$ tel que $a_i = b_i + \pi^N c_i$. Il vient que

$$\left| (f^n + b_{n-1}f^{n-1} + \dots + b_0)_{|X_{\widehat{p}}} \right| = \left| c_{n-1}\pi^N f_{|X_{\widehat{p}}}^{n-1} + \dots + c_0\pi^N \right| < 1.$$

Par la discussion du début de la preuve, on peut trouver un \mathcal{B} -schéma formel affine \mathcal{W} , tel que $W = \mathcal{W}_\eta$ est dans $\text{Flt}'(p)$, et des relèvements $b'_i \in \Gamma(\mathcal{X} \widehat{\times}_{\mathcal{B}} \mathcal{W}, \mathcal{O})$ des b_i telles que la norme infinie de $f^n + b'_{n-1}f^{n-1} + \dots + b'_0$ relativement à $X \widehat{\times}_B W$ est strictement inférieure à 1. Il vient que $f^n + b'_{n-1}f^{n-1} + \dots + b'_0$ est entier sur $\Gamma(\mathcal{X} \widehat{\times}_{\mathcal{B}} \mathcal{W}, \mathcal{O})$ (par le lemme 1.1.28) et donc f est entier sur $\Gamma(\mathcal{X} \widehat{\times}_{\mathcal{B}} \mathcal{W}, \mathcal{O})$. Ceci entraîne que f est de norme plus petite que 1 en tout point fermé x de $X \widehat{\times}_B W$. (En effet, $f(x)$ est dans $k^\circ(x)$ puisqu’il est entier sur $k^\circ(x)$ et que ce dernier est normal.) C.Q.F.D.

Pour énoncer le prochain résultat, nous aurons besoin d’introduire quelques notations.

Notation 2.2.67. — Étant donné un B -affinoïde lisse, on notera SmAfd^b/B (resp. $\text{AfdCor}^b(B)$) la sous-catégorie pleine de SmAfd/B (resp. $\text{AfdCor}(B)$) formée

des B -affinoïdes X tels que toute composante connexe X_0 de X admet un morphisme étale $X_0 \rightarrow \mathbb{B}_B^{m_0}$ (avec m_0 la dimension relative de X_0). On définit alors $\text{SmAfd}^b/(B, p)$ (resp. $\mathbf{AfdCor}^b(B, p)$) par passage à la 2-colimite suivant $\text{Flt}'(p)$; c'est une catégorie pleine de $\text{SmAfd}/(B, p)$ (resp. $\mathbf{AfdCor}(B, p)$).

Le théorème 2.2.58 admet la conséquence suivante.

Corollaire 2.2.68. — *Soit B un k -affinoïde lisse et soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal. On suppose que l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :*

- les extensions $k(p)/k$ et $\widehat{k}(p)/k(p)$ sont séparables;
- l'exposant caractéristique de k est inversible dans Λ .

Alors, le foncteur

$$\pi_0 \phi_{B,p} \otimes \Lambda : \pi_0 \mathbf{AfdCor}^b(B, p) \otimes \Lambda \longrightarrow \pi_0 \mathbf{AfdCor}^b(\widehat{k}(p)) \otimes \Lambda$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Le théorème 2.2.58 montre que ce foncteur est pleinement fidèle. Montrons qu'il est essentiellement surjectif. Soit Y un $\widehat{k}(p)$ -affinoïde admettant un morphisme étale $e : Y \rightarrow \mathbb{B}_{\widehat{k}(p)}^n$. Par le lemme 1.1.52 on peut supposer que

$$Y = \text{Spm} \left(\frac{\widehat{k}(p)\{t_1, \dots, t_{n+r}\}}{(f_1, \dots, f_r)} \right)$$

avec f_1, \dots, f_r dans $k(p)[t_1, \dots, t_{n+r}]$ et $\text{Jac}(f_1, \dots, f_r) = \det \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(t_{n+1}, \dots, t_{n+r})} \right)$ inversible dans $\Gamma(Y, \mathcal{O})$. Pour $1 \leq i \leq r$, on fixe un relèvement $g_i \in \mathcal{O}_{B,p}[t_1, \dots, t_{n+r}]$ de f_i . Soit $U \in \text{Flt}'(p)$ un ouvert affinoïde sur lequel tous les g_i sont définis. On pose alors

$$X = U\{t_1, \dots, t_{n+r}\}/(g_1, \dots, g_r).$$

Par construction, on a $Y = X_{\widehat{p}}$. Notons h la classe de $\text{Jac}(g_1, \dots, g_r) = \det \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(t_{n+1}, \dots, t_{n+r})} \right)$ dans $\Gamma(X, \mathcal{O})$. L'image de h dans $\Gamma(Y, \mathcal{O})$ est inversible. Il existe donc $\lambda \in |k^\times|$ telle que $|h(y)| \geq \lambda$ pour tout $y \in Y$; posons $X' = D_X(h|\lambda)$. Il s'ensuit que $X'_{\widehat{p}} = Y$. De plus, le morphisme $X' \rightarrow B\{t_1, \dots, t_n\}$ est étale ce qui entraîne que X' est dans SmAfd^b/B . Le corollaire est démontré. C.Q.F.D.

Mise à part la dernière assertion, le théorème suivant est une conséquence immédiate du corollaire 2.2.68.

Théorème 2.2.69. — *Soit B un k -affinoïde lisse et soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal. Soit F un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie sur SmAfd^b/B . On suppose que l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :*

- les extensions $k(p)/k$ et $\widehat{k}(p)/k(p)$ sont séparables;
- la multiplication par l'exposant caractéristique de k est inversible dans F .

Alors, il existe un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie $F_{\widehat{p}}$ sur $\text{SmAfd}^b/\widehat{k}(p)$ et un isomorphisme naturel

$$F_{(B,p)} \simeq F_{\widehat{p}} \circ \phi_{B,p},$$

où $\phi_{B,p} : \mathbf{AfdCor}^b(B,p) \rightarrow \mathbf{AfdCor}^b(\widehat{k}(p))$ est le foncteur de la proposition 2.2.57.

De plus, le préfaisceau $F_{\widehat{p}}$ est caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout préfaisceau avec transferts invariant par homotopie G sur $\mathbf{SmAfd}^b/\widehat{k}(p)$ (qui satisfait à la seconde alternative ci-dessus si l'une des extensions $k(p)/k$ ou $\widehat{k}(p)/k(p)$ est inséparable), on a $\text{hom}(F_{\widehat{p}}, G) = \text{hom}(F_{(B,p)}, G \circ \phi_{B,p})$.

Démonstration. — Comme le préfaisceau avec transferts $F_{(B,p)}$ est invariant par homotopie, c'est un foncteur contravariant et additif de $\pi_0 \mathbf{AfdCor}^b(B,p)$ dans la catégorie des groupes abéliens. Vu l'alternative sur F , on peut supposer que $F_{(B,p)}$ s'étend à $\pi_0 \mathbf{AfdCor}^b(B,p) \otimes \Lambda$ pour un anneau Λ comme ci-dessus. Par le corollaire 2.2.68, $\pi_0 \phi_{B,p} \otimes \Lambda$ est une équivalence de catégories. On définit alors $F_{\widehat{p}} = F_{(B,p)} \circ (\pi_0 \phi_{B,p} \otimes \Lambda)^{-1}$ avec $(\pi_0 \phi_{B,p} \otimes \Lambda)^{-1}$ un quasi-inverse à $\pi_0 \phi_{B,p} \otimes \Lambda$. L'existence d'un isomorphisme $F_{(B,p)} \simeq F_{\widehat{p}} \circ \phi_{B,p}$ naturel en F est claire.

Le fait que $\pi_0 \phi_{B,p} \otimes \Lambda$ est une équivalence de catégories entraîne que l'association $(\phi_{B,p})_* : G \rightsquigarrow G \circ \phi_{B,p}$ définit une équivalence de catégories⁽¹²⁾ de $\mathbf{PreStr}^{\mathbb{B}^1}(\mathbf{SmAfd}^b/(B,p), \Lambda)$ dans $\mathbf{PreStr}^{\mathbb{B}^1}(\mathbf{SmAfd}^b/\widehat{k}(p), \Lambda)$. Ceci entraîne en particulier la propriété universelle de $F_{\widehat{p}}$. C.Q.F.D.

Définition 2.2.70. — Avec les notations et les hypothèses du théorème 2.2.69, le préfaisceau avec transferts $F_{\widehat{p}}$ est appelé la fibre de F en $p \in \mathcal{M}(B)$.

On termine avec un résultat technique qui jouera un rôle important dans l'étude cohomologique des préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie effectuée dans la section 2.4. La version Nisnevich de ce résultat est encore vraie, mais nous n'en aurons pas besoin.

Lemme 2.2.71. — Soit B un k -affinoïde lisse et soit $p \in \mathcal{M}(B)$ un point maximal. Soient F un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie sur \mathbf{SmAfd}^b/B et X un B -affinoïde lisse dans \mathbf{SmAfd}^b/B . On suppose que l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :

- les extensions $k(p)/k$ et $\widehat{k}(p)/k(p)$ sont séparables ;
- la multiplication par l'exposant caractéristique de k est inversible dans F .

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme canonique

$$\text{Colim}_{U \in \text{FIt}'(p)} H_{\text{ad}}^i(X \widehat{\times}_B U, F) \simeq H_{\text{ad}}^i(X_{\widehat{p}}, F_{\widehat{p}}).$$

Démonstration. — La topologie des recouvrements admissibles devient quasi-compacte quand on la restreint aux k -variétés rigides quasi-compactes. Grâce

⁽¹²⁾ La notation $\mathbf{PreStr}^{\mathbb{B}^1}(-, \Lambda)$ désigne la catégorie des préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie à valeurs vers la catégorie des Λ -modules.

à [1, Exposé VII, Théorème 5.7], on en déduit que le morphisme évident

$$\operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}'(p)} \mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X \widehat{\times}_B U, F) \longrightarrow \operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}'(p)} \mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X \widehat{\times}_B U, F_{(B,p)})$$

est inversible. (Ci-dessus, on voit $F_{(B,p)}$ comme un préfaisceau sur le petit site des ouverts affinoïdes de $X \widehat{\times}_B U$ en posant $F_{(B,p)}(Y) = F_{(B,p)}(Y/B)$.) Il s'agit donc de construire un isomorphisme naturel

$$\operatorname{Colim}_{U \in \operatorname{Flt}'(p)} \mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X \widehat{\times}_B U, F_{(B,p)}) \simeq \mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X_{\widehat{p}}, F_{\widehat{p}}).$$

Rappelons que

$$\phi_{B,p} : \operatorname{SmAfd}^b / (B, p) \longrightarrow \operatorname{SmAfd}^b / \widehat{k}(p)$$

est le foncteur qui à X/B associe $X_{\widehat{p}}$. On note $(\phi_{B,p})_*$ le foncteur image directe sur les préfaisceaux. Par le théorème 2.2.69, on a $F_{(B,p)} \simeq (\phi_{B,p})_* F_{\widehat{p}}$. Il est donc plus général de montrer que le morphisme évident

$$\mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X \widehat{\times}_B U, (\phi_{B,p})_* G) \longrightarrow \mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X_{\widehat{p}}, G)$$

est inversible pour tout t_{\varnothing} -faisceau de groupes abéliens G sur $\operatorname{SmAfd}^b / \widehat{k}(p)$. Rappelons que la topologie t_{\varnothing} est la topologie engendrée par le recouvrement vide de la variété rigide vide ; un t_{\varnothing} -faisceau G est simplement un préfaisceau tel que $G(\varnothing) = 0$.

Quitte à remplacer X par $X \widehat{\times}_B U$, on peut supposer que $U = B$. Le problème dépend uniquement des petits sites des domaines rationnels de X et $X_{\widehat{p}}$. Notons donc

$$\phi : \operatorname{Rat}(X) \longrightarrow \operatorname{Rat}(X_{\widehat{p}})$$

le foncteur qui à un domaine rationnel $Y \subset X$ associe $Y_{\widehat{p}}$. Il est plus général de montrer que le morphisme canonique

$$\mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X, \phi_* G) \longrightarrow \mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X_{\widehat{p}}, G)$$

est inversible pour tout t_{\varnothing} -faisceau de groupes abéliens G sur $\operatorname{Rat}(X_{\widehat{p}})$. Soit $G \rightarrow I$ une équivalence ad-locale avec I un complexe projectivement ad-fibrant de préfaisceaux de groupes abéliens sur $\operatorname{Rat}(X_{\widehat{p}})$. On peut supposer que I est un t_{\varnothing} -faisceau quitte à le remplacer par son t_{\varnothing} -faisceau associé. On a $\mathbf{H}_{\text{ad}}^i(X_{\widehat{p}}, G) = \mathbf{H}^i(I(X_{\widehat{p}}))$. Étant donné que ϕ définit un morphisme de sites

$$\phi : (\operatorname{Rat}(X_{\widehat{p}}), \text{ad}) \longrightarrow (\operatorname{Rat}(X), \text{ad}),$$

le foncteur ϕ_* est un foncteur de Quillen à droite relativement aux structures projectives ad-locales (voir par exemple [3, Théorème 4.4.50]). Il vient que $\phi_*(I)$ est un complexe projectivement ad-fibrant de t_{\varnothing} -faisceaux. Pour conclure, il reste à voir que le morphisme

$$\phi_*(G) \longrightarrow \phi_*(I)$$

est encore une équivalence ad-locale. Pour cela, il suffira de montrer que ϕ_* commute aux foncteurs de faisceautisation restreints aux t_{\varnothing} -faisceaux, i.e., que le morphisme évident

$$\mathbf{a}_{\text{ad}} \phi_*(E) \longrightarrow \phi_* \mathbf{a}_{\text{ad}}(E)$$

est inversible pour tout $t_{\mathcal{O}}$ -faisceau E sur $\text{Rat}(X_{\widehat{p}})$. Rappelons (voir [1, Exposé II, §3]) que le foncteur a_{ad} s'obtient comme le carré d'un foncteur L , i.e., $a_{\text{ad}} = L \circ L$. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme canonique

$$(2.45) \quad L(\phi_*(E)) \longrightarrow \phi_*(L(E))$$

est un isomorphisme.

Soit $Y \subset X$ un ouvert rationnel. Montrons que (2.45) induit un isomorphisme sur les sections au-dessus de Y . Supposons d'abord que $Y_{\widehat{p}} = \emptyset$. On a alors $\phi_*(E)(Y) = E(\emptyset) = 0$ car E est un $t_{\mathcal{O}}$ -faisceau. Ceci étant également vrai pour tout ouvert affinoïde de Y , il vient que $L(\phi_*(E))(Y) = 0$. De même, on a $\phi_*(L(E))(Y) = L(E)(\emptyset) = 0$ car $L(E)$ est séparé pour la topologie des recouvrements admissibles. Le résultat est donc clair dans ce cas.

Supposons maintenant que $Y_{\widehat{p}} \neq \emptyset$. On montre d'abord que tout recouvrement admissible de $Y_{\widehat{p}}$ se raffine par la fibre en \widehat{p} d'un recouvrement admissible de Y . Tout recouvrement admissible de $Y_{\widehat{p}}$ se raffine par un recouvrement standard $\mathcal{R} = (D_{Y_{\widehat{p}}}(f_i|f_1, \dots, f_n))_{1 \leq i \leq n}$ avec f_1, \dots, f_n engendrant $\Gamma(Y_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$ en tant qu'idéal. On peut remplacer les fonctions f_i par des fonctions g_i sans changer le recouvrement \mathcal{R} si les normes infinies $|f_i - g_i|_{\infty}$ sont suffisamment petites. Étant donné que l'image du morphisme

$$\text{Colim}_{U \in \text{Flt}'(p)} \Gamma(Y \widehat{\times}_B U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(Y_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$$

est dense, on peut supposer que les f_i sont les images dans $\Gamma(Y_{\widehat{p}}, \mathcal{O})$ de $\tilde{f}_i \in \Gamma(Y \widehat{\times}_B U, \mathcal{O})$ avec $U \in \text{Flt}'(p)$ un domaine rationnel. Quitte à raffiner U , on peut même supposer que $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ engendrent $\Gamma(Y \widehat{\times}_B U, \mathcal{O})$ en tant qu'idéal. Soient V_1, \dots, V_r des domaines rationnels de B tels que $p \notin \mathcal{P}(V_j)$ et $B = U \cup V_1 \cup \dots \cup V_r$. Notons \mathcal{R}' le recouvrement de Y par les ouverts

$$D_{Y \widehat{\times}_B U}(\tilde{f}_i|f_1, \dots, f_n) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad Y \widehat{\times}_B V_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq r.$$

Il est clair que $\mathcal{R}'_{\widehat{p}}$ raffine \mathcal{R} . En effet, pour $1 \leq j \leq r$, on a $(Y \widehat{\times}_B V_j)_{\widehat{p}} = \emptyset$ et la flèche $\emptyset \rightarrow Y_{\widehat{p}}$ se factorise par toutes les flèches de \mathcal{R} (et il y en a au moins une puisque $Y_{\widehat{p}}$ est non vide).

La discussion précédente et la construction explicite du foncteur L fournissent un isomorphisme $L(\phi_*(E))(Y) \simeq \phi_*(L(E)(Y))$. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter la preuve du lemme 1.4.19. C.Q.F.D.

2.3. Invariance par homotopie et groupe de Picard relatif

On fixe un corps valué complet k dont la valuation n'est pas supposée non triviale. (Comme d'habitude, sauf mention explicite du contraire, les énoncés restent valables dans le cas où la valuation de k est triviale; toutefois, dans les preuves, on supposera implicitement que la valuation est non triviale et on laisse au lecteur le soin de dégager l'argument dans le cas de la valuation triviale.)

Étant données une k -variété rigide B , et deux B -variétés rigides X et Y lisses sur k , nous avons défini dans la section précédente le groupe $\mathbf{Cor}_B(X, Y)$. On s'intéresse dans cette section au cas où B est un k -affinoïde lisse et Y une B -courbe affinoïde admettant une bonne compactification. Comme en géométrie algébrique (voir [46]), on verra dans cette situation que $\pi_0 \mathbf{Cor}_B(X, Y)$ admet une description faisant intervenir des fibrés en droites munis d'une trivialisations à l'infini.

2.3.1. Groupe de Picard relatif et correspondances finies à homotopie près.

— Soit B un k -affinoïde. Dans la suite, l'expression « B -schéma » sera synonyme de « $\mathrm{Spec}(\Gamma(B, \mathcal{O}))$ -schéma ». Si X est un B -schéma et si $B' \rightarrow B$ est un morphisme de k -affinoïdes, on note $X \times_B B'$ le B' -schéma donné par $X \times_{\mathrm{Spec}(\Gamma(B, \mathcal{O}))} \mathrm{Spec}(\Gamma(B', \mathcal{O}))$. Nous aurons besoin d'introduire la propriété suivante.

Définition 2.3.1. — Soient B un k -affinoïde et X un B -schéma de type fini. Soit $U \subset X^{\mathrm{an}}$ un ouvert affinoïde. On dit que U est un ouvert presque rationnel s'il existe un ouvert Zariski affine $X_0 \subset X$ tel que X_0^{an} contient U et $\Gamma(X_0, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$ est d'image dense.

Le lemme suivant fournit quelques propriétés de permanence des domaines presque rationnels.

Lemme 2.3.2. — Soient B un k -affinoïde, X un B -schéma de type fini (séparé) et $U, U' \subset X^{\mathrm{an}}$ deux ouverts affinoïdes presque rationnels. Alors $U \cap U'$ est également presque rationnel. De même, si $B' \rightarrow B$ est un morphisme de k -affinoïdes, $U \widehat{\times}_B B'$ est un ouvert presque rationnel de $(X \times_B B')^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}} \widehat{\times}_B B'$.

Démonstration. — Si $X_0, X'_0 \subset X$ sont des ouverts Zariski vérifiant les propriétés requises pour U et U' , alors $X_0 \cap X'_0$ vérifie les propriétés requises pour $U \cap U'$. La seconde assertion est tout aussi facile. C.Q.F.D.

Étant donné un schéma noethérien S , on appelle S -courbe un S -schéma plat dont les fibres sont des schémas partout de dimension 1. De même, étant donnée une k -variété rigide B , on appelle B -courbe rigide une B -variété rigide plate dont les fibres sont partout de dimension 1.

Définition 2.3.3. — Soient B un k -affinoïde lisse et X une B -courbe affinoïde lisse (sur B). Une immersion ouverte $j : X \rightarrow \overline{X}^{\mathrm{an}}$ avec \overline{X} un B -schéma projectif et réduit est une bonne compactification de X si l'image de j est dense pour la topologie de Zariski (i.e., il n'existe pas de sous-schémas fermés stricts de \overline{X} dont l'analytifié contient l'image de j) et s'il existe un ouvert affinoïde presque rationnel U de $\overline{X}^{\mathrm{an}}$ tel que $\overline{X}^{\mathrm{an}} = j(X) \cup U$. On dira aussi, par abus de langage, que \overline{X} est une bonne compactification de X .

On pensera à l'ouvert U de la définition précédente comme étant un voisinage affinoïde de $\overline{X}^{\mathrm{an}} - j(X)$ (munie de sa structure de sous-variété rigide ouverte de $\overline{X}^{\mathrm{an}}$). On a le lemme suivant.

Lemme 2.3.4. — Soient B un k -affinoïde lisse, X une B -courbe lisse et \bar{X} une bonne compactification de X .

1) Soit $b \in B$ un point fermé. Alors \bar{X}_b est partout de dimension 1 et $U_b \subset \bar{X}_b^{\text{an}}$ est dense pour la topologie de Zariski.

2) Supposons donné un morphisme de k -affinoïdes $B' \rightarrow B$ avec B' lisse sur k . Alors, le B' -schéma projectif $\bar{X}' = (\bar{X} \times_B B')_{\text{red}}$ est une bonne compactification de la B' -courbe lisse $X' = X \hat{\times}_B B'$.

Démonstration. — La variété rigide \bar{X}_b^{an} est recouverte par deux ouverts affinoïdes X_b et U_b . Soit P une composante irréductible de \bar{X}_b . Comme X est Zariski dense dans \bar{X}^{an} , le B -schéma \bar{X} est génériquement une courbe. Par la semi-continuité de la dimension des fibres (et plus précisément [19, Lemme 13.1.1]), P est de dimension supérieure ou égale à 1. Il s'ensuit que $P^{\text{an}} \cap X_b \neq \emptyset$. (En effet, dans le cas contraire, on aurait $P^{\text{an}} \subset U_b$ ce qui entraînerait que P^{an} est un $k(b)$ -affinoïde. Or, ceci est impossible puisque P est projectif de dimension non nulle.) De plus, comme $X_b \cap P^{\text{an}}$ est un ouvert affinoïde non vide de P^{an} , il s'ensuit que $X_b \cap P^{\text{an}}$ est Zariski dense dans P qui est alors de dimension 1. Ceci démontre la première partie du lemme.

La seconde partie du lemme est maintenant claire. En effet, $X' \subset \bar{X}'^{\text{an}}$ est Zariski dense, puisqu'il est Zariski dense dans les fibres. Soit U un voisinage affinoïde presque rationnel de $\bar{X}^{\text{an}} - X$. Alors $U' = U \hat{\times}_B B'$ est un voisinage affinoïde de $\bar{X}'^{\text{an}} - X'$. Il est aussi presque rationnel par la deuxième assertion du lemme 2.3.2. C.Q.F.D.

Définition 2.3.5. — Soient B un k -affinoïde lisse, X une B -courbe affinoïde lisse et \bar{X} une bonne compactification de X . On définit un groupoïde $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$ de la manière suivante. Les objets de $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$ sont les triplets (\mathcal{L}, U, t) avec \mathcal{L} un $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -module inversible, $U \subset \bar{X}^{\text{an}}$ un voisinage affinoïde presque rationnel de $\bar{X}^{\text{an}} - X$ et $t : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_U$ une trivialisatation. Une flèche $(\mathcal{L}, U, t) \rightarrow (\mathcal{L}', U', t')$ est un isomorphisme $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ tel que, pour un voisinage presque rationnel suffisamment petit U'' de $\bar{X}^{\text{an}} - X$ contenu dans $U \cap U'$, le carré de modules cohérents

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U''} & \xrightarrow[\sim]{t|_{U''}} & \mathcal{L}|_{U''} \\ \parallel & & \downarrow \sim \\ \mathcal{O}_{U''} & \xrightarrow[\sim]{t'|_{U''}} & \mathcal{L}'|_{U''} \end{array}$$

commute. La catégorie $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$ est naturellement une catégorie monoïdale symétrique et unitaire pour le produit tensoriel

$$(2.46) \quad (\mathcal{L}, U, t) \otimes (\mathcal{L}', U', t') = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}', U \cap U', t|_{U \cap U'} \otimes t'|_{U \cap U'}).$$

Le triplet $(\mathcal{O}_{\bar{X}}, U, \text{id})$, avec U n'importe quel voisinage affinoïde presque rationnel de $\bar{X}^{\text{an}} - X$, est un objet unité pour ce produit tensoriel. On appellera $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$ le groupoïde de Picard relatif (à \bar{X}) de X .

Définition 2.3.6. — *Gardons les hypothèses de la définition précédente. On appelle $\text{Pic}_{\bar{X}}(X)$ l'ensemble des composantes connexes (ou encore des classes d'isomorphismes) du groupoïde $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$. Le produit tensoriel (2.46) définit une structure de groupe commutatif sur $\text{Pic}_{\bar{X}}(X)$. Le groupe ainsi obtenu est appelé le groupe de Picard relatif (à \bar{X}) de X .*

Nous aurons besoin de dégager quelques propriétés de functorialité des groupes de Picard relatifs.

Supposons donné un morphisme de k -affinoïdes $e : B' \rightarrow B$ avec B' lisse. La B' -courbe lisse $X' = X \widehat{\times}_B B'$ admet une bonne compactification donnée par $\bar{X}' = (\bar{X} \times_B B')_{\text{red}}$. On définit un foncteur $e^* : \text{PIC}_{\bar{X}}(X) \rightarrow \text{PIC}_{\bar{X}'}(X')$ en associant à (\mathcal{L}, U, t) le triplet

$$(\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathcal{O}_{\bar{X}'}, U' = (U \widehat{\times}_B B')_{\text{red}}, t' = t|_{U'}).$$

Ce foncteur est monoïdal symétrique et unitaire. Il induit donc un morphisme de groupes abéliens

$$e^* : \text{Pic}_{\bar{X}}(X) \longrightarrow \text{Pic}_{\bar{X}'}(X').$$

On vérifie immédiatement que l'association $B' \rightsquigarrow \text{Pic}_{\bar{X}'}(X')$ définit un foncteur contravariant (i.e., un préfaisceau) sur la catégorie des B -affinoïdes lisses sur k .

D'autre part, soit $Y \subset \bar{X}^{\text{an}}$ un ouvert affinoïde lisse sur B et contenant X . On note $j : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion évidente. Alors, Y est aussi une B -courbe affinoïde lisse et \bar{X} est une bonne compactification de Y . Tout objet (\mathcal{L}, U, t) de $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$ est aussi un objet de $\text{PIC}_{\bar{X}}(Y)$. On déduit alors un morphisme évident

$$j_* : \text{Pic}_{\bar{X}}(X) \longrightarrow \text{Pic}_{\bar{X}}(Y).$$

Remarquons enfin, que pour B' comme ci-dessus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}_{\bar{X}}(X) & \xrightarrow{j_*} & \text{Pic}_{\bar{X}}(Y) \\ e^* \downarrow & & \downarrow e^* \\ \text{Pic}_{\bar{X}'}(X') & \xrightarrow{j'_*} & \text{Pic}_{\bar{X}'}(Y') \end{array}$$

avec $Y' = Y \widehat{\times}_B B'$ et j' le changement de base de j suivant e .

Définition 2.3.7. — *Soient B un k -affinoïde lisse, X une B -courbe affinoïde lisse et \bar{X} une bonne compactification de X . On définit le groupe $\text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$ comme étant le coégalisateur de la double flèche*

$$\text{Pic}_{\bar{X} \times_B \mathbb{B}^1_B}(X \widehat{\times}_B \mathbb{B}^1_B) \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1^*} \\ \xrightarrow{s_0^*} \end{array} \text{Pic}_{\bar{X}}(X),$$

avec s_0 et s_1 les sections nulle et unité de \mathbb{B}^1_B . Le groupe $\text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$ est le groupe de Picard relatif rendu \mathbb{B}^1 -invariant de X .

Soit $Y \subset \bar{X}^{\text{an}}$ un ouvert affinoïde lisse sur B et contenant X , et notons $j : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion évidente. Il est clair que le morphisme j_* sur les groupes de Picard relatifs induit un morphisme

$$j_* : \text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(X) \longrightarrow \text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(Y)$$

sur les groupes de Picard relatifs rendus \mathbb{B}^1 -invariants. L'étape suivante consiste à établir un lien entre les groupes de Picard relatifs et les groupes de correspondances finies. On a la proposition suivante.

Proposition 2.3.8. — *Soient B un k -affinoïde lisse, X une B -courbe affinoïde lisse et \bar{X} une bonne compactification de X . Il existe un unique morphisme de groupes abéliens*

$$(2.47) \quad \text{cl} : \mathbf{Cor}_B(B, X) \longrightarrow \text{Pic}_{\bar{X}}(X)$$

tel que, pour $Z \subset X = B \widehat{\times}_B X$ une correspondance finie élémentaire (i.e., un sous-affinoïde intègre, fermé, fini et surjectif sur une composante connexe de B), $\text{cl}([Z])$ est la classe de (\mathcal{I}, U, t) où :

- 1) U est un voisinage affinoïde presque rationnel de $\bar{X}^{\text{an}} - X$ ne rencontrant pas Z ,
- 2) $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\bar{X}}$ est un idéal inversible vérifiant $\mathcal{I}|_X = \mathcal{I}(Z)$ (avec $\mathcal{I}(Z)$ l'idéal de définition de Z) et $\mathcal{I}|_U = \mathcal{O}_U$,
- 3) t est l'inverse de l'identification $\mathcal{I}|_U = \mathcal{O}_U$ (induite par l'inclusion de l'idéal \mathcal{I} dans $\mathcal{O}_{\bar{X}}$).

Démonstration. — L'unicité de cl est claire. En effet, si (\mathcal{I}', U', t') est un autre triplet vérifiant les conditions de l'énoncé, alors $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$ puisque ces deux idéaux coïncident sur les ouverts affinoïdes X et $U \cap U'$ qui forment un recouvrement admissible de \bar{X}^{an} . De plus, les trivialisations t et t' sont clairement égales sur $U \cap U'$.

Montrons l'existence d'un tel morphisme. Étant donné que $\mathbf{Cor}_B(B, X)$ est librement engendré par les correspondances finies élémentaires $Z \subset X$, il suffit de montrer l'existence d'un triplet (\mathcal{I}, U, t) vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme Z est fini sur B , c'est l'analytifié du B -schéma fini $Z^{\text{alg}} = \text{Spec}(\Gamma(Z, \mathcal{O}))$. Il s'ensuit que la composition de

$$Z \longrightarrow X \xrightarrow{j} \bar{X}^{\text{an}}$$

est l'analytifiée d'un unique morphisme de B -schémas $Z^{\text{alg}} \rightarrow \bar{X}$ (voir la proposition 1.1.21); ce morphisme est une immersion fermée. On identifiera alors Z^{alg} à un sous-schéma fermé de \bar{X} . Notons $\mathcal{I}(Z^{\text{alg}}) \subset \mathcal{O}_{\bar{X}}$ l'idéal de définition de Z^{alg} . Étant donné que Z^{alg} est de codimension 1 et contenu dans le lieu régulier de \bar{X} , on déduit que $\mathcal{I}(Z^{\text{alg}}) \subset \mathcal{O}_{\bar{X}}$ est un idéal inversible. On a clairement, $\mathcal{I}(Z^{\text{alg}})|_X = \mathcal{I}(Z)$. Pour terminer, il reste à construire un voisinage affinoïde presque rationnel U de $\bar{X}^{\text{an}} - X$ ne rencontrant pas Z . En effet, on prendra alors $(\mathcal{I}(Z^{\text{alg}}), U, 1)$ avec 1 la section unité de $\Gamma(U, \mathcal{I}(Z^{\text{alg}})) = \Gamma(U, \mathcal{O})$. On construira l'ouvert U dans la proposition ci-dessous.

C.Q.F.D.

Proposition 2.3.9. — Soient B un k -affinoïde lisse, X une B -courbe affinoïde lisse et \bar{X} une bonne compactification de X . Soit $Z \subset X = B \hat{\times}_B X$ une correspondance finie élémentaire de B dans X . Il existe alors un voisinage affinoïde presque rationnel U de $\bar{X}^{\text{an}} - X$ tel que $U \cap Z = \emptyset$.

Démonstration. — Soit V n'importe quel voisinage affinoïde presque rationnel de $\bar{X}^{\text{an}} - X$; il en existe puisque \bar{X} est une bonne compactification de X . Notons $A = \Gamma(V, \mathcal{O})$ et $I \subset A$ l'idéal de définition du fermé $V \cap Z$. L'idéal I est inversible car $V \cap Z$ est contenu dans le lieu lisse de V . Considérons la A -algèbre de type fini $F = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} I^{-r} \subset \text{Frac}(A)$. (Précisons que $\text{Frac}(-)$ désigne la localisation d'un anneau par rapport à l'ensemble de ses éléments réguliers.) Il est clair que $\text{Spec}(F) = \text{Spec}(A) - \text{Spec}(A/I)$ est un ouvert affine de $\text{Spec}(A)$. De plus, $\text{Spec}(F)^{\text{an}} = V - (V \cap Z)$ contient $\bar{X}^{\text{an}} - X$ et est disjoint de Z . Toutefois, $\text{Spec}(F)^{\text{an}}$ n'est pas un affinoïde (à moins que $V \cap Z$ ne soit vide).

Soient a_1, \dots, a_n des générateurs de l'idéal fractionnaire $I^{-1} \subset \text{Frac}(A)$. Pour $\alpha \in |k^\times|$, on définit une norme sur F en posant pour $x \in F$

$$(2.48) \quad |x|_\alpha = \min \left\{ \max_{(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}^n} |m_{e_1 \dots e_n}|_\infty \alpha^{e_1 + \dots + e_n}; \right. \\ \left. x = \sum_{(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}^n} m_{e_1 \dots e_n} a_1^{e_1} \cdots a_n^{e_n} \right\},$$

où le minimum est pris sur toutes les représentations de x comme polynôme en (a_1, \dots, a_n) à coefficients dans A . (Ci-dessus, la norme infinie est relativement à V .) On note F_α le complétion de F par rapport à la norme $|\cdot|_\alpha$. Il est clair que F_α est une k -algèbre affinoïde; elle admet une présentation $A\{\alpha^{-1}t_1, \dots, \alpha^{-1}t_n\} \twoheadrightarrow F_\alpha$ qui envoie t_i sur a_i . De plus, la norme $|\cdot|_\alpha$ sur F_α est simplement la norme résiduelle déduite de cette présentation (lorsqu'on munit $A\{\alpha^{-1}t_1, \dots, \alpha^{-1}t_n\}$ de la norme de Gauss déduite de la norme infinie sur A).

Étant donné que $\text{Spec}(F)^{\text{an}} \cap Z = \emptyset$, on a aussi $\text{Spm}(F_\alpha) \cap Z = \emptyset$. Pour terminer, il reste à vérifier les deux points suivants.

1) Le k -affinoïde $\text{Spm}(F_\alpha)$ est un domaine presque rationnel de \bar{X}^{an} .

2) Pour α suffisamment grand, $\text{Spm}(F_\alpha)$ est un voisinage de $\bar{X}^{\text{an}} - X = V - (V \cap X)$.

Pour voir que $\text{Spm}(F_\alpha)$ est un domaine presque rationnel, on choisit $Y \subset \bar{X}$ un ouvert Zariski affine tel que $V \subset Y^{\text{an}}$ et $\Gamma(Y, \mathcal{O})$ dense dans $\Gamma(V, \mathcal{O})$. Avec les notations de la preuve de la proposition 2.3.8, l'idéal $J = \Gamma(Y, \mathcal{S}(Z^{\text{alg}}))$ est inversible et $J\Gamma(V, \mathcal{O}) = I$. On pose $X_0 = \text{Spec}(\bigcup_{r=0}^\infty J^{-r})$; c'est un ouvert affine de Y dont l'analytifié contient $\text{Spm}(F_\alpha)$. De plus, il est clair que $\bigcup_{r=0}^\infty J^{-r}$ est dense dans $\bigcup_{r=0}^\infty I^{-r}$ qui, à son tour, est dense dans F_α .

Pour vérifier la deuxième propriété, à savoir que $\text{Spm}(F_\alpha)$ contient $V - (V \cap X)$ pour α suffisamment grand, on peut raisonner localement sur V . Autrement dit, il suffit de montrer que $\text{Spm}(F_\alpha) \cap W$ contient $W - (W \cap X)$ (pour α suffisamment grand) pour des ouverts affinoïdes $W \subset V$ formant un recouvrement admissible

de V . On peut supposer que l'idéal I est principal au-dessus de l'ouvert W . On dispose donc d'un générateur $c \in I^{-1}\Gamma(W, \mathcal{O})$ de l'idéal fractionnaire $I^{-1}\Gamma(W, \mathcal{O})$. Soient $b_i \in \Gamma(W, \mathcal{O})$ les éléments tels que $a_i = b_i c$. Les b_i engendrent $\Gamma(W, \mathcal{O})$ comme idéal. Puisque $W = \bigcup_{i=1}^n (D_W(b_i|b_1, \dots, b_n))_{1 \leq i \leq n}$, on peut remplacer W par l'un des $D_W(b_i|b_1, \dots, b_n)$ et supposer, quitte à réindexer les générateurs de I , que $|b_1(w)| \geq |b_i(w)|$ pour tout $w \in W$. Il s'ensuit que b_1 est inversible et que $|b_i/b_1|_\infty \leq 1$ (où la norme infinie est relativement à W).

On pose $A' = \Gamma(W, \mathcal{O})$, $I' = IA'$ et $F' = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} I'^{-r}$. On dispose d'une norme $|\cdot|_\alpha$ sur A' définie comme dans (2.48) avec la seule différence que le minimum est pris sur toutes les représentations de x comme polynôme en (a_1, \dots, a_n) à coefficients dans A' (au lieu de A). Par construction, la complétion F'_α de F' par rapport à la norme $|\cdot|_\alpha$ est la k -algèbre affinoïde $F_\alpha \widehat{\otimes}_A A'$ dont le spectre maximal est $\text{Spm}(F_\alpha) \cap W$.

Considérons un élément $x = \sum_{(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}^n} m_{e_1 \dots e_n} a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n}$ de F' . Vu que $a_i = b_i c = (b_i b_1^{-1}) a_1$, on peut écrire

$$x = \sum_{(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}^n} m_{e_1 \dots e_n} \left(\frac{b_i}{b_1}\right)^{e_i} a_1^{e_1 + \dots + e_n} = \sum_{e \in \mathbb{N}} \left(\sum_{e_1 + \dots + e_n = e} m_{e_1 \dots e_n} \left(\frac{b_i}{b_1}\right)^{e_i} \right) a_1^e.$$

Puisque $|b_i/b_1|_\infty \leq 1$, on trouve que

$$\left| \sum_{e_1 + \dots + e_n = e} m_{e_1 \dots e_n} \left(\frac{b_i}{b_1}\right)^{e_i} \right|_\infty \leq \max_{e_1 + \dots + e_n = e} |m_{e_1 \dots e_n}|_\infty.$$

Il s'ensuit aussitôt que le minimum dans (2.48) est atteint sur le sous-ensemble des représentations de x comme polynôme en a_1 à coefficients dans A' . Autrement dit, on a

$$|x|_\alpha = \min \left\{ \max_{e \in \mathbb{N}} |m_e|_\infty \alpha^e ; x = \sum_{e \in \mathbb{N}} m_e a_1^e \right\}.$$

On déduit aussitôt que $F'_\alpha \simeq A' \{ \alpha^{-1} t \} / (ft - 1)$ avec $f = a_1^{-1}$, un générateur de l'idéal I' . Autrement dit, on a $\text{Spm}(F_\alpha) \cap W = D_W(f|\alpha^{-1})$.

Rappelons que nous devons montrer que $\text{Spm}(F_\alpha) \cap W$ contient $W - (W \cap X)$ pour α suffisamment grand. D'après le calcul précédent, ceci équivaut à dire que $D_W(f|\alpha^{-1})$ contient $W - (W \cap X)$. Vu que $W = D_W(f|\alpha^{-1}) \cup D_W(\alpha^{-1}|f)$, il est donc suffisant de montrer que $D_W(\alpha^{-1}|f) \subset W \cap X$ pour α suffisamment grand. Or, on a $W/(f) \subset W \cap X$ car $W/(f) = W \cap Z$ et $Z \subset X$. On peut maintenant appliquer le lemme 2.3.10 ci-dessous pour conclure. C.Q.F.D.

Lemme 2.3.10. — Soient $X = \text{Spm}(A)$ un k -affinoïde, $a \in A$ et $U \subset \text{Spm}(A)$ un ouvert admissible contenant $Z = \text{Spm}(A/(a))$. Alors, pour $\epsilon \in |k^\times|$ suffisamment petit, on a $D_X(\epsilon|a) \subset U$.

Démonstration. — La question est locale sur X dans le sens que, si $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ est un recouvrement admissible de X par des ouverts affinoïdes (avec I un ensemble fini), il suffit de démontrer le lemme pour les $U_\alpha = U \cap X_\alpha$ et $Z_\alpha = Z \cap X_\alpha$. En effet, si on

trouve des $\epsilon_\alpha \in |k^\times|$ tels que $D_{X_\alpha}(\epsilon_\alpha|a) \subset U_\alpha$, alors $\epsilon = \min_{\alpha \in I}(\epsilon_\alpha)$ convient pour X . Ce principe sera utilisé à plusieurs reprises dans la preuve.

Puisque Z est quasi-compact (car affinoïde), on ne restreint pas la généralité en supposant que l'ouvert U est quasi-compact. On peut alors écrire U comme une réunion finie de domaines rationnels de X

$$(2.49) \quad U = \bigcup_{i=1}^n D_X(f_0^{(i)}|f_1^{(i)}, \dots, f_m^{(i)})$$

avec $(f_0^{(i)}, \dots, f_m^{(i)})$ des systèmes de générateurs de A en tant qu'idéal. (Le fait qu'on puisse supposer m indépendant de i est clair : en effet, on ne change par un domaine rationnel en répétant l'un des générateurs utilisés pour le définir.) On raisonnera par récurrence sur l'entier n . Il n'y a rien à démontrer lorsque $n = 0$ car, dans ce cas, $U = Z = \emptyset$. On peut donc supposer que $n \geq 1$. On divise l'argument en deux étapes.

Étape 1 : Le but de cette étape est de se ramener au cas où les domaines rationnels qui apparaissent dans (2.49) ont une forme très simple. Plus précisément, on se ramènera au cas où $m = 1$ et $f_0^{(i)} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Soit $\eta \in |k^\times|$ tel que $0 < \eta < \min_{x \in X}(\max_{0 \leq j \leq m} |f_j^{(1)}(x)|)$ et considérons le recouvrement admissible $X = D_X(\eta|f_0^{(1)}) \cup D_X(f_0^{(1)}|\eta)$. On a clairement

$$D_X(\eta|f_0^{(1)}) \cap D_X(f_0^{(1)}|f_1^{(1)}, \dots, f_m^{(1)}) = \emptyset.$$

Il vient que $D_X(\eta|f_0^{(1)}) \cap U$ est une réunion de $n - 1$ domaines rationnels. Grâce à l'hypothèse de récurrence il suffit de traiter le cas de $D_X(f_0^{(1)}|\eta)$. Ainsi, en remplaçant X par $D_X(f_0^{(1)}|\eta)$, on peut supposer que $f_0^{(1)}$ est inversible. Le même raisonnement permet de supposer que tous les $f_0^{(i)}$ sont inversibles. Posons $g_j^{(i)} = f_j^{(i)}/f_0^{(i)}$. On a alors

$$U = \bigcup_{i=1}^n D_X(1|g_1^{(i)}, \dots, g_m^{(i)}) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m D_X(1|g_j^{(i)}) \right).$$

Vérifions l'égalité

$$(2.50) \quad \bigcap_{\tau: [1, n] \rightarrow [1, m]} \left(\bigcup_{i=1}^n D_X(1|g_{\tau(i)}^{(i)}) \right) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m D_X(1|g_j^{(i)}) \right).$$

En effet, soit x un point fermé de X qui n'est pas dans l'ouvert à droite dans (2.50). Ceci revient à dire que pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe un entier $1 \leq e_i \leq m$ tel que $x \notin D_X(1|g_{e_i}^{(i)})$. On considère alors l'application $\tau_0 : [1, n] \rightarrow [1, m]$ donnée par $\tau_0(i) = e_i$. Par construction, x n'est pas dans $\bigcup_{i=1}^n D_X(1|g_{\tau_0(i)}^{(i)})$. Il n'est donc pas non plus dans l'ouvert à gauche dans (2.50). Réciproquement, soit x un point fermé de X qui n'est pas dans l'ouvert à gauche dans (2.50). Il existe donc une application $\tau_1 : [1, n] \rightarrow [1, m]$ telle que $x \notin D_X(1|g_{\tau_1(i)}^{(i)})$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a donc aussi $x \notin \bigcap_{j=1}^m D_X(1|g_j^{(i)})$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci montre que x n'est pas dans l'ouvert à droite dans (2.50).

D'après ce qui précède, on a

$$U = \bigcap_{\tau: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket} \left(\bigcup_{i=1}^n D_X(1|g_{\tau(i)}^{(i)}) \right).$$

Pour démontrer le lemme, il est clairement suffisant de traiter séparément chacun des ouverts $U_\tau = \bigcup_{i=1}^n D_X(1|g_{\tau(i)}^{(i)})$. Ceci nous ramène au cas où $U = \bigcup_{i=1}^n D_X(1|g^{(i)})$, avec $g^{(i)} \in A$, comme souhaité.

Étape 2 : Ici, on termine la preuve en supposant que $U = \bigcup_{i=1}^n D_X(1|g_i)$, avec $g_i \in A$.

En considérant le recouvrement admissible $X = D_X(1|g_1) \cap D_X(g_1|1)$ et en remarquant que $U \cap D_X(1|g_1) = D_X(1|g_1)$, on voit qu'on peut remplacer X par $D_X(g_1|1)$ ce qui permet de supposer que $|g_1(x)| \geq 1$ pour tout $x \in X$. En répétant ceci pour les autres g_i , on peut aussi supposer que $|g_i(x)| \geq 1$ pour tout $x \in X$ et tout $1 \leq i \leq n$. Il s'ensuit que g_i est inversible et que son inverse $h_i = g_i^{-1}$ est dans A° . On a donc

$$U = \bigcup_{i=1}^n D_X(h_i|1) = \bigcup_{i=1}^n \{x \in X; |h_i(x)| = 1\}.$$

Considérons à présent le recouvrement admissible $(D_X(h_i|h_1, \dots, h_n))_{1 \leq i \leq n}$ de X . Étant donné que

$$D_X(h_i|h_1, \dots, h_n) \cap U = \{x \in X; |h_i(x)| = 1\} = D_X(h_i|1),$$

on se ramène à supposer que $U = D_X(h|1)$ avec $h \in A^\circ$ inversible dans A . (En particulier, on s'est ramené à un cas particulier du cas $n = 1$ de la récurrence.)

Notons \bar{h} la classe de h dans $A/(a)$. Puisque $Z \subset U$, on a $|\bar{h}(z)| = 1$ pour tout $z \in Z$. Il s'ensuit que $\bar{h}^{-1} \in (A/(a))^\circ$. On peut supposer que $a \in A^\circ$ quitte à remplacer X par $D_X(1|a)$. Le morphisme évident $A^\circ/(a) \rightarrow (A/(a))^\circ$ est alors entier (comme il découle facilement du lemme 1.1.28). En particulier, $\bar{h}^{-1} \in (A/(a))^\circ$ satisfait à une équation polynomiale à coefficients dans $A^\circ/(a)$. Il existe donc un polynôme unitaire $\bar{P} \in A^\circ/(a)[T]$ tel que $\bar{P}(\bar{h}^{-1}) = 0$. Soit $P \in A^\circ[T]$ un polynôme unitaire qui relève \bar{P} . Il s'ensuit que $P(h^{-1}) = al$ avec $l \in A$. Quitte à remplacer X par $D_X(\epsilon|a)$ avec $0 < \epsilon < |l|_\infty^{-1}$, on peut supposer que $|al|_\infty \leq 1$. Il s'ensuit que $P(h^{-1}) \in A^\circ$. Étant donné que A° est normal dans A , on déduit que $h^{-1} \in A^\circ$. Dans ce cas, $X = U$ et la conclusion du lemme est claire. C.Q.F.D.

On a la propriété suivante de naturalité du morphisme cl défini dans la proposition 2.3.8.

Lemme 2.3.11. — *Soit $e : B' \rightarrow B$ un morphisme de k -affinoïdes lisses sur k . On note $X' = X \widehat{\times}_B B'$ munie de sa bonne compactification $\bar{X}' = (\bar{X} \times_B B')_{\text{red}}$. Alors le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cor}_B(B, X) & \xrightarrow{\quad cl \quad} & \text{Pic}_{\bar{X}}(X) \\ \downarrow - \circ e & & \downarrow e^* \\ \text{Cor}_B(B', X) & \xlongequal{\quad} \text{Cor}_{B'}(B', X') & \xrightarrow{\quad cl \quad} \text{Pic}_{\bar{X}'}(X'). \end{array}$$

Démonstration. — Soit $Z \subset X = B \widehat{\times}_B X$ une correspondance finie élémentaire et montrons que les images de $[Z]$ par les deux compositions possibles dans le carré ci-dessus coïncident. Soit (\mathcal{I}, U, t) un triplet associé à $[Z]$ comme dans l'énoncé de la proposition 2.3.8. Alors, l'image de $[Z]$ par la composition de

$$\mathbf{Cor}_B(B, X) \xrightarrow{cl} \text{Pic}_{\overline{X}}(X) \longrightarrow \text{Pic}_{\overline{X}'}(X')$$

est la classe d'isomorphisme de (\mathcal{I}', U', t') avec $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \mathcal{O}_{\overline{X}'}$, $U' = (U \widehat{\times}_B B')_{\text{red}}$ et t' la trivialisatıon évidente donnée par l'inverse de l'égalité $\mathcal{I}'|_{U'} = \mathcal{O}_{U'}$. Remarquons aussi que \mathcal{I}' est naturellement un idéal inversible de $\mathcal{O}_{X'}$. En effet, le morphisme évident

$$\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \mathcal{O}_{\overline{X}'} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}'}$$

est non nul au-dessus d'un ouvert dense de \overline{X}' car Z^{alg} est partout de codimension non nulle dans les fibres du B -schéma \overline{X} (où $Z^{\text{alg}} = \text{Spec}(\Gamma(Z, \mathcal{O}))$ est l'unique sous-schéma fermé de \overline{X} tel que $(Z^{\text{alg}})^{\text{an}} = Z$; voir la preuve de la proposition 2.3.8). Le morphisme ci-dessus est donc injectif.

Par ailleurs, l'image de $[Z]$ par le morphisme $\mathbf{Cor}_B(B, X) \rightarrow \mathbf{Cor}_B(B', X)$ est donnée par la formule de Serre. Notons $(Z'_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille des composantes irréductibles (munies de leurs structures de k -affinoïdes intègres) de $Z' = Z \widehat{\times}_B B'$ (qui n'est pas nécessairement réduit). On pose $A = \Gamma(B, \mathcal{O})$, $A' = \Gamma(B', \mathcal{O})$, $E = \Gamma(Z, \mathcal{O})$ et $E' = \Gamma(Z', \mathcal{O})$. (Remarquons que $E' = A' \otimes_A E = A' \widehat{\otimes}_A E$.) On note $\mathfrak{p}_\alpha \subset E'$ l'idéal premier minimal qui définit Z'_α . D'après la proposition 2.2.14, on a :

$$(2.51) \quad [Z] \circ e = \sum_{\alpha \in I} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{lg}_{E'_{\mathfrak{p}_\alpha}} \text{Tor}_i^A(A', E) \otimes_{E'} E'_{\mathfrak{p}_\alpha} \right) [Z'_\alpha].$$

Notons $C = \Gamma(X, \mathcal{O})$ et $J = \Gamma(X, \mathcal{I}) \subset C$ l'idéal de définition du sous- k -affinoïde fermé $Z \subset X$. De même, notons $C' = \Gamma(X', \mathcal{O})$ et $J' = \Gamma(X', \mathcal{I}') \simeq JC'$ l'idéal de définition du sous- k -affinoïde fermé $Z' \subset X'$. En appliquant $A' \otimes_A -$ à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

on obtient une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow \text{Tor}_1^A(A', E) \longrightarrow J' \longrightarrow C' \longrightarrow E' \longrightarrow 0.$$

Étant donné que J et C sont des A -modules plats (car $X = \text{Spm}(C)$ est lisse sur $B = \text{Spm}(A)$ et J est un idéal inversible de C), on a $\text{Tor}_i^A(A', J) = \text{Tor}_i^A(A', C) = 0$ pour $i > 0$. On en déduit que $\text{Tor}_i^A(A', E) = 0$ pour $i > 0$ (lorsque $i = 1$, on utilise le fait que le morphisme $J' = A' \otimes_A J \rightarrow C' = A' \otimes_A C$ est injectif). La formule (2.51) se simplifie alors pour donner

$$(2.52) \quad [Z] \circ e = \sum_{\alpha \in I} (\text{lg}_{E'_{\mathfrak{p}_\alpha}} E'_{\mathfrak{p}_\alpha}) [Z'_\alpha].$$

Étant donné que $Z' \cap U' = \emptyset$, on déduit que $Z'_\alpha \cap U' = \emptyset$. Ainsi U' est un voisinage affinoïde presque rationnel de $\bar{X}'^{\text{an}} - X'$ qui ne rencontre pas Z'_α . Il s'ensuit que l'image de $[Z]$ par la composition de

$$\mathbf{Cor}_B(B, X) \longrightarrow \mathbf{Cor}_{B'}(B', X') \longrightarrow \text{Pic}_{\bar{X}'}(X')$$

est donnée par la somme

$$\sum_{\alpha \in I} \left(\text{lg}_{E'_{\mathfrak{p}_\alpha}} E'_{\mathfrak{p}_\alpha} \right) [(\mathcal{I}'_\alpha, U', t'_\alpha)]$$

avec $\mathcal{I}'_\alpha \subset \mathcal{O}_{\bar{X}'}$ un idéal inversible, dont la restriction à X' est l'idéal de définition de Z'_α et qui vérifie $(\mathcal{I}'_\alpha)|_{U'} = \mathcal{O}_{U'}$; la trivialisaton t'_α est alors l'inverse de cette égalité. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'on a l'égalité des idéaux inversibles

$$\mathcal{I}' = \bigotimes_{\alpha \in I} (\mathcal{I}'_\alpha)^{\mu_\alpha} \quad \text{avec} \quad \mu_\alpha = \text{lg}_{E'_{\mathfrak{p}_\alpha}} E'_{\mathfrak{p}_\alpha}.$$

On peut vérifier cette égalité après restriction à X' puisque tous les idéaux ci-dessus sont à cosupport dans X' . Cette égalité se déduit alors de la décomposition $J' = \bigcap_\alpha (J'_\alpha)^{\mu_\alpha}$ de idéal divisoriel J' en produit d'idéaux premiers de codimension 1 dans l'anneau régulier C' . (Bien entendu, J'_α est l'idéal de définition du fermé intègre $Z'_\alpha \subset X'$.) Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Du lemme 2.3.11, on déduit un morphisme naturel $cl : \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X) \rightarrow \text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$ induit par le morphisme de double flèches

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cor}_{\mathbb{B}^1_B}(\mathbb{B}^1_B, X \widehat{\times}_B \mathbb{B}^1_B) & \xrightarrow{s_1^*} & \mathbf{Cor}_B(B, X) \\ \text{cl} \downarrow & \begin{array}{c} s_0^* \\ s_1^* \end{array} & \downarrow cl \\ \text{Pic}_{\bar{X} \times_B \mathbb{B}^1_B}(X \widehat{\times}_B \mathbb{B}^1_B) & \xrightarrow{s_0^*} & \text{Pic}_{\bar{X}}(X). \end{array}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 2.3.12. — Soient B un k -affinoïde lisse, X une B -courbe affinoïde lisse et \bar{X} une bonne compactification de X . L'homomorphisme

$$cl : \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X) \longrightarrow \text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On procède en quatre étapes.

Étape 1 : Dans cette étape et la prochaine, nous allons définir un morphisme $\text{Pic}_{\bar{X}}(X) \rightarrow \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X)$. Pour cela, on fixe un objet (\mathcal{L}, U, t) de $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$.

Soit V un ouvert affine de \bar{X} tel que $U \subset V^{\text{an}}$ et $\Gamma(V, \mathcal{O}) \subset \Gamma(U, \mathcal{O})$ est dense. Un tel ouvert existe puisque U est un ouvert presque rationnel de \bar{X}^{an} . Soit $(g_1, \dots, g_n) \in$

$\Gamma(V, \mathcal{L})^n$ un système de générateurs du \mathcal{O}_V -module $\mathcal{L}|_V$ et munissons $\Gamma(U, \mathcal{L})$ de la norme résiduelle $\|\cdot\|$ déduite de la norme infinie sur $\Gamma(U, \mathcal{O})$ via la présentation

$$(g_1, \dots, g_n) : \Gamma(U, \mathcal{O})^{\oplus n} \twoheadrightarrow \Gamma(U, \mathcal{L}).$$

Par définition, on a

$$\|h\| = \inf \left\{ \max_{i=1, \dots, n} |a_i|_{\infty} ; h = \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\} \quad \text{pour } h \in \Gamma(U, \mathcal{L}).$$

Pour voir que $\|\cdot\|$ est une norme (et pas seulement une semi-norme), considérons $h \in \Gamma(U, \mathcal{L}) - \{0\}$ et fixons un point fermé $x \in U$ avec $h(x) \neq 0$. On pose $\eta = \max_{i=1, \dots, n} |g_i(x)/h(x)|$. (Puisque \mathcal{L} est localement libre de rang 1, $\mathcal{L}_x = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$ est un $k(x)$ -espace vectoriel de dimension 1. Les vecteurs $g_i(x), h(x) \in \mathcal{L}_x$ sont donc colinéaires et, par définition, $g_i(x)/h(x) \in k(x)$ est le facteur de colinéarité.) Puisque les g_i engendrent $\Gamma(U, \mathcal{L})$, on a $\eta > 0$. De plus, on a nécessairement $\|h\| \geq \eta^{-1}$. En effet, dans le cas contraire on aurait $|a_i(x)| < \eta^{-1}$, pour tout $1 \leq i \leq n$, ce qui contredirait l'égalité $1 = \sum_{i=1}^n a_i(x)(g_i(x)/h(x))$.

Le morphisme $\Gamma(V, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{L})$ est d'image dense (relativement à la norme $\|\cdot\|$). La trivialisatation t correspond à un générateur $t \in \Gamma(U, \mathcal{L})$ de $\mathcal{L}|_U$. On pose $m = \max_{i=1, \dots, n} |g_i/t|_{\infty}$, où g_i/t est l'unique élément de $\Gamma(U, \mathcal{O})$ tel que $g_i = (g_i/t)t$. Soit $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ tel que $\|t - s\| < m^{-1}$. Alors s est un générateur de $\mathcal{L}|_U$. En effet, on peut écrire $t - s = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ avec $m|a_i|_{\infty} < 1$. Pour tout $x \in U$, on a donc

$$\left| \frac{t-s}{t}(x) \right| \leq \left| \frac{t-s}{t} \right|_{\infty} = \left| \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{g_i}{t} \right) \right|_{\infty} \leq \max_{i=1, \dots, n} (|a_i|_{\infty}) m < 1,$$

ce qui entraîne que

$$\left| \frac{s}{t}(x) \right| \geq 1 - \left| \frac{t-s}{t}(x) \right| \geq 1 - \left| \frac{t-s}{t} \right|_{\infty} > 0,$$

montrant bien que s/t est un élément inversible de $\Gamma(U, \mathcal{O})$.

Notons $V_0 \subset V$ le plus grand ouvert Zariski au-dessus duquel s est inversible. Comme $\mathcal{L}|_V$ est un \mathcal{O}_V -module inversible, V_0 est encore affine. La discussion précédente montre que V_0^{an} contient U . On définit une correspondance finie $\text{Cycl}(s)$ de la manière suivante. Soit $(Z_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles du B -schéma $\bar{X} - V_0$. Puisque \bar{X} est un B -schéma propre, il en est de même des B -schémas Z_i . Par ailleurs, les fermés $Z_i^{\text{an}} \subset \bar{X}^{\text{an}}$ sont contenus dans l'ouvert affinoïde X , ce qui entraîne que les B -schémas Z_i sont aussi affines. Ce sont donc des B -schémas finis. Enfin, la dimension de chaque Z_i est égale à celle de la composante connexe de B au-dessus de laquelle il se trouve. (En effet, $\text{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}))$ est un schéma affine régulier et les Z_i s'identifient aux composantes irréductibles du complémentaire de l'ouvert affine $\text{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O})) \times_{\bar{X}} V_0$. Or, il est bien connu que le complémentaire d'un ouvert affine dense dans un schéma affine régulier est partout de codimension 1. L'assertion recherchée découle maintenant du fait que X est une B -courbe affinoïde.) Il s'ensuit

que les schémas Z_i , qui sont intègres et finis sur B , sont aussi surjectifs sur une composante connexe de B . Ils déterminent donc des correspondances finies élémentaires dans $X = B \widehat{\times}_B X$. On pose maintenant

$$\text{Cycl}(s) = \sum_{i \in I} n_i [Z_i^{\text{an}}] \in \mathbf{Cor}_B(B, X)$$

avec n_i l'ordre du pôle de s au point générique de Z_i . Plus précisément, si $(\pi_{Z_i} = 0)$ est une équation locale de Z_i , l'entier relatif n_i est tel que $\pi_{Z_i}^{n_i} s$ s'étend en un générateur de \mathcal{L} au voisinage du point générique de Z_i .

Étape 2 : On garde les notations de l'étape précédente. Vérifions maintenant que la classe de $\text{Cycl}(s)$ dans $\pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X)$ ne dépend pas du choix de l'approximation $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ de la trivialisatoin $t \in \Gamma(U, \mathcal{L})$. En effet, soit $s' \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ une autre section telle que $\|s' - t\| < m^{-1}$. Notons τ la coordonnée de \mathbb{B}_k^1 et considérons la section $\tau s' + (1 - \tau)s \in \Gamma(V \times_B \mathbb{B}_B^1, \mathcal{L})$. (Par abus de notation, on note encore \mathcal{L} le $\mathcal{O}_{\overline{X} \times_B \mathbb{B}_B^1}$ -module obtenu de \mathcal{L} par « pull-back ».) Clairement, on a encore $\|(\tau s' + (1 - \tau)s) - t\| < m^{-1}$. En raisonnant comme dans l'étape précédente, on obtient que

$$\left| \frac{\tau s' + (1 - \tau)s}{t}(x) \right| > 0$$

pour tout $x \in U \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^1$. On peut donc considérer la correspondance finie

$$\text{Cycl}(\tau s' - (\tau - 1)s) \in \mathbf{Cor}_{\mathbb{B}_B^1}(\mathbb{B}_B^1, X \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^1).$$

Cette correspondance finie fournit une homotopie de $\text{Cycl}(s)$ à $\text{Cycl}(s')$. En effet, d'après la preuve du lemme 2.3.11, la formule de Serre pour les « pull-back » des correspondances finies de $\mathbf{Cor}_{\mathbb{B}_B^1}(\mathbb{B}_B^1, X \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^1)$ suivant les sections nulle et unité $s_0, s_1 : \mathbb{B}_B^1 \rightarrow B$ ne fait intervenir que les multiplicités géométriques (i.e., les longueurs des anneaux locaux aux points génériques des composantes irréductibles du « pull-back » schématique). Le résultat découle alors immédiatement de la définition des correspondances finies $\text{Cycl}(-)$ en terme des pôles et des zéros de sections de modules inversibles.

L'indépendance de $\text{Cycl}(s) \in \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X)$ du choix de V et du système de générateurs (g_1, \dots, g_n) est claire. (En effet, un autre système de générateurs induira une norme équivalente sur $\Gamma(U, \mathcal{L})$.) On a donc associé à un objet (\mathcal{L}, U, t) de $\text{PIC}_{\overline{X}}(X)$ une classe canonique dans $\pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X)$ que l'on notera $\text{Cycl}(\mathcal{L}, U, t)$. Cette classe ne dépend que de la classe d'isomorphisme de l'objet (\mathcal{L}, U, t) . On a de plus la relation

$$\begin{aligned} (2.53) \quad \text{Cycl}((\mathcal{L}, U, t) \otimes (\mathcal{L}', U', t')) &= \text{Cycl}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}', U \cap U', t_{U \cap U'} \otimes t'_{U \cap U'}) \\ &= \text{Cycl}(\mathcal{L}, U, t) + \text{Cycl}(\mathcal{L}', U', t'). \end{aligned}$$

En effet, on peut supposer que $U = U'$. Gardons les notations de la construction de $\text{Cycl}(\mathcal{L}, U, t) = \text{Cycl}(s)$ et choisissons un système de générateurs

$$(g'_1, \dots, g'_{n'}) \in \Gamma(V, \mathcal{L}')^{n'}.$$

Notons $\|\cdot\|'$ (resp. $\|\cdot\|''$) la norme résiduelle sur $\Gamma(U, \mathcal{L}')$ (resp. $\Gamma(U, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')$) déduite du système de générateurs $(g'_{i'})_{1 \leq i' \leq n'}$ (resp. du système $(g_i \otimes g'_{i'})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq i' \leq n'}$). Posons

$$m' = \max_{i'=1, \dots, n'} |g'_{i'}/t|_\infty \quad \text{et} \quad m'' = \max_{i=1, \dots, n; i'=1, \dots, n'} |(g_i/t)(g'_{i'}/t')|_\infty.$$

On note $M = \max(\|t\|, \|t'\|')$. On choisit des sections s et s' dans $\Gamma(V, \mathcal{L})$ et $\Gamma(V, \mathcal{L}')$ telles que $\max(\|t - s\|, \|t' - s'\|') < \min(m^{-1}, m'^{-1}, M^{-1}m''^{-1})$. Alors

$$\|t \otimes t' - s \otimes s'\|'' = \|(t-s) \otimes t' + s \otimes (t'-s')\|'' \leq \max(\|t-s\| \cdot \|t'\|', \|s\| \cdot \|t'-s'\|') < m''^{-1}.$$

On peut donc approximer $t \otimes t'$ par $s \otimes s'$. Or, on a clairement la relation

$$\text{Cycl}(s \otimes s') = \text{Cycl}(s) + \text{Cycl}(s').$$

D'où l'égalité (2.53). Ceci montre que Cycl induit un homomorphisme de groupes abéliens

$$(2.54) \quad \text{Cycl} : \text{Pic}_{\bar{X}}(X) \longrightarrow \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X).$$

Étape 3 : Le morphisme (2.54) est un morphisme de préfaisceaux sur les B -affinoïdes lisses sur k . Plus précisément, si $e : B' \rightarrow B$ est un morphisme de k -affinoïdes avec B' lisse sur k , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}_{\bar{X}}(X) & \longrightarrow & \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X) \\ e^* \downarrow & & \downarrow - \circ e \\ \text{Pic}_{\bar{X}'}(X') & \longrightarrow & \pi_0 \mathbf{Cor}_{B'}(B', X') = \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B', X') \end{array}$$

(où l'on a utilisé les notations du lemme 2.3.11). En effet, soient (\mathcal{L}, U, t) un objet de $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$ et $V \subset \bar{X}$ un ouvert Zariski tel que $U \subset V^{\text{an}}$ et $\Gamma(V, \mathcal{O}) \subset \Gamma(U, \mathcal{O})$ est dense. On a $\text{Cycl}(\mathcal{L}, U, t) = \text{Cycl}(s)$ avec $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ une approximation suffisamment bonne de $t \in \Gamma(U, \mathcal{L})$ relativement à la norme résiduelle sur $\Gamma(U, \mathcal{L})$ induite par un système de générateurs (g_1, \dots, g_n) avec $g_i \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ (voir la première étape). Notons $U' = (U \widehat{\times}_B B')_{\text{red}}$, $V' = (V \times_B B')_{\text{red}}$ et $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\bar{X}'}$, le « pull-back » de \mathcal{L} à \bar{X}' . Le morphisme $\Gamma(U, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(U', \mathcal{L}')$ est contractant si l'on munit $\Gamma(U', \mathcal{L}')$ de la norme résiduelle induite par le système de générateurs (g'_1, \dots, g'_n) avec g'_i l'image de g_i dans $\Gamma(V', \mathcal{L}')$. On peut donc supposer que $\text{Cycl}(\mathcal{L}', U', t') = \text{Cycl}(s')$ où s' est l'image de s dans $\Gamma(V', \mathcal{L}')$. Il s'agit alors de montrer l'égalité $\text{Cycl}(s) \circ e = \text{Cycl}(s')$ entre cycles sur \bar{X}' .

On a vu au cours de la preuve du lemme 2.3.11 que la formule de Serre pour les « pull-back » des correspondances finies de $\mathbf{Cor}_B(B, X)$ ne fait intervenir que les multiplicités géométriques (i.e., les longueurs des anneaux locaux aux points génériques des composantes irréductibles du « pull-back » schématique). Le résultat découle alors immédiatement de la définition de $\text{Cycl}(s)$ et $\text{Cycl}(s')$ en terme des pôles et des zéros de sections s et s' .

Étape 4 : Grâce à l'étape précédente, le morphisme $\text{Pic}_{\bar{X}}(X) \rightarrow \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X)$, construit dans les deux premières étapes, se factorise d'une manière unique par un morphisme

$$\text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(X) \longrightarrow \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X).$$

(On utilise pour cela que l'association $B' \rightsquigarrow \pi_0 \mathbf{Cor}_{B'}(B', X \widehat{\times}_B B')$ est un préfaisceau invariant par homotopie.) Pour conclure, on montrera que le morphisme ci-dessus fournit un inverse à gauche et à droite du morphisme cl de l'énoncé.

Soit $Z \subset X = B \widehat{\times}_B X$ une correspondance finie élémentaire. L'élément $\text{cl}([Z])$ est donné par un triplet (\mathcal{L}, U, t) comme dans la proposition 2.3.8. Dans ce cas, t provient d'un voisinage Zariski affine de $\bar{X}^{\text{an}} - X$. Par construction, l'élément $\text{Cycl}(\text{cl}([Z])) \in \pi_0 \mathbf{Cor}_B(B, X)$ est donc donné par la classe de $\text{Cycl}(t) = [Z] \in \mathbf{Cor}_B(B, X)$.

Réciproquement, partons d'un objet (\mathcal{L}, U, t) de $\text{PIC}_{\bar{X}}(X)$. Soit $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ comme dans la première étape de la preuve. On a clairement $\text{cl}(\text{Cycl}(s)) = (\mathcal{L}, U, s)$. Il s'agit donc de montrer que $(\mathcal{L}, U, t) = (\mathcal{L}, U, s)$ dans $\text{Pic}_{\bar{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$. Avec les notations de la deuxième étape, considérons la section $\tau s + (1 - \tau)t \in \Gamma(U \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^1, \mathcal{L})$. D'après la première étape, on peut choisir s suffisamment proche de t de sorte que $|(t - s)/t|_{\infty} < 1$. Dans ce cas, on a pour $x \in U \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^1$,

$$\left| \frac{\tau s + (1 - \tau)t}{t}(x) \right| > 0.$$

On conclut que $\tau s + (1 - \tau)t$ est une trivialisations du « pull-back » de \mathcal{L} à $U \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^1$. On dispose donc d'un triplet

$$(\mathcal{L}, U \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^1, \tau s + (1 - \tau)t)$$

qui fournit une homotopie de (\mathcal{L}, U, t) à (\mathcal{L}, U, s) . Ceci termine la preuve du théorème. C.Q.F.D.

2.3.2. Construction de correspondances finies à homotopie près. — Dans ce paragraphe, on utilisera l'isomorphisme du théorème 2.3.12 pour construire des correspondances finies à homotopie près entre ouverts affinoïdes de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$. On dispose de trois points canoniques de \mathbb{P}_k^1 , à savoir $0 = [1 : 0]$, $1 = [1, 1]$ et $\infty = [0 : 1]$. On identifie $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$ avec $\mathbb{P}_k^1 - \{\infty\}$ de la manière usuelle.

Soient $V \subset X \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ des ouverts quasi-compacts. Lorsque V est contenu dans l'intérieur de X relativement à $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$, on écrira simplement $V \Subset X$ au lieu de $V \Subset_{(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}} X$ (voir la proposition 2.1.13). On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3.13. — *Tous les ouverts quasi-compacts stricts de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ sont des ouverts affinoïdes presque rationnels.*

Démonstration. — Soit U un ouvert quasi-compact strict de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$. On montrera que U est affinoïde et presque rationnel en deux étapes.

Étape 1 : Soit l/k une extension finie galoisienne de groupe de Galois G . On suppose que l'ouvert $U \widehat{\otimes}_k l$ de $(\mathbb{P}_l^1)^{\text{an}}$ est affinoïde et presque rationnel. Nous allons montrer qu'il en est de même de l'ouvert U .

Le fait que U est affinoïde est clair puisque U s'identifie à $(U \widehat{\otimes}_k l)/G$ qui est donné par le spectre maximal de la k -algèbre affinoïde $\Gamma(U \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})^G$. Il reste donc à montrer que U est presque rationnel. Pour cela, on se donne un ouvert affine $V'_1 \subset \mathbb{P}_l^1$ tel que V_1^{an} contient $U \widehat{\otimes}_k l$ et $\Gamma(V'_1, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(U \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})$ est d'image dense. On pose $V' = \bigcap_{g \in G} gV'_1$. On a encore une inclusion $U \widehat{\otimes}_k l \subset V'^{\text{an}}$ et $\Gamma(V', \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(U \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})$ est d'image dense. Comme V' est invariant par l'action de G , il existe un ouvert affine $V \subset \mathbb{P}_k^1$ tel que $V' = V \widehat{\otimes}_k l$. On a clairement $U \subset V^{\text{an}}$. Nous allons montrer que $\Gamma(V, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$ est d'image dense.

Soit $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$. Comme l/k est une extension séparable, le morphisme trace

$$\text{tr} : \Gamma(U \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}),$$

qui à $a \in \Gamma(U \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})$ associe $\sum_{g \in G} a \circ g^{-1}$, est surjectif. On peut donc trouver $a \in \Gamma(U \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})$ tel que $f = \sum_{g \in G} a \circ g^{-1}$. Pour $\epsilon > 0$, soit $a_\epsilon \in \Gamma(V \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})$ tel que $|a - a_\epsilon|_\infty \leq \epsilon$. On pose $f_\epsilon = \sum_{g \in G} a_\epsilon \circ g^{-1} \in \Gamma(V, \mathcal{O})$. L'inégalité triangulaire ultramétrique nous donne $|f - f_\epsilon|_\infty \leq \epsilon$. Ceci montre que l'image de $\Gamma(V, \mathcal{O})$ est dense dans $\Gamma(U, \mathcal{O})$.

Étape 2 : Par l'étape précédente, on peut remplacer U par $U \widehat{\otimes}_k l$ pour n'importe quelle extension finie séparable l/k . Comme U est un ouvert quasi-compact et strict, il existe des points fermés dans $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - U$ à corps résiduel séparable sur k . (En effet, toute k -variété rigide lisse non vide, en l'occurrence l'ouvert admissible $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - U \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$, possède des points fermés à corps résiduel séparable sur k .) Quitte à étendre les scalaires suivant une extension séparable l/k suffisamment grande, on peut donc supposer que $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - U$ contient des points k -rationnels. Quitte à remplacer U par son image par un automorphisme de \mathbb{P}_k^1 , on peut même supposer que $\infty \in (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - U$, ce qui revient à dire que $U \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Grâce au corollaire 2.1.3, on peut alors supposer (quitte à étendre les scalaires encore une fois) que

$$U = \prod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) - \left(\prod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_k^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right) \right)$$

où les o_α et x_β sont dans $\mathbb{A}^1(k) = k$ et vérifient $|o_\alpha - x_\beta| \leq R_\alpha$, si $\beta \in J_\alpha$, et $|x_\beta - x_{\beta'}| \geq \max(r_\beta, r_{\beta'})$, si $\beta \neq \beta'$ dans J_α . Ceci montre en particulier que U est affinoïde.

Pour démontrer que U est presque rationnel, nous raisonnons par récurrence sur le nombre de composantes connexes de U , i.e., sur le cardinal de I . On divise l'argument en sous-étapes.

Sous-étape 2.1 : On traite ici le cas où U est connexe. Dans ce cas, on a :

$$U = \mathbb{B}_k^1(o, R) - \left(\prod_{\beta \in J} \mathbb{B}_k^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right).$$

On peut alors écrire $U = \bigcap_{\beta \in J} U_\beta$ avec $U_\beta = \mathbb{B}_k^1(o, R) - \mathbb{B}_k^1(x_\beta, r_\beta)^\circ$. Or, chacun des U_β est presque rationnel. En effet, il est contenu dans l'analytifié de l'ouvert Zariski $\mathbb{A}_k^1 - \{x_\beta\}$ et la k -algèbre $k[t, (t - x_\beta)^{-1}]$ est dense dans $\Gamma(U_\beta, \mathcal{O})$. Le résultat recherché découle maintenant du lemme 2.3.2.

Sous-étape 2.2 : À partir de maintenant on suppose que U possède au moins deux composantes connexes, i.e., que $\text{card}(I) \geq 2$. Le but de cette sous-étape est de se ramener au cas où l'enveloppe localement convexe U^\natural (avec U vu comme ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$) admet, elle aussi, au moins deux composantes connexes. (Pour la notion de convexité, voir la définition 2.1.4.)

On suppose donc que U^\natural est connexe et on explique comment modifier U afin de rendre U^\natural non connexe. Il est facile de voir que U^\natural est connexe si et seulement si il existe $\bar{\alpha} \in I$ tel que $\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) \subset \mathbb{B}_k^1(o_{\bar{\alpha}}, R_{\bar{\alpha}})$ pour tout $\alpha \in I$. Notons $I' = I - \{\bar{\alpha}\}$. Alors, pour tout $\alpha \in I'$, il existe un unique $\beta_\alpha \in J_{\bar{\alpha}}$ tel que $\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) \subset \mathbb{B}_k^1(x_{\beta_\alpha}, r_{\beta_\alpha})^\circ$.

À présent, fixons un indice $\bar{\beta} \in J_{\bar{\alpha}}$ tel que l'ensemble

$$I'' = \{\alpha \in I'; \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) \subset \mathbb{B}_k^1(x_{\bar{\beta}}, r_{\bar{\beta}})^\circ\}$$

est non vide. (Un tel $\bar{\beta}$ existe car I' est non vide.) Puisque l'ouvert $\mathbb{B}_k^1(x_{\bar{\beta}}, r_{\bar{\beta}})^\circ$ n'est pas quasi-compact, l'inclusion $\bigcup_{\alpha \in I''} \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) \subset \mathbb{B}_k^1(x_{\bar{\beta}}, r_{\bar{\beta}})^\circ$ est nécessairement stricte. Quitte à étendre les scalaires une nouvelle fois et ensuite appliquer une translation à U , on peut supposer que le zéro $o \in (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ appartient à

$$\mathbb{B}_k^1(x_{\bar{\beta}}, r_{\bar{\beta}})^\circ - \bigcup_{\alpha \in I''} \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha).$$

Considérons l'inversion τ sur $\mathbb{A}_k^1 - o = \mathbb{G}_{m,k}$, i.e., l'automorphisme donné sur les points k -rationnels par $\tau(x) = x^{-1}$. Remarquons que $o \notin U$. On peut donc appliquer τ à U et obtenir un nouvel ouvert quasi-compact $\tau(U)$ de $(\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}}$. Nous allons montrer que l'enveloppe localement convexe de $\tau(U)$ n'est pas connexe. Cela établira la réduction recherchée.

Remarquons que $\mathbb{B}_k^1(o_{\bar{\alpha}}, R_{\bar{\alpha}}) - \mathbb{B}_k^1(x_{\bar{\beta}}, r_{\bar{\beta}})^\circ = \mathbb{B}_k^1(o, R_{\bar{\alpha}}) - \mathbb{B}_k^1(o, r_{\bar{\beta}})^\circ$. Ainsi, on a l'égalité

$$\tau(\mathbb{B}_k^1(o_{\bar{\alpha}}, R_{\bar{\alpha}}) - \mathbb{B}_k^1(x_{\bar{\beta}}, r_{\bar{\beta}})^\circ) = \mathbb{B}_k^1(o, r_{\bar{\beta}}^{-1}) - \mathbb{B}_k^1(o, R_{\bar{\alpha}}^{-1})^\circ.$$

De plus, pour $\alpha \notin I''$, τ envoie l'ouvert $\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) - \prod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_k^1(x_\beta, r_\beta)^\circ$ sur un ouvert contenu dans la couronne $\mathbb{B}_k^1(o, r_{\bar{\beta}}^{-1}) - \mathbb{B}_k^1(o, R_{\bar{\alpha}}^{-1})^\circ$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que τ envoie chaque boule $\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha)$, avec $\alpha \in I''$, sur une boule contenue dans le complémentaire de la boule $\mathbb{B}_k^1(o, r_{\bar{\beta}}^{-1})$. Or, il est facile de vérifier que

$$\tau(\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha)) = \mathbb{B}_k^1\left(o_\alpha^{-1}, \frac{R_\alpha}{|o_\alpha|^2}\right).$$

Le résultat découle maintenant des inégalités $R_\alpha < |o_\alpha| < r_{\bar{\beta}}$. (La première inégalité traduit le fait que $o \notin \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha)$ et la seconde inégalité traduit l'inclusion $\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) \subset \mathbb{B}_k^1(x_{\bar{\beta}}, r_{\bar{\beta}})^\circ$.)

Sous-étape 2.3 : Grâce à la sous-étape 2.2, il suffit de traiter le cas où U^\natural possède au moins deux composantes connexes. Il existe un sous-ensemble $I^+ \subset I$ tel que

$$U^\natural = \coprod_{\alpha \in I^+} \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha).$$

Les éléments de I^+ correspondent aux boules maximales (pour l'inclusion) parmi les $\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha)$.

Soit o un point quelconque de $\mathbb{A}^1(k)$ (par exemple le zéro de la droite affine) et soit $R \in |k^\times|$ suffisamment grand de sorte que U^\natural soit contenu dans $\mathbb{B}_k^1(o, R)$. On pose

$$W = \left(\mathbb{B}_k^1(o, R) - \coprod_{\alpha \in I^+, \beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_k^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right) \coprod \left(\coprod_{\alpha \in I - I^+} \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha) - \left(\coprod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_k^1(x_\beta, r_\beta)^\circ \right) \right).$$

Il est immédiat que $U = U^\natural \cap W$. Grâce au lemme 2.3.2, il est donc suffisant de montrer que U^\natural et W sont presque rationnels. Or, il est clair que W possède strictement moins de composantes connexes que U ; il est donc presque rationnel par l'hypothèse de récurrence. Pour terminer, il reste à traiter le cas où U est localement convexe, ce qui sera fait dans la sous-étape suivante.

Sous-étape 2.4 : Cette sous-étape est indépendante des trois précédentes. Ici, on traite le cas où $U = U^\natural$, i.e., $U = \coprod_{\alpha \in I} \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha)$. Pour montrer que U est presque rationnel, on vérifiera une propriété plus précise. En effet, on montrera que $k[t]$ est dense dans $\Gamma(U, \mathcal{O})$. On raisonne par récurrence sur le cardinal de I . (Il s'agit là d'une nouvelle récurrence, indépendante de la récurrence précédente.)

Lorsque I est un singleton, il n'y a rien à montrer. On suppose donc que I contient au moins deux éléments. On note $m = \min_{\alpha \neq \alpha'} |o_\alpha - o_{\alpha'}|$ et on fixe un couple $(\gamma, \gamma') \in I^2$ qui réalise ce minimum.

On pose $U' = U \cup \mathbb{B}_k^1(o_\gamma, m)$. L'ouvert U' est encore localement convexe et il contient strictement moins de composantes connexes que U . Par l'hypothèse de récurrence, $k[t] \subset \Gamma(U', \mathcal{O})$ est dense. Remarquons que $U'_0 = \mathbb{B}_k^1(o_\gamma, m)$ est une composante connexe de U' ; c'est la composante connexe qui contient o_γ . On pose $U'_1 = U' - U'_0$. On a la décomposition suivante

$$\Gamma(U', \mathcal{O}) = \Gamma(U'_0, \mathcal{O}) \times \Gamma(U'_1, \mathcal{O}).$$

Notons aussi $U_i = U'_i \cap U$ pour $i \in \{0, 1\}$. On a de même

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \Gamma(U_0, \mathcal{O}) \times \Gamma(U_1, \mathcal{O}).$$

Étant donné que $U'_1 = U_1$ et que $k[t]$ est dense dans $\Gamma(U, \mathcal{O})$, on obtient le résultat recherché si on montre que $\Gamma(U'_0, \mathcal{O})$ est dense dans $\Gamma(U_0, \mathcal{O})$. Puisque $k[t]$ est dense dans $\Gamma(U'_0, \mathcal{O})$, il revient au même de montrer que $k[t]$ est dense dans $\Gamma(U_0, \mathcal{O})$.

Lorsque l'ouvert U_0 est strictement inclus dans U , on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure. On peut donc supposer que $U = U_0$. Autrement dit, il nous reste à traiter le cas où $|o_\alpha - o_{\alpha'}| = m$ pour tout $\alpha \neq \alpha'$. Soit $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$ tel que

$R_\alpha < \lambda < m$ pour tout $\alpha \in I$. On pose $T = \prod_{\alpha \in I} \mathbb{B}_k^1(o_\alpha, \lambda)$. Alors T est le domaine rationnel de $\mathbb{B}_k^1(o, R)$, avec $R \geq m$, défini par l'inéquation

$$\left| \prod_{\alpha \in I} (t - o_\alpha) \right| \leq \lambda m^{|I|-1}.$$

L'anneau $\Gamma(T, \mathcal{O})$ s'identifie alors à la k -algèbre affinoïde

$$\frac{k\{R^{-1}t, (\lambda m^{|I|-1})^{-1}z\}}{z - \prod_{\alpha \in I} (t - o_\alpha)}.$$

Il s'ensuit que $k[t] \simeq k[t, z]/(z - \prod_{\alpha \in I} (t - o_\alpha))$ est dense dans $\Gamma(T, \mathcal{O})$. Pour terminer, il suffit de remarquer que $\Gamma(T, \mathcal{O}) = \prod_{\alpha} \Gamma(\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, \lambda), \mathcal{O})$ est dense dans $\Gamma(U, \mathcal{O}) = \prod_{\alpha} \Gamma(\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha), \mathcal{O})$ puisque, pour chaque $\alpha \in I$, le sous-anneau $\Gamma(\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, \lambda), \mathcal{O})$ est dense dans $\Gamma(\mathbb{B}_k^1(o_\alpha, R_\alpha), \mathcal{O})$. Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Définition 2.3.14. — Soient $X_0 \subset X \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ des ouverts affinoïdes. On dit que l'ouvert affinoïde X_0 est large dans X , et on écrit $X_0 \sqsubset X$, s'il existe un ouvert affinoïde $V \Subset X$ tel que $X = X_0 \cup V$.

Proposition 2.3.15. — Soit $X \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert affinoïde et soit $X_0 \sqsubset X$ un ouvert affinoïde large dans X . On suppose qu'il existe un 0-cycle dans \mathbb{P}_k^1 de degré 1 et à support disjoint de X . Alors, l'inclusion $X_0 \hookrightarrow X$ admet une section dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & X_0 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X. \end{array}$$

Plus précisément, soit $V \Subset X$ tel que $X = X_0 \cup V$ et notons $\mathcal{I}(\Delta)$ l'idéal de définition du graphe $\Delta \subset X \widehat{\times}_k (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ de l'inclusion $X \hookrightarrow (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$. Alors, une trivialisaton de $\mathcal{I}(\Delta)$ au-dessus de $X \widehat{\times}_k V$ détermine une telle section.

Démonstration. — D'après le lemme 2.3.13, tout ouvert quasi-compact strict de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ est affinoïde et presque rationnel. Il vient que \mathbb{P}_k^1 est une bonne compactification de tous ses ouverts stricts non vides. Notons j l'inclusion de X_0 dans X . On dispose d'un diagramme commutatif de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0 \mathbf{Cor}(X, X_0) & \xlongequal{\quad} & \pi_0 \mathbf{Cor}_X(X, X \widehat{\times}_k X_0) & \xrightarrow{\text{cl}} & \text{Pic}_{X \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}(X \widehat{\times}_k X_0) \\ j \circ - \downarrow & & j \circ - \downarrow & & \downarrow j_* \\ \pi_0 \mathbf{Cor}(X, X) & \xlongequal{\quad} & \pi_0 \mathbf{Cor}_X(X, X \widehat{\times}_k X) & \xrightarrow{\text{cl}} & \text{Pic}_{X \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}(X \widehat{\times}_k X). \end{array}$$

Il s'agit de construire une correspondance finie $\alpha \in \pi_0 \mathbf{Cor}_X(X, X \widehat{\times}_k X_0)$ telle que $j \circ \alpha = [\text{id}_X]$. Il suffit pour cela de construire $\beta \in \text{Pic}_{X \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}(X \widehat{\times}_k X_0)$ tel que $j_*(\beta) = \text{cl}[\text{id}_X]$. On fera cela en deux étapes.

Étape 1 : Soit $U \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert affinoïde tel que $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} = X \cup U$ et $V \cap U = \emptyset$. (Un tel U existe car $V \Subset X$.) Dans cette étape, nous allons construire un voisinage affinoïde

$U' \subset X \widehat{\times}_k U$ de $X \widehat{\times}_k ((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - X)$ ne rencontrant pas la diagonale $\Delta \subset X \widehat{\times}_k X$ et tel que $X \widehat{\times}_k V \amalg U'$ est presque rationnel.

On note $Z = (X \widehat{\times}_k U) \cap \Delta$. Rappelons que l'idéal de définition de la diagonale de $\mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1$ est isomorphe, en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1}$ -module, au produit extérieur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1) \boxtimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1)$. Puisque X (resp. U) est un ouvert strict, une puissance suffisamment divisible de la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1)$ à X (resp. U) est libre. (En effet, on peut écrire $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1))^{\otimes [k(x):k]} \simeq \mathcal{I}(x)$ avec x un point fermé de \mathbb{P}_k^1 qui n'appartient pas à X (resp. U) et $\mathcal{I}(x)$ son idéal de définition.) Il s'ensuit qu'une puissance suffisamment divisible de $\mathcal{I}(Z)$ est un idéal principal. Il existe donc $g \in \Gamma(X \widehat{\times}_k U, \mathcal{O})$ tel que $Z = ((X \widehat{\times}_k U)/(g))_{\text{red}}$. D'après le lemme 2.3.10, pour $\epsilon \in |k^\times|$ suffisamment petit, on a $D_{X \widehat{\times}_k U}(\epsilon|g) \subset X \widehat{\times}_k (X \cap U)$. Il s'ensuit que $U' = D_{X \widehat{\times}_k U}(g|\epsilon)$ est un voisinage affinoïde de $X \widehat{\times}_k ((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - X)$ ne rencontrant pas la diagonale $\Delta \subset X \widehat{\times}_k X$.

Il reste à voir que $X \widehat{\times}_k V \amalg U'$ est presque rationnel. D'après le lemme 2.3.13, on sait que $X \widehat{\times}_k (V \amalg U)$ est presque rationnel. On peut donc trouver un ouvert Zariski affine $W \subset X \times_k \mathbb{P}_k^1$ avec W^{an} contenant $X \widehat{\times}_k (V \amalg U)$ et tel que le morphisme $\Gamma(W, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X \widehat{\times}_k (V \amalg U), \mathcal{O})$ est d'image dense. En particulier, on peut trouver $h \in \Gamma(W, \mathcal{O})$ tel que $|h|_{X \widehat{\times}_k V} - 1|_\infty < 1$ et $|h|_{X \widehat{\times}_k U} - g|_\infty < \epsilon$. On a alors

$$X \widehat{\times}_k V \amalg U' = D_{X \widehat{\times}_k (V \amalg U)}(h|\epsilon).$$

(Bien entendu, pour que l'égalité ci-dessus soit vraie, il faut que $\epsilon < 1$.) Ceci montre que l'analytifié de l'ouvert affine $W' = W[1/h]$ contient $X \widehat{\times}_k V \amalg U'$ et que le morphisme $\Gamma(W', \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X \widehat{\times}_k V \amalg U', \mathcal{O})$ est d'image dense.

Étape 2 : Puisque $X \widehat{\times}_k V \amalg U'$ est presque rationnel, il en est de même de U' . De plus, U' ne rencontre pas la diagonale $\Delta \subset X \widehat{\times}_k X$. Il s'ensuit que $c\ell[\text{id}_X]$ est représentée par le triplet $(\mathcal{I}(\Delta), U', 1)$ (voir la proposition 2.3.8).

Étant donnée une trivialisations $t : \mathcal{O}_{X \widehat{\times}_k V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(\Delta)|_{X \widehat{\times}_k V}$, on peut considérer l'objet

$$(\mathcal{I}(\Delta), X \widehat{\times}_k V \amalg U', t \amalg 1)$$

de $\text{PIC}_{X \times_k \mathbb{P}_k^1}(X \widehat{\times}_k X_0)$. La classe β de cet objet conviendra clairement. Ainsi, pour conclure, il reste à justifier l'existence de telles trivialisations. Il suffit pour cela de voir que l'idéal $\mathcal{I}(\Delta)|_{X \widehat{\times}_k X}$ est principal.

Comme dans l'étape précédente, on utilise le fait que l'idéal de définition de la diagonale de $\mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1$ est isomorphe, en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1}$ -module, au produit extérieur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1) \boxtimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1)$. Il est donc suffisant de montrer que la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1)$ à X est libre. Ceci découle de la condition que \mathbb{P}_k^1 admet un 0-cycle de degré 1 et à support disjoint de X . En effet, si $\sum_{s=1}^r n_s [x_s]$ est un 0-cycle dans \mathbb{P}_k^1 tel que $\sum_{s=1}^r n_s [k(x_s) : k] = 1$, on a $\bigotimes_{s=1}^r \mathcal{I}(x_s)^{n_s} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(-1)$ (où, bien entendu, $\mathcal{I}(x_s)$ est l'idéal de définition du point fermé x_s). C.Q.F.D.

Le théorème suivant est l'analogie rigide de [29, Lemma 22.4].

Théorème 2.3.16. — Soit $X \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert affinoïde tel que \mathbb{P}_k^1 possède un 0-cycle de degré 1 et à support disjoint de X . Soient $X_0, Y \subset X$ des ouverts affinoïdes tels que $X = X_0 \cup Y$. On pose $Y_0 = X_0 \cap Y$. On suppose que $X_0 \sqsubset X$ et $Y_0 \sqsubset Y$. Alors le complexe de Mayer-Vietoris

$$(2.55) \quad Y_0 \longrightarrow X_0 \oplus Y \longrightarrow X$$

est contractile dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$.

Démonstration. — La preuve consiste à construire une homotopie entre l'identité et le morphisme nul. Cette homotopie aura la forme

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}} & X_0 \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \end{pmatrix}} & X \\ & \searrow (p \ b) & & & \nearrow \\ Y_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}} & X_0 \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}} & X \end{array}$$

avec i_1, i_2, j_1 et j_2 les inclusions évidentes, et a, b et p des correspondances finies à homotopie près qui seront définies ci-dessous. Les relations à vérifier sont (en notations matricielles) les suivantes :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} (p \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (p \ b) \begin{pmatrix} -i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Elles s'écrivent respectivement

$$j_1 \circ a = 1, \quad \begin{pmatrix} a \circ j_1 - i_1 \circ p & a \circ j_2 - i_1 \circ b \\ i_2 \circ p & i_2 \circ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -p \circ i_1 + b \circ i_2 = 1.$$

On prendra pour a la section à j_1 construite dans la proposition 2.3.15. Rappelons la construction de a . Soit $W \Subset X$ un ouvert affinoïde tel que $X = X_0 \cup W$. Fixons $U \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert affinoïde tel que $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} = X \cup U$ et $W \cap U = \emptyset$. Soit $U' \subset X \widehat{\times}_k U$ un voisinage affinoïde de $X \widehat{\times}_k ((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - X)$ ne rencontrant pas la diagonale $\Delta \subset X \widehat{\times}_k X$ et tel que $X \widehat{\times}_k W \amalg U'$ est presque rationnel. (L'existence d'un tel U' a été démontrée dans la première étape de la preuve de la proposition 2.3.15.) Soit enfin $t : \mathcal{O}_{X \widehat{\times}_k W} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\Delta)|_{X \widehat{\times}_k W}$ une trivialisat on locale de l'id al $\mathcal{S}(\Delta)$ du graphe de l'inclusion $X \hookrightarrow (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$. On pose alors

$$a = cl^{-1} \left(\mathcal{S}(\Delta), X \widehat{\times}_k W \amalg U', t \amalg 1 \right) \in \pi_0 \mathbf{Cor}_X(X, X \widehat{\times}_k X_0).$$

Remarquons que $Y - Y_0 = X - X_0 \subset W$. Par hypoth ese, on a $Y_0 \sqsubset Y$. Ainsi, quitte   retr ecir W , on peut  galement supposer que $W \Subset Y$. Fixons $V \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert affino ide tel que $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} = Y \cup V$ et $W \cap V = \emptyset$. Soit $V' \subset Y \widehat{\times}_k V$ un voisinage affino ide de $Y \widehat{\times}_k ((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - Y)$ ne rencontrant pas la diagonale $\Delta \subset Y \widehat{\times}_k Y$ et tel que

$Y \widehat{\times}_k W \coprod V'$ est presque rationnel. (L'existence d'un tel V' a été démontrée dans la première étape de la preuve de la proposition 2.3.15.) On pose alors

$$b = cl^{-1}\left(\mathcal{S}(\Delta)_{|Y \widehat{\times}_k (\mathbb{P}_k^1)^{an}}, Y \widehat{\times}_k W \coprod V', t_{|Y \widehat{\times}_k W} \coprod 1\right) \in \pi_0 \mathbf{Cor}_Y(Y, Y \widehat{\times}_k Y_0).$$

Pour ces choix de a et b , le carré

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{b} & Y_0 \\ j_2 \downarrow & & \downarrow i_1 \\ X & \xrightarrow{a} & X_0 \end{array}$$

commute. En effet, les deux compositions possibles dans ce carré sont données par

$$cl^{-1}\left(\mathcal{S}(\Delta)_{|Y \widehat{\times}_k (\mathbb{P}_k^1)^{an}}, Y \widehat{\times}_k W \coprod Y \widehat{\times}_X U', t_{|Y \widehat{\times}_k W} \coprod 1\right) \in \pi_0 \mathbf{Cor}_Y(Y, Y \widehat{\times}_k X_0).$$

On a donc les relations $j_1 \circ a = 1$, $i_2 \circ b = 1$ et $a \circ j_2 - i_1 \circ b = 0$. Il nous reste à construire une correspondance finie p telle que

$$i_2 \circ p = 0, \quad i_1 \circ p = a \circ j_1 - 1 \quad \text{et} \quad p \circ i_1 = b \circ i_2 - 1.$$

Les deux dernières relations se traduisent par la commutation du diagramme suivant

$$(2.56) \quad \begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{b \circ i_2 - 1} & Y_0 \\ i_1 \downarrow & \nearrow p & \downarrow i_1 \\ X_0 & \xrightarrow{a \circ j_1 - 1} & X_0. \end{array}$$

Pour construire un tel p , on calculera d'abord les images des correspondances finies $a \circ j_1 - 1$ et $b \circ i_2 - 1$ dans les groupes de Picard relatifs rendus invariants par homotopie. On a

$$cl(a \circ j_1) = \left(\mathcal{S}(\Delta)_{|X_0 \widehat{\times}_k (\mathbb{P}_k^1)^{an}}, X_0 \widehat{\times}_k W \coprod X_0 \widehat{\times}_X U', t_{|X_0 \widehat{\times}_k W} \coprod 1\right) \in \text{Pic}_{X_0 \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}(X_0, X_0 \widehat{\times}_k X_0).$$

Soit $W' \subset X_0 \widehat{\times}_k W$ un voisinage affinoïde de $X_0 \widehat{\times}_k (X - X_0)$ ne rencontrant pas la diagonale $\Delta \subset X_0 \widehat{\times}_k X_0$ et tel que $W' \coprod X_0 \widehat{\times}_k V$ est presque rationnel. (L'existence d'un tel W' a été démontrée dans la première étape de la preuve de la proposition 2.3.15.) Remarquons que la stabilité par intersection et changement de base entraîne que les ouverts $W' \coprod X_0 \widehat{\times}_X U'$ et $Y_0 \widehat{\times}_Y W' \coprod Y_0 \widehat{\times}_Y V'$ sont également presque rationnels. (Pour le premier ouvert, on a supposé que $U \subset V$ ce qui est clairement loisible.) Alors $\mathcal{S}(\Delta)$ admet une trivialisaton canonique au-dessus de W' et on peut voir $t_{|W'}$ comme une fonction inversible sur W' . On obtient donc

$$cl(a \circ j_1 - 1) = \left(\mathcal{O}, W' \coprod X_0 \widehat{\times}_X U', t_{|W'} \coprod 1\right) = \left(\mathcal{O}, W' \coprod X_0 \widehat{\times}_k U, t_{|W'} \coprod 1\right).$$

Un calcul similaire montre que

$$\begin{aligned} cl(b \circ i_2 - 1) &= \left(\mathcal{O}, Y_0 \widehat{\times}_{X_0} W' \amalg Y_0 \widehat{\times}_Y V', t_{|Y_0 \widehat{\times}_{X_0} W'} \amalg 1 \right) \\ &= \left(\mathcal{O}, Y_0 \widehat{\times}_{X_0} W' \amalg Y_0 \widehat{\times}_k V, t_{|Y_0 \widehat{\times}_{X_0} W'} \amalg 1 \right). \end{aligned}$$

On prendra alors pour p la correspondance finie $cl^{-1}(\mathcal{O}, W' \amalg X_0 \widehat{\times}_k V, t_{|W'} \amalg 1)$. La commutation du diagramme (2.56) est claire ainsi que la relation $i_2 \circ p = 0$. C.Q.F.D.

Proposition 2.3.17. — *Soient $X \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ un ouvert quasi-compact strict. On suppose donnés des sous-affinoïdes*

$$Z \subset B' \subset B \subset X$$

tels que les conditions suivantes sont satisfaites.

- *Le sous-affinoïde Z est étale au-dessus de $\text{Spm}(k)$. (En particulier, il est fermé dans X , réduit et de dimension nulle.) Les sous-affinoïdes B et B' sont ouverts, quasi-compacts et contenus dans l'intérieur de X (ce qui revient à dire que $B \Subset X$).*
- *Il existe une rétraction $q : B \rightarrow Z$ (à l'inclusion évidente) qui fait de B et B' des boules de Tate relatives au-dessus de Z . On note alors $B^\circ \subset B$ et $B'^\circ \subset B'$ les plus grandes boules ouvertes relatives de centre Z .*
- *Si k est d'égale caractéristique nulle, alors \mathbb{P}_k^1 possède un 0-cycle de degré 1 et à support disjoint de $X - B^\circ$. Si la caractéristique résiduelle de k est non nulle, alors \mathbb{P}_k^1 possède un point k -rationnel n'appartenant pas à X .*

Alors, l'inclusion $X - B^\circ \hookrightarrow X - B'^\circ$ induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$.

Démonstration. — On divise la preuve en plusieurs parties. Dans la partie A, on utilisera la théorème 2.3.16 pour se ramener au cas où X est contenu dans $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. La preuve dans ce cas occupe les parties B, C et D.

Partie A : Le but de cette partie est de se ramener au cas où $X \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Montrons que l'une (au moins) des hypothèses suivantes est nécessairement satisfaite :

- (a) $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - X$ possède des points k -rationnels,
- (b) $X - B$ possède des points k -rationnels,
- (c) Z possède au moins deux points k -rationnels.

Lorsque la caractéristique résiduelle de k est non nulle, l'hypothèse (a) a été imposée dans l'énoncé. On peut donc supposer que k est d'égale caractéristique nulle. Supposons que ni l'hypothèse (a) ni l'hypothèse (b) n'est vérifiée. Alors, tous les points k -rationnels de \mathbb{P}_k^1 sont dans B . En fait, on a mieux : tous les points k -rationnels de \mathbb{P}_k^1 sont dans $q^{-1}(Z(k))$ qui est une somme disjointe de boules de Tate centrées en les points k -rationnels de Z . Pour montrer que l'hypothèse (c) est vérifiée, il suffit alors de montrer qu'il faut au moins deux boules de Tate pour contenir tous les points k -rationnels de \mathbb{P}_k^1 . Voici un argument : soit $B_0 \subset \mathbb{P}_k^1$ une boule de Tate et montrons

que l'ouvert admissible $\mathbb{P}_k^1 - B_0$ possède au moins un point k -rationnel. On peut supposer que $\infty \in B_0$ car sinon il n'y a rien à démontrer. Il s'ensuit que $\mathbb{P}_k^1 - B_0$ est contenu dans $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. De plus, il existe une extension finie galoisienne l/k telle que $(\mathbb{P}_k^1 - B_0) \widehat{\otimes}_k l$ est une boule de Tate ouverte, i.e., $(\mathbb{P}_k^1 - B_0) \widehat{\otimes}_k l \simeq \mathbb{B}_l^1(z_0, \lambda)^\circ$. On vérifie alors, comme dans la preuve de la proposition 2.1.5, que $[l : k]^{-1} \sum_{g \in \text{Gal}(l/k)} g \cdot z_0$ est encore dans $\mathbb{B}_l^1(z_0, \lambda)^\circ$ et qu'il descend en un point k -rationnel de $\mathbb{P}_k^1 - B_0$. (Notons que cet argument requiert que k est d'égal caractéristique nulle.)

Rappelons que le but dans cette partie consiste à se ramener au cas $X \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Si l'hypothèse (a) est satisfaite, on peut (sans altérer le contenu de l'énoncé) remplacer X par son image par un automorphisme de \mathbb{P}_k^1 pour avoir $\infty \notin X$ comme souhaité. Dans la suite, nous allons montrer comment ramener la proposition sous l'hypothèse (b) ou (c) à la proposition sous l'hypothèse (a).

On traite d'abord le cas de figure (b). Supposons donc que $X - B$ possède un point k -rationnel. Quitte à remplacer X par son image par un automorphisme de \mathbb{P}_k^1 , on peut supposer que $o \in X - B$, avec o le zéro de \mathbb{A}_k^1 . Pour $\epsilon \in |k^\times|$ suffisamment petit, on a $\mathbb{B}_k^1(o, \epsilon) \Subset X - B^\circ$ et $B \Subset X - \mathbb{B}_k^1(o, \epsilon)^\circ$. Notons $X_0 = X - \mathbb{B}_k^1(o, \epsilon')^\circ$ et $Y = \mathbb{B}_k^1(o, \epsilon)$ avec $0 < \epsilon' < \epsilon$ suffisamment petits. Alors, les conditions d'application du théorème 2.3.16 sont satisfaites pour les recouvrements

$$X - B^\circ = (X_0 - B^\circ) \cup Y \quad \text{et} \quad X - B'^\circ = (X_0 - B'^\circ) \cup Y.$$

(Noter que le complémentaire de $X - B'^\circ$ possède, lui aussi, un 0-cycle de degré 1. En effet, le p.g.c.d. des degrés des points fermés de B° est égal au p.g.c.d. des degrés des points de Z qui est aussi égal au p.g.c.d. des degrés des points fermés de B'° .) En posant $Y_0 = \text{Cr}_k^1(o, \epsilon', \epsilon) = \mathbb{B}_k^1(o, \epsilon) - \mathbb{B}_k^1(o, \epsilon')^\circ$, on a donc un morphisme de suites exactes scindées dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & (X_0 - B^\circ) \oplus Y & \longrightarrow & X - B^\circ \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & (X_0 - B'^\circ) \oplus Y & \longrightarrow & X - B'^\circ \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ceci montre qu'il est suffisant de démontrer la proposition dans le cas de X_0 (i.e., que $X_0 - B^\circ \hookrightarrow X_0 - B'^\circ$ induit un isomorphisme dans $\mathbf{RigCor}(k)$). Or, par construction, on a $o \notin X_0$ et on peut travailler sous l'hypothèse (a).

On passe maintenant au cas de figure (c). Supposons donc $Z(k)$ contient au moins deux éléments. Quitte à remplacer X par son image par un automorphisme de \mathbb{P}_k^1 , on peut supposer que $o \in Z$, avec o le zéro de \mathbb{A}_k^1 . La composante connexe de B (resp. B') contenant o est une boule de Tate $\mathbb{B}_k^1(o, u)$ (resp. $\mathbb{B}_k^1(o, u')$). On pose $B_1 = B - \mathbb{B}_k^1(o, u)$ et $B'_1 = B' - \mathbb{B}_k^1(o, u')$. On peut alors factoriser l'inclusion $X - B^\circ \hookrightarrow X - B'^\circ$ de la manière suivante

$$(X - \mathbb{B}_k^1(o, u)^\circ) - B_1^\circ \hookrightarrow (X - \mathbb{B}_k^1(o, u)^\circ) - B_1'^\circ \hookrightarrow (X - \mathbb{B}_k^1(o, u')^\circ) - B_1'^\circ.$$

Il est donc suffisant de montrer que chacune des inclusions ci-dessus induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$. Or, la première inclusion est du même type que celle considérée dans l'énoncé. De plus, le complémentaire de $X - \mathbb{B}_k^1(o, u)^\circ$ dans $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ possède un point k -rationnel, à savoir o . L'hypothèse (a) est donc satisfaite dans ce cas.

À présent, il reste à traiter l'inclusion

$$Q_0 = (X - \mathbb{B}_k^1(o, u)^\circ) - B_1^\circ \hookrightarrow Q'_0 = (X - \mathbb{B}_k^1(o, u')^\circ) - B_1^\circ.$$

On pose

$$Q = Q_0 \cup \mathbb{B}_k^1(o, u) = Q'_0 \cup \mathbb{B}_k^1(o, u') = X - B_1^\circ.$$

De l'hypothèse $B \in X$, on déduit que $\mathbb{B}_k^1(o, u) \in Q$. On peut donc trouver $v \in \sqrt{|k^\times|}$, avec $v > u$, tel que $\mathbb{B}_k^1(o, v) \in Q$. Remarquons que $\mathbb{B}_k^1(o, v) \cap Q_0 = \text{Cr}_k^1(o, u, v)$ et $\mathbb{B}_k^1(o, v) \cap Q'_0 = \text{Cr}_k^1(o, u', v)$. Les recouvrements $Q = Q_0 \cup \mathbb{B}_k^1(o, v) = Q'_0 \cup \mathbb{B}_k^1(o, v)$ vérifient les conditions d'application du théorème 2.3.16. (Le fait que $Z(k) - o$ soit non vide assure que le complémentaire de Q possède un point k -rationnel et supporte donc un 0-cycle de degré 1.) Il s'ensuit un morphisme de suites exactes scindées

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Cr}_k^1(o, u, v) & \longrightarrow & Q_0 \oplus \mathbb{B}_k^1(o, v) & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Cr}_k^1(o, u', v) & \longrightarrow & Q'_0 \oplus \mathbb{B}_k^1(o, v) & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0. \end{array}$$

Il est donc suffisant de montrer que la première flèche verticale induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$. Or, l'inclusion $\text{Cr}_k^1(o, u, v) \hookrightarrow \text{Cr}_k^1(o, u', v)$ est du même type que celle considérée dans l'énoncé avec $X = \mathbb{B}_k^1(o, v)$, $B = \mathbb{B}_k^1(o, u)$ et $B' = \mathbb{B}_k^1(o, u')$. Ceci permet de conclure.

À partir de maintenant, on suppose que $X \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. Dans le reste de la preuve, l/k désignera une extension finie séparable qui contient une extension galoisienne engendrée par les corps résiduels des points de Z . Pour une telle extension l/k , on peut écrire

$$B \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{z \in Z(l)} \mathbb{B}_l^1(z, r_z) \quad \text{et} \quad B' \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{z \in Z(l)} \mathbb{B}_l^1(z, r'_z),$$

avec $r_z, r'_z \in \sqrt{|k^\times|}$. Bien évidemment, on a aussi :

$$B^\circ \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{z \in Z(l)} \mathbb{B}_l^1(z, r_z)^\circ \quad \text{et} \quad B'^\circ \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{z \in Z(l)} \mathbb{B}_l^1(z, r'_z)^\circ.$$

Partie B : Soit U un voisinage quasi-compact de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - X$ disjoint de B . (Un tel ouvert U existe car $B \in X$.) On a alors :

$$X \cup U = (X - B^\circ) \cup (B \coprod U) = (X - B'^\circ) \cup (B' \coprod U) = (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}.$$

D'après le lemme 2.3.13, les ouverts U , $B \coprod U$ et $B' \coprod U$ sont affinoïdes et presque rationnels. (En particulier, \mathbb{P}_k^1 est une bonne compactification de X , $X - B^\circ$ et $X - B'^\circ$, mais on le savait déjà.)

Notons $j : X - B^\circ \hookrightarrow X - B'^\circ$ l'inclusion évidente. Il s'agit de construire une correspondance finie

$$\alpha \in \mathbf{Cor}(X - B'^\circ, X - B^\circ) = \mathbf{Cor}_{X - B'^\circ}(X - B'^\circ, (X - B'^\circ) \widehat{\times}_k (X - B^\circ))$$

qui soit un inverse à j à homotopie près. On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 \mathbf{Cor}_{X - B^\circ}(X - B^\circ, (X - B^\circ) \widehat{\times}_k (X - B^\circ)) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{cl}} & \text{Pic}_{(X - B^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}((X - B^\circ) \widehat{\times}_k (X - B^\circ)) \\ \uparrow j^* & & \uparrow j^* \\ \pi_0 \mathbf{Cor}_{X - B'^\circ}(X - B'^\circ, (X - B'^\circ) \widehat{\times}_k (X - B^\circ)) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{cl}} & \text{Pic}_{(X - B'^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}((X - B'^\circ) \widehat{\times}_k (X - B^\circ)) \\ \downarrow j \circ - & & \downarrow j_* \\ \pi_0 \mathbf{Cor}_{X - B'^\circ}(X - B'^\circ, (X - B'^\circ) \widehat{\times}_k (X - B'^\circ)) & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{cl}} & \text{Pic}_{(X - B'^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}((X - B'^\circ) \widehat{\times}_k (X - B'^\circ)). \end{array}$$

Les homomorphismes \mathcal{cl} sont inversibles par le théorème 2.3.12. Dire que α est un inverse à j à homotopie près revient à dire que $j^*(\alpha) = [\text{id}_{X - B^\circ}]$ et $j \circ \alpha = [\text{id}_{X - B'^\circ}]$. Il suffit alors de construire

$$\beta \in \text{Pic}_{(X - B'^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}^{\mathbb{B}^1}((X - B'^\circ) \widehat{\times}_k (X - B^\circ))$$

tel que $j^*(\beta) = \mathcal{cl}[\text{id}_{X - B^\circ}]$ et $j_*(\beta) = \mathcal{cl}[\text{id}_{X - B'^\circ}]$.

Partie C : Pour $B'' \in \{B, B'\}$, nous allons décrire un représentant de l'image de l'identité de $X - B''^\circ$ par \mathcal{cl} . (Dans cette partie, tous les objets construits seront désignés avec un «''» puisqu'ils seront relatifs à B'' ; dans la partie D ci-dessous, nous spécialiserons aux cas $B'' = B'$ et $B'' = B$ en remplaçant le «''» par «'» ou par rien.)

On note Δ la diagonale de $\mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1$ et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1}$ son idéal de définition. Comme dans la première étape de la preuve de la proposition 2.3.15, on construit un ouvert affinoïde $V \subset X \widehat{\times}_k U$ contenant $X \widehat{\times}_k ((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - X)$, disjoint de $\Delta^{\text{an}} \cap (X \widehat{\times}_k (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}})$ et tel que $V \coprod X \widehat{\times}_k B'' \subset X \widehat{\times}_k (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ est presque rationnel. (Remarquons que si V convient pour B , il convient aussi pour B' de sorte qu'on peut choisir V indépendamment du choix de B'' .) On note

$$W'' = (X - B''^\circ) \widehat{\times}_X V = ((X - B''^\circ) \widehat{\times}_k (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}) \cap V.$$

Considérons le domaine affinoïde $E'' \subset (X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''$ donné par

$$E''(l) = \coprod_{z \in Z(l)} \{(x_1, x_2); |x_1 - x_2| = |x_1 - z| \text{ et } |x_2 - z| \leq r''_z\}$$

pour toute extension finie l/k (comme ci-dessus) avec x_1 un point l -rationnel de $X - B''^\circ$ et x_2 un point l -rationnel de B'' . Remarquons que l'égalité $|x_1 - x_2| = |x_1 - z|$ entraîne l'inégalité $|x_1 - x_2| \geq r''_z$. (En effet, $|x_1 - z| \geq r''_z$ car x_1 appartient à $X - B''^\circ$.) Ceci montre que E'' ne rencontre pas la diagonale Δ .

Vérifions à présent que E'' contient $(X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''^\circ$. Un point l -rationnel de $(X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''^\circ$ est un couple (x_1, x_2) vérifiant $|x_1 - z| \geq r''_z$ pour tout $z \in Z(l)$ et $|x_2 - z| < r''_z$ pour au moins un $z \in Z(l)$. Or si $|x_2 - z_0| < r''_{z_0}$, avec $z_0 \in Z(l)$, on a $|x_1 - z_0| > |x_2 - z_0|$ ce qui entraîne $|x_1 - x_2| = |x_1 - z_0|$ comme souhaité.

Ainsi, $W'' \coprod E''$ est un voisinage affinoïde de $(X - B''^\circ) \widehat{\times}_k ((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - (X - B''^\circ))$ ne rencontrant pas Δ . Par ailleurs, remarquons que l'ouvert $E'' \subset (X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''$ coïncide avec le domaine rationnel $D_{(X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''}(g|1)$ où $g \in \Gamma((X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B'', \mathcal{O})$ est la fonction qui vaut $\frac{t_1 - t_2}{t_1 - z}$ sur $(X - B''^\circ) \widehat{\times}_k \mathbb{B}_l^1(z, r''_z)$ pour tout $z \in Z(l)$. (Ici, on a noté t_1 et t_2 les coordonnées canoniques de $X - B''^\circ$ et B'' .) En utilisant le fait que $W'' \coprod (X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''$ est presque rationnel, on montre que $W'' \coprod E''$ est aussi presque rationnel en raisonnant comme dans la première étape de la preuve de la proposition 2.3.15. Ainsi, on peut représenter l'élément $\text{cl}[\text{id}_{X - B''^\circ}]$ par le triplet

$$(2.57) \quad (\mathcal{S}_{|(X - B''^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}, W'' \coprod E'', 1)$$

avec $1 \in \Gamma(W'' \coprod E'', \mathcal{S}) = \Gamma(W'' \coprod E'', \mathcal{O})$ la section unité.

Partie D : Nous allons déformer à homotopie près le représentant (2.57) de $\text{cl}[\text{id}_{X - B''^\circ}]$. On considère pour cela le triplet

$$(2.58) \quad (\mathcal{S}_{|\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k (X - B''^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}, (\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k W'') \coprod \widetilde{E}'', 1 \coprod s)$$

avec $\widetilde{E}'' \subset \mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k E''$ le domaine affinoïde défini par

$$\widetilde{E}''(l) = \coprod_{z \in Z(l)} \{(x_0, x_1, x_2); |x_1 - z - x_0(x_2 - z)| = |x_1 - z| \text{ et } |x_2 - z| \leq r''_z\}.$$

(Ci-dessus, x_0 et (x_1, x_2) sont des points l -rationnels de \mathbb{B}_k^1 et E'' respectivement.) Notons t_0, t_1 et t_2 les coordonnées canoniques de $\mathbb{B}_k^1, X - B''^\circ$ et B'' . On prendra pour $s \in \Gamma(\widetilde{E}'', \mathcal{O})$ l'unique section dont l'image dans $\Gamma(\widetilde{E}'' \widehat{\times}_k l, \mathcal{O})$ est donnée par

$$\left(\frac{t_1 - t_2}{t_1 - z - t_0(t_2 - z)} \right)_{z \in Z(l)}.$$

La section s est bien définie sur \widetilde{E}'' puisque $|x_1 - z - x_0(x_2 - z)| = |x_1 - z|$ et que $|x_1 - z| \geq r''_z$ pour x_1 dans $X - B''^\circ$. Il est également clair que s est un générateur de $\mathcal{S}_{|\widetilde{E}''} = \mathcal{O}_{\widetilde{E}''}$, i.e., que s est inversible sur \widetilde{E}'' . Vérifions que \widetilde{E}'' est un voisinage affinoïde de $\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k (X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''^\circ$. Un point l -rationnel de $\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k (X - B''^\circ) \widehat{\times}_k B''^\circ$ est un triplet (x_0, x_1, x_2) vérifiant $|x_0| \leq 1, |x_1 - z| \geq r''_z$ pour tout $z \in Z(l)$ et $|x_2 - z| < r''_z$ pour au moins un $z \in Z(l)$. Or si $|x_2 - z_0| < r''_{z_0}$, avec $z_0 \in Z(l)$, on a $|x_1 - z_0| > |x_2 - z_0| \geq |x_0(x_2 - z_0)|$ ce qui entraîne $|x_1 - z_0 - x_0(x_2 - z_0)| = |x_1 - z_0|$ comme souhaité.

Il reste à montrer que l'ouvert $(\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k W'') \coprod \widetilde{E}''$ est presque rationnel. Or, l'ouvert $\widetilde{E}'' \subset \mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k E''$ coïncide avec le domaine rationnel $D_{\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k E''}(h|1)$ où $h \in \Gamma(\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k E'', \mathcal{O})$ est la fonction qui vaut $\frac{t_1 - z - t_0(t_2 - z)}{t_1 - z}$ sur $\mathbb{B}_l^1 \widehat{\times}_l (E'' \widehat{\times}_Z z)$ pour tout $z \in Z(l)$. Sachant que $W'' \coprod E''$ est presque rationnel, on déduit que

$(\mathbb{B}_k^1 \widehat{\times}_k W'') \amalg \widetilde{E}''$ est aussi presque rationnel en raisonnant comme dans la première étape de la preuve de la proposition 2.3.15.

En spécialisant en $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$, on voit que (2.58) fournit une homotopie entre (2.57) et

$$(2.59) \quad (\mathcal{S}_{|(X-B''^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}, W'' \amalg E'', 1 \amalg g)$$

avec $g \in \Gamma(E'', \mathcal{O})$ la fonction dont l'image dans $\Gamma(E'' \widehat{\otimes}_k l, \mathcal{O})$ est donnée par

$$\left(\frac{t_1 - t_2}{t_1 - z} \right)_{z \in Z(l)}.$$

On considère maintenant la classe β du triplet

$$(\mathcal{S}_{|X-B'^\circ \times_k \mathbb{P}_k^1}, W' \amalg F, 1 \amalg g)$$

avec $F = (X - B')^\circ \widehat{\times}_k B$. Il s'agit bien d'un objet de

$$\text{PIC}_{(X-B'^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}((X - B'^\circ) \widehat{\times}_k (X - B^\circ))$$

puisque g est un générateur de $\mathcal{S}_{|F}$. On a en fin de compte les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} j^*(\beta) &= j^*(\mathcal{S}_{|(X-B'^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}, W' \amalg F, 1 \amalg g) \\ &= (\mathcal{S}_{|(X-B^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}, W \amalg E, 1 \amalg g) = c\ell[\text{id}_{X-B^\circ}], \\ j_*(\beta) &= j_*(\mathcal{S}_{|(X-B'^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}, W' \amalg F, 1 \amalg g) \\ &= (\mathcal{S}_{|(X-B'^\circ) \times_k \mathbb{P}_k^1}, W' \amalg E', 1 \amalg g) = c\ell[\text{id}_{X-B'^\circ}], \end{aligned}$$

dans les groupes de Picard relatifs rendus \mathbb{B}^1 -invariants.

C.Q.F.D.

2.4. Cohomologie Nisnevich d'un préfaisceau avec transferts, surconvergent et \mathbb{B}^1 -invariant

Dans cette section, on démontre le théorème principal de ce chapitre, i.e., l'invariance par homotopie des préfaisceaux de cohomologie d'un préfaisceau avec transferts, faiblement surconvergent et invariant par homotopie. Malheureusement, lorsque la caractéristique résiduelle de k est non nulle, on aura à supposer que ce préfaisceau est à valeurs dans les \mathbb{Q} -espaces vectoriels ; nous ignorons si cette hypothèse est nécessaire pour la validité du théorème. Dans toute cette section, k désigne un corps valué complet de valuation non triviale.

2.4.1. Étude de la restriction au petit site de la boule de Tate. — Précisons la notion de faible surconvergence pour les préfaisceaux sur des grands sites.

Définition 2.4.1. — *Soit B une k -variété rigide lisse et soit $\mathcal{V} \subset \text{SmAfd}/B$ une sous-catégorie pleine stable par passage aux ouverts affinoïdes. Soit F un préfaisceau sur \mathcal{V} . On dit que F est faiblement surconvergent s'il vérifie la propriété suivante.*

Pour tout B -affinoïde X dans \mathcal{V} et tout f_0, f_1, \dots, f_n engendrant $\Gamma(X, \mathcal{O})$ comme idéal, le morphisme évident

$$(2.60) \quad \operatorname{Colim}_{\lambda \in \sqrt{|k^\times|}, \lambda > 1} F(D_X(\lambda f_0 | f_1, \dots, f_n)) \rightarrow F(D_X(f_0 | f_1, \dots, f_n))$$

est inversible. En d'autres termes, un préfaisceau faiblement surconvergent sur \mathcal{V} est simplement un préfaisceau dont les restrictions aux petits sites $\operatorname{Ouv}^{\text{af}}(X)$ des ouverts affinoïdes de X , pour $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{V})$, sont des préfaisceaux faiblement surconvergens (au sens de la définition 2.1.22).

Dans ce paragraphe, on fixe une sous-catégorie pleine $\mathcal{V} \subset \operatorname{SmAfd}/k$ stable par produits et coproduits directs finis ainsi que par passage aux ouverts affinoïdes. On suppose aussi que \mathcal{V} contient la boule unité de Tate et les spectres des extensions finies et séparables de k . Rappelons que $\mathbf{Cor}(\mathcal{V})$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathbf{RigCor}(k)$ telle que $\operatorname{Ob}(\mathbf{Cor}(\mathcal{V})) = \operatorname{Ob}(\mathcal{V})$. Le lecteur ne perdra rien à supposer que \mathcal{V} est égale à SmAfd/k ou SmAfd^b/k (voir la notation 2.2.67). Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant.

Théorème 2.4.2. — Soit F un préfaisceau avec transferts, faiblement surconvergent et invariant par homotopie sur \mathcal{V} . On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

- (A) k est d'égale caractéristique nulle,
- (B) F est un préfaisceau de \mathbb{Q} -espaces vectoriels.

Alors, la restriction de F au petit site des ouverts quasi-compacts⁽¹³⁾ de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ est un faisceau acyclique. En d'autres termes, pour X un ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$, on a $H_{\text{ad}}^0(X, F) = F(X)$ et $H_{\text{ad}}^i(X, F) = 0$ pour $i > 0$.

La preuve de ce théorème occupera tout le paragraphe. La condition (B) sera utilisée via le lemme suivant.

Lemme 2.4.3. — Soit F un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans la catégorie des \mathbb{Q} -espaces vectoriels. Soit l/k une extension finie galoisienne de groupe de Galois G . Pour tout $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{V})$, le morphisme évident

$$(2.61) \quad F(X) \longrightarrow F(X \widehat{\otimes}_k l)^G$$

est inversible.

Démonstration. — Notons $p : X \widehat{\otimes}_k l \rightarrow X$ et $r = [(p, \text{id}) : X \widehat{\otimes}_k l \hookrightarrow X \widehat{\times}_k (X \widehat{\otimes}_k l)]$ la transposée du graphe de p vue comme une correspondance finie de X dans $X \widehat{\otimes}_k l$. On a alors $p \circ r = |G| \cdot \text{id}_X$ et $r \circ p = \sum_{g \in G} g$ (avec G agissant sur $X \widehat{\otimes}_k l$ via son action

⁽¹³⁾ On rappelle qu'un ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ est automatiquement affinoïde.

sur l). Notons a la restriction de $F(r) : F(X \widehat{\otimes}_k l) \rightarrow F(X)$ à $F(X \widehat{\otimes}_k l)^G$. D'après la discussion précédente, il est clair que

$$\frac{1}{|G|} \cdot a : F(X \widehat{\otimes}_k l)^G \rightarrow F(X)$$

est un inverse à droite et à gauche de (2.61).

C.Q.F.D.

Nous allons démontrer le théorème 2.4.2 en appliquant le théorème 2.1.12 à la restriction de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$. La condition (a) du théorème 2.1.12 étant clairement satisfaite, il reste à montrer que cette restriction est acyclique pour les recouvrements du type I et II, et qu'elle satisfait l'invariance combinatoire (au sens de la définition 2.1.11).

Nous allons d'abord nous occuper de l'invariance combinatoire.

Proposition 2.4.4. — *On reprend les hypothèses du théorème 2.4.2. Alors, la restriction de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$ satisfait l'invariance combinatoire. Autrement dit, étant donnés deux ouverts quasi-compacts connexes $X \subset X' \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$, le morphisme $F(X') \rightarrow F(X)$ est un isomorphisme s'il existe une extension finie séparable l/k telle que*

$$\begin{aligned} X \widehat{\otimes}_k l &= \prod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R) - \prod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r_\beta)^\circ \right), \\ X' \widehat{\otimes}_k l &= \prod_{\alpha \in I} \left(\mathbb{B}_l^1(o_\alpha, R') - \prod_{\beta \in J_\alpha} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r'_\beta)^\circ \right), \end{aligned}$$

avec $r'_\beta \leq r_\beta \leq R \leq R'$, $|o_\alpha - o_{\alpha'}| > R'$ pour $\alpha \neq \alpha'$ et $|z_\beta - z_{\beta'}| \geq \max(r_\beta, r_{\beta'})$ pour $\beta \neq \beta'$.

Démonstration. — Si k'/k désigne le corps des constantes de X' , on peut considérer X et X' comme des ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_{k'}^1)^{\text{an}}$. Quitte à remplacer k par k' et F par sa restriction aux k' -affinoïdes qui sont dans \mathcal{V} , on peut supposer que X' est géométriquement connexe (i.e., reste connexe après tout changement de base suivant une extension finie séparable de k). L'ensemble I est alors un singleton, ce qui entraîne que X est également géométriquement connexe. Dans ce cas, on peut écrire

$$\begin{aligned} X \widehat{\otimes}_k l &= \mathbb{B}_l^1(o, R) - \prod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r_\beta)^\circ, \\ X' \widehat{\otimes}_k l &= \mathbb{B}_l^1(o, R') - \prod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r'_\beta)^\circ, \end{aligned}$$

avec $r'_\beta \leq r_\beta \leq R \leq R'$ et $|z_\beta - z_{\beta'}| \geq \max(r_\beta, r_{\beta'})$ pour $\beta \neq \beta'$.

Grâce à la proposition 2.1.5 (si k est d'égale caractéristique nulle) et au lemme 2.4.3 (si la caractéristique résiduelle de k est non nulle), on peut supposer que o est un point k -rationnel et que le groupe G stabilise l'ensemble $\{z_\beta; \beta \in J\}$. Sous l'hypothèse (A), on supposera plus précisément que $k = l$ de sorte que $G = \{1\}$. On notera $Z \subset \mathbb{A}_k^1$ le sous-schéma fermé tel que $Z \otimes_k l = \{z_\beta; \beta \in J\}$.

Pour $\lambda > 1$ dans $\sqrt{|k^\times|}$, on note $X(\lambda)$ et $X'(\lambda)$ les ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ tels que

$$X(\lambda) \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, \lambda R) - \coprod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, \lambda^{-1} r_\beta)^\circ,$$

$$X'(\lambda) \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, \lambda R') - \coprod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, \lambda^{-1} r'_\beta)^\circ.$$

Puisque F est faiblement surconvergent, les morphismes suivants sont inversibles :

$$\text{Colim}_{\lambda > 1} F(X(\lambda)) \longrightarrow F(X) \quad \text{et} \quad \text{Colim}_{\lambda > 1} F(X'(\lambda)) \longrightarrow F(X').$$

Il est donc suffisant de montrer que les morphismes $F(X'(\lambda)) \rightarrow F(X(\lambda))$ sont inversibles pour $\lambda > 1$. Or, ces morphismes sont du même type que ceux considérés dans l'énoncé. Ainsi, on peut remplacer X et X' par $X(\lambda)$ et $X'(\lambda)$, et supposer que $r_\beta < R$, pour $\beta \in J$, et que $|z_\beta - z_{\beta'}| > \max(r_\beta, r_{\beta'})$, pour $\beta \neq \beta'$. Dans ce cas, nous allons montrer que l'inclusion $X \hookrightarrow X'$ induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$; ceci permettra de conclure puisque F est invariant par homotopie.

Pour montrer que l'inclusion $X \hookrightarrow X'$ induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$ nous appliquerons la proposition 2.3.17 à deux reprises. Plus précisément, nous raisonnons de la manière suivante. Si $J = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer puisque les boules de Tate $\mathbb{B}_k^1(o, R)$ et $\mathbb{B}_k^1(o, R')$ sont isomorphes à $\text{Spm}(k)$ dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$. On peut donc supposer que $J \neq \emptyset$.

On note B_1 et B_1° (resp. B'_1 et $B_1'^\circ$) les complémentaires dans $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ de $\mathbb{B}_k^1(o, R)^\circ$ et $\mathbb{B}_k^1(o, R)$ (resp. $\mathbb{B}_k^1(o, R')^\circ$ et $\mathbb{B}_k^1(o, R')$). Alors, $W_1 = X \cup B_1$ est un ouvert quasi-compact strict de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$. (Le fait que W est strict découle du fait que $J \neq \emptyset$.) Les conditions d'application de la proposition 2.3.17 sont satisfaites pour

$$\{\infty\} \subset B'_1 \subset B_1 \subset W_1.$$

(La condition $B_1 \Subset W_1$ découle du fait que $r_\beta < R$, pour $\beta \in J$.) Il s'ensuit que l'inclusion $X = W_1 - B_1^\circ \hookrightarrow W_1 - B_1'^\circ$ induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$. Puisque $W_1 - B_1'^\circ \subset X'$, on peut donc remplacer X par $W_1 - B_1'^\circ$ et supposer que $R = R'$.

Pour traiter le cas $R = R'$, on introduit les ouverts B_2 et B'_2 tels que

$$B_2 \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r_\beta) \quad \text{et} \quad B'_2 \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r'_\beta).$$

(Ci-dessus, on a besoin du fait que $|z_\beta - z_{\beta'}| > \max(r_\beta, r_{\beta'})$, pour $\beta \neq \beta'$, afin de s'assurer que l'union est bien disjointe.) Les conditions d'application de la proposition 2.3.17 sont satisfaites pour

$$Z \subset B'_2 \subset B_2 \subset \mathbb{B}_k^1(o, R).$$

(La condition $B_2 \Subset \mathbb{B}_k^1(o, R)$ découle du fait que $r_\beta < R$ pour tout $\beta \in J$.) Il s'ensuit que l'inclusion $X = \mathbb{B}_k^1(o, R) - B_2^\circ \hookrightarrow X' = \mathbb{B}_k^1(o, R) - B_2'^\circ$ induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$ comme souhaité. C.Q.F.D.

Pour terminer la preuve du théorème 2.4.2, il reste à traiter l'acyclicité pour les recouvrements du type I et II. Ceci fera l'objet des lemmes 2.4.5 et 2.4.6 ci-dessous.

Lemme 2.4.5. — *On reprend les hypothèses du théorème 2.4.2. Alors, la restriction de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$ est acyclique pour les recouvrements du type I.*

Démonstration. — On se donne un ouvert quasi-compact et connexe $X \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$, et on cherche à montrer que F est acyclique pour tout recouvrement du premier type $\mathcal{R}_{X, x_0, \epsilon}^I$ de X . Si k'/k désigne le corps des constantes de X , on peut considérer X comme un ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_{k'}^1)^{\text{an}}$. De plus, le recouvrement $\mathcal{R}_{X, x_0, \epsilon}^I$ est encore un recouvrement du premier type de X considéré comme un ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_{k'}^1)^{\text{an}}$. Ainsi, on peut remplacer k par k' et F par sa restriction aux k' -affinoïdes qui sont dans \mathcal{V} , et supposer que X est géométriquement connexe. (Cette réduction n'est pas nécessaire dans la suite, mais permettra de simplifier légèrement les notations.)

On fixe une extension galoisienne l/k suffisamment grande de sorte que

$$X \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, R) - \coprod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r_\beta)^\circ$$

avec $r_\beta \leq R$ et $|z_\beta - z_{\beta'}| \geq \max(r_\beta, r_{\beta'})$ pour $\beta \neq \beta'$. Soit $x_0 \in X(l)$ un point l -rationnel et soit $\epsilon \in \sqrt{|k^\times|}$ tel que $\epsilon < |x_0 - z_\beta|$, pour tout $\beta \in J$, et $\epsilon < |x_0 - g \cdot x_0|$, pour tout $g \in G$ avec $x_0 \neq g \cdot x_0$. On note $D_1(x_0, \epsilon)$ et $D_2(x_0, \epsilon)$ les ouverts quasi-compactes de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ tels que

$$D_1(x_0, \epsilon) \widehat{\otimes}_k l = \coprod_{x \in G \cdot x_0} \mathbb{B}_l^1(x, \epsilon) \quad \text{et} \quad D_2(x_0, \epsilon) \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, R) - \coprod_{x \in G \cdot x_0} \mathbb{B}_l^1(x, \epsilon)^\circ.$$

Avec ces notations, on a $\mathcal{R}_{X, x_0, \epsilon}^I = (D_1(x_0, \epsilon) \hookrightarrow X, D_2(x_0, \epsilon) \cap X \hookrightarrow X)$. Puisque F est faiblement surconvergent, la suite de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(D_1(x_0, \epsilon)) \oplus F(D_2(x_0, \epsilon) \cap X) \longrightarrow F(D_1(x_0, \epsilon) \cap D_2(x_0, \epsilon)) \longrightarrow 0,$$

associée au recouvrement $\mathcal{R}_{X, x_0, \epsilon}^I$, coïncide avec la colimite, suivant $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$, avec $\lambda > 1$, des suites de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(D_1(x_0, \lambda\epsilon)) \oplus F(D_2(x_0, \lambda^{-1}\epsilon) \cap X) \\ \longrightarrow F(D_1(x_0, \lambda\epsilon) \cap D_2(x_0, \lambda^{-1}\epsilon)) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

associées aux recouvrements $(D_1(x_0, \lambda\epsilon) \hookrightarrow X, D_2(x_0, \lambda^{-1}\epsilon) \cap X \hookrightarrow X)$. Dans cette colimite, on se restreint aux λ suffisamment proches de 1 afin que les $\lambda\epsilon$ soient encore strictement inférieurs aux normes $|x_0 - z_\beta|$, pour $\beta \in J$ et $|x_0 - g \cdot x_0|$, pour $g \cdot x_0 \neq x_0$. Dans ce cas, il est clair que les conditions d'application du théorème 2.3.16 sont satisfaites avec $X_0 = D_2(x_0, \lambda^{-1}\epsilon) \cap X$ et $Y = D_1(x_0, \lambda\epsilon)$. Puisque F est invariant par homotopie, ceci permet de conclure. C.Q.F.D.

Lemme 2.4.6. — *On reprend les hypothèses du théorème 2.4.2. Alors, la restriction de F à $\text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$ est acyclique pour les recouvrements du type II.*

Démonstration. — On se donne un ouvert quasi-compact et connexe $X \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$, et on cherche à montrer que F est acyclique pour tout recouvrement du deuxième type $\mathcal{R}_{X,\gamma,\lambda}^{\text{II}}$ de X . Si k'/k désigne le corps des constantes de X , on peut considérer X comme un ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_{k'}^1)^{\text{an}}$. De plus, le recouvrement $\mathcal{R}_{X,\gamma,\lambda}^{\text{II}}$ est encore un recouvrement du deuxième type de X considéré comme un ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_{k'}^1)^{\text{an}}$. Ainsi, on peut remplacer k par k' et F par sa restriction aux k' -affinoïdes qui sont dans \mathcal{V} , et supposer que X est géométriquement connexe. (Cette réduction n'est pas nécessaire dans la suite, mais permettra de simplifier légèrement les notations.) Dans ce cas, il existe une extension galoisienne l/k telle que

$$X \widehat{\otimes}_k l = \mathbb{B}_l^1(o, R) - \prod_{\beta \in J} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, r_\beta)^\circ$$

avec $r_\beta \leq R$ et $|z_\beta - z_{\beta'}| \geq \max(r_\beta, r_{\beta'})$ pour $\beta \neq \beta'$. On suppose que J est non vide (car sinon, X n'admet pas de recouvrement du deuxième type). On fixe $\gamma \in J$ et $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$ tel que $r_\gamma < \lambda < R$ et $|x_\gamma - x_\beta| \neq \lambda$ pour tout $\beta \in J$. On note $D_1(\gamma, \lambda)$ et $D_2(\gamma, \lambda)$ les ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ tels que

$$D_1(\gamma, \lambda) \widehat{\otimes}_k l = \bigcup_{\beta \in G \cdot \gamma} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, \lambda) \quad \text{et} \quad D_2(\gamma, \lambda) = \mathbb{B}_l^1(o, R) - \bigcup_{\beta \in G \cdot \gamma} \mathbb{B}_l^1(z_\beta, \lambda)^\circ.$$

On doit montrer que F est acyclique pour le recouvrement

$$\mathcal{R}_{X,\lambda,\gamma}^{\text{II}} = (X \cap D_i(\gamma, \lambda) \hookrightarrow X)_{i=1,2}.$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, on pose $X_i(\gamma, \lambda) = X \cap D_i(\gamma, \lambda)$.

On se donne des éléments $\mu, \lambda', \mu' \in \sqrt{|k^\times|}$ tels que $\mu < \lambda < \lambda' < \mu'$ et $\mu' - \mu$ suffisamment petit de sorte que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $r_\gamma < \mu$ et $|x_\gamma - x_\beta| \notin \{\mu, \lambda, \lambda', \mu'\}$,
- $|x_\gamma - x_\beta| < \mu \Leftrightarrow |x_\gamma - x_\beta| < \mu'$ pour tout $\beta \in J$.

Ces propriétés entraînent que les inclusions $X_1(\gamma, \rho) \hookrightarrow X_1(\gamma, \rho')$ et $X_2(\gamma, \rho') \hookrightarrow X_2(\gamma, \rho)$, pour $\rho \leq \rho'$ avec $\rho, \rho' \in \{\mu, \lambda, \lambda', \mu'\}$, vérifient les mêmes conditions que les inclusions $W \hookrightarrow W'$ considérées dans la définition 2.1.11. Or, d'après la proposition 2.4.4, F satisfait l'invariance combinatoire. Les morphismes de restriction du préfaisceau F fournissent donc des isomorphismes

$$(2.62) \quad F(X_1(\gamma, \rho')) \xrightarrow{\sim} F(X_1(\gamma, \rho)) \quad \text{et} \quad F(X_2(\gamma, \rho)) \xrightarrow{\sim} F(X_2(\gamma, \rho')).$$

On pose $C(\gamma, \rho, \rho') = D_1(\gamma, \rho') \cap D_2(\gamma, \rho)$ pour $\rho, \rho' \in \{\mu, \lambda, \lambda', \mu'\}$ vérifiant $\rho \leq \rho'$. Clairement, on a $C(\gamma, \rho, \rho') \Subset X$ et $C(\gamma, \rho, \rho') = X_1(\gamma, \rho') \cap X_2(\gamma, \rho)$. En appliquant une deuxième fois la proposition 2.4.4, on obtient des isomorphismes

$$(2.63) \quad F(C(\gamma, \rho_1, \rho'_1)) \xrightarrow{\sim} F(C(\gamma, \rho_2, \rho'_2))$$

pour tout $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho'_2 \leq \rho'_1$ avec $\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2 \in \{\mu, \lambda, \lambda', \mu'\}$.

À présent, on considère les ouverts quasi-compacts

$$X_0 = X \cap (D_1(\gamma, \lambda) \coprod D_2(\gamma, \lambda')) = X_1(\gamma, \lambda) \coprod X_2(\gamma, \lambda') \quad \text{et} \quad Y = C(\gamma, \mu, \mu').$$

L'intersection $Y_0 = X_0 \cap Y$ est donnée par

$$Y_0 = C(\gamma, \mu, \lambda) \coprod C(\gamma, \lambda', \mu').$$

On a $X_0 \sqsubset X$ et $Y_0 \sqsubset Y$ (car on a $X = X_0 \cup C(\gamma, \lambda, \lambda')$ et $Y = Y_0 \cup C(\gamma, \lambda, \lambda')$ alors que $C(\gamma, \lambda, \lambda') \Subset Y$). D'après le théorème 2.3.16, on a donc une suite exacte scindée dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$:

$$0 \rightarrow C(\gamma, \mu, \lambda) \oplus C(\gamma, \lambda', \mu') \xrightarrow{A} C(\gamma, \mu, \mu') \oplus X_1(\gamma, \lambda) \oplus X_2(\gamma, \lambda') \xrightarrow{B} X \rightarrow 0$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \iota & \iota \\ -\iota & 0 \\ 0 & -\iota \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = (\iota \ \iota \ \iota)$$

où le symbole « ι » désigne les inclusions évidentes. Grâce aux isomorphismes (2.62) et (2.63), il s'ensuit que F transforme

$$0 \rightarrow C(\gamma, \mu, \mu') \oplus C(\gamma, \mu, \mu') \xrightarrow{A'} C(\gamma, \mu, \mu') \oplus X_1(\gamma, \mu') \oplus X_2(\gamma, \mu) \xrightarrow{B'} X \rightarrow 0$$

en une suite exacte (de groupes abéliens). Ci-dessus, on a noté A' et B' les matrices

$$A' = \begin{pmatrix} \text{id} & \text{id} \\ -\iota & 0 \\ 0 & -\iota \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = (\iota \ \iota \ \iota).$$

Or, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C(\gamma, \mu, \mu') \oplus C(\gamma, \mu, \mu') & \xrightarrow{A'} & C(\gamma, \mu, \mu') \oplus X_1(\gamma, \mu') \oplus X_2(\gamma, \mu) & \xrightarrow{B'} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow E & & \downarrow E' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & C(\gamma, \mu, \mu') & \xlongequal{\quad\quad\quad} & C(\gamma, \mu, \mu') & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} \text{id} \\ \text{id} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E' = (\text{id} \ 0 \ 0).$$

D'après la discussion précédente, on obtient un morphisme de suites exactes en appliquant F au diagramme ci-dessus. Les flèches E et E' étant des épimorphismes scindés, il s'ensuit que F transforme la suite

$$0 \longrightarrow C(\gamma, \mu, \mu') \xrightarrow{A''} X_1(\gamma, \mu') \oplus X_2(\gamma, \mu) \xrightarrow{B''} X \longrightarrow 0,$$

obtenue en prenant les noyaux des flèches verticales dans le diagramme ci-dessus, en une suite exacte (de groupes abéliens). Ci-dessus, on a noté A'' et B'' les matrices

$$A'' = \begin{pmatrix} \iota \\ -\iota' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B'' = (\iota \ \iota).$$

En utilisant une deuxième fois les isomorphismes (2.62) et (2.63), on déduit que F transforme

$$0 \longrightarrow C(\gamma, \lambda, \lambda) \longrightarrow X_1(\gamma, \lambda) \oplus X_2(\gamma, \lambda) \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

en une suite exacte (de groupes abéliens). C.Q.F.D.

2.4.2. Invariance par homotopie de la cohomologie et applications. — Précisons la notion de surconvergence pour les préfaisceaux sur des grands sites.

Définition 2.4.7. — Soit B une k -variété rigide lisse et soit $\mathcal{V} \subset \text{SmRig}/B$ une sous-catégorie pleine stable par passage aux ouverts quasi-compacts. Soit F un préfaisceau sur \mathcal{V} . On dit que F est surconvergent si les restrictions de F aux petits sites $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ des ouverts quasi-compacts de X , pour $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, sont des préfaisceaux surconvergents (au sens de la définition 2.1.20).

Remarque 2.4.8. — Soit B une k -variété rigide et soit F un préfaisceau de groupes abéliens sur SmAfd/B . Soit F' une extension de F en un préfaisceau sur SmRig/B . (Une telle extension existe toujours ; par exemple, on pourra prendre celle donnée par

$$F'(X) = \text{Colim}_{X \rightarrow U \in X \setminus (\text{SmAfd}/B)} F(U),$$

pour toute B -variété rigide lisse X .) Le faisceau $a_{\text{ad}}(F')$ (resp. $a_{\text{Nis}}(F')$) associé à F' ne dépend que de F (et pas du choix de l'extension). Il en est donc de même des groupes de cohomologie $H_{\text{ad}}^i(X, F')$ (resp. $H_{\text{Nis}}^i(X, F')$), pour $i \in \mathbb{N}$ et $X \in \text{SmRig}/B$; on les notera alors $H_{\text{ad}}^i(X, F)$ (resp. $H_{\text{Nis}}^i(X, F)$). Ainsi, les préfaisceaux de cohomologie $H_{\text{ad}}^i(-, F)$ (resp. $H_{\text{Nis}}^i(-, F)$), définis à l'origine sur SmAfd/B , admettent des extensions canoniques à SmRig/B ; ces extensions seront encore notées $H_{\text{ad}}^i(-, F)$ (resp. $H_{\text{Nis}}^i(-, F)$).

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème suivant qui est l'analogie en géométrie rigide d'un théorème bien connu de Voevodsky (voir [29, Theorem 13.8]).

Théorème 2.4.9. — Soit B une k -variété rigide lisse, et soit F un préfaisceau avec transferts sur SmAfd/B faiblement surconvergent et invariant par homotopie. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

- (A) k est d'égale caractéristique nulle,
- (B) F est un préfaisceau de \mathbb{Q} -espaces vectoriels.

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $H_{\text{ad}}^i(-, F)$ est un préfaisceau avec transferts sur SmRig/k , surconvergent et invariant par homotopie. De plus, le morphisme évident

$$H_{\text{ad}}^i(-, F) \longrightarrow H_{\text{Nis}}^i(-, F)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit F' une extension de F à SmRig/B . Alors, le préfaisceau F' est faiblement surconvergent. La proposition 2.1.35 affirme que les préfaisceaux $H_{\text{ad}}^i(-, F) = H_{\text{ad}}^i(-, F')$ sont surconvergents. Cette même proposition montre aussi

que $H_{\text{ad}}^i(-, F) \rightarrow H_{\text{Nis}}^i(-, F)$ est un isomorphisme après restriction à $\text{SmRig}^{\text{qc}}/B$. Or, une B -variété rigide lisse X peut s'écrire comme un réunion filtrante d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-variétés ouvertes quasi-compactes. (Il s'agit là d'une des conventions que nous avons adoptées à partir de la section 1.2.) Le résultat découle alors du morphisme des suites exactes de Milnor⁽¹⁴⁾

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{R}^1 \text{Lim}_{n \in \mathbb{N}} H_{\text{ad}}^{i-1}(X_n, F) & \longrightarrow & H_{\text{ad}}^i(X, F) & \longrightarrow & \text{Lim}_{n \in \mathbb{N}} H_{\text{ad}}^i(X_n, F) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{R}^1 \text{Lim}_{n \in \mathbb{N}} H_{\text{Nis}}^{i-1}(X_n, F) & \longrightarrow & H_{\text{Nis}}^i(X, F) & \longrightarrow & \text{Lim}_{n \in \mathbb{N}} H_{\text{Nis}}^i(X_n, F) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Par ailleurs, le corollaire 2.5.14 (qui sera démontré dans le paragraphe 2.5.1 ci-dessous) et le fait que $\mathbf{a}_{\text{Nis}}(F)$ est un faisceau avec transferts sur SmRig/B (ce qui découle du corollaire 2.2.26) entraînent que $H_{\text{Nis}}^i(-, F)$ est naturellement un préfaisceau avec transferts sur SmRig/B . Pour terminer, il reste à montrer que $H_{\text{ad}}^i(-, F)$ est invariant par homotopie, ce qui est bien entendu le contenu essentiel du théorème.

Soit X une B -variété rigide lisse et montrons que le morphisme

$$(2.64) \quad H_{\text{ad}}^i(X, F) \longrightarrow H_{\text{ad}}^i(\mathbb{B}_X^1, F)$$

est inversible. La projection évidente $p : \mathbb{B}_X^1 \rightarrow X$ induit un morphisme de sites

$$p : (\text{Ouv}^{\text{qc}}(\mathbb{B}_X^1), \text{ad}) \longrightarrow (\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \text{ad})$$

qui à un ouvert affinoïde U de X associe $p^{-1}(U) = \mathbb{B}_U^1$. Notons $F'|_X$ et $F'|_{\mathbb{B}_X^1}$ les restrictions de F' à $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ et $\text{Ouv}^{\text{qc}}(\mathbb{B}_X^1)$. Soit $F'|_{\mathbb{B}_X^1} \rightarrow I$ un remplacement projectivement ad-fibrant, i.e., une équivalence ad-locale avec I un complexe de préfaisceaux projectivement ad-fibrant. Puisque p_* est un foncteur de Quillen à droite relativement aux structures projectives ad-locales, le complexe $p_*(I)$ est encore projectivement ad-fibrant. Pour montrer que (2.64) est inversible, il suffira donc de montrer que le morphisme de complexes de préfaisceaux sur $(\text{Ouv}^{\text{af}}(X), \text{ad})$

$$(2.65) \quad F'|_X \longrightarrow p_*(I)$$

est une équivalence ad-locale. Rappelons que cela signifie que (2.65) induit des isomorphismes sur les faisceaux associés aux préfaisceaux de cohomologie.

On sait que les préfaisceaux de cohomologie $H^i(I) = H_{\text{ad}}^i(-, F)|_{\mathbb{B}_X^1}$ sont surconvergens sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(\mathbb{B}_X^1)$. Il s'ensuit que les $H^i(p_*(I))$ sont aussi surconvergens sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$. Or, rappelons-le, $F'|_X$ est faiblement surconvergent. D'après le corollaire 2.1.30, pour démontrer que (2.65) est une équivalence ad-locale, il suffit de

⁽¹⁴⁾ Il existe un moyen plus savant pour étendre les isomorphismes $H_{\text{ad}}^i(X, F) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Nis}}^i(X, F)$ du cas des k -variétés rigides quasi-compactes à celui des k -variétés rigides quelconques, et qui n'utilise pas de la convention que les k -variétés rigides admettent des recouvrements dénombrables par des affinoïdes. Il suffit en effet de réinterpréter le problème en terme de limites homotopiques.

démontrer que (2.65) induit des quasi-isomorphismes sur les fibres en les points maximaux de X . On est donc ramené à montrer les propriétés suivantes pour tout point maximal $x \in \mathcal{M}(X)$:

- (i) Le morphisme $\text{Colim}_{U \in \text{Flt}(x)} H_{\text{ad}}^0(U, F) \rightarrow \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(x)} H_{\text{ad}}^0(\mathbb{B}_U^1, F)$ est inversible.
- (ii) Le groupe $\text{Colim}_{U \in \text{Flt}(x)} H_{\text{ad}}^i(\mathbb{B}_U^1, F)$ est nul pour $i > 0$.

Quitte à remplacer X par un voisinage de x , on peut supposer que X est affinoïde. Comme F est invariant par homotopie, le lemme 2.2.71 montre que les conditions (i) et (ii) sont respectivement équivalentes à :

- (i') Le morphisme $H_{\text{ad}}^0(\widehat{x}, F_{\widehat{x}}) \rightarrow H_{\text{ad}}^0(\mathbb{B}_{\widehat{x}}^1, F_{\widehat{x}})$ est inversible.
- (ii') Le groupe $H_{\text{ad}}^i(\mathbb{B}_{\widehat{k}(x)}^1, F_{\widehat{x}})$ est nul pour $i > 0$.

Ci-dessus, $F_{\widehat{x}}$ est la fibre en x de la restriction de F à SmAfd^b/X (voir le théorème 2.2.69). C'est un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie sur $\text{SmAfd}^b/\widehat{k}(x)$. Dans le reste de la preuve, nous vérifierons que $F_{\widehat{x}}$ est faiblement surconvergent ; ceci permettra de conclure grâce au théorème 2.4.2.

Soit Z dans $\text{SmAfd}^b/\widehat{k}(x)$ et soient $f_0, \dots, f_n \in \Gamma(Z, \mathcal{O})$ engendrant $\Gamma(Z, \mathcal{O})$ en tant qu'idéal. On note I l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\subset \mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \sqrt{|\widehat{k}(x)^\times|} \cap I$, le domaine rationnel $D_Z(\lambda f_0 | f_1, \dots, f_n)$ ne change pas en remplaçant les f_i par des fonctions g_i telles que les normes infinies $|f_i - g_i|_\infty$ sont suffisamment petites. D'après la preuve du corollaire 2.2.68, on peut trouver un X -affinoïde lisse Y tel que $Y_{\widehat{x}} \simeq Z$. Quitte à remplacer Y par $Y \widehat{\otimes}_X U$, avec $U \in \text{Flt}(x)$ suffisamment petit, on peut trouver des fonctions $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n \in \Gamma(Y, \mathcal{O})$, engendrant $\Gamma(Y, \mathcal{O})$ en tant qu'idéal, et telles que les normes infinies $|f_i - (\tilde{f}_i)|_Z|_\infty$ sont suffisamment petites pour que $D_Z(\lambda f_0 | f_1, \dots, f_n) = D_Z(\lambda \tilde{f}_0 | \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ pour tout $\lambda \in \sqrt{|\widehat{k}(x)^\times|} \cap I$. Puisque F est faiblement surconvergent, on a une chaîne d'isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} F_{\widehat{x}}(D_Z(f_0 | f_1, \dots, f_n)) &\simeq F_{\widehat{x}}(D_Z(\tilde{f}_0 | \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)) \\ &\simeq \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(x)} F(D_{Y \widehat{\otimes}_X U}(\tilde{f}_0 | \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)) \\ &\simeq \text{Colim}_{U \in \text{Flt}(x)} \text{Colim}_{\lambda \in \sqrt{|k^\times|}, \lambda > 1} F(D_{Y \widehat{\otimes}_X U}(\lambda \tilde{f}_0 | \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)) \\ &\simeq \text{Colim}_{\lambda \in \sqrt{|k^\times|}, \lambda > 1} F_{\widehat{x}}(D_Z(\lambda \tilde{f}_0 | \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)) \\ &\simeq \text{Colim}_{\lambda \in \sqrt{|\widehat{k}(x)^\times|}, \lambda > 1} F_{\widehat{x}}(D_Z(\lambda f_0 | f_1, \dots, f_n)). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $F_{\widehat{x}}$ est faiblement surconvergent.

C.Q.F.D.

Faisons la définition suivante.

Définition 2.4.10. — Soit B une k -variété rigide lisse. Étant donné un anneau Λ , considérons la catégorie $\mathbf{RigStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ des faisceaux Nisnevich avec transferts sur SmRig/B à valeurs dans la catégorie des Λ -modules.

On note $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda) \subset \mathbf{RigStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine formée des faisceaux qui sont surconvergens. On note aussi $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda) \subset \mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine formée des faisceaux qui sont invariants par homotopie. Lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}$, on note simplement $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B)$ et $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B)$ ces catégories.

Il est facile de voir que la catégorie $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ est abélienne, cocomplète et qu'elle admet les limites finies. Le foncteur d'inclusion $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{RigStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ commute aux petites colimites et aux limites finies.

Corollaire 2.4.11. — Soit B une k -variété rigide lisse. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

- (A) k est d'égale caractéristique nulle,
- (B) Λ est une \mathbb{Q} -algèbre.

Alors, $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ stable par sous-objet, quotient et extension. De plus, l'inclusion évidente admet un adjoint à gauche

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} \circ h_0^{\mathbb{B}^1} : \mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$$

qui à F associe le faisceau Nisnevich associé à $h_0^{\mathbb{B}^1}(F)$.

Démonstration. — Soit F un objet de $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$, i.e., un faisceau Nisnevich avec transferts surconvergent. Le préfaisceau avec transferts $h_0^{\mathbb{B}^1}(F)$ est encore surconvergent ; il est en plus invariant par homotopie. Par le théorème 2.4.9, le faisceau avec transferts $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(h_0^{\mathbb{B}^1}(F))$ est surconvergent et invariant par homotopie. C'est donc un objet de $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$. De plus, il est clair que cet objet coreprésente la restriction de $\text{hom}_{\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)}(F, -)$ à $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$. Ceci montre que $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} \circ h_0^{\mathbb{B}^1}$ est un adjoint à gauche à l'inclusion évidente.

La propriété d'invariance par homotopie est stable par sous-objet. Il s'ensuit que $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ est stable par sous-objets pris dans $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$. Pour voir que $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ est stable par quotient on utilise encore une fois que $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ préserve l'invariance par homotopie pour les préfaisceaux avec transferts surconvergens (i.e., le cas $i = 0$ du théorème 2.4.9). Il reste à vérifier la stabilité par extension. Supposons donnée une suite exacte courte dans $\mathbf{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

avec F et G invariants par homotopie. Pour une B -variété rigide lisse X , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow H(X) \longrightarrow G(X) \longrightarrow H_{\text{Nis}}^1(X, F).$$

L'invariance par homotopie pour H découle alors du lemme des cinq et du théorème 2.4.9 qui assure que le préfaisceau $H_{\text{Nis}}^1(-, F)$ est invariant par homotopie. C.Q.F.D.

On démontrera plus tard (voir le théorème 2.5.37) que la catégorie abélienne $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(k, \Lambda)$ est le cœur d'une t -structure sur une catégorie triangulée de motifs associés aux k -variétés rigides.

On termine le paragraphe avec un résultat technique qui servira plus tard.

Proposition 2.4.12. — *Soit B une k -variété rigide lisse, et soit F un préfaisceau avec transferts sur SmAfd/B faiblement surconvergent et invariant par homotopie. On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

- (A) k est d'égale caractéristique nulle,
- (B) F est un préfaisceau de \mathbb{Q} -espaces vectoriels.

Soient $U_1, \dots, U_r \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ des ouverts affinoïdes et posons $U = U_1 \widehat{\times}_k \dots \widehat{\times}_k U_r$. Alors, le morphisme de préfaisceaux sur SmAfd/B :

$$\underline{\text{hom}}(U, F) = \Gamma(U \widehat{\times}_k -, F) \rightarrow H_{\text{ad}}^0(U \widehat{\times}_k -, F)$$

induit un isomorphisme sur les faisceaux associés. De plus, pour tout $i \geq 1$, le faisceau associé à $H_{\text{ad}}^i(U \widehat{\times}_k -, F)$ est nul. (Ici, les faisceaux associés sont pris relativement à la topologie des recouvrements admissibles.)

Démonstration. — Soit X un B -affinoïde lisse et notons $p : U \widehat{\times}_k X \rightarrow X$ la projection sur le second facteur. Il s'agit de montrer que le morphisme de complexes de préfaisceaux

$$p_* F|_{U \widehat{\times}_k X} \rightarrow R p_* F|_{U \widehat{\times}_k X}$$

est inversible. Ci-dessus, $F|_{U \widehat{\times}_k X}$ désigne la restriction de F au petit site des ouverts affinoïdes de $U \widehat{\times}_k X$, p_* est le foncteur « image directe » suivant le morphisme de sites

$$p : (\text{Ouv}^{\text{af}}(U \widehat{\times}_k X), \text{ad}) \longrightarrow (\text{Ouv}^{\text{af}}(X), \text{ad})$$

et $R p_*$ est le foncteur dérivé à droite de p_* relativement aux structures projectives ad-locales. La projection p est la composition de r projections du même type :

$$(U_1 \widehat{\times}_k U_2 \widehat{\times}_k \dots \widehat{\times}_k U_r) \widehat{\times}_k X \longrightarrow (U_2 \widehat{\times}_k \dots \widehat{\times}_k U_r) \widehat{\times}_k X \rightarrow \dots \rightarrow U_r \widehat{\times}_k X \longrightarrow X.$$

Une récurrence facile nous ramène au cas où $r = 1$, i.e., au cas où U est un ouvert affinoïde de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $G^i(-) = (H_{\text{ad}}^i(U \widehat{\times}_k -, F))|_X$ la restriction du préfaisceau $H_{\text{ad}}^i(U \widehat{\times}_k -, F)$ à $\text{Ouv}^{\text{af}}(X)$. Clairement, G^i est le i -ième préfaisceau de cohomologie de $R p_* F|_{U \widehat{\times}_k X}$. On doit donc démontrer que

$$a_{\text{ad}}(G^i) \simeq \begin{cases} a_{\text{ad}}(p_* F|_{U \widehat{\times}_k X}) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

D'après la proposition 2.1.35, on sait que les G^i sont des préfaisceaux faiblement surconvergents. Il en est de même de $p_* F|_{U \widehat{\times}_k X}$. D'après le corollaire 2.1.30, il est donc suffisant de vérifier que

$$\text{Colim}_{\dagger \in \text{Flt}(x)} H_{\text{ad}}^i(U \widehat{\times}_k \dagger, F) \simeq \begin{cases} \text{Colim}_{\dagger \in \text{Flt}(x)} F(U \widehat{\times}_k \dagger) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geq 1, \end{cases}$$

pour tout point maximal $x \in \mathcal{M}(X)$. Par le lemme 2.2.71, $\text{Colim}_{\dagger \in \text{Flt}(x)} H_{\text{ad}}^i(U \widehat{\times}_k \dagger, F)$ s'identifie à $H_{\text{ad}}^i(U \widehat{\times}_k \widehat{k}(x), F_{\widehat{x}})$ où $F_{\widehat{x}}$ est la fibre de F en \widehat{x} . Or, d'après la preuve du théorème 2.4.9, on sait que le préfaisceau avec transferts invariant par homotopie $F_{\widehat{x}}$ est faiblement surconvergent. Le résultat recherché découle maintenant du théorème 2.4.2. C.Q.F.D.

Reprenons les hypothèses du corollaire 2.4.11. La proposition 2.4.12 entraîne que l'endofoncteur $\underline{\text{hom}}(U, -)$ de $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$ est exact pour tout ouvert affinoïde $U \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. C'est la variante rigide d'un fait bien connu en théorie des motifs à la Voevodsky.

2.4.3. Exemples de préfaisceaux avec transferts, surconvergents et \mathbb{B}^1 -invariants. — Nous avons vu que les préfaisceaux avec transferts faiblement surconvergents et \mathbb{B}^1 -invariants se comportent bien par rapport à la topologie des recouvrements admissibles. Ils sont pour cela les analogues rigides des préfaisceaux avec transferts \mathbb{A}^1 -invariants, objets fondamentaux dans la théorie des motifs triangulés à la Voevodsky.

Pour obtenir des exemples de préfaisceaux avec transferts faiblement surconvergents et \mathbb{B}^1 -invariants, il suffit d'appliquer le foncteur $h_0^{\mathbb{B}^1}$ à des préfaisceaux avec transferts faiblement surconvergents. Malheureusement, il n'est pas facile de construire des préfaisceaux faiblement surconvergents sur SmAfd/k ; en effet, étant donnée une k -variété rigide lisse X , le préfaisceau $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)$ n'est jamais faiblement surconvergent à moins que la dimension de X ne soit nulle⁽¹⁵⁾. Dans ce paragraphe, on démontre le théorème suivant qui fournit beaucoup d'exemples de préfaisceaux avec transferts faiblement surconvergents et \mathbb{B}^1 -invariants.

Théorème 2.4.13. — *Soit B un k -affinoïde lisse et soit X un B -schéma lisse de type fini. Alors, le préfaisceau d'homologie $H_n \text{Sing}^{\mathbb{B}^1}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$ est un préfaisceau avec transferts sur SmAfd/B faiblement surconvergent et invariant par homotopie.*

⁽¹⁵⁾ Pour voir cela, on peut supposer que X admet un point rationnel x dans une composante connexe de dimension $n > 0$ (quitte à remplacer k par une extension finie séparable). Comme X est lisse, le point x possède un voisinage ouvert isomorphe à \mathbb{B}_k^n . Soient $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(\mathbb{B}_k^n, \mathcal{O}) = k\{t_1, \dots, t_n\}$ des séries convergentes telles que $|f_i|_{\infty} < 1$ et $f_i = \sum_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n} a_{\nu}^{(i)} t^{\nu}$ avec $(\lambda^{\nu_1 + \dots + \nu_n} |a_{\nu}^{(i)}|)_{\nu \in \mathbb{N}^n}$ non bornée pour tout $\lambda > 1$. Considérons alors le morphisme $\phi : \mathbb{B}_k^n \rightarrow X$ égal à la composition de

$$\mathbb{B}_k^n \xrightarrow{(f_1, \dots, f_n)} \mathbb{B}_k^n \hookrightarrow X.$$

Alors, $\phi \in \mathbb{Z}_{\text{tr}}(X)(\mathbb{B}_k^n)$ ne s'étend à aucune boule de rayon strictement plus grand que 1. En effet, supposons qu'il existe une extension $\phi' : \mathbb{B}_k^n(o, \lambda) \rightarrow X$ de ϕ avec $\lambda > 1$ dans $\sqrt{|k^\times|}$. Quitte à remplacer λ par un scalaire plus proche de 1, on peut supposer que ϕ' se factorise par \mathbb{B}_k^n (car l'image de ϕ est contenue dans l'intérieur de \mathbb{B}_k^n). Il est facile de voir que ϕ' est forcément un morphisme (et pas seulement une correspondance finie). L'existence de ϕ' implique que $f_i \in \Gamma(\mathbb{B}_k^n(o, \lambda), \mathcal{O})$ ce qui contredit la seconde condition sur les f_i .

L'assertion que le préfaisceau avec transferts $H_n \text{Sing}^{\mathbb{B}^1}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$ est \mathbb{B}^1 -invariant est mise pour mémoire (voir en effet la proposition 2.2.52). On doit seulement démontrer que ce préfaisceau est faiblement surconvergent. Pour ce faire, on aura besoin d'un résultat d'approximation dont la preuve utilise les mêmes techniques que celle du théorème 2.2.58; il s'agit du théorème 2.4.16 ci-dessous. Introduisons d'abord quelques notations.

Notation 2.4.14. — Soit $B = \text{Spm}(A)$ un k -affinoïde lisse. On suppose donné un sous-anneau $A_0 \subset A$ vérifiant les conditions suivantes :

- le sous-anneau $A_0 \subset A$ est dense (lorsqu'on munit A de la norme infinie);
- l'anneau A_0 est noethérien et régulier;
- la A_0 -algèbre A est régulière.

En particulier, d'après le théorème de Popescu [34, 35], A est une colimite filtrante de A_0 -algèbres de type fini et lisses.

On pose $B_0 = \text{Spec}(A_0)$ et on note $\mathcal{V}(B/B_0)$ la catégorie des voisinages étales affines de B dans B_0 , i.e., des B_0 -schémas étales affines munis d'un point à valeurs dans la A_0 -algèbre A . L'opposé de l'ensemble ordonné (par l'inclusion) des sous- A_0 -algèbres étales de A s'identifie à une sous-catégorie pleine et cofinale de $\mathcal{V}(B/B_0)$ via le foncteur « spectre associé ». On considèrera $\mathcal{V}(B/B_0)$ comme un pro- B_0 -schéma étale de la manière évidente.

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$A_0^{(n)} = \frac{A_0[t_0, \dots, t_n]}{(1 - \sum_{i=0}^n t_i)} \quad \text{et} \quad A^{(n)} = \frac{A\{t_0, \dots, t_n\}}{(1 - \sum_{i=0}^n t_i)}.$$

Ainsi, $\text{Spec}(A_0^{(n)}) = \Delta_{B_0}^n$ et $\text{Spm}(A^{(n)}) = \Delta_{\text{rig}, B}^n$. On note aussi

$$\mathcal{V}^n(B/B_0) = \mathcal{V}(\Delta_{\text{rig}, B}^n / \Delta_{B_0}^n)$$

la catégorie des voisinages étales affines de $\Delta_{\text{rig}, B}^n$ dans $\Delta_{B_0}^n$. Comme ci-dessus, on considèrera $\mathcal{V}^n(B/B_0)$ tantôt comme une catégorie filtrante, tantôt comme un pro- B_0 -schéma lisse. En faisant varier n , on obtient un objet cosimplicial $\mathcal{V}^\bullet(B/B_0)$ dans la catégorie des pro- B_0 -schémas lisses.

Notation 2.4.15. — Étant donné un A_0 -schéma de type fini X_0 , on note $\underline{\text{Cor}}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)$ le groupe simplicial donné en degré n par

$$\underline{\text{Cor}}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)_n = \underline{\text{Cor}}_{B_0}(\mathcal{V}^n(B/B_0), X_0) = \text{Colim}_{U \in \mathcal{V}^n(B/B_0)} \underline{\text{Cor}}_{B_0}(U, X_0).$$

On note aussi $\underline{\text{Cor}}_{B_0}(B, X_0)$ le groupe simplicial donné en degré n par

$$\underline{\text{Cor}}_{B_0}(B, X_0)_n = \underline{\text{Cor}}_{B_0}(\text{Spec}(A^{(n)}), X_0).$$

Ce groupe simplicial s'identifie naturellement à $\underline{\text{Cor}}_B(B, X^{\text{an}})$ avec $X = X_0 \otimes_{A_0} A$. On dispose d'un morphisme évident de groupes simpliciaux

$$(2.66) \quad \underline{\text{Cor}}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0) \longrightarrow \underline{\text{Cor}}_{B_0}(B, X_0)$$

obtenu par composition à gauche avec le morphisme $\mathrm{Spec}(A^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{V}^\bullet(B/B_0)$.

On a le théorème suivant.

Théorème 2.4.16. — *Le morphisme de complexes (2.66) est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — D’après le lemme 2.2.62, la $A_0^{(n)}$ -algèbre $A^{(n)}$ est régulière. Par le théorème de Popescu [34, 35], $A^{(n)}$ est une colimite filtrante de $A_0^{(n)}$ -algèbres lisses et de type fini.

La preuve est divisée en deux parties. On y montre respectivement que (2.66) induit des surjections et des injections sur les groupes d’homologie.

Partie 1 : surjectivité. Soit $\alpha \in \mathbf{Cor}_{B_0}(\mathrm{Spec}(A^{(n)}), X_0)$ une correspondance finie définissant un cycle dans le complexe normalisé associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_{B_0}(B, X_0)$, i.e., $\alpha \circ d_{n,i} = 0$, pour $0 \leq i \leq n$, avec

$$d_{n,i} : \mathrm{Spec}(A^{(n-1)}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A^{(n)})$$

la face correspondante à l’équation $t_i = 0$. Par le théorème de Popescu [34, 35] (et puisque X_0 est un B_0 -schéma de type fini), il existe une $A_0^{(n)}$ -algèbre lisse et de type fini E_0 , un morphisme de $A_0^{(n)}$ -algèbres $E_0 \rightarrow A^{(n)}$ et une correspondance finie $\alpha' \in \mathbf{Cor}_{B_0}(\mathrm{Spec}(E_0), X_0)$ telle que $\alpha = \alpha' \circ (\mathrm{Spec}(A^{(n)}) \rightarrow \mathrm{Spec}(E_0))$. Quitte à raffiner E_0 , on peut supposer que $\alpha' \circ (\mathrm{Spec}(E_0/(t_i)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(E_0)) = 0$, pour $0 \leq i \leq n$.

Par le lemme 2.4.17 ci-dessous, il existe une E_0 -algèbre lisse E'_0 munie d’un morphisme de E_0 -algèbres $E'_0 \rightarrow A^{(n)}$ et d’un morphisme étale de $A_0^{(n)}$ -algèbres $A_0^{(n)}[s_1, \dots, s_r] \rightarrow E'_0$. On pose $\alpha'' = \alpha' \circ (\mathrm{Spec}(E'_0) \rightarrow \mathrm{Spec}(E_0))$. On a encore que $\alpha'' \circ (\mathrm{Spec}(E'_0/(t_i)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(E'_0)) = 0$, pour $0 \leq i \leq n$.

Pour $1 \leq j \leq r$, notons $f_j \in A^{(n)}$ l’image de s_j par la composition de $A_0^{(n)}[s_1, \dots, s_r] \rightarrow E'_0 \rightarrow A^{(n)}$. Pour $\epsilon > 0$ choisissons $f_j^\epsilon \in A_0^{(n)}$ tel que $|f_j - f_j^\epsilon|_\infty \leq \epsilon$ (la norme infinie étant celle de la k -algèbre affinoïde $A^{(n)}$); ceci est possible puisque l’anneau $A_0^{(n)}$ est dense dans $A^{(n)}$. Formons un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U^\epsilon & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(E'_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(A_0^{(n)}) & \xrightarrow{(f_1^\epsilon, \dots, f_r^\epsilon)} & \mathrm{Spec}(A_0^{(n)}[s_1, \dots, s_r]). \end{array}$$

Alors U^ϵ est étale sur $\mathrm{Spec}(A_0^{(n)})$. Nous affirmons que, pour ϵ suffisamment petit, U^ϵ est naturellement un voisinage étale de $\Delta_{\mathrm{rig}, B}^n$ dans Δ_B^n , i.e., définit un objet de $\mathcal{V}^n(B/B_0)$.

En effet, notons $E' = E'_0 \otimes_{A_0^{(n)}} A^{(n)}$. Ainsi, E' est naturellement une $A^{(n)}[s_1, \dots, s_r]$ -algèbre étale et le morphisme de $A_0^{(n)}$ -algèbres $E'_0 \rightarrow A^{(n)}$ (voir ci-dessus) induit un morphisme de $A^{(n)}$ -algèbres $E' \rightarrow A^{(n)}$ tel que la composition de $A^{(n)}[s_1, \dots, s_r] \rightarrow$

$E' \rightarrow A^{(n)}$ envoie s_j sur f_j . Par le corollaire 1.1.56, il existe, pour $\epsilon \in |k^\times|$ suffisamment petit, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spm}(A^{(n)}) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\mathrm{Spec}(E'))^{\mathrm{an}} \\ (f_1, \dots, f_r) \downarrow & \nearrow u & \downarrow \\ \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(f_1, \epsilon) \widehat{\otimes}_{A^{(n)}} \cdots \widehat{\otimes}_{A^{(n)}} \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(f_r, \epsilon) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\mathrm{Spec}(A^{(n)}[s_1, \dots, s_r]))^{\mathrm{an}}. \end{array}$$

Pour un tel ϵ , on peut former le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Spec}(E')^{\mathrm{an}} \\ & \nearrow u \circ (f_1^\epsilon, \dots, f_r^\epsilon) & \downarrow \\ \mathrm{Spm}(A^{(n)}) & \xrightarrow{(f_1^\epsilon, \dots, f_r^\epsilon)} & (\mathrm{Spec}(A^{(n)}[s_1, \dots, s_r]))^{\mathrm{an}}. \end{array}$$

Le morphisme $u \circ (f_1^\epsilon, \dots, f_r^\epsilon)$ ci-dessus fournit une section au morphisme étale

$$U^\epsilon \times_{\mathrm{Spec}(A_0^{(n)})} \mathrm{Spec}(A^{(n)}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A^{(n)}).$$

Cette section équivaut à la donnée d'un morphisme de $\mathrm{Spec}(A_0^{(n)})$ -schémas $\mathrm{Spec}(A^{(n)}) \rightarrow U^\epsilon$. Ainsi, comme affirmé ci-dessus, U^ϵ est naturellement un voisinage étale affine de $\Delta_{\mathrm{rig}, B}^n = \mathrm{Spm}(A^{(n)})$ dans $\Delta_{B_0}^n = \mathrm{Spec}(A_0^{(n)})$.

Notons maintenant $\alpha^\epsilon = \alpha'' \circ (U^\epsilon \rightarrow \mathrm{Spec}(E'_0))$. La classe de α^ϵ dans $\mathbf{Cor}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)_n$ est, par construction, un cycle dans le complexe normalisé associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)$. Pour terminer, il reste à voir que l'image de α^ϵ dans $\mathbf{Cor}_{B_0}(B, X_0)$, qu'on notera α''' , est homologue à α . Pour cela, il sera utile de noter que

$$(2.67) \quad \alpha^{\mathrm{an}} = (\alpha'')^{\mathrm{an}} \circ u \circ (f_1, \dots, f_r) \quad \text{et} \quad (\alpha''')^{\mathrm{an}} = (\alpha'')^{\mathrm{an}} \circ u \circ (f_1^\epsilon, \dots, f_r^\epsilon).$$

Considérons la correspondance finie $\tilde{\alpha}$ donnée par la composition de

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\mathrm{rig}, B}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon) & \simeq & \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(f_1, \epsilon) \widehat{\otimes}_{A^{(n)}} \cdots \widehat{\otimes}_{A^{(n)}} \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(f_r, \epsilon) \\ & & \xrightarrow{u} \mathrm{Spec}(E')^{\mathrm{an}} \xrightarrow{(\alpha'')^{\mathrm{an}}} X^{\mathrm{an}}. \end{array}$$

On a les deux sections $o = (0, \dots, 0)$ et $s = (f_1 - f_1^\epsilon, \dots, f_r - f_r^\epsilon)$ à la projection $\pi : \Delta_{\mathrm{rig}, B}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon) \rightarrow \Delta_{\mathrm{rig}, B}^n$. Les égalités (2.67) se traduisent par $\alpha^{\mathrm{an}} = \tilde{\alpha} \circ o$ et $(\alpha''')^{\mathrm{an}} = \tilde{\alpha} \circ s$. De plus, $\tilde{\alpha}$ est un cycle dans le complexe normalisé associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_B(\mathbb{B}_B^r(o, \epsilon), X^{\mathrm{an}})$. D'après la proposition 2.2.44, $\tilde{\alpha}$ est homologue à $\alpha^{\mathrm{an}} \circ \pi$. Soit $\beta \in \mathbf{Cor}_B(\Delta_{\mathrm{rig}, B}^{n+1} \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon), X^{\mathrm{an}})$ une homologie entre $\tilde{\alpha}$ et $\alpha^{\mathrm{an}} \circ \pi$. Ainsi, β vérifie $\beta \circ d_{n+1,0} = \tilde{\alpha} - \alpha^{\mathrm{an}} \circ \pi$ et $\beta \circ d_{n+1,i} = 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

Appelons

$$h : \Delta_{\mathrm{rig}, B}^{n+1} \longrightarrow \Delta_{\mathrm{rig}, B}^{n+1} \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon)$$

le morphisme obtenu du morphisme de $\Delta_{\mathrm{rig}, B}^n$ -affinoïdes $s : \Delta_{\mathrm{rig}, B}^n \rightarrow \Delta_{\mathrm{rig}, B}^n \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon)$ par changement de base suivant le morphisme de dégénérescence $\Delta_{\mathrm{rig}, B}^{n+1} \rightarrow \Delta_{\mathrm{rig}, B}^n$

correspondant à

$$(t_0, \dots, t_{n+1}) \rightsquigarrow (t_0 + t_1, t_2, \dots, t_{n+1}).$$

On a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\text{rig},B}^{n+1} & \xrightarrow{h} & \Delta_{\text{rig},B}^{n+1} \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{\text{rig},B}^n & \xrightarrow{s} & \Delta_{\text{rig},B}^n \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon) \end{array}$$

et h est un morphisme de $\Delta_{\text{rig},B}^{n+1}$ -affinoïdes. En particulier, pour tout $0 \leq i \leq n+1$, on dispose de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\text{rig},B}^n & \xrightarrow{h_i} & \Delta_{\text{rig},B}^n \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon) \\ \downarrow d_{n+1,i} & & \downarrow d_{n+1,i} \\ \Delta_{\text{rig},B}^{n+1} & \xrightarrow{h} & \Delta_{\text{rig},B}^{n+1} \widehat{\otimes}_k \mathbb{B}_k^r(o, \epsilon). \end{array}$$

De plus, $h_0 = s$ de sorte que $h \circ d_{n+1,0} = d_{n+1,0} \circ s$. (Cette égalité est aussi vraie pour $i = 1$, mais nous n'en aurons pas besoin.) Ainsi, la correspondance finie $\beta \circ h \in \mathbf{Cor}_B(\Delta_{\text{rig},B}^{n+1}, X^{\text{an}})$ vérifie les identités suivantes

$$\beta \circ h \circ d_{n+1,i} = \begin{cases} \tilde{\alpha} \circ s - \alpha^{\text{an}} \circ \pi \circ s & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n+1. \end{cases}$$

Puisque $(\alpha''')^{\text{an}} = \tilde{\alpha} \circ s$ et que s est une section à π , la correspondance finie $\beta \circ h$ fournit une homologie entre α^{an} et $(\alpha''')^{\text{an}}$. Ceci termine la preuve de la surjectivité (vu l'identification $\mathbf{Cor}_{B_0}(B, X_0) \simeq \mathbf{Cor}_B(B, X^{\text{an}})$).

Partie 2 : injectivité. On procède de la même manière que pour la surjectivité. Soit $\alpha \in \mathbf{Cor}_{B_0}(U_0, X_0)$, avec $U_0 \in \mathcal{V}^n(B/B_0)$, définissant un cycle dans le complexe normalisé associé au groupe simplicial $\mathbf{Cor}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)$. On suppose donnée une correspondance finie $\beta \in \mathbf{Cor}_{B_0}(B, X_0)_{n+1}$ telle que :

- (a) $\beta \circ d_{n+1,i} = 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$,
- (b) $\beta \circ d_{n+1,0} = \alpha \circ (\text{Spec}(A^{(n)}) \rightarrow U_0)$.

On cherche à montrer que l'image de α dans $\mathbf{Cor}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)$ est homologue à zéro.

Par le théorème de Popescu [34, 35] (et puisque X_0 est un B_0 -schéma de type fini), il existe une $A_0^{(n+1)}$ -algèbre lisse et de type fini E_0 , un morphisme de $A_0^{(n+1)}$ -algèbres $E_0 \rightarrow A^{(n+1)}$ et une correspondance finie $\beta' \in \mathbf{Cor}_{B_0}(\text{Spec}(E_0), X_0)$ telle que $\beta = \beta' \circ (\text{Spec}(A^{(n+1)}) \rightarrow \text{Spec}(E_0))$. Quitte à raffiner E_0 , on peut supposer que le morphisme $E_0/(t_0) \rightarrow A^{(n+1)}/(t_0) \simeq A^{(n)}$ factorise le morphisme $\Gamma(U_0, \mathcal{O}) \rightarrow A^{(n)}$.

Ainsi, on a un triangle commutatif de $A_0^{(n)}$ -schémas

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(A^{(n)}) & \longrightarrow & \text{Spec}(E_0/(t_0)) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & U_0. \end{array}$$

Quitte à raffiner E_0 d'avantage, on peut supposer que

- (a') $\beta' \circ (\text{Spec}(E_0/(t_i)) \hookrightarrow \text{Spec}(E_0)) = 0$ pour $1 \leq i \leq n + 1$,
- (b') $\beta' \circ (\text{Spec}(E_0/(t_0)) \hookrightarrow \text{Spec}(E_0)) = \alpha \circ (\text{Spec}(E_0/(t_0)) \rightarrow U_0)$.

Par le lemme 2.4.17 ci-dessous, il existe une E_0 -algèbre lisse E'_0 munie d'un morphisme de E_0 -algèbres $E'_0 \rightarrow A^{(n+1)}$ et d'un morphisme étale de $A_0^{(n+1)}$ -algèbres $A_0^{(n+1)}[s_1, \dots, s_r] \rightarrow E'_0$. On pose $\beta'' = \beta' \circ (\text{Spec}(E'_0) \rightarrow \text{Spec}(E_0))$. On a par construction :

- (a'') $\beta'' \circ (\text{Spec}(E'_0/(t_i)) \hookrightarrow \text{Spec}(E'_0)) = 0$ pour $1 \leq i \leq n + 1$,
- (b'') $\beta'' \circ (\text{Spec}(E'_0/(t_0)) \hookrightarrow \text{Spec}(E'_0)) = \alpha \circ (\text{Spec}(E'_0/(t_0)) \rightarrow U_0)$.

Notons f_i l'image de s_i par la composition de $A_0^{(n+1)}[s_1, \dots, s_r] \rightarrow E'_0 \rightarrow A^{(n+1)}$. Pour $\epsilon > 0$, on choisit $f_i^\epsilon \in A_0^{(n+1)}$ avec $|f_i - f_i^\epsilon|_\infty \leq \epsilon$ (la norme infinie étant celle de la k -algèbre affinoïde $A^{(n+1)}$). On forme un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V^\epsilon & \longrightarrow & \text{Spec}(E'_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(A_0^{(n+1)}) & \xrightarrow{(f_1^\epsilon, \dots, f_r^\epsilon)} & \text{Spec}(A_0^{(n+1)}[s_1, \dots, s_r]). \end{array}$$

Comme dans la première partie de la preuve, on sait que, pour ϵ suffisamment petit, il existe un morphisme de $\text{Spec}(A_0^{(n+1)})$ -schémas $\text{Spec}(A^{(n+1)}) \rightarrow V^\epsilon$ qui fait de V^ϵ un objet de $\mathcal{V}^{n+1}(B/B_0)$. On affirme que le diagramme

$$(2.68) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Spec}(A^{(n+1)}/(t_0)) & \longrightarrow & V^\epsilon/(t_0) & \longrightarrow & \text{Spec}(E'_0/(t_0)) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \\ \text{Spec}(A^{(n)}) & \longrightarrow & & \longrightarrow & U_0 \end{array}$$

est commutatif. En effet, si \bar{f}_j (resp. \bar{f}_j^ϵ) désigne l'image de f_j (resp. f_j^ϵ) dans $A^{(n+1)}/(t_0) \simeq A^{(n)}$ (resp. $A_0^{(n+1)}/(t_0) \simeq A_0^{(n)}$), l'analytifié de la composition de

$$\text{Spec}(A^{(n)}) \simeq \text{Spec}(A^{(n+1)}/(t_0)) \longrightarrow V^\epsilon/(t_0) \longrightarrow \text{Spec}(E'_0/(t_0)) \longrightarrow U_0$$

est égal à la composition de

$$(2.69) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spm}(A^{(n)}) & \xrightarrow{(\bar{f}_1^\epsilon, \dots, \bar{f}_r^\epsilon)} & \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_1, \epsilon) \widehat{\otimes}_{A^{(n)}} \cdots \widehat{\otimes}_{A^{(n)}} \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_r, \epsilon) \\ & & \xrightarrow{v/(t_0)} \text{Spec}(E'_0/(t_0))^{\text{an}} \longrightarrow U^{\text{an}}, \end{array}$$

avec $E' = E'_0 \otimes_{A_0^{(n+1)}} A^{(n+1)}$, $U = U_0 \times_{\text{Spec}(A_0^{(n)})} \text{Spec}(A^{(n)})$ et

$$v : \mathbb{B}_{A^{(n+1)}}^1(f_1, \epsilon) \widehat{\times}_{A^{(n+1)}} \cdots \widehat{\times}_{A^{(n+1)}} \mathbb{B}_{A^{(n+1)}}^1(f_r, \epsilon) \rightarrow \text{Spec}(E')^{\text{an}}$$

le morphisme de $\text{Spm}(A^{(n+1)})$ -variétés rigides fourni par le corollaire 1.1.56 (voir la première partie de la preuve). Or, la composition de

$$\mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_1, \epsilon) \widehat{\times}_{A^{(n)}} \cdots \widehat{\times}_{A^{(n)}} \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_r, \epsilon) \xrightarrow{v/(t_0)} \text{Spec}(E'/(t_0))^{\text{an}} \longrightarrow U^{\text{an}}$$

est un morphisme de $\text{Spm}(A^{(n)})$ -variétés rigides de source géométriquement connexe et de but étale; elle se factorise donc par la projection

$$\mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_1, \epsilon) \widehat{\times}_{A^{(n)}} \cdots \widehat{\times}_{A^{(n)}} \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_r, \epsilon) \longrightarrow \text{Spm}(A^{(n)}).$$

Il s'ensuit aussitôt que la composition de (2.69) coïncide avec celle de

$$\begin{aligned} \text{Spm}(A^{(n)}) \xrightarrow{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)} \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_1, \epsilon) \widehat{\times}_{A^{(n)}} \cdots \widehat{\times}_{A^{(n)}} \mathbb{B}_{A^{(n)}}^1(\bar{f}_r, \epsilon) \\ \xrightarrow{v/(t_0)} \text{Spec}(E'/(t_0))^{\text{an}} \longrightarrow U^{\text{an}}, \end{aligned}$$

qui n'est autre que l'analytifié du morphisme $\text{Spec}(A^{(n)}) \longrightarrow U_0$. Ceci montre bien que (2.68) est commutatif.

Il est maintenant aisé de conclure. En effet, en considérant V^ϵ comme un objet de $\mathcal{V}^{n+1}(B/B_0)$, la correspondance finie $\beta'' \circ (V^\epsilon \rightarrow \text{Spec}(E'_0)) \in \mathbf{Cor}_{B_0}(V^\epsilon, X_0)$ définit un élément $\beta''' \in \mathbf{Cor}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)_{n+1}$. D'une part, on a $\beta''' \circ d_{n+1,i} = 0$, pour $1 \leq i \leq n+1$. D'autre part, l'élément $\beta''' \circ d_{n+1,0} \in \mathbf{Cor}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)_n$ est l'image de la correspondance finie $\alpha \circ (V^\epsilon/(t_0) \rightarrow U_0) \in \mathbf{Cor}_{B_0}(V^\epsilon/(t_0), X_0)$. Vu la commutation du diagramme (2.68), il s'ensuit que l'élément $\beta''' \circ d_{n+1,0}$ est aussi égal à l'image de la correspondance finie $\alpha \in \mathbf{Cor}_{B_0}(U_0, X_0)$. Ceci montre que l'image de α est homologue à zéro comme souhaité. C.Q.F.D.

Le lemme suivant est tiré de [35]; voir aussi le lemme 2.2.64. Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons la preuve.

Lemme 2.4.17. — *On suppose donné un triangle commutatif de k -algèbres*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ \uparrow & & \nearrow \\ A_0 & & \end{array}$$

avec A_0 une k -algèbre noethérienne, E une A_0 -algèbre lisse de type fini, A une k -algèbre affinoïde réduite et $A_0 \rightarrow A$ un morphisme injectif d'image dense (lorsqu'on

munit A de la norme infinie). Il existe alors une E -algèbre lisse de type fini E' et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & E' & & \\
 & & e \curvearrowright & \uparrow & \curvearrowleft & \\
 A_0[s_1, \dots, s_r] & & & E & \longrightarrow & A \\
 & & \curvearrowleft & \uparrow & \curvearrowright & \\
 & & & A_0 & &
 \end{array}$$

avec e un morphisme étale.

Démonstration. — En remplaçant E par l'algèbre symétrique d'un E -module projectif, on se ramène au cas où le E -module des différentielles relatives Ω_{E/A_0} est libre de rang r . On se donne une présentation $p : A_0[t_1, \dots, t_n] \twoheadrightarrow E$ et on note $I = p^{-1}(0)$ son noyau. On obtient alors une suite exacte courte de E -modules

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n E \cdot dt_i \xrightarrow{\theta} \Omega_{E/A_0} \longrightarrow 0.$$

Puisque Ω_{E/A_0} est libre, il existe une matrice $(f_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq r} \in E^{n \times r}$ telle que $(\theta(\sum_{i=1}^n f_{ij} dt_i))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de Ω_{E/A_0} . On pose $\omega_j = \sum_{i=1}^n f_{ij} dt_i$. Pour tout réel $\epsilon > 0$, on choisit une matrice $(f_{ij}^\epsilon)_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq r} \in (A_0)^{n \times r}$ telle que $|f_{ij}^\epsilon - f_{ij}|_\infty \leq \epsilon$ (où la norme infinie est celle de la k -algèbre affinoïde A et où on a encore noté f_{ij} son image par le morphisme $E \rightarrow A$). On pose $\omega_j^\epsilon = \sum_{i=1}^n f_{ij}^\epsilon dt_i$.

Soit $M^\epsilon \in \text{Mat}_{r \times r}(E)$ la matrice carrée telle que

$$M^\epsilon \theta(\omega_j) = \theta(\omega_j^\epsilon) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq r.$$

L'image de la matrice M^ϵ dans $\text{Mat}_{r \times r}(A)$ tend vers la matrice identité quand ϵ tend vers zéro. Ainsi, pour ϵ suffisamment petit, l'image de la matrice M^ϵ dans $\text{Mat}_{r \times r}(A)$ est inversible. Pour un tel ϵ , le morphisme $E \rightarrow A$ se factorise par la A_0 -algèbre lisse $E[\det(M^\epsilon)^{-1}]$. On peut donc remplacer E par $E[\det(M^\epsilon)^{-1}]$ et supposer que M^ϵ est inversible. Autrement dit, $(\theta(\omega_j^\epsilon))_{1 \leq j \leq r}$ est alors une base de Ω_{E/A_0} .

On considère à présent le morphisme de A_0 -algèbres $A_0[s_1, \dots, s_r] \rightarrow A_0[t_1, \dots, t_n]$ donné par l'association $s_j \rightsquigarrow \sum_{i=1}^n f_{ij}^\epsilon t_i$, pour $1 \leq j \leq r$. D'après ce qui précède, la composition de

$$A_0[s_1, \dots, s_r] \longrightarrow A_0[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow E$$

envoie $(ds_j)_{1 \leq j \leq r}$ sur une base de Ω_{E/A_0} . Cette composition est donc un morphisme étale d'après [20, Corollaire 17.11.3]. Ceci termine la preuve du lemme. C.Q.F.D.

On termine le paragraphe en montrant comment déduire le théorème 2.4.13 du théorème 2.4.16. Soit U un B -affinoïde lisse et soient f_0, f_1, \dots, f_n des générateurs de $\Gamma(U, \mathcal{O})$ en tant qu'idéal. Il s'agit de montrer que le morphisme

$$\begin{aligned}
 \text{Colim}_{\lambda \in \sqrt{|k^\times|}, \lambda > 1} \text{H}_n \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))(D_U(\lambda f_0 | f_1, \dots, f_n)) \\
 \longrightarrow \text{H}_n \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))(D_U(f_0 | f_1, \dots, f_n))
 \end{aligned}$$

est inversible.

On peut remplacer B par U et X par $X \times_B U$, et supposer que $U = B$. Pour $\lambda \geq 1$, notons $B_\lambda = D_B(\lambda f_0 | f_1, \dots, f_n)$ et $A_\lambda = \Gamma(B_\lambda, \mathcal{O})$. Lorsque λ est suffisamment proche de 1, toute composante connexe de B_λ rencontre B_1 et A_λ s'identifie à une sous-algèbre dense de A_1 . Fixons un tel $\lambda_0 > 1$, et posons $A_0 = A_{\lambda_0}$ et $B_0 = \text{Spm}(A_0)$. Dans la suite, on prendra toujours $1 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

Par le théorème 2.4.16, on a des quasi-isomorphismes

$$\underline{\text{Cor}}_{B_0}(\mathcal{V}(B_\lambda/B_0), X \times_B B_0) \xrightarrow{\text{q.i.}} \underline{\text{Cor}}_{B_\lambda}(B_\lambda, X^{\text{an}} \widehat{\times}_B B_\lambda) = \underline{\text{Sing}}_{\bullet}^{\mathbb{B}^1}(\mathbb{Z}_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))(B_\lambda).$$

(Pour plus de conformité avec les notations 2.4.14, on aurait dû écrire $\mathcal{V}(B_\lambda/\text{Spec}(A_0))$ au lieu de $\mathcal{V}(B_\lambda/B_0)$.) Il suffit donc de montrer que le morphisme

$$(2.70) \quad \text{Colim}_{\lambda \in \sqrt{|k^\times|}, \lambda > 1} \underline{\text{Cor}}_{B_0}(\mathcal{V}(B_\lambda/B_0), X \times_B B_0) \longrightarrow \underline{\text{Cor}}_{B_0}(\mathcal{V}(B_1/B_0), X \times_B B_0)$$

est un quasi-isomorphisme. Le lemme ci-dessous montre que (2.70) est même un isomorphisme de groupes simpliciaux.

Lemme 2.4.18. — *On garde les notations ci-dessus. Soit E un B_0 -schéma étale. Supposons donné un morphisme de B_0 -variétés rigides $B_1 \rightarrow E^{\text{an}}$. Pour $1 < \lambda \leq \lambda_0$, suffisamment proche de 1, il existe un morphisme de B_0 -variétés rigides $B_\lambda \rightarrow E^{\text{an}}$ faisant commuter le triangle*

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \longrightarrow & B_\lambda \\ & \searrow & \downarrow \\ & & E^{\text{an}}. \end{array}$$

Démonstration. — On peut supposer que $E = \text{Spec}(A_0[t_1, \dots, t_n]/(P_1, \dots, P_n))$ avec $P_i \in A_0[t_1, \dots, t_n]$ tel que $\text{Jac}(P_1, \dots, P_n)$ est inversible sur E . Par hypothèse, on dispose d'un morphisme de A_0 -algèbres

$$\theta : A_0[t_1, \dots, t_n]/(P_1, \dots, P_n) \longrightarrow A_1.$$

Nous allons montrer que si λ est suffisamment proche de 1, alors $\theta(t_i) \in A_\lambda$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci prouvera le lemme.

Quitte à remplacer les t_i par des multiples bien choisis, on peut supposer que $|\theta(t_i)|_\infty < 1$ (la norme infinie étant celle de A_1). Pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\lambda > 1$ et $a_i^\epsilon \in (A_\lambda)^\circ$, pour $1 \leq i \leq n$, tels que $|\theta(t_i) - a_i^\epsilon|_\infty \leq \epsilon$ (les normes infinies étant celle de B_1).

En prenant ϵ suffisamment petit et λ suffisamment proche de 1, on peut rendre les normes $|P_i(a_1^\epsilon, \dots, a_n^\epsilon)|_\infty$, pour $1 \leq i \leq n$, arbitrairement petites (la norme infinie étant celle de B_λ). Par la première partie de la preuve du lemme 1.1.52, la suite récurrente de Newton appliquée à $(a_1^\epsilon, \dots, a_n^\epsilon)$ converge dans B_λ vers une solution du système d'équations $(P_i(t_1, \dots, t_n) = 0)_{1 \leq i \leq n}$. L'image de cette solution dans B_1 coïncide nécessairement avec la solution $(\theta(t_1), \dots, \theta(t_n))$. On en déduit que $\theta(t_i) \in B_\lambda$, pour $1 \leq i \leq n$, comme souhaité. C.Q.F.D.

2.5. La catégorie $\mathbf{RigDM}(k)$ des motifs des variétés rigides

Dans cette section, on introduit les analogues rigides analytiques des catégories des motifs mixtes $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)$ et $\mathbf{DM}(k)$ de Voevodsky. Elles seront notées $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k)$ et $\mathbf{RigDM}(k)$ respectivement. La construction de ces catégories est formelle et ne dépend que des propriétés élémentaires des correspondances finies et des préfaisceaux avec transferts développées dans la section 2.2. Toutefois, la description des groupes d'homomorphismes entre certains motifs rigides en termes de complexes de cycles à la Suslin ou, d'une manière équivalente, la description des modèles \mathbb{B}^1 -locaux de certains motifs utilise d'une manière essentielle les résultats plus élaborés obtenus dans la section 2.4.

2.5.1. Construction de $\mathbf{RigDM}(k)$ et propriétés élémentaires. — Soit k un corps valué complet dont la valuation n'est pas supposée non triviale. On fixe un anneau commutatif Λ (que l'on appellera parfois l'anneau des coefficients). On commence par rappeler et étendre au cas Λ -linéaire certains résultats du paragraphe 2.2.2.

Proposition 2.5.1. — *Soit B une k -variété rigide lisse. Étant donnée une B -variété rigide V , on note $\Lambda_{\text{tr}}(V)$ le préfaisceau avec transferts sur SmAfd/B qui à un B -affinoïde lisse U associe le Λ -module $\mathbf{Cor}_B(U, V) \otimes \Lambda$.*

1) *Pour toute B -variété rigide V , le préfaisceau $\Lambda_{\text{tr}}(V)$ est un faisceau étale (et donc aussi un faisceau Nisnevich) sur SmAfd/B .*

2) *Pour toute B -variété rigide V et tout recouvrement Nisnevich $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ de V par des morphismes étales, le complexe de Čech*

$$(2.71) \quad \cdots \longrightarrow \bigoplus_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} \Lambda_{\text{tr}}(V_{i_1} \widehat{\times}_V \cdots \widehat{\times}_V V_{i_n}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{\text{tr}}(V_i) \longrightarrow \Lambda_{\text{tr}}(V) \longrightarrow 0$$

est acyclique en tant que complexe de faisceaux Nisnevich sur SmAfd/B .

Démonstration. — On considère d'abord la première assertion. Lorsque $B = \text{Spm}(k)$ et $\Lambda = \mathbb{Z}$, il s'agit de la proposition 2.2.23. La preuve de ladite proposition s'étend sans modification au cas général.

De même, la seconde assertion a été démontrée dans le paragraphe 2.2.2 lorsque $B = \text{Spm}(k)$ et $\Lambda = \mathbb{Z}$; il s'agit en effet de la proposition 2.2.25. Là encore, la preuve de ladite proposition s'étend sans modification au cas général. Alternativement, on peut remarquer que le préfaisceau $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(W)$, pour W une B -variété rigide, est sans torsion, i.e., prend ses valeurs dans la catégorie des \mathbb{Z} -modules plats. Or, le foncteur $- \otimes \Lambda$ préserve les équivalences Nis-locales entre complexes de préfaisceaux sans torsion. Ceci permet de déduire l'acyclicité du complexe de l'énoncé à partir de l'acyclicité du complexe de la proposition 2.2.25 (du moins lorsque $B = \text{Spm}(k)$). C.Q.F.D.

Notation 2.5.2. — On fixe une k -variété rigide lisse B et on considère une sous-catégorie pleine $\mathcal{V} \subset \text{SmRig}/B$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) La catégorie \mathcal{V} contient les classes d'isomorphisme de tous ses objets. Elle est stable par coproduit direct fini, produit direct fini et passage aux composantes connexes. (Noter que le produit direct dans SmRig/B est donné par le produit fibré au-dessus de B .)
- (ii) Si X est une B -variété rigide lisse, il existe un recouvrement admissible $(X_i)_{i \in I}$ de X par des ouverts affinoïdes appartenant à $\text{Ob}(\mathcal{V})$.
- (iii) Si X est une B -variété rigide lisse appartenant à $\text{Ob}(\mathcal{V})$ et si $U \subset X$ est un ouvert affinoïde de X , la B -variété rigide U appartient à $\text{Ob}(\mathcal{V})$.
- (iv) Si $U \subset (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ est un ouvert quasi-compact strict (et donc nécessairement affinoïde) et si X est une B -variété rigide lisse appartenant à $\text{Ob}(\mathcal{V})$, la B -variété rigide $U \widehat{\times}_k X$ appartient à $\text{Ob}(\mathcal{V})$.

Étant donnée une B -variété rigide V , on note encore $\Lambda_{\text{tr}}(V)$ la restriction à \mathcal{V} de l'unique extension de $\Lambda_{\text{tr}}(V)$ (comme défini dans la proposition 2.5.1) en un faisceau étale avec transferts sur SmRig/B . Ainsi, $\Lambda_{\text{tr}}(V)$ est un faisceau étale avec transferts de Λ -modules sur \mathcal{V} . La proposition 2.2.35, étendue au cas Λ -linéaire, montre que le Λ -module $\Lambda_{\text{tr}}(V)(U)$, lorsque U possède un nombre fini de composantes connexes, est librement engendré par les sous-variétés rigides fermées, réduites et irréductibles de $U \widehat{\times}_B V$, qui sont finies, surjectives et équidimensionnelles sur une composante connexe de U . Il s'ensuit que $\Lambda_{\text{tr}}(V) = \mathbb{Z}_{\text{tr}}(V) \otimes \Lambda$, où le produit tensoriel est pris dans la catégorie des préfaisceaux qui transforment les sommes disjointes en produits directs. Lorsque V appartient à $\text{Ob}(\mathcal{V})$, on en déduit que $\Lambda_{\text{tr}}(V)$ est un objet projectif de la catégorie des préfaisceaux avec transferts sur \mathcal{V} à valeurs dans la catégorie des Λ -modules.

On appelle $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)$ la catégorie des préfaisceaux avec transferts de Λ -modules sur \mathcal{V} . De même, on appelle $\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)$ la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts de Λ -modules sur \mathcal{V} . Les catégories $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)$ et $\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)$ sont abéliennes de Grothendieck. (Pour $\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)$, ceci découle du corollaire 2.5.3 ci-dessous.) De plus, la catégorie $\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)$ est indépendante du choix de \mathcal{V} à équivalence près. En effet, la restriction à \mathcal{V} fournit une équivalence de catégories

$$\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/B, \Lambda) \simeq \mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda).$$

Dans la suite et sauf mention du contraire, un préfaisceau avec transferts sera implicitement supposé défini sur \mathcal{V} et à valeurs dans la catégorie des Λ -modules.

Corollaire 2.5.3. — *Soit F un préfaisceau avec transferts (sur \mathcal{V} et à valeurs dans la catégorie des Λ -modules). Il existe une unique structure de préfaisceau avec transferts sur $\mathfrak{a}_{\text{Nis}}(F)$ tel que le morphisme évident $F \rightarrow \mathfrak{a}_{\text{Nis}}(F)$ soit un morphisme de préfaisceaux avec transferts.*

Démonstration. — Lorsque $B = \mathrm{Spm}(k)$ et $\Lambda = \mathbb{Z}$, il s'agit du corollaire 2.2.26. La preuve dudit corollaire s'étend sans modification au cas des préfaisceaux de Λ -modules en utilisant la seconde assertion de la proposition 2.5.1 (à la place de la proposition 2.2.25). C.Q.F.D.

Remarque 2.5.4. — On dispose d'un foncteur

$$(2.72) \quad a_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}} : \mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{Str}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)$$

qui à un préfaisceau avec transferts F sur \mathcal{V} associe le faisceau Nisnevich $a_{\mathrm{Nis}}(F)$ vu comme un faisceau Nisnevich avec transferts grâce au corollaire 2.5.3. Le foncteur $a_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}$ est un adjoint à gauche de l'inclusion évidente.

Lemme 2.5.5. — Notons \mathbf{W} la classe des quasi-isomorphismes de complexes de préfaisceaux avec transferts.

1) Notons $\mathbf{Fib}_{\mathrm{proj}}$ la classe des épimorphismes de complexes de préfaisceaux avec transferts et $\mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}$ celle des morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux flèches dans $\mathbf{W} \cap \mathbf{Fib}_{\mathrm{proj}}$. Alors, le triplet $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{proj}})$ est une structure de modèles sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ appelée la structure projective.

2) Notons $\mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}$ la classe des monomorphismes de complexes de préfaisceaux avec transferts et $\mathbf{Fib}_{\mathrm{inj}}$ celle des morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches dans $\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}$. Alors, le triplet $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{inj}})$ est une structure de modèles sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ appelée la structure injective.

Démonstration. — On peut prouver l'existence de la structure projective sur $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)$ en adaptant la preuve de [3, Proposition 4.4.16]. L'existence de la structure injective découle du théorème de Joyal [27] valable pour toute catégorie abélienne de Grothendieck. C.Q.F.D.

Les catégories de modèles du lemme 2.5.5 sont Quillen équivalentes et présentables par cofibrations au sens de [3, Définition 4.2.39]. La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$ relativement à ces structures est la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ de la catégorie abélienne des préfaisceaux avec transferts.

Définition 2.5.6. — Soit F un complexe de préfaisceaux avec transferts. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $H_n(F)$ le n -ième préfaisceau d'homologie de F ; c'est un préfaisceau avec transferts.

1) Un morphisme $A \rightarrow B$ de complexes de préfaisceaux avec transferts est une équivalence Nis-locale, si le morphisme $a_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(H_n(A)) \rightarrow a_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}(H_n(B))$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbf{W}_{\mathrm{Nis}}$ la classe des équivalences Nis-locales.

2) Un complexe de préfaisceaux avec transferts K est Nis-local si pour toute équivalence Nis-locale de préfaisceaux avec transferts $A \rightarrow B$, l'homomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{D}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))}(B, K) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{D}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))}(A, K)$$

est bijectif. (Un complexe de préfaisceaux avec transferts est Nis-local si et seulement si il est projectivement Nis-fibrant ; voir ci-dessous.)

Théorème 2.5.7. — *Les localisations de Bousfield des structures de modèles projective et injective sur la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ relativement à la classe des équivalences Nis-locales existent. De plus, \mathbf{W}_{Nis} est exactement la classe des équivalences faibles de ces structures de modèles localisées qu'on note $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-Nis}})$ et $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-Nis}})$ et qu'on appelle les structures projective et injective Nis-locales.*

Démonstration. — Soit α un cardinal suffisamment grand. On supposera que α est plus grand que le cardinal d'une petite catégorie équivalente à $\mathbf{Cor}(\mathcal{V})$ et que $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ munie de sa structure injective est α -présentable par cofibrations. On prend alors un cardinal β comme dans [3, Proposition 4.2.41], i.e., qui est de la forme 2^ν et qui est plus grand que le cardinal d'une petite catégorie équivalente à la sous-catégorie des objets α -accessibles de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$.

On note \mathcal{R}_β la classe des monomorphismes de complexes de préfaisceaux avec transferts de buts β -accessibles qui sont des équivalences Nis-locales. La classe \mathcal{R}_β est essentiellement petite. Par le théorème de Hirschhorn [24] (voir aussi [3, Théorème 4.2.71]), les localisations de Bousfield des structures projective et injective suivant \mathcal{R}_β existent et elles sont Quillen équivalentes. On note $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$ la classe des équivalences faibles des structures \mathcal{R}_β -localisées ; cette classe est la même que l'ont localise la structure projective ou la structure injective. Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta} = \mathbf{W}_{\text{Nis}}$. Dans la suite de la preuve, les flèches dans $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$ sont provisoirement appelées les équivalences \mathcal{R}_β -locales.

À partir de maintenant, on travaillera exclusivement avec les structures injectives. Montrons d'abord l'inclusion $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta} \subset \mathbf{W}_{\text{Nis}}$. Notons $\text{Loc}_{\mathcal{R}_\beta}$ le foncteur de \mathcal{R}_β -localisation (voir [3, Proposition 4.2.72]). Soit $f : K \rightarrow L$ une équivalence \mathcal{R}_β -locale. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{l_K} & \text{Loc}_{\mathcal{R}_\beta}(K) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{Loc}_{\mathcal{R}_\beta}(f) \\ L & \xrightarrow{l_L} & \text{Loc}_{\mathcal{R}_\beta}(L), \end{array}$$

où $\text{Loc}_{\mathcal{R}_\beta}(f)$ est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux avec transferts, et l_K et l_L appartiennent à $\text{Cell}(\nabla_\infty(\mathcal{R}_\beta) \cup (\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}_{\text{inj}}))$ avec les notations de [3, Définitions 4.2.24 et 4.2.63]. Comme \mathbf{W}_{Nis} est stable par colimites filtrantes et $\mathbf{W}_{\text{Nis}} \cap \mathbf{Cof}_{\text{inj}}$ par cochangements de base (alias « push-out »), on déduit que l_K et l_L sont dans \mathbf{W}_{Nis} . Il s'ensuit que f est une équivalence Nis-locale puisque \mathbf{W}_{Nis} possède la propriété « 2 de 3 ».

Montrons maintenant l'inclusion $\mathbf{W}_{\text{Nis}} \subset \mathbf{W}_{\mathcal{R}_\beta}$. Soit $f : K \rightarrow L$ une équivalence Nis-locale ; on cherche à montrer que f est une équivalence \mathcal{R}_β -locale. On ne

restreint pas la généralité en supposant que f est un monomorphisme. (En effet, tout morphisme de complexes de préfaisceaux avec transferts peut s'écrire comme la composition d'un monomorphisme suivi d'un quasi-isomorphisme.) On note $\text{Sub}(f)$ l'ensemble des sous-flèches de f (i.e., des sous-objets de la flèche f considérée comme un objet de la catégorie $\underline{\mathbf{HOM}}(\mathbf{1}, \mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda))$). On notera $\text{Sub}^{\text{Nis}}(f) \subset \text{Sub}(f)$ le sous-ensemble des sous-flèches qui sont des équivalences Nis-locales. On désignera par $\text{Sub}_\beta(f)$ et $\text{Sub}_\beta^{\text{Nis}}(f)$ les sous-ensembles de $\text{Sub}(f)$ et $\text{Sub}^{\text{Nis}}(f)$ formés des sous-flèches de buts β -accessibles. On peut adapter la preuve de [3, Lemme 4.4.32] pour montrer que l'inclusion $\text{Sub}_\beta^{\text{Nis}}(f) \subset \text{Sub}_\beta(f)$ est cofinale. Remarquons que les éléments de $\text{Sub}_\beta^{\text{Nis}}(f)$ sont des équivalences \mathcal{R}_β -locales.

Pour conclure, on choisit une sous-flèche $g : K \rightarrow M$ de f qui est une équivalence \mathcal{R}_β -locale et qui est maximale pour cette propriété. Une telle sous-flèche existe par le lemme de Zorn. Supposons par l'absurde que $M \subsetneq L$. Considérons le diagramme d'ensembles ordonnés

$$(2.73) \quad \begin{array}{ccc} \text{Sub}_\beta^{\text{Nis}}(f) & & \text{Sub}_\beta^{\text{Nis}}(g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sub}_\beta(f) & \longrightarrow & \text{Sub}_\beta(g) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions évidentes et la flèche horizontale associée à une sous-flèche f_0 de f , la sous-flèche $g_0 = g \cap f_0$ de g . Par [3, Lemme 4.2.4], la limite projective de (2.73) est cofinale dans $\text{Sub}_\beta(f)$. On peut donc trouver une sous-flèche f_0 de f de but β -accessible, non contenue dans g et telle que f_0 et $g_0 = f_0 \cap g$ sont des équivalences Nis-locales et donc des équivalences \mathcal{R}_β -locales. On déduit que $g' = g \cup f_0 = g \coprod_{g_0} f_0$ est également une équivalence \mathcal{R}_β -locale. Ceci contredit la maximalité de g . D'où le résultat. C.Q.F.D.

Les catégories de modèles Nis-locales du théorème 2.5.7 sont présentables par cofibrations (cette propriété étant conservée par localisation de Bousfield suivant un ensemble de flèches). On notera $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$ la catégorie homotopique des structures Nis-locales. C'est une catégorie triangulée qui est indépendante (à équivalence triangulée près) du choix de \mathcal{V} . Ceci découle de la proposition 2.5.9 ci-dessous et du fait que la catégorie $\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)$ est indépendante (à équivalence près) du choix de \mathcal{V} . Pour formuler ladite proposition, on note le résultat suivant.

Lemme 2.5.8. — *Notons \mathbf{W} la classe des quasi-isomorphismes de complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts et \mathbf{Cof} celle des monomorphismes. Notons \mathbf{Fib} la classe des morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches dans $\mathbf{W} \cap \mathbf{Cof}$. Alors, le triplet $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib})$ est une structure de modèles sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda))$.*

Démonstration. — Ceci découle du théorème de Joyal [27] qui est valable pour toute catégorie abélienne de Grothendieck. C.Q.F.D.

La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)))$ est la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda))$ de la catégorie abélienne des faisceaux Nisnevich avec transferts.

Proposition 2.5.9. — *Le foncteur*

$$a_{\text{Nis}}^{\text{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda))$$

est une équivalence de Quillen à gauche lorsqu'on munit $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ de l'une de ses structures Nis-locales.

Démonstration. — Le foncteur $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ est exact. Il préserve donc les monomorphismes, i.e., les cofibrations injectives. D'autre part, $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(f)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si f est une équivalence Nis-locale. Il s'ensuit que $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ est un foncteur de Quillen à gauche, qu'il se dérive trivialement et que son foncteur dérivé $\text{La}_{\text{Nis}}^{\text{tr}} \simeq a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ est conservatif.

Nous devons montrer que le foncteur $\text{La}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ est une équivalence de catégories. Notons inc l'adjoint à droite du foncteur $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$. Étant donné que $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ se dérive trivialement, le morphisme de counité $\delta : \text{La}_{\text{Nis}}^{\text{tr}} \circ \text{Rinc} \rightarrow \text{id}$ est inversible. D'autre part, si l'on applique $\text{La}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ au morphisme d'unité $\eta : \text{id} \rightarrow \text{Rinc} \circ \text{La}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$, on obtient l'inverse de δ appliqué à $\text{La}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$. Comme le foncteur $\text{La}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$ est conservatif, on déduit que le morphisme d'unité est aussi inversible. La proposition est prouvée. C.Q.F.D.

Rappelons (voir la définition 1.2.22) qu'un carré Nisnevich

$$(2.74) \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow e \\ U & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

est un carré cartésien de variétés rigides quasi-compactes avec u une immersion ouverte, et e un morphisme étale à bonne réduction et induisant un isomorphisme $Y - V \simeq X - U$ (voir le lemme 1.2.23). La propriété de Brown-Gersten (voir la définition 1.2.29) garde un sens dans le contexte des préfaisceaux avec transferts.

Définition 2.5.10. — *Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur la catégorie $\text{SmRig}^{\text{qc}}/B$ des B -variétés rigides lisses et quasi-compactes (au-dessus de k). On dit que K vérifie la propriété de Brown-Gersten si pour tout carré Nisnevich (2.74) dans $\text{SmRig}^{\text{qc}}/B$, le carré de complexes de Λ -modules*

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \longrightarrow & K(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(Y) & \longrightarrow & K(V) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien (et donc aussi homotopiquement cocartésien)⁽¹⁶⁾.

La propriété de Brown-Gersten ne dépend que de la classe d'isomorphisme de K dans $\mathbf{D}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/B, \Lambda))$. Elle est stable par les produits directs et coproduits

directs arbitraires. Elle satisfait également à la propriété « 2 de 3 » dans les triangles distingués. On a le résultat suivant.

Proposition 2.5.11. — *Soit $a : K \rightarrow L$ un morphisme de complexes de préfaisceaux avec transferts sur $\mathbf{SmRig}^{\text{qc}}/B$. Supposons que a est une équivalence Nis-locale, et que K et L vérifient la propriété de Brown-Gersten. Alors, a est un quasi-isomorphisme de préfaisceaux avec transferts.*

Démonstration. — La proposition découle directement du théorème 1.2.30. C.Q.F.D.

Théorème 2.5.12. — *Un complexe de préfaisceaux avec transferts sur $\mathbf{SmRig}^{\text{qc}}/B$ est Nis-local si et seulement si il vérifie la propriété de Brown-Gersten. En particulier, la classe des objets Nis-locaux de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathbf{SmRig}^{\text{qc}}/B, \Lambda))$ est stable par colimites filtrantes.*

Démonstration. — Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur $\mathbf{SmRig}^{\text{qc}}/B$. Supposons d'abord que K est Nis-local et montrons qu'il vérifie la propriété de Brown-Gersten. Donnons-nous un carré Nisnevich (2.74) dans $\mathbf{SmRig}^{\text{qc}}/B$. Grâce à la seconde partie de la proposition 2.5.1, le carré de préfaisceaux avec transferts

$$(2.75) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_{\text{tr}}(V) & \longrightarrow & \Lambda_{\text{tr}}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_{\text{tr}}(U) & \longrightarrow & \Lambda_{\text{tr}}(X) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien (et donc aussi homotopiquement cocartésien) relativement à la structure de modèles projective Nis-locale. (En effet, le complexe simple associé au carré (2.75), vu comme bicomplexe, est quasi-isomorphe au complexe de Čech (2.71) du recouvrement Nisnevich ($U \rightarrow X, Y \rightarrow X$).) Il s'ensuit que le morphisme de complexes de préfaisceaux avec transferts

$$(2.76) \quad [\Lambda_{\text{tr}}(V) \rightarrow \Lambda_{\text{tr}}(Y)] \longrightarrow [\Lambda_{\text{tr}}(U) \rightarrow \Lambda_{\text{tr}}(X)]$$

est une équivalence Nis-locale. Comme K est un complexe Nis-local, il s'ensuit que

$$\text{Cône}(K(X) \rightarrow K(U)) \longrightarrow \text{Cône}(K(Y) \rightarrow K(V))$$

est un quasi-isomorphisme. D'où le résultat.

On suppose maintenant que K vérifie la propriété de Brown-Gersten. On cherche à montrer que K est Nis-local. On choisit pour cela une équivalence Nis-locale $f : K \rightarrow L$ avec L un complexe de préfaisceaux avec transferts projectivement Nis-fibrant. Alors L est Nis-local et, d'après l'argument ci-dessus, il vérifie aussi la propriété de Brown-Gersten. Puisque f est une équivalence Nis-locale, et que K et L vérifient la propriété de Brown-Gersten, la proposition 2.5.11 entraîne que f est un

⁽¹⁶⁾ Pour un complexe de préfaisceaux avec transferts K on a toujours $K(\emptyset) = 0$ par additivité. Il n'y a donc pas besoin d'imposer une condition de contractibilité au-dessus de la B -variété rigide vide comme c'était le cas dans la définition 1.2.29.

quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux. Puisque L est Nis-local, il en est donc de même de K comme souhaité. C.Q.F.D.

On déduit du théorème précédent qu'un complexe de préfaisceaux avec transferts sur $\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/B$ est projectivement Nis-fibrant si et seulement si il vérifie la propriété de Brown-Gersten. Voici deux autres conséquences du théorème 2.5.12.

Corollaire 2.5.13. — *Les localisations de Bousfield suivant la classe des équivalences Nis-locales des structures de modèles projective et injective sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/B, \Lambda))$ coïncident avec les localisations de Bousfield suivant la classe des morphismes $\Lambda_{\mathrm{tr}}(Y)/\Lambda_{\mathrm{tr}}(V)[n] \rightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)/\Lambda_{\mathrm{tr}}(U)[n]$ (avec $n \in \mathbb{Z}$) obtenus à partir des carrés Nisnevich (2.74) dans $\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/B$.*

Corollaire 2.5.14. — *Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur \mathcal{V} . Pour X dans \mathcal{V} et $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme canonique*

$$(2.77) \quad \mathrm{H}_{\mathrm{Nis}}^n(X, K) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{HoNis}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X), K[n]),$$

où $\mathrm{H}_{\mathrm{Nis}}^n(X, K)$ est le n -ième groupe d'hypercohomologie Nisnevich de X à valeurs dans K , est un isomorphisme. En particulier, le préfaisceau d'hypercohomologie $\mathrm{H}_{\mathrm{Nis}}^n(-, K)$ est naturellement un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{V} .

Démonstration. — On peut supposer que $\mathcal{V} = \mathrm{SmRig}/B$. En effet, l'hypercohomologie dépend uniquement du faisceau Nisnevich associé à K et ce dernier s'étend naturellement à SmRig/B . De même, la catégorie homotopique $\mathbf{HoNis}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$ ne dépend pas, à équivalence près, du choix de \mathcal{V} .

Soit $K \rightarrow L$ une équivalence Nis-locale avec L un complexe de préfaisceaux avec transferts projectivement Nis-fibrant (i.e., Nis-local). Les deux membres de (2.77) ne changent pas (à isomorphisme près) si on y remplace K par L . On peut donc supposer que K est Nis-local.

Pour X une B -variété rigide lisse, on note $K|_X$ la restriction de K au petit site $(\mathrm{Et}/X, \mathrm{Nis})$. Soit $r : K|_X \rightarrow I$ un équivalence Nis-locale avec I un complexe de préfaisceaux projectivement Nis-fibrant (i.e., Nis-local) sur le petit site Et/X . Pour démontrer le lemme, on doit prouver que r est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux.

Montrons d'abord que la restriction de $r : K|_X \rightarrow I$ à $\mathrm{Et}^{\mathrm{qc}}/X$ est un quasi-isomorphisme. Par le théorème 2.5.12, K (ou plutôt sa restriction à $\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/B$) vérifie la propriété de Brown-Gersten. De même, par le corollaire 1.2.32, I (ou plutôt sa restriction à $\mathrm{Et}^{\mathrm{qc}}/X$) vérifie la propriété de Brown-Gersten. Le résultat découle alors du théorème 1.2.30.

Pour conclure, considérons une X -variété rigide étale Y et montrons que le morphisme $K(Y) \rightarrow I(Y)$ est un quasi-isomorphisme. On peut écrire Y comme une union croissante d'ouverts quasi-compacts $Y = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} Y_r$. Les Y_r sont donc dans $\mathrm{Et}^{\mathrm{qc}}/X$ et, d'après ce qui précède, on sait que les morphismes $K(Y_r) \rightarrow I(Y_r)$ sont des quasi-isomorphismes. Or, on a un isomorphisme canonique dans la catégorie des faisceaux

Nisnevich avec transferts $\Lambda_{\mathrm{tr}}(Y) \simeq \mathrm{Colim}_{r \in \mathbb{N}} \Lambda_{\mathrm{tr}}(Y_r)$. Puisque K est Nis-local, on en déduit un isomorphisme $K(Y) \simeq \mathrm{HoLim}_{r \in \mathbb{N}} K(Y_r)$ dans $\mathbf{D}(\Lambda)$. Un argument similaire fournit un isomorphisme $I(Y) \simeq \mathrm{HoLim}_{r \in \mathbb{N}} I(Y_r)$. Ceci permet de conclure. C.Q.F.D.

La prochaine étape dans la construction des catégories triangulées des motifs rigides consiste à forcer la contractibilité de la boule de Tate; c'est l'étape de la \mathbb{B}^1 -localisation.

Définition 2.5.15. — *On note*

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{proj}-\mathbb{B}^1}) \quad \text{et} \quad (\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{inj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{inj}-\mathbb{B}^1})$$

les structures de modèles projective et injective \mathbb{B}^1 -locales sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ obtenues par localisation de Bousfield suivant la classe des morphismes

$$\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{B}_X^1)[n] \longrightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)[n],$$

avec $n \in \mathbb{Z}$ et $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, à partir des structures Nis-locales du théorème 2.5.7. On pose

$$\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda) = \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{SmRig}/B, \Lambda)) [(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1})^{-1}].$$

C'est la catégorie triangulée des motifs rigides effectifs (au-dessus de B).

La catégorie $\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda)$ est équivalente à la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$ des structures de modèles \mathbb{B}^1 -locales sur la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$. On dispose également d'une structure de modèles \mathbb{B}^1 -locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{B}^1})$ sur la catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda))$ qui est obtenue, à partir de la structure de modèles du lemme 2.5.8, par localisation de Bousfield suivant la classe des morphismes $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{B}_X^1)[n] \rightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)[n]$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, comme dans la définition 2.5.15. La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)))$ de cette structure de modèles \mathbb{B}^1 -locale est également équivalente à $\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda)$.

Définition 2.5.16. — *Le motif effectif d'une B -variété rigide lisse X est le préfaisceau avec transferts $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ placé en degré zéro et considéré comme un objet de $\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda)$. On le notera $M^{\mathrm{eff}}(X)$.*

On note le lemme suivant.

Lemme 2.5.17. — *Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur \mathcal{V} projectivement Nis-fibrant. Alors K est \mathbb{B}^1 -local si et seulement si $K(X) \rightarrow K(\mathbb{B}_X^1)$ est un quasi-isomorphisme pour tout X dans \mathcal{V} . En particulier, la classe d'objets projectivement \mathbb{B}^1 -fibrants dans $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{SmRig}^{\mathrm{qc}}/B, \Lambda))$ est stable par colimite filtrantes.*

Démonstration. — La première assertion est une conséquence facile des définitions (voir notamment [3, Définition 4.2.63]) et du fait que nos catégories homotopiques sont triangulées. Pour la dernière assertion, on utilise le théorème 2.5.12. C.Q.F.D.

Avant de passer à la dernière étape de la construction des catégories triangulées des motifs rigides (i.e., l'étape de la stabilisation) faisons une liste de quelques adjonctions de Quillen utiles. On dispose d'un foncteur « oubli des transferts »

$$(2.78) \quad \mathfrak{o}_{\text{tr}} : \mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda).$$

Le résultat suivant est standard.

Lemme 2.5.18. — *Le foncteur (2.78) admet un adjoint à gauche*

$$(2.79) \quad \mathfrak{a}_{\text{tr}} : \mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)$$

appelé le foncteur « ajout des transferts ». Ce foncteur commute aux colimites arbitraires et envoie le préfaisceau $X \otimes \Lambda$ sur $\Lambda_{\text{tr}}(X)$, pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{V})$.

Démonstration. — Rappelons que $X \otimes \Lambda$ est le préfaisceau de Λ -modules qui envoie $U \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ sur le Λ -module $\text{hom}_B(U, X) \otimes \Lambda$, i.e., le Λ -module librement engendré par les B -morphisms de U dans X .

Étant donné un préfaisceau de Λ -modules F sur \mathcal{V} , on peut trouver une résolution projective de la forme

$$(2.80) \quad \bigoplus_{j \in J} Y_j \otimes \Lambda \xrightarrow{A} \bigoplus_{i \in I} X_i \otimes \Lambda \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

avec X_i et Y_j des objets de \mathcal{V} . La première flèche ci-dessus est donnée par une matrice

$$A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J} \in \prod_{j \in J} \bigoplus_{i \in I} \text{hom}(Y_j, X_i) \otimes \Lambda.$$

On peut aussi considérer A comme une matrice dans

$$\prod_{j \in J} \bigoplus_{i \in I} \mathbf{Cor}(Y_j, X_i) \otimes \Lambda.$$

Ceci permet de former la suite exacte de préfaisceaux avec transferts

$$(2.81) \quad \bigoplus_{j \in J} \Lambda_{\text{tr}}(Y_j) \xrightarrow{A} \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{\text{tr}}(X_i) \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Étant donné un préfaisceau avec transferts H , on déduit de (2.80) un isomorphisme (naturel en H)

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)}(F, \mathfrak{o}_{\text{tr}}(H)) \simeq \text{Ker} \left(\prod_{i \in I} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)}(X_i \otimes \Lambda, \mathfrak{o}_{\text{tr}}(H)) \xrightarrow{tA} \prod_{j \in J} \text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)}(Y_j \otimes \Lambda, \mathfrak{o}_{\text{tr}}(H)) \right).$$

Or, pour tout $V \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, on a des isomorphismes (naturels en H)

$$\text{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)}(V \otimes \Lambda, \mathfrak{o}_{\text{tr}}(H)) \simeq \mathfrak{o}_{\text{tr}}(H)(V) = H(V) \simeq \text{hom}_{\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)}(\Lambda_{\text{tr}}(V), H).$$

Il s'ensuit donc un isomorphisme (naturel en H)

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)}(F, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(H)) \simeq \mathrm{Ker} \left(\prod_{i \in I} \mathrm{hom}_{\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X_i), H) \xrightarrow{tA} \prod_{j \in J} \mathrm{hom}_{\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(Y_j), H) \right).$$

Vu la suite exacte de préfaisceaux avec transferts (2.81), ceci fournit un isomorphisme (naturel en H)

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)}(F, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(H)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)}(G, H).$$

Ainsi, on a démontré que le foncteur $\mathrm{hom}_{\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)}(F, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(-))$ est coreprésenté par le préfaisceau avec transferts G . Ceci termine la preuve du lemme. C.Q.F.D.

Proposition 2.5.19. — *Le foncteur*

$$a_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{V}, \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$$

est de Quillen à gauche lorsqu'on munit la source et le but des structures projectives, projectives Nis-locales ou projectives \mathbb{B}^1 -locales. On dispose en particulier d'un foncteur triangulé

$$L_{a_{\mathrm{tr}}} : \mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda)$$

qu'on notera simplement a_{tr} lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

Démonstration. — L'adjonction $(a_{\mathrm{tr}}, \mathrm{o}_{\mathrm{tr}})$ est de Quillen relativement aux structures projectives non localisées. En effet, o_{tr} préserve les épimorphismes et les quasi-isomorphismes puisqu'il est exact.

Montrons que cette adjonction passe à la localisation par les équivalences Nis-locales. Il suffit pour cela de montrer que o_{tr} préserve les objets projectivement Nis-fibrants, i.e., Nis-locaux. Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts Nis-local. Soit $u : \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(K) \rightarrow I$ une équivalence Nis-locale avec I un complexe de préfaisceaux Nis-local. Nous allons montrer que u est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux ce qui permettra de conclure. Soient $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ et $i \in \mathbb{Z}$. Par le corollaire 2.5.14, on dispose d'un isomorphisme naturel $H_i(K(X)) \simeq H_{\mathrm{Nis}}^{-i}(X, K)$. De même, on a un isomorphisme naturel $H_i(I(X)) \simeq H_{\mathrm{Nis}}^{-i}(X, I)$. (On peut justifier cet isomorphisme en utilisant [3, Théorème 4.4.50] et le fait que le foncteur évident $(\mathrm{Et}/X) \cap (\mathcal{V}/X) \rightarrow \mathcal{V}$ est un pseudo-morphisme de sites au sens de [3, Définition 4.4.49]; une autre façon consiste à invoquer une version sans transferts du corollaire 2.5.14.) Vu que $H_{\mathrm{Nis}}^{-i}(X, K) \simeq H_{\mathrm{Nis}}^{-i}(X, I)$, il s'ensuit que le morphisme $H_i(K(X)) \rightarrow H_i(I(X))$ est un isomorphisme. Le morphisme u est donc bien un quasi-isomorphisme comme souhaité.

Le passage des structures de modèles Nis-locales aux structures de modèles \mathbb{B}^1 -locales est immédiat et sera laissé au lecteur. C.Q.F.D.

Supposons que B est un k -affinoïde lisse. Rappelons qu'on dispose d'un foncteur $\text{Rig} : \text{Sm}/B \rightarrow \text{SmRig}/B$ qui à un B -schéma lisse de type fini X associe la B -variété rigide X^{an} . On note également $\text{Rig} : \mathbf{Cor}(B) \rightarrow \mathbf{RigCor}(B)$ le foncteur additif qui, à une B -correspondance finie élémentaire $Z \subset X \times_B Y$ entre deux B -schémas lisses X et Y , associe la correspondance finie $Z^{\text{an}} \subset X^{\text{an}} \widehat{\times}_B Y^{\text{an}}$. Le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Sm}/B & \xrightarrow{\text{Rig}} & \text{SmRig}/B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Cor}(B) & \xrightarrow{\text{Rig}} & \mathbf{RigCor}(B) \end{array}$$

est clairement commutatif. Étant donné un préfaisceau avec transferts G sur SmRig/B , on pose $\text{Rig}_*(G) = G \circ \text{Rig}$. Le foncteur Rig_* possède un adjoint à gauche

$$(2.82) \quad \text{Rig}^* : \mathbf{PreStr}(\text{Sm}/B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/B, \Lambda).$$

L'existence de cet adjoint s'obtient par la même méthode que celle de la preuve du lemme 2.5.18. Le foncteur (2.82) commute aux colimites arbitraires et envoie $\Lambda_{\text{tr}}(X)$, pour X un B -schéma lisse, sur $\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})$. Bien entendu, le foncteur Rig_* pour les préfaisceaux sans transferts possède également un adjoint à gauche

$$(2.83) \quad \text{Rig}^* : \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/B, \Lambda)$$

qui envoie $X \otimes \Lambda$, pour X un B -schéma lisse, sur $X^{\text{an}} \otimes \Lambda$.

Lemme 2.5.20. — *Notons $\text{inc} : \mathbf{AfnCor}(B) \hookrightarrow \mathbf{RigCor}(B)$ l'inclusion évidente et inc_* le foncteur de composition à gauche par inc . Alors, le foncteur composé*

$$\text{inc}_* \circ \text{Rig}^* : \mathbf{PreStr}(\text{Sm}/B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{PreStr}(\text{SmAfn}/B, \Lambda)$$

est exact.

Démonstration. — Pour X un B -affinoïde lisse, on note $\mathcal{L}(X)$ la catégorie des couples (M, p) où M est un B -schéma affine, de type fini et lisse, et $p : X \rightarrow M^{\text{an}}$ est un morphisme de B -variétés rigides. La donnée de p équivaut à celle d'un morphisme de $\Gamma(B, \mathcal{O})$ -algèbres $\Gamma(M, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})$. Puisque $\Gamma(X, \mathcal{O})$ est une $\Gamma(B, \mathcal{O})$ -algèbre régulière, le théorème de Popescu [34, 35] affirme que la catégorie $\mathcal{L}(X)$ est cofiltrante et que $\Gamma(X, \mathcal{O}) = \text{Colim}_{(M,p) \in \mathcal{L}(X)} \Gamma(M, \mathcal{O})$. On divise la preuve du lemme en trois étapes.

Étape 1 : Soit F un préfaisceau avec transferts sur Sm/B . On pose

$$(2.84) \quad \theta(F)(X) = \text{Colim}_{(M,p) \in \mathcal{L}(X)} F(M).$$

Le but de cette étape est de montrer que $\theta(F)$ est naturellement un préfaisceau avec transferts sur SmAfn/B .

Supposons donnés une correspondance finie $\alpha \in \mathbf{Cor}_B(Y, X)$ entre B -affinoïdes lisses et un élément $a \in \theta(F)(X)$. Nous allons définir un élément $\alpha^*(a) \in \theta(F)(Y)$. On suppose que l'élément a est égal à la classe de $a_0 \in F(M_0)$ pour un certain

$(M_0, p_0) \in \mathcal{L}(X)$. En considérant $p_0 \circ \alpha$ comme une B -correspondance algébrique de $\mathrm{Spec}(\Gamma(Y, \mathcal{O}))$ dans M_0 (grâce à la proposition 1.1.21) et en utilisant le fait que $\Gamma(Y, \mathcal{O}) = \mathrm{Colim}_{(N, q) \in \mathcal{L}(Y)} \Gamma(N, \mathcal{O})$, on voit qu'il existe $(N_0, q_0) \in \mathcal{L}(Y)$ et une correspondance finie $\alpha_0 \in \mathbf{Cor}_B(N_0, M_0)$ faisant commuter le carré

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & X \\ q_0 \downarrow & & \downarrow p_0 \\ N_0^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{\alpha_0^{\mathrm{an}}} & M_0^{\mathrm{an}}. \end{array}$$

On vérifie immédiatement que la classe de $\alpha_0^*(a_0) \in F(N_0)$ dans $\theta(F)(Y)$ est indépendante des choix de a_0 et α_0 ; c'est l'élément $\alpha^*(a)$ recherché. Cette action des correspondances finies est compatible à la composition et fait de $\theta(F)$ un préfaisceau avec transferts sur SmAfd/B .

Étape 2 : Étant donné un préfaisceau avec transferts F sur Sm/B , nous construisons dans cette étape un morphisme

$$r : \theta(F) \longrightarrow \mathrm{inc}_* \circ \mathrm{Rig}^*(F)$$

de préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/B .

Soit X un B -affinoïde lisse et soit $a \in \theta(F)(X)$ un élément représenté par $a_0 \in F(M_0)$ pour un certain $(M_0, p_0) \in \mathcal{L}(X)$. La section $a_0 \in F(M_0)$ détermine une section $a_0^{\mathrm{an}} \in \mathrm{Rig}^*(F)(M_0^{\mathrm{an}})$. (Modulo l'identification

$$\mathrm{Rig}^*(F)(M_0^{\mathrm{an}}) = \mathrm{Rig}_* \mathrm{Rig}^*(F)(M_0),$$

a_0^{an} est l'image de a_0 par le morphisme d'unité $F \rightarrow \mathrm{Rig}_* \mathrm{Rig}^*(F)$.) On pose alors $r_X(a) = p_0^*(a_0^{\mathrm{an}}) \in \mathrm{Rig}^*(F)(X)$; il est immédiat que $r_X(a)$ ne dépend pas du choix de a_0 . On obtient ainsi un morphisme de Λ -modules

$$r_X : \theta(F)(X) \longrightarrow \mathrm{Rig}^*(F)(X).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les morphismes r_X , pour $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{SmAfd}/B)$, sont compatibles à l'action des correspondances finies, i.e., qu'ils déterminent un morphisme de préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/B . Ce morphisme est alors naturel en F (i.e., fournit une transformation naturelle $r : \theta \rightarrow \mathrm{inc}_* \circ \mathrm{Rig}^*$).

Étape 3 : Dans cette étape nous montrons que le morphisme r construit dans l'étape précédente est inversible. Ceci terminera la preuve du lemme. En effet, θ est un foncteur exact car les catégories $\mathcal{L}(X)$ sont cofiltrantes.

Comme θ et $\mathrm{inc}_* \circ \mathrm{Rig}^*$ commutent aux colimites, il suffit de montrer que r est inversible pour $F = \Lambda_{\mathrm{tr}}(Q)$, avec Q un B -schéma lisse. Or, pour X un B -affinoïde lisse, le morphisme $r : \theta(\Lambda_{\mathrm{tr}}(Q))(X) \rightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(Q^{\mathrm{an}})(X)$ s'identifie à la composition de

$$\mathrm{Colim}_{(M, p) \in \mathcal{L}(X)} \mathbf{Cor}_B(M, Q) \otimes \Lambda \simeq \mathbf{Cor}_B(\mathrm{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O})), Q) \otimes \Lambda \longrightarrow \mathbf{Cor}_B(X, Q^{\mathrm{an}}) \otimes \Lambda$$

qui est bijective par la proposition 1.1.21. Ceci termine la preuve du lemme. C.Q.F.D.

Remarque 2.5.21. — La variante du lemme précédent pour les préfaisceaux sans transferts est également vraie et se démontre de la même manière en identifiant le foncteur composé $\text{inc}_* \circ \text{Rig}^*$ avec le foncteur θ défini par la formule (2.84). Les identifications $\theta \simeq \text{inc}_* \circ \text{Rig}^*$ montrent d'ailleurs que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreStr}(\text{Sm}/B, \Lambda) & \xrightarrow{\text{O}_{\text{tr}}} & \mathbf{PreShv}(\text{Sm}/B, \Lambda) \\ \text{inc}_* \circ \text{Rig}^* \downarrow & & \downarrow \text{inc}_* \circ \text{Rig}^* \\ \mathbf{PreStr}(\text{SmAfd}/B, \Lambda) & \xrightarrow{\text{O}_{\text{tr}}} & \mathbf{PreShv}(\text{SmAfd}/B, \Lambda) \end{array}$$

commute à un isomorphisme canonique près.

Supposons maintenant que G est un faisceau Nisnevich avec transferts sur SmRig/B . En utilisant le théorème 1.2.39, on voit que Rig_*G est aussi un faisceau Nisnevich. On a donc un foncteur

$$\text{Rig}_* : \mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{Sm}/B, \Lambda).$$

Ce foncteur possède un adjoint à gauche qui à un faisceau Nisnevich avec transferts F associe le faisceau Nisnevich avec transferts $\mathbf{a}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}(\text{Rig}^*(F))$. On note encore Rig^* cet adjoint (sauf si le contexte ne s'y prête pas). Bien entendu, on dispose également des variantes sans transferts de ces foncteurs.

Corollaire 2.5.22. — *Le foncteur*

$$\text{Rig}^* : \mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{Sm}/B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/B, \Lambda)$$

est exact.

Démonstration. — Comme Rig^* est un adjoint à gauche, il commute aux colimites. Il reste à montrer que Rig^* commute aux limites finies. Modulo l'équivalence de catégories $\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmAfd}/B, \Lambda) \simeq \mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/B, \Lambda)$, le foncteur Rig^* de l'énoncé est donné par la composition de

$$\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{Sm}/B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{PreStr}(\text{Sm}/B, \Lambda) \xrightarrow{\text{inc}_* \circ \text{Rig}^*} \mathbf{PreStr}(\text{SmAfd}/B, \Lambda) \xrightarrow{\mathbf{a}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}} \mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmAfd}/B, \Lambda).$$

Le premier foncteur commute aux limites puisqu'il est adjoint à droite du foncteur $\mathbf{a}_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$. Le troisième foncteur est exact puisqu'il en est ainsi du foncteur « faisceau Nisnevich associé ». Enfin, le foncteur $\text{inc}_* \circ \text{Rig}^*$ est exact par le lemme 2.5.20. D'où le résultat. C.Q.F.D.

Les mêmes considérations permettent de démontrer le résultat suivant qui toutefois ne servira pas dans la suite et dont la preuve est laissée au lecteur.

Lemme 2.5.23. — *Le couple de foncteurs adjoints*

$$(\text{Rig}^*, \text{Rig}_*) : \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Sm}/B) \longrightarrow \mathbf{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/B)$$

est un morphisme de topos (i.e., le foncteur \mathbf{Rig}^* est exact).

On continue avec le résultat suivant.

Théorème 2.5.24. — *On suppose que B est un k -affinoïde lisse. Le foncteur*

$$(2.85) \quad \mathbf{Rig}^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/B, \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{SmRig}/B, \Lambda))$$

est de Quillen à gauche lorsque les catégories ci-dessus sont munies des structures de modèles suivantes :

- 1) les structures projectives sur la source et le but,
- 2) les structures projectives Nis-locales sur la source et le but,
- 3) la structure projective \mathbb{A}^1 -locale sur la source et la structure projective \mathbb{B}^1 -locale sur le but.

Dans les cas 2) et 3) ci-dessus on a même mieux : le foncteur \mathbf{Rig}^* préserve les équivalences Nis-locales et envoie une équivalence \mathbb{A}^1 -locale sur une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. De plus, les variantes sans transferts de ces propriétés sont également vraies.

Démonstration. — Le foncteur \mathbf{Rig}^* est un foncteur de Quillen relativement aux structures projectives non localisées. En effet, \mathbf{Rig}_* préserve clairement les quasi-isomorphismes et les surjections entre complexes de préfaisceaux avec transferts.

Pour montrer que \mathbf{Rig}^* est de Quillen à gauche relativement aux structures projectives Nis-locales, il suffit de montrer que le foncteur dérivé à gauche \mathbf{LRig}^* préserve les équivalences Nis-locales. On montrera mieux : le foncteur (non dérivé) \mathbf{Rig}^* préserve les équivalences Nis-locales. En effet, soit $f : A \rightarrow B$ une équivalence Nis-locale de complexes de préfaisceaux avec transferts sur Sm/B . Pour montrer que $\mathbf{Rig}^*(f)$ est une équivalence Nis-locale, il suffit de vérifier que le morphisme $a_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{Rig}^*(f))$, qu'on peut aussi identifier avec l'image de $a_{\mathrm{Nis}}(f)$ par le foncteur

$$\mathbf{Rig}^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}/B, \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmRig}/B, \Lambda)),$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts. Ceci découle du corollaire 2.5.22 et du fait que $a_{\mathrm{Nis}}(f)$ est un quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux Nisnevich.

On considère maintenant le cas des structures de modèles \mathbb{A}^1 -locale et \mathbb{B}^1 -locale. Il reste à vérifier que \mathbf{Rig}^* est de Quillen à gauche relativement à ces structures. En effet, joint au fait que \mathbf{Rig}^* préserve les équivalences Nis-locales, ceci suffit pour déduire que \mathbf{Rig}^* transforme une équivalence \mathbb{A}^1 -locale en une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Pour montrer que \mathbf{Rig}^* est de Quillen à gauche, il suffit de montrer que le foncteur \mathbf{LRig}^* envoie le morphisme $o : \Lambda_{\mathrm{tr}}(X) \rightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}_X^1)$ sur une équivalence \mathbb{B}^1 -locale, pour tout B -schéma lisse X . Les objets $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ et $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{A}_X^1)$ étant projectivement cofibrants, il s'agit donc de montrer que $o : \Lambda_{\mathrm{tr}}(X^{\mathrm{an}}) \rightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}((\mathbb{A}_X^1)^{\mathrm{an}})$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Ceci est un exercice facile qu'on laisse au lecteur. C.Q.F.D.

D'après le théorème 2.5.24, on dispose d'un couple de foncteurs adjoints

$$(\mathrm{Rig}^*, \mathrm{Rig}_*) : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(B, \Lambda).$$

On continue dans la même veine avec la proposition suivante qui découle immédiatement du corollaire 2.5.22.

Proposition 2.5.25. — *On suppose que B est un k -affinoïde lisse. Le foncteur*

$$(2.86) \quad \mathrm{Rig}^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}/B, \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{Str}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmRig}/B, \Lambda))$$

est de Quillen à gauche lorsque les catégories ci-dessus sont munies des structures de modèles suivantes :

- 1) *les structures injectives sur la source et le but,*
- 2) *la structure injective \mathbb{A}^1 -locale sur la source et la structure injective \mathbb{B}^1 -locale sur le but.*

De plus, les variantes sans transferts de ces propriétés sont également vraies.

La catégorie $\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)$ est une catégorie monoïdale symétrique, unitaire et fermée. Son produit tensoriel est un produit tensoriel de Day. Nous le désignons par « \otimes^{tr} », ou simplement par « \otimes » lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Il commute aux colimites quelconques (en les deux variables). De plus, il existe un isomorphisme

$$\Lambda_{\mathrm{tr}}(X) \otimes^{\mathrm{tr}} \Lambda_{\mathrm{tr}}(Y) \simeq \Lambda_{\mathrm{tr}}(X \widehat{\otimes}_B Y)$$

binaturel en X et Y dans $\mathbf{Cor}(\mathcal{V}) \otimes \Lambda$. L'objet unité est donné par le préfaisceau avec transferts $\Lambda_{\mathrm{tr}}(B)$. Notons le lemme suivant.

Lemme 2.5.26. — *La catégorie $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ munie de la structure de modèles $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{proj}-\mathbb{B}^1})$ est une catégorie de modèles monoïdale (voir par exemple [3, Définition 4.1.57]).*

On note T^{qc} (ou T_B^{qc} s'il y a besoin) un remplacement projectivement cofibrant dans $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ du préfaisceau avec transferts

$$(2.87) \quad \mathrm{Coker}(s_1 : \Lambda_{\mathrm{tr}}(B) \rightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(\partial\mathbb{B}_B^1))$$

(avec s_1 la section unité). Lorsque la B -variété rigide B est dans \mathcal{V} , le préfaisceau avec transferts (2.87) est déjà projectivement cofibrant car il est isomorphe à un facteur direct de $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\partial\mathbb{B}_B^1)$. De même, on note T^{an} (ou T_B^{an} s'il y a besoin) un remplacement projectivement cofibrant dans $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$ du préfaisceau avec transferts

$$(2.88) \quad \mathrm{Coker}(s_1 : \Lambda_{\mathrm{tr}}(B) \rightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}((\mathbb{A}_B^1)^{\mathrm{an}} - o_B))$$

(avec s_1 la section unité). Lorsque les B -variétés rigides B et $(\mathbb{A}_B^1)^{\mathrm{an}} - o_B$ sont dans \mathcal{V} , le préfaisceau avec transferts (2.88) est déjà projectivement cofibrant puisqu'il est isomorphe à un facteur direct de $\Lambda_{\mathrm{tr}}((\mathbb{A}_B^1)^{\mathrm{an}} - o_B)$. On fixe également un morphisme $T^{\mathrm{qc}} \rightarrow T^{\mathrm{an}}$ qui relève le morphisme évident de (2.87) dans (2.88). Bien entendu, le morphisme $T^{\mathrm{qc}} \rightarrow T^{\mathrm{an}}$ est inversible dans $\mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$. (Ceci découle par exemple de la proposition 1.3.4.)

Dans la suite, on prendra $T \in \{T^{\text{qc}}, T^{\text{an}}\}$. On fera attention que le « T » ainsi défini diffère par une désuspension de la variante avec transferts du « T » donné par la formule (1.63) et utilisé dans le paragraphe 1.3.3. Bien entendu, cette différence est accessoire et sans conséquence sur la construction des catégories de motifs stables.

Définition 2.5.27. — *On note $\mathbb{M}_T(\mathcal{V}, \Lambda)$ la catégorie*

$$\mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$$

des T -spectres symétriques de complexes de préfaisceaux avec transferts. On munit $\mathbb{M}_T(\mathcal{V}, \Lambda)$ de la structure de modèles projective stable

$$(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-}\mathbb{B}^1\text{-st}})$$

déduite de la structure projective \mathbb{B}^1 -locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda))$. On note

$$\mathbf{RigDM}(B, \Lambda) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}(\mathbb{M}_{T^{\text{an}}}(\text{SmRig}/B, \Lambda)) = \mathbb{M}_{T^{\text{an}}}(\text{SmRig}/B, \Lambda)[(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}})^{-1}]$$

où l'on prend pour T^{an} le préfaisceau avec transferts (2.88) (ce qui est possible car ce dernier est projectivement cofibrant lorsque $\mathcal{V} = \text{SmRig}/B$).

La catégorie de modèles $\mathbb{M}_T(\mathcal{V}, \Lambda)$ est encore monoïdale symétrique, unitaire et fermée par [3, Théorème 4.3.76]. Il s'ensuit que $\mathbf{RigDM}(B, \Lambda)$ est une catégorie triangulée monoïdale symétrique, unitaire et fermée. On dispose d'un foncteur de suspension infinie

$$\text{Sus}_T^0 : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)) \longrightarrow \mathbb{M}_T(\mathcal{V}, \Lambda)$$

qui à un complexe de préfaisceaux avec transferts K associe le T -spectre symétrique $((T^{\otimes \text{tr} n}) \otimes^{\text{tr}} K)_{n \in \mathbb{N}}$. Ce foncteur est de Quillen à gauche relativement aux structures projectives. Il est également monoïdal symétrique et unitaire. On a donc un foncteur triangulé monoïdal symétrique et unitaire

$$\text{Sus}_T^0 : \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}(B, \Lambda).$$

De plus, $\text{Sus}_T^0(T)$ est un objet inversible dans $\mathbf{RigDM}(B, \Lambda)$ (comme il découle de [3, Théorème 4.3.38]).

Définition 2.5.28. — *Le motif d'une B -variété rigide lisse X est le T -spectre symétrique $\text{Sus}_T^0(\Lambda_{\text{tr}}(X))$ considéré comme un objet de $\mathbf{RigDM}(B, \Lambda)$. On le notera $\mathbf{M}(X)$.*

Supposons que la k -variété rigide lisse B est quasi-compacte. Le foncteur $\text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(B, \Lambda)}(T, -)$ commute alors au colimites filtrantes dans

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/B, \Lambda)).$$

(En effet, T est isomorphe à un facteur direct de $\mathbf{M}^{\text{eff}}(\partial\mathbb{B}_B^1)$ qui est un objet compact de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(B, \Lambda)$.) Par ailleurs, la permutation $(123) \in \Sigma_3$ opère par l'identité sur $T^{\otimes \text{tr} 3}$ considéré dans $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(B, \Lambda)$. Ceci découle de la propriété analogue en

géométrie algébrique et du fait que Rig^* est un foncteur de Quillen à gauche. Par [3, Théorème 4.3.79], le foncteur

$$\begin{aligned} (- \otimes_1 \Sigma) : \mathbf{Spect}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/B, \Lambda))) \\ \longrightarrow \mathbf{Spect}_T^\Sigma(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/B, \Lambda))) \end{aligned}$$

est une équivalence de Quillen à gauche relativement aux structures projectives \mathbb{B}^1 -locales stables. On peut alors appliquer [3, Théorème 4.3.61] pour obtenir le résultat suivant.

Proposition 2.5.29. — *Supposons que la k -variété rigide lisse B est quasi-compacte. Soient M et N deux objets de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(B, \Lambda)$, et supposons que M est un objet compact. Alors, le morphisme évident*

$$\begin{aligned} \text{Colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(B, \Lambda)}(T^{\otimes n} \otimes M, T^{\otimes n} \otimes N) \\ \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{RigDM}(B, \Lambda)}(\text{Sus}_T^0(M), \text{Sus}_T^0(N)) \end{aligned}$$

est inversible.

Grâce à [3, Proposition 4.3.57], on dispose des versions stables des foncteurs de Quillen à gauche de la proposition 2.5.19 et du théorème 2.5.24. On laissera au lecteur le soin de lister ces adjonctions de Quillen. En raison de son importance, on note tout de même le résultat suivant.

Lemme 2.5.30. — *Le foncteur $\text{Rig}^* : \mathbb{M}_T(\text{Sm}/B, \Lambda) \rightarrow \mathbb{M}_T(\text{SmRig}/B, \Lambda)$ est de Quillen à gauche lorsqu'on munit la source de sa structure de modèles projective \mathbb{A}^1 -locale stable et le but de sa structure de modèles projective \mathbb{B}^1 -locale stable. En particulier, on dispose d'un foncteur triangulé monoïdal symétrique et unitaire*

$$\text{Rig}^* : \mathbf{DM}(B, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$$

qui envoie le motif d'un B -schéma lisse X sur le motif de la B -variété rigide X^{an} .

2.5.2. Engendrement par les motifs rigides de variétés algébriques et t -structure homotopique. — Soit k un corps valué complet dont la valuation est supposée non triviale. On fixe $\pi \in k^\vee - \{0\}$. Dans ce paragraphe et le suivant, on utilisera les résultats de la section 2.4 (et notamment le théorème 2.4.9) pour étudier les catégories $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ et $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$. Plus précisément, on montrera dans ce paragraphe l'existence d'une t -structure homotopique sur $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ dont le cœur est la catégorie $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(k, \Lambda)$ des faisceaux Nisnevich avec transferts, surconvergens et invariants par homotopie (voir la définition 2.4.10). Dans le paragraphe suivant, on montrera que le foncteur de suspension infinie

$$\text{Sus}_T^0 : \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$$

est pleinement fidèle; c'est la propriété de simplification (alias « cancellation theorem ») bien connue dans la théorie de Voevodsky. Ces applications sont rendues possibles grâce à un résultat d'engendrement (voir le théorème 2.5.35 ci-dessous) qui

affirme que les motifs rigides des variétés algébriques forment un système de générateurs compacts de la catégorie $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$.

On renvoie le lecteur à la définition 2.2.50 pour la construction du foncteur $\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(-)$. On note d'abord le lemme simple suivant.

Lemme 2.5.31. — *Soit B une k -variété rigide lisse et soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur SmRig/B . Alors, le morphisme évident*

$$K \longrightarrow \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(K)$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Démonstration. — L'argument est standard, mais nous l'incluons pour la commodité du lecteur. Nous utiliserons librement le fait que les colimites filtrantes préservent les équivalences \mathbb{B}^1 -locales⁽¹⁷⁾. Le complexe K s'écrit canoniquement comme une colimite filtrante de complexes bornés

$$K = \text{Colim}_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{\leq n}(\tau_{\geq -n}(K)),$$

avec $\sigma_{\leq n}$ la troncation bête et $\tau_{\geq -n}$ la troncation canonique. Il suffit donc de traiter le cas où K est borné. Une récurrence facile, utilisant la propriété « 2 de 3 » dans les triangles distingués, nous ramène au cas où $K = F[0]$ est un préfaisceau avec transferts placé en degré zéro.

Le complexe $F[0]$ est quasi-isomorphe au complexe simple \underline{F} associé à l'objet simplicial constant $\underline{\mathbf{n}} \in \underline{\Delta} \rightsquigarrow F$. Rappelons que $\underline{F}_n = F$, pour $n \in \mathbb{N}$, et la différentielle $\underline{F}_{n+1} \rightarrow \underline{F}_n$ est le morphisme nul si n est pair et le morphisme identité si n est impair. Il suffit de montrer que le morphisme canonique $\underline{F} \rightarrow \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(F)$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Par la stabilité des équivalences \mathbb{B}^1 -locales par les colimites filtrantes, il est suffisant de montrer que les morphismes $\sigma_{\leq n}(\underline{F}) \rightarrow \sigma_{\leq n}(\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(F))$ sont des équivalences \mathbb{B}^1 -locales pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une récurrence sur n , utilisant la propriété « 2 de 3 » dans les triangles distingués, nous ramène en fin de compte à montrer que

$$F \longrightarrow \underline{\text{hom}}(\Delta_{\text{rig}, B}^n, F) \simeq \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^n, F)$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale pour tout $n \in \mathbb{N}$. Plus précisément, on montrera que $p^* : F \rightarrow \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^n, F)$ admet un inverse à \mathbb{B}^1 -homotopie près. Considérons le morphisme

⁽¹⁷⁾ Ceci est un exercice de catégories de modèles. En effet, étant donnée une petite catégorie I , on dispose d'un foncteur de Quillen à gauche

$$\text{Colim}_I : \underline{\text{HOM}}(I, \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/B, \Lambda))) \longrightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/B, \Lambda))$$

relativement aux structures projectives \mathbb{B}^1 -locales. En particulier, Colim_I préserve les cofibrations projectives \mathbb{B}^1 -triviales (i.e., qui sont aussi des équivalences \mathbb{B}^1 -locales). Or, toute équivalence \mathbb{B}^1 -locale se factorise comme une cofibration projective \mathbb{B}^1 -triviale suivie par un quasi-isomorphisme. Par ailleurs, Colim_I préserve les quasi-isomorphismes lorsque I est filtrante. Ceci permet de conclure.

$o^* : \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^n, F) \rightarrow F$ induit par la section nulle de \mathbb{B}_B^n . Il est clair que $o^* \circ p^* = \text{id}$. On a par ailleurs une \mathbb{B}^1 -homotopie entre $p^* \circ o^*$ et l'identité. C'est le morphisme

$$\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_B^1) \otimes^{\text{tr}} \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^n, F) \longrightarrow \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^n, F)$$

déduit par adjonction du morphisme

$$m^* : \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^n, F) \longrightarrow \underline{\text{hom}}(\mathbb{B}_B^1 \widehat{\times}_B \mathbb{B}_B^n, F),$$

induit par l'action par homothétie de \mathbb{B}_B^1 sur \mathbb{B}_B^n . Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Voici l'énoncé sur lequel reposeront les résultats clés de ce paragraphe et du suivant.

Théorème 2.5.32. — *Supposons que k est d'égale caractéristique nulle ou que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre. Soit B un k -affinoïde lisse et soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur Sm/B .*

1) *Le morphisme $\text{Rig}^*(K) \rightarrow \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^*(K))$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale et le complexe de préfaisceaux avec transferts $\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^*(K))$, considéré comme un objet de la catégorie*

$$\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/B, \Lambda))) \simeq \mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/B, \Lambda)),$$

est \mathbb{B}^1 -local (au sens des localisations de Bousfield; voir [3, Définition 4.2.63]). Autrement dit, un remplacement projectivement Nis-fibrant de $\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^(K))$ fournit un remplacement projectivement \mathbb{B}^1 -fibrant de $\text{Rig}^*(K)$.*

2) *Soient $U_1, \dots, U_r \subset (\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$ des ouverts quasi-compacts (et donc nécessairement affinoïdes) et posons $U = U_1 \widehat{\times}_k \dots \widehat{\times}_k U_r$. Alors, le morphisme*

$$\underline{\text{hom}}(U \widehat{\times}_k B, \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^*(K))) \longrightarrow \underline{\text{hom}}(U \widehat{\times}_k B, (\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^*(K)))_{\text{Nis-fib}}),$$

où $(\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^(K)))_{\text{Nis-fib}}$ est un remplacement projectivement Nis-fibrant de $\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^*(K))$, est une équivalence Nis-locale de complexes de préfaisceaux avec transferts.*

Démonstration. — L'assertion que $\text{Rig}^*(K) \rightarrow \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\text{Rig}^*(K))$ est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale est mise pour mémoire (voir le lemme 2.5.31). On divise la preuve du théorème en trois parties. Les deux premières traitent le cas particulier où K est un préfaisceau avec transferts représentable par un B -schéma lisse. Dans la troisième partie, on explique comment obtenir le cas général de ce cas particulier.

Partie A : Ici, on établit la première partie de l'énoncé pour $K = \Lambda_{\text{tr}}(X)[0]$, avec X un B -schéma lisse. Il s'agit dans ce cas de montrer que le complexe de préfaisceaux avec transferts $L = \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$ est \mathbb{B}^1 -local en tant qu'objet de la catégorie homotopique de la structure de modèles Nis-locale. Puisque nos catégories homotopiques sont triangulées, la condition dans [3, Définition 4.2.63] est équivalente, dans

le cas qui nous intéresse, à la condition que le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{HoNis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/B, \Lambda))) (\Lambda_{\mathrm{tr}}(V), L[i]) \\ \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{HoNis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/B, \Lambda))) (\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{B}_V^1), L[i]) \end{aligned}$$

est inversible pour tout B -affinoïde lisse V et tout entier relatif $i \in \mathbb{Z}$. D'après le corollaire 2.5.14, ceci revient à demander que les morphismes

$$H_{\mathrm{Nis}}^i(V, L) \longrightarrow H_{\mathrm{Nis}}^i(\mathbb{B}_V^1, L)$$

sont inversibles.

Fixons un k -affinoïde lisse V . Le petit site $(\mathrm{Et}/V, \mathrm{Nis})$ est de dimension cohomologique bornée (voir le corollaire 1.2.21). Ainsi, pour $i \in \mathbb{Z}$ fixé, le morphisme

$$H_{\mathrm{Nis}}^i(V, L) \longrightarrow H_{\mathrm{Nis}}^i(V, \tau_{\leq n} L)$$

est inversible pour n suffisamment grand. (Ceci découle par exemple de [3, Proposition 4.5.58] appliquée à $\tau_{\geq n+1} L$.) Il en est de même pour \mathbb{B}_V^1 à la place de V . Il suffit donc de montrer que les morphismes

$$H_{\mathrm{Nis}}^i(V, \tau_{\leq n} L) \longrightarrow H_{\mathrm{Nis}}^i(\mathbb{B}_V^1, \tau_{\leq n} L)$$

sont des isomorphismes pour tous les entiers $i \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par une récurrence facile sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, on se ramène à montrer que les morphismes

$$H_{\mathrm{Nis}}^i(V, F) \longrightarrow H_{\mathrm{Nis}}^i(\mathbb{B}_V^1, F)$$

sont inversibles pour le préfaisceau avec transferts $F = H_n(L) = H_n(\underline{\mathrm{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda(X^{\mathrm{an}})))$. Le résultat découle alors des théorèmes 2.4.9 et 2.4.13.

Partie B : Ici, on établit la deuxième partie de l'énoncé pour $K = \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)[0]$, avec X un B -schéma lisse. Comme dans la partie A, on pose $L = \underline{\mathrm{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X^{\mathrm{an}}))$. On doit montrer que le morphisme

$$(2.89) \quad \underline{\mathrm{hom}}(U \widehat{\times}_k B, L) \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}(U \widehat{\times}_k B, L_{\mathrm{Nis}\text{-fib}})$$

est une équivalence Nis-locale (avec $L_{\mathrm{Nis}\text{-fib}}$ un remplacement projectivement Nis-fibrant de L). Bien entendu, il suffit de montrer que les restrictions de (2.89) aux petits sites Et/V , avec V un B -affinoïde lisse, sont des équivalences Nis-locales.

Fixons donc un B -affinoïde lisse V et notons $p : W = U \widehat{\times}_k V \rightarrow V$ la projection sur le second facteur. La restriction de (2.89) à Et/V s'identifie au morphisme

$$(2.90) \quad p_* L|_{\mathrm{Et}/W} \longrightarrow \mathbf{R}p_* L|_{\mathrm{Et}/W}$$

où $\mathbf{R}p_*$ est le foncteur dérivé de p_* relativement aux structures projectives Nis-locales. On doit montrer que (2.90) est une équivalence Nis-locale.

Le petit site $(\mathrm{Et}/W, \mathrm{Nis})$ est de dimension cohomologique bornée (voir le corollaire 1.2.21). Ainsi, pour $i \in \mathbb{Z}$ fixé, le morphisme

$$H_i(\mathbf{R}p_* L|_{\mathrm{Et}/W}) \longrightarrow H_i(\mathbf{R}p_*(\tau_{\leq n} L)|_{\mathrm{Et}/W})$$

est inversible pour n suffisamment grand. (Ceci découle par exemple de [3, Proposition 4.5.58] appliquée à $\tau_{\geq n+1}L$.) La même propriété étant trivialement vraie pour le morphisme

$$H_i(p_*L|_{\text{Et}/W}) \longrightarrow H_i(p_*(\tau_{\leq n}L)|_{\text{Et}/W}),$$

il est donc suffisant de montrer que les morphismes

$$p_*(\tau_{\leq n}L)|_{\text{Et}/W} \longrightarrow Rp_*(\tau_{\leq n}L)|_{\text{Et}/W}$$

sont des équivalences Nis-locales pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$. Par une récurrence facile, on se ramène à montrer que

$$(2.91) \quad p_*F|_{\text{Et}/W} \longrightarrow Rp_*F|_{\text{Et}/W}$$

est une équivalence Nis-locale pour le préfaisceau avec transferts $F = H_n(L) = H_n(\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda(X^{\text{an}})))$.

Vu les théorèmes 2.4.9 et 2.4.13, il sera plus général de montrer que (2.91) est une équivalence Nis-locale pour tout préfaisceau avec transferts F supposé faiblement surconvergent et invariant par homotopie. D'après la proposition 2.1.35, la cohomologie pour la topologie des recouvrements admissibles et celle pour la topologie de Nisnevich coïncident pour un préfaisceau faiblement surconvergent. Il suffit donc de montrer que

$$(2.92) \quad p_*F|_{\text{Ouv}(W)} \longrightarrow Rp_*F|_{\text{Ouv}(W)}$$

est une équivalence ad-locale où Rp_* désigne à présent le foncteur dérivé de p_* relativement aux structures projectives ad-locales. La proposition 2.4.12 permet maintenant de conclure.

Partie C : Notons \mathcal{T} la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(\mathbf{PreStr}(\text{Sm}/B, \Lambda))$ dont les objets sont les complexes de préfaisceaux avec transferts K qui satisfont la conclusion du théorème, i.e., qui vérifient les deux conditions suivantes :

- $\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1} \text{Rig}^*(K)$ est \mathbb{B}^1 -local dans $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/B, \Lambda)))$;
- $\underline{\text{hom}}(U \widehat{\times}_k B, \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1} \text{Rig}^*(K)) \rightarrow \underline{\text{hom}}(U \widehat{\times}_k B, (\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1} \text{Rig}^*(K))_{\text{Nis-fib}})$ est une équivalence Nis-locale.

Montrons d'abord que \mathcal{T} est une sous-catégorie triangulée. Pour cela, notons $\text{inc} : \text{SmAfd}/B \hookrightarrow \text{SmRig}/B$ l'inclusion évidente et remarquons que les deux conditions ci-dessus sont équivalentes à leurs variantes obtenues en remplaçant « Rig^* » par « $\text{inc}_* \circ \text{Rig}^*$ » (et « SmRig/B » par « SmAfd/B »). Le résultat recherché est alors une conséquence du lemme 2.5.20 qui affirme que le foncteur $\text{inc}_* \circ \text{Rig}^*$ est exact.

La sous-catégorie \mathcal{T} est aussi stable par sommes infinies. En effet, les foncteurs $\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}$ et $\underline{\text{hom}}(U \widehat{\times}_k B, -)$ commutent aux sommes infinies. Or, la classe des objets \mathbb{B}^1 -locaux dans $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/B, \Lambda)))$ est stable par sommes infinies d'après le lemme 2.5.17 ; la première des conditions ci-dessus est donc stable par sommes infinies. De même, le théorème 2.5.12 entraîne que le foncteur « remplacement projectivement Nis-fibrant » commute aux sommes infinies (à quasi-isomorphisme près) après

restriction à $\mathbf{SmRig}^{\text{qc}}/B$. Ceci suffit pour montrer que la deuxième des conditions ci-dessus est stable par sommes infinies.

Par les parties A et B de la preuve, on sait que $\Lambda_{\text{tr}}(X) \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ pour tout B -schéma lisse X . La catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{D}(\mathbf{PreStr}(\mathbf{Sm}/B, \Lambda))$ étant compactement engendrée par les $\Lambda_{\text{tr}}(X)$, pour $X \in \text{Ob}(\mathbf{Sm}/B)$, on déduit de ce qui précède que $\mathcal{T} = \mathbf{D}(\mathbf{PreStr}(\mathbf{Sm}/B, \Lambda))$. Le théorème est démontré. C.Q.F.D.

On note la conséquence suivante du théorème 2.5.32.

Corollaire 2.5.33. — *Soit X un k -schéma lisse et soient U_1, \dots, U_r des ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$. On pose $U = U_1 \widehat{\times}_k \cdots \widehat{\times}_k U_r$. Pour $i \in \mathbb{N}$, le Λ -module*

$$(2.93) \quad \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(\mathbf{M}^{\text{eff}}(U)[i], \mathbf{M}^{\text{eff}}(X^{\text{an}}))$$

est canoniquement isomorphe à $\text{H}_i(\mathbf{Cor}(U, X^{\text{an}}) \otimes \Lambda)$.

Démonstration. — En effet, d’après la première partie du théorème 2.5.32, le Λ -module (2.93) est canoniquement isomorphe à

$$\text{H}_i\Gamma(U, (\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})))_{\text{Nis-fib}}) = \text{H}_i\Gamma(k, \underline{\text{hom}}(U, (\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})))_{\text{Nis-fib}})).$$

Or, d’après la seconde partie du théorème 2.5.32 et puisque tout recouvrement Nisnevich de $\text{Spm}(k)$ est scindé, le second membre de l’égalité ci-dessus est isomorphe à

$$\begin{aligned} \text{H}_i\Gamma(k, \underline{\text{hom}}(U, \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})))) &= \text{H}_i\Gamma(U, \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))) \\ &= \text{H}_i(\mathbf{Cor}(U, X^{\text{an}}) \otimes \Lambda). \end{aligned}$$

Le corollaire est démontré.

C.Q.F.D.

Soit X une k -variété rigide quasi-compacte. Rappelons qu’on dit que X admet *bonne réduction* si X possède un modèle formel lisse sur k° . On dit que X admet *potentiellement bonne réduction* s’il existe une extension finie séparable l/k telle que $X \widehat{\otimes}_k l$ admet bonne réduction en tant que l -variété rigide. On a le théorème suivant.

Théorème 2.5.34. — *On suppose que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre. La catégorie $\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathbf{SmRig}/k, \Lambda)))$ (et donc aussi $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$) est compactement engendrée (en tant que catégorie triangulée avec sommes infinies) par les objets $\Lambda_{\text{tr}}(X)$ tels que X est une k -variété rigide quasi-compacte admettant potentiellement bonne réduction.*

Démonstration. — La catégorie triangulée avec sommes infinies

$$\mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathbf{SmRig}/k, \Lambda)))$$

est compactement engendrée par les $\Lambda_{\text{tr}}(U)$ tels que U est une k -variété rigide quasi-compacte et lisse. Il s’agit de montrer qu’on peut se restreindre aux k -variétés rigides quasi-compactes admettant potentiellement bonne réduction. On note provisoirement $\mathcal{T}(k)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par les $\Lambda_{\text{tr}}(X)$ tels

que X est une k -variété rigide quasi-compacte admettant potentiellement bonne réduction. Notre but est de montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$ pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse U . On divise la preuve de cela en plusieurs étapes.

Étape 1 : On suppose dans cette étape que k est de caractéristique $p > 0$. Soit k'/k une extension finie purement inséparable. Par la proposition 2.2.22, le foncteur

$$-\widehat{\otimes}_k k' : \mathbf{AfdCor}(k) \otimes \Lambda \longrightarrow \mathbf{AfdCor}(k') \otimes \Lambda$$

est une équivalence de catégories. On en déduit une équivalence de catégories triangulées

$$\begin{aligned} ((k'/k)^*, (k'/k)_*) : \mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/k, \Lambda))) \\ \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ho}_{\text{Nis}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/k', \Lambda))). \end{aligned}$$

Nous allons vérifier que l'équivalence ci-dessus se restreint en une équivalence de catégories $\mathcal{T}(k) \simeq \mathcal{T}(k')$. Seule l'essentielle surjectivité demande une preuve.

Soit X' une k' -variété rigide quasi-compacte admettant potentiellement bonne réduction et montrons que $\Lambda_{\text{tr}}(X')$ est dans l'image de $\mathcal{T}(k)$ par $(k'/k)^*$. (Clairement, ceci suffit pour conclure.) Par hypothèse, il existe une extension finie séparable l'/k' telle que $Y' = X' \widehat{\otimes}_{k'} l'$ admet bonne réduction en tant que l' -variété rigide. Considérons pourtant Y' comme une k' -variété rigide et notons t la transposée du morphisme évident $s : Y' \rightarrow X'$. Alors, on a $s \circ t = [l' : k'] \cdot \text{id}_{X'}$, ce qui montre que $\Lambda_{\text{tr}}(X')$ est un facteur direct de $\Lambda_{\text{tr}}(Y')$. Il suffit donc de montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(Y')$ est dans l'image de $\mathcal{T}(k)$ par le foncteur $(k'/k)^*$.

Soit l/k la plus grande sous-extension séparable de l'/k . Alors, l'extension l'/l est totalement inséparable et $l' \simeq l \otimes_k k'$. Soit q une puissance de p telle que $a^q \in l$ pour tout $a \in l'$. Il s'ensuit que $a^q \in l^\circ$ pour tout $a \in l'^\circ$. Le q -ième morphisme de Frobenius absolu de $\text{Spf}(l'^\circ)$ admet donc une factorisation

$$\begin{array}{ccc} & \text{Frob}_q & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Spf}(l'^\circ) & \longrightarrow & \text{Spf}(l^\circ) \xrightarrow{e} \text{Spf}(l'^\circ). \end{array}$$

Soit \mathcal{Y}' un modèle formel de Y' lisse sur l'° . On pose $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}' \widehat{\otimes}_{\text{Spf}(l'^\circ), e} \text{Spf}(l^\circ)$. C'est un l° -schéma formel lisse. Clairement, le l -affinoïde $Y = \mathcal{Y}_\eta$ admet bonne réduction. Il s'ensuit que Y , considéré comme k -affinoïde, admet potentiellement bonne réduction. On a donc $\Lambda_{\text{tr}}(Y) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. Par ailleurs, on dispose d'un morphisme

$$f : \mathcal{Y}' \longrightarrow \mathcal{Y} \widehat{\otimes}_{l^\circ} l'^\circ = \mathcal{Y} \widehat{\otimes}_{k^\circ} k'^\circ$$

qui est en fait, à identification canonique près, le q -ième morphisme de Frobenius relatif du l'° -schéma formel \mathcal{Y}' . Ainsi, le morphisme $f_\eta : Y' \rightarrow Y \widehat{\otimes}_k k'$ est fini, surjectif et radiciel. Il induit donc un isomorphisme

$$\Lambda_{\text{tr}}(Y') \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\text{tr}}(Y \widehat{\otimes}_k k') = (k'/k)^* \Lambda_{\text{tr}}(Y).$$

Ceci permet de conclure.

Étape 2 : On fixe une k -variété rigide quasi-compacte et lisse U . Notre but est de prouver que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(U) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}(k))$. On raisonne par induction sur la dimension de U . Lorsque cette dimension est nulle, il n'y a rien à montrer puisque toute variété rigide étale sur k admet potentiellement bonne réduction.

Dans cette étape, on démontre un résultat auxiliaire. C'est le suivant : soit $V \subset U$ une sous-variété fermée de U de codimension partout non nulle. Alors, sous l'hypothèse de récurrence, le préfaisceau avec transferts

$$\Lambda_{\mathrm{tr}}(U/U - V) = \Lambda_{\mathrm{tr}}(U)/\Lambda_{\mathrm{tr}}(U - V)$$

appartient à $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}(k))$.

Pour démontrer ce résultat auxiliaire, on raisonne par récurrence sur la dimension de V . Le résultat étant trivialement vrai lorsque V vide, on supposera que $V \neq \emptyset$. On peut aussi supposer que V est réduite. D'une part, lorsque k est de caractéristique nulle, le lieu singulier de V est partout de codimension non nulle. D'autre part, lorsque k est de caractéristique $p > 0$, il existe une extension finie purement inséparable k'/k telle que le lieu singulier de $V' = (V \widehat{\otimes}_k k')_{\mathrm{red}}$ est partout de codimension non nulle. Or, d'après la première étape de la preuve, il est suffisant de montrer que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(U'/U' - V') \in \mathcal{T}(k')$ avec $U' = U \widehat{\otimes}_k k'$. Ainsi, dans les deux cas, on peut supposer que le lieu singulier $V_{\mathrm{sing}} \subset V$ est partout de codimension non nulle.

On dispose d'un triangle distingué

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathrm{tr}}(U - V_{\mathrm{sing}}/U - V) &\longrightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(U/U - V) \longrightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(U/U - V_{\mathrm{sing}}) \\ &\longrightarrow \Lambda_{\mathrm{tr}}(U - V_{\mathrm{sing}}/U - V)[+1]. \end{aligned}$$

Par la récurrence sur la dimension de V , on sait que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(U/U - V_{\mathrm{sing}})$ est dans $\mathcal{T}(k)$. Il suffira donc de montrer que le préfaisceau avec transferts

$$F = \frac{\Lambda_{\mathrm{tr}}(U - V_{\mathrm{sing}})}{\Lambda_{\mathrm{tr}}((U - V_{\mathrm{sing}}) - (V - V_{\mathrm{sing}}))}$$

est dans $\mathcal{T}(k)$. Or, on peut écrire la k -variété rigide $U - V_{\mathrm{sing}}$ comme l'union d'une suite croissante d'ouverts quasi-compacts : $U - V_{\mathrm{sing}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ (avec, bien entendu, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un recouvrement admissible de U). On pose

$$V_n = U_n \cap V \quad \text{et} \quad F_n = \Lambda_{\mathrm{tr}}(U_n/U_n - V_n).$$

Alors, on dispose d'un morphisme canonique $\mathrm{Colim}_{n \in \mathbb{N}} F_n \rightarrow F$ qui est une équivalence Nis-locale. Il est donc suffisant de montrer que les $\Lambda_{\mathrm{tr}}(U_n/U_n - V_n)$ sont dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}(k))$. Ceci nous ramène à traiter le cas où la sous-variété V est lisse (tout en conservant la quasi-compactité de U).

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement admissible fini de U par des ouverts quasi-compacts. Il est facile de voir, grâce à la proposition 2.5.1, que F est dans la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par les préfaisceaux avec transferts $\Lambda_{\mathrm{tr}}(U_J/U_J - V_J)$, avec $J \subset I$ fini et non vide, $U_J = \bigcap_{i \in J} U_i$ et $V_J = V \cap U_J$. Il est

donc suffisant de traiter le cas des U_J et V_J . Ainsi, en choisissant un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ suffisamment fin, on peut supposer que U est un k -affinoïde et qu'il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow e \\ \mathbb{B}_k^c \times o & \longrightarrow & \mathbb{B}_k^{c+d} \end{array}$$

avec e étale et o la section nulle de \mathbb{B}_k^d . Par le lemme 2.2.60, il existe un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{B}_V^d \\ & \nearrow o & \downarrow j \\ V & \longrightarrow & U \end{array}$$

avec j une immersion ouverte. Le morphisme

$$j : \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_V^d / \mathbb{B}_V^d - V) \longrightarrow \Lambda_{\text{tr}}(U/U - V)$$

est alors une équivalence Nis-locale. Il suffit donc de traiter le cas de $U = \mathbb{B}_V^d$.

Remarquons que $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_V^d / \mathbb{B}_V^d - V) \simeq \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_k^d / \mathbb{B}_k^d - o)^{\text{L} \otimes^{\text{tr}}} \Lambda_{\text{tr}}(V)$. De plus, on a $\Lambda_{\text{tr}}(V) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$ par la récurrence sur la dimension de U . Or, $\mathcal{T}(k)$ est stable par le produit tensoriel dérivé $-\text{L} \otimes^{\text{tr}}$ — car la classe des k -variétés rigides quasi-compactes admettant potentiellement bonne réduction est stable par produit direct. Il reste donc à vérifier que $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_k^d / \mathbb{B}_k^d - o)$ est dans $\mathcal{T}(k)$. Comme \mathbb{B}_k^d admet bonne réduction, il nous reste à montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_k^d - 0) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$.

La k -variété rigide $\mathbb{B}_k^d - o$ est recouverte par les ouverts $\mathbb{B}_k^{r-1} \widehat{\times}_k (\mathbb{B}_k^1 - o) \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^{d-r}$ avec $1 \leq r \leq d$. Les intersections multiples de ces ouverts sont isomorphes à des produits de s copies de \mathbb{B}_k^1 et de $d-s$ copies de $\mathbb{B}_k^1 - o$. On se ramène ainsi à montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_k^1 - o) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. Or, le morphisme évident

$$\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_k^1 / \mathbb{B}_k^1 - o) \longrightarrow \Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} / (\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - o)$$

est une équivalence Nis-locale. Mais $\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$ puisque $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ admet bonne réduction. De même $\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} - o) \simeq \Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$ est dans $\mathcal{T}(k)$ puisque le morphisme évident

$$\text{Colim}_{\lambda \in |k^\times|} \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_k^1(o, \lambda)) \longrightarrow \Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$$

est une équivalence Nis-locale et que $\mathbb{B}_k^1(o, \lambda) \simeq \mathbb{B}_k^1$ admet bonne réduction. D'où le résultat recherché.

Étape 3 : Rappelons une dernière fois qu'on cherche à montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(U)$ est dans $\mathcal{T}(k)$, avec U une k -variété rigide quasi-compacte et lisse, et qu'on raisonne par récurrence sur la dimension de U .

Étant donné un recouvrement admissible $(U_i)_{i \in I}$ de U avec I fini et U_i des ouverts quasi-compactes, la proposition 2.5.1 montre que $\Lambda_{\text{tr}}(U)$ est dans la sous-catégorie triangulée engendrée par les $\Lambda_{\text{tr}}(U_J)$ avec $\emptyset \neq J \subset I$ et $U_J = \bigcap_{j \in J} U_j$. Par le corollaire 1.1.57, on peut donc supposer qu'il existe un k° -schéma de présentation

finie X tel que U est un ouvert affinoïde de $[X//(\pi)]_\eta$. On peut même supposer que $U = [X//(\pi)]_\eta$. En effet, il existe un idéal de type fini $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ contenant une puissance de π et tel que U est la fibre générique d'un ouvert Zariski $\mathcal{U} \subset X'//(\pi)$ avec X' l'éclatement de \mathcal{I} dans X . Il suffit alors de remplacer X par $X' - (X'_\sigma - \mathcal{U}_\sigma)$ avec $X'_\sigma = (X'//(\pi))_{\text{red}}$ la fibre spéciale réduite du k° -schéma X' .

Puisque U est réduit, on peut supposer que X est réduit quitte à le remplacer par X_{red} . Quitte à remplacer X par l'adhérence de $X[1/\pi]$, on peut le supposer plat sur k° . (Ainsi, le k° -schéma formel $X//(\pi)$ devient un modèle essentiel de U .) On ne restreint pas la généralité en supposant que U est connexe; il s'ensuit que $X_\sigma = (X//(\pi))_{\text{red}}$ est lui aussi connexe. De même, en remplaçant X par sa composante connexe contenant X_σ , on peut aussi supposer que X est connexe. Puisque U est lisse, le lieu singulier $(X[1/\pi])_{\text{sing}}$ de $X[1/\pi]$ est nécessairement fermé dans X . En effet, dans le cas contraire, on aurait $U \cap ((X[1/\pi])_{\text{sing}})^{\text{an}} \neq \emptyset$ (l'intersection étant prise dans $(X[1/\pi])^{\text{an}}$) ce qui contredit la lissité de U . Ainsi, quitte à remplacer X par $X - (X[1/\pi])_{\text{sing}}$, on peut supposer que $X[1/\pi]$ est lisse. Résumons la situation : on doit montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ pour $U = [X//(\pi)]_\eta$ avec X un k° -schéma plat, de présentation finie et tel que les schémas $X[1/\pi]$ et X_σ sont connexes et le k -schéma $X[1/\pi]$ est lisse.

Par [8, Lemma 9.2]⁽¹⁸⁾, il existe un carré commutatif de k° -schémas plats de présentation finie

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{e} & X \\ f \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(l^\circ) & \longrightarrow & \text{Spec}(k^\circ) \end{array}$$

avec l/k une extension finie et tel que les conditions ci-dessous sont vérifiées.

- 1) Le schéma Y est intègre et le l -schéma $Y[1/\pi]$ est lisse.
- 2) Le morphisme e est projectif et dominant. De plus, il est fini au-dessus d'un ouvert dense de X .
- 3) Le morphisme f admet une factorisation

$$(2.94) \quad Y = Y_d \xrightarrow{f_{d-1}} Y_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{f_0} Y_0 = \text{Spec}(l^\circ)$$

où les morphismes $f_r : Y_{r+1} \rightarrow Y_r$ sont, localement pour la topologie de Zariski (sur Y_r et Y_{r+1}), la composition de deux morphismes de schémas affines

$$\text{Spec}(B) \xrightarrow{(\star)} \text{Spec}(A[u, v]/uv - a) \longrightarrow \text{Spec}(A)$$

avec (\star) étale, $a \in A$, et u et v des indéterminées.

⁽¹⁸⁾ Dans l'énoncé de [8, Lemma 9.2], le k° -schéma X est supposé propre mais cette condition est superflue. En effet, le cas général se déduit du cas propre en l'appliquant à une compactification de X .

Par la première étape de la preuve, il suffit de montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(U \widehat{\otimes}_k k') \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k'))$ avec k'/k une extension finie totalement inséparable. En remplaçant X par $X \otimes_{k^\circ} k'^\circ$ et Y par $(Y \otimes_{k^\circ} k'^\circ)_{\text{red}}$ avec k'/k bien choisie, on peut supposer que l'extension l/k ci-dessus est séparable. En particulier, $[Y//(\pi)]_\eta$ est alors une k -variété rigide quasi-compacte et lisse.

Soit $Z \subset X$ un fermé partout de codimension non nulle tel que $Y - e^{-1}(Z)$ est fini au-dessus de $X - Z$. On pose $T = e^{-1}(Z)$. Par l'étape précédente, $\Lambda_{\text{tr}}(U) = \Lambda_{\text{tr}}([X//(\pi)]_\eta)$ appartient à $\text{Ob}(\mathcal{T}(k))$ si et seulement si $\Lambda_{\text{tr}}([X//(\pi)]_\eta - [Z//(\pi)]_\eta)$ appartient à $\text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. Or, le morphisme

$$e' : [Y//(\pi)]_\eta - [T//(\pi)]_\eta \longrightarrow [X//(\pi)]_\eta - [Z//(\pi)]_\eta$$

est fini surjectif. Il s'ensuit que $\Lambda_{\text{tr}}([X//(\pi)]_\eta - [Z//(\pi)]_\eta)$ est un facteur direct de $\Lambda_{\text{tr}}([Y//(\pi)]_\eta - [T//(\pi)]_\eta)$. (En effet, si ${}^t e'$ est la transposée de e' , on a $e' \circ {}^t e' = \text{deg}(e') \cdot \text{id}$.) Or, toujours par l'étape précédente, $\Lambda_{\text{tr}}([Y//(\pi)]_\eta - [T//(\pi)]_\eta)$ appartient à $\text{Ob}(\mathcal{T}(k))$ si et seulement si $\Lambda_{\text{tr}}([Y//(\pi)]_\eta)$ appartient à $\text{Ob}(\mathcal{T}(k))$.

Pour terminer la démonstration, il nous reste donc à prouver que $\Lambda_{\text{tr}}([Y//(\pi)]_\eta) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. On raisonne par récurrence sur le cardinal du sous-ensemble $S \subset \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ des entiers s tels que f_s n'est pas lisse. Lorsque S est vide, Y est lisse sur l° et la k -variété rigide $[Y//(\pi)]_\eta$ admet potentiellement bonne réduction ; on a donc bien $\Lambda_{\text{tr}}([Y//(\pi)]_\eta) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$ dans ce cas. Dans la suite, on suppose que S est non vide.

Notons $m = \max(S)$ de sorte que $Y = Y_d \rightarrow Y_{m+1}$ est lisse. Si $(Y_i)_{i \in I}$ est un recouvrement Zariski de Y , la proposition 2.5.1 montre que $\Lambda_{\text{tr}}([Y//(\pi)]_\eta)$ est dans la sous-catégorie triangulée engendrée par les $\Lambda_{\text{tr}}([Y_J//(\pi)]_\eta)$ avec $\emptyset \neq J \subset I$ et $Y_J = \bigcap_{j \in J} Y_j$. On peut donc supposer qu'il existe un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{A}_{Y_{m+1}}^{d-1-m} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Y_{m+1} \end{array}$$

où la flèche horizontale est étale. En remplaçant la suite (2.94) par

$$Y \longrightarrow \mathbb{A}_{Y_m}^{d-1-m} \longrightarrow \mathbb{A}_{Y_m}^{d-2-m} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_m \longrightarrow Y_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0,$$

on se ramène au cas où $m = d - 1$. Autrement dit, on peut supposer que $f_{d-1} : Y = Y_d \rightarrow Y_{d-1}$ est non lisse. En utilisant encore une fois la proposition 2.5.1, on peut supposer qu'il existe un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y_{d-1}[u, v]/(uv - a) \\ & \searrow f_{r-1} & \downarrow \\ & & Y_{d-1} \end{array}$$

avec $a \in \Gamma(Y_{d-1}, \mathcal{O})$ et où la flèche horizontale est étale. On peut aussi supposer que Y et Y_{d-1} sont affines. On pose

$$Z = Y_{d-1}/(a) \simeq (Y_{d-1}[u, v]/(uv - a))/(u, v).$$

Formons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y_{d-1}[u, v]/(uv - a). \end{array}$$

Alors, E est étale sur Z . Puisque Z et E sont affines, on peut relever les équations d'une présentation du Z -schéma E avec autant d'équations que d'inconnues pour obtenir un Y_{d-1} -schéma étale F qui s'insère dans un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y_{d-1}. \end{array}$$

On pose alors $Y' = F[u, v]/(uv - a)$ et $Y'' = (Y \times_{Y_{d-1}} F) - C$ où C est le complémentaire de la diagonale dans $E \times_Z E \simeq E \times_{Y_{d-1}} F \subset Y \times_{Y_{d-1}} F$. On obtient alors deux carrés Nisnevich

$$\begin{array}{ccc} Y'' - E & \longrightarrow & Y'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y - E & \longrightarrow & Y, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y'' - E & \longrightarrow & Y'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' - E & \longrightarrow & Y'. \end{array}$$

Étant donné que $Y - E, Y' - E$ et $Y'' - E$ sont lisses sur Y_{d-1} , l'hypothèse de récurrence (sur la cardinalité de S) assure que $\Lambda_{\text{tr}}([(Y - E)//(\pi)]_\eta)$, $\Lambda_{\text{tr}}([(Y' - E)//(\pi)]_\eta)$ et $\Lambda_{\text{tr}}([(Y'' - E)//(\pi)]_\eta)$ sont dans $\mathcal{T}(k)$. Or, les morphismes

$$\frac{\Lambda_{\text{tr}}([Y''//(\pi)]_\eta)}{\Lambda_{\text{tr}}([(Y'' - E)//(\pi)]_\eta)} \longrightarrow \frac{\Lambda_{\text{tr}}([Y//(\pi)]_\eta)}{\Lambda_{\text{tr}}([(Y - E)//(\pi)]_\eta)},$$

$$\frac{\Lambda_{\text{tr}}([Y''//(\pi)]_\eta)}{\Lambda_{\text{tr}}([(Y'' - E)//(\pi)]_\eta)} \longrightarrow \frac{\Lambda_{\text{tr}}([Y'//(\pi)]_\eta)}{\Lambda_{\text{tr}}([(Y' - E)//(\pi)]_\eta)},$$

sont des équivalences Nis-locales. On voit donc qu'il suffit de montrer que $\Lambda_{\text{tr}}([Y'//(\pi)]_\eta)$ appartient à $\text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. Ceci fera l'objet de la quatrième étape.

Étape 4 : Grâce à la troisième étape ci-dessus, il nous reste à traiter le cas où $U = P\{u, v\}/(uv - a)$ avec P un k -affinoïde lisse et $a \in \Gamma(P, \mathcal{O}^\circ)$. Remarquons que d'après l'hypothèse de récurrence sur la dimension de U , on sait que $\Lambda_{\text{tr}}(P) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$.

On se ramène d'abord au cas où a est inversible. Pour cela, on note $Z = P/(a)$ et $V = U/(a)$. Par la deuxième étape de la preuve, il suffit de montrer que $\Lambda_{\text{tr}}(U - V)$ est dans $\mathcal{T}(k)$. Soit $(P_i)_{i \in I}$ un recouvrement admissible de $P - Z$ par des ouverts affinoïdes. En utilisant la proposition 2.5.1 (comme on l'a fait dans la deuxième étape

de la preuve), on montre que $\Lambda_{\text{tr}}(U - V)$ est dans la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par les $\Lambda_{\text{tr}}(P_J\{u, v\}/(uv - a))$ avec $J \subset I$ fini, non vide et $P_J = \bigcap_{j \in J} P_j$. D'où la réduction recherchée.

On suppose donc dans la suite que a est inversible. Le k -affinoïde $U = P\{u, v\}/(uv - a)$ s'identifie alors au domaine rationnel $D_{P\{t\}}(t|a) \subset P\{t\}$. De plus, le morphisme

$$\frac{\Lambda_{\text{tr}}(D_{P\{t\}}(t|a))}{\Lambda_{\text{tr}}(D_{P\{t\}}(a|t|a))} \longrightarrow \frac{\Lambda_{\text{tr}}(P\{t\})}{\Lambda_{\text{tr}}(D_{P\{t\}}(a|t))}$$

est une équivalence Nis-locale.

Rappelons que $\mathcal{T}(k)$ est stable par le produit tensoriel dérivé. Puisque

$$\Lambda_{\text{tr}}(P\{t\}) \simeq \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_k^1) \otimes^{\text{tr}} \Lambda_{\text{tr}}(P)$$

et que \mathbb{B}_k^1 admet bonne réduction, on déduit que $\Lambda_{\text{tr}}(P\{t\}) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. De même, vu l'isomorphisme $D_{P\{t\}}(a|t) \simeq P\{t\}$ donné sur les fonctions par $t \rightsquigarrow a^{-1}t$, on a également $\Lambda_{\text{tr}}(D_{P\{t\}}(a|t)) \in \text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. Enfin, on dispose d'un isomorphisme $D_{P\{t\}}(a|t|a) \simeq D_{P\{t\}}(1|t|1) = \partial\mathbb{B}_P^1$ donné sur les fonctions par $t \rightsquigarrow a^{-1}t$. Puisque $\partial\mathbb{B}_k^1$ admet bonne réduction, on déduit que $\Lambda_{\text{tr}}(\partial\mathbb{B}_P^1) \simeq \Lambda_{\text{tr}}(\partial\mathbb{B}_k^1) \otimes^{\text{tr}} \Lambda_{\text{tr}}(P)$ appartient à $\text{Ob}(\mathcal{T}(k))$. Ceci achève la preuve du théorème. C.Q.F.D.

Le théorème suivant nous permettra de déduire du théorème 2.5.32 des informations sur tous les objets de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k)$.

Théorème 2.5.35. — *On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- (a) k est d'égale caractéristique nulle et sa valuation est discrète,
- (b) Λ est une \mathbb{Q} -algèbre.

Alors, la catégorie $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ est compactement engendrée (en tant que catégorie triangulée avec sommes infinies) par les motifs $M^{\text{eff}}(X^{\text{an}})$ tels que X est un k -schéma projectif et lisse.

Démonstration. — Si X est un k -schéma projectif et lisse, la k -variété rigide X^{an} est quasi-compacte ce qui entraîne que le motif $M^{\text{eff}}(X^{\text{an}})$ est un objet compact de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$. Il reste à prouver que les motifs $M^{\text{eff}}(X^{\text{an}})$, pour X projectif lisse, engendrent la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$.

Supposons d'abord que k est d'égale caractéristique nulle et que sa valuation est discrète (i.e., que la condition (a) de l'énoncé est satisfaite). La catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ est alors engendrée par les motifs $M^{\text{eff}}(X^{\text{an}})$ avec X des k -schémas lisses. Ceci découle immédiatement des théorèmes 1.3.9 et 1.3.11 et de l'existence d'un foncteur triangulé

$$\mathbf{L}_{\text{tr}} : \mathbf{RigDA}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$$

qui envoie le motif sans transferts d'une k -variété rigide lisse sur le motif avec transferts de la même k -variété rigide. Pour obtenir le théorème sous la condition (a),

il reste à voir qu'on peut se restreindre aux k -schémas X qui sont projectifs. Ceci découle du fait bien connu que $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ est engendrée (en tant que catégorie triangulée avec sommes infinies) par les motifs des k -variétés projectives et lisses (voir par exemple [29, Définition 14.1]) ; ce fait est d'ailleurs encore valable, sans hypothèse sur la caractéristique de k , lorsque Λ est une \mathbb{Q} -algèbre.

On supposera donc dans la suite que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre (i.e., on travaillera sous la condition (b) de l'énoncé). On note provisoirement $\mathcal{S}(k) \subset \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par les $M^{\text{eff}}(X^{\text{an}})$ tels que X est un k -schéma projectif et lisse. C'est donc aussi la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par l'image du foncteur $\mathbf{Rig}^* : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \rightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$. Grâce au théorème 2.5.34, il suffit de montrer que $M^{\text{eff}}(U)$ est dans $\mathcal{S}(k)$ pour toute k -variété rigide quasi-compacte et lisse U admettant potentiellement bonne réduction. On raisonnera par récurrence sur la dimension de U qu'on supposera connexe.

Soit l/k une extension finie séparable. Étant donné que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre, $\Lambda_{\text{tr}}(U)$ est un facteur direct de $\Lambda_{\text{tr}}(U \widehat{\otimes}_k l)$. Il suffit donc de montrer que $M^{\text{eff}}(U \widehat{\otimes}_k l) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$. Par ailleurs, le foncteur $(l/k)^*$ possède un adjoint à gauche

$$(l/k)_{\#} : \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(l, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda).$$

Le foncteur $(l/k)_{\#}$ envoie le motif effectif d'une l -variété rigide lisse Y sur le motif de Y vue comme k -variété rigide. On en déduit que ce foncteur envoie $\mathcal{S}(l)$ dans $\mathcal{S}(k)$. Il est donc suffisant de montrer que le motif effectif de $U \widehat{\otimes}_k l$, vue comme l -variété rigide, est dans $\mathcal{S}(l)$.

De même, soit k'/k une extension finie purement inséparable. On dispose d'un carré commutatif à un isomorphisme naturel près

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) & \xrightarrow{\mathbf{Rig}^*} & \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \\ (k'/k)^* \downarrow & & \downarrow (k'/k)^* \\ \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k', \Lambda) & \xrightarrow{\mathbf{Rig}^*} & \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k', \Lambda), \end{array}$$

où les foncteurs verticaux sont des équivalences de catégories. Étant donné que $\mathcal{S}(k)$ et $\mathcal{S}(k')$ sont engendrées par les images de $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ et $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k', \Lambda)$, on déduit que $(k'/k)^*$ induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{S}(k)$ et $\mathcal{S}(k')$. Il suffit donc de montrer que $M^{\text{eff}}(U \widehat{\otimes}_k k') \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k'))$.

Par la discussion précédente, il est loisible de remplacer la k -variété rigide U par la l -variété rigide $U \widehat{\otimes}_k l$ pour toute extension finie l/k . Ceci servira à plusieurs reprises tout au long de la preuve. Comme première application de ce principe, on peut supposer que U admet bonne réduction et qu'il est géométriquement connexe. Pour la suite, on fixe \mathcal{U} un modèle formel lisse (sur k°) de U . On divise la preuve de $M^{\text{eff}}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$ en plusieurs étapes. La première étape est une réduction au cas où la valuation de k est discrète.

Étape 1 : Étant donné un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de \mathcal{U} , avec I fini, le motif $M^{\text{eff}}(U)$ est dans la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ engendrée par $M^{\text{eff}}((\mathcal{U}_J)_\eta)$ avec $\emptyset \neq J \subset I$ et $\mathcal{U}_J = \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j$. Il suffit donc de traiter le cas des $(\mathcal{U}_J)_\eta$, ce qui nous permet de supposer que \mathcal{U} est affine et qu'il existe un morphisme étale de k° -schémas formels

$$e : \mathcal{U} \longrightarrow \text{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_n\})$$

avec n la dimension de U .

Soit $k_0 \subset k$ un sous-corps fermé de k tel que k_0° est un anneau de valuation discrète et $\tilde{k}_0 \simeq \tilde{k}$. Par [20, Théorème 18.1.2], le morphisme étale $e_\sigma : \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \text{Spec}(\tilde{k}[t_1, \dots, t_n])$ s'étend d'une manière unique en un morphisme étale

$$e_0 : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \text{Spf}(k_0^\circ\{t_1, \dots, t_n\}).$$

De plus, \mathcal{U} est canoniquement isomorphe à $\mathcal{U}_0 \widehat{\otimes}_{k_0^\circ} k^\circ$ (en tant que $\text{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_n\})$ -schéma formel).

On dispose d'un foncteur $(k/k_0)^* : \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k_0, \Lambda) \rightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ qui envoie $\mathcal{S}(k_0)$ dans $\mathcal{S}(k)$. Il suffit donc de montrer que $M^{\text{eff}}((\mathcal{U}_0)_\eta)$ est dans $\mathcal{S}(k_0)$. Ceci nous ramène au cas où la valuation de k est discrète.

Étape 2 : À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la preuve, nous supposons que la valuation de k est discrète. Soit $Z \subset \mathcal{U}_\sigma$ un sous-schéma fermé, partout de codimension non nulle. Dans cette étape, on montrera (sous l'hypothèse de récurrence sur la dimension de U) que l'objet $M^{\text{eff}}(\mathcal{U}_\eta/(\mathcal{U} - Z)_\eta) = \Lambda_{\text{tr}}(\mathcal{U}_\eta/(\mathcal{U} - Z)_\eta)$ est dans $\mathcal{S}(k)$. On raisonne par récurrence sur la dimension de Z , le résultat étant évident lorsque Z est vide.

Supposons que Z est non vide. Il existe une extension finie et séparable l/k telle que \tilde{l}/\tilde{k} est purement inséparable et le lieu singulier du \tilde{l} -schéma $(Z \otimes_{\tilde{k}} \tilde{l})_{\text{red}}$ est partout de codimension non nulle. Il est facile de voir que le motif $M^{\text{eff}}(\mathcal{U}_\eta/(\mathcal{U} - Z)_\eta)$ est un facteur direct de

$$(l/k)_\#(l/k)^* M^{\text{eff}}\left(\frac{\mathcal{U}_\eta}{(\mathcal{U} - Z)_\eta}\right) = (l/k)_\# M^{\text{eff}}\left(\frac{(\mathcal{U} \widehat{\otimes}_{k^\circ} l^\circ)_\eta}{(\mathcal{U} \widehat{\otimes}_{k^\circ} l^\circ - (Z \otimes_{\tilde{k}} \tilde{l})_{\text{red}})_\eta}\right).$$

Quitte à faire un changement de base suivant l/k , on peut donc supposer que le lieu singulier $Z_{\text{sing}} \subset Z$ est partout de codimension non nulle dans Z . Le triangle distingué

$$\begin{aligned} M^{\text{eff}}((\mathcal{U} - Z_{\text{sing}})_\eta/(\mathcal{U} - Z)_\eta) &\longrightarrow M^{\text{eff}}((\mathcal{U})_\eta/(\mathcal{U} - Z)_\eta) \\ &\longrightarrow M^{\text{eff}}((\mathcal{U})_\eta/(\mathcal{U} - Z_{\text{sing}})_\eta) \longrightarrow \end{aligned}$$

et l'hypothèse de récurrence sur la dimension de Z nous ramènent au cas où Z est lisse. Étant donné un recouvrement ouvert fini $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de \mathcal{U} , le motif $M^{\text{eff}}(\mathcal{U}_\eta/(\mathcal{U} - Z)_\eta)$ est dans la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ engendrée par

$$M^{\text{eff}}((\mathcal{U}_J)_\eta/(\mathcal{U}_J - Z_J)_\eta)$$

avec $\emptyset \neq J \subset I$, $\mathcal{U}_J = \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j$ et $Z_J = Z \cap (\mathcal{U}_J)_\sigma$. On peut donc supposer qu'il existe un morphisme étale

$$e : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_n\})$$

tel que $Z = e_\sigma^{-1}(\mathrm{Spec}(\tilde{k}[t_1, \dots, t_n]/(t_{n-d+1}, \dots, t_n)))$. On pose alors

$$\mathcal{Z} = e^{-1}(\mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_n\}/(t_{n-d+1}, \dots, t_n))).$$

On obtient ainsi un carré cartésien de k° -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_{n-d}\}) & \longrightarrow & \mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_n\}) \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'immersion fermée donnée par le morphisme de k° -algèbres qui envoie t_i , pour $1 \leq i \leq n-d$, sur lui-même et t_i , pour $n-d+1 \leq i \leq n$, sur 0.

Soit \mathcal{V}_1 le produit fibré $\mathcal{U} \widehat{\times}_{k^\circ\{t_1, \dots, t_{n-d}\}} \mathcal{Z}$ où l'on considère \mathcal{U} comme un $\mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_{n-d}\})$ -schéma formel via la composition de

$$\mathcal{U} \xrightarrow{e} \mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_n\}) \xrightarrow{p} \mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_{n-d}\})$$

avec p induit par l'inclusion évidente $k^\circ\{t_1, \dots, t_{n-d}\} \hookrightarrow k^\circ\{t_1, \dots, t_n\}$. Le k° -schéma formel \mathcal{V}_1 contient le sous-schéma formel fermé $\mathcal{Z} \widehat{\times}_{k^\circ\{t_1, \dots, t_{n-d}\}} \mathcal{Z} \simeq \Delta \amalg \mathcal{E}$ avec $\Delta \simeq \mathcal{Z}$ la diagonale et \mathcal{E} son complémentaire. On pose alors $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{E}_\sigma$. On obtient ainsi deux carrés Nisnevich de k° -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} - \mathcal{Z}_\sigma & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U} - \mathcal{Z}_\sigma & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{U}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} - \mathcal{Z}_\sigma & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z} \widehat{\times}_{k^\circ} (\mathrm{Spf}(k^\circ\{t_{n-d+1}, \dots, t_n\}) - o) & \longrightarrow & \mathcal{Z} \widehat{\times}_{k^\circ} \mathrm{Spf}(k^\circ\{t_{n-d+1}, \dots, t_n\}). \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme dans $\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)$

$$\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}\left(\frac{(\mathcal{U})_\eta}{(\mathcal{U}_\eta - \mathcal{Z})_\eta}\right) \simeq \mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(\mathcal{Z}_\eta)^{\mathrm{L} \otimes \mathrm{tr}} \mathrm{M}^{\mathrm{eff}}\left(\frac{\mathbb{B}_k^d}{\mathbb{B}_k^d - o}\right).$$

Or, $\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{B}_k^d/\mathbb{B}_k^d - o) \simeq \mathrm{M}^{\mathrm{eff}}((\mathbb{A}_k^d)^{\mathrm{an}}/(\mathbb{A}_k^d - o)^{\mathrm{an}})$ est clairement dans $\mathcal{S}(k)$. La conclusion recherchée découle alors de l'hypothèse de récurrence sur la dimension de U et de la stabilité de $\mathcal{S}(k)$ par le produit tensoriel dérivé.

Étape 3 : Rappelons qu'on cherche à démontrer que $\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(\mathcal{U}_\eta) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}(k))$ avec \mathcal{U} un k° -schéma formel lisse. Une hypothèse qui servira dans cette étape est le fait que U

est supposé géométriquement connexe (voir la discussion juste avant la première étape de la preuve).

Comme dans la première étape de la preuve, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale

$$e : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_n\}).$$

Grâce à [20, Théorème 18.1.2], on peut trouver une présentation

$$\mathcal{U} \simeq \mathrm{Spf}\left(\frac{k^\circ\{t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_r\}}{(f_1, \dots, f_r)}\right)$$

avec $f_i \in k^\circ[t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_r]$ et telle que la matrice jacobienne $\frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(u_1, \dots, u_r)}$ est inversible sur \mathcal{U} . On note X_0 le plus grand ouvert de

$$\mathrm{Spec}\left(\frac{k^\circ[t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_r]}{(f_1, \dots, f_r)}\right)$$

qui est étale sur $\mathbb{A}_{k^\circ}^n = \mathrm{Spec}(k^\circ[t_1, \dots, t_n])$. On note X le normalisé de X_0 dans $\mathbb{P}_{k^\circ}^n$ (où X_0 est considéré comme un $\mathbb{P}_{k^\circ}^n$ -schéma via la composition de $X_0 \rightarrow \mathbb{A}_{k^\circ}^n \hookrightarrow \mathbb{P}_{k^\circ}^n$). Par construction, X est un k° -schéma projectif, normal et \mathcal{U} s'identifie à un ouvert du schéma formel $X//(\pi)$. Quitte à le remplacer par sa composante connexe contenant \mathcal{U} , on peut supposer X intègre. Puisque U est géométriquement connexe, il s'ensuit que $X[1/\pi]$ est également géométriquement connexe. (Puisque le k° -schéma X est projectif, ceci entraîne aussi que X_σ est géométriquement connexe, mais nous n'aurons pas besoin de cela.)

Par le théorème de de Jong [17, Theorem 6.5], on peut trouver :

- 1) une extension finie l/k ,
- 2) un l° -schéma projectif et intègre Y à réduction semi-stable de type $(1, \dots, 1)$ (i.e., localement pour la topologie de Zariski, Y est étale au-dessus de

$$\mathrm{Spec}(l^\circ[t_0, \dots, t_n]/(t_0 \cdots t_n - \theta))$$

avec $\theta \in l^\vee$,

- 3) un morphisme projectif et dominant $f : Y \rightarrow X$ qui est fini au-dessus d'un ouvert dense de X .

Le morphisme f induit un morphisme de l° -schémas $f' : Y \rightarrow X \otimes_{k^\circ} l^\circ$. Puisque $X[1/\pi]$ est géométriquement connexe, le morphisme f' est encore dominant. Ainsi, il est possible de remplacer k , \mathcal{U} et X par l , $\mathcal{U} \widehat{\otimes}_{k^\circ} l^\circ$ et $X \otimes_{k^\circ} l^\circ$ afin de supposer que $l = k$. Autrement dit, dans la suite Y sera un k° -schéma semi-stable de type $(1, \dots, 1)$ (au-dessus de k°). Bien entendu, on notera π au lieu de θ l'uniformisante de k° .

Notons D la composante irréductible de X_σ contenant U_σ . Soit E une composante irréductible de Y_σ telle que $D = f(E)$. Le morphisme $E \rightarrow D$ est alors dominant et fini au-dessus d'un ouvert non vide de D . Soit $D_1 \subset D$ un ouvert non vide tel que $f_1 : E_1 = f^{-1}(D_1) \rightarrow D_1$ est fini. Quitte à rétrécir D_1 , on peut supposer que $D_1 \subset \mathcal{U}_\sigma$ et que E_1 est contenu dans l'ouvert de lissité du k° -schéma Y . Notons \mathcal{E}_1 et \mathcal{D}_1 les

complétés formels de Y et X en les sous-schémas localement fermés E_1 et D_1 . Notons encore $f_1 : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ le morphisme évident. C'est un morphisme fini et surjectif entre deux k° -schémas formels lisses et intègres.

Par la deuxième étape de la preuve, $M^{\text{eff}}(\mathcal{U}_\eta) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$ si et seulement si $M^{\text{eff}}((\mathcal{D}_1)_\eta) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$. D'autre part, $M^{\text{eff}}((\mathcal{D}_1)_\eta)$ est un facteur direct de $M^{\text{eff}}((\mathcal{E}_1)_\eta)$. (En effet, on a $(f_1)_\eta \circ {}^t(f_1)_\eta = \text{deg}(f_1) \cdot \text{id}$.) Il suffit donc de montrer que $M^{\text{eff}}((\mathcal{E}_1)_\eta) \in \mathcal{S}(k)$.

La discussion précédente, nous ramène au cas où \mathcal{U} est un ouvert lisse du complété π -adique $X//(\pi)$ d'un k° -schéma projectif X à réduction semi-stable de type $(1, \dots, 1)$. Notons X^0 le lieu lisse de X . Alors, \mathcal{U} est un ouvert dense d'une composante connexe de $X^0//(\pi)$. Par la deuxième étape de la preuve, il est suffisant de montrer que $M^{\text{eff}}([X^0//(\pi)]_\eta) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$. Dans l'étape qui suit, on montrera que

$$M^{\text{eff}}\left(\frac{[X//(\pi)]_\eta}{[X^0//(\pi)]_\eta}\right) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k)).$$

Ceci terminera la preuve du théorème puisque $[X//(\pi)]_\eta \simeq (X[1/\pi])^{\text{an}}$ par la proposition 1.1.31.

Étape 4 : Soit \mathcal{X} un k° -schéma formel de dimension $n = \dim(\mathcal{U})$ et à réduction semi-stable de type $(1, \dots, 1)$, i.e., localement pour la topologie de Zariski, \mathcal{X} est étale au-dessus de $\text{Spf}(k^\circ\{t_0, \dots, t_n\}/(t_0 \cdots t_n - \pi))$. On note \mathcal{X}^0 le lieu lisse de \mathcal{X} . On montrera dans cette dernière étape que $M^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta/\mathcal{X}_\eta^0)$ est dans $\mathcal{S}(k)$. On raisonne par récurrence sur le nombre maximal de branches passant par un point de \mathcal{X}_σ . Ce nombre sera noté $s(\mathcal{X})$. Rappelons que pour $x \in \mathcal{X}_\sigma$, le nombre de branches passants par x est le plus petit entier $1 \leq s \leq n + 1$ tel que x admet un voisinage ouvert étale au-dessus de $\text{Spf}(k^\circ\{t_0, \dots, t_n\}/(t_0 \cdots t_{s-1} - \pi))$. L'ouvert \mathcal{X}^0 est exactement le lieu des points par lesquels passe une seule branche. Ainsi, lorsque $s(\mathcal{X}) = 1$, on a $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0$ de sorte qu'il n'y a rien à démontrer. On supposera dans la suite que $s(\mathcal{X}) \geq 2$.

La question étant locale pour la topologie de Zariski sur \mathcal{X} , on peut supposer qu'il existe un morphisme étale

$$e : \mathcal{X} \longrightarrow \text{Spf}(k^\circ\{t_0, \dots, t_n\}/(t_0 \cdots t_d - \pi))$$

avec $d = s(\mathcal{X}) - 1 \geq 1$. Notons Z le sous-schéma fermé de \mathcal{X}_σ défini par les équations $t_0 = \cdots = t_d = 0$; il est étale au-dessus de $\text{Spec}(\tilde{k}[t_{d+1}, \dots, t_n])$. Par [20, Théorème 18.1.2], Z est donc la fibre spéciale d'un k° -schéma formel \mathcal{Z} qui est étale au-dessus de $\text{Spf}(k^\circ\{t_{d+1}, \dots, t_n\})$.

La discussion qui suit la preuve du lemme 1.2.37 (dans le cas particulier de la réduction semi-stable stricte) fournit une équivalence Nis-locale

$$\Lambda_{\text{tr}}\left(\frac{\mathcal{X}_\eta}{(\mathcal{X} - Z)_\eta}\right) \simeq \Lambda_{\text{tr}}(\mathcal{Z}_\eta)^{\mathbf{L} \otimes^{\text{tr}}} \Lambda_{\text{tr}}\left(\frac{\text{Spf}(k^\circ\{t_0, \dots, t_d\}/(t_0 \cdots t_d - \pi))_\eta}{(\text{Spf}(k^\circ\{t_0, \dots, t_d\}/(t_0 \cdots t_d - \pi)) - o)_\eta}\right).$$

Ceci montre que $M^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta/(\mathcal{X} - Z)_\eta)$ est dans $\mathcal{S}(k)$. En effet, l'hypothèse de récurrence sur la dimension de \mathcal{U} assure que $M^{\text{eff}}(\mathcal{Z}_\eta) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$. Il reste donc à voir que

$$M^{\text{eff}}\left(\frac{\text{Spf}(k^\circ\{t_0, \dots, t_d\}/(t_0 \cdots t_d - \pi))_\eta}{(\text{Spf}(k^\circ\{t_0, \dots, t_d\}/(t_0 \cdots t_d - \pi)) - o)_\eta}\right) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k)).$$

Le lemme 1.2.38 (valable pour k non nécessairement d'égale caractéristique nulle) et l'existence du foncteur triangulé $\text{La}_{\text{tr}} : \mathbf{RigDA}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \rightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ nous ramène à montrer que

$$M^{\text{eff}}(\text{Spm}(k\{t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_s^{-1}\})) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$$

pour $0 \leq s \leq n$. Or, $M^{\text{eff}}(\partial\mathbb{B}_k^s \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^{n-s})$ est isomorphe à $M^{\text{eff}}((\mathbb{A}_k^1 - o)^s)^{\text{an}}$. D'où notre assertion.

Il est maintenant facile de conclure. En effet, on a un triangle distingué dans $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$:

$$\begin{aligned} M^{\text{eff}}((\mathcal{X} - Z)_\eta/\mathcal{X}_\eta^0) &\longrightarrow M^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta/\mathcal{X}_\eta^0) \\ &\longrightarrow M^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta/(\mathcal{X} - Z)_\eta) \longrightarrow M^{\text{eff}}((\mathcal{X} - Z)_\eta/\mathcal{X}_\eta^0)[+1]. \end{aligned}$$

Comme $M^{\text{eff}}(\mathcal{X}_\eta/(\mathcal{X} - Z)_\eta) \in \text{Ob}(\mathcal{S}(k))$, il suffit de montrer que $M^{\text{eff}}((\mathcal{X} - Z)_\eta/\mathcal{X}_\eta^0)$ est dans $\mathcal{S}(k)$. Or, $s(\mathcal{X} - Z) = s(\mathcal{X}) - 1$. L'hypothèse de récurrence sur $s(\mathcal{X})$ permet donc de conclure. La preuve du théorème est terminée. C.Q.F.D.

On déduit du théorème précédent une caractérisation sympathique des objets \mathbb{B}^1 -locaux dans la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts.

Corollaire 2.5.36. — *On garde les hypothèses du théorème 2.5.35. Un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts K sur SmRig/k est \mathbb{B}^1 -local en tant qu'objet de $\mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$ si et seulement si ses faisceaux d'homologie sont surconvergens et invariants par homotopie, i.e., $H_n(K) \in \mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(k, \Lambda)$. En particulier, $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$ dont les objets sont les complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts ayant leurs faisceaux d'homologie surconvergens et invariants par homotopie.*

Démonstration. — Montrons d'abord que la condition est suffisante. On suppose donc que les faisceaux d'homologie de K sont surconvergens et invariants par homotopie, et on cherche à montrer que K est \mathbb{B}^1 -local. Il suffit de vérifier que les morphismes

$$H_{\text{Nis}}^i(V, K) \longrightarrow H_{\text{Nis}}^i(\mathbb{B}_V^1, K)$$

sont inversibles pour tous les k -affinoïdes V et tous les entiers relatifs $i \in \mathbb{Z}$.

Fixons le k -affinoïde V . Comme dans la partie A de la preuve du théorème 2.5.32, on exploite le fait que les dimensions cohomologiques des petits sites Nisnevich sont bornées pour se ramener à montrer que les morphismes

$$H_{\text{Nis}}^i(V, \tau_{\leq n} K) \longrightarrow H_{\text{Nis}}^i(\mathbb{B}_V^1, \tau_{\leq n} K)$$

sont inversibles pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$. (Bien entendu, $\tau_{\leq n}$ désigne la troncation canonique pour les complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts.) Par ailleurs, le morphisme

$$H_{\mathbf{Nis}}^i(-, \tau_{\geq -m} \tau_{\leq n} K) \longrightarrow H_{\mathbf{Nis}}^i(-, \tau_{\leq n} K)$$

est inversible dès que $m > i$. Il est donc suffisant de montrer que les morphismes

$$H_{\mathbf{Nis}}^i(V, \tau_{\geq -m} \tau_{\leq n} K) \longrightarrow H_{\mathbf{Nis}}^i(\mathbb{B}_V^1, \tau_{\geq -m} \tau_{\leq n} K)$$

sont inversibles pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$. Une récurrence facile (sur le nombre de faisceaux d'homologie non nuls) nous ramène en fin de compte à vérifier que les morphismes $H_{\mathbf{Nis}}^i(V, F) \rightarrow H_{\mathbf{Nis}}^i(\mathbb{B}_V^1, F)$ sont inversibles pour F un faisceau d'homologie de K . Ceci découle du théorème 2.4.9.

Montrons que la condition est nécessaire. On sait que $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ est équivalente à la sous-catégorie triangulée $\mathcal{T}_{\mathbb{B}^1} \subset \mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\mathbf{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$ formée des objets \mathbb{B}^1 -locaux. Notons $\mathcal{T}'_{\mathbb{B}^1} \subset \mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\mathbf{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les complexes de faisceaux Nisnevich avec transferts ayant leurs faisceaux d'homologie surconvergens et invariants par homotopie. D'après ce qui précède, on sait que $\mathcal{T}'_{\mathbb{B}^1} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{B}^1}$. On doit montrer l'inclusion inverse : $\mathcal{T}_{\mathbb{B}^1} \subset \mathcal{T}'_{\mathbb{B}^1}$.

La sous-catégorie $\mathcal{T}'_{\mathbb{B}^1}$ est stable par sommes infinies. Elle est aussi une sous-catégorie triangulée. En effet, elle est clairement stable par les foncteurs de suspension et cosuspension. Par ailleurs, étant donné un triangle distingué dans $\mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\mathbf{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow A'[+1]$$

avec A' et A'' dans $\mathcal{T}'_{\mathbb{B}^1}$, l'objet A est aussi dans $\mathcal{T}'_{\mathbb{B}^1}$. Pour montrer cela, on considère la suite exacte de faisceaux Nisnevich

$$(2.95) \quad H_{n+1}(A'') \xrightarrow{a} H_n(A') \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(A'') \xrightarrow{b} H_{n-1}(A')$$

induite par le triangle distingué ci-dessus. Le faisceau $H_n(A)$ est alors surconvergent car c'est une extension de deux faisceaux surconvergens, à savoir le conoyau de a et le noyau de b . Il vient que (2.95) est une suite exacte dans $\mathbf{OStr}_{\mathbf{Nis}}(k, \Lambda)$. Par le corollaire 2.4.11, on en déduit que $H_n(A) \in \mathbf{OHStr}_{\mathbf{Nis}}(k, \Lambda)$ comme souhaité.

On note $\text{Loc}_{\mathbb{B}^1}$ le foncteur de \mathbb{B}^1 -localisation (voir [3, Proposition 4.2.72]). Par le théorème 2.5.35, $\mathcal{T}_{\mathbb{B}^1}$ est la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par les objets de la forme $\text{Loc}_{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$, avec X un k -schéma projectif et lisse. Il est donc suffisant de prouver que $\text{Loc}_{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})) \in \text{Ob}(\mathcal{T}'_{\mathbb{B}^1})$. Par le théorème 2.5.32, $\text{Loc}_{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$ est quasi-isomorphe (en tant que complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts) à $\text{Sing}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$. Par le théorème 2.4.13, les faisceaux d'homologie de $\text{Sing}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}))$ sont surconvergens et invariants par homotopie. Ceci termine la preuve du corollaire. C.Q.F.D.

Le corollaire précédent entraîne que la propriété d'être \mathbb{B}^1 -local est préservée par les foncteurs de troncation relativement à la t -structure usuelle sur la catégorie dérivée des faisceaux Nisnevich avec transferts. On déduit alors le résultat suivant.

Théorème 2.5.37. — *On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- (a) *k est d'égalité caractéristique nulle et sa valuation est discrète,*
- (b) *Λ est une \mathbb{Q} -algèbre.*

Il existe une unique t -structure sur $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ qui rend t -exact le foncteur (pleinement fidèle) de \mathbb{B}^1 -localisation

$$\text{Loc}_{\mathbb{B}^1} : \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda)).$$

Cette t -structure sera appelée la t -structure homotopique. Elle est engendrée (au sens de [2, Définition 2.1.71]) par les motifs $M^{\text{eff}}(U)$ avec U des k -affinoïdes lisses. Son cœur est équivalent à la catégorie $\mathbf{OHStr}_{\text{Nis}}(k, \Lambda)$ des faisceaux Nisnevich avec transferts surconvergens et invariants par homotopie.

Démonstration. — Seul l'engendrement de la t -structure homotopique par les $M^{\text{eff}}(U)$ nécessite une preuve. Soit K un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts \mathbb{B}^1 -fibrant. Il s'agit de montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) K est dans $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)_{<0} = \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \cap \mathbf{D}_{<0}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$.
- (ii) $\text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(M^{\text{eff}}(U)[n], K) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout k -affinoïde lisse U .

Comme K est \mathbb{B}^1 -fibrant, on a

$$\text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(M^{\text{eff}}(U)[n], K) \simeq H_n(K(U)).$$

Or, $H_n(K)$ est le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow H_n(K(U))$. Ceci montre l'implication (ii) \Rightarrow (i).

Réciproquement, supposons que la condition (i) est vérifiée. Alors, le morphisme $K \rightarrow \tau_{\leq -1}K$ est un quasi-isomorphisme. Soit $\tau_{\leq -1}K \rightarrow I$ une résolution injective dans la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts. On a alors un isomorphisme $K \simeq I$ dans $\mathbf{D}(\mathbf{Str}_{\text{Nis}}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$ et I est un complexe d'injectifs tel que $I_n = 0$ pour $n \geq 0$. Comme I est encore \mathbb{B}^1 -fibrant, on a

$$\text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(M^{\text{eff}}(U)[n], K) \simeq H_n(I(U)) = 0$$

pour $n \geq 0$. Ceci montre l'implication (i) \Rightarrow (ii). C.Q.F.D.

2.5.3. Théorème de simplification ou le « cancellation theorem ». — Soit k un corps valué complet dont la valuation est supposée non triviale. Dans ce paragraphe, on démontre le théorème de simplification (alias « cancellation theorem ») dont la version algébrique, due à Voevodsky, est bien connue (voir [45, 46]). On pose $T = \Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}}, 1)$; c'est le préfaisceau avec transferts (2.88) que nous avons noté T^{an} auparavant. Le théorème de simplification s'énonce comme suit.

Théorème 2.5.38. — *On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- (a) *k est d'égalité caractéristique nulle et sa valuation est discrète,*
- (b) *Λ est une \mathbb{Q} -algèbre.*

Soient M et N deux objets de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$. Alors, l'homomorphisme évident

$$(2.96) \quad \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(M, N) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(T \otimes^{\text{tr}} M, T \otimes^{\text{tr}} N)$$

est bijectif.

On note $\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(-, -)$ le bifoncteur « hom interne » dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$. Il s'agit de la variante dérivée du bifoncteur « hom interne » $\underline{\mathcal{H}om}(-, -)$ dans la catégorie monoïdale symétrique des préfaisceaux avec transferts : pour K et L des complexes de préfaisceaux avec transferts, $\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(K, L)$ s'identifie à $\underline{\mathcal{H}om}(K_{\text{cof}}, L_{\mathbb{B}^1\text{-fib}})$ où K_{cof} est un remplacement projectivement cofibrant de K et $L_{\mathbb{B}^1\text{-fib}}$ un remplacement projectivement \mathbb{B}^1 -fibrant de L .

Revenons à la situation du théorème 2.5.38. Par adjonction, on a

$$\text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(T \otimes^{\text{tr}} M, T \otimes^{\text{tr}} N) \simeq \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)}(M, \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(T, T \otimes^{\text{tr}} N))$$

et, modulo cette identification, le morphisme (2.96) est induit par le morphisme d'unité $N \rightarrow \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(T, T \otimes^{\text{tr}} N)$. Grâce au lemme de Yoneda, le théorème 2.5.38 équivaut à l'énoncé suivant.

Théorème 2.5.39. — *On garde les hypothèses du théorème 2.5.38. Pour tout objet K de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$, le morphisme d'unité $K \rightarrow \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(T, T \otimes^{\text{tr}} K)$ est inversible.*

Pour démontrer le théorème 2.5.39, nous allons adapter la méthode de [45] à la géométrie rigide. Étant donné $\lambda \in \sqrt{|k^\times|}$ avec $\lambda > 1$, on note $\mathbb{C}r_k(\lambda)$ l'ouvert affinoïde de $(\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}}$ dont les points rationnels à valeurs dans une extension finie l/k sont les $a \in l^\times$ avec $\lambda^{-1} \leq |a| \leq \lambda$. C'est donc la couronne de grand rayon λ et de petit rayon λ^{-1} (que nous avons notée $\mathbb{C}r_k(o, \lambda^{-1}, \lambda)$ auparavant). Pour une k -variété rigide lisse B , on pose $\mathbb{C}r_B(\lambda) = \mathbb{C}r_k(\lambda) \widehat{\times}_k B$. Comme d'habitude, on note $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1)$ le conoyau du morphisme $\Lambda_{\text{tr}}(B) \rightarrow \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda))$ induit par la section unité. On obtiendra le théorème 2.5.39 comme conséquence de la proposition suivante.

Proposition 2.5.40. — *Soient B une k -variété rigide lisse, X une B -variété rigide lisse et $\lambda, \nu \in \sqrt{|k^\times|}$ avec $\nu > \lambda > 1$. Considérons le morphisme de préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/B*

$$(2.97) \quad \delta : \Lambda_{\text{tr}}(X) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\nu), 1) \otimes^{\text{tr}} \Lambda_{\text{tr}}(X)),$$

qui à une correspondance finie $\alpha \in \mathbf{Cor}_B(U, X) \otimes \Lambda$ associe le morphisme de préfaisceaux avec transferts

$$\iota \otimes \alpha : \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1) \otimes^{\text{tr}} \Lambda_{\text{tr}}(U) \longrightarrow \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\nu), 1) \otimes^{\text{tr}} \Lambda_{\text{tr}}(X)$$

avec $\iota : \mathbb{C}r_B(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}r_B(\nu)$ l'inclusion évidente. Alors, on obtient un quasi-isomorphisme de préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/B en appliquant le foncteur $\text{Sing}^{\mathbb{B}^1}$ à (2.97).

On obtiendra la proposition 2.5.40 à la suite de plusieurs lemmes. Nous allons d'abord construire une rétraction au morphisme (2.97). On utilisera pour cela le résultat suivant.

Lemme 2.5.41. — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^n > \nu$. Considérons le morphisme $e_n : \mathbb{C}r_k(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}r_k(\lambda^n)$ d'élévation à la puissance n et notons $G_n \subset \mathbb{C}r_k(\lambda) \widehat{\times}_k \mathbb{C}r_k(\lambda^n)$ son graphe. Soit U un B -affinoïde lisse et soit $Z \subset \mathbb{C}r_U(\lambda) \widehat{\times}_B \mathbb{C}r_X(\nu)$ un sous-affinoïde, intègre, fini et surjectif sur une composante connexe de $\mathbb{C}r_U(\lambda)$. Notons

$$p : \mathbb{C}r_U(\lambda) \widehat{\times}_B \mathbb{C}r_X(\nu) \longrightarrow \mathbb{C}r_k(\lambda) \widehat{\times}_k \mathbb{C}r_k(\lambda^n)$$

le morphisme évident. Alors, toutes les composantes irréductibles de l'intersection $Z \cap p^{-1}(G_n)$ sont finies et surjectives sur U .

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que U est connexe. Le fermé G_n est défini par l'annulation de la fonction $t_2 - t_1^n$ avec t_1 et t_2 les coordonnées de $\mathbb{C}r_k(\lambda)$ et $\mathbb{C}r_k(\lambda^n)$ respectivement. Il s'ensuit que $Z \cap p^{-1}(G_n)$ est partout de dimension supérieure ou égale à $\dim(U)$. Il est donc suffisant de montrer que $Z \cap p^{-1}(G_n)$ est fini sur U (ce qui entraînera en particulier qu'il est partout de dimension égale à $\dim(U)$).

Étant donné que Z est fini sur $\mathbb{C}r_U(\lambda)$, on déduit que $Z \cap p^{-1}(G_n)$ est également fini sur $\mathbb{C}r_U(\lambda)$. Appelons T l'image de $Z \cap p^{-1}(G_n)$ dans $\mathbb{C}r_U(\lambda)$; il est suffisant de montrer que le k -affinoïde T est fini sur U . Remarquons pour cela que

$$\begin{aligned} p^{-1}(G_n) &= p^{-1}((\mathbb{C}r_k(\lambda) \widehat{\times}_k \mathbb{C}r_k(\nu)) \cap G_n) \\ &\subset p^{-1}(\mathbb{C}r_k(\nu^{1/n}) \widehat{\times}_k \mathbb{C}r_k(\nu)) = \mathbb{C}r_U(\nu^{1/n}) \widehat{\times}_B \mathbb{C}r_X(\nu). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $Z \cap p^{-1}(G_n) \subset \mathbb{C}r_U(\nu^{1/n}) \widehat{\times}_B \mathbb{C}r_X(\nu)$, ce qui entraîne que T est contenu dans $\mathbb{C}r_U(\nu^{1/n})$. Puisque T est fermé dans $\mathbb{C}r_U(\lambda)$, on peut appliquer le lemme 2.5.42 ci-dessous pour conclure. C.Q.F.D.

Lemme 2.5.42. — Soient $\lambda, \lambda' \in \sqrt{|k^\times|}$ avec $1 < \lambda' < \lambda$. Soit U un k -affinoïde et soit $T \subset \mathbb{C}r_U(\lambda)$ un sous-affinoïde fermé. On suppose que T est contenu dans $\mathbb{C}r_U(\lambda')$. Alors, T est fini sur U .

Démonstration. — On identifie $\mathbb{C}r_k(\lambda)$ à un ouvert affinoïde de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ de la manière usuelle. On a un recouvrement admissible

$$(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}} = \mathbb{C}r_k(\lambda) \cup \mathbb{B}_k^1(o, \lambda^{-1}) \cup \mathbb{B}_k^1(\infty, \lambda^{-1})$$

avec $o = [1 : 0]$ et $\infty = [0 : 1]$. (Ci-dessus, $\mathbb{B}_k^1(\infty, \lambda^{-1})$ désigne le complémentaire dans $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$ de $\mathbb{B}_k^1(o, \lambda)$.) Remarquons que

$$\mathbb{C}r_k(\lambda') \cap (\mathbb{B}_k^1(o, \lambda^{-1}) \coprod \mathbb{B}_k^1(\infty, \lambda^{-1})) = \emptyset.$$

Identifions T avec son image dans $(\mathbb{P}_U^1)^{\text{an}}$. L'hypothèse de l'énoncé entraîne que $T \cap (\mathbb{B}_U^1(o, \lambda^{-1}) \amalg \mathbb{B}_U^1(\infty, \lambda^{-1})) = \emptyset$. Il vient que T est un fermé de $(\mathbb{P}_U^1)^{\text{an}}$. La projection $T \rightarrow U$ est donc l'analytifié d'un morphisme projectif. Comme T est un U -affinoïde, il est nécessairement fini sur U . C.Q.F.D.

Soit $Z = \text{Spm}(A)$ un k -affinoïde intègre et soit $f \in k(A)$. (On rappelle que $k(A)$ désigne le corps des fractions rationnelles de A .) On note $\text{Div}(f)$ le diviseur associé à f . C'est une combinaison linéaire de sous-affinoïdes fermés et intègres de Z . Lorsque $f \in A$, ce diviseur est effectif.

Définition 2.5.43. — *Gardons les notations de la proposition 2.5.40. Soit U un B -affinoïde lisse et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^n > \nu$. On définit un homomorphisme*

$$\phi_n : \mathbf{Cor}_B(\mathbb{C}r_U(\lambda), \mathbb{C}r_X(\nu)) \longrightarrow \mathbf{Cor}_B(U, X)$$

en spécifiant les images des correspondances finies élémentaires de la manière suivante. Notons t_1 et t_2 les coordonnées de $\mathbb{C}r_k(\lambda)$ et $\mathbb{C}r_k(\nu)$ respectivement. Soit $Z \subset \mathbb{C}r_U(\lambda) \widehat{\times}_B \mathbb{C}r_X(\nu)$ un sous-affinoïde intègre, fini et surjectif sur une composante connexe de $\mathbb{C}r_U(\lambda)$. Par le lemme 2.5.41, toutes les composantes irréductibles du support du cycle $\text{Div}((t_2 - t_1^n)|_Z)$ sont finies et surjectives sur U . On définit donc une correspondance finie $\phi_n([Z]) \in \mathbf{Cor}_B(U, X)$ en posant

$$\phi_n([Z]) = q_*(\text{Div}((t_2 - t_1^n)|_Z))$$

avec $q : \mathbb{C}r_U(\lambda) \widehat{\times}_B \mathbb{C}r_X(\nu) \rightarrow U \widehat{\times}_B X$ la projection évidente et q_* l'application « image directe » des cycles à support propre relativement à $U \widehat{\times}_B X$.

Lemme 2.5.44. — *Gardons les notations de la définition 2.5.43. Le morphisme ϕ_n définit un morphisme de préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/B*

$$(2.98) \quad \phi_n : \underline{\text{Hom}}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu))) \longrightarrow \Lambda_{\text{tr}}(X).$$

Démonstration. — Il faut vérifier que ϕ_n est compatible à l'action des correspondances finies. Soient U, V deux B -affinoïdes lisses, $\alpha \in \mathbf{Cor}_B(U, V)$ et $\beta \in \mathbf{Cor}_B(\mathbb{C}r_V(\lambda), \mathbb{C}r_X(\nu))$. Il faut prouver l'égalité

$$\phi_n(\beta) \circ \alpha = \phi_n(\beta \circ (\text{id}_{\mathbb{C}r_k(\lambda)} \otimes \alpha)).$$

On peut supposer que $\alpha = [T]$ et $\beta = [Z]$ sont des correspondances finies élémentaires. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} R & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \mathbb{C}r_X(\nu) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{C}r_T(\lambda) & \longrightarrow & \mathbb{C}r_V(\lambda) & & \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{C}r_U(\lambda) & & & & \end{array}$$

où $R = Z \widehat{\times}_{\mathbb{C}r_V(\lambda)} \mathbb{C}r_T(\lambda) = Z \widehat{\times}_V T$. Notons $(R_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de R et m_i la multiplicité de Serre de R_i . Notons $f = (t_2 - t_1^n)|_Z$ et $g_i = f|_{R_i}$. Dans le groupe abélien librement engendré par les fermés irréductibles de R , on a :

$$(T \rightarrow V)^* \text{Div}(f) = (\mathbb{C}r_T(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}r_V(\lambda))^* \text{Div}(f) = \sum_{i \in I} m_i \text{Div}(g_i)$$

avec $(T \rightarrow V)^*$ et $(\mathbb{C}r_T(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}r_V(\lambda))^*$ les « pull-back » des cycles. On en déduit que

$$\begin{aligned} \phi_n([Z]) \circ [T] &= (R \rightarrow U \widehat{\times}_B X)_* ((T \rightarrow V)^* \text{Div}(f)) \\ &= \sum_{i \in I} m_i (R_i \rightarrow U \widehat{\times}_B X)_* \text{Div}(g_i) = \phi_n([Z] \circ [\mathbb{C}r_T(\lambda)]). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

C.Q.F.D.

Soit $\mu \in \sqrt{|k^\times|}$ avec $\mu > 1$. On note c la composition de

$$\mathbb{C}r_k(\mu) \longrightarrow \text{Spm}(k) \xrightarrow{1} \mathbb{C}r_k(\mu).$$

On a clairement $c \circ c = c$, de sorte que $c : \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu)) \rightarrow \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu))$ est un projecteur dans la catégorie des préfaisceaux avec transferts sur SmAfd/B pour toute B -variété rigide lisse Y . Le préfaisceau avec transferts $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu), 1_Y)$ s'identifie à l'image du projecteur complémentaire $d = \text{id} - c : \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu)) \rightarrow \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu))$. Le projecteur d se factorise alors de la manière suivante

$$\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu)) \xrightarrow{a} \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu), 1_Y) \xrightarrow{b} \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_Y(\mu)).$$

On notera $\tilde{\delta} : \Lambda_{\text{tr}}(X) \rightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu)))$ le morphisme évident déduit de l'unité de l'adjonction et de l'inclusion $\iota : \mathbb{C}r_k(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}r_k(\nu)$. Ce morphisme est lié au morphisme δ de la proposition 2.5.40 par les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\text{tr}}(X) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)) \\ \tilde{\delta} \downarrow & & \downarrow \underline{\mathcal{H}om}(a, \text{id}) \\ \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu))) & \xrightarrow{\underline{\mathcal{H}om}(\text{id}, a)} & \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\text{tr}}(X) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)) \\ \tilde{\delta} \downarrow & & \downarrow \underline{\mathcal{H}om}(\text{id}, b) \\ \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu))) & \xrightarrow{\underline{\mathcal{H}om}(b, \text{id})} & \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu))). \end{array}$$

On dispose également de deux morphismes canoniques

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{H}om}(a, b) &: \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)) \\ &\longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu))), \\ \underline{\mathcal{H}om}(b, a) &: \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu))) \\ &\longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)). \end{aligned}$$

On a les formules

$$\underline{\mathcal{H}om}(a, b) = \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, b) \circ \underline{\mathcal{H}om}(a, \mathrm{id}) = \underline{\mathcal{H}om}(a, \mathrm{id}) \circ \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, b),$$

$$\underline{\mathcal{H}om}(b, a) = \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, a) \circ \underline{\mathcal{H}om}(b, \mathrm{id}) = \underline{\mathcal{H}om}(b, \mathrm{id}) \circ \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, a).$$

De plus, le morphisme composé $\underline{\mathcal{H}om}(b, a) \circ \underline{\mathcal{H}om}(a, b)$ est l'identité de

$$\underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X))$$

alors que le morphisme composé $\underline{\mathcal{H}om}(a, b) \circ \underline{\mathcal{H}om}(b, a) = \underline{\mathcal{H}om}(d, d)$ est un projecteur de

$$\underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu)))$$

dont l'image est donnée par

$$\underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)).$$

Lemme 2.5.45. — *On a les égalités*

$$\phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, d) \circ \tilde{\delta} = \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d, \mathrm{id}) \circ \tilde{\delta} = \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d, d) \circ \tilde{\delta} = -\mathrm{id}.$$

Démonstration. — Soit U un B -affinoïde lisse et soit $Z \subset U \widehat{\times}_B X$ un sous-affinoïde fermé, intègre, fini et surjectif sur U . Il s'agit de calculer la correspondance finie

$$(2.99) \quad \begin{aligned} \phi_n([\mathrm{Graph}(\iota) \widehat{\times}_k Z]) - \phi_n([\mathrm{Graph}(c \circ \iota) \widehat{\times}_k Z]) \\ = \phi_n([\mathrm{Graph}(\iota) \widehat{\times}_k Z]) - \phi_n([\mathrm{Graph}(\iota \circ c) \widehat{\times}_k Z]). \end{aligned}$$

Notons comme ci-dessus t_1 et t_2 les coordonnées de $\mathbb{C}r_k(\lambda)$ et $\mathbb{C}r_k(\lambda^n)$. La restriction de $(t_2 - t_1^n)$ suivant l'immersion diagonale $(\mathrm{id}, \iota) : \mathbb{C}r_k(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}r_k(\lambda) \widehat{\times}_k \mathbb{C}r_k(\lambda^n)$ est égale à $t_1 - t_1^n$. La restriction de la même fonction suivant $(\mathrm{id}, \iota \circ c)$ est égale à $1 - t_1^n$. Or, $\mathrm{Div}(t_1 - t_1^n) = [\mathbb{C}r_k(\lambda)/(t_1 - t_1^n)] \otimes [Z]$ et $\mathrm{Div}(1 - t_1^n) = [\mathbb{C}r_k(\lambda)/(1 - t_1^n)] \otimes [Z]$. Il vient que la correspondance finie (2.99) est égale à

$$(2.100) \quad \dim_k(\Gamma(\mathbb{C}r_k(\lambda), \mathcal{O})/(t_1 - t_1^n)) \cdot [Z] - \dim_k(\Gamma(\mathbb{C}r_k(\lambda), \mathcal{O})/(1 - t_1^n)) \cdot [Z].$$

D'une part, la dimension (en tant que k -espace vectoriel) de la k -algèbre finie $\Gamma(\mathbb{C}r_k(\lambda), \mathcal{O})/(t_1 - t_1^n)$ est $n - 1$ car t_1 est inversible. D'autre part, la dimension de la k -algèbre finie $\Gamma(\mathbb{C}r_k(\lambda), \mathcal{O})/(1 - t_1^n)$ est n . On en déduit que (2.100) est égale à $(n - 1) \cdot [Z] - n \cdot [Z] = -[Z]$. Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Corollaire 2.5.46. — *On a la relation $\phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(a, b) \circ \delta = -\mathrm{id}$.*

Démonstration. — Ceci découle immédiatement des égalités

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{H}om}(a, b) \circ \delta &= \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, b) \circ \underline{\mathcal{H}om}(a, \mathrm{id}) \circ \delta \\ &= \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, b) \circ \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, a) \circ \tilde{\delta} = \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, d) \circ \tilde{\delta} \end{aligned}$$

et du lemme 2.5.45. C.Q.F.D.

Vu le corollaire 2.5.46, on prouvera de la proposition 2.5.40, en montrant que le morphisme de complexes de préfaisceaux avec transferts

$$\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\delta \circ \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(a, b))$$

est homotope à $-\text{id}$. Par (la preuve de) la proposition 2.2.52, il suffira de construire une \mathbb{B}^1 -homotopie (à droite)

$$\begin{aligned} & \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)) \\ & \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_B^1) \otimes^{\text{tr}} \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda), 1_B), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu), 1_X)) \end{aligned}$$

entre $\delta \circ \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(a, b)$ et $-\text{id}$. Étant donné que $\underline{\mathcal{H}om}(b, a)$ (resp. $\underline{\mathcal{H}om}(a, b)$) est un épimorphisme (resp. monomorphisme) scindé, il suffira de construire une \mathbb{B}^1 -homotopie (à droite)

$$(2.101) \quad \begin{aligned} h : \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\lambda))) \\ \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_B^1 \widehat{\times}_B \mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\lambda))) \end{aligned}$$

entre

$$\begin{aligned} & \underline{\mathcal{H}om}(a, b) \circ (\delta \circ \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(a, b)) \circ \underline{\mathcal{H}om}(b, a) = \underline{\mathcal{H}om}(\text{id}, d) \circ \tilde{\delta} \circ \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d, d) \\ & \text{et } \underline{\mathcal{H}om}(a, b) \circ (-\text{id}) \circ \underline{\mathcal{H}om}(b, a) = -\underline{\mathcal{H}om}(d, d). \end{aligned}$$

Notons $\mathbb{C}r_k^2(\mu) = \mathbb{C}r_k(\mu) \widehat{\times}_k \mathbb{C}r_k(\mu)$ et $\mathbb{C}r_{\dagger}^2(\mu) = \mathbb{C}r_k^2(\mu) \widehat{\times}_k \dagger$. Appelons τ la permutation des facteurs de $\mathbb{C}r_k^2(\mu)$. On dispose des projecteurs $d' = d \otimes \text{id}$ et $d'' = \text{id} \otimes d$ de $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B^2(\mu)) = \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\mu)) \otimes \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\mu))$. On a la relation $d'' = \tau \circ d' \circ \tau$. On notera aussi $r = d' \circ d'' = d'' \circ d' = d \otimes d$. On dispose d'un morphisme de préfaisceaux avec transferts

$$\tilde{\delta}' : \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu))) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B^2(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X^2(\nu)))$$

qui à une correspondance finie $\gamma \in \mathbf{Cor}_B(\mathbb{C}r_U(\lambda), \mathbb{C}r_X(\nu))$ associe $\iota \otimes \gamma$ avec $\iota : \mathbb{C}r_k(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}r_k(\nu)$ l'inclusion évidente. On dispose également d'un morphisme de préfaisceaux avec transferts

$$\phi'_n : \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B^2(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X^2(\nu))) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_B(\lambda)), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_X(\nu)))$$

qui à une correspondance finie

$$\gamma \in \mathbf{Cor}_B(\mathbb{C}r_U^2(\lambda), \mathbb{C}r_X^2(\nu)) = \mathbf{Cor}_B(\mathbb{C}r_{\mathbb{C}r_U(\lambda)}(\lambda), \mathbb{C}r_{\mathbb{C}r_X(\nu)}(\nu))$$

associe $\phi_n(\gamma)$. Le lemme 2.5.45 montre que $\phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d', d') \circ \tilde{\delta}' = -\text{id}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(r, r) \circ \tilde{\delta}' &= \phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d', d') \circ \underline{\mathcal{H}om}(d'', d'') \circ \tilde{\delta}' \\ &= \phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d', d') \circ \tilde{\delta}' \circ \underline{\mathcal{H}om}(d, d) \\ &= -\underline{\mathcal{H}om}(d, d). \end{aligned}$$

On a par ailleurs le lemme suivant.

Lemme 2.5.47. — *On a la relation*

$$\phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(\tau, \tau) \circ \underline{\mathcal{H}om}(r, r) \circ \tilde{\delta}' = \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, d) \circ \tilde{\delta} \circ \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d, d).$$

Démonstration. — Soit U un B -affinoïde lisse et soit $\alpha \in \mathbf{Cor}_B(\mathbb{C}r_U(\lambda), \mathbb{C}r_X(\nu))$ une correspondance finie. On a

$$\underline{\mathcal{H}om}(r, r) \circ \delta'(\alpha) = (\iota - c \circ \iota) \otimes (\alpha - c \circ \alpha - \alpha \circ c + c \circ \alpha \circ c).$$

Étant données des correspondances finies

$$\gamma \in \mathbf{Cor}_k(\mathbb{C}r_k(\lambda), \mathbb{C}r_k(\nu)) \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbf{Cor}_B(\mathbb{C}r_U(\lambda), \mathbb{C}r_X(\nu)),$$

on a la formule

$$\phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(\tau, \tau)(\gamma \otimes \beta) = \gamma \otimes \phi_n(\beta).$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(\tau, \tau) \circ \underline{\mathcal{H}om}(r, r) \circ \delta'(\alpha) &= (\iota - c \circ \iota) \otimes (\phi_n(\alpha - c \circ \alpha - \alpha \circ c + c \circ \alpha \circ c)) \\ &= \underline{\mathcal{H}om}(\mathrm{id}, d) \circ \tilde{\delta} \circ \phi_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(d, d)(\alpha). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Par la discussion précédente, la proposition 2.5.40 découlera de l'existence d'une \mathbb{B}^1 -homotopie à droite (2.101) entre

$$\phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(r, r) \circ \tilde{\delta}' \quad \text{et} \quad \phi'_n \circ \underline{\mathcal{H}om}(\tau, \tau) \circ \underline{\mathcal{H}om}(r, r) \circ \tilde{\delta}'.$$

Étant donné que $r \circ \tau = \tau \circ r$, il suffit de montrer que $\underline{\mathcal{H}om}(r \circ \tau, r \circ \tau)$ et $\underline{\mathcal{H}om}(r, r)$ sont \mathbb{B}^1 -homotopes. Ceci découlera du lemme ci-dessous.

Lemme 2.5.48. — *Les correspondances finies $r \circ \tau$ et $-r$ dans $\mathbf{Cor}_k(\mathbb{C}r_k^2(\mu), \mathbb{C}r_k^2(\mu))$ sont \mathbb{B}^1 -homotopes (pour $\mu > 1$ dans $\sqrt{|k^\times|}$).*

Démonstration. — Pour $\mu' > \mu$, l'inclusion $\iota : \mathbb{C}r_k(\mu) \hookrightarrow \mathbb{C}r_k(\mu')$ induit un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$. Ceci découle de la proposition 2.3.17 qu'on applique aux inclusions de couronnes

$$\mathbb{C}r_k(\mu) = \mathbb{C}r_k(o, \mu^{-1}, \mu) \hookrightarrow \mathbb{C}r_k(o, \mu'^{-1}, \mu),$$

$$\mathbb{C}r_k(o, \mu'^{-1}, \mu) \hookrightarrow \mathbb{C}r_k(o, \mu'^{-1}, \mu') = \mathbb{C}r_k(\mu').$$

Il suffit donc de montrer que les correspondances finies suivantes sont \mathbb{B}^1 -homotopes :

$$r \circ \iota \circ \tau : \mathbb{C}r_k^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}r_k^2(\mu') \quad \text{et} \quad -r \circ \iota : \mathbb{C}r_k^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}r_k^2(\mu').$$

Considérons la correspondance finie $\alpha : \mathbb{C}r_k^2(\mu) \rightarrow \mathbb{C}r_k^2(\mu^6)$ donnée sur les points k -rationnels par

$$\alpha(x, y) = (x, y) + (y, x) - (xy, 1) - (1, xy).$$

On vérifie immédiatement que $r \circ \alpha = r \circ \iota + r \circ \iota \circ \tau$ (avec $\mu' = \mu^6$). Il est donc suffisant de montrer que α est \mathbb{B}^1 -homotope à zéro. Pour ce faire, on considère le diagramme de k -affinoïdes

$$\begin{array}{ccc} & \frac{\mathbb{C}r_k(\mu^4) \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^1(o, \mu^2)[z]}{(z^2 - sz + p)} & \xrightarrow{u} \mathbb{C}r_k^2(\mu^6) \\ & \downarrow e & \\ \mathbb{C}r_k^2(\mu^2) & \xrightarrow{f} \mathbb{C}r_k(\mu^4) \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^1(o, \mu^2) & \end{array}$$

tel que :

- p (pour produit), s (pour somme) et (t_1, t_2) désignent les coordonnées de $\mathbb{C}r_k(\mu^4)$, $\mathbb{B}_k^1(o, \mu^2)$ et $\mathbb{C}r_k^2(\mu^6)$,
- z est une indéterminée,
- e est le morphisme évident,
- f est le morphisme défini par $f(x, y) = (xy, x + y)$,
- u correspond au morphisme de k -algèbres affinoïdes donné par les associations $t_1 \rightsquigarrow z$ et $t_2 \rightsquigarrow s - z = pz^{-1}$.

Il est clair que e est fini et surjectif; on peut donc considérer la correspondance finie transposée ${}^t e$. Un calcul facile montre que $u \circ {}^t e \circ f$ est la correspondance finie $\beta : \mathbb{C}r_k^2(\mu^2) \rightarrow \mathbb{C}r_k^2(\mu^6)$ donnée par $\beta(x, y) = (x, y) + (y, x)$. (Autrement dit, $\beta = \iota \circ (\text{id} + \tau)$ avec $\iota : \mathbb{C}r_k^2(\mu^2) \hookrightarrow \mathbb{C}r_k^2(\mu^6)$ l'inclusion évidente.)

À présent, considérons le morphisme $g : \mathbb{C}r_k^2(\mu) \rightarrow \mathbb{C}r_k^2(\mu^2)$ donné par $g(x, y) = (xy, 1)$. Puisque la projection $\mathbb{C}r_k(\mu^4) \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^1(o, \mu^2) \rightarrow \mathbb{C}r_k(\mu^4)$ est un isomorphisme dans $\pi_0 \mathbf{RigCor}(k)$, on déduit que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}r_k^2(\mu) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{C}r_k^2(\mu^2) \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{C}r_k^2(\mu^2) & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}r_k(\mu^4) \widehat{\times}_k \mathbb{B}_k^1(o, \mu^2) \end{array}$$

commute à \mathbb{B}^1 -homotopie près. Il s'ensuit que la correspondance finie

$$\beta \circ (\iota - g) = u \circ {}^t e \circ f \circ (\iota - g)$$

est \mathbb{B}^1 -homotope à zéro. Or, on a clairement $\alpha = \beta \circ (\iota - g)$. Ceci termine la preuve du lemme. C.Q.F.D.

Expliquons à présent comment déduire le théorème 2.5.39 de la proposition 2.5.40. L'inclusion évidente $\mathbb{C}r_k(\lambda) \hookrightarrow (\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}}$ induit un isomorphisme

$$\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1) \simeq \Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}}, 1) = T$$

dans $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$. Il suffira donc de montrer que le morphisme

$$(2.102) \quad K \longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), \Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_k^1 - o)^{\text{an}}, 1))^{\mathbf{L}\otimes^{\text{tr}}} K$$

est inversible. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ formée des objets K rendant (2.102) inversible est une sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies. Ainsi, grâce au théorème 2.5.35, il suffit de montrer que (2.102) est inversible pour $K = \Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})[0]$, où X est un k -schéma lisse. Dans ce cas, le morphisme (2.102) s'écrit

$$(2.103) \quad \Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), (\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_X))_{\mathbb{B}^1\text{-fib}}).$$

Par la première partie du théorème 2.5.32, un remplacement \mathbb{B}^1 -fibrant de $\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_{X^{\text{an}}})$ est donné par un remplacement Nis-fibrant de

$$\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_{X^{\text{an}}}).$$

De plus, par la deuxième partie du théorème 2.5.32, le morphisme

$$\begin{array}{c} \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_{X^{\text{an}}})) \\ \downarrow \\ \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), (\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_{X^{\text{an}}}))_{\text{Nis-fib}})) \end{array}$$

est une équivalence Nis-locale. Il est donc suffisant de prouver que

$$\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_{X^{\text{an}}}))$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Or, on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}}) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_{X^{\text{an}}})) \\ (1) \downarrow & & \parallel \\ \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})) & \xrightarrow{(2)} & \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), \Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_X^1 - o_X)^{\text{an}}, 1_{X^{\text{an}}})) \end{array}$$

D'après le lemme 2.5.31, la flèche (1) est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Par ailleurs, la flèche (2) est la colimite filtrante, quand $\nu \in \sqrt{|k^\times|}$ tend vers l'infini, des morphismes

$$\underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\Lambda_{\text{tr}}(X^{\text{an}})) \longrightarrow \underline{\text{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\underline{\mathcal{H}om}(\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_k(\lambda), 1), \Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{C}r_{X^{\text{an}}}(\nu), 1_{X^{\text{an}}}))$$

qui sont des quasi-isomorphismes par la proposition 2.5.40. Ceci termine la preuve du théorème 2.5.39.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème de simplification (i.e., le théorème 2.5.38) et de la proposition 2.5.29.

Corollaire 2.5.49. — *On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- (a) k est d'égalité caractéristique nulle et sa valuation est discrète,
- (b) Λ est une \mathbb{Q} -algèbre.

Alors, le foncteur de suspension infinie $\text{Sus}_T^0 : \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \rightarrow \mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$ est pleinement fidèle.

2.5.4. Description en termes de motifs algébriques. — Soit k un corps valué complet dont la valuation est supposée non triviale. On fixe $\pi \in k^\vee - \{0\}$. Dans ce paragraphe, on identifie, à équivalence près, certaines sous-catégories triangulées de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ avec des sous-catégories triangulées de motifs algébriques relatifs au-dessus de certains \tilde{k} -schémas simples (et plus précisément, des produits de $\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}$). Le résultat le plus complet dans cette direction est l’analogie avec transferts de la première partie de la scholie 1.3.26 (voir le théorème 2.5.51 ci-dessous). Ici encore, la validité de ce résultat nécessite l’hypothèse que k est d’égale caractéristique nulle et que sa valuation est discrète. Un résultat partiel, mais valable pour certains corps k d’égale caractéristique quelconque, sera également établi dans ce paragraphe (voir le théorème 2.5.57 ci-dessous).

La définition suivante est la variante avec transferts de la définition 1.3.25. En effet, on peut se restreindre ci-dessous aux entiers n négatifs ; on a alors

$$M(-)(n)[n] = \text{Sus}_T^{-n}(\Lambda_{\text{tr}}(-)).$$

Définition 2.5.50. — *Supposons que \tilde{k} est un corps de caractéristique nulle. On appelle $\mathbf{QUDM}(\tilde{k}, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}, \Lambda)$ engendrée par les motifs $M(Q_r^{\text{gm}}(X, f))(n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, X un \tilde{k} -schéma lisse et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$. (On rappelle que $Q_r^{\text{gm}}(X, f)$ est le $\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}} = \text{Spec}(\tilde{k}[T, T^{-1}])$ -schéma $X[T, T^{-1}, V]/(V^r - fT)$; voir la notation 1.3.24.) Les objets de $\mathbf{QUDM}(\tilde{k}, \Lambda)$ sont appelés les motifs quasi-unipotents de $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}, \Lambda)$.*

Voici le premier théorème de ce paragraphe.

Théorème 2.5.51. — *Supposons que $k = \tilde{k}((\pi))$ est le corps des séries de Laurent en π à coefficients dans un corps de caractéristique nulle \tilde{k} . Le foncteur composé*

$$(2.104) \quad \mathfrak{F} : \mathbf{QUDM}(\tilde{k}, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}, \Lambda) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{DM}(k, \Lambda) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — On prouvera le théorème en se ramenant à la première partie de la scholie 1.3.26. On utilisera pour cela le couple de foncteurs adjoints $(a_{\text{tr}}, o_{\text{tr}})$ d’ajout et d’oubli des transferts. Rappelons que $\mathbf{DA}(S, \Lambda)$, pour un schéma noethérien S , désigne la catégorie homotopique stable des motifs de S -schémas lisses à coefficients dans la catégorie des complexes de Λ -modules. Rappelons aussi que $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$ désigne la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{DA}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}, \Lambda)$ engendrée par les $M(Q_r^{\text{gm}}(X, f))(-p) \simeq \text{Sus}_T^p(Q_r^{\text{gm}}(X, f) \otimes \Lambda)[p]$ avec $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, X un \tilde{k} -schéma lisse et $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$. La scholie 1.3.26 affirme que le foncteur composé

$$(2.105) \quad \mathfrak{F} : \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{DA}(\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}, \Lambda) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{DA}(k, \Lambda) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDA}(k, \Lambda)$$

est une équivalence de catégories.

On dispose d'un carré commutatif à un isomorphisme canonique près

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbf{RigDA}(k, \Lambda) \\ \text{La}_{\text{tr}} \downarrow & & \downarrow \text{La}_{\text{tr}} \\ \mathbf{QUDM}(\tilde{k}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbf{RigDM}(k, \Lambda). \end{array}$$

Le foncteur La_{tr} de gauche (resp. de droite) envoie un système de générateurs compacts de $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$ (resp. $\mathbf{RigDA}(k, \Lambda)$) sur un système de générateurs compacts de $\mathbf{QUDM}(\tilde{k}, \Lambda)$ (resp. $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$). Comme (2.105) est une équivalence de catégories, on déduit que (2.104) envoie un système de générateurs compacts de $\mathbf{QUDM}(\tilde{k}, \Lambda)$ sur un système de générateurs compacts de $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$. Par le lemme 1.3.32, il est donc suffisant de prouver que l'homomorphisme

$$\text{hom}_{\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{\tilde{k}, \Lambda})}(A, B) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)}(\mathfrak{F}(A), \mathfrak{F}(B))$$

est bijectif pour $A = \text{La}_{\text{tr}}(A_0)$ et $B = \text{La}_{\text{tr}}(B_0)$ avec A_0 et B_0 des objets compacts de $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$.

Par le corollaire 1.3.28, tout objet compact K de $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$ admet un dual fort K^\vee . Étant donné que La_{tr} et \mathfrak{F} sont des foncteurs monoïdaux symétriques et unitaires, $\text{La}_{\text{tr}}(B_0^\vee)$ est un dual fort de $\text{La}_{\text{tr}}(B_0)$ et $\mathfrak{F} \circ \text{La}_{\text{tr}}(B_0^\vee)$ est un dual fort de $\mathfrak{F} \circ \text{La}_{\text{tr}}(B_0)$. En prenant $C_0 = A_0 \otimes B_0^\vee$, on voit qu'il est suffisant de prouver que l'homomorphisme

$$\text{hom}_{\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{\tilde{k}, \Lambda})}(C, \bullet) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)}(\mathfrak{F}(C), \mathfrak{F}(\bullet))$$

est bijectif pour tout $C = \text{La}_{\text{tr}}(C_0)$ avec C_0 un objet compact de $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. (Ci-dessus, on a préféré noter \bullet au lieu de $\Lambda(0)$ l'objet unité de $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{\tilde{k}, \Lambda})$.) Pour ce faire, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{\tilde{k}, \Lambda})}(C, \bullet) & \longrightarrow & \text{hom}_{\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)}(\mathfrak{F}(C), \mathfrak{F}(\bullet)) \\ \sim \downarrow & & \uparrow \sim \\ & & \text{hom}_{\mathbf{RigDA}(k, \Lambda)}(\mathfrak{F}(C_0), \text{Ro}_{\text{tr}}(\mathfrak{F}(\bullet))) \\ & & \uparrow (b) \\ \text{hom}_{\mathbf{DA}(\mathbb{G}_{\tilde{k}, \Lambda})}(C_0, \text{Ro}_{\text{tr}}(\bullet)) & \xrightarrow{(a)} & \text{hom}_{\mathbf{RigDA}(k, \Lambda)}(\mathfrak{F}(C_0), \mathfrak{F}(\text{Ro}_{\text{tr}}(\bullet))). \end{array}$$

Les isomorphismes verticaux sont déduits de l'adjonction $(\text{La}_{\text{tr}}, \text{Ro}_{\text{tr}})$. L'homomorphisme (b) est induit par la transformation naturelle $\mathfrak{F} \circ \text{Ro}_{\text{tr}} \rightarrow \text{Ro}_{\text{tr}} \circ \mathfrak{F}$ obtenue par adjonction de l'isomorphisme de commutation $\mathfrak{F} \circ \text{La}_{\text{tr}} \simeq \text{La}_{\text{tr}} \circ \mathfrak{F}$. Vu que \mathfrak{F} est la restriction de $\text{LRig}^* \circ \text{L}\pi^*$ aux motifs quasi-unipotents au-dessus de $\mathbb{G}_{\tilde{k}}$, cette transformation naturelle est inversible d'après les propositions 2.5.52 et 2.5.55 ci-dessous.

Pour terminer, il reste donc à montrer que l'homomorphisme (a) est inversible. Compte tenu de la scholie 1.3.26, il suffit de vérifier que $\mathrm{Ro}_{tr}(\bullet)$ est dans $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. Or, grâce à la proposition 2.5.52 ci-dessous, on dispose d'une chaîne d'isomorphismes

$$\mathrm{Ro}_{tr}(\bullet) \simeq \mathrm{Ro}_{tr} \circ \mathrm{L}q^*(\bullet) \simeq \mathrm{L}q^* \circ \mathrm{Ro}_{tr}(\bullet)$$

où $q : \mathbb{G}_{m\tilde{k}} \rightarrow \mathrm{Spec}(\tilde{k})$ est la projection évidente. Ceci permet de conclure puisque l'image de l'opération $\mathrm{L}q^* : \mathbf{DA}(\tilde{k}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{DA}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}, \Lambda)$ est contenue dans la sous-catégorie $\mathbf{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$. C.Q.F.D.

Les propositions 2.5.52 et 2.5.55 ci-dessous ont servi dans la preuve du théorème précédent.

Proposition 2.5.52. — *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme régulier (i.e., plat à fibres géométriques régulières) entre schémas noethériens réguliers et de dimension de Krull finie⁽¹⁹⁾. Alors, la transformation naturelle*

$$\mathrm{L}f^* \circ \mathrm{Ro}_{tr} \longrightarrow \mathrm{Ro}_{tr} \circ \mathrm{L}f^*,$$

entre foncteurs de $\mathbf{DM}(X, \Lambda)$ dans $\mathbf{DA}(Y, \Lambda)$, est inversible.

Démonstration. — Supposons d'abord que f est de type fini. C'est donc un morphisme lisse. Les foncteurs $\mathrm{L}f^*$ admettent alors des adjoints à gauche $\mathrm{L}f_{\#}$. (Voir [3, Section 4.5] pour les motifs sans transferts; le cas des motifs avec transferts se traite de la même manière.) Le foncteur $\mathrm{L}f_{\#}$ envoie le motif sans (resp. avec) transferts d'un Y -schéma lisse Y' sur le motif sans (resp. avec) transferts de Y' considéré comme un X -schéma lisse. Ainsi, les foncteurs $\mathrm{L}f_{\#}$ commutent à l'ajout des transferts, i.e., on a un isomorphisme canonique $\mathrm{L}f_{\#} \circ \mathrm{La}_{tr} \simeq \mathrm{La}_{tr} \circ \mathrm{L}f_{\#}$. Par adjonction, on obtient un isomorphisme $\mathrm{L}f^* \circ \mathrm{Ro}_{tr} \simeq \mathrm{Ro}_{tr} \circ \mathrm{L}f^*$. On vérifie aisément que cet isomorphisme est la transformation naturelle de l'énoncé (i.e., celle déduite de l'isomorphisme $\mathrm{L}f^* \circ \mathrm{La}_{tr} \simeq \mathrm{La}_{tr} \circ \mathrm{L}f^*$).

Revenons au cas général. En utilisant le cas des morphismes lisses et plus précisément celui des immersions ouvertes, on déduit que la question est locale pour la topologie de Zariski sur X et Y . On peut donc supposer que X et Y sont des schémas affines. Par le théorème de Popescu [34, 35], Y est la limite d'un système projectif cofiltrant de X -schémas affines et lisses $(Y_i)_{i \in I}$. Soit K un objet de $\mathbf{DM}(X, \Lambda)$. Pour montrer que $\mathrm{L}f^* \circ \mathrm{Ro}_{tr}(K) \longrightarrow \mathrm{Ro}_{tr} \circ \mathrm{L}f^*(K)$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que l'homomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y, \Lambda)}(A, \mathrm{L}f^* \circ \mathrm{Ro}_{tr}(K)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y, \Lambda)}(A, \mathrm{Ro}_{tr} \circ \mathrm{L}f^*(K))$$

⁽¹⁹⁾ L'hypothèse que X et Y sont réguliers est probablement superflue. Nous la supposons pour avoir une description explicite des correspondances finies au-dessus de X et Y en termes de sous-schémas intègres, finis et surjectifs au-dessus d'une composante connexe du schéma source. Cette description servira implicitement à la fin de la preuve où l'on affirme que la variante avec transferts de la proposition 1.A.1 est vraie et qu'elle se démontre de la même manière.

est bijectif pour tout objet compact A de $\mathbf{DA}(Y, \Lambda)$. D'après le corollaire 1.A.3, un tel objet est de la forme $A = \mathbf{L}(Y \rightarrow Y_i)^*(A_i)$ pour un indice $i \in I$ et un objet compact A_i de $\mathbf{DA}(Y_i, \Lambda)$. Pour $j \in I/i$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y_j, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y_j \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathbf{L}(Y_j \rightarrow X)^* \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} K) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y_j, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y_j \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} \mathbf{L}(Y_j \rightarrow X)^* K) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathbf{L}(Y \rightarrow X)^* \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} K) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} \mathbf{L}(Y \rightarrow X)^* K)
 \end{array}$$

où la flèche oblique supérieure est inversible puisque le X -schéma Y_j est lisse.

Par la proposition 1.A.1, l'homomorphisme évident

$$\begin{array}{c}
 \mathrm{Colim}_{j \in I/i} \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y_j, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y_j \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathbf{L}(Y_j \rightarrow X)^* \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} K) \\
 \downarrow \\
 \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathbf{L}(Y \rightarrow X)^* \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} K)
 \end{array}$$

est bijectif. Pour terminer la preuve de la proposition, il est donc suffisant de montrer que l'homomorphisme

$$\begin{array}{c}
 \mathrm{Colim}_{j \in I/i} \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y_j, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y_j \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} \mathbf{L}(Y_j \rightarrow X)^* K) \\
 \downarrow \\
 \mathrm{hom}_{\mathbf{DA}(Y, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y \rightarrow Y_i)^* A_i, \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} \mathbf{L}(Y \rightarrow X)^* K)
 \end{array}$$

est lui aussi bijectif. Grâce à l'adjonction $(\mathbf{La}_{\mathrm{tr}}, \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}})$ cet homomorphisme s'identifie à

$$\begin{array}{c}
 \mathrm{Colim}_{j \in I/i} \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(Y_j, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y_j \rightarrow Y_i)^* \mathbf{La}_{\mathrm{tr}}(A_i), \mathbf{L}(Y_j \rightarrow X)^* K) \\
 \downarrow \\
 \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(Y, \Lambda)}(\mathbf{L}(Y \rightarrow Y_i)^* \mathbf{La}_{\mathrm{tr}}(A_i), \mathbf{L}(Y \rightarrow X)^* K).
 \end{array}$$

Le résultat recherché découle alors de la variante avec transferts de la proposition 1.A.1. Cette variante se démontre en adaptant la preuve de ladite proposition. Les détails sont laissés au lecteur. C.Q.F.D.

Pour établir la deuxième proposition qui a servi dans la preuve du théorème 2.5.51 (i.e., la proposition 2.5.55 ci-dessous), nous aurons besoin du lemme 2.5.54 ci-dessous qui est la version stable du lemme 2.5.53 suivant que nous devons établir au préalable.

Lemme 2.5.53. — *On a les résultats suivants :*

- (a) *Le foncteur $\mathrm{o}_{\mathrm{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda)) \rightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))$ préserve les équivalences \mathbb{A}^1 -locales.*

(b) *Le foncteur $\mathfrak{o}_{\text{tr}} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/k, \Lambda)) \rightarrow \mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$ préserve les équivalences \mathbb{B}^1 -locales.*

Démonstration. — On traite uniquement le cas analytique rigide. (L’argument s’adapte sans difficulté au cas algébrique ; alternativement, on peut considérer le cas algébrique comme étant le cas particulier où k est muni de la valuation triviale.) On note \mathbf{W}_{Nis} et $\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}$ les classes des équivalences Nis-locales et \mathbb{B}^1 -locales respectivement. Il s’agit de montrer que $\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1} \subset \mathfrak{o}_{\text{tr}}^{-1}(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1})$. Par [3, Proposition 4.2.74], il suffit de voir que la classe $\mathcal{D} = \mathfrak{o}_{\text{tr}}^{-1}(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1})$ satisfait aux conditions suivantes :

- 1) \mathcal{D} contient \mathbf{W}_{Nis} ainsi que les flèches $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_X^1) \rightarrow \Lambda_{\text{tr}}(X)$ pour tout $X \in \text{Ob}(\text{SmRig}/k)$;
- 2) \mathcal{D} vérifie la propriété « 2 de 3 » ;
- 3) $\mathcal{D} \cap \mathbf{Cof}_{\text{proj}}$ est stable par « push-out » et composition transfinie.

La condition 2) est claire. Pour vérifier 3), on utilise la structure injective \mathbb{B}^1 -locale sur $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \Lambda))$. Rappelons que la classe $\mathbf{Cof}_{\text{inj}}$ des cofibrations injectives est la classe des monomorphismes. Puisque les cofibrations projectives sont en particulier des monomorphismes et puisque \mathfrak{o}_{tr} est exact à gauche, on a

$$\mathfrak{o}_{\text{tr}}(\mathcal{D} \cap \mathbf{Cof}_{\text{proj}}) \subset \mathbf{W}_{\mathbb{B}^1} \cap \mathbf{Cof}_{\text{inj}}.$$

Or, la classe $\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1} \cap \mathbf{Cof}_{\text{inj}}$ est stable par « push-out » et composition transfinie (ceci étant vrai dans toute catégorie de modèles). On obtient maintenant la condition 3) en remarquant que \mathfrak{o}_{tr} commute aux colimites. Par ailleurs, \mathfrak{o}_{tr} préserve les équivalences Nis-locales. Ainsi, pour terminer, il reste à vérifier que \mathfrak{o}_{tr} envoie $\Lambda_{\text{tr}}(\mathbb{B}_X^1) \rightarrow \Lambda_{\text{tr}}(X)$ sur une équivalence \mathbb{B}^1 -locale. Ceci peut se faire à l’aide d’une \mathbb{B}^1 -homotopie explicite entre l’identité et l’endomorphisme nul de la boule de Tate relative \mathbb{B}_X^1 . C.Q.F.D.

Exceptionnellement, nous noterons ci-dessous T^{tr} le préfaisceau avec transferts $\Lambda_{\text{tr}}((\mathbb{A}_k^1 - o), 1)$ afin de le distinguer de $T = ((\mathbb{A}_k^1 - o), 1) \otimes \Lambda$. L’énoncé ci-dessous porte sur les spectres non symétriques.

Lemme 2.5.54. — *On a les résultats suivants :*

(a) *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_{\text{tr}} : \mathbf{Spect}_{T^{\text{tr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{Sm}/k, \Lambda))) \\ \longrightarrow \mathbf{Spect}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\text{Sm}/k, \Lambda))) \end{aligned}$$

préserve les équivalences \mathbb{A}^1 -locales stables.

(b) *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_{\text{tr}} : \mathbf{Spect}_{T^{\text{tr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\text{SmRig}/k, \Lambda))) \\ \longrightarrow \mathbf{Spect}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\text{SmRig}/k, \Lambda))) \end{aligned}$$

préserve les équivalences \mathbb{B}^1 -locales stables.

Démonstration. — On traite uniquement le cas analytique rigide. Comme pour le lemme 2.5.53, on utilise [3, Proposition 4.2.74] et la construction de la structure \mathbb{B}^1 -locale stable comme la localisation de Bousfield de la structure \mathbb{B}^1 -locale instable (alias niveau par niveau) relativement aux flèches de la forme

$$\mathrm{Sus}_{T^{\mathrm{tr}}}^{p+1}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)) \longrightarrow \mathrm{Sus}_{T^{\mathrm{tr}}}^p(T^{\mathrm{tr}} \otimes^{\mathrm{tr}} \Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$$

pour $p \in \mathbb{N}$ et X une k -variété rigide lisse. Vu que o_{tr} préserve les équivalences \mathbb{B}^1 -locales niveau par niveau (grâce au lemme 2.5.53), on se ramène à vérifier que

$$\mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(\mathrm{Sus}_{T^{\mathrm{tr}}}^{p+1}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(X))) \longrightarrow \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(\mathrm{Sus}_{T^{\mathrm{tr}}}^p(T^{\mathrm{tr}} \otimes^{\mathrm{tr}} \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)))$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable. Or, ce morphisme est un isomorphisme à partir du niveau $p + 1$. (C'est exactement pour cette raison que nous travaillons avec les spectres non symétriques !) On applique maintenant [3, Lemme 4.3.59] pour conclure.

C.Q.F.D.

Proposition 2.5.55. — *La transformation naturelle*

$$\mathrm{LRig}^* \circ \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} \longrightarrow \mathrm{Ro}_{\mathrm{tr}} \circ \mathrm{LRig}^*,$$

entre foncteurs de $\mathbf{DM}(k, \Lambda)$ dans $\mathbf{RigDA}(k, \Lambda)$, est inversible.

Démonstration. — On peut travailler avec les catégories de spectres non symétriques (voir la discussion qui précède la proposition 2.5.29). Considérons la face carrée

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spect}_{T^{\mathrm{tr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))) & \xrightarrow{\mathrm{Rig}^*} & \mathrm{Spect}_{T^{\mathrm{tr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{SmRig}/k, \Lambda))) \\ \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \downarrow & \implies & \downarrow \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \\ \mathrm{Spect}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))) & \xrightarrow{\mathrm{Rig}^*} & \mathrm{Spect}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PreShv}(\mathrm{SmRig}/k, \Lambda))). \end{array}$$

D'une part, le théorème 2.5.24 entraîne (grâce à la propriété universelle des localisations de Bousfield) que les foncteurs Rig^* ci-dessus transforment les équivalences \mathbb{A}^1 -locales stables en des équivalences \mathbb{B}^1 -locales stables. D'autre part, le lemme 2.5.54 affirme que le foncteur o_{tr} de gauche (resp. de droite) préserve les équivalences \mathbb{A}^1 -locales (resp. \mathbb{B}^1 -locales) stables. Ainsi, tous les foncteurs du carré ci-dessus se dérivent trivialement. Il est donc suffisant de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Rig}^* \circ \mathrm{o}_{\mathrm{tr}}(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathrm{o}_{\mathrm{tr}} \circ \mathrm{Rig}^*(\mathbf{E})$$

est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale stable pour tout T^{tr} -spectre \mathbf{E} de complexes de pré-faisceaux avec transferts sur Sm/k . Or, d'après la remarque 2.5.21, le morphisme en question est une équivalence Nis-locale niveau par niveau.

C.Q.F.D.

Pour continuer, on aura besoin d'introduire quelques nouvelles sous-catégories.

Définition 2.5.56. — 1) On note $\mathbf{RigDM}^{\text{eff,br}}(k, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ engendrée par les motifs effectifs des k -affinoïdes lisses admettant bonne réduction. On note aussi $\mathbf{RigDM}^{\text{br}}(k, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$ engendrée par les motifs des k -affinoïdes lisses admettant bonne réduction ainsi que leurs twists de Tate négatifs.

2) On note $\mathbf{U}^n\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)$ engendrée par les motifs effectifs des $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ -schémas constants, i.e., isomorphes à une projection $X \times_{\tilde{k}} \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n \rightarrow \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ avec X un \tilde{k} -schéma lisse. On note aussi $\mathbf{U}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)$ engendrée par les motifs des $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ -schémas constants ainsi que leurs twists de Tate négatifs.

Voici le deuxième théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 2.5.57. — On suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) k est d'égale caractéristique et $|k^\times|$ est un groupe abélien libre de rang fini,
- (ii) Λ est une \mathbb{Q} -algèbre.

On fixe une section $\tilde{k} \hookrightarrow k^\circ$ à la surjection évidente et on choisit des éléments $\pi_1, \dots, \pi_n \in k$ dont les normes $|\pi_1|, \dots, |\pi_n|$ forment une base du \mathbb{Z} -module $|k^\times|$. Lorsque la caractéristique de \tilde{k} n'est pas nulle, on suppose que la condition supplémentaire suivante est satisfaite :

- (iii) le sous-anneau $\tilde{k}[\pi_1, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_n, \pi_n^{-1}] \subset k$ est dense.

Alors, les foncteurs composés

$$(2.106) \quad \mathfrak{F} : \mathbf{U}^n\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda) \xrightarrow{(\pi_1, \dots, \pi_n)^*} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda),$$

$$(2.107) \quad \mathfrak{F} : \mathbf{U}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda) \xrightarrow{(\pi_1, \dots, \pi_n)^*} \mathbf{DM}(k, \Lambda) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}(k, \Lambda),$$

sont pleinement fidèles et induisent des équivalences de catégories

$$\mathbf{U}^n\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \simeq \mathbf{RigDM}^{\text{eff,br}}(k, \Lambda) \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda) \simeq \mathbf{RigDM}^{\text{br}}(k, \Lambda).$$

La condition (iii) ci-dessus est automatique lorsque la valuation de k est discrète. La preuve du théorème 2.5.57 occupera l'essentiel du reste de ce paragraphe. Ainsi, jusqu'à la fin du paragraphe, Λ sera une \mathbb{Q} -algèbre.

On note $\underline{\pi}$ le n -uplet (π_1, \dots, π_n) . Soit X un \tilde{k} -schéma lisse. Le $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ -schéma $X \times_{\tilde{k}} \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ sera noté $Q^n(X)$; la k -variété rigide quasi-compacte $[(X \times_{\tilde{k}} k^\circ) // (\underline{\pi})]_\eta$ sera notée $Q^{\text{rig}}(X)$; la k -variété rigide $(X \times_{\tilde{k}} k)^{\text{an}}$ sera notée $Q^{\text{an}}(X)$. On dispose d'une

immersion ouverte canonique $Q^{\text{rig}}(X) \hookrightarrow Q^{\text{an}}(X)$. On commence par noter quelques lemmes simples qui serviront dans la preuve.

Lemme 2.5.58. — *La catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigDM}^{\text{eff,br}}(k, \Lambda)$ est compactement engendrée par les motifs effectifs des k -variétés rigides $Q^{\text{rig}}(X)$, pour X un \tilde{k} -schéma lisse. De même, la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigDM}^{\text{br}}(k, \Lambda)$ est compactement engendrée par les motifs des k -variétés rigides $Q^{\text{rig}}(X)$, pour X un \tilde{k} -schéma lisse, ainsi que leurs twists de Tate négatifs.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas effectif. Notons \mathcal{T} la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ engendrée par les $M^{\text{eff}}(Q^{\text{rig}}(X))$ pour X un \tilde{k} -schéma lisse. Il est clair que la k -variété rigide quasi-compacte $Q^{\text{rig}}(X)$ admet bonne réduction. On a donc l'inclusion $\mathcal{T} \subset \mathbf{RigDM}^{\text{eff,br}}(k, \Lambda)$. Pour montrer l'inclusion réciproque, il faut vérifier que $M^{\text{eff}}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ pour toute k -variété rigide quasi-compacte à bonne réduction U . Or, une telle k -variété rigide admet un modèle formel \mathcal{U} qui est lisse sur k° . De plus, si $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert fini de \mathcal{U} , $M^{\text{eff}}(U)$ appartient à la sous-catégorie triangulée engendrée par les $M^{\text{eff}}((\mathcal{U}_J)_\eta)$ avec $\emptyset \neq J \subset I$ et $\mathcal{U}_J = \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j$. Quitte à remplacer U par l'un des $(\mathcal{U}_J)_\eta$ avec $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert suffisamment fin, on peut alors supposer qu'il existe un morphisme étale de k° -schémas formels $\mathcal{U} \rightarrow \text{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_d\})$. Notons $V = U_\sigma$. On dispose d'un morphisme étale de \tilde{k} -schémas $V \rightarrow \text{Spec}(\tilde{k}[t_1, \dots, t_d])$ qui induit un morphisme étale de k° -schémas formels $(V \otimes_{\tilde{k}} k^\circ) // (\pi) \rightarrow \text{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_d\})$. D'après [20, Théorème 18.1.2], il existe un unique isomorphisme de $\text{Spf}(k^\circ\{t_1, \dots, t_d\})$ -schémas formels $\mathcal{U} \simeq (V \otimes_{\tilde{k}} k^\circ) // (\pi)$ induisant l'identité sur la fibre spéciale. En particulier, il existe un isomorphisme de k -variétés rigides $U \simeq Q^{\text{rig}}(V)$, ce qui permet de conclure.

C.Q.F.D.

Lemme 2.5.59. — *Soit X un \tilde{k} -schéma lisse. Le morphisme*

$$\Lambda_{\text{tr}}(Q^{\text{rig}}(X)) \longrightarrow \Lambda_{\text{tr}}(Q^{\text{an}}(X)),$$

induit par l'inclusion évidente, est une équivalence \mathbb{B}^1 -locale.

Démonstration. — On dispose de deux foncteurs triangulés $\theta_1, \theta_2 : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$ tels que

$$\theta_1(\Lambda_{\text{tr}}(X)) = \Lambda_{\text{tr}}(Q^{\text{rig}}(X)) \quad \text{et} \quad \theta_2(\Lambda_{\text{tr}}(X)) = \Lambda_{\text{tr}}(Q^{\text{an}}(X))$$

pour tout \tilde{k} -schéma lisse X . (On laissera au lecteur le soin de construire ces foncteurs.) Les immersions ouvertes $Q^{\text{rig}}(-) \hookrightarrow Q^{\text{an}}(-)$ induisent une transformation naturelle $\theta_1 \rightarrow \theta_2$. Il suffit alors de voir que cette transformation naturelle est inversible. Or, $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)$ est compactement engendrée par les motifs des \tilde{k} -schémas projectifs et lisses (puisque Λ est une \mathbb{Q} -algèbre). De plus, pour de tels \tilde{k} -schémas X , l'immersion ouverte $Q^{\text{rig}}(X) \hookrightarrow Q^{\text{an}}(X)$ est un isomorphisme. Ceci permet de conclure. C.Q.F.D.

Lemme 2.5.60. — *Le foncteur*

$$\mathrm{Sus}_T^0 : \mathbf{U}^n \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{U}^n \mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. — En effet, le foncteur $\mathrm{Sus}_T^0 : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$ est pleinement fidèle grâce au « cancellation theorem » de Voevodsky [45]. Or, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{G}_{\tilde{m}\tilde{k}}^n, \Lambda)} (\mathbf{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(X)), \mathbf{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(Y))[i]) \\ \simeq \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)} (\mathbf{M}^{\mathrm{eff}}(X \times_{\tilde{k}} \mathbb{G}_{\tilde{m}\tilde{k}}^n), \mathbf{M}^{\mathrm{eff}}(Y)[i]), \\ \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{\tilde{m}\tilde{k}}^n, \Lambda)} (\mathbf{M}(Q^n(X)), \mathbf{M}(Q^n(Y))[i]) \\ \simeq \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)} (\mathbf{M}(X \times_{\tilde{k}} \mathbb{G}_{\tilde{m}\tilde{k}}^n), \mathbf{M}(Y)[i]), \end{aligned}$$

pour tous \tilde{k} -schémas lisses X et Y , et tout $i \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que les homomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{G}_{\tilde{m}\tilde{k}}^n, \Lambda)} (\mathbf{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(X)), \mathbf{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(Y))[i]) \\ \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{\tilde{m}\tilde{k}}^n, \Lambda)} (\mathbf{M}(Q^n(X)), \mathbf{M}(Q^n(Y))[i]) \end{aligned}$$

sont bijectifs. On en déduit la pleine fidélité de

$$\mathrm{Sus}_T^0 : \mathbf{U}^n \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{U}^n \mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$$

en reprenant le raisonnement utilisé dans la preuve du lemme 1.3.32. C.Q.F.D.

Si X est un \tilde{k} -schéma lisse, le foncteur \mathfrak{F} envoie le motif de $Q^n(X)$ sur le motif de $Q^{\mathrm{an}}(X)$ qui, par le lemme 2.5.59, est isomorphe au motif de $Q^{\mathrm{rig}}(X)$. On en déduit que (2.106) et (2.107) se factorisent par des foncteurs

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}' : \mathbf{U}^n \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda) &\longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}, \mathrm{br}}(k, \Lambda), \\ \mathfrak{F}' : \mathbf{U}^n \mathbf{DM}(k, \Lambda) &\longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\mathrm{br}}(k, \Lambda). \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que ces foncteurs sont des équivalences de catégories. Les lemmes 2.5.58 et 2.5.59 montrent que les images des foncteurs \mathfrak{F}' engendrent les catégories triangulées avec sommes infinies $\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}, \mathrm{br}}(k, \Lambda)$ et $\mathbf{RigDM}^{\mathrm{br}}(k, \Lambda)$. Il est donc suffisant de prouver que les foncteurs \mathfrak{F}' sont pleinement fidèles. Or, on dispose d'un carré commutatif à un isomorphisme canonique près

$$(2.108) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{U}^n \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{F}'} & \mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}, \mathrm{br}}(k, \Lambda) \\ \mathrm{Sus}_T^0 \downarrow & & \downarrow \mathrm{Sus}_T^0 \\ \mathbf{U}^n \mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{F}'} & \mathbf{RigDM}^{\mathrm{br}}(k, \Lambda). \end{array}$$

Par le corollaire 2.5.49, le foncteur

$$\mathrm{Sus}_T^0 : \mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}, \mathrm{br}}(k, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\mathrm{br}}(k, \Lambda)$$

est pleinement fidèle. Il en est de même du foncteur

$$\mathrm{Sus}_T^0 : \mathbf{U}^n \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{U}^n \mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$$

par le lemme 2.5.60. Il est donc suffisant de traiter le cas stable. Par le lemme 1.3.32, il est même suffisant de vérifier que l'homomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)}(q^*(A), q^*(B)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)}(\mathfrak{F}(q^*(A)), \mathfrak{F}(q^*(B))),$$

avec $q : \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n \rightarrow \mathrm{Spec}(\tilde{k})$ la projection structurale, est bijectif pour tous objets compacts A et B de $\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$. Étant donné que les objets compacts de $\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$ sont fortement dualisables, on se ramène à montrer que l'homomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)}(\bullet, q^*C) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)}(\bullet, \mathfrak{F}(q^*C))$$

est bijectif pour tout objet compact C de $\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$. Or, on peut trouver un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que le motif $C(r)$ est effectif, i.e., isomorphe à un objet de la forme $\mathrm{Sus}_T^0(K)$ avec K un objet compact de $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)$. Puisque $\bullet(r)[r]$ est un facteur direct du motif de $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r$, on déduit (en utilisant une deuxième fois la pleine fidélité des foncteurs verticaux dans le carré (2.108) ainsi que le lemme 2.5.59) que le théorème 2.5.57 découle de l'énoncé suivant.

Proposition 2.5.61. — *Reprenons les hypothèses du théorème 2.5.57. Soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur Sm/\tilde{k} . Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'homomorphisme évident*

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r)), q^*(K)) \\ \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(k, \Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Q^{\mathrm{rig}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r)), \mathfrak{F}(q^*(K))) \end{aligned}$$

est bijectif.

L'énoncé ci-dessus ne dépend que de la classe d'isomorphisme de K dans $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)$. On peut donc supposer que K est projectivement cofibrant et projectivement \mathbb{A}^1 -fibrant. Vu l'adjonction $(q_{\#}, q^*)$, on déduit alors la chaîne d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r)), q^*(K)) &\simeq \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r)), K) \\ &\simeq \mathrm{H}_0\Gamma(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r), K). \end{aligned}$$

(Ci-dessus, $Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r)$ est considéré tantôt comme un $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ -schéma, tantôt comme un \tilde{k} -schéma.) Par ailleurs, puisque K est projectivement \mathbb{A}^1 -fibrant, le morphisme $K \rightarrow \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(K)$ est un quasi-isomorphisme de complexes de préfaisceaux avec transferts. En particulier, le morphisme

$$\Gamma(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r), K) \longrightarrow \Gamma(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r), \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(K))$$

est un quasi-isomorphisme. Au total, on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}_0\Gamma(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r), \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(K)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{hom}_{\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Q^n(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r)), q^*(K)).$$

Remarquons par ailleurs que $Q^{\text{rig}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r) = \partial\mathbb{B}_{\tilde{k}}^r$. Le corollaire 2.5.33 fournit donc un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0\Gamma(Q^{\text{rig}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r), \underline{\mathrm{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\mathrm{Rig}^*\pi^*q^*K)) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\mathrm{eff}}(k,\Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(Q^{\text{rig}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^r)), \mathfrak{F}(q^*(K))). \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition 2.5.61 équivaut à l'énoncé suivant.

Proposition 2.5.62. — *Reprenons les hypothèses du théorème 2.5.57. Soit X un \tilde{k} -schéma affine et lisse, et soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur Sm/\tilde{k} projectivement Nis-fibrant. Alors, le morphisme*

$$(2.109) \quad \Gamma(Q^n(X), \underline{\mathrm{Sing}}^{\mathbb{A}^1}(K)) \longrightarrow \Gamma(Q^{\text{rig}}(X), \underline{\mathrm{Sing}}^{\mathbb{B}^1}(\mathrm{Rig}^*\pi^*q^*(K)))$$

est un quasi-isomorphisme.

Nous allons d'abord démontrer la proposition 2.5.62 en admettant la condition (iii) du théorème 2.5.57. On expliquera plus tard comment se débarrasser de cette condition lorsque \tilde{k} est de caractéristique nulle (voir la proposition 2.5.68 ci-dessous). *Ainsi, jusqu'à l'énoncé de la proposition 2.5.68 ci-dessous, nous supposons que les trois conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 2.5.57 sont satisfaites.*

Pour Y un \tilde{k} -schéma affine et lisse, on note $\mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))$ la catégorie cofiltrante des voisinages étales affines de $Q^{\text{rig}}(Y)$ dans $Q^n(Y)$. (Comparer à la notation 2.4.14 où l'on prend $B = Q^{\text{rig}}(Y)$ et $B_0 = Q^n(Y)$.) Ainsi, un objet de $\mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))$ est un couple (U, j) formé d'un $Q^n(Y)$ -schéma affine étale U muni d'un morphisme de $Q^{\text{an}}(Y)$ -variétés rigides $j : Q^{\text{rig}}(Y) \rightarrow (U \times_{\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n} \mathrm{Spec}(k))^{\text{an}}$. Étant donné un préfaisceau F sur Sm/\tilde{k} , on pose

$$F(\mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))) = \mathrm{Colim}_{(U,j) \in \mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))} F(U).$$

Comme d'habitude, on note $\Delta_X = \Delta_X^\bullet$ le X -schéma cosimplicial donné en degré d par $\Delta_X^d = X[t_0, \dots, t_d]/(1 - \sum_{i=0}^d t_i)$. Étant donné un complexe de préfaisceaux avec transferts K , on dispose d'un morphisme évident

$$(2.110) \quad \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(\Delta_X)/Q^n(\Delta_X)))) \longrightarrow \mathrm{Tot}((\mathrm{Rig}^*\pi^*q^*(K))(Q^{\text{rig}}(\Delta_X))),$$

où Tot désigne le « complexe total » associé à un objet simplicial en complexes.

Lemme 2.5.63. — *Le morphisme (2.110) est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. — Considérons la sous-catégorie pleine $\mathcal{T} \subset \mathrm{D}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))$ dont les objets sont les complexes de préfaisceaux avec transferts K pour lesquels (2.110) est un quasi-isomorphisme. Grâce au lemme 2.5.20, la propriété d'appartenir à $\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ dépend uniquement de la classe d'isomorphisme de K dans $\mathrm{D}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))$. De plus, il est immédiat que \mathcal{T} est stable par suspension, désuspension, cône et somme infinie; c'est donc une sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathrm{D}(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))$.

Notre but est de montrer l'égalité $\mathcal{T} = D(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))$. Or, la catégorie triangulée $D(\mathbf{PreStr}(\mathrm{Sm}/k, \Lambda))$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\Lambda_{\mathrm{tr}}(W)$, avec W un \tilde{k} -schéma lisse. D'après ce qui précède, il est suffisant de montrer que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(W) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sm}/\tilde{k})$. Autrement dit, il est suffisant de démontrer le lemme pour $K = \Lambda_{\mathrm{tr}}(W)$. Dans ce cas, le morphisme (2.110) s'identifie à

$$\begin{aligned} \mathbf{Cor}_{Q^n(X)}(\mathcal{V}(Q^{\mathrm{rig}}(\Delta_X)/Q^n(\Delta_X)), Q^n(X \times_{\tilde{k}} W)) \otimes \Lambda \\ \longrightarrow \mathbf{Cor}_{Q^{\mathrm{rig}}(X)}(Q^{\mathrm{rig}}(\Delta_X), Q^{\mathrm{rig}}(X) \widehat{\times}_k Q^{\mathrm{an}}(W)) \otimes \Lambda. \end{aligned}$$

Ce morphisme est un quasi-isomorphisme d'après le théorème 2.4.16 (où l'on prend $Q^n(X)$, $Q^{\mathrm{rig}}(X)$ et $Q^n(X \times_{\tilde{k}} W)$ pour B_0 , B et X_0). En effet, les conditions d'application du théorème 2.4.16 sont bien réunies (voir la notation 2.4.14) : d'une part, le sous-anneau $\mathcal{O}(Q^n(Y))$ est dense dans $\mathcal{O}(Q^{\mathrm{rig}}(Y))$ puisqu'il en est ainsi du sous-anneau $\tilde{k}[\pi_1, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_n, \pi_n^{-1}] \subset k$ (c'est la condition (iii) du théorème 2.5.57). D'autre part, la $\mathcal{O}(Q^n(Y))$ -algèbre $\mathcal{O}(Q^{\mathrm{rig}}(Y))$ est régulière. Pour voir cela, il suffit de vérifier que l'extension $\tilde{k}(\underline{\pi}) \subset k$ est séparable. Puisque le \mathbb{Z} -module $|k^\times|$ est librement engendré par les normes $|\pi_1|, \dots, |\pi_n|$, pour toute extension finie l/\tilde{k} et toute puissance q de l'exposant caractéristique de \tilde{k} , l'extension $(k \otimes_{\tilde{k}} l)(\pi_1^{1/q}, \dots, \pi_n^{1/q})$ de k est de degré $q^n [l : \tilde{k}]$. Il s'ensuit que le produit tensoriel $k \otimes_{\tilde{k}(\underline{\pi})} l(\pi_1^{1/q}, \dots, \pi_n^{1/q})$ est réduit. Ceci permet de conclure. C.Q.F.D.

Le lemme 2.5.63 montre que la proposition 2.5.62 (sous la condition (iii) du théorème 2.5.57) découle de l'énoncé suivant.

Proposition 2.5.64. — *Soit X un \tilde{k} -schéma affine et lisse, et soit K un complexe de préfaisceaux avec transferts sur Sm/\tilde{k} projectivement Nis-fibrant. Alors, le morphisme*

$$(2.111) \quad \mathrm{Tot}(K(Q^n(\Delta_X))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}(Q^{\mathrm{rig}}(\Delta_X)/Q^n(\Delta_X))))$$

est un quasi-isomorphisme.

Pour établir la proposition 2.5.64, nous aurons besoin d'une courte digression. Notons $\mathbb{I} = \ln |k^\times|$ que l'on considère comme un sous-groupe de type fini de \mathbb{R} . Le n -uplet $\underline{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ fournit une base $(\ln |\pi_1|, \dots, \ln |\pi_n|)$ du \mathbb{Z} -module libre \mathbb{I} qu'on utilisera pour identifier \mathbb{I} à \mathbb{Z}^n . Pour $\gamma \in \mathbb{I}$, on note $\underline{\pi}^\gamma$ l'unique élément du sous-groupe de k^\times engendré par les π_1, \dots, π_n tel que $\ln |\underline{\pi}^\gamma| = \gamma$. L'association $\gamma \rightsquigarrow \underline{\pi}^\gamma$ s'étend un morphisme de \tilde{k} -algèbres $\tilde{k}[\mathbb{I}] \rightarrow k$. Par ailleurs, l'identification $\mathbb{I} = \mathbb{Z}^n$ fournit une identification $\tilde{k}[\mathbb{I}] = \tilde{k}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$; un élément $\gamma \in \mathbb{I}$ correspond par cette identification à un monôme qu'on notera \underline{t}^γ . Par construction, le triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{\quad \underline{\pi} \quad} & \mathbb{G}_{\mathrm{m}\tilde{k}}^n \\ & \searrow & \parallel \\ & & \mathrm{Spec}(\tilde{k}[\mathbb{I}]) \end{array}$$

est commutatif.

On pose $\mathbb{I}_+ = \mathbb{I} \cap \mathbb{R}_+$ (avec \mathbb{R}_+ l'ensemble des réels positifs) ; c'est un sous-monoïde de \mathbb{I} . On a clairement $\mathbb{I}_+ \cap (-\mathbb{I}_+) = \{0\}$ et $\mathbb{I}_+ \cup (-\mathbb{I}_+) = \mathbb{I}$. En particulier, on peut trouver une base du \mathbb{Z} -module libre \mathbb{I} formées d'éléments de \mathbb{I}_+ . Un sous-monoïde $E \subset \mathbb{I}_+$ est dit de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbb{I}_+$, i.e., $E = \mathbb{N} \cdot \gamma_1 + \dots + \mathbb{N} \cdot \gamma_r$. On s'intéresse à l'ensemble \mathcal{E} des sous-monoïdes $E \subset \mathbb{I}_+$ engendrés par une base de \mathbb{I} (i.e., pour lesquels il existe une base $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de \mathbb{I} , formée d'éléments de \mathbb{I}_+ , telle que $E = \mathbb{N} \cdot \gamma_1 + \dots + \mathbb{N} \cdot \gamma_n$). Cet ensemble est non vide et on l'ordonne par la relation d'inclusion. Le lemme suivant est classique.

Lemme 2.5.65. — *Soit $F \subset \mathbb{I}_+$ un sous-monoïde de type fini. Il existe alors $E \in \mathcal{E}$ tel que $F \subset E$. En particulier, l'ensemble \mathcal{E} est filtrant et $\mathbb{I}_+ = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$.*

Démonstration. — Quitte à élargir F , on peut supposer qu'il contient une base du \mathbb{Z} -module \mathbb{I} . On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments qu'il faut rajouter à une base de \mathbb{I} pour engendrer F . Notons r ce nombre ; il existe donc des éléments $\delta_1, \dots, \delta_{n+r} \in \mathbb{I}_+$ tel que $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ est une base de \mathbb{I} et $F = \mathbb{N}_1 \cdot \delta_1 + \dots + \mathbb{N} \cdot \delta_{n+r}$.

Si $r = 0$, il n'y a rien à démontrer. Lorsque $r = 1$, on peut appliquer [47, §B, Theorem 1], qui est basé sur l'algorithme de Perron, pour obtenir des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{I}_+$ tels que le sous-monoïde $E = \mathbb{N} \cdot \gamma_1 + \dots + \mathbb{N} \cdot \gamma_n$ contient $F = \mathbb{N} \cdot \delta_1 + \dots + \mathbb{N} \cdot \delta_{n+1}$. Puisque F engendre le \mathbb{Z} -module \mathbb{I} , il en est de même de E . Il s'ensuit que $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est une base du \mathbb{Z} -module \mathbb{I} .

Si $r > 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $F' = \mathbb{N}_1 \cdot \delta_1 + \dots + \mathbb{N} \cdot \delta_{n+r-1}$ pour obtenir un sous-monoïde $E' \subset \mathbb{I}_+$ contenant F' et engendré par une base $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ du \mathbb{Z} -module \mathbb{I} . On applique ensuite le cas $r = 1$ de la récurrence au sous-monoïde $E' + \mathbb{N} \cdot \gamma_{n+r}$ pour conclure. C.Q.F.D.

La \tilde{k} -algèbre $\tilde{k}[\mathbb{I}_+]$ s'identifie à une sous-algèbre dense de k° . (On rappelle qu'on travaille sous la condition (iii) du théorème 2.5.57.) Plus précisément, on a

$$\tilde{k}[\mathbb{I}_+] \simeq \tilde{k}[\pi_1, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_n, \pi_n^{-1}] \cap k^\circ.$$

Par le lemme précédent, $\text{Spec}(\tilde{k}[\mathbb{I}_+])$ est la limite projective filtrante des \tilde{k} -schémas $\text{Spec}(\tilde{k}[E])$, pour $E \in \mathcal{E}$. Remarquons que, pour $E \in \mathcal{E}$, le \tilde{k} -schéma $\text{Spec}(\tilde{k}[E])$ est isomorphe non canoniquement à \mathbb{A}_k^n et admet une immersion ouverte canonique

$$\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n = \text{Spec}(\tilde{k}[\mathbb{I}]) \hookrightarrow \text{Spec}(\tilde{k}[E])$$

qui en fait une variété torique au sens de [31].

Notation 2.5.66. — Pour $E \in \mathcal{E}$, on note $Q^E = \text{Spec}(\tilde{k}[E])$ et H^E le complémentaire de $Q^n = \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ dans Q^E . Étant donné un \tilde{k} -schéma lisse Y , on pose $Q^E(Y) = Q^E \times_{\tilde{k}} Y$ et $H^E(Y) = H^E \times_{\tilde{k}} Y$. Ainsi, $Q^n(Y)$ s'identifie à un ouvert dense de $Q^E(Y)$ dont le fermé complémentaire est $H^E(Y)$.

Soit Y un \tilde{k} -schéma affine lisse et soit $E \in \mathcal{E}$. On note $\mathcal{V}_E(Y)$ la catégorie cofiltrante des voisinages affines étales de $H^E(Y)$ dans $Q^E(Y)$. Nous allons construire un foncteur

$$(2.112) \quad \mathcal{V}_E(Y) \longrightarrow \mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))$$

de la manière suivante. Soit V un voisinage affine étale de $H^E(Y)$ dans $Q^E(Y)$. Ainsi, V est un $Q^E(Y)$ -schéma affine étale et le \tilde{k} -schéma $V \times_{Q^E} H^E \simeq V \times_{Q^E(Y)} H^E(Y)$ admet une décomposition $V \times_{Q^E} H^E = C \amalg H^E(Y)$; on note $V' = V - C$. Par construction, le morphisme de k° -schémas

$$V' \otimes_{\tilde{k}[E]} k^\circ \longrightarrow Q^E(Y) \otimes_{\tilde{k}[E]} k^\circ \simeq Y \otimes_{\tilde{k}} k^\circ$$

est étale et induit un isomorphisme sur les fibres spéciales. Ainsi, en complétant π -adiquement le morphisme ci-dessus, on obtient un isomorphisme de k° -schémas formels

$$(2.113) \quad (V' \otimes_{\tilde{k}[E]} k^\circ) // (\pi) \xrightarrow{\sim} (Y \otimes_{\tilde{k}} k^\circ) // (\pi)$$

qui induit, par passage aux fibres génériques, un isomorphisme de k -affinoïdes

$$[(V' \otimes_{\tilde{k}[E]} k^\circ) // (\pi)]_\eta \xrightarrow{\sim} Q^{\text{rig}}(Y).$$

L'image de V par le foncteur (2.112) est donnée par le couple $(V \times_{Q^E} Q^n, j)$ où j est la composition de

$$(2.114) \quad Q^{\text{rig}}(Y) \simeq [(V' \otimes_{\tilde{k}[E]} k^\circ) // (\pi)]_\eta \hookrightarrow (V' \otimes_{\tilde{k}[E]} k)^\text{an} = (V \otimes_{\tilde{k}[E]} k)^\text{an}$$

modulo l'identification évidente $V \otimes_{\tilde{k}[E]} k = (V \times_{Q^E} Q^n) \times_{Q^n} \text{Spec}(k)$. (On rappelle que Q^n désigne $\mathbb{G}_{m, \tilde{k}}^n$ ou, plus canoniquement, $\text{Spec}(\tilde{k}[\mathbb{I}])$.)

Les foncteurs (2.112), pour $E \in \mathcal{E}$, induisent un foncteur

$$(2.115) \quad \text{Colim}_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{V}_E(Y) \longrightarrow \mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))$$

où $\text{Colim}_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{V}_E(Y)$ est la 2-colimite des $\mathcal{V}_E(Y)$, i.e., la catégorie dont les objets sont les couples (E, V) avec $E \in \mathcal{E}$ et $V \in \mathcal{V}_E(Y)$.

Lemme 2.5.67. — *Gardons les notations et les hypothèses ci-dessus. (En particulier, nous supposons que la condition (iii) du théorème 2.5.57 est satisfaite.) Alors, le foncteur (2.115) est cofinal.*

Démonstration. — On fixe un objet (U, j) de $\mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))$. Notre but est de raffiner (U, j) par un objet dans l'image du foncteur (2.115). On divise la preuve en deux étapes.

Étape 1 : Étant donné que le $Q^n(Y)$ -schéma étale U est affine, on peut trouver une présentation

$$U = \frac{Q^n(Y)[u_1, \dots, u_m]}{(P_1, \dots, P_m)},$$

avec $P_i \in \Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})[u_1, \dots, u_m]$ pour $1 \leq i \leq m$, telle que la matrice jacobienne $\frac{\partial(P_1, \dots, P_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)}$ soit inversible sur U . Le morphisme $j : Q^{\text{rig}}(Y) \rightarrow (U \times_{Q^n} \text{Spec}(k))^\text{an}$

correspond à une solution $(f_1, \dots, f_m) \in \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})^m$ au système d'équations $(P_i(u_1, \dots, u_m) = 0)_{1 \leq i \leq m}$. De plus, la matrice

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial u_j}(f_1, \dots, f_m) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

admet un inverse $N \in \text{Mat}_{m \times m}(\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}))$. Étant donné que le sous-anneau $\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O}) \subset \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})$ est dense, on peut trouver, pour tout réel $\epsilon > 0$, des éléments $f_j^\epsilon \in \Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})$, pour $1 \leq j \leq m$, tels que :

- (i) $|f_j - f_j^\epsilon|_\infty \leq \epsilon$;
 - (ii) $|P_i(f_1^\epsilon, \dots, f_m^\epsilon)|_\infty \leq \epsilon$ pour tout $1 \leq i \leq m$;
 - (iii) la matrice $\left(\frac{\partial P_i}{\partial u_j}(f_1^\epsilon, \dots, f_m^\epsilon) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ est inversible dans $\text{Mat}_{m \times m}(\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}))$.
- (Ci-dessus et dans le reste de la preuve, $|\cdot|_\infty$ désigne la norme infinie relativement au k -affinoïde $Q^{\text{rig}}(Y)$.) On pose $P_i^\epsilon = P_i(u_1 + f_1^\epsilon, \dots, u_m + f_m^\epsilon)$. Alors, les P_i^ϵ sont encore dans $\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})[u_1, \dots, u_m]$ et on a un isomorphisme

$$U \simeq \frac{Q^n(Y)[u_1, \dots, u_m]}{(P_1^\epsilon, \dots, P_m^\epsilon)}.$$

Des propriétés précédentes, on déduit les variantes suivantes :

- (ii') $|P_i^\epsilon(0, \dots, 0)|_\infty \leq \epsilon$ pour $1 \leq i \leq m$;
- (iii') la matrice $\left(\frac{\partial P_i^\epsilon}{\partial u_j}(0, \dots, 0) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ est inversible dans $\text{Mat}_{m \times m}(\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}))$.

En utilisant encore une fois le fait que $\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O}) \subset \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})$ est un sous-anneau dense, on peut trouver une matrice $N^\epsilon \in \text{Mat}_{m \times m}(\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O}))$ telle que

$$\left| \left(\frac{\partial P_i^\epsilon}{\partial u_j}(0, \dots, 0) \right)_{i, j} \circ N^\epsilon - \text{id}_m \right|_\infty \leq \epsilon.$$

(Ci-dessus, la norme infinie d'une matrice est le supremum des normes infinies de ses coefficients.) On note $g^\epsilon = \det(N^\epsilon)$ et on pose $R_i^\epsilon = P_i^\epsilon \circ N^\epsilon$. Alors les R_i^ϵ sont dans $\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})[u_1, \dots, u_m]$. Considérons le $Q^n(Y)$ -schéma

$$U^\epsilon = \frac{Q^n(Y)[u_1, \dots, u_m, s]}{(R_1^\epsilon, \dots, R_m^\epsilon, sg^\epsilon - 1)}.$$

Clairement, U^ϵ s'identifie à l'ouvert $U[(g^\epsilon)^{-1}]$ de U . Or, g^ϵ est inversible dans $\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})$ dès que $\epsilon < 1$. Dans ce cas, le morphisme j se factorise donc à travers de $(U^\epsilon \times_{Q^n} k)^{\text{an}}$ induisant ainsi un morphisme

$$j^\epsilon : Q^{\text{rig}}(Y) \longrightarrow (U^\epsilon \times_{Q^n} k)^{\text{an}}.$$

Le morphisme j^ϵ correspond à une solution $(l_1^\epsilon, \dots, l_m^\epsilon) \in \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})^m$ au système d'équations $(R_i^\epsilon(u_1, \dots, u_m) = 0)_{1 \leq i \leq m}$. Par construction, on a en notation matricielle : $(l_1^\epsilon, \dots, l_m^\epsilon) \circ {}^t N^\epsilon = (f_1 - f_1^\epsilon, \dots, f_m - f_m^\epsilon)$.

Pour conclure, il suffit de montrer que (U^ϵ, j^ϵ) est dans l'image essentielle de (2.115) pour ϵ suffisamment petit. Ceci fera l'objet de l'étape suivante.

Étape 2 : Lorsque ϵ tend vers zéro, le polynôme R_i^ϵ tend vers

$$P_i(u_1 + f_1, \dots, u_m + f_m) \circ N \equiv u_i \pmod{(u_1, \dots, u_m)^2}$$

où, rappelons-le, N est l'inverse de la matrice jacobienne évaluée en (f_1, \dots, f_m) . De même, lorsque ϵ tend vers zéro, la solution $(l_1^\epsilon, \dots, l_m^\epsilon)$ tend vers le m -uplet nul.

On peut écrire $R_i^\epsilon = u_i + A_i^\epsilon + B_i^\epsilon$ avec $A_i^\epsilon, B_i^\epsilon \in \Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})[u_1, \dots, u_m]$, A_i^ϵ affine (i.e., de degré au plus 1) et B_i^ϵ n'ayant que des monômes de degré au moins 2. D'après ce que l'on vient de dire, les normes infinies des coefficients de A_i^ϵ tendent vers zéro et les normes infinies des coefficients de B_i^ϵ restent bornées lorsqu'on fait tendre ϵ vers zéro. Soit $\lambda > 0$ un réel tel que $|B_i^\epsilon|_\infty \leq \lambda$ pour ϵ suffisamment petit. (Bien entendu, la norme infinie d'un polynôme est le supremum des normes infinies de ses coefficients.) On fixe un entier r tel que $|\pi_1^r| < \lambda^{-1}$ et on pose $L_i^\epsilon = \pi_1^{-r} R_i^\epsilon(\pi_1^r u_1, \dots, \pi_1^r u_m)$. Clairement, les L_i^ϵ sont dans $\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})[u_1, \dots, u_m]$ et on a encore

$$U^\epsilon = \frac{Q^n(Y)[u_1, \dots, u_m, s]}{(L_1^\epsilon, \dots, L_m^\epsilon, s g^\epsilon - 1)}.$$

D'après ce qui précède, en prenant ϵ suffisamment petit, on peut s'assurer que les coefficients du polynôme $L_i^\epsilon - u_i \in \Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})[u_1, \dots, u_m]$ sont de norme infinie strictement plus petite que 1. On peut aussi s'assurer que la solution $(\pi_1^{-r} l_1^\epsilon, \dots, \pi_1^{-r} l_m^\epsilon)$ au système d'équations $(L_i^\epsilon(u_1, \dots, u_m) = 0)_{1 \leq i \leq m}$ appartient à $\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ)^m$.

Fixons pour le reste de la preuve un réel ϵ avec les propriétés ci-dessus. Ainsi, les polynômes L_i^ϵ , pour $1 \leq i \leq m$, sont à coefficients dans

$$\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O}) \cap \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ) = \Gamma(Y, \mathcal{O}) \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}[\mathbb{I}_+].$$

Grâce au lemme 2.5.65, on peut donc trouver $E_1 \in \mathcal{E}$ tel que les L_i^ϵ sont à coefficients dans $\Gamma(Q^{E_1}(Y), \mathcal{O})$. Plus précisément, les coefficients du polynôme $L_i^\epsilon - u_i$ sont même dans l'idéal de $\Gamma(Q^{E_1}(Y), \mathcal{O})$ engendré par les t^γ pour $\gamma \in E_1 - \{0\}$.

Puisque $Q^{\text{rig}}(Y)$ admet bonne réduction, la norme infinie sur $\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})$ est multiplicative et prend ses valeurs dans \mathbb{I}_+ . On pose $\alpha_\epsilon = -\ln |g^\epsilon|_\infty$ (qui est donc un élément de \mathbb{I}) et $h^\epsilon = \pi^{\alpha_\epsilon} \cdot g^\epsilon$. Ainsi, h^ϵ est un élément de $\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O})$ de norme infinie égale à 1. Puisque h^ϵ est inversible dans $\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})$ et que la norme infinie relativement à $Q^{\text{rig}}(Y)$ est multiplicative, il s'ensuit que $|(h^\epsilon)^{-1}|_\infty = 1$. Autrement dit, h^ϵ est un élément inversible de $\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ)$. Par ailleurs, h^ϵ est dans

$$\Gamma(Q^n(Y), \mathcal{O}) \cap \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ) = \Gamma(Y, \mathcal{O}) \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}[\mathbb{I}_+].$$

Ainsi, quitte à élargir E_1 , on peut supposer que $h^\epsilon \in \Gamma(Q^{E_1}(Y), \mathcal{O})$. Il s'ensuit alors que la classe de h^ϵ dans le quotient $\Gamma(Q^{E_1}(Y), \mathcal{O}) / (t^\gamma; \gamma \in E_1 - \{0\}) \simeq \Gamma(Y, \mathcal{O})$ est inversible.

D'après ce qui précède, le $Q^{E_1}(Y)$ -schéma

$$V_1^\epsilon = \frac{Q^{E_1}(Y)[u_1, \dots, u_m, s']}{(L_1^\epsilon, \dots, L_m^\epsilon, s' h^\epsilon - 1)}$$

est un voisinage étale du fermé $Y \subset Q^{E_1}(Y)$ défini par l'idéal de $\Gamma(Q^{E_1}(Y), \mathcal{O})$ engendré par les \underline{t}^γ pour $\gamma \in E_1 - \{0\}$. (Il est possible que V_1^ϵ ne soit pas un $Q^{E_1}(Y)$ -schéma étale ; on a seulement affirmé que V_1^ϵ était étale au-dessus d'un voisinage Zariski de Y dans $Q^{E_1}(Y)$.)

Il est maintenant facile de conclure. En effet, soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une base de \mathbb{I} qui engendre le monoïde E_1 . Quitte à permuter les éléments de cette base, on peut supposer que $|\underline{\pi}^{\gamma_i}| < |\underline{\pi}^{\gamma_1}|$ pour $2 \leq i \leq n$. On note alors E le monoïde engendré par la base $(\gamma_1, \gamma_2 - \gamma_1, \dots, \gamma_n - \gamma_1)$ de \mathbb{I} . Il vient que le $Q^E(Y)$ -schéma

$$V^\epsilon = \frac{Q^E(Y)[u_1, \dots, u_m, s']}{(L_1^\epsilon, \dots, L_m^\epsilon, s'h^\epsilon - 1)}$$

est un voisinage étale du fermé $H^E(Y) \subset Q^E(Y)$ car $H^E(Y)$ est l'image inverse de $Y \subset Q^{E_1}(Y)$ par le morphisme $Q^E(Y) \rightarrow Q^{E_1}(Y)$. (Remarquons aussi que le $Q^E(Y)$ -schéma V^ϵ est étale, bien que le $Q^{E_1}(Y)$ -schéma V_1^ϵ ne l'est pas nécessairement.) Par construction, on a un isomorphisme canonique de $Q^n(Y)$ -schémas étales $U^\epsilon \simeq V^\epsilon \times_{Q^E} Q^n$. De plus, vu que $(\pi_1^{-r} l_1^\epsilon, \dots, \pi_1^{-r} l_m^\epsilon) \in \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ)^m$ et que h^ϵ est inversible dans $\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ)$, le morphisme $\Gamma(U^\epsilon, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O})$, induit par j^ϵ , se restreint en un morphisme $\Gamma(V^\epsilon, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ)$. Il s'ensuit un morphisme de k° -schémas formels

$$\text{Spf}(\Gamma(Q^{\text{rig}}(Y), \mathcal{O}^\circ)) \longrightarrow (V^\epsilon \otimes_{\tilde{k}[E]} k^\circ) // (\pi)$$

qui induit l'identité sur la fibre spéciale. Ce morphisme est nécessairement l'inverse du morphisme (2.113) (avec V^ϵ à la place de V'). Ceci montre que la composition de

$$Q^{\text{rig}}(Y) \simeq [(V^\epsilon \otimes_{\tilde{k}[E]} k^\circ) // (\pi)]_\eta \hookrightarrow (V^\epsilon \otimes_{\tilde{k}[E]} k)^\text{an}$$

(construite à l'instar de (2.114)) coïncide avec j^ϵ modulo l'isomorphisme évident $V^\epsilon \otimes_{\tilde{k}[E]} k = U^\epsilon \times_{Q^n} \text{Spec}(k)$. Ceci termine la preuve du lemme. C.Q.F.D.

Démonstration de la proposition 2.5.64 — À présent, nous sommes en mesure de prouver la proposition 2.5.64. Ceci terminera la preuve de la proposition 2.5.62, et donc aussi du théorème 2.5.57, sous la condition (iii) dudit théorème.

Les préfaisceaux sur les \tilde{k} -schémas lisses seront étendus aux pro- \tilde{k} -schémas lisses de la manière usuelle. Pour $E \in \mathcal{E}$, et Y un \tilde{k} -schéma affine et lisse, considérons $\mathcal{V}_E(Y)$ comme un pro-schéma étale sur $Q^E(Y)$ de la manière évidente (i.e., via le foncteur d'oubli). Alors, grâce au lemme 2.5.67, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\text{Colim}_{E \in \mathcal{E}} \text{Tot}(K(\mathcal{V}_E(\Delta_X) \times_{Q^E} Q^n)) \simeq \text{Tot}(K(\mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(\Delta_X)/Q^n(\Delta_X))).$$

Il suffit donc de montrer que le morphisme

$$(2.116) \quad \text{Tot}(K(Q^n(\Delta_X))) \longrightarrow \text{Tot}(K(\mathcal{V}_E(\Delta_X) \times_{Q^E} Q^n))$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $E \in \mathcal{E}$.

Pour Y un \tilde{k} -schéma affine et lisse, on notera $\mathcal{V}'_E(Y) \subset \mathcal{V}_E(Y)$ la sous-catégorie cofiltrante dont les objets sont les voisinages étales V de $H^E(Y)$ dans $Q^E(Y)$ tels que $V \times_{Q^E} H^E \simeq H^E(Y)$. Pour $V \in \mathcal{V}'_E(Y)$, le carré

$$\begin{array}{ccc} V \times_{Q^E} Q^n & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q^n(Y) & \longrightarrow & Q^E(Y) \end{array}$$

est un carré Nisnevich. Puisque K est projectivement Nis-fibrant, il vérifie la propriété de Brown-Gersten. Le carré

$$\begin{array}{ccc} K(Q^E(Y)) & \longrightarrow & K(Q^n(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(V) & \longrightarrow & K(V \times_{Q^E} Q^n) \end{array}$$

est donc homotopiquement cartésien et cocartésien. On en déduit aussitôt que le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tot}(K(Q^E(\Delta_X))) & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(K(Q^n(\Delta_X))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}'_E(\Delta_X))) & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}'_E(\Delta_X) \times_{Q^E} Q^n)) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien et cocartésien. Il est donc suffisant de prouver que le morphisme

$$(2.117) \quad \mathrm{Tot}(K(Q^E(\Delta_X))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}'_E(\Delta_X)))$$

est un quasi-isomorphisme pour $E \in \mathcal{E}$.

D'après la proposition 2.2.52 et puisque le \tilde{k} -schéma Q^E est (non canoniquement) isomorphe à $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^n$, le morphisme évident $\mathrm{Tot}(K(\Delta_X)) \rightarrow \mathrm{Tot}(K(Q^E(\Delta_X)))$, induit par les projections $Q^E(-) = Q^E \times_{\tilde{k}} (-) \rightarrow (-)$, est un quasi-isomorphisme. Il suffit donc de prouver que le morphisme

$$(2.118) \quad p^* : \mathrm{Tot}(K(\Delta_X)) \longrightarrow \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}'_E(\Delta_X))),$$

induit par les morphismes composés $p : \mathcal{V}'_E(-) \rightarrow Q^E(-) \rightarrow (-)$, est un quasi-isomorphisme. Or, on dispose d'une rétraction

$$(2.119) \quad s^* : \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}'_E(\Delta_X))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(K(\Delta_X))$$

induite par les immersions fermées (de pro-schémas) $s : (-) \hookrightarrow \mathcal{V}'_E(-)$ définies par l'annulation des monômes \underline{t}^γ pour $\gamma \in E - \{0\}$. Il suffit donc de montrer que $p^* \circ s^*$ est homotope à l'identité.

Remarquons pour cela que les sections nulle et unité de \mathbb{A}^1 induisent deux morphismes

$$\mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}_E(\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 \times_{\tilde{k}} \Delta_X))) \xrightarrow[0^*]{1^*} \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}_E(\Delta_X))).$$

Ces deux morphismes sont simplicialement homotopes comme le montre la proposition 2.2.52 appliquée au préfaisceau qui à un \tilde{k} -schéma affine lisse Y associe $K(\mathcal{V}_E(Y))$. Par ailleurs, on dispose d'une action par homothétie

$$m : Q^E \times_{\tilde{k}} \mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 \longrightarrow Q^E;$$

si $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est une base de \mathbb{F} qui engendre E et si x désigne la coordonnée de $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$, alors m correspond au morphisme de \tilde{k} -algèbres $\tilde{k}[E] \rightarrow \tilde{k}[E][x]$ donné par l'association $\underline{t}^{\gamma_i} \rightsquigarrow \underline{t}^{\gamma_i} \cdot x$, pour $1 \leq i \leq n$. Si Y est un \tilde{k} -schéma affine lisse, le morphisme m fournit un morphisme de \tilde{k} -schémas

$$m \times \mathrm{id}_Y : Q^E(\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 \times_{\tilde{k}} Y) \longrightarrow Q^E(Y).$$

Ce morphisme envoie $H^E(\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 \times_{\tilde{k}} Y)$ dans $H^E(Y)$. Il induit donc un morphisme de pro- \tilde{k} -schémas

$$\tilde{m} : \mathcal{V}_E(\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 \times_{\tilde{k}} Y) \longrightarrow \mathcal{V}_E(Y)$$

qui est naturel en Y . On en déduit un morphisme de complexes

$$\tilde{m}^* : \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}_E(\Delta_X))) \longrightarrow \mathrm{Tot}(K(\mathcal{V}_E(\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 \times_{\tilde{k}} \Delta_X))).$$

On vérifie immédiatement que $1^* \circ \tilde{m}^* = \mathrm{id}$ alors que $0^* \circ \tilde{m}^* = p^* \circ s^*$. D'où le résultat recherché. C.Q.F.D.

Pour terminer la preuve du théorème 2.5.57, il reste à expliquer comment déduire la proposition 2.5.62 pour \tilde{k} de caractéristique nulle du cas particulier où

$$\tilde{k}[\pi_1, \pi_1^{-1}, \dots, \pi_n, \pi_n^{-1}] \subset k$$

est dense. Vu la formulation équivalente donnée dans la proposition 2.5.61, ceci découle aussitôt du résultat suivant.

Proposition 2.5.68. — *On suppose toujours que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre. Soit l/k une extension de corps valués complets avec \tilde{k} de caractéristique nulle. On suppose que cette extension induit des isomorphismes $\tilde{k} \simeq \tilde{l}$ et $|k^\times| \simeq |l^\times|$. Alors, le foncteur*

$$(l/k)^* : \mathbf{RigDM}(k, \Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}(l, \Lambda)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — On fixe une section $\tilde{k} \hookrightarrow k$ à l'épimorphisme $k^\circ \twoheadrightarrow \tilde{k}$. Remarquons d'abord que le foncteur $(l/k)^*$ envoie un système de générateurs compacts de $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$ sur un système de générateurs compacts de $\mathbf{RigDM}(l, \Lambda)$. En effet, le lemme 2.5.58 entraîne que $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$ est compactement engendrée par les motifs

de la forme $(k'/k)_\# M(Q^{\text{rig}}(X'))(m)$ avec $m \in \mathbb{Z}$ un entier relatif, k'/k une extension finie contenant une copie de $k \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}'$ et X' un \tilde{k}' -schéma lisse. (Bien entendu, $Q^{\text{rig}}(X') = [(X' \otimes_{\tilde{k}'} k'^{\circ}) // (\pi)]_\eta$.) De même, $\mathbf{RigDM}(l, \Lambda)$ est compactement engendrée par les motifs de la forme $(l'/l)_\# M(Q^{\text{rig}}(Y'))(m)$ avec $m \in \mathbb{Z}$ un entier relatif, l'/l une extension finie contenant une copie de $l \otimes_{\tilde{l}'} \tilde{l}'$ et Y' un \tilde{l}' -schéma lisse. (Ici, $Q^{\text{rig}}(Y') = [(Y' \otimes_{\tilde{l}'} l'^{\circ}) // (\pi)]_\eta$.) Or, d'après le lemme 2.5.69 ci-dessous, et les isomorphismes $\tilde{k} \simeq \tilde{l}$ et $|k^\times| = |l^\times|$, toute extension finie l'/l est de la forme $l' = k' \otimes_k l$ pour une unique extension finie k'/k . De plus, on a $\tilde{l}' = \tilde{k}'$ et, pour X' un \tilde{k}' -schéma lisse, on a $(l/k)^* M(Q^{\text{rig}}(X')) = M(Q^{\text{rig}}(X'))$. (On fera attention que dans cette égalité deux variétés rigides sur des corps valués complets différents ont été désignées par le même symbole « $Q^{\text{rig}}(X')$ ».) Ceci permet de conclure.

Ainsi, pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que le foncteur $(l/k)^*$ est pleinement fidèle. En utilisant la dualité et le théorème de simplification comme dans la discussion qui précède la proposition 2.5.61, on se ramène à montrer que l'homomorphisme

$$\text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)} (M^{\text{eff}}(\partial \mathbb{B}_k^d), M) \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(l, \Lambda)} (M^{\text{eff}}(\partial \mathbb{B}_l^d), (l/k)^* M)$$

est bijectif pour tout entier d et tout motif M dans $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 1.3.32 et en utilisant le système de générateurs de $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$ fourni par le théorème 2.5.35, on se ramène à montrer que l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda)} (M^{\text{eff}}(\partial \mathbb{B}_k^d), M^{\text{eff}}(Y^{\text{an}})[r]) \\ \longrightarrow \text{hom}_{\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(l, \Lambda)} (M^{\text{eff}}(\partial \mathbb{B}_l^d), M^{\text{eff}}(Y^{\text{an}} \widehat{\otimes}_k l)[r]) \end{aligned}$$

est bijectif pour tout k -schéma lisse et de type fini Y , et tout entier relatif $r \in \mathbb{Z}$. Grâce au corollaire 2.5.33, il suffit de montrer que le morphisme de complexes

$$(2.120) \quad \underline{\mathbf{Cor}}_k(\partial \mathbb{B}_k^d, Y^{\text{an}}) \otimes \Lambda \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_l(\partial \mathbb{B}_l^d, (Y \otimes_k l)^{\text{an}}) \otimes \Lambda$$

est un quasi-isomorphisme. Pour ce faire, on procède en plusieurs étapes.

Étape A : On établit ici un résultat général qui servira à plusieurs reprises dans la suite de la preuve. On suppose donnés :

- une extension de corps valués complets K/k ,
- un pro-objet $(U_\alpha, k_\alpha)_\alpha$ dans SmAfd/k ,
- un système compatible de K -points $u_\alpha : \text{Spm}(K) \rightarrow U_\alpha$.

(Le lecteur est prié de consulter la discussion qui précède le théorème 2.2.15 pour la signification de Afd/k . Notons simplement que chaque couple (U_α, k_α) est formé d'une extension de corps valués complets k_α/k et d'un k_α -affinoïde lisse U_α .) On note encore $u_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ le point maximal de U_α déterminé par le morphisme u_α ci-dessus. On suppose les conditions suivantes.

- 1) L'idéal $\mathfrak{m}_{u_\alpha} \subset \mathcal{O}_{U_\alpha, u_\alpha}$ est nul. Autrement dit, on a $\mathcal{O}_{U_\alpha, u_\alpha} = k_\alpha(u_\alpha)$.

- 2) Pour tout α et tout $V \in \text{Flt}(u_\alpha)$, il existe un indice β plus fin que α tel que le morphisme $(U_\beta, k_\beta) \rightarrow (U_\alpha, k_\alpha)$ se factorise à travers (V, k_α) . Autrement dit, le pro-objet (U_α, k_α) est isomorphe à $(V, k_\alpha)_{\alpha, V \in \text{Flt}(u_\alpha)}$.
- 3) Le morphisme $\text{Colim}_\alpha \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}) = \text{Colim}_\alpha k_\alpha(u_\alpha) \rightarrow K$ est d'image dense. (Bien entendu, il est aussi injectif.)

Dans cette étape, nous allons montrer que le morphisme de complexes

$$(2.121) \quad \text{Colim}_\alpha \underline{\mathbf{Cor}}_k((\partial\mathbb{B}_{U_\alpha}^d, k_\alpha), Y^{\text{an}}) \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_k((\partial\mathbb{B}_K^d, K), Y^{\text{an}})$$

est un quasi-isomorphisme. Les complexes ci-dessus sont des complexes de correspondances finies entre des objets de SmAfn/k . Ainsi, en degré m , le complexe $\underline{\mathbf{Cor}}_k((\partial\mathbb{B}_{U_\alpha}^d, k_\alpha), Y^{\text{an}})$ est donné par le groupe

$$\mathbf{Cor}_{k_\alpha}(\Delta_{\text{rig}, k_\alpha}^m \widehat{\times}_{k_\alpha} \partial\mathbb{B}_{U_\alpha}^d, Y^{\text{an}} \widehat{\otimes}_k k_\alpha).$$

Une description similaire est également valable pour le complexe $\underline{\mathbf{Cor}}_k((\partial\mathbb{B}_K^d, K), Y^{\text{an}})$.

On pose $B = \partial\mathbb{B}_K^d$ et $B_0 = \text{Spec}(\text{Colim}_\alpha \Gamma(\partial\mathbb{B}_{U_\alpha}^d, \mathcal{O}))$. Alors, $\Gamma(B_0, \mathcal{O})$ est dense dans $\Gamma(B, \mathcal{O})$ et la $\Gamma(B_0, \mathcal{O})$ -algèbre $\Gamma(B, \mathcal{O})$ est régulière. Le théorème 2.4.16 s'applique⁽²⁰⁾ pour fournir un quasi-isomorphisme

$$\underline{\mathbf{Cor}}_k(\mathcal{V}(B/B_0), Y) \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_k((\partial\mathbb{B}_K^d, K), Y^{\text{an}}).$$

Précisons que le complexe $\underline{\mathbf{Cor}}_k(\mathcal{V}(B/B_0), Y)$ est donné en degré m par le groupe $\mathbf{Cor}_k(\mathcal{V}^m(B/B_0), Y)$ des correspondances finies algébriques de $\mathcal{V}^m(B/B_0)$ dans Y au-dessus de k avec $\mathcal{V}^m(B/B_0)$ le pro-schéma des voisinages étales affines de $\Delta_{\text{rig}, B}^m$ dans $\Delta_{B_0}^m$.

On pose aussi $B_\alpha = \partial\mathbb{B}_{U_\alpha}^d$ et $B_{\alpha,0} = \text{Spec}(\Gamma(\partial\mathbb{B}_{U_\alpha}^d, \mathcal{O}))$. Une deuxième application du théorème 2.4.16 fournit un quasi-isomorphisme

$$\underline{\mathbf{Cor}}_k(\mathcal{V}(B_\alpha/B_{\alpha,0}), Y) \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_k((\partial\mathbb{B}_{U_\alpha}^d, k_\alpha), Y^{\text{an}}).$$

Précisons que le complexe $\underline{\mathbf{Cor}}_k(\mathcal{V}(B_\alpha/B_{\alpha,0}), Y)$ est donné en degré m par le groupe $\mathbf{Cor}_k(\mathcal{V}^m(B_\alpha/B_{\alpha,0}), Y)$ des correspondances finies algébriques de $\mathcal{V}^m(B_\alpha/B_{\alpha,0})$ dans Y au-dessus de k avec $\mathcal{V}^m(B_\alpha/B_{\alpha,0})$ le pro-schéma des voisinages étales affines de $\Delta_{\text{rig}, B_\alpha}^m$ dans $\Delta_{B_{\alpha,0}}^m$.

Ainsi, pour démontrer que (2.121) est un quasi-isomorphisme, il suffit de montrer que le morphisme

$$(2.122) \quad \text{Colim}_\alpha \underline{\mathbf{Cor}}_k(\mathcal{V}(B_\alpha/B_{\alpha,0}), Y) \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_k(\mathcal{V}(B/B_0), Y)$$

est un quasi-isomorphisme. Or, en adaptant la preuve du lemme 2.4.18, on montre que tout voisinage étale affine de $\Delta_{\text{rig}, B}^m$ dans $\Delta_{B_0}^m$ provient par « pull-back » d'un

⁽²⁰⁾ Il est vrai, mais pas tout à fait évident, que B_0 est un schéma noethérien. Toutefois, cette propriété n'est pas strictement nécessaire pour l'application du théorème 2.4.16. En effet, la propriété que $\Gamma(B_0, \mathcal{O})$ est une limite inductive d'anneaux noethériens au-dessus desquels $\Gamma(B, \mathcal{O})$ est régulier suffit pour les besoins de la preuve du théorème 2.4.16.

voisinage étale affine de $\Delta_{\mathbf{rig}, B_\alpha}^m$ dans $\Delta_{B_{\alpha,0}}^m$ pour un certain α . Ceci montre que le morphisme (2.122) est un isomorphisme. D'où le résultat recherché.

Étape B : Revenons à la preuve de la propriété que (2.120) est un quasi-isomorphisme. Le but de cette étape est de se ramener au cas où k est algébriquement clos.

Soient k^a une clôture algébrique de k et \bar{k}^a sa complétion. Le groupe de Galois $\text{Gal}(k^a/k)$ agit continûment sur le morphisme

$$(2.123) \quad \text{Colim}_{k' \subset k^a} \underline{\mathbf{Cor}}_{k'}(\partial \mathbb{B}_{k'}^d, (Y \otimes_k k')^{\text{an}}) \otimes \Lambda \longrightarrow \text{Colim}_{k' \subset k^a} \underline{\mathbf{Cor}}_{l'}(\partial \mathbb{B}_{l'}^d, (Y \otimes_k l')^{\text{an}}) \otimes \Lambda$$

où $k' \subset k^a$ parcourt l'ensemble des extensions finies de k contenues dans k^a et $l' = l \otimes_k k'$. De plus, on retrouve le morphisme (2.120) en appliquant à (2.123) le foncteur $(-)^{\text{Gal}(k^a/k)}$ qui est exact sur les représentations continues Λ -linéaires puisque Λ est une \mathbb{Q} -algèbre. Il suffit donc de montrer que le morphisme (2.123) est un quasi-isomorphisme.

Notons $l^a = l \otimes_k k^a$ et $\bar{l}^a = l \widehat{\otimes}_k \bar{k}^a$. (D'après le lemme 2.5.69 ci-dessous, l^a est une clôture algébrique de l et \bar{l}^a est sa complétion ; ceci justifie notre choix des notations.) Grâce à l'étape précédente, le morphisme (2.123) s'identifie à quasi-isomorphisme près au morphisme

$$\underline{\mathbf{Cor}}_{\bar{k}^a}(\partial \mathbb{B}_{\bar{k}^a}^d, (Y \otimes_k \bar{k}^a)^{\text{an}}) \otimes \Lambda \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_{\bar{l}^a}(\partial \mathbb{B}_{\bar{l}^a}^d, (Y \otimes_k \bar{l}^a)^{\text{an}}) \otimes \Lambda.$$

Ceci permet de conclure.

Étape C : Dans cette étape, on suppose que k est algébriquement clos. D'après le lemme 2.5.69 ci-dessous, il en est de même de l .

On peut réaliser l/k comme une colimite filtrante d'extensions de corps valués complets k_α/k qui sont topologiquement engendrées par un nombre fini d'éléments. D'après l'étape A, le morphisme évident

$$\text{Colim}_\alpha \underline{\mathbf{Cor}}_{k_\alpha}(\partial \mathbb{B}_{k_\alpha}^d, (Y \otimes_k k_\alpha)^{\text{an}}) \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_l(\partial \mathbb{B}_l^d, (Y \otimes_k l)^{\text{an}})$$

est un quasi-isomorphisme. On est donc ramené à traiter le cas où l'extension l/k est elle-même topologiquement engendrée par un nombre fini d'éléments. On peut alors trouver une chaîne d'inclusions strictes de corps valués complets

$$k = l_0 \subsetneq l_1 \subsetneq \cdots \subsetneq l_r = l$$

avec l_i/l_{i-1} topologiquement engendrée par un seul élément pour tout $1 \leq i \leq r$. Clairement, on a $\tilde{l}_{i-1} \simeq \tilde{l}_i$ et $|l_{i-1}^\times| = |l_i^\times|$. Puisque k est algébriquement clos, le lemme 2.5.69 ci-dessous entraîne que tous les l_i sont algébriquement clos. En particulier, chaque extension l_i/l_{i-1} est topologiquement engendrée par un élément transcendant.

Il est suffisant de montrer que les morphismes

$$\underline{\mathbf{Cor}}_{l_{i-1}}(\partial \mathbb{B}_{l_{i-1}}^d, (Y \otimes_k l_{i-1})^{\text{an}}) \otimes \Lambda \longrightarrow \underline{\mathbf{Cor}}_{l_i}(\partial \mathbb{B}_{l_i}^d, (Y \otimes_k l_i)^{\text{an}}) \otimes \Lambda$$

sont des quasi-isomorphismes. Ainsi, en remplaçant k et l par l_{i-1} et l_i , on est ramené en fin de compte à traiter le cas où l'extension l/k est topologiquement engendrée par

un élément transcendant qu'on note x . Clairement, on peut supposer que l'élément x est dans l° ; il induit donc un morphisme $x : \text{Spm}(l) \rightarrow \mathbb{B}_k^1$. On note encore $x \in \mathcal{M}(X)$ le point maximal de \mathbb{B}_k^1 déterminé par x . Puisque $x \in l$ est transcendant sur k , l'idéal $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{\mathbb{B}_k^1, x}$ est nul de sorte que $\mathcal{O}_{\mathbb{B}_k^1, x} = k(x)$. De plus, puisque x engendre l , on obtient une identification $l \simeq \widehat{k}(x)$.

Rappelons que $|\widehat{k}(x)^\times| = |k^\times|$ et $\widetilde{k}(x) \simeq \widetilde{k}$. Nous allons utiliser ces deux propriétés pour montrer que les boules fermées de \mathbb{B}_k^1 appartenant à $\text{Flt}(x)$ forment un sous-ensemble cofinal de $\text{Flt}(x)$. En effet, soit $U \in \text{Flt}(x)$ et montrons qu'il existe une boule fermée contenue dans U et appartenant à $\text{Flt}(x)$. On ne restreint pas la généralité en supposant que U est connexe. Puisque k est algébriquement clos, on peut écrire

$$U = \mathbb{B}_k^1(o, R) - \prod_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(z_i, r_i)^\circ = \bigcap_{i=1}^m (\mathbb{B}_k^1(o, R) - \mathbb{B}_k^1(z_i, r_i)^\circ).$$

Étant donné qu'une intersection non vide de deux boules dans \mathbb{B}_k^1 est encore une boule, on est ramené à traiter le cas $m = 1$. Quitte à appliquer une transformation affine, on peut même supposer que $U = \mathbb{B}_k^1(o, 1) - \mathbb{B}_k^1(o, r)^\circ$. Les propriétés $|\widehat{k}(x)^\times| = |k^\times|$ et $\widetilde{k}(x) \simeq \widetilde{k}$ entraînent l'existence d'un élément $y \in k$ tel que $|x| = |y|$ et $|x - y| < |x|$. (En effet, soit $u \in k$ tel que $|u| = |x|$ et notons $a \in \widetilde{k} \simeq \widetilde{k}(x)$ la classe de $u^{-1}x \in k^\circ(x)$. Alors, l'élément $y = u \cdot a$, où l'on voit a comme un élément de k grâce à la section $\widetilde{k} \hookrightarrow k$, convient.) Clairement, la boule $\mathbb{B}_k^1(y, |x - y|)$ est contenue dans U et elle appartient à $\text{Flt}(x)$.

Il est maintenant aisé de conclure. En effet, d'après ce qui précède et l'étape A, on dispose d'un quasi-isomorphisme

$$\text{Colim}_{B \in \text{Flt}(x)} \underline{\text{Cor}}_k(\partial \mathbb{B}_k^d \widehat{\times}_k B, Y^{\text{an}}) \longrightarrow \underline{\text{Cor}}_l(\partial \mathbb{B}_l^d, (Y \otimes_k l)^{\text{an}})$$

où $B \subset \mathbb{B}_k^1$ parcourt l'ensemble des boules fermées appartenant à $\text{Flt}(x)$. Il est alors suffisant de montrer que les morphismes

$$\underline{\text{Cor}}_k(\partial \mathbb{B}_k^d, Y^{\text{an}}) \rightarrow \underline{\text{Cor}}_k(\partial \mathbb{B}_k^d \widehat{\times}_k B, Y^{\text{an}})$$

sont des quasi-isomorphismes ce qui est assuré par la proposition 2.2.44. C.Q.F.D.

Lemme 2.5.69. — *Soit k un corps valué d'égale caractéristique nulle. On suppose que k° est hensélien. (C'est le cas par exemple si k est complet pour sa valuation.) Alors, k est algébriquement clos si et seulement si \widetilde{k} est algébriquement clos et le groupe $|k^\times|$ est uniquement divisible (i.e., $|k^\times|$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel).*

Démonstration. — On suppose que \widetilde{k} est algébriquement clos et que $|k^\times|$ est uniquement divisible, et on montre que k est algébriquement clos. (L'autre direction est facile et sera laissée au lecteur.)

Soit $P \in k[T]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 2$. Nous allons montrer que P n'est pas irréductible, ce qui suffit pour conclure. Quitte à faire un changement de

variable, on peut supposer que

$$P(T) = T^d + a_2 T^{d-2} + \dots + a_d$$

avec $a_i \in k$. Notons $\mu = \max_{i=2, \dots, d} (\sqrt[i]{|a_i|})$. Si tous les a_i sont nuls, il n'y a rien à démontrer ; on peut donc supposer que $\mu > 0$. Puisque $|k^\times|$ est divisible, on peut trouver $b \in k$ tel que $|b| = \mu$. Quitte à remplacer P par $b^{-d}P(bT)$, on peut supposer que $P \in k^\circ[T]$ et que $|a_{i_0}| = 1$ pour au moins un entier $2 \leq i_0 \leq d$.

Notons \bar{P} l'image de P dans $\tilde{k}[T]$. Puisque \tilde{k} est algébriquement clos, \bar{P} est le produit de d polynômes unitaires de degré 1. Montrons que \bar{P} admet au moins deux racines distinctes dans \tilde{k} . En effet, dans le cas contraire, \bar{P} serait de la forme $(T - \alpha)^d$. Or, le coefficient de T^{d-1} dans \bar{P} est nul, ce qui entraîne que $\alpha = 0$. (C'est ici qu'on se sert de l'hypothèse que \tilde{k} est de caractéristique nulle.) Ceci est en contradiction avec la propriété $|a_{i_0}| = 1$.

Il est maintenant aisé de conclure. D'après ce qui précède, on peut écrire $\bar{P} = \bar{Q} \cdot \bar{R}$ avec $\bar{Q}, \bar{R} \in \tilde{k}[T]$ unitaires, de degré non nul, et premiers entre eux. Puisque k° est hensélien, on peut relever la décomposition $\bar{P} = \bar{Q} \cdot \bar{R}$ en une décomposition $P = Q \cdot R$ avec $Q, R \in k^\circ[T]$. D'où le résultat recherché. C.Q.F.D.

Remarque 2.5.70. — Lorsque la caractéristique de k est non nulle, nous ignorons si la condition (iii) du théorème 2.5.57 est nécessaire pour sa validité. Ceci est bien entendu intimement lié à une hypothétique généralisation de la proposition 2.5.68. (Si la caractéristique de \tilde{k} est non nulle, on ne peut plus espérer que le foncteur $(l/k)^*$ de la proposition 2.5.68 soit une équivalence de catégories car les conditions $\tilde{k} \simeq \tilde{l}$ et $|k^\times| = |l^\times|$ ne suffisent pas pour assurer que k et l ont des groupes de Galois absolus isomorphes. Toutefois, on peut encore espérer que le foncteur $(l/k)^*$ est pleinement fidèle.)

Remarque 2.5.71. — Le théorème 2.5.57 permet en théorie d'appréhender les morphismes entre motifs rigides à l'aide de morphismes entre motifs algébriques (lorsque les hypothèses de son énoncé sont satisfaites). En effet, soient $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{RigDM}(k, \Lambda))$ des motifs rigides compacts. Grâce au théorème 2.5.34, on peut trouver une extension finie galoisienne l/k telle que $(l/k)^*A$ et $(l/k)^*B$ sont dans $\mathbf{RigDM}^{\text{br}}(l, \Lambda)$. Or, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\text{hom}_{\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)}(A, B) \simeq \text{hom}_{\mathbf{RigDM}(l, \Lambda)}((l/k)^*A, (l/k)^*B)^{\text{Gal}(l/k)}.$$

Par ailleurs, le théorème 2.5.57 permet d'identifier $\text{hom}_{\mathbf{RigDM}(l, \Lambda)}((l/k)^*A, (l/k)^*B)$ à un groupe de morphismes dans $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m, \tilde{l}}^n, \Lambda)$.

Nous conjecturons que le théorème 2.5.57 admet une version en inégale caractéristique.

Conjecture 2.5.72. — *On suppose que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre. Soit k/\mathbb{Q}_p une extension de corps valués complets telle que $|k^\times|$ est un \mathbb{Z} -module libre de rang n . Soient*

$\pi_1, \dots, \pi_n \in k^\vee$ tels que $|\pi_1|, \dots, |\pi_n|$ est une base de $|k^\times|$ et π_1 est algébrique sur \mathbb{Q}_p .

On suppose qu'il existe un sous-corps $k_0 \subset k$ vérifiant les conditions suivantes :

- la restriction de la valuation de k à k_0 est discrète ;
- π_1 appartient à k_0 (ce qui entraîne que π_1 est une uniformisante de k_0) ;
- l'inclusion $k_0 \subset k$ induit un isomorphisme $\tilde{k}_0 \simeq \tilde{k}$;
- le sous-anneau $k_0[\pi_2, \pi_2^{-1}, \dots, \pi_n, \pi_n^{-1}] \subset k$ est dense.

Alors, il existe une équivalence de catégories entre $\mathbf{U}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$ et $\mathbf{RigDM}^{\text{br}}(k, \Lambda)$.

Remarque 2.5.73. — En inégale caractéristique, l'épimorphisme $k^\circ \twoheadrightarrow \tilde{k}$ n'admet pas de section. Ainsi, on ne dispose pas de foncteur évident de $\mathbf{U}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$ dans $\mathbf{RigDM}^{\text{br}}(k, \Lambda)$ comme c'était le cas en égale caractéristique. Néanmoins, il est plausible que la thèse de Vezzani [44] fournit un tel foncteur et permet de réduire la conjecture 2.5.72 à sa variante en égale caractéristique, i.e., au théorème 2.5.57. On espère que Vezzani (ou quelqu'un d'autre) prendra un jour la peine de vérifier cela.

Définition 2.5.74. — Étant donné un \tilde{k} -schéma lisse X et un entier non nul $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, on note $Q_r^n(X)$ le $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ -schéma dont le morphisme structural est la composition de

$$X \times_{\tilde{k}} \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n \longrightarrow \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n \xrightarrow{e_r} \mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$$

avec e_r l'élévation à la puissance r dans le tore $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$.

Supposons que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre. On note $\mathbf{QU}^n\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)$ engendrée par les motifs effectifs des $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ -schémas $Q_r^n(X)$. On note aussi $\mathbf{QU}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies de $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda)$ engendrée par les motifs des $\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n$ -schémas $Q_r^n(X)$ ainsi que leurs twists de Tate négatifs.

On termine avec l'énoncé suivant qui est uniquement valable pour k d'égale caractéristique nulle.

Théorème 2.5.75. — On suppose que Λ est une \mathbb{Q} -algèbre. On suppose aussi que k est d'égale caractéristique nulle et que $|k^\times|$ est un groupe abélien libre de rang fini. On fixe une section $\tilde{k} \hookrightarrow k^\circ$ à la surjection évidente et on choisit des éléments $\pi_1, \dots, \pi_n \in k$ dont les normes $|\pi_1|, \dots, |\pi_n|$ forment une base du \mathbb{Z} -module $|k^\times|$. Alors, les foncteurs composés

$$(2.124) \quad \mathfrak{F} : \mathbf{QU}^n\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda) \\ \xrightarrow{(\pi_1, \dots, \pi_n)^*} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k, \Lambda) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(k, \Lambda),$$

$$(2.125) \quad \mathfrak{F} : \mathbf{QU}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}^n, \Lambda) \\ \xrightarrow{(\pi_1, \dots, \pi_n)^*} \mathbf{DM}(k, \Lambda) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}(k, \Lambda),$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration. — Pour fixer les idées, on se concentre sur le cas stable. Le foncteur \mathfrak{F} est pleinement fidèle. Ceci découle aussitôt du théorème 2.5.57 et de la propriété suivante : si M est un objet compact de $\mathbf{QU}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$, alors il existe un entier r tel que e_r^*M est dans $\mathbf{U}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$.

Il reste à voir que l'image du foncteur \mathfrak{F} contient un système de générateurs compacts. Or, le théorème 2.5.34, joint au lemme 2.5.69, entraîne la propriété suivante : si M est un objet compact de $\mathbf{RigDM}(k, \Lambda)$, il existe une extension finie k'/k , avec $k' = k[\pi_1^{1/r}, \dots, \pi_n^{1/r}]$ pour un certain $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, telle que $(k'/k)^*M$ est dans $\mathbf{RigDM}^{\text{br}}(k', \Lambda)$. Vu le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbf{RigDM}^{\text{br}}(k', \Lambda) \\ (e_r)_\# \downarrow & & \downarrow (k'/k)_\# \\ \mathbf{QU}^n\mathbf{DM}(\tilde{k}, \Lambda) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbf{RigDM}(k, \Lambda), \end{array}$$

le résultat recherché découle encore une fois du théorème 2.5.57.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier – Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.
- [2] AYOUB (J.) – *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*, vol. I, Astérisque, vol. 314, Société Math. France, 2007.
- [3] ———, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*, vol. II, Astérisque, vol. 315, Société Math. France, 2007.
- [4] ———, The motivic nearby cycles and the conservation conjecture, in *Algebraic Cycles and Motives* (vol. 1), London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 343, Cambridge, 2007.
- [5] ———, *La réalisation étale et les opérations de Grothendieck*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **47** (2014), pp. 1–145.
- [6] ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motivique d'un corps de caractéristique nulle*, I, J. reine angew. Math., t. **693** (2014), pp. 1–149.
- [7] ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motivique d'un corps de caractéristique nulle*, II, J. reine angew. Math., t. **693** (2014), pp. 151–226.
- [8] BERKOVICH (V.) – *Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible*, Invent. Math., t. **137** (1999), pp. 1–84.
- [9] BOSCH (S.) & GÖRTZ (U.) – *Coherent modules and their descent on relative rigid spaces*, J. reine angew. Math., t. **495** (1998), pp. 119–134.
- [10] BOSCH (S.), GÜNTZER (U.) & REMMERT (R.) – *Non-archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 261, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo, 1984.
- [11] BOSCH (S.) & LÜTKEBOHMERT (W.) – *Formal and rigid geometry I. Rigid spaces*, Math. Ann., t. **295** (1993), pp. 291–317.

- [12] ———, *Formal and rigid geometry II. Flattening techniques*, Math. Ann., t. **296** (1993), pp. 403–429.
- [13] BOURBAKI (N.) – *Algèbre commutative*, Herman, Paris, 1964.
- [14] BROWN (K.S.) & GERSTEN (S.M.) – *Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, 1973.
- [15] CONRAD (B.) – *Irreducible components of rigid spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **49** (1999), pp. 473–541.
- [16] ———, *Relative ampleness in rigid geometry*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **56** (2006), pp. 1049–1126.
- [17] DE JONG (A.J.) – *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., t. **83** (1996), pp. 51–93.
- [18] FRESNEL (J.) & VAN DER PUT (M.) – *Rigid analytic geometry and its applications*, vol. 218, Birkhäuser Basel-Boston-Berlin, 2004.
- [19] GROTHENDIECK (A.) & DIEUDONNÉ (J.) – *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, 3^e partie*, vol. 28, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1966.
- [20] ———, *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, 4^e partie*, vol. 32, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1967.
- [21] ———, *Éléments de géométrie algébrique I*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [22] GRUSON (L.) & RAYNAUD (M.) – *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de platification d'un module*, Invent. Math, t. **13** (1971).
- [23] HIRONAKA (H.) – *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II*, Ann. of Math., Second series, t. **79** (1964), pp. 109–326.
- [24] HIRSCHHORN (P.S.) – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [25] HOVEY (M.) – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [26] JARDINE (R.) – *Motivic symmetric spectra*, Doc. Math., t. **5** (2000), pp. 445–552.
- [27] JOYAL (A.) – *Letter to Alexander Grothendieck*, datée du 4/11/1984.
- [28] KIEHL (R.) – *Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie*, J. reine angew. Math., t. **234** (1969), pp. 89–98.

- [29] MAZZA (C.), VOEVODSKY (V.) & WEIBEL (C.) – *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, Ame. Math. Soc., Providence, RI; Clay Math. Institute, Cambridge, MA, 2006.
- [30] MOREL (F.) & VOEVODSKY (V.) – \mathbb{A}^1 -*Homotopy theory of schemes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., vol. 90, 1999.
- [31] MUMFORD (D.), KEMPF (G.), KNUDSEN (F.) & SAINT-DONAT (B.) – *Toroidal embeddings I*, Lecture Notes in Math., vol. 339, Springer-Verlag, 1973.
- [32] NAGATA (M.) – *Imbedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ., t. 2 (1962), pp. 1–10.
- [33] NISNEVICH (Y.) – *The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory*, Algebraic K-theory : connections with geometry and topology, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [34] POPESCU (D.M.) – *General Néron desingularization*, Nagoya Math. J., t. 100 (1985), pp. 97–126.
- [35] ———, *General Néron desingularization and Approximation*, Nagoya Math. J., t. 104 (1986), pp. 85–115.
- [36] RAYNAUD (M.) – *Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl, ...*, Table ronde d’analyse non archimédienne, (1972, Paris), vol. 39–40, pp. 319–327, Mémoire de la SMF.
- [37] RIOU (J.) – *Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 340 (2005), pp. 431–436.
- [38] ———, *Catégorie homotopique stable d’un site suspendu avec intervalle*, Bull. Soc. Math. France, t. 135 (2007), pp. 495–547.
- [39] SERRE (J.-P.) – *Algèbre locale. Multiplicités (2^e éd.)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, 1965.
- [40] SPIVAKOVSKY (M.) – *A new proof of D. Popescu’s theorem on smoothing of ring homomorphisms*, J. Amer. Math. Soc., t. 12 (1999), pp. 381–444.
- [41] SUSLIN (A.) & VOEVODSKY (V.) – *Singular homology of abstract algebraic varieties*, Invent. Math., t. 123 (1996), pp. 61–94.
- [42] TEMKIN (M.) – *Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero*, Adv. Math., t. 219 (2008), pp. 488–522.
- [43] THOMASON (R.W.) & TROBAUGH (T.) – Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories, in *The Grothendieck Festschrift : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck*, vol. III, pp. 247–436, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser, 1990.

- [44] VEZZANI (A.) – *A motivic version of the theorem of Fontaine and Wintenberger*, Ph.D. thesis of the University of Zurich, 2014.
- [45] VOEVODSKY (V.) – *Cancellation theorem*, Documenta Mathematica, Extra Volume Suslin (2010), pp. 671–685.
- [46] VOEVODSKY (V.), SUSLIN (A.) & FRIEDLANDER (E.M.) – *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. Math. Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.
- [47] ZARISKI (O.) – *Local uniformization on algebraic varieties*, Ann. of Math., Second series, t. 41 (1940), pp. 852–896.

INDEX

- $(\text{Et}/X)_{\text{br}}$, 60
 $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj}})$, 131, 307
 $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj}})$, 131, 307
 $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{s-pr}}, \mathbf{Fib}_{\text{s-pr}})$, 131
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-}\mathbb{B}^1\text{-st}})$, 321
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-}\mathbb{B}^1\text{-st}})$, 133
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-}\mathbb{B}^1\text{-st}})$, 133
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}, \mathbf{Cof}_{\text{s-pr}}, \mathbf{Fib}_{\text{s-pr-}\mathbb{B}^1\text{-st}})$, 133
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{s-pr}}, \mathbf{Fib}_{\text{s-pr-}\mathbb{B}^1})$, 131
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-}\mathbb{B}^1})$, 313
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-}\mathbb{B}^1})$, 131
 $(\mathbf{W}_{\mathbb{B}^1}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-}\mathbb{B}^1})$, 131, 313
 $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-Nis}})$, 308
 $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{inj}}, \mathbf{Fib}_{\text{inj-Nis}})$, 131
 $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-Nis}})$, 131
 $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj-Nis}})$, 308
 $(\mathbf{W}_{\text{Nis}}, \mathbf{Cof}_{\text{s-pr}}, \mathbf{Fib}_{\text{s-pr-Nis}})$, 131
 $(f, \alpha)^*$, 129
 $(\text{NorAfd}/k, fh)$, 201
 $(\text{P}, \text{cpl}) : \text{SmRig}/\overline{\mathcal{F}} \rightarrow \text{SmF}/(\overline{\mathcal{F}}//\pi)$, 130
 $A\langle f_0, f_1, \dots, f_n \rangle$, 17
 $A\{T_1, \dots, T_n\}$, 15
 $A^\circ, A^\vee, \tilde{A}$, 14
 A^{es} , 25
 $C_F^\bullet(\mathcal{R})$, 180
 $C_F^\bullet(\mathcal{R})$, 179
 D^{h} , 176
 $E \otimes F$, avec E un préfaisceau d'ensembles, 75
 $F_{(B,p)}$, 234
 $F_{\hat{p}}$, 255
 $Q^n, Q^E, Q^E(Y), H^E, H^E(Y)$, 364
 $Q^{\text{geo}}(X), Q^{\text{an}}(X)$, 90
 $Q_p^{\text{geo}}(X, f), Q_p^{\text{an}}(X, f)$, 90
 $Q_r^{\text{gm}}(X, f), Q^{\text{gm}}(X)$, 105
 $Q^{\text{sch}}(X), Q^{\text{for}}(X), Q^{\text{rig}}(X)$, 76, 90
 $Q_p^{\text{sch}}(X, f), Q_p^{\text{for}}(X, f), Q_p^{\text{rig}}(X, f)$, 76, 90
 $Q^n(X), Q^{\text{rig}}(X), Q^{\text{an}}(X)$, 358
 $T^{\text{an}}, T_B^{\text{an}}$, 320
 $T^{\text{qc}}, T_B^{\text{qc}}$, 320
 $U \in_X V$, 187
 X/\mathcal{I} , avec $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal cohérent, 21
 $X \widehat{\times}_S Y$, 21
 X^{an} , avec X un A° -schéma de type fini, 127
 $X_0 \sqsubset X$, 275
 $[L : K]_{\text{sep}}, [L : K]_{\text{isp}}$, 206
 Afd/k , 212
 Afd/k , 201
 $\text{AfdCor}'(B), \text{AfdCor}(B)$, 225
 $\text{AfdCor}(B, p)$, 233
 $\text{AfdCor}(k)$, 214
 $\text{AfdCor}^b(B)$, 253
 $\text{AfdPST}(B), \text{AfdPST}(B, A)$, 227
 $\text{AfdPST}(B, p)$, 234
 $\text{AfdPST}(k), \text{AfdPST}(k, A)$, 214
 $\text{AfdStr}_{\text{Nis}}(k)$, 222
 $\mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$, 20
 $\mathbb{B}_k^1, \mathbb{B}_k^1(o, r)$, 19
 $\mathbb{B}_k^1(a, \lambda), \mathbb{B}_k^1(a, \lambda)^\circ$, 170
 $\mathbb{B}_k^1(o, R) - \bigcup_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ$, 171
 $\mathbb{B}_k^1(o, R) - \bigsqcup_{i=1}^m \mathbb{B}_k^1(x_i, r_i)^\circ$, 171
 $\text{Cor}(X, V)$, 214
 $\text{Cor}(\mathcal{V})$, 227
 $\text{Cor}_B(X, Y)$, 225
 $\text{Cor}_{B,p}(X/U, Y/V)$, 234
 $\text{Cr}_X^1(o, g^{1/q}, f^{1/p})$, 20
 $\text{Cr}_k^1(o, r_1, r_2)$, 20
 $\text{Cr}_k(\lambda)$, 343
 $\Delta_{\text{rig}}^\bullet, \Delta_{\text{rig}}^n$, 228
 Dia , 128
 DiaSch , 112
 $\text{DiaSchRig}/k^\circ, \text{DiaSchF}/k^\circ$, 129
 Et/\overline{X} , 127
 Et^{qc}/X , 59

- Et^{af}/X , $\text{Et}^{\text{af}}/\mathcal{X}$, 121
 $\text{Flt}(p)$, $\text{Flt}'(p)$, 32
 $\text{Flt}_{\text{Nis}}(y)$, $\text{f}_{\text{Nis},y}(-)$, 61
 $\text{Ho}(\text{Cpl}(\text{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)))$, 310
 $\text{Ho}(\text{PreShv}(-, \mathfrak{M}))$, 73
 $\text{Ho}_{\mathbb{B}^1}(\text{Cpl}(\text{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$, 313
 $\text{Ho}_{\mathbb{B}^1}(\text{Cpl}(\text{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)))$, 313
 $\text{Ho}_{\mathbb{B}^1}(\text{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$, 85
 $\text{Ho}_{\text{Nis}}(\text{Cpl}(\text{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)))$, 309
 $\text{Ho}_{\text{Nis}}(\text{PreShv}(-, \mathfrak{M}))$, 75
 $\mathcal{H}om(-, -)$, 102, 343
 $\Lambda_{\text{tr}}(V)$, 305, 306
 $\text{Mdl}'_{\text{es}}(U)$, 123
 $\text{Mdl}(X)$, $\text{Mdl}_{\text{es}}(X)$, 26
 $\text{OHStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$, 294
 $\text{OPreShv}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$, $\text{OShv}_{\text{ad}}(\text{Ouv}^{\text{qc}}(X), \mathcal{C})$, 190
 $\text{OStr}_{\text{Nis}}(B, \Lambda)$, 294
 Ω_f (f morphisme de k -variétés rigides), 38
 $\text{PIC}_{\overline{X}}(X)$, 259
 $\text{Pic}_{\overline{X}}(X)$, 260
 $\text{Pic}_{\overline{X}}^{\mathbb{B}^1}(X)$, 260
 $\text{PreShv}(-, \mathfrak{M})$, 73
 $\text{PreStr}(\mathcal{V})$, $\text{PreStr}(\mathcal{V}, A)$, 227
 $\text{PreStr}(\mathcal{V}, \Lambda)$ $\text{Str}_{\text{Nis}}(\mathcal{V}, \Lambda)$, 306
 $\text{QUDA}(\tilde{k}, \Lambda)$, 105
 $\text{QUDM}(\tilde{k}, \Lambda)$, 352
 $\text{QUSH}_{\mathfrak{M}}(\tilde{k})$, $\text{QUSH}(\tilde{k})$, 105
 $\text{RHom}(-, -)$, 343
 $\text{RigCor}'(B)$, $\text{RigCor}(B)$, 225
 $\text{RigCor}(k)$, 223
 $\text{RigDA}(\overline{\mathcal{F}}, \Lambda)$, 134
 $\text{RigDA}(k, \Lambda)$, 101
 $\text{RigDA}^{\text{eff}}(\overline{\mathcal{F}}, \Lambda)$, 132
 $\text{RigDA}^{\text{eff}}(k, \Lambda)$, 85
 $\text{RigDM}(B, \Lambda)$, 321
 $\text{RigDM}^{\text{eff}, \text{br}}(k, \Lambda)$, $\text{RigDM}^{\text{br}}(k, \Lambda)$, 358
 $\text{RigDM}^{\text{eff}}(B, \Lambda)$, 313
 $\text{RigPST}(B)$, $\text{RigPST}(B, A)$, 227
 $\text{RigPST}(k)$, $\text{RigPST}(k, A)$, 223
 $\text{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\overline{\mathcal{F}})$, $\text{RigSH}^{\text{eff}}(\overline{\mathcal{F}})$, 131
 $\text{RigSH}_{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{F}})$, $\text{RigSH}(\overline{\mathcal{F}})$, 133
 $\text{RigSH}_{\mathfrak{M}}(k)$, $\text{RigSH}(k)$, 101
 $\text{RigSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(k)$, $\text{RigSH}^{\text{eff}}(k)$, 85
 $\text{RigStr}_{\text{Nis}}(k)$, 223
 Rig^* , Rig_* , 88, 101, 316
 $\text{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D})$, 115
 $\text{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(X)$, $\text{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$, 160
 SchRig/k° , 127
 $\text{SchRig}/\overline{X}$, 127
 Sch^{qp}/S , 148
 $\text{Shv}_{fh}(\text{Afdn}/k, \mathbb{Z})$, 213
 $\text{SmRig}/(\overline{\mathcal{F}}, J)$, $\text{SmF}/(\mathcal{F}, J)$, 129
 SmRig/X , Et/X , 41
 SmRig/k , SmAfdn/k , 38
 $\text{SmRig}/\overline{X}$, 127
 $\text{SmRig}^{\text{qc}}/k$, $\text{VarRig}^{\text{qc}}/k$, 60
 $\text{SmAfdn}/(B, p)$, 233
 $\text{SmAfdn}^{\text{b}}/B$, 253
 $\text{Spect}_{\overline{T}^{\text{an}}}^{\Sigma}(\text{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$, 101
 $\text{Spect}_{\overline{T}^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\text{PreShv}(\text{SmRig}/k, \mathfrak{M}))$, 102
 $\text{Spect}_{\overline{T}^{\text{qc}}}^{\Sigma}(\text{PreShv}(\text{SmRig}^{\text{qc}}/k, \mathfrak{M}))$, 102
 $\text{Spm}(A)$, 17
 $(\text{Spm}(A), \mathcal{O})$, 18
 $\text{Ouv}(\text{Spm}(A))$, 18
 $\text{Rat}(\text{Spm}(A))$, 18
 $\text{St}_{X, \underline{a}}^f$, $\text{St}_{X, \underline{a}}^f$, 53
 $\text{Sus}_{\overline{T}^{\text{an}}}^p$, $\text{Sus}_{\overline{T}^{\text{qc}}}^p$, 102
 $\text{Th}(\mathcal{M})$, $\text{Th}^{-1}(\mathcal{M})$, 149
 $\text{Tr}_f(-)$, $\text{Tr}_{Y/X}(-)$, 206
 VarRig/k , Afdn/k , 20
 $\mathbb{Z}_{\text{tr}}(V)$, 213, 214, 217
 $\mathbb{Z}_{fh}(V)$, 205
 ad , la topologie des recouvrements admissibles, 180
 $\overline{Q}_r^{\text{gm}}(X, f)$, 110
 $\text{hom}_{\mathfrak{M}}(F, K)$, avec F un préfaisceau d'ensembles, 73
 $\mathbb{M}(\overline{\mathcal{F}})$, $\mathbb{M}(\mathcal{F})$, 133
 $\mathbb{M}_T(\mathcal{V}, \Lambda)$, 321
 $\text{FDA}(\mathcal{F}, \Lambda)$, 134
 $\text{FDA}^{\text{eff}}(\mathcal{F}, \Lambda)$, 132
 $\text{FSH}_{\mathfrak{M}}^{\text{eff}}(\mathcal{F})$, $\text{FSH}^{\text{eff}}(\mathcal{F})$, 131
 $\text{FSH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F})$, $\text{FSH}(\mathcal{F})$, 133
 $\text{QU}^{\text{a}}\text{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)$, $\text{QU}^{\text{a}}\text{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$, 376
 $\text{U}^{\text{a}}\text{DM}^{\text{eff}}(\tilde{k}, \Lambda)$, $\text{U}^{\text{a}}\text{DM}(\tilde{k}, \Lambda)$, 358
 $\mathcal{P}(-)$, $\mathcal{M}(-)$, 31
 \mathcal{X}^{es} , 25
 \mathfrak{F} , 352, 358
 \mathfrak{F} , \mathfrak{A} , 105
 u , u_X , u_{η} , $(u_X)_{\eta}$, u_{σ} , $(u_X)_{\sigma}$, 112
 $\mathcal{D} : \text{SmAfdn}/k \rightarrow \text{Sch}/k^{\circ}$, 112
 $\mathcal{D}_{\eta} : \text{SmAfdn}/k \rightarrow \text{Sch}/k$, 112
 $\mathcal{D}_{\sigma} : \text{SmAfdn}/k \rightarrow \text{Sch}/\tilde{k}$, 112
 \mathcal{O}_X° , \mathcal{O}_X^{\vee} , 19
 $\mathcal{R}_{W, \gamma, \lambda}^{\text{II}}$, recouvrement du deuxième type, 182
 $\mathcal{R}_{W, z_0, \epsilon}^{\text{I}}$, recouvrement du premier type, 181
 $\mathcal{V}(B/B_0)$, $\mathcal{V}^n(B/B_0)$, $\mathcal{V}^{\bullet}(B/B_0)$, 297
 $\mathcal{V}(Q^{\text{rig}}(Y)/Q^n(Y))$, 362
 $\mathcal{V}_E(Y)$, 365
 $\mathcal{V}_X(U)$, 190
 \overline{X} , 154
 $\partial \mathbb{B}_X^1(o, f^{1/p})$, 20
 $\partial \mathbb{B}_k^1$, 20

- $\pi_0 \mathbf{AfnCor}(B)$, $\pi_0 \mathbf{AfnCor}'(B)$, 228
- $\pi_0 \mathbf{AfnCor}(B, p)$, 234
- $\pi_0 \mathbf{Cor}(\mathcal{V})$, 231
- $\pi_0 \mathbf{Cor}_B(X, Y)$, 228
- $\pi_0 \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$, 234
- $\pi_0 \mathbf{RigCor}(B)$, $\pi_0 \mathbf{RigCor}'(B)$, 228
- $\pi_i \mathbf{Cor}_B(X, Y)$, 228
- $\pi_i \mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$, 235
- $H_{\text{Nis}}^p(X, -)$, $H_{\text{Nis}}^p(\mathcal{X}, -)$, 65
- $M(X)$, 101, 107, 321
- $M^{\text{eff}}(X)$, 86, 313
- $\text{Sing}_{\bullet}^{\mathbb{B}^1}(K)$, 231
- $\mathbf{Cor}_{B,p}(X/B, Y/B)$, 235
- $\mathbf{Cor}_{B_0}(\mathcal{V}(B/B_0), X_0)$, 297
- $\mathbf{Cor}_B(X, Y)$, 228
- $\underline{\text{hom}}(X, F)$, 230
- $\underline{\text{hom}}(X, K)$, avec X une k -variété rigide lisse, 84
- $\underline{G}(\tilde{k})$, 105
- $h_0^{\mathbb{B}^1}(F)$, 230
- $j_{\bar{X}} : (\bar{X} // \pi)_{\eta} \rightarrow \bar{X}_{\eta}$, avec \bar{X} un k° -schéma rigide, 127
- $k(X)$, pour un k -affinoïde intègre X , 206
- $k(p)$, $\hat{k}(p)$, 33
- $n(Y'_i)$, $n_f(Y'_i)$, $n_{Y/X}(Y'_i)$, 210
- $D_X(\lambda f_0, \{f_1, \dots, f_n\})$, 188
- $D_X(f_0, f_1, \dots, f_n)$, 19
- $\text{Loc}_{\mathbb{B}^1\text{-st}}$, 104
- $\text{Loc}_{\mathbb{B}^1}$, 85
- Loc_{Nis} , 74
- $\text{MV}(U, V)$, 182
- $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$, 180
- $\text{Ouv}^{\text{af}}(X)$, 191
- SmAf/\mathbb{Z} , 100
- SmAf/\tilde{k} , 117
- $Z(f, a)$, 213
- $a_{\text{Nis}}^{\text{tr}}$, 222, 307
- a_{tr} , 314
- cpl_{η} , 101
- diag , diag_{η} , diag_{σ} , 112
- $\text{ov}_X(-)$, 191
- o_{tr} , 314
- $t(W)$, 181
- Acyclique pour \mathcal{R} (alias \mathcal{R} -acyclique), 179
- Affinoïde, 19
- Algèbre affinoïde, 16
- Algèbre de Banach, 16
- Bonne compactification (d'une B -courbe affinoïde), 258
- Brown-Gersten (propriété de), 71, 310
- Catégorie de coefficients, 72
- Catégorie de modèles
 - structure injective, 131, 307
 - structure injective \mathbb{B}^1 -locale, 131, 313
 - structure injective \mathbb{B}^1 -locale stable, 133
 - structure injective Nis-locale, 131, 308
 - structure projective, 131, 307
 - structure projective \mathbb{B}^1 -locale, 85, 131, 313
 - structure projective \mathbb{B}^1 -locale stable, 101, 133, 321
 - structure projective Nis-locale, 83, 131, 308
 - structure semi-projective, 131
 - structure semi-projective \mathbb{B}^1 -locale, 131
 - structure semi-projective \mathbb{B}^1 -locale stable, 133
 - structure semi-projective Nis-locale, 131
- Cofibration projective de préfaisceaux, 84
- Complétion \hat{A} d'un anneau semi-normé A , 15
- Complétion formelle π -adique $(-)//(\pi)$, 26
- Complexe de chaînes rigides à valeurs dans un complexe de préfaisceaux, 231
- Convexe, localement convexe (ouverts quasi-compacts de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$), 175
- Correspondance finie, 214
 - élémentaire, 214
 - effective, 214
- Domaine, 17
 - domaine rationnel, 17
- Eclatement admissible, 26
- Enveloppe localement convexe (d'un ouvert quasi-compact de $(\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}}$), 176
- Equivalence \mathbb{B}^1 -locale (alias \mathbb{B}^1 -équivalence faible), 85
- Equivalence Nis-locale, 73, 83, 307
- Equivalence de Thom, 149
- Equivalences faibles de préfaisceaux, 73, 84
- Essentielle (k° -algèbre), 25
- Faiblement surconvergent (préfaisceau sur $\text{Ouv}^{\text{af}}(X)$ ou $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$), 191
- Faiblement surconvergent (préfaisceau), 284
- Faisceaux Nisnevich avec transferts, 222
- Fibration projective \mathbb{B}^1 -locale (alias \mathbb{B}^1 -fibration projective), 85
- Fibration projective Nis-locale (alias Nis-fibration projective), 84
- Fibration projective de préfaisceaux, 84
- Fibre en $p \in \mathcal{M}(B)$ (préfaisceau avec transferts invariant par homotopie), 255
- Fibre générique de Raynaud $(-)_{\eta}$, 26
- Groupe de Picard relatif, 260
- Groupoïde de Picard relatif, 259
- Homotope, alias \mathbb{B}^1 -homotope (correspondances finies), 228
- Homotopiquement compact (objet d'une catégorie de modèles stable), 72

- Homotopiquement surconvergent (préfaisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$ à valeur dans une catégorie de coefficients), 198
- Invariance combinatoire (préfaisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}((\mathbb{A}_k^1)^{\text{an}})$), 182
- Invariant par homotopie (alias \mathbb{B}^1 -invariant), 229
- Large (ouvert affinoïde d'un ouvert affinoïde de $(\mathbb{P}_k^1)^{\text{an}}$), 275
- Lisse, 38
 - k -variété rigide lisse, 38
 - morphisme lisse de k -variétés rigides, 41
- Morphisme étale de k -variétés rigides, 41
- Morphisme et prémorphisme de 2-foncteurs homotopiques stables, 148
- Morphisme trace, 206
- Motif (avec transferts) d'une B -variété rigide lisse, 321
- Motif (sans transferts) d'une k -variété rigide lisse, 101
- Motif effectif (avec transferts) d'une B -variété rigide lisse, 313
- Motif effectif (sans transferts) d'une k -variété rigide lisse, 86
- Motif quasi-unipotent de $\mathbf{DM}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}}, \Lambda)$, 352
- Motif quasi-unipotent de $\mathbf{SH}_{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m\tilde{k}})$, 105
- Multiplicité galoisienne, 210
- Nisnevich
 - carré Nisnevich, 66, 68
 - propriété de Nisnevich ponctuelle, 56
 - recouvrement Nisnevich (k -variétés rigides), 59
 - recouvrement Nisnevich (k° -schémas formels), 58
 - recouvrement Nisnevich (k° -schémas rigides), 128
 - recouvrement Nisnevich faible (k -variétés rigides), 57
 - recouvrement Nisnevich élémentaire, 68
 - topologie de Nisnevich, 59
- Norme, 14
 - (semi)-norme infinie, 17, 19
 - (semi)-norme de Gauss, 15
 - (semi)-norme multiplicative, valuation, 14
 - (semi)-norme résiduelle, 14
 - semi-norme, 14
- Oouvert admissible, 18, 19
- Points maximaux (d'une variété rigide), 31
- Préfaisceau \mathbb{B}^1 -local, 86
- Préfaisceau Nis-local, 73
- Préfaisceau constant A_{cst} , 75
- Préfaisceau projectivement \mathbb{B}^1 -fibrant, 85
- Préfaisceau projectivement Nis-fibrant, 84
- Préfaisceau projectivement cofibrant, 84
- Préfaisceau projectivement fibrant, 84
- Préfaisceaux avec transferts, 214, 223, 234
- Préfibres en $p \in \mathcal{P}(B)$ (préfaisceau avec transferts), 234
- Presque rationnel (ouvert affinoïde d'un B -schéma de type fini), 258
- Produit tensoriel complété $B_1 \widehat{\otimes}_A B_2$, 16
- Quasi-compacte, quasi-séparée (variété rigide), 21
- Recouvrement admissible, 18, 19
- Schéma au-dessus d'un k -affinoïde, 258
- Schéma rigide (sur k°), 126
- Semi-stable (k° -schéma formel), 52
- Surconvergent (préfaisceau), 291
- Surconvergent (préfaisceau, faisceau sur $\text{Ouv}^{\text{qc}}(X)$), 190
- Surconvergent, faiblement surconvergent, homotopiquement surconvergent (préfaisceau sur Et^{qc}/X), 198
- t -structure homotopique, 342
- Théorème de simplification (alias « cancellation theorem »), 342
- Topologie fh , 201
- Topologie t_\emptyset et t_\emptyset -faisceau, 123
- Topologiquement de type fini, topologiquement de présentation finie (k° -algèbre), 25
- Twist de Tate, 104
- Uniformisante (d'un corps muni d'une valuation discrète), 14
- Variété rigide, 19