Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Numéro 149

Nouvelle série

2 0 1 6

Raphaël BEUZART-PLESSIS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2016

Vente au numéro : 45 € ($67)
Abonnement Europe : 138 €, hors Europe : 154 € ($231)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-841-1

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

MÉMOIRES DE LA SMF 149

LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Raphaël Beuzart-Plessis

Société Mathématique de France 2016
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

R. Beuzart-Plessis
Université d'Aix-Marseille, I2M-CNRS, Campus de Luminy,
13288 Marseille CEDEX 9, France.
E-mail : rbeuzart@gmail.com

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 22E50, 11F85, 20G05.

***Mots clefs*.** — Conjecture locale de Gross-Prasad, groupes p-adiques, représentations tempérées.

LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Raphaël Beuzart-Plessis

Résumé. — Soient E/F une extension quadratique de corps p-adiques et $G = U(V)$, $H = U(W)$ les groupes unitaires de deux espaces hermitiens V et W sur E. Supposons que V contienne W et que le complémentaire orthogonal de W dans V soit quasi-déployé (ce qui signifie que son groupe unitaire est quasi-déployé sur F). Pour π et σ des représentations lisses irréductibles de $G(F)$ et $H(F)$, les auteurs Gan, Gross et Prasad ont défini une multiplicité $m(\pi, \sigma)$. Dans le cas particulier où W est de codimension 1 dans V, cette multiplicité est simplement la dimension de l'espace d'entrelacements $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$. On énonce et prouve une formule intégrale pour cette multiplicité lorsque π et σ sont tempérées. On déduit alors de cette formule une version faible de la conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires. Cet article est la continuation directe d'un travail récent de Waldspurger concernant les groupes spéciaux orthogonaux.

***Abstract.* —** Let E/F be a quadratic extension of p-adic fields and let $G = U(V)$, $H = U(W)$ be unitary groups of two hermitian spaces V and W over E. Assume that V contains W and that the orthogonal complement of W in V is an odd-dimensional quasisplit hermitian space (i.e. whose unitary group is quasisplit over F). For π and σ smooth irreducible representations of respectively $G(F)$ and $H(F)$, Gan, Gross and Prasad have defined a multiplicity $m(\pi, \sigma)$. In the particular case where W is of codimension 1 in V, this multiplicity is just the dimension of the intertwining space $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$. When π and σ are tempered, we state and prove an integral formula for this multiplicity. We then deduce from this formula a weak version of the local Gross-Prasad conjecture for tempered representations of unitary groups. This article represents a straight continuation of recent work of Waldspurger dealing with special orthogonal groups.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle et E une extension quadratique de F. Soit (V,h) un espace hermitien de dimension finie sur E. Supposons donnée une décomposition orthogonale

$$V = W \oplus^{\perp} D \oplus^{\perp} Z,$$

où D est une droite et Z est une somme de plans hyperboliques, ce qui signifie que Z admet une base $(v_i)_{i=\pm 1,\dots,\pm r}$ vérifiant $h(v_i,v_j) = \delta_{i,-j}$ pour tous $i,j = \pm 1,\dots,\pm r$. Notons G et H les groupes unitaires de V et W respectivement. Considérons le sous-groupe parabolique P de G des éléments qui conservent le drapeau de sous-espaces totalement isotropes

$$Ev_r \subset Ev_r \oplus Ev_{r-1} \subset \cdots \subset Ev_r \oplus \cdots \oplus Ev_1.$$

Soit M la composante de Levi de P des éléments qui conservent les droites Ev_i pour $i = \pm 1,\dots,\pm r$. On a un isomorphisme naturel

$$M \simeq (R_{E/F}\,\mathrm{GL}_1)^r \times G_0$$

où G_0 est le groupe unitaire de $V_0 = D \oplus W$ et $R_{E/F}$ désigne la restriction des scalaires à la Weil. Notons U le radical unipotent de P. Soit ξ un caractère de $U(F)$ invariant par conjugaison par $H(F)$ et qui est générique pour cette propriété (la définition exacte de ξ est donnée au chapitre 4). Pour (π, E_π) et (σ, E_σ) des représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ et $H(F)$ respectivement, on définit $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi,\sigma)$ comme l'espace des applications linéaires $\ell : E_\pi \to E_\sigma$ qui vérifient, pour tous $e \in E_\pi$, $h \in H(F)$, $u \in U(F)$,

$$\ell\big(\pi(hu)e\big) = \xi(u)\sigma(h)\ell(e).$$

On définit la multiplicité $m(\pi,\sigma)$ comme la dimension de cet espace ; elle ne dépend que des représentations π et σ et pas des divers choix effectués. D'après [**1**], on a toujours

$$m(\pi,\sigma) \leqslant 1.$$

La conjecture de Gross-Prasad telle qu'énoncée dans [**16**] décrit précisément les couples (π,σ) appartenant à des L-paquets génériques pour lesquels la multiplicité $m(\pi,\sigma)$ vaut 1 en terme des paramètres de Langlands de π et σ. Il existe une conjecture analogue pour les groupes spéciaux orthogonaux (qui est en fait la conjecture originelle de Gross-Prasad [**18**]).

Dans une série de quatre articles (voir [**29**], [**32**], [**30**], [**31**]), Waldspuger a récemment démontré la conjecture pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux. Cet article est le premier d'une série de trois ayant pour but d'adapter la preuve de Waldspurger au cas des groupes unitaires.

Le résultat principal ici obtenu est une certaine formule intégrale pour la multiplicité $m(\pi,\sigma)$ dans le cas où π et σ sont tempérées (cf. théorème 1 ci-dessous). Il s'agit de l'analogue pour les groupes unitaires d'une formule démontrée par Waldspurger dans [**29**] et [**32**]. Cette formule n'est malheureusement pas suffisante pour démontrer la conjecture de Gross-Prasad mais afin d'illustrer la puissance d'une telle formule, on montre à la fin (§ 18.4) comment en déduire une version affaiblie de la conjecture. La preuve complète de la conjecture de Gross-Prasad (dans le cas des représentations tempérées) fait l'objet de l'article [**13**]. Outre la formule pour la multiplicité, elle s'appuie de façon essentielle sur une formule similaire pour certains facteurs epsilon de paires démontrée dans [**12**].

Explicitons maintenant le résultat principal de cet article, c'est-à-dire la formule intégrale pour la multiplicité. On définit un ensemble $\underline{\mathcal{T}}$ de tores (en général non maximaux) de H. Ce sont les tores T obtenus de la façon suivante : on a une décomposition orthogonale $W = W' \oplus W''$ telle que les groupes unitaires de W'' et $W'' \oplus D \oplus Z$ soient quasi-déployés et T est un tore maximal anisotrope du groupe unitaire de W'.

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de représentants de $\underline{\mathcal{T}}$ pour l'action par conjugaison de $H(F)$. Soit $T \in \mathcal{T}$. On définit sur $T(F)$ trois fonctions déterminant

$$\Delta, \;\; D^H, \;\; D^G$$

qui importent peu et pour lesquelles on renvoie au corps de l'article pour des définitions précises. Plus important, si π et σ sont des représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ et $H(F)$ respectivement, on définit deux fonctions c_π et c_σ sur $T(F)$ à partir des caractères θ_π et θ_σ de π et σ. Soit $t \in T(F)$ et soit G_t le centralisateur connexe de t dans G. D'après Harish-Chandra, au voisinage de t le caractère θ_π est combinaison linéaire des transformées de Fourier des intégrales orbitales nilpotentes de $\mathfrak{g}_t(F)$ (où $\mathfrak{g}_t$ désigne l'algèbre de

Lie de G_t). Plus précisément, il existe des nombres complexes $c_{\pi,\mathcal{O}}(t)$ indexés par les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_t(F)$ et un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_t(F)$ de sorte que pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$ on ait

$$\int_{\mathfrak{g}_t(F)} \theta_\pi\big(t\exp(X)\big)\varphi(X)\,\mathrm{d}X = \sum_{\mathcal{O}} c_{\pi,\mathcal{O}}(t)\, J_{\mathcal{O}}(\widehat{\varphi}),$$

où $\widehat{\varphi}$ désigne la transformée de Fourier de φ et $J_{\mathcal{O}}$ est l'intégrale orbitale sur $\mathcal{O}$. La somme porte sur l'ensemble des orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}_t(F)$. Bien sûr les mesures et la transformée de Fourier doivent être définies précisément, on renvoie pour cela au corps de l'article. Soit $\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_t(F))$ l'ensemble des orbites nilpotentes régulières. On pose alors

$$c_\pi(t) = \frac{\sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_t(F))} c_{\pi,\mathcal{O}}(t)}{|\,\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_t(F))|}.$$

On définit de même la fonction c_σ. Posons

$$m_{\mathrm{geom}}(\pi,\sigma) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \left|W(H,T)\right|^{-1} \lim_{s\to 0^+} \int_{T(F)} c_{\sigma^\vee}(t)\, c_\pi(t)\, D^H(t)^{\frac{1}{2}}\, D^G(t)^{\frac{1}{2}}\, \Delta(t)^{s-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

où $W(H,T) = \mathrm{Norm}_{H(F)}(T)/\,\mathrm{Cent}_{H(F)}(T)$ et $\sigma^\vee$ est la représentation contragrédiente de σ. L'expression ci-dessus est bien définie (cf. lemme 5.2.2) : les intégrales sont convergentes pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ et admettent une limite lorsque s tend vers 0.

Le résultat principal de cet article est le théorème 17.1.1 dont voici un énoncé :

Théorème 1. — *Si π et σ sont tempérées, on a*

$$m(\pi,\sigma) = m_{\mathrm{geom}}(\pi,\sigma).$$

Comme expliqué précédemment, on montre au paragraphe 18.4 comment déduire du théorème 1 une version affaiblie de la conjecture de Gross-Prasad. Explicitons le résultat obtenu. Supposons G et H quasi-déployés et affectons d'un indice i tout les objets définis jusque là : G_i, H_i, V_i, W_i, etc. Il existe à isomorphisme près un unique espace hermitien V_a de même dimension que V_i mais qui ne lui est pas isomorphe. On définit de même l'espace hermitien W_a. On a encore une décomposition orthogonale $V_a = Z \oplus^\perp D \oplus^\perp W_a$. Notons G_a et H_a les groupes unitaires de V_a et W_a respectivement. Pour π et σ des représentations irréductibles lisses de $G_a(F)$ et $H_a(F)$ on définit comme ci-dessus une multiplicité $m(\pi,\sigma)$.

À la suite du travail monumental d'Arthur [**8**], la correspondance locale de Langlands pour les groupes unitaires a été récemment démontrée par Mok [**23**] dans le cas quasi-déployé, puis par Kaletha-Minguez-Shin-White [**21**] dans le cas général. Cette correspondance satisfait un certain nombre de propriétés attendues, notamment endoscopiques. On énonce plus précisément les propriétés dont on a besoin dans le paragraphe 18.1 (elles sont assez faibles). Les paramètres de Langlands pour les groupes G_i et G_a sont les mêmes.

Soient φ un tel paramètre que l'on suppose tempéré et Π_i, Π_a les L-paquets de représentations tempérées de $G_i(F)$ et $G_a(F)$ correspondants (on a éventuellement $\Pi_a = \varnothing$). Soient de même ψ un paramètre de Langlands tempéré pour les groupes H_i et H_a et Σ_i, Σ_a les L-paquets de représentations tempérées de $H_i(F)$ et $H_a(F)$ correspondants. On montre alors le théorème suivant.

Théorème 2. — *Il existe un unique couple*

$$(\pi, \sigma) \in (\Pi_i \times \Sigma_i) \sqcup (\Pi_a \times \Sigma_a)$$

tel que $m(\pi, \sigma) = 1$

Décrivons brièvement comment on déduit le théorème 2 du théorème 1, l'idée étant issue de l'article [**29**].

Considérons la somme des multiplicités $m(\pi, \sigma)$ pour (π, σ) parcourant $(\Pi_i \times \Sigma_i) \sqcup (\Pi_a \times \Sigma_a)$. On veut montrer que cette somme vaut 1. Le théorème 2 permet d'exprimer la somme sur les $(\pi, \sigma) \in \Pi_i \times \Sigma_i$ comme une somme d'intégrales sur un ensemble de tores $\mathcal{T}_i$. De même le théorème 2 exprime la somme sur les $(\pi, \sigma) \in \Pi_a \times \Sigma_a$ comme une somme d'intégrales sur un ensemble de tores $\mathcal{T}_a$. On peut regrouper ces tores suivant leurs classes de conjugaison stable. On a une notion naturelle de transfert entre les tores de $\mathcal{T}_a$ et les tores de $\mathcal{T}_i$. Plus précisément on peut transférer une classe de conjugaison stable de $\mathcal{T}_a$ en une classe de conjugaison stable de $\mathcal{T}_i$. Le transfert est injectif et presque surjectif : toutes les classes sont atteintes sauf celle du tore $\{1\} \in \mathcal{T}_i$. On peut aussi transférer les différentes fonctions qui apparaissent dans les intégrales et ce transfert fait apparaître un signe. Il se trouve que ce signe vaut -1. Ainsi dans la somme totale que l'on considère toutes les intégrales disparaissent sauf une : celle correspondant au tore $\{1\}$. Un résultat de Rodier [**24**] permet d'exprimer le terme restant en fonction du nombre de représentations génériques dans les L-paquets Π_i et Σ_i. Une des propriétés importantes des L-paquets tempérés entraîne alors que ce terme vaut 1.

La démonstration du théorème 1 est plus longue et occupe la majeure partie de l'article (§§ 5–17). Une fois encore la démonstration suit de très près celles de [**29**] et [**32**].

Une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ est dite *très cuspidale* si pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G on a

$$\forall m \in M(F), \quad \int_{U(F)} f(mu)\,\mathrm{d}u = 0$$

On définit une suite croissante exhaustive $(\Omega_N)_{N\geqslant 1}$ de compacts-ouverts de $H(F)U(F)\backslash G(F)$ et on note κ_N la fonction caractéristique de Ω_N, pour $N \geqslant 1$. Posons

$$J_N(\theta_{\sigma^\vee}, f) = \int_{H(F)U(F)\backslash G(F)} \kappa_N(g) \int_{H(F)} \theta_{\sigma^\vee}(h) \int_{U(F)} f(g^{-1}hug)\,\xi(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}g.$$

C'est l'analogue de l'expression $I_N(\theta_{\sigma^\vee}, f)$ de [**29**] et [**32**]. Lorsque f est très cuspidale, cette expression admet une limite lorsque N tend vers l'infini et comme dans la formule des traces locale d'Arthur, il y a deux façons de calculer cette limite : l'une qualifiée de géométrique, l'autre de spectrale. Le développement géométrique de la limite fait l'objet des chapitres 5–10, le développement spectral fait l'objet du chapitre 16.

Décrivons brièvement les formules obtenues. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ très cuspidale et pour toute représentation lisse irréductible σ de $H(F)$ on pose

$$J_{\mathrm{geom}}(\sigma, f) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \left|W(H,T)\right|^{-1} \lim_{s\to 0^+} \int_{T(F)} c_{\sigma^\vee}(t)\,c_f(t)\,D^H(t)^{\frac12}\,D^G(t)^{\frac12}\,\Delta(t)^{s-\frac12}\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathcal{T}$ est le même ensemble de tores que précédemment et où c_f est une fonction déduite de f à partir de ses intégrales orbitales pondérées (cf. § 1.8 et § 5.1 pour sa définition). Le développement géométrique de la limite prend alors la forme suivante (cf. théorème 5.4.1) :

Théorème 3. — *Pour tous f et σ comme ci-dessus, on a*

$$\lim_{N\to\infty} J_N(\theta_{\sigma^\vee}, f) = J_{\mathrm{geom}}(\sigma, f).$$

Passons au développement spectral. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ très cuspidale et pour toute représentation lisse irréductible σ de $H(F)$, on définit l'expression

$$J_{\mathrm{spec}}(\sigma, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{\min})} |W^L| \cdot |W^G|^{-1} (-1)^{a_L} \sum_{\substack{\mathcal{O} \in \{\Pi_{\mathrm{ell}}(L)\} \\ m(\mathcal{O},\sigma)=1}} \int_{\mathcal{O}} J_L^G(\tau, f)\, d\tau.$$

Expliquons-en les principaux ingrédients. On a fixé un sous-groupe de Levi minimal $M_{\min}$ de G et $\mathcal{L}(M_{\min})$ désigne l'ensemble des sous-groupes de Levi de G contenant $M_{\min}$. On a désigné par $\{\Pi_{\mathrm{ell}}(L)\}$ l'ensemble des orbites de représentations elliptiques de $L(F)$ sous l'action par torsion du groupe des caractères non-ramifiés de $L(F)$ (on renvoie au § 1.6 pour notre définition des représentations elliptiques). On a fixé une certaine mesure sur chacune de ces orbites (invariante sous l'action du groupe des caractères non-ramifiés) et le terme $J_L^G(\tau, .)$ désigne le caractère pondéré d'Arthur (§ 1.5). Enfin, la condition $m(\mathcal{O}, \sigma) = 1$ signifie que l'on a $m(i_L^G(\tau), \sigma) = 1$ pour presque tout $\tau \in \mathcal{O}$ (où $i_L^G(\tau)$ est l'induite unitaire parabolique de τ à $G(F)$). Le développement spectral de la limite prend alors la forme suivante (cf. théorème 16.1.2) :

Théorème 4. — *Pour tous f et σ comme ci-dessus, on a*

$$\lim_{N \to \infty} J_N(\theta_{\sigma^\vee}, f) = J_{\mathrm{spec}}(\sigma, f).$$

Remarquons que la fonction multiplicité $\pi \mapsto m(\pi, \sigma)$ apparaît de façon explicite dans le développement spectral. C'est un fait crucial pour la démonstration du théorème 1. La multiplicité apparaît lors du développement spectral au travers d'une description explicite des espaces d'entrelacements $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma)$ pour π et σ tempérées.

Plus précisément, fixons des produits scalaires invariant $(.\,,.)$ sur les espaces de π et σ (de tels produits scalaires existent car les représentations π et σ sont tempérées). On définit alors une forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\sigma}$ sur $E_\sigma \otimes E_\pi$ par

$$\mathcal{L}_{\pi,\sigma}(e' \otimes e', e \otimes e) = \lim_{c \to \infty} \int_{H(F)U(F)_c} \big(\sigma(h)e', e\big)\big(e', \pi(hu)e\big)\, \xi(u)^{-1}\, du\, dh,$$

où $(U(F)_c)_{c \geqslant 0}$ est une certaine famille croissante et exhaustive de sous-groupes ouverts de $U(F)$. On montrera que cette expression a bien un sens : pour tout $c \geqslant 0$ l'intégrale est absolument convergente ; de plus la suite de ces intégrales se stabilise pour c assez grand. Il est facile de vérifier que si cette forme est non nulle alors $m(\pi, \sigma) \neq 0$. On aura besoin de la réciproque : c'est le théorème 14.3.1. C'est au travers de cette description explicite de l'espace d'entrelacements $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma)$ que la multiplicité $m(\pi, \sigma)$ apparaît naturellement du côté spectral

Comme on l'a déjà expliqué, une grande partie de l'article consiste à montrer la double égalité

$$J_{\mathrm{geom}}(\sigma, f) = \lim_{N\to\infty} J_N(\theta_{\sigma^\vee}, f) = J_{\mathrm{spec}}(\sigma, f) \tag{1}$$

lorsque f est très cuspidale. Le théorème 1 se déduit de la formule ci-dessus. Mais il faut avant cela rendre l'égalité (1) invariante, c'est-à-dire la transformer en une égalité entre distributions invariantes. C'est l'objet du théorème 17.1.2. On suit pour cela de très près le procédé mis en place par Arthur dans [**7**] pour sa formule des traces locale. On obtient alors le théorème 2 en appliquant cette formule invariante à certains pseudo-coefficients. Signalons tout de suite que les pseudo-coefficients utilisés ne sont pas des fonctions très cuspidales mais seulement des fonctions cuspidales. Néanmoins, le lemme 1.8.1 (qui est en fait le lemme 2.7 de [**32**]), permet d'affaiblir la condition sur f pour la formule invariante : il suffit que f soit cuspidale.

Décrivons à présent brièvement le contenu de cet ouvrage.

Le chapitre 1 rassemble un certain nombre de définitions, notations et résultats qui seront utilisés par la suite. On fixe notamment les choix de mesures qui apparaissent les plus naturels pour le développement géométrique et pour le développement spectral. On rappelle aussi quelques propriétés des fonctions cuspidales et très cuspidales démontrées dans [**29**] et [**32**].

Le chapitre 2 comprend des majorations sur le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique dont on aura besoin dans le chapitre 13.

Le chapitre 3 décrit brièvement certains objets associés aux groupes unitaires : sous-groupes paraboliques, sous-groupes compacts spéciaux, R-groupes et orbites nilpotentes régulières.

Le chapitre 4 consiste principalement à définir l'expression $J_N(\theta, f)$.

Le chapitre 5 contient les définitions nécessaires à l'énoncé du développement géométrique (théorème 5.4.1).

La démonstration du théorème 5.4.1 fait l'objet des chapitres 6–10.

Le schéma de la preuve est le même que dans [**29**]. Au chapitre 6, on descend le problème à l'algèbre de Lie, dans le chapitre 7, on transforme l'expression obtenue grâce à une transformée de Fourier. Une fois effectuée cette transformation, l'expression obtenue se comporte beaucoup mieux et on montre au chapitre 8 que $J_N(\theta, f)$ admet une limite et on calcule cette limite. Le résultat principal du chapitre 9 permet de se ramener au cas où f n'a pas d'éléments unipotents dans son support. Cela permet au chapitre 10 une preuve par récurrence du théorème 5.4.1.

On montre dans les chapitres 11–13 des majorations qui seront nécessaires lors du développement spectral (chapitre 16). Ce sont les analogues des majorations 4.3 (2) à 4.3 (8) de [**32**]. Nos démonstrations sont cependant de nature différente. Dans la section 11 on montre une décomposition de Cartan relative dans le cas $r = 0$ (inspirée des résultats de [**9**], [**15**] et [**25**]). Alliée aux majorations du chapitre 2, on obtient une démonstration plus directe des résultats.

On montre au chapitre 14 que les éléments de $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma)$, pour π et σ tempérées, peuvent être calculés explicitement. Comme on l'a dit, ce résultat est nécessaire pour faire apparaître la multiplicité $m(\pi, \sigma)$ dans le développement spectral. On en donne une démonstration différente de celle de [**32**] basée sur l'existence d'une décomposition de Cartan relative ainsi que sur des éléments directement inspirés du théorème 6.4.1 de [**26**].

Au chapitre 15, on montre une certaine propriété de compatibilité entre la multiplicité $m(\pi, \sigma)$ et l'induction parabolique.

C'est au chapitre 16 que l'on énonce et démontre le développement spectral. La démonstration suit de très près celle de [**32**], à tel point que l'on s'est contenté en général d'indiquer les quelques modifications à apporter.

On donne au chapitre 17 la preuve du théorème 1. Comme on l'a dit, on utilise de façon essentielle l'égalité entre les développements géométrique et spectral. Néanmoins, il est nécessaire d'affaiblir la condition sur f et de supposer qu'il s'agit seulement d'une fonction cuspidale. Suivant un procédé d'Arthur, on transforme l'égalité précédente en une égalité entre distributions invariantes. Le lemme 1.8.1 (qui n'est que le rappel du lemme 2.7 de [**32**]) permet alors cet affaiblissement sur f.

Dans une dernière partie, le chapitre 18, on montre comment déduire de notre formule pour la multiplicité une version affaiblie de la conjecture de Gross-Prasad (théorème 2 ci-dessus) Après quelques brefs rappels sur la correspondance locale de Langlands (§ 18.1) et quelques lemmes préliminaires (§§ 18.2–18.3), le résultat est démontré au § 18.4.

Remerciements. — Cet article est une partie de ma thèse sous la direction de Jean-Loup Waldspurger. Qu'il soit chaleureusement remercié pour m'avoir proposé ce sujet si riche, pour ses indications toujours justes et clairvoyantes et pour ses relectures attentives des différentes versions préliminaires du présent article.

CHAPITRE 1

GROUPES, MESURES, NOTATIONS

1.1. Groupes

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle.

On note $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$, q_F le cardinal du corps résiduel et on fixe une uniformisante π_F.

On note val_F la valuation normalisée par $\mathrm{val}_F(\pi_F) = 1$ et $|.|_F = q_F^{-val_F}$ la valeur absolue correspondante.

On fixe ψ un caractère additif de F trivial sur $\mathcal{O}_F$ et non trivial sur $\mathfrak{p}_F^{-1}$.

Si X est un espace topologique totalement discontinu, nous noterons $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact de X dans $\mathbb{C}$.

Sauf mention explicite du contraire, tous les groupes et sous-groupes de cet article seront supposés définis sur F.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

On note A_G le plus grand tore déployé central de G, $a_G = \dim(A_G)$ et $X(G)$ le groupe des caractères algébriques de G définis sur F.

On désignera par G^1 le sous-groupe des éléments $g \in G(F)$ vérifiant

$$\left|\chi(g)\right|_F = 1 \quad \text{pour tout } \chi \in X(G).$$

On pose $\mathcal{A}_G = \mathrm{Hom}(X(G), \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_G^* = X(G) \otimes \mathbb{R}$. On définit l'application usuelle

$$H_G : G(F) \longrightarrow \mathcal{A}_G, \quad \langle H_G(g), \chi \rangle = \log\left(|\chi(g)|_F\right).$$

On note $\mathcal{A}_{G,F}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}_{G,F}$ les images par H_G de $G(F)$ et $A_G(F)$ respectivement. Ce sont des réseaux dans $\mathcal{A}_G$.

On définit $\mathscr{A}^{\vee}_{G,F}$ (resp. $\widetilde{\mathscr{A}}^{\vee}_{G,F}$) comme l'ensemble des $\lambda \in \mathscr{A}^*_G$ tels que $\lambda(\zeta)$ appartient à $2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $\zeta \in \mathscr{A}_{G,F}$ (resp. pour tout $\zeta \in \widetilde{\mathscr{A}}_{G,F}$).

On pose $i\mathscr{A}^*_{G,F} = i\mathscr{A}^*_G / i\mathscr{A}^{\vee}_{G,F}$.

Enfin, si $\mathrm{rg}(G)$ désigne le rang absolu de G, on utilisera la notation

$$\delta(G) = \dim(G) - \mathrm{rg}(G).$$

Pour $g \in G(F)$, on notera $X \mapsto gXg^{-1}$ l'action adjointe de g sur $\mathfrak{g}$.

On définit G_{ss} et $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ comme les ensembles des éléments semi-simples dans G et $\mathfrak{g}$ respectivement. On note $G_{\mathrm{reg}}, \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ les ensembles des éléments réguliers semi-simples dans G et $\mathfrak{g}$ respectivement. Pour S une partie de G, on notera $Z_G(S)$ le centralisateur de S dans G et G_S la composante connexe de l'élément neutre dans $Z_G(S)$.

Si f est une fonction sur $G(F)$ et $g \in G(F)$, on définit la fonction

$$^g f : G(F) \longrightarrow G(F), \quad ^g f(x) = f(g^{-1}xg)$$

et on définit de même $^g f$ si f est une fonction sur $\mathfrak{g}$.

Pour $x \in G_{\mathrm{ss}}(F)$ et $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}(F)$, on pose

$$D^G(x) = \left|\det\left(\mathrm{ad}(x)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}\right)\right|_F, \quad D^G(X) = \left|\det\left(\mathrm{ad}(X)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_X}\right)\right|_F.$$

On appelle *sous-groupe de Levi* de G un sous-groupe de G qui est une composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G tout deux définis sur F.

Si M est un sous-groupe de Levi de G, on note $\mathscr{F}(M)$, $\mathscr{P}(M)$ et $\mathscr{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques qui contiennent M (resp. de composante de Levi M, resp. des sous-groupes de Levi qui contiennent M).

Si P est un sous-groupe parabolique de G dont on a fixé une composant de Levi M, on notera $\overline{P}$ le sous-groupe parabolique opposé par rapport à M et δ_P le module usuel.

Fixons $P_{\min} = M_{\min} U_{\min}$ un sous-groupe parabolique minimal et K un sous-groupe compact spécial en bonne position par rapport à $M_{\min}$.

On appellera *sous-groupe parabolique standard* (resp. *anti-standard*) un sous-groupe parabolique qui contient $P_{\min}$ (resp. qui contient $\overline{P}_{\min}$) et *sous-groupe parabolique semi-standard* un sous-groupe parabolique qui contient $M_{\min}$.

Soit P est un sous-groupe parabolique semi-standard ; alors P possède une unique composante de Levi qui contient $M_{\min}$.

Lorsque l'on notera $P = MU$, on sous-entendra que M est cette composante de Levi et que U est le radical unipotent de P. On a alors la décomposition d'Iwasawa

$$G(F) = M(F)U(F)K$$

et pour $g \in G(F)$ on notera

$$g = m_P(g)u_P(g)k_P(g)$$

une décomposition de g pour laquelle on a $m_P(g) \in M(F), u_P(g) \in U(F)$ et $k_P(g) \in K$. L'application

$$G(F) \longrightarrow \mathcal{A}_M, \quad g \longmapsto H_M\big(m_P(g)\big)$$

est bien définie, on la note H_P.

Pour $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard, on notera

$$W^M = \mathrm{Norm}_{M(F)}(M_{\min})/M_{\min}(F)$$

le groupe de Weyl de M et $W(M) = \mathrm{Norm}_{G(F)}(M)/M(F)$.

On désignera par $\mathcal{T}(G)$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble des tores maximaux de G.

On notera Ξ^G la fonction de Harish-Chandra [**28**] sur $G(F)$.

Cette fonction dépend du choix d'un sous-groupe parabolique minimal de G et d'un sous-groupe compact spécial en bonne position. Changer de choix remplace Ξ^G par une fonction équivalente. Puisque Ξ^G ne sera utilisée que pour des questions de majorations, ces choix n'importent pas.

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation algébrique fidèle de G. Fixons une norme $\|\,.\,\|$ sur V. On en déduit une norme, aussi notée $\|\,.\,\|$, sur l'espace des endomorphismes de V. Pour $g \in G(F)$ on pose

$$\sigma(g) = \sup\Big(1, \log\big(\|g\|\big), \log\big(\|g^{-1}\|\big)\Big).$$

On a alors, pour tous $g, g' \in G(F)$,

$$\sigma(gg') \leqslant \sigma(g) + \sigma(g') \leqslant 2\sigma(g)\sigma(g').$$

Soit $b > 0$ un réel. On note $\mathbf{1}_{\sigma > b}$ et $\mathbf{1}_{\sigma \leqslant b}$ les fonctions caractéristiques de l'ensemble des $g \in G(F)$ vérifiant $\sigma(g) > b$ et $\sigma(g) \leqslant b$ respectivement. On adoptera la notation commode mais imprécise suivante : si F_1 et F_2 sont deux fonctions à valeurs réelles positives dépendant de paramètres $x_1, \dots, x_N$, on écrira

$$F_1(x_1, \dots, x_N) \ll F_2(x_1, \dots, x_N)$$

pour signifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$F_1(x_1, \dots, x_N) \leqslant CF_2(x_1, \dots, x_N)$$

pour toutes valeurs des paramètres $x_1, \dots, x_N$. On dira alors que F_1 est *essentiellement majorée* par F_2.

Soit $\mathcal{S}(G(F))$ l'espace des fonctions de Schwartz-Harish-Chandra sur $G(F)$. C'est l'espace des fonctions $f : G(F) \to \mathbb{C}$ qui sont bi-invariantes par un sous-groupe compact-ouvert de $G(F)$ et qui vérifient pour tout $D \in \mathbb{R}$ la majoration

$$\left|f(g)\right| \ll \Xi(g)\,\sigma(g)^{-D} \qquad \bigl(g \in G(F)\bigr).$$

Soit π une représentation admissible de $G(F)$. On notera alors E_π un espace vectoriel sur lequel π se réalise. Si π est unitaire, on note $(.\,,.)$ une forme hermitienne définie positive $G(F)$-invariante. Nous dirons que π est *tempérée* si elle est unitaire, de longueur finie et qu'il existe un réel D tel que pour tous $e, e' \in E_\pi$ on ait

$$\left|(e', \pi(g)e)\right| \ll \Xi(g)\,\sigma(g)^{D}$$

pour tout $g \in G(F)$. Si π est tempérée et si $G(F)$ est muni d'une mesure de Haar, l'action de $C_c^\infty(G(F))$ sur E_π s'étend en une action continue de $\mathcal{S}(G(F))$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(G(F))$ et tous $e, e' \in E_\pi$ on a alors

$$\bigl(\pi(f)e, e'\bigr) = \int_{G(F)} f(g)\bigl(\pi(g)e, e'\bigr)\,\mathrm{d}g.$$

On fixe jusqu'au § 2.4 inclus un groupe réductif connexe G ainsi qu'un sous-groupe parabolique minimal $P_{\min} = M_{\min} U_{\min}$ et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position par rapport à $M_{\min}$.

1.2. Mesures

Le développement géométrique (théorème 5.4.1) ne dépend que du choix de mesures sur certains tores anisotropes et le développement spectral (théorème 16.1.2) ne dépend que du choix de mesures sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ où L est un sous-groupe de Levi semi-standard de G. Néanmoins, les preuves font intervenir des mesures sur d'autres groupes et les choix naturels varient.

Pour le développement géométrique (chapitres 5–10), on normalisera les mesures comme suit. Fixons une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $G(F)$-invariante $\langle .\,,. \rangle$ sur $\mathfrak{g}(F)$. Ceci permet de définir sur $\mathfrak{g}(F)$ une transformée de Fourier. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on pose

$$\widehat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\,\psi\bigl(\langle Y, X\rangle\bigr)\,\mathrm{d}Y,$$

où $\mathrm{d}Y$ est la mesure de Haar autoduale sur $\mathfrak{g}(F)$ c'est-à-dire telle que

$$\widehat{\widehat{f}}(X) = f(-X).$$

De la même façon un sous-espace de $\mathfrak{g}(F)$ pour lequel la restriction de $\langle .,. \rangle$ est non dégénérée est naturellement muni d'une mesure autoduale. On équipe les sous-espaces de $\mathfrak{g}(F)$ pour lesquels la restriction de $\langle .,. \rangle$ est dégénérée d'une mesure de Haar quelconque. Si H est un sous-groupe algébrique de G on munit $H(F)$ d'une mesure de Haar en relevant celle fixée sur $\mathfrak{h}(F)$ par l'exponentielle. Enfin on munira les sous-groupes compacts de $G(F)$ qui ne sont pas de façon évidente le groupe des F-points d'un sous-groupe algébrique de G de la mesure de Haar de masse totale 1.

Soit $T \subset G$ un tore. On définit une deuxième mesure de Haar $\mathrm{d}_c t$ sur $T(F)$ de la façon suivante : si T est déployé, c'est la mesure qui donne au sous-groupe compact maximal de $T(F)$ la mesure 1 ; dans le cas général, $\mathrm{d}_c t$ est compatible avec la mesure que l'on vient de définir sur $A_T(F)$ et $T(F)/A_T(F)$ est de mesure 1 pour $\mathrm{d}_c t$.

On note $\nu(T)$ l'unique réel positif tel que $\mathrm{d}_c t = \nu(T)\mathrm{d}t$.

On note $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}(F)$.

Soit $\mathcal{O}$ une telle orbite. Pour $X \in \mathcal{O}$, la forme bilinéaire $(Y,Z) \mapsto \langle X, [Y,Z] \rangle$ sur $\mathfrak{g}(F)$ se descend en une forme symplectique non dégénérée sur $\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_X(F)$, c'est-à-dire sur l'espace tangent à $\mathcal{O}$ au point X. Ainsi $\mathcal{O}$ est muni d'une structure de variété F analytique symplectique et on en déduit une mesure autoduale sur $\mathcal{O}$ (qui dépend du caractère ψ). Cette mesure est invariante par l'action de $G(F)$.

La normalisation des mesures lors du développement spectral (chapitre 16) sera la suivante. Rappelons que l'on a fixé $P_{\min} = M_{\min} U_{\min}$ un sous-groupe parabolique minimal de G et K un sous-groupe compact spécial en bonne position par rapport à $A_{M_{\min}}$. On choisit sur K la mesure de Haar de masse totale 1 et sur $G(F)$ une mesure de Haar quelconque. Pour tout sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G, on choisit sur $U(F)$ l'unique mesure de Haar vérifiant

$$\int_{U(F)} \delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(u)\big)\mathrm{d}u = 1.$$

Il existe alors une unique mesure de Haar $\mathrm{d}m$ sur $M(F)$ qui vérifie

$$\int_{G(F)} f(g)dg = \int_{M(F)} \int_{U(F)} \int_K f(muk)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m$$

pour tout $f \in C_c^\infty(G(F))$. Et la mesure $\mathrm{d}m$ ne dépend pas du choix de P dans $\mathcal{P}(M)$. Les réseaux $i\mathcal{A}_{M,F}^\vee$ et $i\widetilde{\mathcal{A}}_{M,F}^\vee$ sont munis des mesures de comptage. On munit $i\mathcal{A}_M^*$ de la mesure de Haar qui donne à $i\mathcal{A}_M^*/i\widetilde{\mathcal{A}}_{M,F}^\vee$ la mesure 1 et $i\mathcal{A}_{M,F}^*$ de la mesure quotient.

On utilisera ainsi la première normalisation des mesures pour toutes les définitions « géométriques » (§ 1.4) et la deuxième normalisation pour toutes les définitions « spectrales » (§§ 1.5–1.8).

1.3. Bons voisinages

Soit $x \in G(F)$ un élément semi-simple. On reprend la définition de la notion de bon voisinage de $\mathfrak{g}_x(F)$ donnée dans [**29**, 3.1]. C'est un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$ qui est $Z_G(x)(F)$-invariant, compact modulo conjugaison sur lequel l'exponentielle est définie et qui vérifie les conditions 1–7 de [**29**, 3.1].

Soient f une fonction sur G et ω un bon voisinage de $\mathfrak{g}_x(F)$. On note $f_{x,\omega}$ la fonction sur $\mathfrak{g}_x(F)$ définie par

$$f_{x,\omega}(X) = \begin{cases} f\big(x\exp(X)\big) & \text{si } X \in \omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.4. Intégrales orbitales invariantes et pondérées, quasi-caractères

Pour $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, on définit pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ l'*intégrale orbitale*

$$J_G(X, f) = D^G(X)^{\frac{1}{2}} \int_{G_X(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}Xg)\,\mathrm{d}g.$$

D'après Harish-Chandra, il existe une unique fonction localement intégrable

$$\widehat{\jmath} : \mathfrak{g}(F) \times \mathfrak{g}(F) \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui est localement constante sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F) \times \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ et vérifie la condition suivante : pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, on a

$$J_G(X, \widehat{f}\,) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\,\widehat{\jmath}(X, Y)\,\mathrm{d}Y.$$

Soient M un Levi de G et $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$. Pour $Y \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, fixons un ensemble de représentants $(Y_i)_{i=1,\dots,r}$ des classes de conjugaison par $M(F)$ de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{m}(F)$ qui sont conjugués à Y par un élément de $G(F)$. On a alors l'égalité (cf. la formule 2.6 (5) de [**29**])

$$\widehat{\jmath}^G(X, Y) D^G(Y)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{r} \widehat{\jmath}^M(X, Y_i) D^M(Y_i)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Pour $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g})$, on définit l'intégrale orbitale nilpotente

$$J_{\mathcal{O}}(f) = \int_{\mathcal{O}} f(X)\,\mathrm{d}X$$

pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, où on intègre pour la mesure $G(F)$-invariante sur $\mathcal{O}$ fixée en 1.2. On définit la transformée de Fourier de la distribution précédente par

$$\widehat{J}_{\mathcal{O}}(f) = J_{\mathcal{O}}(\widehat{f})$$

pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. D'après Harish-Chandra, $\widehat{J}_{\mathcal{O}}$ est représentable par une fonction $Y \mapsto \widehat{j}(\mathcal{O}, Y)$ localement intégrable sur $\mathfrak{g}(F)$ et localement constante sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$. Pour $\lambda \in F^\times$, définissons

$$f^\lambda(X) = f(\lambda X).$$

Pour tout $\lambda \in F^\times$, on a

$$J_{\mathcal{O}}(f^\lambda) = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O})} J_{\lambda\mathcal{O}}(f)$$

Rappelons que $\lambda\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pour tout $\lambda \in F^{\times,2}$. Par transformée de Fourier, on en déduit pour tout $\lambda \in F^\times$ et tout $Y \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ l'égalité

$$\widehat{j}(\mathcal{O}, \lambda Y) = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O})} \widehat{j}(\lambda\mathcal{O}, Y).$$

Pour toute orbite $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g})$, on note $\Gamma_{\mathcal{O}}$ le germe de Shalika associé à $\mathcal{O}$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, il existe donc un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$ de sorte que l'on ait

$$J_G(X, f) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g})} \Gamma_{\mathcal{O}}(X) J_{\mathcal{O}}(f)$$

pour tout $X \in \omega \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$. Les germes de Shalika vérifient pour toute $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g})$ et tous $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, $\lambda \in F^\times$ la condition d'homogénéité

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(\lambda X) = |\lambda|_F^{\frac{1}{2}(\delta(G) - \dim(\mathcal{O}))} \Gamma_{\lambda\mathcal{O}}(X).$$

Soit M un Levi semi-standard de G. Pour tout $g \in G(F)$ la famille $(H_P(g))_{P \in \mathcal{P}(M)}$ est (G, M)-orthogonale positive. D'après Arthur [**2**], on peut donc lui associer un nombre $v_M(g)$. Il faut pour cela avoir fixé une mesure sur $\mathcal{A}_M^G$, choix qui a été effectué au § 1.2. La fonction $g \mapsto v_M(g)$ est invariante à gauche par $M(F)$ et à droite par K. Remarquons qu'elle ne dépend pas seulement de M mais aussi du choix du sous-groupe compact spécial K en bonne position par rapport à M. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $x \in M(F) \cap G_{\mathrm{reg}}(F)$, on définit l'intégrale orbitale pondérée de f en x par

$$J_M(x, f) = D^G(x)^{\frac{1}{2}} \int_{G_x(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg) v_M(g)\, dg.$$

Un *quasi-caractère* sur $G(F)$ est une fonction $\theta : G(F) \to \mathbb{C}$ définie presque partout, invariante par conjugaison et telle que pour tout $x \in G_{\mathrm{ss}}(F)$, il existe un bon voisinage ω de $\mathfrak{g}_x(F)$ et des coefficients $c_{\mathcal{O},\theta}(x)$ pour $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_x)$ vérifiant, pour presque tout $X \in \omega$,

$$\theta\big(x \exp(X)\big) = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_x)} c_{\mathcal{O},\theta}(x)\,\widehat{j}(\mathcal{O}, X).$$

1.5. Représentations, induites paraboliques, opérateurs d'entrelacements, caractères pondérés

Toutes les représentations sont supposées lisses. On adopte les notations suivantes : $\mathrm{Irr}(G)$, $\mathrm{Temp}(G)$, $\Pi_2(G)$ et $\Pi_{\mathrm{ell}}(G)$ désignent respectivement l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles, irréductibles tempérées, irréductibles de la série discrète et irréductibles elliptiques de $G(F)$.

Si $P = MU$ est un sous-groupe parabolique de G et τ est une représentation de $M(F)$ on notera $i_P^G(\tau)$ l'induite normalisée de τ à G. Elle se réalise sur l'espace $E_{P,\tau}^G$ des fonctions $\varphi : G(F) \to E_\tau$ localement constantes qui vérifient

$$\varphi(mug) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\tau(m) f(g)$$

pour tous $m \in M(F), u \in U(F)$ et $g \in G(F)$, le groupe $G(F)$ agissant par translation à droite. Pour $g \in G(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$, on note $i_P^G(\tau, g)$ et $i_P^G(\tau, f)$ les opérateurs linéaires définis par les actions de g et f sur $E_{P,\tau}^G$.

Pour π une représentation de $G(F)$ et $\lambda \in \mathcal{A}_G^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}/i\mathcal{A}_{G,F}^\vee$, on note π_λ la représentation suivante de $G(F)$: son espace est le même que celui de π et, pour tout $g \in G(F)$, on a

$$\pi_\lambda(g) = e^{\langle H_G(g),\lambda\rangle}\pi(g).$$

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et τ une représentation de $M(F)$. On note $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ l'espace des fonctions $\varphi : K \to E_\tau$ qui vérifient

$$\varphi(muk) = \tau(m)\varphi(k)$$

pour tous $m \in M(F) \cap K, u \in U(F) \cap K$ et $k \in K$. Les représentations $i_P^G(\tau_\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{A}_M^* \otimes \mathbb{C}$ se réalisent toutes sur l'espace $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ via l'isomorphisme qui à une fonction $\varphi \in E_{P,\tau_\lambda}^G$ associe sa restriction à K. Si τ est unitaire, on munit $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ d'un produit scalaire invariant pour la représentation $i_P^G(\tau_\lambda)$ pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}_{M,F}^*$ par la formule

$$(e, e') = \int_K \big(e(k), e'(k)\big)\,\mathrm{d}k.$$

Pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in \mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on peut définir des opérateurs d'entrelacements

$$J_{P'|P}(\tau_\lambda) : E^G_{P,\tau_\lambda} \longrightarrow E^G_{P',\tau_\lambda}.$$

Quand la partie réelle de λ est dans un certain cône, on a

$$(J_{P'|P}(\tau_\lambda)e)(g) = \int_{(U'(F)\cap U(F))\backslash U'(F)} e(u'g).\,\mathrm{d}u'$$

La fonction $\lambda \mapsto J_{P'|P}(\tau_\lambda)$ à valeurs dans l'espace des opérateurs $\mathcal{K}^G_{P,\tau} \to \mathcal{K}^G_{P',\tau}$ admet un prolongement méromorphe à $\mathcal{A}_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Si τ est irréductible, pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ l'opérateur

$$J_{P|\overline{P}}(\tau_\lambda)J_{\overline{P}|P}(\tau_\lambda)$$

est scalaire. On note $j(\tau_\lambda)$ ce scalaire ; il ne dépend pas du choix de P.

On peut normaliser les opérateurs d'entrelacements : il existe des facteurs $r_{P'|P}(\tau_\lambda)$ tels que les opérateurs

$$R_{P'|P}(\tau_\lambda) = r_{P'|P}(\tau_\lambda)^{-1} J_{P'|P}(\tau_\lambda)$$

vérifient les conditions du théorème 2.1 de [**5**]. En particulier, ces opérateurs normalisés ont les propriétés suivantes :

▹ Pour tous $P, P', P'' \in \mathcal{P}(M)$, on a $R_{P''|P'}(\tau_\lambda)R_{P'|P}(\tau_\lambda) = R_{P''|P}(\tau_\lambda)$

▹ Si τ est tempérée, les fonctions $\lambda \mapsto R_{P'|P}(\tau_\lambda)$ sont holomorphes en tout point de $i\mathcal{A}^*_{M,F}$ et pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, l'adjoint de $R_{P'|P}(\tau_\lambda)$ est $R_{P|P'}(\tau_\lambda)$

La définition des opérateurs d'entrelacements normalisés s'étend au cas où τ est semi-simple. Soit τ une représentation tempérée d'un sous-groupe de Levi semi-standard M de G. Fixons $P \in \mathcal{P}(M)$; pour tout $P' \in \mathcal{P}(M)$ et pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, posons

$$\mathcal{R}_{P'}(\tau, \lambda) = R_{P|P'}(\tau)R_{P'|P}(\tau_\lambda)$$

C'est un endomorphisme de $\mathcal{K}^G_{P,\tau}$. La famille $(\mathcal{R}_{P'}(\tau, .))_{P'\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G, M)-famille à valeurs opérateurs (voir [**2**, §7]). On peut donc suivant Arthur lui associer un opérateur que l'on note $\mathcal{R}_M(\tau)$.

Le caractère pondéré de la représentation τ est la distribution $f \mapsto J^G_M(\tau, f)$ qui à $f \in C^\infty_c(G(F))$ associe la trace de l'opérateur $i^G_P(\tau, f)\mathcal{R}_M(\tau)$ agissant sur $\mathcal{K}^G_{P,\tau}$. Cette distribution ne dépend en fait pas du sous-groupe parabolique P que l'on a fixé (elle dépend en revanche du sous-groupe compact spécial K que l'on a fixé). Dans le cas où $M = G$ on notera simplement

$$\theta_\tau(f) = J^G_G(\tau, f),$$

c'est le caractère usuel de τ.

1.6. R-groupes

On utilisera la théorie des R-groupes telle qu'elle est exposée dans [**32**, 1.5]. Soient M un Levi semi-standard de G et $\tau \in \Pi_2(M)$. Pour $g \in G(F)$, on définit la représentation $g\tau$ de $gM(F)g^{-1}$ par

$$(g\tau)(gmg^{-1}) = \tau(m)$$

($g\tau$ agit donc sur le même espace que τ).

Notons $\mathrm{Norm}_{G(F)}(\tau)$ l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que

$$gM(F)g^{-1} = M(F) \quad \text{et} \quad g\tau \simeq \tau.$$

On pose $W(\tau) = \mathrm{Norm}_{G(F)}(\tau)/M(F)$.

Supposons, cela simplifie la théorie, que τ se prolonge en une représentation τ^N de $\mathrm{Norm}_{G(F)}(\tau)$. Nous verrons (§ 3.1) que cette hypothèse est toujours vérifiée dans le cas des groupes unitaires. Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et $w \in W(\tau)$, on définit un homomorphisme

$$A_P(w) : i^G_{w^{-1}Pw}(w^{-1}\tau) \longrightarrow i^G_P(\tau), \quad e \longmapsto \tau^N(w)e(w^{-1}.)$$

et un endomorphisme

$$R_P(w,\tau) : i^G_P(\tau) \longrightarrow i^G_P(\tau)$$

par la formule

$$R_P(w,\tau) = A_P(w)R_{w^{-1}Pw|P}(\tau).$$

C'est un opérateur unitaire. Notons $W'(\tau)$ le sous-groupe des $w \in W(\tau)$ tels que $R_P(w,\tau)$ soit une homothétie. On pose

$$R(\tau) = W(\tau)/W'(\tau).$$

On peut toujours relever $R(\tau)$ en un sous-groupe de $W(\tau)$ (ce que l'on fera) de sorte que l'on a

$$W(\tau) = W'(\tau) \rtimes R(\tau).$$

Supposons de plus le groupe $R(\tau)$ abélien (une fois encore cette hypothèse est toujours vérifiée pour les groupes unitaires, cf. § 3.1). On a alors une décomposition en représentations irréductibles

$$i^G_P(\tau) = \bigoplus_{\zeta \in R(\tau)^\vee} i^G_P(\tau,\zeta)$$

où $R(\tau)^\vee$ désigne le dual du groupe abélien $R(\tau)$ et $i^G_P(\tau,\zeta)$ est la sous-représentation de $i^G_P(\tau)$ où $R_P(w,\tau)$ agit comme $\zeta(w)$ pour tout $w \in R(\tau)$.

Notons $W(M)_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments de $W(M)$ qui agissent sans point fixe sur $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$. On dira qu'une représentation $i^G_P(\tau,\zeta)$ comme ci-dessus est *elliptique* si $R(\tau) \cap W(M)_{\mathrm{reg}} \neq \varnothing$. Lorsque cette condition est vérifiée, on a de plus $W'(\tau) = \{1\}$. On obtient ainsi toutes les représentations irréductibles elliptiques de $G(F)$.

1.7. Formule de Plancherel-Harish-Chandra

Pour tout $M \in \mathcal{L}(M_{\min})$, on fixe un élément $P \in \mathcal{P}(L)$. Notons $\{\Pi_2(M)\}$ l'ensemble des orbites de $\Pi_2(M)$ pour l'action de $i\mathcal{A}^*_{M,F}$. Pour chaque orbite $\mathcal{O}$, fixons un élément τ de cette orbite. Notons $i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}$ le stabilisateur de τ dans $i\mathcal{A}^*_M$. Pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$ on pose

$$m(\tau_\lambda) = j(\tau_\lambda)^{-1} d(\tau),$$

où $d(\tau)$ désigne le degré formel de τ. Pour tout $f \in \mathcal{S}(G(F))$ et tout $g \in G(F)$, on a alors

$$f(g) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_{\min})} |W^M| \cdot |W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(M)\}} [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{M,F}]^{-1} \int_{i\mathcal{A}^*_{M,F}} m(\tau_\lambda) \operatorname{Tr}\big(i_P^G(\tau_\lambda, g^{-1}) i_P^G(\tau_\lambda, f)\big)\, \mathrm{d}\lambda.$$

C'est la formule de Plancherel-Harish-Chandra et c'est le théorème VIII.1.1 de [**28**].

Soit K_f un sous-groupe compact-ouvert de $G(F)$ tel que f soit bi-invariante par K_f. Dans la formule précédente, seules interviennent de façon non nulle les orbites $\mathcal{O}$ pour lesquelles une représentation $i_P^G(\tau_\lambda)$ admet des invariants non nuls par K_f. Ces orbites sont en nombre fini.

Fixons $P = MU \in \mathcal{F}(M_{\min})$ et une représentation τ de $M(F)$ irréductible et de la série discrète. Pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, notons

$$\pi_\lambda = i_P^G(\tau_\lambda).$$

Soit φ une fonction C^∞ sur $i\mathcal{A}^*_{M,F}$ et $e, e' \in \mathcal{K}^G_{P,\tau}$. Posons

$$f_{e,e',\varphi}(g) = \int_{i\mathcal{A}^*_{M,F}} \varphi(\lambda) m(\tau_\lambda) \big(\pi_\lambda(g) e', e\big) \mathrm{d}\lambda$$

pour tout $g \in G(F)$. Cette fonction appartient à $\mathcal{S}(G(F))$. Identifions tout élément de $W(M)$ à un représentant dans $K \cap \mathrm{Norm}_{G(F)}(M)$. Notons $\mathcal{E}(\tau)$ l'ensemble des couples $(w, \mu) \in W(M) \times i\mathcal{A}^*_{M,F}$ tels que $w^{-1}\tau \simeq \tau_\mu$. Pour

$(w,\mu)\in\mathcal{E}(\tau)$, fixons un automorphisme unitaire $\tau(w,\mu)$ de E_τ tel que, pour tout $m\in M(F)$,

$$\tau(w,\mu)\,\tau_\mu(m)=(w^{-1}\tau)(m)\,\tau(w,\mu).$$

Définissons l'homomorphisme

$$A(w,\mu):\mathcal{K}^G_{w^{-1}Pw,\tau}\longrightarrow\mathcal{K}^G_{P,\tau},\quad \big(A(w,\mu)e\big)(g)=\tau(w,\mu)\,e(w^{-1}g).$$

Pour $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{M,F}$, définissons l'endomorphisme $R(w,\mu,\lambda)$ de $\mathcal{K}^G_{P,\tau}$ par

$$R(w,\mu,\lambda)=A(w,\mu)\,R_{w^{-1}Pw|P}(\tau_{\lambda+\mu}).$$

Il vérifie la relation d'entrelacement

$$R(w,\mu,\lambda)\,\pi_{\lambda+\mu}(g)=\pi_{w\lambda}(g)\,R(w,\mu,\lambda).$$

Soient $e_0,e_0'\in\mathcal{K}^G_{P,\tau}$. Alors on a l'égalité (cf. proposition VII.2 de [**28**])

(1) $$\int_{G(F)} f_{e,e',\varphi}(g)\big(e_0',\pi_\lambda(g)e_0\big)\,\mathrm{d}g \\ =\sum_{(w,\mu)\in\mathcal{E}(\tau)}\varphi(\mu+w^{-1}\lambda)\big(R(w,\mu,w^{-1}\lambda)e',e_0\big)\big(e_0',R(w,\mu,w^{-1}\lambda)e\big).$$

On en déduit le point suivant.

(2) *Si le support de φ vérifie la condition*

Pour tout $(w,\mu)\in\mathcal{E}(\tau)$, $\mu\in\mathrm{Supp}(\varphi)$ entraîne $\mu=0$,

alors on a (cf. [**32**, 1.6 (1)]*), avec les notations du paragraphe précédent,*

$$\int_{G(F)} f_{e,e',\varphi}(g)(e_0',\pi_0(g)e_0)\,\mathrm{d}g \\ =\big|W'(\tau)\big|\,\varphi(0)\sum_{w\in R(\tau)}\big(R_P(w,\tau)e',e_0\big)\big(e_0',R_P(w,\tau)e\big).$$

On aura aussi besoin de la formule suivante

(3) *Soient $\varphi,\psi\in C^\infty_c\in C^\infty_c(i\mathcal{A}^*_{M,F})$. Supposons que les supports de φ et ψ vérifient*

$$(w^{-1}\,\mathrm{Supp}(\psi)+\mu)\cap\mathrm{Supp}(\varphi)=\varnothing$$

pour tout $(w,\mu)\in\mathcal{E}(\tau)-\{(\mathrm{Id},0)\}$. Alors on a l'égalité

$$\int_{G(F)} f_{e_0,e_0',\varphi}(g_1gg_2)\overline{f_{e_1,e_1',\psi}(g)}\,\mathrm{d}g \\ =\int_{i\mathcal{A}^*_{M,F}} m(\tau_\lambda)\,\varphi(\lambda)\,\overline{\psi}(\lambda)\big(\pi_\lambda(g_2)e_0',e_1'\big)\big(\pi_\lambda(g_1)e_1,e_0\big)\,\mathrm{d}\lambda$$

pour tous $e_0,e_0',e_1,e_1'\in\mathcal{K}^G_{P,\tau}$ et pour tous $g_1,g_2\in G(F)$.

Après une permutation d'intégrales, l'égalité (3) découle de l'égalité (1) et de l'hypothèse faite sur $\mathrm{Supp}(\varphi)$.

1.8. Fonctions cuspidales et très cuspidales, quasi-caractères associés

Une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ est dite *très cuspidale* si elle vérifie

$$\int_{U(F)} f(mu)\,\mathrm{d}u = 0$$

pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G et tout $m \in M(F)$. On définit de façon analogue la notion de fonction très cuspidale sur l'algèbre de Lie.

Une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ est dite *cuspidale* si pour tout sous-groupe de Levi propre M de G et tout $x \in M(F) \cap G_{\mathrm{reg}}(F)$, on a

$$\int_{G_x(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}xg)\,\mathrm{d}g = 0.$$

Cette condition est équivalente à ce que $\theta_\pi(f) = 0$ pour toute représentation π de $G(F)$ qui est tempérée et proprement induite. Toute fonction très cuspidale est cuspidale. On a le résultat suivant.

Lemme 1.8.1. — *Si $f \in C_c^\infty(G(F))$ est une fonction cuspidale, il existe une fonction très cuspidale $f' \in C_c^\infty(G(F))$ ayant la propriété suivante : pour toute distribution invariante D sur $C_c^\infty(G(F))$, on a $D(f') = 0$ si et seulement si $D(f) = 0$.*

Démonstration. — C'est le lemme 2.7 de [**32**]. □

Il est possible d'associer à une fonction très cuspidale f un quasi-caractère θ_f défini à partir des intégrales orbitales pondérées de f. Pour $x \in G(F)$, notons $M(x)$ le centralisateur de A_{G_x} dans G. Soient $x \in G(F)$ et $y \in G(F)$ tels que $yM(x)y^{-1}$ soit semi-standard. On pose alors

$$\theta_f(x) = (-1)^{a_{M(x)}-a_G} D^G(x)^{-\frac{1}{2}} \nu(G_x)^{-1} J_{yM(x)y^{-1}}(yxy^{-1}, f).$$

Cf. le lemme 5.2 de [**29**] pour la preuve que cette définition ne dépend pas du choix de y et les paragraphes suivants pour la preuve qu'il s'agit d'un quasi-caractère.

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. Waldspurger [**32**, § 2.4] définit une fonction $I\theta_f$ localement constante et invariante par conjugaison sur $G_{\mathrm{reg}}(F)$. Cette fonction est définie à partir des intégrales orbitales pondérées invariantes d'Arthur.

Pour tout $x \in G_{\mathrm{reg}}(F)$, la distribution $f \mapsto I\theta_f(x)$ est invariante. D'après le lemme 2.5 de [**32**], si f est cuspidale, $I\theta_f$ est un quasi-caractère. Si f est très cuspidale, on dispose donc de deux quasi-caractères θ_f et $I\theta_f$ construits à partir de f. Le lemme 2.6 de [**32**] compare ces deux quasi-caractères. Avant de l'énoncer, il faut rappeler un résultat d'Arthur.

Pour $Z \in \mathcal{A}_{G,F}$, notons $\mathbf{1}_{H_G=Z}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $x \in G(F)$ qui vérifie $H_G(x) = Z$.

Soit $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(G(F))$ l'espace des fonctions $f : G(F) \to \mathbb{C}$ qui vérifient :

- ▹ f est bi-invariante par un sous-groupe compact-ouvert de $G(F)$;
- ▹ pour tout $Z \in \mathcal{A}_{G,F}$, la fonction $f\mathbf{1}_{H_G=Z}$ est à support compact.

Soient $L \in \mathcal{L}(M_{\min})$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$. Arthur montre qu'il existe une fonction $\phi_L(f) \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(L(F))$ telle que, pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Temp}(L)$ et tout $Z \in \mathcal{A}_{L,F}$, on ait l'égalité

$$(1) \qquad \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} J_L(\pi_\lambda, f)\exp\big(-\lambda(Z)\big)\,\mathrm{d}\lambda = \mathrm{mes}(i\mathcal{A}^*_{L,F})\,\theta_\pi\big(\phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=Z}\big).$$

On dira qu'une fonction $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(G(F))$ est *cuspidale* si pour tout $Z \in \mathcal{A}_{G,F}$, la fonction $f\mathbf{1}_{H_G=Z}$ est cuspidale.

Pour $f \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(G(F))$, on définit la fonction $I\theta_f$ par

$$I\theta_f(x) = I\theta_{f\mathbf{1}_{H_G=H_G(x)}}(x) \quad \text{pour tout } x \in G_{\mathrm{reg}}(F)$$

Si f est cuspidale, la fonction $I\theta_f$ est toujours un quasi-caractère. Pour L un sous-groupe de Levi de G et θ un quasi-caractère de $L(F)$, on sait définir un quasi-caractère induit $\mathrm{Ind}_L^G(\theta)$: c'est l'induction de L à G de la distribution invariante sur $L(F)$ définie par θ (cf. le paragraphe 2.3 de [**32**]). Le lemme 2.6 de [**32**] est alors le suivant.

Lemme 1.8.2. — *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Alors :*

(i) *pour tout $L \in \mathcal{L}(M_{\min})$, la fonction $\phi_L(f)$ est cuspidale ;*

(ii) *on a l'égalité*

$$\theta_f = \sum_{L\in\mathcal{L}(M_{\min})} |W^L|\cdot|W^G|^{-1}(-1)^{a_L-a_G}\,\mathrm{Ind}_L^G(I\theta^L_{\phi_L(f)}).$$

CHAPITRE 2

MAJORATIONS UNIPOTENTES

Soit G un groupe réductif sur F. On conserve les notations déjà fixées. En particulier, $P_{\min} = M_{\min}U_{\min}$ est un sous-groupe parabolique minimal et K est un sous-groupe compact spécial en bonne position par rapport à $M_{\min}$. On notera $A_{\min}$ la composante déployée du centre de $M_{\min}$.

2.1. Une première majoration

Proposition 2.1.1. — *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G. Pour tout entier d, il existe un entier d' tel que, pour tout $m \in M(F)$,*

$$\int_{U(F)} \Xi^G(mu)^2\sigma(mu)^d \,\mathrm{d}u \ll \Xi^M(m)^2\sigma(m)^{d'}.$$

Démonstration. — On ne nuit pas à la généralité en supposant que P est anti-standard. On va d'abord montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$ il existe un entier $d' \in \mathbb{N}$ de sorte que, pour tout $m \in M(F)$,

$$\int_{U(F)} \Xi^G(mu)^2\sigma(mu)^d \,\mathrm{d}u \ll \sigma(m)^{d'}\Xi^M(m)^2\delta_{\overline{P}}(m). \tag{1}$$

Soit $M_{\min}^{M,+}$ le sous-ensemble de $M_{\min}(F)$ des éléments en position positive pour $P_{\min} \cap M$. D'après Bruhat-Tits, il existe un sous-groupe compact-ouvert $K_M \subset M(F)$ tel que

$$M(F) = K_M M_{\min}^{M,+} K_M.$$

Il suffit donc d'établir (1) pour $m \in M_{\min}^{M,+}$.

D'après [**28**, lemme II.4.4], il existe un entier $D \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Xi^G(mu) \ll \delta_{P_{\min}}(m)^{\frac{1}{2}}\, \delta_{P_{\min}}\big(m_{P_{\min}}(u)\big)^{\frac{1}{2}}\, \sigma(mu)^D$$

pour tout $m \in M_{\min}(F)$ et pour tout $u \in \overline{U}_{\min}(F)$. Comme on a de plus $\sigma(mu) \ll \sigma(m)\sigma(u)$, on en déduit pour tout $m \in M_{\min}(F)$ la majoration

$$\int_{U(F)} \Xi^G(mu)^2\sigma(mu)^d \, du \ll \sigma(m)^{d+2D}\delta_{P_{\min}}(m)\int_{U(F)} \delta_{P_{\min}}\big(m_{P_{\min}}(u)\big)\sigma(u)^{d+2D} \, du.$$

Grâce au lemme II.4.1 de [**28**], on vérifie aisément que l'intégrale

$$\int_{U(F)} \delta_{P_{\min}}(m_{P_{\min}}(u))\sigma(u)^{d+D} \, du$$

est convergente. D'après le lemme II.1.1 de [**28**] on a

$$\sigma(m)^{d+D}\delta_{P_{\min}}(m) \ll \sigma(m)^{d+D}\Xi^M(m)^2\,\delta_{\overline{P}}(m)$$

pour tout $m \in M_{\min}^{M,+}$. Cela établit (1).

Pour tout $g \in G(F)$, on a $\Xi^G(g^{-1}) = \Xi^G(g)$ et $\sigma(g^{-1}) = \sigma(g)$. On a donc aussi le majoration

$$\int_{U(F)} \Xi^G(um)^2\sigma(um)^d \, du \ll \sigma(m)^{d'}\Xi^M(m)^2\,\delta_P(m)$$

pour tout $m \in M(F)$. Après le changement de variable $u \mapsto mum^{-1}$, on obtient la majoration de l'énoncé. ∎

2.2. Intégrales à paramètres

Dans la suite on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.1. — *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit encore $f : X \times U \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

1) *Pour tout $z \in U$ la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est mesurable.*
2) *Pour tout $t \in X$ la fonction $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur U.*
3) *Il existe un sous-ensemble discret E de U tel que pour tout compact $K \subset U - E$ il existe $g_K \in L^1(X)$ de sorte que pour tout $(t,z) \in X \times K$ on ait*

$$\big|f(t,z)\big| \leqslant g_K(t).$$

Alors la fonction $U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_X f(t,z)\,dt$ est partout définie par une intégrale absolument convergente et est holomorphe.

Démonstration. — Par un théorème classique d'intégrale à paramètre la fonction $z \mapsto \int_X f(t,z)\,dt$ est définie par une intégrale absolument convergente et est holomorphe sur $U - E$. Soit $z_0 \in E$ et $r > 0$ de sorte que $B(z_0,r) \subset U$

et $B(z_0, r) \cap E = \{z_0\}$. On applique la partie 3) à $K = S(z_0, r) = \{z; |z - z_0| = r\}$, ce qui fournit une fonction $g_K \in L^1(X)$. Par le principe du maximum, on a

$$\left|f(t, z)\right| \leqslant \sup_{z\in K} \left|f(t, z)\right| \leqslant g_K(t)$$

pour tout $(t, z) \in X \times B(z_0, r)$. Toujours par un théorème d'intégrale à paramètre, on en déduit que $z \mapsto \int_X f(t, z)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et holomorphe sur l'intérieur de $B(z_0, r)$. Le raisonnement étant valable pour tout $z_0 \in E$, le résultat s'ensuit. ∎

2.3. Fonctionnelles de Jacquet

Introduisons l'ensemble Σ des racines de $A_{\min}$ dans G, Σ^+ l'ensemble des racines dans $P_{\min}$ et Δ la base correspondante. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard ; on notera alors $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines de $A_{\min}$ dans U et $\Delta(P) = \Delta \cap \Sigma(P)$. L'application $P \mapsto \Delta(P)$ est une bijection entre les sous-groupes paraboliques standards et les sous-ensembles de Δ. On désignera par A_M^+ la chambre positive correspondant à P, c'est-à-dire l'ensemble des éléments a de $A_M(F)$ vérifiant $|\alpha(a)|_F \leqslant 1$ pour tout $\alpha \in \Delta(P)$. Pour $\epsilon > 0$, on pose

$$A_M(\epsilon)^+ = \big\{a \in A_M(F)\ ;\ |\alpha(a)|_F < \epsilon, \forall \alpha \in \Delta(P)\big\}.$$

Soit $w_\ell \in W^G$ l'élément de plus grande longueur *i.e.*, celui tel que

$$w_\ell\, P_{\min}\, w_\ell^{-1} = \overline{P}_{\min},$$

où $\overline{P}_{\min}$ est le sous-groupe parabolique opposé à $P_{\min}$.

On désignera par $\overline{U}_{\min}$ le radical unipotent de $\overline{P}_{\min}$.

Soit $\mathscr{D}(U_{\min})$ le sous-groupe dérivé de $U_{\min}$. On a un isomorphisme de groupes algébriques

$$U_{\min}/\mathscr{D}(U_{\min}) \simeq \bigoplus_{\alpha\in\Delta} V_\alpha,$$

où pour tout $\alpha \in \Delta$, V_α est le sous-espace propre correspondant à α pour l'action par conjugaison de $A_{\min}$. De plus, on a l'égalité

$$U_{\min}(F)/\mathscr{D}(U_{\min})(F) = \big(U_{\min}/\mathscr{D}(U_{\min})\big)(F) \simeq \bigoplus_{\alpha\in\Delta} V_\alpha(F).$$

Fixons des formes linéaires non nulles ℓ_α sur chacun des espaces vectoriels $V_\alpha(F)$. On définit un caractère de $U_{\min}(F)/\mathscr{D}(U_{\min})(F)$ via l'isomorphisme précédent par la formule

$$(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \longmapsto \psi\Big(\sum_\Delta \ell_\alpha(x_\alpha)\Big).$$

On notera aussi ψ ce caractère et on l'identifiera à un caractère de $U_{\min}(F)$. On fait agir F^{Δ} sur $U_{\min}(F)/\mathcal{D}(U_{\min})(F)$ par

$$y\cdot(x_\alpha)=(y_\alpha x_\alpha),$$

où $y=(y_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est un élément de F^{Δ}.

Soit $\mathcal{K}^G_{P_{\min}}$ l'espace des fonctions $\phi: K\to\mathbb{C}$ qui sont localement constantes et invariantes à gauche par $K\cap P_{\min}(F)$; c'est un espace vectoriel sur lequel se réalisent toutes les représentations $\pi_s=i^G_{P_{\min}}(\delta^s_{P_{\min}})$ pour $s\in\mathbb{C}$ via l'isomorphisme donné par la restriction des fonctions à K. Soit $(.\,,.)$ la forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathcal{K}^G_{P_{\min}}$ définie par

$$(e_1,e_2)=\int_K e_1(k)e_2(k)\,\mathrm{d}k.$$

Soit $e\in\mathcal{K}^G_{P_{\min}}$ la fonction constante égale à 1 et pour tout s, soit e_s la fonction sur $G(F)$ déduite via l'isomorphisme précédent entre $i^G_{P_{\min}}(\delta^s_{P_{\min}})$ et $\mathcal{K}^G_{P_{\min}}$. Pour $y\in F^{\Delta}$, $g\in G(F)$ et $s\in\mathbb{C}$, on pose

$$\Phi_{y,s}(g)=\int_{U_{\min}(F)} e_s(w_\ell ug)\,\psi(y\cdot u)\,\mathrm{d}u.$$

L'intégrale est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s)>0$. Pour $c\geqslant 0$ un réel, notons $U_{\min}(F)_c$ le sous-groupe de $U_{\min}(F)$ constitué des éléments u tels que $\mathrm{val}_F(\ell_\alpha(u))\geqslant -c$ pour tout $\alpha\in\Delta$. Par transformée de Fourier inverse, on a

$$\int_{\mathcal{O}_F^{\Delta}}\Phi_{y,s}(1)\,\mathrm{d}y=\int_{U_{\min}(F)_0} e_s(w_\ell u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $a\in A^+_{\min}$, on note $y(a)$ le Δ-uplet $(\alpha(a))_{\alpha\in\Delta}$ d'éléments de $(\mathcal{O}_F\backslash\{0\})^{\Delta}$. L'application $a\mapsto y(a)$ est un isomorphisme de $A^+_{\min}/(Z_G(F)\cap A_{\min}(F))$ sur un sous-monoïde ouvert $\mathcal{M}$ de $(\mathcal{O}_F\backslash\{0\})^{\Delta}$. Il existe un nombre fini d'éléments y_i tels que $(\mathcal{O}_F\backslash\{0\})^{\Delta}=\sqcup_i y_i\mathcal{M}$. On a par conséquent

$$\int_{\mathcal{O}_F^{\Delta}}\Phi_{y,s}(1)\,\mathrm{d}y=\sum_i\int_{y_i\mathcal{M}}\Phi_{y,s}(1)\,\mathrm{d}y.$$

Le changement de variable $A^+_{\min}/(A_{\min}(F)\cap Z_G(F))\to y_i\mathcal{M}$, $a\mapsto y_i\,y(a)$ donne

$$\int_{y_i\mathcal{M}}\Phi_{y,s}(1)\,\mathrm{d}y=|y_i|_F\int_{A^+_{\min}/(Z_G(F)\cap A_{\min}(F))}\Phi_{y_i y(a),s}(1)\prod_{\Delta}|\alpha(a)|_F\,\mathrm{d}a.$$

Par le changement de variable $u\mapsto aua^{-1}$ on a aussi

$$\Phi_{y_i y(a),s}(1)=\delta_{P_{\min}}(a)^{s-\frac{1}{2}}\,\Phi_{y_i,s}(a).$$

On en déduit

$$(1)\qquad \int_{U_{\min}(F)_0} e_s(w_\ell u)\,\mathrm{d}u = \sum_i |y_i|_F \int_{A^+_{\min}/(A_{\min}(F)\cap Z_G(F))} \delta_{P_{\min}}(a)^{s-\frac{1}{2}}\,\Phi_{y_i,s}(a)\prod_{\Delta}|\alpha(a)|_F\,\mathrm{d}a.$$

Lemme 2.3.1. — *Soient $e_1, e_2 \in \mathcal{H}^G_{P_{\min}}$ et $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Il existe $\epsilon > 0$ et un sous-ensemble discret $E \subset \mathbb{C}$ tels que, pour tout $\gamma \in A^+_{\min}$, il existe des fonctions holomorphes $\varphi^\gamma_w : \mathbb{C} - E \to \mathbb{C}$ indexées par $w \in W^G/W^M$ telles que, pour tout $s \in \mathbb{C} - E$ et tout $a_M \in A_M(\epsilon)^+$, on ait*

$$\big(\pi_s(a_M\gamma)e_1, e_2\big) = \sum_{w\in W^G/W^M} \delta_{P_{\min}}(a_M)^{\frac{1}{2}}\,\delta_{P_{\min}}(w\cdot a_M)^s\,\varphi^\gamma_w(s).$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{X}$ le tore complexe des caractères non ramifiés de $M_{\min}(F)$ et $B = \mathbb{C}[M_{\min}(F)/M^1_{\min}]$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{X}$. Soit $\chi_{nr} : M_{\min}(F) \to B^\times$ le caractère non ramifié générique qui à m_0 associe la fonction régulière $\chi \mapsto \chi(m_0)$. On pose

$$(\pi_B, V_B) = i^G_{P_{\min}}(\chi_{nr}),$$

c'est une (G, B)-représentation lisse et admissible au sens de [BDKV]. Son dual lisse est la représentation induite

$$(\pi^\vee_B, V^\vee_B) = i^G_{P_{\min}}(\chi^{-1}_{nr}).$$

Pour tout sous-groupe parabolique Q de G, on notera $(\pi_{B,Q}, (V_B)_Q)$ le module de Jacquet de cette représentation relativement à Q et $j_Q : V_B \to (V_B)_Q$ la projection naturelle.

Un théorème de Casselman affirme l'existence d'une dualité

$$(V_B)_P \times (V^\vee_B)_{\overline{P}} \longrightarrow B$$

qui est B-bilinéaire, G-équivariante et telle que, pour $f \in V_B$ et $f^\vee \in V^\vee_B$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A^+_{\min}$ vérifiant $|\alpha(a)|_F < \epsilon$ pour tout $\alpha \in \Delta(P)$ on ait

$$\big\langle \pi_B(a)f, f^\vee\big\rangle = \delta_P(a)^{\frac{1}{2}}\big\langle \pi_{B,P}(a)\,j_P(f), j_{\overline{P}}(f^\vee)\big\rangle.$$

La représentation $\pi_{B,P}$ admet une filtration indexée par $w \in W^G/W^M$ pour laquelle les quotients successifs admettent pour caractère central les $w^{-1}\chi_{nr}$. Puisque ces caractères sont tous différents, la filtration se scinde en une somme directe après extension des scalaires à $\mathrm{Frac}(B)$. On a donc une décomposition

$$j_P(f) = \sum_{w\in W^G/W^M} j_P(f)_w,$$

où $j_P(f)_w \in \mathrm{Frac}(B) \otimes_B (V_B)_P$ pour tout w et $A_M(F)$ agit par $w^{-1}\chi_{nr}$ sur $j_P(f)_w$. On obtient pour $a = a_M\gamma$ avec $a_M \in A_M(\epsilon)^+$ et $\gamma \in A^+_{\min}$,

$$\langle \pi_B(a)f, f^\vee \rangle = \delta_P(a_M\gamma)^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in W^G/W^M} \chi_{nr}(w \cdot a_M) \langle \pi_{B,P}(\gamma)\, j_P(f)_w, j_{\overline{P}}(f^\vee) \rangle.$$

Par restriction des fonctions à K, les espaces V_B et $V_B^\vee$ sont tout deux isomorphes à l'espace $\mathcal{K}^G_{P_{\min}} \otimes B$ des fonctions $\varphi : K \to B$ localement constantes et invariantes à gauche par $P_{\min}(F) \cap K$. Les éléments e_1 et e_2 peuvent être vus comme des éléments de cet espace (puisque $\mathbb{C} \subset B$). On notera encore par e_1 (resp. e_2) l'image réciproque de e_1 dans V_B (resp. $V_B^\vee$).

En appliquant ce qui précède à $f = e_1$ et $f^\vee = e_2$ on obtient le résultat par spécialisation de χ_{nr} à $\delta^s_{P_{\min}}$. ∎

Il existe des entiers naturels strictement positifs k_α pour $\alpha \in \Delta$ tels que $\delta_{P_{\min}}(a) = \prod_{\alpha\in\Delta} |\alpha(a)|_F^{k_\alpha}$ pour tout $a \in A_{\min}(F)$. Soit $k = \sup(k_\alpha)$, on a alors

$$\prod_{\alpha\in\Delta} |\alpha(a)|_F \leqslant \delta_{P_{\min}}(a)^{1/k}$$

pour tout $a \in A^+_{\min}$. Soient $e_1, e_2 \in \mathcal{K}^G_{P_{\min}}$ et s un nombre complexe, on pose

$$F_{e_1,e_2}(s) = \int_{A^+_{\min}/A_G(F)} \big(\pi_s(a)e_1, e_2\big)\, \delta_{P_{\min}}(a)^{s-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha\in\Delta} |\alpha(a)|_F \,\mathrm{d}a.$$

Lemme 2.3.2. — *Pour* $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}$ *l'intégrale définissant* $F_{e_1,e_2}(s)$ *est absolument convergente et la fonction* $s \mapsto F_{e_1,e_2}(s)$ *est holomorphe sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}$.

Démonstration. — Soit K_1 un sous-groupe ouvert de $A^1_{\min}$ qui laisse stable e_1. Pour $1 > \epsilon > 0$, il existe des sous-ensembles finis $\Gamma^\epsilon_P \subset A^+_{\min}$ pour P parcourant les sous-groupes paraboliques standards tels que

$$A^+_{\min} = \bigsqcup_{P_{\min}\subset P = MU} \ \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma^\epsilon_P} A_M(\epsilon)^+\gamma K_1.$$

Il suffit donc de montrer que pour $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard et $\gamma \in \Gamma^\epsilon_P$, l'intégrale à un paramètre

$$\int_{A_M(\epsilon)^+/A_G(F)} \big(\pi_s(a_M\gamma)e_1, e_2\big)\, \delta_{P_{\min}}(a_M)^{s-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha\in\Delta} |\alpha(a_M)|_F \,\mathrm{d}a_M$$

est convergente pour $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}$ et qu'elle définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan. Choisissons ϵ de sorte que la conclusion du lemme 2.3.1 est vérifiée pour tout les sous-groupes paraboliques standards. Le lemme 2.3.1

fournit des fonctions holomorphes ϕ_w^γ telles que pour s en dehors d'un ensemble discret et tout $a_M \in A_M(\epsilon)^+$,

$$\big(\pi_s(a_M\gamma)e_1, e_2\big)\,\delta_{P_{\min}}(a_M)^{s-\frac{1}{2}} = \sum_{w\in W^G/W^M} \delta_{P_{\min}}\big(a_M(w\cdot a_M)\big)^s \phi_w^\gamma(s).$$

On va appliquer le lemme 2.3.1 à notre intégrale à paramètre. Les points 1) et 2) sont aisément vérifiés. Soit C un sous-ensemble compact de l'ensemble $\{\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}\}$ sur lequel les fonctions holomorphes ϕ_w^γ sont bien définies. Soient $r_- = \inf_{s\in C}\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}$ et $r_+ = \sup_{s\in C}\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}$. Pour tous w dans W^G/W^M, $a_M \in A_M^+$ et pour tout $s\in C$ on a

$$\text{(2)}\qquad \big|\delta_{P_{\min}}\big(a_M(w\cdot a_M)\big)^s\big| \leqslant \delta_{P_{\min}}\big(a_M(w\cdot a_M)\big)^{r_+} + \delta_{P_{\min}}\big(a_M(w\cdot a_M)\big)^{r_-}.$$

Il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $w\in W^G/W^M$

$$\sup_{s\in C}\big|\phi_w^\gamma(s)\big| \leqslant c.$$

En utilisant la majoration (2), on obtient que la fonction

$$s \longmapsto \big(\pi_s(a_M)e_1, e_2\big)\,\delta_{P_{\min}}(a_M)^{s-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha\in\Delta} |\alpha(a_M)|_F$$

est majorée sur C par

$$c\sum_{w\in W^G/W^M} \big(\delta_{P_{\min}}\big(a_M(w\cdot a_M)\big)^{r_+} + \delta_{P_{\min}}\big(a_M(w\cdot a_M)\big)^{r_-}\big)\,\delta_{P_{\min}}(a_M)^{1/k}.$$

Pour tous $w\in W^G$ et $a\in A_{\min}^+$, on a $\delta_{P_{\min}}(a)^2 \leqslant \delta_{P_{\min}}(a(w\cdot a)) \leqslant 1$. Puisque la fonction $a_M \mapsto \delta_{P_{\min}}(a_M)^r$ est intégrable sur $A_M(\epsilon)^+/A_G(F)$ pour r réel strictement positif, la fonction précédente est bien intégrable sur $A_M(\epsilon)^+/A_G(F)$. On peut donc appliquer le lemme 2.2.1. ∎

Lemme 2.3.3. — *Soit $y\in F^\Delta$, la fonction*

$$s \longmapsto \int_{A_{\min}^+/Z_G(F)\cap A_{\min}(F)} \delta_{P_{\min}}(a)^{s-\frac{1}{2}}\,\Phi_{y,s}(a) \prod_{\alpha\in\Delta}|\alpha(a)|_F\,\mathrm{d}a$$

bien définie et holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ *admet un prolongement holomorphe à* $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}$.

Démonstration. — Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, la forme linéaire

$$\Omega_s : i_{P_{\min}}^G(\delta_{P_{\min}}^s) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \longmapsto \int_{U_{\min}(F)} \varphi(w_\ell u)\,\psi(y\cdot u)\,\mathrm{d}u$$

est une fonctionnelle de Whittaker pour le caractère générique

$$\xi : u \longmapsto \psi(y\cdot u^{-1}).$$

On a $\Phi_{y,s}(a) = \Omega_s(\pi_s(a)e_s)$. Il existe un sous-groupe compact-ouvert K_1 de $G(F)$ tel que pour tout $a \in A^+_{\min}$ on a $K_1 \subset \mathrm{Ker}(\xi)aKa^{-1}$. Soient $\mathcal{B}$ un base de $(\mathcal{K}^G_{P_{\min}})^{K_1}$ et $\mathcal{B}^* = \{e'^*; e' \in \mathcal{B}\}$ la base duale pour $(.\,,.)$. On a alors

$$\Omega_s\big(\pi_s(a)e_s\big) = \sum_{e' \in \mathcal{B}} \big(\pi_s(a)e, e'^*\big)\Omega_s(e').$$

Il est bien connu que $\Omega_s(e')$ qui est la fonctionnelle de Jacquet admet un prolongement holomorphe au plan complexe (cf. par exemple [**14**]). Le résultat du lemme est alors une conséquence du lemme 2.3.2. ∎

2.4. Majorations de mesures

Pour $c \geqslant 0$ un réel, on pose

$$\overline{U}_{\min}(F)_c = w_\ell\, U_{\min}(F)_c\, w_\ell^{-1}.$$

Soient

$$A_n = \big\{\overline{u} \in \overline{U}_{\min}(F)_0 \;;\; \delta_{P_{\min}}(m_{P_{\min}}(\overline{u})) \geqslant q^{-n}\big\} \quad \text{et} \quad a_n = \mathrm{mes}(A_n).$$

Lemme 2.4.1. — *Il existe $\epsilon > 0$ tel que $a_n \ll q^{n(\frac{1}{2}-\epsilon)}$.*

Démonstration. — Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a

$$\int_{U_{\min}(F)_0} e_s(w_\ell u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n \geqslant 0} (a_n - a_{n-1})q^{-\frac{1}{2}n - ns}.$$

D'après le lemme 2.3.3 et § 2.3 (1), cette fonction admet un prolongement holomorphe à $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2k}$. Par conséquent le rayon de convergence de la série entière $\sum_n (a_n - a_{n-1})z^n$ est strictement plus grand que $q^{-\frac{1}{2}}$ d'où le résultat. ∎

Soit $\overline{Q} = M\overline{U}$ un sous-groupe parabolique anti-standard. Pour $c \geqslant 0$, on pose

$$\overline{U}(F)_c = \overline{U}(F) \cap \overline{U}_{\min}(F)_c.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $c \geqslant 0$, on définit

$$A_{n,c}(\overline{U}) = \big\{\overline{u} \in \overline{U}(F)_c \;;\; \delta_{P_{\min}}(m_{P_{\min}}(\overline{u})) \geqslant q^{-n}\big\}.$$

Proposition 2.4.2. — *Il existe deux réels $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que*

$$\mathrm{mes}\big(A_{n,c}(\overline{U})\big) \ll q^{n(\frac{1}{2}-\epsilon)+\alpha c}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $c \geqslant 0$.

Démonstration. — On a les faits suivants :

1) Il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $c \geqslant 0$, il existe $a_c \in A_M(F)$ qui vérifie : (i) $\sigma(a_c) \leqslant \alpha_1(c+1)$ et (ii) $\overline{U}(F)_c \subset a_c\overline{U}(F)_0 a_c^{-1}$.

2) Il existe un réel $\alpha_2 > 0$ tel que

(i) Pour tout $g \in G(F)$, on a $\delta_{P_{\min}}(m_{P_{\min}}(g)) \leqslant \exp(\alpha_2\sigma(g))$;

(ii) Pour tout $a \in A_M(F)$, on a $\delta_{\overline{Q}}(a) \leqslant \exp(\alpha_2\sigma(a))$.

Soient $c \geqslant 0$ et $a_c \in A_M(F)$ qui vérifie les (i) et (ii) de 1). Pour tout $u \in \overline{U}(F)_0$, on a alors

$$m_{P_{\min}}(a_c u a_c^{-1}) = a_c m_{P_{\min}}(u)\, m_{P_{\min}}\big(k_{P_{\min}}(u) a_c^{-1}\big).$$

On peut toujours supposer que la fonction σ est invariante à gauche par K. On a alors, pour tout $u \in \overline{U}(F)_0$,

$$\delta_{P_{\min}}\big(m_{P_{\min}}(a_c u a_c^{-1})\big) \leqslant \delta_{P_{\min}}\big(m_{P_{\min}}(u)\big) \exp\big(2\alpha_1\alpha_2(c+1)\big).$$

Soit $k_c = E\big(2\alpha_1\alpha_2(c+1)/\log(q)\big)$ où $E(.)$ désigne la partie entière. On déduit de ce qui précède que

$$A_{n,c}(\overline{U}) \subset a_c A_{n+k_c,0}(\overline{U}) a_c^{-1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $c \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \text{3)} \quad \operatorname{mes}\big(A_{n,c}(\overline{U})\big) &\leqslant \delta_{\overline{Q}}(a_c) \operatorname{mes}\big(A_{n+k_c,0}(\overline{U})\big) \\ &\leqslant \exp\big(\alpha_1\alpha_2(1+c)\big) \operatorname{mes}\big(A_{n+k_c,0}(\overline{U})\big). \end{aligned}$$

Soit $K_{\overline{U}_{\min}} = K \cap \overline{U}_{\min}(F)$; on a alors $A_{n,0}(\overline{U})K_{\overline{U}_{\min}} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{mes}\big(A_{n,0}(\overline{U})\big) \operatorname{mes}\big((\overline{U}(F) \cap K_{\overline{U}_{\min}})\backslash K_{\overline{U}_{\min}}\big) \leqslant a_n.$$

Puisque $(\overline{U}(F) \cap K_{\overline{U}_{\min}})\backslash K_{\overline{U}_{\min}}$ est compact donc de mesure finie, le lemme 2.4.1 et l'inégalité 3) ci-dessus permettent d'obtenir le résultat de la proposition □

Corollaire 2.4.3. — *Il existe deux réels $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que*

$$\operatorname{mes}\big\{u \in \overline{U}(F)_c\ ;\ q^{-n-1} < \Xi^M(m_Q(u))\delta_Q(m_Q(u))^{\frac{1}{2}} \leqslant q^{-n}\big\} \ll q^{n(1-\epsilon)+\alpha c}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $c \geqslant 0$.

Démonstration. — D'après le lemme II.3.2 de [**28**], il existe un réel D tel que

$$\Xi^M\big(m_Q(u)\big)\delta_Q\big(m_Q(u)\big)^{\frac{1}{2}} \ll \delta_{P_{\min}}\big(m_{P_{\min}}(u)\big)^{\frac{1}{2}}\sigma(u)^D$$

pour tout $u \in \overline{U}(F)$. D'après le lemme II.3.4 de [**28**], on a aussi

$$\sigma(u) \ll 1 - \log\big(\delta_{P_{\min}}(m_{P_{\min}}(u))\big)$$

pour tout $u \in \overline{U}(F)$. Le résultat est alors une conséquence facile de la proposition précédente. $\square$

CHAPITRE 3

LES GROUPES UNITAIRES

3.1. Généralités

Dorénavant on fixe une extension quadratique E de F. Les notations $\mathcal{O}_E$, k_E, q_E, val_E, etc. seront les analogues de celles définies pour F. On désignera par N et Tr respectivement la norme et la trace de l'extension E/F. On définit un caractère additif ψ_E de E par $\psi_E(x) = \psi(Tr(x))$. On notera $x \mapsto \overline{x}$ le F-automorphisme non trivial de E et χ_E le caractère quadratique de $F^\times$ donné par

$$\chi_E : F^\times \longrightarrow F^\times/N(E^\times) = \{+1, -1\}.$$

Si G est un groupe algébrique défini sur E, on notera $R_{E/F}G$ le groupe algébrique défini sur F obtenu par restriction des scalaires à la Weil de E à F.

Un espace hermitien sera pour nous un couple (V, h) constitué d'un espace vectoriel de dimension finie V sur E et d'une forme hermitienne $h : V \times V \to E$ non dégénérée (avec la convention que h est linéaire en la première variable). Quand la forme hermitienne sur V est évidente, on dira juste que V est un *espace hermitien* (c'est le cas par exemple pour un sous-espace d'un espace hermitien sur lequel la restriction de la forme hermitienne est non dégénérée).

Soit (V, h) un espace hermitien et soit G son groupe unitaire.

On appelle *système hyperbolique* de V toute famille $(v_i)_{i=\pm1,\dots,\pm n}$ d'éléments de V qui vérifient $h(v_i, v_j) = \delta_{i,-j}$ pour tous $i, j \in \{\pm1, \dots, \pm n\}$. Si V admet un système hyperbolique qui est aussi une base, on dira que V est *hyperbolique*.

Soit V_{hyp} un sous-espace hermitien hyperbolique maximal de V et V_{an} son orthogonal. Alors la forme hermitienne sur V_{an} est anisotrope. Posons

$$d_{\mathrm{an}}(V) = \dim(V_{\mathrm{an}}).$$

Notons $d(V)$ la dimension de V (comme E-espace vectoriel).

On a toujours $d(V) \equiv d_{\mathrm{an}}(V)$ [2] et $d_{\mathrm{an}}(V) \leqslant 2$.

Le groupe G est quasi-déployé si et seulement si $d_{\mathrm{an}}(V) \leqslant 1$.

Pour $v', v'' \in V$, on note $c(v', v'')$ l'endomorphisme de V défini par

$$c(v', v'')(v) = h(v, v')v'' - h(v, v'')v'$$

pour tout $v \in V$. C'est un élément de $\mathfrak{g}(F)$ et les $c(v', v'')$ pour $v', v'' \in V$ engendrent $\mathfrak{g}(F)$ comme F-espace vectoriel.

On définit une fonction Δ sur $G_{\mathrm{ss}}(F)$ de la façon suivante : pour $x \in G_{\mathrm{ss}}(F)$, notons $V''(x)$ le noyau de $x - 1$ dans V et posons

$$\Delta(x) = \left|N\left(\det(1 - x)_{|V/V''(x)}\right)\right|_F.$$

Soit W un sous-espace non dégénérée de V et notons H son groupe unitaire. On peut considérer H comme un sous-groupe de G en laissant agir ses éléments trivialement sur l'orthogonal de W.

Lemme 3.1.1. — *Posons $k = d(V) - d(W)$. Pour tout $x \in H_{\mathrm{ss}}(F)$, on a alors*

$$D^G(x) = D^H(x)\Delta(x)^k.$$

Démonstration. — Posons $W' = W^{\perp}$, H' le groupe unitaire de W' et

$$\mathfrak{g}(W, W') = \left\{X \in \mathfrak{g}\ ;\ X \cdot W \subset W',\ X \cdot W' \subset W\right\}.$$

On a alors deux décompositions $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}(W, W')$ et $\mathfrak{g}_x = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}_x \oplus \mathfrak{g}(W, W')_x$ où $\mathfrak{g}(W, W')_x$ désigne le commutant de x dans $\mathfrak{g}(W, W')$. Par définition, on a donc

$$D^G(x) = D^H(x)\left|\det\left(1 - \mathrm{ad}(x)\right)_{|\mathfrak{g}(W,W')/\mathfrak{g}(W,W')_x}\right|_F.$$

L'application $\mathfrak{g}(W, W') \to \mathrm{Hom}_E(W', W)$, $X \mapsto X_{|W'}$ est un isomorphisme (où $X_{|W'}$ désigne la restriction de X à W'). Via cet isomorphisme, $\mathrm{ad}(x)$ agit sur $\mathfrak{g}(W, W')$ par $X \mapsto x \circ X$. On a donc un isomorphisme de $F[x]$-modules

$$\mathfrak{g}(W, W') \simeq W^{\oplus k}$$

où l'action de x sur chaque facteur est l'action naturelle de x sur W. On en déduit facilement que

$$\left|\det\left(1 - \mathrm{ad}(x)\right)_{|\mathfrak{g}(W,W')/\mathfrak{g}(W,W')_x}\right|_F = \Delta(x)^k.$$

□

3.2. Sous-groupes compacts spéciaux, paraboliques, Levi et R-groupes

Soient $(v_i)_{i=\pm1,\ldots,\pm r}$ un système hyperbolique maximal de V et $k_1, \ldots, k_s \geqslant 1$ des entiers vérifiant $k_1 + \cdots + k_s \leqslant r$. Pour $i = 1, \ldots, s$, notons Z_i (resp. Z_{-i}) le sous-espace de V engendré par les v_j (resp. v_{-j}), pour

$j = (k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1), \ldots, (k_1 + \cdots + k_i)$. Soit P le stabilisateur dans G du drapeau

$$Z_1 \subset Z_1 \oplus Z_2 \subset \cdots \subset Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_s.$$

C'est un sous-groupe parabolique de G. Le sous-groupe M de P des éléments qui préservent $Z_{\pm i}$, $i = \pm 1, \ldots, \pm s$ est une composante de Levi de P. Tous les couples (P, M) formés d'un sous-groupe parabolique et d'une composante de Levi de P s'obtiennent de cette façon, c'est-à-dire qu'on peut trouver un système hyperbolique maximal et des entiers $k_1, \ldots, k_s$ tels que P et M soient déterminés comme ci-dessus.

Supposons à nouveau fixés notre système hyperbolique maximal et nos entiers $k_1, \ldots, k_s$. On en déduit comme ci-dessus un sous-groupe parabolique P et une composante de Levi M. Soit $\widetilde{V}$ l'orthogonal de $Z_1 \oplus Z_{-1} \oplus \cdots \oplus Z_s \oplus Z_{-s}$ et notons $\widetilde{G}$ son groupe unitaire. On a alors un isomorphisme naturel

$$M \simeq R_{E/F}\,\mathrm{GL}(Z_1) \times \cdots \times R_{E/F}\,\mathrm{GL}(Z_s) \times \widetilde{G}.$$

Le groupe de Weyl $W(M)$ s'identifie alors naturellement à un sous-groupe de

$$\mathcal{S}_s \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^s$$

où $\mathcal{S}_s$ agit sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^s$ par permutation sur les entrées.

Soit τ une représentation irréductible de la série discrète de $M(F)$. Alors $R(\tau)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^s$ et on a $R(\tau)_{\mathrm{reg}} \neq \varnothing$ si et seulement si $R(\tau)$ contient l'élément $t = (-1, \ldots, -1)$. Dans ce cas, $R(\tau) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^s$, τ se prolonge en une représentation de $\mathrm{Norm}_{G(F)}(\tau)$, et on a

$$R(\tau)_{\mathrm{reg}} = \{t\} \quad \text{et} \quad \left|\det(t - 1_{|\mathcal{A}_M})\right| = 2^{a_M}.$$

Soit π une représentation irréductible et elliptique de $G(F)$. On peut trouver M, τ comme ci-dessus et $\zeta \in R(\tau)^\vee$, de sorte que $\pi = \mathrm{Ind}_P^G(\tau, \zeta)$, où P est un élément de $\mathcal{P}(M)$. Puisque la classe de conjugaison du couple (M, τ) est bien déterminée, on peut poser

$$t(\pi) = 2^{a_M}.$$

Plus généralement, soient M comme précédemment et L un sous-groupe de Levi de M. Alors L admet une décomposition

$$L = L_1 \times \cdots \times L_s \times \widetilde{L}$$

où pour $i = 1, \ldots, s$, L_i est un sous-groupe de Levi de $R_{E/F}\,\mathrm{GL}(Z_i)$ et $\widetilde{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\widetilde{G}$.

Soit $\tau \in \Pi_2(L)$; on a alors une décomposition en produit tensoriel

$$\tau \simeq \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_s \otimes \widetilde{\tau},$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(L_i)$ pour $i = 1, \dots, s$ et $\widetilde{\tau} \in \Pi_2(\widetilde{L})$. La théorie du R-groupe est triviale pour les $R_{E/F}\,\mathrm{GL}(Z_i)$; donc $R^M(\tau)$ s'identifie à $R^{\widetilde{G}}(\widetilde{\tau})$. Il s'ensuit que $R^M(\tau)_{\mathrm{reg}}$ est vide sauf si

$$L_i = R_{E/F}GL(Z_i) \text{ pour } i = 1, \dots, s \quad \text{et} \quad R^{\widetilde{G}}(\widetilde{\tau})_{\mathrm{reg}} \neq \varnothing.$$

Dans ce cas là, $R^M(\tau)_{\mathrm{reg}}$ est réduit à un élément t et on a

$$\left|\det(t-1)_{|\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_L}\right| = \left|R^M(\tau)\right| = 2^{a_M - a_L}.$$

Il existe un ensemble de $\mathcal{O}_E$-réseaux de V qualifiés de *spéciaux* tel que pour tout réseau spécial R de V, le stabilisateur de R dans $G(F)$ soit un sous-groupe compact spécial.

Reprenons les constructions précédentes dans le cas où $k_1 = \cdots = k_r = 1$.

Alors P est un sous-groupe parabolique minimal. On peut choisir de prendre $P_{\min} = P$ et $M_{\min} = M$. Il existe des vecteurs v'_i non nuls proportionnels à v_i pour $i = \pm 1, \dots, \pm r$ vérifiant, pour tous $i, i' = 1, \dots, r$, $h(v'_i, v'_{-i}) = h(v'_{i'}, v'_{-i'})$ et un réseau spécial $\widetilde{R} \subset \widetilde{V}$ tel que le réseau $R = R_Z \oplus \widetilde{R}$, où

$$R_Z = \mathcal{O}_E v'_1 \oplus \mathcal{O}_E v'_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_E v'_r \oplus \mathcal{O}_E v'_{-r},$$

soit spécial. Le stabilisateur K de R dans $G(F)$ est alors un sous-groupe compact spécial en bonne position par rapport à $M_{\min}$. Il est utile de remarquer (c'est une des hypothèses du paragraphe 1.6) qu'alors le morphisme naturel

$$\mathrm{Norm}_{G(F)}(M_{\min}) \cap K \longrightarrow W^G$$

admet une section. En effet, notons W^K le sous-groupe des éléments $k \in K$ qui agissent par permutation sur les $(v_i)_{i=\pm1,\dots,\pm r}$ et qui agissent comme l'identité sur $\widetilde{V}$. Alors la restriction du morphisme précédent à W^K est un isomorphisme.

3.3. Orbites nilpotentes régulières

Supposons G quasi-déployé et soit $(v_{\pm i})_{i=1,\dots,r}$ un système hyperbolique maximal. On a alors

$$\dim(V) = 2r \text{ ou } 2r+1.$$

Si $\dim(V) = 2r+1$ alors $\mathfrak{g}(F)$ ne contient qu'une seule orbite nilpotente régulière. Supposons que $\dim(V) = 2r$. Considérons P et M le sous-groupe parabolique et la composante de Levi associé aux entiers $k_1 = \cdots = k_r = 1$.

Alors P est un sous-groupe parabolique minimal. Notons U son radical unipotent et $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie. Soit $\eta \in \mathrm{Ker}(Tr) - \{0\}$ un élément de E de trace nulle qui est non nul. Soit N_η l'élément de $\mathfrak{u}(F)$ défini par

$$\begin{aligned} N_\eta v_r = 0, N_\eta v_i = v_{i+1} \quad &\text{pour } \ i = r-1, \dots, 1, -2, \dots, -r; \\ N_\eta v_{-1} = \eta v_1. & \end{aligned}$$

Alors N_η est un élément régulier qui engendre une orbite nilpotente $\mathcal{O}_\eta$ qui ne dépend que de l'image de η dans $(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) - \{0\})/N(E^\times)$. L'application

$$\eta \longmapsto \mathcal{O}_\eta$$

est une bijection de $(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) - \{0\})/N(E^\times)$ sur $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g})(F)_{\mathrm{reg}}$; en particulier cet ensemble est de cardinal 2 et la multiplication par n'importe quel élément $\lambda \in F^\times - N(E^\times)$ permute ces deux orbites.

CHAPITRE 4

POSITION DU PROBLÈME

Soient (V, h) un espace hermitien et G le groupe unitaire associé. On se donne une décomposition orthogonale de V de la forme

$$V = Z \oplus D \oplus W$$

où D est une droite non dégénérée, dont on fixera un générateur v_0, et Z possède une base hyperbolique $(v_i)_{i=\pm 1,\dots,\pm r}$. On a donc

$$h(v_i, v_j) = \delta_{i,-j} \quad \text{pour tous } i, j \in \{\pm 1, \dots, \pm r\}.$$

On notera Z_+ (resp. Z_-) les sous-espaces de V engendrés par les v_i (resp. v_{-i}) pour $i = 1, \dots, r$, et $V_0 = D \oplus W$. Soient G, G_0 et H les groupes unitaires respectifs de V, V_0 et W. On identifie H (resp. G_0) avec le sous-groupe de G des éléments qui agissent comme l'identité sur $Z \oplus D$ (resp. Z). Soit P le sous-groupe parabolique de G qui conserve le drapeau de sous-espaces isotropes

$$Ev_r \subset Ev_r + Ev_{r-1} \subset \cdots \subset Ev_r + \cdots + Ev_1.$$

Soit A le tore des éléments de G qui conservent, pour $i = \pm 1, \dots, \pm r$, les droites Ev_i et qui agissent comme l'identité sur $D \oplus W$; soit U le radical unipotent de P. Posons $M = AG_0$: c'est une composante de Levi de P. Pour $a \in A(F)$, on note a_i la valeur propre de a agissant sur v_i. Soient $\xi_0, \dots, \xi_{r-1}$ des éléments de $F^\times$. La formule suivante définit alors un caractère de $U(F)$ invariant par conjugaison par $H(F)$

$$\xi(u) = \psi_E\Big(\sum_{i=0}^{r-1} \xi_i h(uv_i, v_{-i-1})\Big).$$

Pour $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}(H)$, on définit $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi,\sigma)$ comme l'espace des homomorphismes $\ell : E_\pi \to E_\sigma$ qui vérifient

$$\ell\big(\pi(hu)e\big) = \xi(u)\sigma(h)\ell(e)$$

pour tous $h \in H(F), u \in U(F)$ et $e \in E_\pi$. On note $m(\pi,\sigma)$ la dimension de cet espace. D'après [**1**] et [**16**], cet espace est de dimension au plus 1.

Soit R un $\mathcal{O}_E$-réseau spécial de V en bonne position par rapport à un parabolique minimal inclus dans P qui se décompose sous la forme

$$R = R_0 \oplus R_Z$$

où R_0 et R_Z sont des $\mathcal{O}_E$-réseaux de V_0 et Z respectivement. On a alors la décomposition d'Iwasawa

$$G(F) = A(F)G_0(F)U(F)K.$$

Pour $N \geqslant 1$, on définit une fonction κ_N sur $G(F)$ ainsi : c'est la fonction caractéristique de l'ensemble des $g \in G(F)$ vérifiant

- $g^{-1}(v_r) \cap \pi_E^{-N} R \neq \varnothing$,
- $g^{-1}(v_{r-1} + Ev_r) \cap \pi_E^{-2N} R \neq \varnothing$,
- $\vdots$
- $g^{-1}(v_0 + Ev_1 + \cdots + Ev_r) \cap \pi_E^{-2N} R \neq \varnothing$,
- $g^{-1}(v_{-1} + W + Ev_0 + Ev_1 + \cdots + Ev_r) \cap \pi_E^{-2N} R \neq \varnothing$,
- $\vdots$
- $g^{-1}(v_{-r} + Ev_{-r+1} + \cdots + Ev_{-1} + W + Ev_0 + \cdots + Ev_r) \cap \pi_E^{-2N} R \neq \varnothing$.

La fonction κ_N est invariante à gauche par $H(F)U(F)$ et à droite par K. Elle est de plus à support compact dans $H(F)U(F)\backslash G(F)$. Soient θ un quasi-caractère de $H(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Pour $g \in G(F)$, on définit alors la fonction ${}^g f^\xi$ sur $H(F)$ de la façon suivante :

$${}^g f^\xi(h) = \int_{U(F)} f(g^{-1}hug)\,\xi(u)\,\mathrm{d}u.$$

Cette fonction est localement constante à support compact ; on peut donc définir

$$J(\theta, f, g) = \int_{H(F)} \theta(h)\,{}^g f^\xi(h)\,\mathrm{d}h$$

qui est une fonction localement constante en g. Pour $N \geqslant 1$, on pose alors :

$$J_N(\theta, f) = \int_{H(F)U(F)\backslash G(F)} J(\theta, f, g)\,\kappa_N(g)\,\mathrm{d}g.$$

La raison de l'expression précédente est qu'elle apparaît naturellement lorsque l'on essaye de calculer la multiplicité $m(\pi,\sigma)$ pour $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}(H)$ cuspidales (prendre pour f un coefficient de π et $\theta = \theta_{\sigma^\vee}$, cf. [**29**], proposition 13.1, pour le cas des groupes spéciaux orthogonaux).

Le but est de démontrer que $J_N(\theta, f)$ admet une limite lorsque N tend vers l'infini et de donner deux expressions pour cette limite.

▹ L'une, qualifiée de *géométrique*, est énoncée chapitre 5 et démontrée dans les chapitres 6 à 10.

▹ L'autre, qualifiée de *spectrale*, est énoncée et démontrée chapitre 16.

De l'égalité entre ces deux développements, on déduira au chapitre 17 la formule intégrale pour la multiplicité $m(\pi,\sigma)$ ($\pi \in \mathrm{Temp}(G)$, $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$) annoncée dans l'introduction.

CHAPITRE 5

LE DÉVELOPPEMENT GÉOMÉTRIQUE : DÉFINITIONS ET ÉNONCÉ

5.1. Un ensemble de tores

On définit $\underline{\mathcal{T}}$ comme l'ensemble des sous-tores T de H pour lesquels il existe une décomposition orthogonale $W = W' \oplus W''$ telle que, en notant H', H'' et G'' les groupes unitaires de W', W'' et $V'' = Z \oplus D \oplus W''$ respectivement, les conditions suivantes soient vérifiées :

- T est un tore maximal anisotrope de H'.
- G'' et H'' sont quasi-déployés sur F.

On fixe $\mathcal{T}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H(F)$ dans $\underline{\mathcal{T}}$. Remarquons que $\mathcal{T}$ est un ensemble fini.

Soient $T \in \underline{\mathcal{T}}$ et W', W'' comme précédemment.

On note $T_\natural$ l'ouvert de Zariski des éléments dont la restriction à W' n'a pas 1 pour valeur propre et a toutes ses valeurs propres de multiplicité 1.

Soient θ et θ' deux quasi-caractères sur $H(F)$ et $G(F)$ respectivement. On définit deux fonctions c_θ et $c_{\theta'}$ sur $T_\natural(F)$ de la façon suivante. Pour tout $t \in T_\natural(F)$, on a les décompositions

$$G_t(F) = G''(F) \times T(F) \quad \text{et} \quad H_t(F) = H''(F) \times T(F).$$

Par conséquent on a des identifications naturelles

$$\operatorname{Nil}\big(\mathfrak{g}''(F)\big) = \operatorname{Nil}\big(\mathfrak{g}_t(F)\big) \quad \text{et} \quad \operatorname{Nil}\big(\mathfrak{h}''(F)\big) = \operatorname{Nil}\big(\mathfrak{h}_t(F)\big).$$

On pose alors

$$c_{\theta'}(t) = \frac{1}{|\operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}''(F))|} \sum_{\mathcal{O} \in \operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}''(F))} c_{\theta',\mathcal{O}}(t),$$

$$c_{\theta}(t) = \frac{1}{|\operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}''(F))|} \sum_{\mathcal{O} \in \operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}''(F))} c_{\theta,\mathcal{O}}(t).$$

Si $f \in C_c^\infty(G(F))$ est une fonction très cuspidale, on posera $c_f = c_{\theta_f}$.

5.2. Un critère de convergence

Soit $T \in \underline{\mathcal{T}}$. On note W'_T et W''_T les espaces notés W' et W'' précédemment. On note H'_T le groupe unitaire de W'_T. Pour $t \in T(F)$, on définit

$$E''(t) = \mathrm{Ker}(t-1)_{|W'_T}$$

et $E'(t)$ son supplémentaire orthogonal dans W'_T. On notera respectivement $J'(t)$ et $J''(t)$ les groupes unitaires de $E'(t)$ et de $E''(t)$ et $\mathfrak{z}_t$ désignera le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{j}'(t)_t$. Remarquons que l'on a toujours $\mathfrak{z}_t \subset \mathfrak{t}$.

Lemme 5.2.1. — *Soit $t \in T(F)$. On a :*

(i) $\dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) \geqslant \dim(E''(t))$ *avec égalité si et seulement si $J'(t)_t$ est un tore ;*

(ii) *Il existe un bon voisinage $\omega \subset \mathfrak{t}(F)$ qui vérifie les deux conditions suivantes :*

- *Pour tous $X \in \omega$ et $\lambda \in F^\times$ tels que $\lambda X \in \omega$, on a $\mathfrak{z}_{t\exp(X)} = \mathfrak{z}_{t\exp(\lambda X)}$.*
- *Pour tout $X \in \omega \backslash \mathfrak{z}_t$, on a $\mathfrak{z}_t \subsetneq \mathfrak{z}_{t\exp(X)}$.*

Démonstration. — (i) T est un sous-tore maximal de $H'_{T,t} = J''(t) \times J'(t)_t$. On a donc une décomposition $T = T'' \times T'$ avec T'' et T' sous-tores maximaux de $J''(t)$ et $J'(t)_t$ respectivement. En particulier, on a $\dim(T'') = \dim(E''(t))$ et $\mathfrak{z}_t \subset \mathfrak{t}'$. On en déduit que

$$\dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) = \dim(T'') + \dim(\mathfrak{t}') - \dim(\mathfrak{z}_t) \geqslant \dim(T'') = \dim\big(E''(t)\big)$$

avec égalité si et seulement si $\mathfrak{t}' = \mathfrak{z}_t$, c'est-à-dire si et seulement si $J'(t)_t$ est un tore.

(ii) Il existe un bon voisinage $\omega \subset \mathfrak{t}(F)$ tel que pour tout $X \in \omega$ on ait

$$E''\big(t\exp(X)\big) = \mathrm{Ker}(X_{|E''(t)}) \quad \text{et} \quad J'\big(t\exp(X)\big)_{t\exp(X)} = J'\big(t\exp(X)\big)_{t,X}.$$

Soit ω un tel voisinage. Pour tous $X \in \omega$ et $\lambda \in F^\times$ tels que $\lambda X \in \omega$, on a alors

$$J'\big(t\exp(X)\big)_{t\exp(X)} = J'\big(t\exp(\lambda X)\big)_{t\exp(\lambda X)}$$

d'où $\mathfrak{z}_{t\exp(X)} = \mathfrak{z}_{t\exp(\lambda X)}$.

Soit $X \in \omega$ et $\widetilde{G}$ le groupe unitaire de l'orthogonal de $E'(t)$ dans $E'(t\exp(X))$. On a alors

$$J'\big(t\exp(X)\big)_t = \widetilde{G} \times J'(t)_t \quad \text{et} \quad J'\big(t\exp(X)\big)_{t\exp(X)} = \widetilde{G}_X \times J'(t)_{t,X}.$$

De plus, $Z(J'(t)_t)^0$ est contenu dans $J'(t)_{t,X}$, d'où $\mathfrak{z}_t \subset \mathfrak{z}_{t\exp(X)}$. Puisque X appartient au centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{j}'(t\exp(X))_{t,X}$, on a $X \in \mathfrak{z}_{t\exp(X)}$ donc $\mathfrak{z}_t \neq \mathfrak{z}_{t\exp(X)}$ si $X \notin \mathfrak{z}_t$. ∎

Pour X un F-espace vectoriel et $i \in \mathbb{R}$, on note :

▹ $C_i(X)$ l'espace des fonctions mesurables $\varphi : X \to \mathbb{C}$ vérifiant, pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in F^{\times 2}$,

$$\varphi(\lambda x) = |\lambda|_F^i \varphi(x);$$

▹ $C_{\geqslant i}(X)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur X engendré par les $C_j(X)$ pour $j \geqslant i$.

Soit $\chi : F^\times \to \{+1, -1\}$ un caractère quadratique. Pour $i \in \mathbb{R}$ on notera :

▹ $C_{i,\chi}(X)$ l'espace des fonctions mesurables $\varphi : X \to \mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in F^\times$,

$$\varphi(\lambda x) = \chi(\lambda)|\lambda|_F^i \varphi(x);$$

▹ $C_{\geqslant i,\chi}(X)$ l'espace de fonctions sur X engendré par $C_{i,\chi}(X)$ et les $C_j(X)$ pour $j > i$.

Soit $\delta : T(F) \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit :

▹ $C_{\geqslant\delta}(T)$ (resp. $C_{\geqslant\delta,\chi}(T)$) comme l'espace des fonctions f définies presque partout sur $T(F)$ et telle que pour tout $t \in T(F)$, il existe un bon voisinage ω de $\mathfrak{t}(F)$ et une fonction $\varphi \in C_{\geqslant\delta(t)}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$ (resp. $\varphi \in C_{\geqslant\delta(t),\chi}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$) vérifiant

$$\forall \mathrm{X} \in \omega, \quad f_{t,\omega}(\mathrm{X}) = \varphi(\overline{\mathrm{X}}) \quad \text{p.p.},$$

où $\overline{X}$ désigne la projection de X sur $\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F)$ (on renvoie au§ 1.3 pour la définition de $f_{t,\omega}$). Rappelons que l'on a défini au § 3.1 une fonction Δ sur $G_{\mathrm{ss}}(F)$.

Lemme 5.2.2. — *Posons*

$$\delta(t) = \min\left(\tfrac{1}{2}\big(\dim(\mathfrak{z}_t) - \dim(\mathfrak{t}) - \dim(E''(t))\big), -1\right).$$

Soit $f \in C_{\geqslant\delta,\chi_E}(T)$. *Alors l'intégrale* $\int_{T(F)} f(t)\Delta(t)^s\,\mathrm{d}t$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *et de plus la limite suivante existe :*

$$\lim_{s\to 0^+} \int_{T(F)} f(t)\Delta(t)^s\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. — Puisque $T(F)$ est compact, il suffit de montrer que pour tout $t \in T(F)$ la propriété suivante est satisfaite :

$$(*) \qquad \begin{cases} \textit{Il existe un voisinage } \Omega \textit{ de } t \textit{ tel que } \int_\Omega f(x)\Delta(x)^s dx \textit{ converge} \\ \textit{absolument pour } \mathrm{Re}(s) > 0 \textit{ et } \lim_{s\to 0^+} \int_\Omega f(x)\Delta(x)^s\,\mathrm{d}t \textit{ existe.} \end{cases}$$

Pour $t \in T(F)$ et pour X dans un bon voisinage assez petit de 0 dans $\mathfrak{t}(F)$, on a presque partout

$$\Delta\big(t\exp(X)\big) = \Delta(t)\big|N\big(\det(X_{|E''(t)})\big)\big|_F.$$

La fonction $\Delta_t : X \mapsto |N(\det(X_{|E''(t)}))|_F$ est invariante par $\mathfrak{z}_t(F) \subset \mathfrak{h}'_{T,t}(F)$ et presque partout homogène de degré $2\dim(E''(t))$. On pose

$$T(F)_n = \big\{t \in T(F) : \dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) \leqslant n\big\}$$

et on va montrer par récurrence sur n que (*) est vraie pour $t \in T(F)_n$.

Pour $t \in T(F)_0$, la fonction f est localement constante au voisinage de t (car $\mathfrak{z}_t = \mathfrak{t}$), donc le résultat est vérifié.

Supposons le résultat vérifié pour $n-1$ et soit $t \in T(F)_n$. On peut supposer que t n'est pas dans $T(F)_0$; on a alors

$$\delta(t) = \tfrac{1}{2}\big(\dim(\mathfrak{z}_t) - \dim(\mathfrak{t}) - \dim\big(E''(t)\big)\big).$$

Choisissons un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{t}(F)$ et $\varphi \in C_{\geqslant\delta(t),\chi_E}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$ tels que $f(t\exp(X)) = \varphi(\overline{X})$ p.p. pour $X \in \omega$. On peut décomposer φ sous la forme

$$\varphi = \sum_{i\geqslant\delta(t)} \varphi_i$$

avec $\varphi_{\delta(t)} \in C_{\delta(t),\chi_E}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$ et $\varphi_i \in C_i(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$ pour $i > \delta(t)$. Quitte à restreindre ω, on peut supposer que ω vérifie les conditions du lemme 5.2.1, que l'exponentielle sur ω préserve les mesures et que ω admet une décomposition

$$\omega = \omega_{\mathfrak{z}} \times \omega'$$

où $\omega_{\mathfrak{z}} \subset \mathfrak{z}_t$ est un voisinage de 0 et ω' est un réseau d'un supplémentaire de $\mathfrak{z}_t(F)$ dans $\mathfrak{t}(F)$. Pour $i \geqslant \delta(t)$, soit

$$f_i : T(F) \longrightarrow \mathbb{C}$$

la fonction définie par

$$f_i\big(t\exp(X)\big) = \varphi_i(X) \text{ pour } X \in \omega \quad \text{et} \quad f_i(t') = 0 \text{ si } t' \notin t\exp(\omega).$$

On a alors

$$f_i \in C_{\geqslant\delta,\chi_E}(T). \tag{1}$$

En effet, pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_F^{\times 2}$, la fonction g_λ définie par

$$g_\lambda\big(t\exp(X)\big) = f\big(t\exp(\lambda X)\big) \text{ pour } X \in \omega \quad \text{et} \quad g_\lambda(t') = 0 \text{ si } t' \notin t\exp(\omega)$$

appartient à $C_{\geqslant\delta,\chi}(T)$ car pour tout $X \in \omega$, on a $\mathfrak{z}_{t\exp(X)} = \mathfrak{z}_{t\exp(\lambda X)}$. Comme f_i est combinaison linéaire des fonctions g_λ, on a bien (1).

Pour $X \in \omega\backslash\mathfrak{z}_t(F)$ on a $\mathfrak{z}_t \subsetneq \mathfrak{z}_{t\exp(X)}$ donc $t\exp(X)$ appartient à $T(F)_{n-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les f_i vérifient (*) pour $t' = t\exp(X)$. Puisque l'exponentielle préserve les mesures sur ω, pour tout compact ω'' contenu dans $\omega\backslash\mathfrak{z}_t(F)$ et pour $\Re(s) > 0$, l'intégrale

$$\int_{\omega''} \left|\varphi_i(X)\right| \Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X$$

converge et admet une limite lorsque s tend vers 0.

Choisissons une base du réseau ω' et soit Ω' l'ensemble des éléments de ce réseau dont la décomposition dans cette base s'écrit avec des coefficients dont la valuation minimum est 0 ou 1. Pour montrer la convergence de $\int_{t\exp(\omega)} f(t')\Delta(t')^s \, \mathrm{d}t'$ pour $\Re(s) > 0$, il suffit de montrer pour tout $i \geqslant \delta(t)$, la convergence de

$$(2) \quad \int_{\omega} \left|\varphi_i(X)\right| \Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X = \sum_{k \geqslant 0} \int_{\omega_{\mathfrak{z}} \times (\pi_F^{2k}\Omega')} \left|\varphi_i(\overline{X})\right| \Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X$$

$$= \mathrm{vol}(\omega_{\mathfrak{z}}) \Big(\sum_{k \geqslant 0} |\pi_F|_F^{2k(i+2s\dim(E''(t))+\dim(\mathfrak{t})-\dim(\mathfrak{z}_t))} \Big) \int_{\Omega'} \left|\varphi_i(\overline{X})\right| \Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X.$$

On a

$$\begin{aligned} i + \dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) &\geqslant \delta(t) + \dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) - \dim(E''(t))\big) \end{aligned}$$

et d'après le (i) du lemme 5.2.1, on a aussi $\dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) \geqslant \dim(E''(t))$. Par conséquent

$$\mathrm{Re}\left(i + 2s\dim(E''(t)) + \dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t)\right) \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s)\dim\left(E''(t)\right) \geqslant 0.$$

On ne peut avoir égalité dans l'inégalité précédente que si

$$\dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{z}_t) = \dim(E''(t)) = 0,$$

c'est-à-dire si $t \in T(F)_0$, cas que l'on a exclu. On en déduit que l'intégrale (2) est égale à une série convergente. Pour $i > \delta(t)$, le calcul précédent nous montre même que l'intégrale

$$\int_{\omega'} \varphi_i(X)\Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X$$

admet une limite lorsque $s \to 0$. Pour montrer l'existence de la limite en 0, il reste à montrer que pour $i = \delta(t)$, l'intégrale

$$\int_{\omega'} \varphi_i(X)\Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X$$

admet une limite lorsque s tend vers 0. Si E/F est ramifiée, on peut alors trouver $\lambda \in \mathcal{O}_F^\times$ tel que $\chi_E(\lambda) = -1$ et le changement de variable $X \mapsto \lambda X$ montre que cette intégrale est toujours nulle.

Reste le cas où E/F est non ramifiée. Définissons Ω'' comme le sous-ensemble des éléments de Ω' dont les coefficients dans la base déjà fixée ont une valuation minimale nulle. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega'} \varphi_i(X)\Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X \\
&\qquad = \sum_{k\geqslant 0} \int_{\pi_F^k \Omega''} \varphi_i(X)\Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X \\
&\qquad = \Big(\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k |\pi_F|_F^{(\delta(t)+2s\,\dim(E''(t))+\dim(\mathfrak{t})-\dim(\mathfrak{z}_t))} \Big) \int_{\Omega''} \varphi_i(X)\Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X \\
&\qquad = \big(1 + |\pi_F|_F^{\delta(t)+2s\,\dim(E''(t))+\dim(\mathfrak{t})-\dim(\mathfrak{z}_t)}\big)^{-1} \int_{\Omega''} \varphi_i(X)\Delta_t(X)^s \, \mathrm{d}X
\end{aligned}$$

et cette expression admet une limite lorsque $s \to 0^+$. ∎

5.3. Définition de $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f)$

Soient θ et θ' des quasi-caractères sur $H(F)$ et $G(F)$ respectivement. Rappelons que l'on a défini au § 5.1, pour $T \in \underline{\mathcal{T}}$, des fonctions c_θ et $c_{\theta'}$ presque partout sur $T(F)$.

Lemme 5.3.1. — *Soit $T \in \underline{\mathcal{T}}$. Alors la fonction suivante appartient à $C_{\geqslant\delta,\chi_E}(T)$:*

$$t \longmapsto c_{\theta'}(t)\, c_\theta(t)\, D^H(t)^{\frac{1}{2}}\, D^G(t)^{\frac{1}{2}}\, \Delta(t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. D'après le lemme 5.2.2, l'expression suivante est donc bien définie :

$$J_{\mathrm{geom}}(\theta, f) = \sum_{T\in\underline{\mathcal{T}}} \big|W(H,T)\big|^{-1} \nu(T) \lim_{s\to 0^+} \int_{T(F)} c_\theta(t)\, c_f(t)\, D^H(t)^{\frac{1}{2}} D^G(t)^{\frac{1}{2}}\, \Delta(t)^{s-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

Preuve du lemme 5.3.1. — On reprend les notations du paragraphe 5.1. On a associé à T des sous-espaces W' et W'' de W et des groupes unitaires H', H'' et G''. Pour $t \in T(F)$, on note $E''(t)$ le noyau de $t-1$ dans W' et $E'(t)$ le supplémentaire orthogonal de $E''(t)$ dans W'. On désignera par $J'(t)$ et $J''(t)$ les groupes unitaires de $E'(t)$ et $E''(t)$ respectivement, et par $\widetilde{G}(t)$ le groupe unitaire de $Z \oplus D \oplus W'' \oplus E''(t)$. On a alors

$$G_t = \widetilde{G}(t)\, J'(t)_t \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_t = \widetilde{\mathfrak{g}}(t) \oplus \mathfrak{j}'(t)_t.$$

On définit les fonctions $\delta_0, \delta_G, \delta_H : T(F) \to \mathbb{Z}$ suivantes :

$\delta_0(t) = \frac{1}{2}\big(\delta(H_t) - \delta(H'') + \delta(G_t) - \delta(G'')\big) - \dim\big(E''(t)\big),$

$$\delta_G(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\delta(G'') - \delta(G_t) + 2) & \text{si } \dim(E''(t)) \geqslant 2 \text{ et } \dim(W'' \oplus E''(t)) \equiv 0\ [2], \\ \frac{1}{2}(\delta(G'') - \delta(G_t)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\delta_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\delta(H'') - \delta(H_t) + 2) & \text{si } \dim(E''(t)) \geqslant 2 \text{ et } \dim(W'' \oplus E''(t)) \equiv 1\ [2], \\ \frac{1}{2}(\delta(H'') - \delta(H_t)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On va montrer dans un premier temps que

$$c_{\theta'} \in C_{\geqslant \delta_G}(T), \quad c_\theta \in C_{\geqslant \delta_H}(T), \quad \big(D^H D^G \Delta^{-1}\big)^{\frac{1}{2}} \in C_{\geqslant \delta_0, \chi_0}(T)$$

où χ_0 est le caractère trivial de $F^\times$.

Soit $t \in T(F)$. Alors pour tout X dans un bon voisinage assez petit de 0 dans $\mathfrak{t}(F)$, on a

$$D^H\big(t\exp(X)\big) = D^H(t) D^{H_t}(X), \quad D^G\big(t\exp(X)\big) = D^G(t) D^{G_t}(X),$$
$$\Delta\big(t\exp(X)\big) = \Delta(t)\big|N\big(\det\big(X''_{E''(t)/\operatorname{Ker}(X'')}\big)\big)\big|_F,$$

où X'' est la restriction de X à $E''(t)$. La fonction $X \mapsto |N(\det(X''_{E''(t)/\operatorname{Ker}(X'')}))|_F$ est homogène de degré $2\dim(E''(t))$ en dehors d'un fermé de mesure nulle et elle est clairement invariante par $\mathfrak{z}_t(F)$. Pour X en dehors d'un ensemble de mesure nulle, on a $H_{t,X} = TH''$ et $G_{t,X} = TG''$. Sur cet ensemble D^{H_t} et D^{G_t} sont homogènes de degrés respectifs

$$\dim(H_t) - \dim(H_{t,X}) = \delta(H_t) - \delta(H'') \ \text{ et } \ \dim(G_t) - \dim(G_{t,X}) = \delta(G_t) - \delta(G'').$$

Elles sont aussi invariantes par $\mathfrak{z}_t(F)$ car $\mathfrak{z}_t$ est central dans $\mathfrak{h}_t$ et $\mathfrak{g}_t$. On en déduit que $\big(D^H D^G \Delta^{-1}\big)^{\frac{1}{2}} \in C_{\geqslant \delta_0, \chi_0}(T)$.

Soit $t \in T(F)$. Il existe un bon voisinage $\omega \subset \mathfrak{g}_t(F)$ de 0 de sorte que l'on ait

$$\theta'\big(t\exp(X)\big) = \sum_{\mathcal{O} \in \operatorname{Nil}(\mathfrak{g}_t)} c_{\theta', \mathcal{O}}(t)\, \widehat{\jmath}^{G_t}(\mathcal{O}, X)$$

pour presque tout $X \in \omega$. Par linéarité on peut supposer que

$$\theta'\big(t\exp(X)\big) = \widehat{\jmath}^{G_t}(\mathcal{O}, X)$$

pour presque tout $X \in \omega$. Cette fonction est invariante par translation par les éléments du centre de $\mathfrak{g}_t(F)$ donc aussi par $\mathfrak{z}_t(F)$. Soit $X \in \omega \cap \mathfrak{t}(F)$ tel que $t\exp(X) \in T_\natural(F)$. Pour presque tout Y dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_{t,X}(F)$, on a un développement

$$\widehat{j}^{G_t}(\mathcal{O}, X+Y) = \sum_{\mathcal{O}' \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))} c_{\theta',\mathcal{O}'}\big(t\exp(X)\big)\, \widehat{j}^{G''}(\mathcal{O}', Y).$$

La fonction $X \mapsto c_{\theta'}(t\exp(X))$ est une combinaison linéaire des coefficients $c_{\theta',\mathcal{O}'}(t\exp(X))$ pour $\mathcal{O}' \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}''(F))$. On déduit des propriétés d'homogénéité de $\widehat{j}(\mathcal{O}, .)$ et $\widehat{j}(\mathcal{O}', .)$ que la fonction $X \in \omega \mapsto c_{\theta'}(t\exp(X))$ est dans $C_{\geqslant \frac{1}{2}(\delta(G'')-\dim(\mathcal{O}))}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$. De plus, on a $\dim(\mathcal{O}) \leqslant \delta(G_t)$.

Cela conclut la preuve si $\dim(E''(t)) \leqslant 1$ ou $\dim(W'' \oplus E''(t))$ est impaire.

Si $\dim(E''(t)) \geqslant 2$ et $\dim(W'' \oplus E''(t))$ est paire, il suffit de montrer que pour $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}} \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_t(F))$ et $X \in \omega \cap \mathfrak{t}(F)$ en position générale, la fonction $Y \mapsto \widehat{j}(\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}, X+Y)$ est nulle dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}''(F)$.

Dans le cas considéré $\widetilde{G}(t)$ est un groupe unitaire de dimension impaire, donc $\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$ admet une unique orbite nilpotente régulière $\widetilde{\mathcal{O}}$. On a une factorisation $\widehat{j}(\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}, .) = \widehat{j}(\widetilde{\mathcal{O}}, .)\tau(.)$ relativement à la décomposition

$$\mathfrak{g}_t(F) = \widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F) \oplus \mathfrak{j}'(t)_t(F),$$

où τ est un quasi-caractère de $\mathfrak{j}'(t)_t(F)$. Or, $\widetilde{\mathcal{O}}$ est induite à partir de l'orbite $\{0\}$ d'une sous-algèbre de Borel et donc $\widehat{j}(\widetilde{\mathcal{O}}, .)$ est à support dans l'ensemble des éléments qui appartiennent à une sous-algèbre de Borel. Soit $X \in \omega \cap \mathfrak{t}(F)$ que l'on décompose en

$$X = X'' + X'$$

avec $X' \in \mathfrak{j}'(t)_t(F)$ et $X'' \in \mathfrak{j}''(t)(F) \cap \mathfrak{t}(F) \subset \widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$. Le groupe $J''(t) \cap T$ est un tore anisotrope de dimension plus grande que 2. Donc pour X dans un ouvert de Zariski, X'' possède un voisinage qui ne contient aucun élément dans une sous-algèbre de Borel de $\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$. Par conséquent $\widehat{j}(\widetilde{\mathcal{O}}, .)$ s'annule au voisinage de X''. On en déduit le résultat pour $c_{\theta'}$. On procède de même pour c_θ.

Un calcul indolore nous donne pour $t \in T(F)$,

$$\delta_G(t) + \delta_H(t) + \delta_0(t) = \begin{cases} -\dim\big(E''(t)\big) + 1 & \text{si } \dim\big(E''(t)\big) \geqslant 2, \\ -\dim\big(E''(t)\big) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\dim(E''(t)) \geqslant 2$, on a $\delta(t) = \frac{1}{2}\big(\dim(\mathfrak{z}_t) - \dim(\mathfrak{t}) - \dim(E''(t))\big)$ et d'après le (i) du lemme 5.2.1, $\delta(t) \leqslant -\dim(E''(t))$. Si $\dim(E''(t)) = 0$, on a $\delta(t) \leqslant -1$. Enfin, si $\dim(E''(t)) = 1$, toujours d'après le (i) du lemme 5.2.1, on a $\delta(t) \leqslant -\dim(E''(t))$ avec égalité seulement si $J'(t)_t$ est un tore. On en déduit dans tout les cas que $\delta_G(t) + \delta_H(t) + \delta_0(t) \geqslant \delta(t)$ et qu'on ne peut avoir égalité que si $J'(t)_t$ est un tore et $\dim(E''(t)) = 1$. Pour obtenir le lemme il nous reste à établir le fait suivant :

Soit $t \in T(F)$ *tel que* $J'(t)_t$ *est un tore et* $\dim(E''(t)) = 1$, *alors il existe un bon voisinage* ω_T *de* 0 *dans* $\mathfrak{t}(F)$ *tel que les fonctions*

$$X \in \omega_T \longmapsto c_{\theta'}\big(t\exp(X)\big) \quad et \quad X \in \omega_T \longmapsto c_{\theta}\big(t\exp(X)\big)$$

possèdent les propriétés suivantes :

- *Si* $\dim(W'')$ *est paire, alors*
  $c_{\theta'}(t\exp(\cdot))$ *est la restriction à* ω_T *d'un élément de* $C_{\geqslant\delta_G(t),\chi_E}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$,
  $c_{\theta}(t\exp(\cdot))$ *est la restriction à* ω_T *d'un élément de* $C_{\geqslant\delta_H(t),\chi_0}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$.
- *Si* $\dim(W'')$ *est impaire, alors*
  $c_{\theta'}(t\exp(\cdot))$ *est la restriction à* ω_T *d'un élément de* $C_{\geqslant\delta_G(t),\chi_0}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$,
  $c_{\theta}(t\exp(\cdot))$ *est la restriction à* ω_T *d'un élément de* $C_{\geqslant\delta_H(t),\chi_E}(\mathfrak{t}(F)/\mathfrak{z}_t(F))$.

On démontre ceci pour $c_{\theta'}$, la preuve étant la même pour c_θ.

Puisque $J'(t)_t$ est un tore on a une identification

$$\mathrm{Nil}\big(\mathfrak{g}_t(F)\big) = \mathrm{Nil}\big(\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)\big).$$

D'après ce qui précède, il n'y a rien à dire si $\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)) = \varnothing$. On suppose donc que $\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)) \neq \varnothing$.

Dans le cas $\dim(W'')$ impaire, $\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière $\widetilde{\mathcal{O}}$ et $\mathfrak{g}''(F)$ possède deux orbites nilpotentes régulières $\mathcal{O}^+$ et $\mathcal{O}^-$. Soit ω un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_t(F)$ assez petit. Par linéarité, on peut supposer que $\theta'_{t,\omega} = \widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}}, .)$ sur ω. On a pour $X \in \omega \cap \mathfrak{t}(F)$ en position générique un développement au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}''(F)$ de la forme

$$\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}}, X+Y) = \sum_{\mathcal{O}\in\ \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))} c_{\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}},.),\mathcal{O}}(X)\,\widehat{\jmath}(\mathcal{O}, Y).$$

Par définition, on a

$$c_{\theta'}(t\exp(X)) = \tfrac{1}{2}\big(c_{\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}},.),\mathcal{O}^+}(X) + c_{\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}},.),\mathcal{O}^-}(X)\big).$$

Pour $\lambda \in F^\times$ et presque tout $X \in \mathfrak{t}(F)$, $Y \in \mathfrak{g}''(F)$, on a

$$\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}}, \lambda X + \lambda Y) = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\delta(G_t)}\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}}, X+Y), \quad \widehat{\jmath}(\mathcal{O}^\pm, \lambda Y) = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\delta(G'')}\widehat{\jmath}(\lambda\mathcal{O}^\pm, Y)$$

et la multiplication par λ conserve $\{\mathcal{O}^+, \mathcal{O}^-\}$. On en déduit le résultat.

Dans le cas $\dim(W'')$ paire, $\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$ possède deux orbites nilpotentes régulières $\widetilde{\mathcal{O}}^+$ et $\widetilde{\mathcal{O}}^-$ alors que $\mathfrak{g}''(F)$ ne possède qu'une orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}''$. Comme auparavant, on peut fixer un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_t(F)$ assez petit et supposer que $\theta'_{t,\omega} = \widehat{\jmath}(\widetilde{\mathcal{O}}^+, .)$ presque partout sur ω. Pour $X \in \omega \cap \mathfrak{t}(F)$

en position générique, on a un développement au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}''(F)$ de la forme

$$\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathfrak{O}}^+, X+Y) = \sum_{\mathcal{O}\in \operatorname{Nil}(\mathfrak{g}''(F))} c_{\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathfrak{O}}^+,.),\mathcal{O}}(X)\,\widehat{\jmath}(\mathcal{O}, Y).$$

Par définition, on a

$$c_{\theta'}\big(t\exp(X)\big) = c_{\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathfrak{O}}^+,.),\mathcal{O}''}(X).$$

La fonction $\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathfrak{O}}^+,.) + \widehat{\jmath}(\widetilde{\mathfrak{O}}^-,.)$ est à support dans l'ensemble des éléments de $\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$ qui appartiennent à une sous-algèbre de Borel. Pour $X \in \mathfrak{t}(F)$ en position générale, la projection X'' de X sur $\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$ suivant $\mathfrak{j}'(t)_t(F)$ est non nulle et appartient à un tore anisotrope de dimension 1, donc n'appartient à aucune sous-algèbre de Borel de $\widetilde{\mathfrak{g}}(t)(F)$ (car $\widetilde{G}(t)$ est un groupe unitaire de dimension paire). Par conséquent, pour presque tout $X \in \mathfrak{t}(F)$, la fonction $\widehat{\jmath}(\mathcal{O}^+,.) + \widehat{\jmath}(\mathcal{O}^-,.)$ s'annule au voisinage de X. Pour $\lambda \in F^\times$ et presque tous $X \in \mathfrak{t}(F)$, $Y \in \mathfrak{g}''(F)$, on a donc

$$\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathfrak{O}}^+, \lambda X + \lambda Y) = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\delta(G_t)}\widehat{\jmath}(\lambda\widetilde{\mathfrak{O}}^+, X+Y) = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\delta(G_t)}\chi_E(\lambda)\,\widehat{\jmath}(\widetilde{\mathfrak{O}}^+, X+Y)$$

d'après ce qui précède et $\widehat{\jmath}(\mathcal{O}'', \lambda Y) = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\delta(G'')}\widehat{\jmath}(\mathcal{O}'', Y)$. On en déduit alors ce que l'on voulait ∎

5.4. Énoncé du développement géométrique

C'est le théorème suivant dont la preuve occupera les chapitres 6 à 10. On renvoie à au chapitre 4 pour la définition de $J_N(\theta, f)$ et au § 5.3 pour la définition de $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f)$.

Théorème 5.4.1. — *Soient θ un quasi-caractère de $H(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. On a alors*

$$\lim_{N\to\infty} J_N(\theta, f) = J_{\mathrm{geom}}(\theta, f).$$

5.5. Énoncé du théorème pour les algèbres de Lie

Le caractère ξ de $U(F)$ se descend à l'algèbre de Lie via l'exponentielle, on en déduit un caractère encore noté ξ de $\mathfrak{u}(F)$. Pour θ un quasi-caractère de $\mathfrak{h}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ une fonction très cuspidale, on définit alors les expressions suivantes :

- Pour $g \in G(F)$ et $X \in \mathfrak{h}(F)$,

$$ {}^{g}f^{\xi}(X) = \int_{\mathfrak{u}(F)} f\big(g^{-1}(X+N)g\big)\xi(N)\,\mathrm{d}N. $$

- Pour $g \in G(F)$, $J(\theta, f, g) = \int_{\mathfrak{h}(F)} \theta(X)\,{}^{g}f^{\xi}(X)\,\mathrm{d}X$.
- Pour $N \geqslant 1$, $J_N(\theta, f) = \int_{H(F)U(F)\backslash G(F)} \kappa_N(g)\,J(\theta, f, g)\,\mathrm{d}g$.

Pour $X \in \mathfrak{h}_{\mathrm{ss}}(F)$, on pose

$$ \Delta(X) = \big|N\big(\det(X_{|W/W''(X)})\big)\big|_F, $$

où $W''(X)$ est le noyau de X agissant sur W.

Pour $T \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathfrak{t}(F)_{\natural}$, on pose :

$$ c_f(X) = \frac{1}{|\operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}''(F))|} \sum_{\mathcal{O} \in \operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}''(F))} c_{\theta_f, \mathcal{O}}(X), $$

$$ c_\theta(X) = \frac{1}{|\operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}''(F))|} \sum_{\mathcal{O} \in \operatorname{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}''(F))} c_{\theta, \mathcal{O}}(X). $$

De façon similaire à ce que l'on a fait sur le groupe, on définit l'expression suivante :

$$ J_{\mathrm{geom}}(\theta, f) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\nu(T)}{|W(H,T)|} \lim_{s \to 0^+} \int_{\mathfrak{t}(F)} c_\theta(X)\, c_f(X)\, D^H(X)^{\frac{1}{2}}\, D^G(X)^{\frac{1}{2}}\, \Delta(X)^{s-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}X. $$

On peut maintenant énoncer l'analogue du théorème 5.4.1 pour les algèbres de Lie :

Théorème 5.5.1. — *Soient θ un quasi-caractère de $\mathfrak{h}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ une fonction très cuspidale. Alors on a*

$$ \lim_{N \to \infty} J_N(\theta, f) = J_{\mathrm{geom}}(\theta, f). $$

Les théorèmes 5.4.1 et 5.5.1 seront démontrés au chapitre 10.

CHAPITRE 6

DESCENTE À L'ALGÈBRE DE LIE

Fixons $x \in H_{ss}(F)$. Par la suite, on notera respectivement W'', V_0'' et V'' le noyau de $x-1$ dans respectivement W, V_0 et V, on notera W' l'orthogonal de W'' dans W (on a alors $W = W'' \oplus W'$) et on notera $G' = H'$, G'', H'' et G_0'' les groupes unitaires de respectivement W', V'', W'' et V_0'' (on a alors $G_x = G'_x G''$ et $H_x = H'_x H''$).

Soient $\omega' \subset \mathfrak{g}'_x(F)$ et $\omega'' \subset \mathfrak{g}''(F)$ deux bons voisinages de 0. On pose alors

$$\omega = \omega' \times \omega''.$$

C'est un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$. Soit

$$\Omega = (x \exp(\omega))^G.$$

On supposera jusqu'au chapitre 8 que l'on a $\mathrm{Supp}(f) \subset \Omega$.

6.1. Localisation de $J_N(\theta, f)$

On définit pour $g \in G(F)$ la fonction suivante sur $\mathfrak{h}_x(F)$:

$$^g f^{\xi}_{x,\omega}(X) = \int_{\mathfrak{u}_x(F)} {}^g f_{x,\omega}(X+N)\,\xi(N)\,\mathrm{d}N$$

On définit aussi

$$J_{x,\omega}(\theta, f, g) = \int_{\mathfrak{h}_x(F)} \theta_{x,\omega}(X)\, {}^g f^{\xi}_{x,\omega}(X)\,\mathrm{d}X,$$

$$J_{x,\omega,N}(\theta, f) = \int_{H_x(F)U_x(F)\backslash G(F)} \kappa_N(g)\, J_{x,\omega}(\theta, f, g)\,\mathrm{d}g,$$

et on pose enfin

$$C(x) = D^G(x)^{\frac{1}{2}} D^H(x)^{\frac{1}{2}} \Delta(x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lemme 6.1.1. — *On a l'égalité*

$$J_N(\theta, f) = C(x) J_{x,\omega,N}(\theta, f).$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve du lemme 8.2 de [**29**]. Rappelons pour la commodité du lecteur comment on procède. Par la formule d'intégration de Weyl, on a

$$J(\theta, f, g) = \sum_{T \in \mathcal{T}(H)} \left|W(H,T)\right|^{-1} \int_{T(F)} \theta(t) D^H(t) \int_{T(F)\backslash H(F)} {}^g f^{\xi}(t) \, \mathrm{d}h \, \mathrm{d}t.$$

Pour T et T' deux tores maximaux de H, on note :

$$W(T, T') = \{w \in H(F) \,;\ wTw^{-1} = T'\}/T(F).$$

On a alors les résultats suivants :

1) *Si* $T \in \mathcal{T}(H)$ *et* $t \in T(F) \cap H_{\mathrm{reg}}(F)$ *vérifient* $\int_{T(F)\backslash H(F)} {}^g f^{\xi}(t) \, \mathrm{d}h \neq 0$, *on a*

$$t \in \bigcup_{T_1 \in \mathcal{T}(H_x)} \ \bigcup_{w \in W(T_1, T)} w\big(x \exp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)\big) w^{-1}.$$

En effet, il existe dans ce cas un $u \in U(F)$ tel que $tu \in (x\exp(\omega))^G$. La partie semisimple de tu étant conjuguée à t, on a aussi $t \in (x\exp(\omega))^G$. Soient donc $X \in \omega$ et $y \in G(F)$ tels que $yty^{-1} = x\exp(X)$. On a

$$y(Z \oplus D) \subset \operatorname{Ker}\big(x\exp(X) - 1\big) \subset \operatorname{Ker}(x - 1) = V''$$

et il existe d'après le théorème de Witt un élément $y' \in G''(F) \subset G_x(F)$ tel que

$$y'y(Z \oplus D) = Z \oplus D.$$

Quitte à remplacer y par $y'y$ et X par $y'Xy'^{-1}$, on peut donc supposer que

$$y(Z \oplus D) = Z \oplus D.$$

Alors yty^{-1} agit trivialement sur $Z \oplus D$ donc $x\exp(X)$ aussi et $X \in \mathfrak{h}_x(F)$. Quitte à conjuguer encore X par un élément de $H_x(F)$, on peut certainement supposer qu'il existe $T_1 \in \mathcal{T}(H_x)$ tel que $X \in \mathfrak{t}_1(F) \cap \omega$. Soit h la restriction de y^{-1} à W, de sorte que $t = hx\exp(X)h^{-1}$. La conjugaison par h envoie donc $Z_H(x\exp(X))^0$ sur $Z_H(t)^0$. Puisque t est régulier dans H, on a

$$Z_H(t)^0 = T \quad \text{et} \quad Z_H(x\exp(X))^0 = T_1.$$

2) *Pour* $T \in \mathcal{T}(H)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(H_x)$, $w_1 \in W(T_1, T)$, $w_2 \in W(T_2, T)$, *les ensembles suivants sont disjoints ou égaux :*

$$w_1\big(x\exp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)\big) w_1^{-1} \quad \textit{et} \quad w_2\big(x\exp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega)\big) w_2^{-1}$$

Lorsque ces ensembles sont égaux, on a $T_1 = T_2$.

En effet, soient $y_1, y_2 \in H(F)$ qui relèvent w_1 et w_2. On pose $y = y_2^{-1}y_1$. Si les ensembles en question ne sont pas disjoints, on a

$$y\big(x\exp(\omega)\big)\,y^{-1} \cap x\exp(\omega) \neq \varnothing.$$

Donc $y \in Z_H(x)(F) = H_x(F)$ et la conjugaison par y envoie T_1 sur T_2 et ω sur ω.

3) *Soient $T \in \mathcal{T}(H)$, $T_1 \in \mathcal{T}(H_x)$ et $w_1 \in W(T_1, T)$. Alors le nombre d'éléments $w_2 \in W(T_1, T)$ tels que*

$$w_2\big(x\exp(\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega)\big)\,w_2^{-1} = w_1\big(x\exp(\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega)\big)\,w_1^{-1}$$

est égal à $|W(H_x, T_1)|$.

En effet d'après ce qu'on vient de voir, l'ensemble de ces éléments est en bijection avec $\{y \in H_x(F) : yT_1y^{-1} = T_1\}/T_1(F)$ qui est précisément $W(H_x, T_1)$.

4) *Soit $T_1 \in \mathcal{T}(H_x)$. Alors il existe un unique tore $T \in \mathcal{T}(H)$ tel que $W(T_1, T) \neq \varnothing$ et on a alors*

$$\big|W(T_1, T)\big| = \big|W(H, T)\big|.$$

L'existence et l'unicité de T sont évidentes puisque $\mathcal{T}(H)$ est précisément un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores maximaux de H. Soit donc T l'unique élément de $\mathcal{T}(H)$ tel que $W(T_1, T) \neq \varnothing$ et fixons $w_1 \in W(T_1, T)$. On a alors une bijection $w \mapsto ww_1^{-1}$ entre $W(T_1, T)$ et $W(H, T)$.

On déduit des points 1) à 4) ci-dessus que l'on a

$$\begin{aligned} J(\theta, f, g) = \sum_{\substack{T_1\in\mathcal{T}(H_x)\\ T\in\mathcal{T}(H)}} \sum_{w_1\in W(T_1,T)} & \big|W(H,T)\big|^{-1}\cdot\big|W(H_x,T_1)\big|^{-1} \\ & \int_{\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega} D^H\big(w_1\big(x\exp(X)\big)\,w_1^{-1}\big)^{\frac12}\,\theta\big(w_1\big(x\exp(X)\big)\,w_1^{-1}\big) \\ & \qquad J_H\big(w_1\big(x\exp(X)\big)w_1^{-1}, {}^g f^\xi\big)\,\mathrm{d}X \\ = \sum_{T_1\in\mathcal{T}(H_x)} \big|W(H_x,T_1)\big|^{-1} & \int_{\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega} D^H\big(x\exp(X)\big)^{\frac12}\,\theta\big(x\exp(X)\big) \\ & \qquad J_H\big(x\exp(X), {}^g f^\xi\big)\,\mathrm{d}X \end{aligned}$$

Pour $X \in \omega \cap \mathfrak{t}_1(F) \cap \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$ on a $D^H(x\exp(X)) = D^H(x)D^{H_x}(X)$ et

$$J_H\big(x\exp(X), {}^g f^\xi\big) = D^H(x)^{\frac12}\int_{H_x(F)\backslash H(F)} J_{H_x}\big(x\exp(X), {}^g f^\xi\big)\,\mathrm{d}h.$$

D'après la formule de Weyl sur H_x, on a donc

$$J_N(\theta, f) = D^H(x)\int_{H_x(F)U(F)\backslash G(F)} \kappa_N(g)\int_{\mathfrak{h}_x(F)} \varphi_g(X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}g,$$

où

$$\varphi_g(X) = \begin{cases} \theta_{x,\omega}(X)\, {}^g f^{\xi}\big(x\exp(X)\big) & \text{si } X \in \omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathfrak{u}^x(F) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{ad}(x) - 1_{|\mathfrak{u}(F)}\right)$. On a alors

$$\mathfrak{u}(F) = \mathfrak{u}_x(F) \oplus \mathfrak{u}^x(F).$$

On a fixé une mesure sur $\mathfrak{u}(F)$ et on suppose que cette mesure est produit d'une mesure sur $\mathfrak{u}_x(F)$ et d'une mesure sur $\mathfrak{u}^x(F)$. Munissons

$$U^x(F) = \exp\left(\mathfrak{u}^x(F)\right)$$

de la mesure image par l'exponentielle. Pour $X \in \omega \cap \mathfrak{h}_{x,\mathrm{reg}}(F)$ et $g \in G(F)$, on a

$${}^g f^{\xi}\big(x\exp(X)\big) = \int_{U_x(F)\backslash U(F)} \int_{U_x(F)} {}^g f\big(x\exp(X)uv\big)\,\xi(uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Pour $u \in U_x(F)$, l'application $v \mapsto \overline{(x\exp(X)u)^{-1}v^{-1}x\exp(X)uv}$ est un isomorphisme de $U^x(F)$ sur $U_x(F)\backslash U(F)$ (la barre désigne la classe d'un élément dans $U_x(F)\backslash U(F)$). Son jacobien est

$$\left|\det\left(1 - \mathrm{ad}(x\exp(X)u)_{|\mathfrak{u}^x(F)}\right)\right|_F = \left|\det\left(1 - \mathrm{ad}(x\exp(X))_{|\mathfrak{u}^x(F)}\right)\right|_F$$

et on a, d'après la propriété 3.1 (7) de [**29**] sur les bons voisinages,

$$\left|\det\left(1 - \mathrm{ad}(x\exp(X))_{|\mathfrak{u}^x(F)}\right)\right|_F = \left|\det(1 - \mathrm{ad}(x)_{|\mathfrak{u}^x(F)})\right|_F.$$

On a un isomorphisme de F-espace vectoriel

$$W' \otimes_F (Fv_1 \oplus \cdots \oplus Fv_r) \longrightarrow u^x(F), \quad w' \otimes z \longmapsto c(z, w').$$

On en déduit que le jacobien de notre application est $\Delta(x)^r$. L'application suivante est une bijection qui préserve les mesures :

$$\mathfrak{u}_x(F) \longrightarrow U_x(F), \quad N \longmapsto \exp(-X)\exp(X+N).$$

Puisque $\xi(\exp(-X)\exp(X+N)) = \xi(N)$, on a

$$\begin{aligned} {}^g f^{\xi}\big(x\exp(X)\big) &= \Delta(x)^r \int_{U^x(F)} \int_{U_x(F)} {}^g f\big(v^{-1}x\exp(X)uv\big)\,\xi(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \Delta(x)^r \int_{U^x(F)} \int_{\mathfrak{u}_x(F)} {}^{vg} f\big(x\exp(X+N)\big)\,\xi(N)\,\mathrm{d}N\,\mathrm{d}v \\ &= \Delta(x)^r \int_{U^x(F)} {}^{vg} f^{\xi}_{x,\omega}(X)\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

La flèche naturelle $U^x(F) \to U_x(F)\backslash U(F)$ étant une bijection qui préserve les mesures, on en déduit

$$J_N(\theta, f) = D^H(x)\Delta(x)^r \int_{U_x(F)H_x(F)\backslash G(F)} \kappa_N(g) \int_{\mathfrak{h}_x(F)} \theta_{x,\omega}(X)\, {}^g f^{\xi}_{x,\omega}(X)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}g.$$

On vérifie facilement, grâce au lemme 3.1.1, que l'on a $C(x) = D^H(x)\Delta(x)^r$, ce qui permet de conclure. ∎

6.2. Localisation de $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f)$

Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}$ on notera maintenant W'_T et W''_T les sous-espaces que l'on avait noté W' et W'' dans le § 5.1. Remarquons que l'ensemble des tores $\underline{\mathcal{T}}$ ne dépend que des espaces hermitiens W et D. Quand on voudra préciser par rapport à quels espaces l'ensemble $\underline{\mathcal{T}}$ est défini, on le notera plutôt $\underline{\mathcal{T}}(W, D)$.

Soit $\underline{\mathcal{T}}_x$ l'ensemble des tores $T \in \underline{\mathcal{T}}$ qui vérifient $T \subset H_x$ et $W' \subset W'_T$. C'est équivalent à dire que $T = T'T''$ où T' est un tore maximal anisotrope de H'_x et $T'' \in \underline{\mathcal{T}}(W'', D)$. On notera $\mathcal{T}_x$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H_x(F)$ dans $\underline{\mathcal{T}}_x$.

Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}_x$, on définit les fonctions $c_{\theta,x,\omega}$ et $c_{f,x,\omega}$ sur $\mathfrak{t}_\natural(F)$ par

$$c_{\theta,x,\omega}(X) = \begin{cases} c_\theta\big(x \exp(X)\big) & \text{si } X \in \omega, \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

$$c_{f,x,\omega}(X) = \begin{cases} c_f\big(x \exp(X)\big) & \text{si } X \in \omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note Δ'' la fonction définie sur $\mathfrak{h}_{x,ss}(F)$ par

$$\Delta''(X) = \big|N\big(\det(X_{|W''/W''(X)})\big)\big|_F$$

où $W''(X)$ est le noyau de X dans W''. On pose alors :

$$J_{\mathrm{geom},x,\omega}(\theta, f) = \sum_{T \in \mathcal{T}_x} \big|W(H_x, T)\big|^{-1} \nu(T) \lim_{s \to 0^+} \int_{\mathfrak{t}(F)} c_{\theta,x,\omega}(X) \\ c_{f,x,\omega}(X)\, D^{H_x}(X)^{\frac{1}{2}}\, D^{G_x}(X)^{\frac{1}{2}}\, \Delta''(X)^{s-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}X. \tag{1}$$

Lemme 6.2.1. — *On a l'égalité*

$$J_{\mathrm{geom}}(\theta, f) = C(x)\, J_{\mathrm{geom},x,\omega}(\theta, f).$$

Démonstration. — Il suffit encore une fois de reprendre la preuve du lemme 8.3 de [**29**]. On a les propriétés suivantes :

1) *Soient $T \in \mathcal{T}$ et $t \in T_\natural(F)$; si $c_f(t) \neq 0$ on a*

$$t \in \bigcup_{T_1 \in \mathcal{T}_x} \bigcup_{w_1 \in W(T_1,T)} w_1\big(x \exp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)\big) w_1^{-1}.$$

En effet, on a alors $t \in \mathrm{Supp}(\theta_f) \subset \Omega$. Il existe donc $X \in \omega$ et $y \in G(F)$ tels que $yty^{-1} = x\exp(X)$. Quitte à multiplier y par un élément de $G''(F)$, on peut supposer que $y \in H(F)$. Alors $yTy^{-1} \in \underline{\mathcal{T}}$ et on a

$$W' \subset \mathrm{Ker}\big(x\exp(X) - 1\big)^\perp = \mathrm{Ker}\big(yty^{-1} - 1\big)^\perp = W'_{yTy^{-1}},$$

$$yTy^{-1} \subset Z_H\big(x\exp(X)\big)^0 \subset H_x.$$

Donc yTy^{-1} appartient à $\underline{\mathcal{T}}_x$. Quitte à multiplier y par un élément de $H_x(F)$, on a enfin $yTy^{-1} \in \mathcal{T}_x$.

2) *Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_x$, $T \in \mathcal{T}$, $w_1 \in W(T_1,T)$ et $w_2 \in W(T_2,T)$. Alors les ensembles*

$$w_1\big(x\exp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)\big) w_1^{-1} \quad \textit{et} \quad w_2\big(x\exp(\mathfrak{t}_2(F) \cap \omega)\big) w_2^{-1}$$

sont disjoints ou égaux et s'ils sont égaux, on a $T_1 = T_2$.

3) *Soient $T \in \mathcal{T}$, $T_1 \in \mathcal{T}_x$ et $w_1 \in W(T_1,T)$. Alors le nombre d'éléments w_2 appartenant à $W(T_1,T)$ tels que*

$$w_1\big(x\exp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)\big) w_1^{-1} = w_2\big(x\exp(\mathfrak{t}_1(F) \cap \omega)\big) w_2^{-1}$$

est égal à $|W(H_x,T_1)|$.

4) *Soit $T_1 \in \mathcal{T}_x$. Alors il existe un unique $T \in \mathcal{T}$ tel que $W(T_1,T) \neq \varnothing$. On a alors*

$$\big|W(T_1,T)\big| = \big|W(H,T)\big| \quad \textit{et} \quad \nu(T) = \nu(T_1).$$

Les points 2), 3) et 4) se démontrent exactement de la même manière que les points correspondants dans la démonstration du lemme 6.1.1.

On déduit alors des quatre points précédents que pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \nu(T) \int_{\mathfrak{t}(F)} c_f(t)\, c_\theta(t)\, D^H(t)^{\frac12}\, D^G(t)^{\frac12}\, \Delta(t)^{s-\frac12}\, \mathrm{d}t \\
&\quad = \sum_{\substack{T_1\in\mathcal{T}_x\\ T\in\mathcal{T}}} \sum_{w_1\in W(T_1,T)} |W(H,T)|^{-1} \cdot |W(H_x,T_1)|^{-1} \nu(T_1) \\
&\qquad \int_{\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega} c_f\big(w_1 x \exp(X) w_1^{-1}\big)\, c_\theta\big(w_1 x \exp(X) w_1^{-1}\big) \\
&\qquad\qquad D^H\big(w_1 x \exp(X) w_1^{-1}\big)^{\frac12} D^G\big(w_1 x \exp(X) w_1^{-1}\big)^{\frac12} \\
&\qquad\qquad\quad \Delta\big(w_1 x \exp(X) w_1^{-1}\big)^{s-\frac12}\, \mathrm{d}X.
\end{aligned}$$

Les fonctions c_f, c_θ, D^H et Δ étant invariantes par conjugaison par $H(F)$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \nu(T) \int_{\mathfrak{t}(F)} c_\theta(t)\, c_f(t)\, D^H(t)^{\frac12}\, D^G(t)^{\frac12}\, \Delta(t)^{s-\frac12}\, \mathrm{d}t \\
&\quad = \sum_{T_1\in\mathcal{T}_x} |W(H_x,T_1)|^{-1} \nu(T_1) \int_{\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega} c_f\big(x\exp(X)\big)\, c_\theta\big(x\exp(X)\big) \\
&\qquad D^H\big(x\exp(X)\big)^{\frac12}\, D^G\big(x\exp(X)\big)^{\frac12}\, \Delta\big(x\exp(X)\big)^{s-\frac12}\, \mathrm{d}X
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
D^H\big(x\exp(X)\big) &= D^H(x)\, D^{H_x}(X), \\
D^G\big(x\exp(X)\big) &= D^G(x)\, D^{G_x}(X), \\
\Delta\big(x\exp(X)\big) &= \Delta(x)\, \Delta''(X)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \nu(T) \int_{\mathfrak{t}(F)} c_\theta(t)\, c_f(t)\, D^H(t)^{\frac12}\, D^G(t)^{\frac12}\, \Delta(t)^{s-\frac12}\, \mathrm{d}t \\
&\quad = C(x) \sum_{T_1\in\mathcal{T}_x} |W(H_x,T_1)|^{-1} \nu(T_1)\, \Delta(x)^s \\
&\qquad \int_{\mathfrak{t}_1(F)\cap\omega} c_{f,x,\omega}(X)\, c_{\theta,x,\omega}(X)\, D^{H_x}(X)^{\frac12}\, D^{G_x}(X)^{\frac12}\, \Delta''(X)^{s-\frac12}\, \mathrm{d}X.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en faisant tendre s vers 0. ∎

CHAPITRE 7

UTILISATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Posons $U'' = U \cap G''$. Soient $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}''(F))$ et θ'' un quasi-caractère de $\mathfrak{h}''(F)$. On pose

$$J_{\kappa''}(\theta'', \varphi) = \int_{U''(F)H''(F)\backslash G''(F)} \kappa''(g)\, J(\theta'', \varphi, g)\, \mathrm{d}g$$

où

$$J(\theta'', \varphi, g) = \int_{\mathfrak{h}''(F)} \theta''(X) \int_{\mathfrak{u}''(F)} {}^{g}\varphi(X+N)\, \xi(N)\, \mathrm{d}N\, \mathrm{d}X.$$

On suppose de plus qu'il existe un élément $S \in \mathfrak{h}''_{\mathrm{reg}}(F)$ de noyau nul dans W'' tel que l'on ait $\theta''(X) = \widehat{\jmath}^{H''}(S, X)$ pour tout $X \in \mathfrak{h}''(F) \cap \mathrm{Supp}(\varphi)^{G''}$.

On va exprimer $J_{\kappa''}(\theta'', \varphi)$ en fonction de la transformée de Fourier de φ.

Fixons un élément $\eta \in E$ non nul de trace nulle. Posons

$$\nu_0 = h(v_0, v_0).$$

Soit Ξ l'unique élément de $\overline{\mathfrak{u}''}(F)$ tel que pour tout $N \in \mathfrak{u}''(F)$ on ait

$$\xi(N) = \psi\big(\langle \Xi, N\rangle\big).$$

On a alors :

- $\Xi(W'') = 0$,
- $\Xi v_{i+1} = \xi_i v_i$ pour $i \in \{0, \ldots, r-1\}$,
- $\Xi v_0 = -\nu_0 \xi_0 v_{-1}$,
- $\Xi v_{-i} = -\xi_i v_{-i-1}$ pour $i \in \{1, \ldots, r-1\}$.

Soit Σ l'orthogonal de $\mathfrak{u}''(F) \oplus \mathfrak{h}''(F)$ dans $\mathfrak{g}''(F)$. On a

$$\Sigma = \mathfrak{a}(F) \oplus \mathfrak{u}''(F) \oplus \Lambda_0$$

où $\Lambda_0 = Fc(v_0, \eta v_0) \oplus \{c(v_0, w)\ ;\ w \in W''\}$.

LEMME 7.0.1. — *Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}''(F))$ et tout $Y \in \mathfrak{h}''(F)$, on a l'égalité*

$$\widehat{\varphi^{\xi}}(Y) = \int_{\Sigma} \widehat{\varphi}(\Xi + Y + X)\,\mathrm{d}X.$$

DÉMONSTRATION. — C'est la même que celle du lemme 9.2 de [**29**]. ∎

7.1. Étude des classes de conjugaison dans $\Xi + S + \Sigma$

Posons $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_{\mathfrak{u}''}$ où $\Lambda_{\mathfrak{u}''}$ est le sous-F-espace vectoriel de $\mathfrak{u}''(F)$ engendré par les $c(v_i, v_{i+1})$ pour i dans $\{0, \dots, r-1\}$ et les $c(v_i, \eta v_i)$ pour i dans $\{1, \dots, r\}$. On a alors le :

LEMME 7.1.1. — *$\Xi+S+\Sigma$ est stable par conjugaison par U'' et la conjugaison par U'' définit un isomorphisme de variétés algébriques :*

$$U'' \times (\Xi + S + \Lambda) \to \Xi + S + \Sigma.$$

DÉMONSTRATION. — Soient $X \in \Sigma$, $u \in U''$, $U \in \mathfrak{u}''$ et $H \in \mathfrak{h}''$. Puisque X est orthogonal à $\mathfrak{u}'' \oplus \mathfrak{h}''$, S est orthogonal à $\mathfrak{u}''$ et Ξ est orthogonal à $\mathfrak{h}''$. On a les égalités

$$\begin{aligned}\langle u(\Xi + S + X)u^{-1}, U + H\rangle &= \langle \Xi + S + X, u^{-1}(U + H)u\rangle \\ &= \langle \Xi, u^{-1}Uu\rangle + \langle \Xi, u^{-1}Hu - H\rangle + \langle S, H\rangle.\end{aligned}$$

Pour tout $N \in \mathfrak{u}''$, on a

$$\langle \Xi, N\rangle = \sum_{j=0}^{r-1} \xi_j h(Nv_j, v_{-j-1}).$$

On en déduit facilement que $\langle \Xi, u^{-1}Uu\rangle = \langle \Xi, U\rangle$ et $\langle \Xi, u^{-1}Hu - H\rangle = 0$. On a montré que, pour tout $H \in \mathfrak{h}''$ et tout $U \in \mathfrak{u}''$,

$$\left\langle u(\Xi + S + X)u^{-1} - \Xi - S, U + H\right\rangle = 0.$$

Par conséquent, $u(\Xi + S + X)u^{-1} - \Xi - S$ est un élément de l'orthogonal de $\mathfrak{u}'' \oplus \mathfrak{h}''$ c'est-à-dire de Σ. C'est la première partie du lemme.

On définit les sous-groupes suivants de U'' :

- $U_1 = U''$,
- $U_2 = \{u \in U_1 \,;\, u_{|Z_+} = \mathrm{Id}\}$,
- $U_3 = \{u \in U_2 \,;\, u(v_0) = v_0\}$,
- $U_4 = \{u \in U_3 \,;\, u_{|W''} = \mathrm{Id}\}$,
- $U_5 = \{1\}$.

On notera $\mathfrak{u}_i$ l'algèbre de Lie de U_i pour $i = 1, \dots, 5$. On définit aussi les sous-espaces suivants de Σ :

▹ $\Sigma_1 = \Sigma$,

▹ $\Sigma_2 = \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}_2 \oplus \{c(v_{-1}, v) \; ; \; v \in Z_+\}$,

▹ $\Sigma_3 = \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}_2$,

▹ $\Sigma_4 = \Lambda_0 \oplus \mathfrak{u}_4 \oplus \{c(v_0, v) \; ; \; v \in Z_+\}$,

▹ $\Sigma_5 = \Lambda$.

1) *Les ensembles Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont stables par conjugaison par U_1 ; l'ensemble Σ_4 est stable par conjugaison par U_2 et l'ensemble Σ_5 est stable par conjugaison par U_4.*

Pour Σ_1 c'est immédiat. Pour Σ_3, soit P_2 le sous-groupe parabolique de G'' des éléments qui stabilisent Z_+. Alors $\mathfrak{u}_2$ est l'algèbre de Lie du radical unipotent de P_2. Puisque $P'' \subset P_2$, $\mathfrak{u}_2$ est stable par conjugaison par P'' donc *a fortiori* par U_1. De plus pour $u \in U_1$ et $X_{\Lambda_0} \in \Lambda_0$ on a

$$uX_{\Lambda_0}u^{-1} - X_{\Lambda_0} \in \mathfrak{u}_1 \quad \text{et} \quad (uX_{\Lambda_0}u^{-1} - X_{\Lambda_0})_{|Z_+} = 0.$$

On en déduit que $uX_{\Lambda_0}u^{-1} \in \Sigma_3$ puis que Σ_3 est stable par conjugaison par U_1. Pour Σ_2, soit $P_\sharp$ le sous-groupe parabolique de G des éléments qui stabilisent $Ev_r \oplus \cdots \oplus Ev_2$ et $\mathfrak{u}_\sharp$ l'algèbre de Lie du radical unipotent de $P_\sharp$. On remarque que

$$\mathfrak{u}_2 \oplus \{c(v_{-1}, v); v \in Z_+\} = \mathfrak{u}_\sharp \oplus Ec(v_{-1}, v_1) \subset \mathfrak{p}_\sharp.$$

Puisque $P'' \subset P_\sharp$, la conjugaison par U_1 envoie $Ec(v_{-1}, v_1)$ dans $Ec(v_{-1}, v_1) \oplus \mathfrak{u}_\sharp$ et laisse stable $\mathfrak{u}_\sharp$. On a déjà vu que la conjugaison par U_1 envoie Λ_0 dans Σ_3. D'où le résultat pour Σ_2. Pour Σ_4 et Σ_5, on remarque que U_4 est le centre de U_2 et on utilise, pour tous $g \in G''$, $v, v' \in V''$, la formule

$$gc(v, v')g^{-1} = c(gv, gv').$$

On a les caractérisations suivantes de Σ_{i+1} dans Σ_i pour $i = 1, 2, 3$.

▹ Σ_2 est l'ensemble des $X \in \Sigma_1$ tels que $Xv_i = 0$ pour $i = 2, \dots, r$;

▹ Σ_3 est l'ensemble des $X \in \Sigma_2$ tels que $Xv_1 = 0$;

▹ Σ_4 est l'ensemble des $X \in \Sigma_3$ tels que $Xw = 0$ pour tout $w \in W''$

2) *Pour $i = 1, \dots, 4$, on a $u_i(\Xi + S)u_i^{-1} - (\Xi + S) \in \Sigma_i$ pour tout $u_i \in U_i$.*

Pour $i = 1$, c'est la première partie du lemme. Pour $i = 2, 3, 4$, il suffit d'utiliser les caractérisations précédentes de Σ_i dans Σ_{i-1}.

D'après 1) et 2), l'ensemble $\Xi + S + \Sigma_i$ est stable, pour $i = 1, \dots, 5$, par conjugaison par U_i. Pour $i = 1, \dots, 4$, on peut considérer le quotient $U_i \times_{U_{i+1}} (\Xi + S + \Sigma_{i+1})$ de $U_i \times (\Xi + S + \Sigma_{i+1})$ pour la relation d'équivalence définie par $(u_i v, X) \sim (u_i, vXv^{-1})$ pour tous $u_i \in U_i$, $v \in U_{i+1}$, $X \in \Xi + S + \Sigma_{i+1}$. Le lemme découlera alors directement de

3) *Pour $i = 1, \ldots, 4$, la conjugaison de U_i sur $\Xi + S + \Sigma_{i+1}$ se descend en un isomorphisme entre $U_i \times_{U_{i+1}} (\Xi + S + \Sigma_{i+1})$ et $\Xi + S + \Sigma_i$.*

Pour $i = 4$, U_4 centralise Σ_5 et on a un isomorphisme

$$\mathfrak{u}_4 \longrightarrow U_4, \quad Y \longmapsto I + Y.$$

Il suffit donc de montrer que l'application

$$\mathfrak{u}_4 \times \Sigma_5 \longrightarrow \Sigma_4,\ (Y, X) \longmapsto (I + Y)(\Xi + S)(I - Y) - (\Xi + S) + X = Y\Xi - \Xi Y + X$$

est un isomorphisme. Comme il s'agit d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels dont on vérifie facilement qu'ils ont même dimension, il suffit de vérifier que c'est une application injective. Soit $Y \in \mathfrak{u}_4$ tel que $Y\Xi - \Xi Y$ appartient à Σ_5 et montrons par récurrence descendante que l'on a $Yv_{-i} = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$, ce qui établira l'injectivité de l'application.

Puisque $Y\Xi - \Xi Y \in \Sigma_5$, on a

$$-\Xi Y v_{-r} = (Y\Xi - \Xi Y)v_{-r} \in F\eta v_r + F v_{r-1}.$$

Or, on a $h(\Xi Y v_{-r}, v_{-r}) = -h(Yv_{-r}, \Xi v_{-r}) = 0$ et

$$h(\Xi Y v_{-r}, v_{-r+1}) = -h(Yv_{-r}, \Xi v_{-r+1}) = \xi_{r-1} h(Yv_{-r}, v_{-r}) \in F\eta.$$

D'où $\Xi Y v_{-r} = 0$ et puisque $Y(Z_-)$ est contenu dans Z_+ et que Ξ est injective sur Z_+, on a $Yv_{-r} = 0$.

Soit $1 \leqslant i \leqslant r - 1$. Supposons que $Yv_{-j} = 0$ pour $j = i + 1, \ldots, r$. On a alors

$$(Y\Xi - \Xi Y)v_{-i} = \xi_i Y v_{-i-1} - \Xi Y v_{-i} = -\Xi Y v_{-i}.$$

Comme d'autre part on a aussi $Y\Xi - \Xi Y \in \Sigma_5$, on a également

$$\Xi Y v_{-i} \in F v_{-i+1} + F v_{-i-1} + F\eta v_{-i}.$$

Pour avoir $Yv_{-i} = 0$, il suffit donc de vérifier que

$$h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i}) = h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i-1}) = h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i+1}) = 0.$$

On a $h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i}) = h(v_{-i}, Y\Xi v_{-i}) = -\xi_i h(v_{-i}, Yv_{-i-1}) = 0$ et

$$h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i-1}) = h(v_{-i}, Y\Xi v_{-i-1}) = 0$$

car Ξv_{-i-1} appartient à Ev_{-i-2} et, puisque $\Xi v_{-i+1} \in F v_{-i}$,

$$h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i+1}) = -h(Yv_{-i}, \Xi v_{-i+1}) \in F\eta.$$

On en déduit que $h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i}) = h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i-1}) = h(\Xi Y v_{-i}, v_{-i+1}) = 0$.

Pour $i = 3$, U_3 normalise Σ_4 d'après 1) et on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_E(W'', Z_+) \times U_4 \longrightarrow U_3, \quad (Y, u_4) \longmapsto \exp(Y - Y^*)u_4,$$

où pour ℓ un endomorphisme linéaire de V'' on a noté $\ell^* \in \mathrm{End}_F(V'')$ l'application duale (on a identifié V'' à son propre dual via h). Il suffit donc de montrer que le morphisme suivant est un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_E(W'', Z_+) \longrightarrow \Sigma_3/\Sigma_4, \quad Y \longmapsto \exp(Y - Y^*)(\Xi + S)\exp(Y^* - Y) - (\Xi + S).$$

Soit $\underline{\Xi}$ l'endomorphisme de Z_+ qui vaut Ξ sur $v_2, \dots, v_r$ et envoie v_1 sur 0. Alors Σ_3/Σ_4 est aussi isomorphe à $\mathrm{Hom}_E(W'', Z_+)$ par $X \mapsto p_{Z_+} \circ X_{|W''}$ où p_{Z_+} est la projection sur Z_+ parallèlement à $Z_- \oplus D \oplus W''$. Via cet isomorphisme, l'application précédente devient

$$\mathrm{Hom}_E(W'', Z_+) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(W'', Z_+), \quad Y \longmapsto \underline{\Xi}Y - YS.$$

Les endomorphismes linéaires de $\mathrm{Hom}_E(W'', Z_+)$, $Y \mapsto YS$ et $Y \mapsto \underline{\Xi}Y$ commutent, le premier est semi-simple inversible et le second est nilpotent. On en déduit que l'application précédente est un isomorphisme.

Pour $i = 2$, U_2 normalise Σ_3 et on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_E(D, Z_+) \times U_3 \longrightarrow U_2, \quad (Y, u_3) \longmapsto \exp(Y - Y^*)u_3.$$

Comme pour $i = 3$, il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{Hom}_E(D, Z_+) \longrightarrow \Sigma_2/\Sigma_3, \quad Y \longmapsto \exp(Y - Y^*)(\Xi + S)\exp(Y^* - Y)$$

est un isomorphisme. L'application $\Lambda_2/\Lambda_3 \to Z_+$, $X \mapsto Xv_1$ est un isomorphisme. Via cet isomorphisme l'application précédente devient

$$\mathrm{Hom}_E(D, Z_+) \longrightarrow Z_+, \quad Y \longmapsto \xi_0 Y v_0$$

qui est clairement un isomorphisme.

Pour $i = 1$, soit M_2 la composante de Levi de P_2 des éléments qui stabilisent Z_+ et Z_- et posons $U_B = U_1 \cap M_2$. Ce groupe s'identifie au radical unipotent du sous-groupe de Borel B de $\mathrm{GL}_E(Z_+)$ qui conserve le drapeau

$$Ev_r \subset \cdots \subset Ev_r \oplus \cdots \oplus Ev_1.$$

L'application produit de $U_B \times U_2$ sur U_1 est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que $U_B \times (\Xi + S + \Sigma_2) \to \Xi + S + \Sigma_1$, $(u, X) \mapsto uXu^{-1}$ est un isomorphisme. Soit $\overline{\Xi} \in \mathrm{End}_E(Z_+)$ l'élément qui envoie, pour $i = 2, \dots, r$, v_i sur Ξv_i et v_1 sur 0. Notons $\mathfrak{r}$ l'espace vectoriel engendré par les $c(v_{-1}, v)$ pour $v \in Z_+$. On a alors

$$\Sigma_2 = \mathfrak{r} \oplus \Sigma_3 \quad \text{et} \quad \Sigma_1 = \mathfrak{b} \oplus \Sigma_3.$$

Puisque Σ_3 est invariant par conjugaison par U_B et S commute à U_B, on est ramené à prouver que l'application suivante est un isomorphisme

$$U_B \times (\overline{\Xi} + \mathfrak{r}) \longrightarrow \overline{\Xi} + \mathfrak{b}, \quad (u, X) \longmapsto uXu^{-1}.$$

Tout se passe maintenant dans $\mathrm{GL}_E(Z_+)$ et l'assertion est bien connue ∎

Donnons nous un élément $X \in \Lambda$. On peut l'écrire sous la forme

$$X = c(v_0, w) + \sum_{i=0,\dots,r-1} \lambda_i\, c(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0,\dots,r} \mu_i\, c(v_i, \eta v_i) \tag{1}$$

où w est un vecteur de W'' et les λ_i, μ_i sont des éléments de F. Soit D l'endomorphisme E-linéaire de $E[T]$ qui envoie T^{i+1} sur T^i et 1 sur 0. Notons $R_S(T)$ le polynôme caractéristique de S agissant sur W''. On a alors :

Lemme 7.1.2. — *Le polynôme caractéristique de $\Xi + S + X$ agissant sur V'' est donné par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} P_{\Xi+S+X}(T) = T^{2r} \sum_{i=0}^{d_{W''}-1} \nu_0\, h(S^i w, w)\, D^{i+1}\big(R_S(T)\big) \\ + R_S(T)\Big[T^{2r+1} + \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i+1}\, 2\nu_0 T^{2r-1-2i} \lambda_i \xi_i \Big(\prod_{j=0}^{i-1} \xi_j^2\Big) \\ + \sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+1} T^{2r-2i}\, \nu_0\, \eta\, \mu_i \Big(\prod_{j=0}^{i-1} \xi_j^2\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Démonstration. — Fastidieuse mais directe, elle est laissée au lecteur . ∎

Lemme 7.1.3. — *Les polynômes*

$$\begin{aligned} &T^{2r} D^i\big(R_S(T)\big), \quad && i = 1, \dots, d_{W''}, \\ &R_S(T) T^j, && j = 0, \dots, 2r+1, \end{aligned}$$

forment un base de l'espace des polynômes sur E de degré $\leqslant 2r + d_{W''} + 1$.

Démonstration. — Notons $r(P)$ le reste de la division euclidienne de P par T^{2r}. Il suffit de montrer que les familles

$$\Big(T^{2r+1} R_S(T), T^{2r} R_S(T), T^{2r} D\big(R_S(T)\big), \dots, T^{2r} D^{d_{W''}}\big(R_S(T)\big)\Big),$$

$$\big(r(R_S(T)\big), \dots, r\big(T^{2r-1} R_S(T))\big)$$

sont libres. Dans la première, les degrés sont strictement décroissants et dans la deuxième l'indice du premier coefficient non nul est strictement croissant. D'où le résultat. ∎

Soit Λ^S l'ensemble des éléments X tels que $\Xi + S + X \in \mathfrak{g}''_{\mathrm{reg}}(F)$, $\lambda_i \neq 0$, $\mu_i \neq 0$ et la famille $(w, Sw, \ldots, S^{d_{W''}-1}w)$ engendre W''. On déduit des deux lemmes précédents que l'application

$$\Lambda^S \longrightarrow \{P \in E[T]\ ;\ (-1)^{d''}\overline{P}(-T) = P(T)\}$$

qui à X associe le polynôme caractéristique de $\Xi+S+X$ est partout submersive.

On notera $\Xi+S+\Sigma^S$ l'ensemble des éléments de $\Xi+S+\Sigma$ qui sont conjugués par U'' à un élément de $\Xi + S + \Lambda^S$. On a alors :

Lemme 7.1.4. — *Le groupe $H''_S U''$ agit librement par conjugaison sur $\Xi + S + \Sigma^S$ et deux éléments de ce dernier sont conjugués par un élément de G'' si et seulement s'ils le sont par un élément de $H''_S U''$.*

Démonstration. — La conjugaison par H''_S laisse stable Ξ, S et Λ^S donc d'après le lemme 7.1.1, il suffit de montrer que l'action de H''_S sur Λ^S est libre pour obtenir la première assertion du lemme. Pour

$$X = c(v_0, w) + \sum_{i=0,\ldots,r-1} \lambda_i c(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0,\ldots,r} \mu_i c(v_i, \eta v_i) \in \Lambda^S$$

et pour $h \in H''_S$ on a

$$hXh^{-1} = c\big(v_0, h(w)\big) + \sum_{i=0,\ldots,r-1} \lambda_i c(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0,\ldots,r} \mu_i c(v_i, \eta v_i).$$

Par conséquent, on a $hXh^{-1} = X$ si et seulement si $hw = w$. Mais les conditions « $h \in H''_S$ et $(w, Sw, \ldots, S^{d_{W''}-1}w)$ engendre W'' » montrent que cette condition est équivalente à $h = 1$.

Soient $X, X' \in \Xi+S+\Sigma^S$ deux éléments conjugués par G'' et montrons qu'ils le sont par $H''_S U''$. D'après le lemme 7.1.1, on peut supposer que X et X' sont dans $\Xi + S + \Lambda^S$ et il suffit de montrer qu'ils sont conjugués par un élément de H''_S. On a les décompositions

$$X = \Xi + S + c(v_0, w) + \sum_{i=0,\ldots,r-1} \lambda_i c(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0,\ldots,r} \mu_i c(v_i, \eta v_i),$$
$$X' = \Xi + S + c(v_0, w') + \sum_{i=0,\ldots,r-1} \lambda'_i c(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0,\ldots,r} \mu'_i c(v_i, \eta v_i).$$

Puisque X et X' sont conjugués sous G'', ils ont même polynôme caractéristique. D'après le lemme 7.1.2, on a donc $\lambda_i = \lambda'_i$ et $\mu_i = \mu'_i$ pour tout i et $h(S^j w, w) = h(S^j w', w')$ pour $0 \leqslant j \leqslant d_{W''} - 1$. On en déduit que

$$h(S^j w, S^i w) = (-1)^i h(S^{j-i} w, w) = (-1)^i h(S^{j-i} w', w') = h(S^j w', S^i w')$$

pour $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant d_{W''} - 1$. Par conséquent il existe un unique élément $h \in H''$ qui envoie la base $(w, Sw, \ldots, S^{d_{W''}-1}w)$ sur la base $(w', Sw', \ldots, S^{d_{W''}-1}w')$ et on vérifie facilement que $h \in H''_S$ et $hXh^{-1} = X'$. ∎

7.2. Un calcul de jacobien

Pour $T \in \mathcal{T}(G'')$, on notera $\mathfrak{t}(F)^S$ le sous-ensemble ouvert de $\mathfrak{t}(F)$ des éléments conjugués par $G''(F)$ à un élément de $\Xi + S + \Sigma^S$. On a alors une application analytique bijective

$$\Xi + S + \Sigma^S / H''_S(F)U''(F) \longrightarrow \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(G'')} \mathfrak{t}(F)^S / W(G'', T).$$

Puisque l'application qui à un élément de $\Xi + S + \Sigma^S$ associe son polynôme caractéristique est partout submersive, l'application précédente est elle aussi partout submersive. On en déduit une mesure sur l'espace d'arrivée en transférant celle fixée sur l'espace de départ. Notons $d_\Sigma Y$ cette nouvelle mesure.

Lemme 7.2.1. — *On a l'égalité* $d_\Sigma Y = D^{H''}(S)^{-\frac{1}{2}} D^{G''}(Y)^{\frac{1}{2}}\, dY$.

Démonstration. — Plaçons-nous sur $\overline{F}$. Soit $T \in \mathcal{T}(G'')$ et notons $\mathfrak{t}^S$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{t}$ qui sont conjugués à un éléments de $\Xi + S + \Sigma^S$. C'est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{t}^S$. On considère aussi Σ^S comme un ouvert de Zariski dans Σ. Soit $\overline{W}(G'', T)$ le groupe de Weyl de T sur $\overline{F}$ alors l'application

$$\Xi + S + \Sigma^S / H''_S U'' \longrightarrow \mathfrak{t}^S / \overline{W}(G'', T) \tag{1}$$

est bien définie et est un isomorphisme de variétés algébriques. De plus, l'application sur les F-points

$$\mathfrak{t}(F)^S / W(G'', T) \longrightarrow \mathfrak{t}^S / \overline{W}(G'', T)(F) \tag{2}$$

est un isomorphisme local de variétés analytiques. La forme bilinéaire non dégénérée $\langle .,. \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ permet d'obtenir sur chaque sous-espace non dégénéré de $\mathfrak{g}''$ une forme différentielle de degré maximal invariante bien définie au signe près.

Sur les autres sous-espaces de $\mathfrak{g}''$, on choisit une forme différentielle quelconque de degré maximal invariante par translation. Cela permet de fixer une telle forme différentielle sur $\mathfrak{u}''$ mais ce choix n'importe pas. On relève les formes différentielles invariantes sur les algèbres de Lie aux groupes. Alors l'application (2) préserve localement les mesures. On peut donc se contenter de calculer le jacobien algébrique de (1). Comme on vient de l'expliquer, ce jacobien n'est bien défini qu'au signe près, mais cela ne change pas sa valeur absolue.

Soit $X \in \mathfrak{g}''$ un élément régulier semisimple. Fixons une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_X$ qui contient X et notons $\mathfrak{u}_X$ son radical nilpotent. Alors $\det(\mathrm{ad}(X)_{|\mathfrak{u}_X})$ ne dépend du choix de $\mathfrak{b}_X$ qu'au signe près. Comme les calculs qui suivent sont tous au signe près, on prend la liberté de noter $d^{G''}(X)$ ce déterminant sans référence au choix d'une sous-algèbre de Borel. On définit de même $d^{G''_0}$ et $d^{H''}$. Remarquons que l'on a

$$\left|d^{G''}(X)\right|_F = D^{G''}(X)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons d'abord $r = 0$. On a alors $U'' = \{1\}$ et $\Xi = 0$. Sur $\bar{F}$, le groupe G''_0 s'identifie au groupe linéaire de $V''_0 \otimes_E \bar{F}$. Posons $d = d_{W''}$ et soit $(w_1, \dots, w_d)$ une base de $W'' \otimes_E \bar{F}$ constituée de vecteurs propres pour S. Dans la base $(v_0, w_1, \dots, w_d)$, le sous-espace Σ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_d \\ \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_d & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul montre qu'avec ces notations la forme différentielle autoduale sur Σ est au signe près

$$\mathrm{d}\lambda_0 \wedge \mathrm{d}\lambda_1 \dots \wedge \mathrm{d}\lambda_d \wedge \mathrm{d}\mu_1 \dots \wedge \mathrm{d}\mu_d.$$

L'ouvert Σ^S est constitué des éléments de Σ pour lesquels les λ_i et μ_j sont tous non nuls et H''_S est le tore des éléments qui fixent les droites $\bar{F}w_i$ pour $i = 1, \dots, d$. Pour $h \in H''_S$, on note h_i la valeur propre de h agissant sur w_i. La mesure autoduale sur H''_S est alors au signe près $(h_1 \dots h_d)^{-1}\,\mathrm{d}h_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}h_d$. L'action par conjugaison de H''_S sur Σ est donnée par la formule

$$h \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_d \\ \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_d & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} h^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & h_1^{-1}\lambda_1 & \dots & h_d^{-1}\lambda_d \\ h_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_d\mu_d & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe quotient Σ^S/H''_S s'identifie donc à $F \times \overline{F}^{\times,d}$ par l'application

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_d \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

la forme différentielle autoduale sur Σ^S/H''_S étant alors $\mathrm{d}\lambda_0 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\lambda_d$ (toujours au signe près). Pour $i = 1, \dots, d$, soit α_i la valeur propre de S agissant sur w_i. Le polynôme caractéristique de

$$S + \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_d \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est d'après le lemme 7.1.2

$$(T - \lambda_0) R_S(T) + \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{i+1} (\alpha_1^i \lambda_1 + \dots + \alpha_d^i \lambda_d) D^{i+1}\big(R_S(T)\big).$$

On munit l'espace des polynômes unitaires de degré $d+1$ de la forme différentielle $\delta = \mathrm{d}c_0 \wedge \mathrm{d}c_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}c_{d-1}$ où c_i est le coefficient de degré i du polynôme. Alors le jacobien de l'application qui à un élément de $S + \Sigma^S/H''_S$ associe son polynôme caractéristique est au signe près le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_d \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{d-1} & \dots & \alpha_d^{d-1} \end{pmatrix}.$$

Ce déterminant vaut $d^{H''}(S)$. Soit $(e_1, \dots, e_{d+1})$ une base commune de diagonalisation des éléments de $\mathfrak{t}$. Pour $Y \in \mathfrak{t}$, on note Y_i la valeur propre de Y agissant sur e_i. La forme différentielle autoduale sur $\mathfrak{t}$ est alors au signe près

$$\delta_{\mathfrak{t}} = \mathrm{d}Y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}Y_{d+1}.$$

On calcule aisément le jacobien de l'application qui à $Y \in \mathfrak{t}$ associe son polynôme caractéristique (c'est essentiellement le même calcul de déterminant que précédemment). Ce jacobien vaut $d^{G''}(Y)$. Le jacobien de l'application $S + \Sigma^S/H''_S \to \mathfrak{t}/\overline{W}(G'', T)$ est donc égal à $d^{G''}(Y) d^{H''}(S)^{-1}$.

Traitons maintenant le cas général. L'application

$$U'' \times \bigl(S + (\Lambda_0 \oplus \mathfrak{a})\bigr) \longrightarrow \Xi + S + \Sigma, \quad (u, X) \longmapsto u(\Xi + X)u^{-1}$$

est un isomorphisme local sur l'ouvert dense des (u, X) où X est régulier dans G''. Calculons son jacobien. L'application étant équivariante pour l'action de U'' évidente sur chacun des deux espaces et les formes différentielles étant invariantes par action de U'', on peut se contenter de calculer le jacobien de l'application en $(1, X)$. La différentielle de l'application en $(1, X)$ est

$$\mathfrak{u}'' \oplus \Lambda_0 \oplus \mathfrak{a} \longrightarrow \Sigma, \quad (N, X_{\Lambda_0} + A) \longmapsto [N, \Xi] + [N, X] + X_{\Lambda_0} + A.$$

Dans une base de $\mathfrak{u}''$ bien choisie, l'application $N \mapsto [N, X]$ est diagonale et l'application qui à N associe la projection sur $\mathfrak{u}''$ de $[N, \Xi]$ est triangulaire supérieure stricte. Le jacobien est donc le déterminant de l'application $N \mapsto [N, X]$; au signe près, c'est $d^{G''}(X)\, d^{G''_0}(X)^{-1}$. Sur un ouvert dense l'application

$$(3) \qquad \mathfrak{a} \times (S + \Lambda_0/H''_S) \longrightarrow (\Xi + S + \Sigma)\,/H''_S U''$$

est donc un isomorphisme local de jacobien $d^{G''}(d^{G''_0})^{-1}$. On peut toujours supposer (quitte à conjuguer) que $\mathfrak{t}$ est de la forme $\mathfrak{a} \times \mathfrak{t}_0$, où $\mathfrak{t}_0$ est un tore maximal de $\mathfrak{g}''_0$. Puisque pour $X \in S + (\Lambda_0 \oplus \mathfrak{a})$ régulier, $X + \Xi$ est conjugué à X, la composée de l'application (3) et de l'application

$$(\Xi + S + \Sigma)\,/H''_S U'' \longrightarrow \mathfrak{t}/\overline{W}(G'', T)$$

est alors le produit de l'application identité sur $\mathfrak{a}$ et de l'application

$$S + \Lambda_0/H''_S \longrightarrow \mathfrak{t}_0/\overline{W}(G''_0, T_0).$$

On a déjà calculé le jacobien de cette application : c'est $d^{H''}(S)(d^{G''_0})^{-1}$ au signe près. On en déduit que le jacobien de (1) est au signe près égal à

$$(d^{G''})^{-1} d^{G''_0}\, d^{H''}(S)(d^{G''_0})^{-1} = d^{H''}(S)(d^{G''})^{-1}. \qquad \square$$

7.3. Choix de sections localement analytiques

Soit $T \in \mathcal{T}(G'')$. Puisque l'application

$$(\Xi + S + \Lambda^S) \longrightarrow \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(G'')} \mathfrak{t}(F)^S/W(G'', T)$$

est partout submersive, on peut trouver une section localement analytique

$$\mathfrak{t}(F)^S/W(G'', T) \longrightarrow \Xi + S + \Lambda^S.$$

En composant avec la projection naturelle $\mathfrak{t}(F)^S \to \mathfrak{t}(F)^S/W(G'',T)$, on obtient une application localement analytique $\mathfrak{t}(F)^S \to \Xi+S+\Lambda^S$, $X\mapsto X_\Lambda$. Montrons que l'on peut choisir l'application $X\mapsto X_\Lambda$ de sorte que pour tout compact $\omega_T\subset\mathfrak{t}(F)$, elle envoie $\omega_T\cap\mathfrak{t}(F)^S$ dans un sous-ensemble compact de $\Xi+S+\Lambda$.

Démonstration. — Soient λ_i, μ_i et $w\in W''$ les coordonnées de X_Λ comme introduites au § 7.1 (1). Puisque les λ_i et les μ_i sont des fonctions linéaires en les coefficients du polynôme caractéristique ces coordonnées sont bornées pour $X\in\omega_T$. Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir l'application $X\mapsto X_\Lambda$ de sorte que la coordonnée w reste bornée pour $X\in\omega_T$. Soit W''^S l'ensemble des éléments $w\in W''$ tels que $(w,Sw,\dots,S^{d_{W''}-1}w)$ engendre W''. D'après les lemmes 7.1.2 et 7.1.4, il suffit de montrer que l'application

$$W''^S \longrightarrow E^{d_{W''}},\quad w\longmapsto \big(h(w,w),\dots,h(w,S^{d_{W''}-1}w)\big)$$

admet une section localement analytique sur son image qui est bornée sur tout sous-ensemble compact de $E^{d_{W''}}$. D'après [**27**, § 1.3], on peut décomposer W'' en somme directe de sous-espaces non dégénérés stables par S qui sont isomorphes à des espaces hermitiens de la forme $F_i=F_i^\sharp\otimes_F E$ où $F_i^\sharp$ est une extension finie de F, la forme hermitienne étant donnée par

$$(x,y)\longmapsto \mathrm{Tr}_{F_i/E}\big(c_i y\tau_E(x)\big),$$

où τ_E est l'automorphisme de F_i défini par $\tau_E(x\otimes y)=x\otimes\overline{y}$, $c_i\in F_i^\sharp$ et tel que l'action de S sur chacun de ces sous-espaces soit la multiplication par un élément $a_i\in F_i$ vérifiant $\tau_E(a_i)=-a_i$ et $E[a_i]=F_i$. On se ramène alors facilement au cas où le couple (W'',S) est de cette sorte pour une certaine extension $L^\sharp$ de F et des éléments $a,c\in L=L^\sharp\otimes_F E$. L'application $W''^S\to E^{d_{W''}}$ est alors

$$x\longmapsto \big(\mathrm{Tr}\big(ca^k x\tau_E(x)\big)\big)_{k=0,\dots,d_{W''}-1}.$$

C'est l'application qui donne les coordonnées de $x\tau_E(x)$ dans la base duale de $(c,ca,\dots,ca^{d_{W''}-1})$. On est ainsi ramené à prouver que l'application

$$N_{L/L^\sharp}: L^\times\longrightarrow (L^\sharp)^\times$$

admet une section analytique sur son image qui est bornée sur tout compact. Si l'extension $L/L^\sharp$ est une extension de corps, c'est vrai pour toute section continue. Si $L=L^\sharp\times L^\sharp$, il suffit de prendre la section $x\mapsto(x,1)$. ∎

Pour tout $T\in\mathcal{T}(G'')$, on peut trouver une application localement analytique

$$\mathfrak{t}(F)^S\longrightarrow G''(F),\quad X\longmapsto\gamma_X$$

telle que pour $X \in \mathfrak{t}(F)$,

$$X_\Lambda = \gamma_X X \gamma_X^{-1} \in \Xi + S + \Lambda^S.$$

On suppose que les fonctions analytiques $X \mapsto X_\Lambda$ et $X \mapsto \gamma_X$ vérifient les deux conditions suivantes :

1) Pour tout sous-ensemble compact $\omega_T \subset \mathfrak{t}(F)$, la fonction $X \mapsto X_\Lambda$ pour $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$ prend ses valeurs dans un sous-ensemble compact de $\Xi + S + \Lambda$.

2) Pour tout sous-ensemble compact $\omega_T \subset \mathfrak{t}(F)$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$ on ait $\sigma(\gamma_X) \leqslant c(1 + |\log D^{G''}(X)|)$.

Le premier point est loisible d'après ce que l'on vient de voir et le deuxième découle du premier d'après un lemme de [**6**] que voici.

Lemme 7.3.1 (cf. [**6**, lemme 4.2]). — *Soient $\Gamma \subset G''(F)$ et $\omega_T \subset \mathfrak{t}(F)$ des sous-ensembles compacts. Il existe $c > 0$ de sorte que pour tout $X \in \omega_T \cap \mathfrak{g}''_{\mathrm{reg}}(F)$ et pour tout $g \in G''(F)$ tels que $gXg^{-1} \in \Gamma$, on ait*

$$\inf\left\{\sigma(gt)\ ;\ t \in T(F)\right\} \leqslant c\big(1 + |\log\ D^{G''}(X)|\big).$$

On a aussi le lemme suivant qui nous servira par la suite.

Lemme 7.3.2. — (i) *Pour tout $X \in \mathfrak{t}^S(F)$, la famille $(v_r, X_\Lambda v_r, \ldots, X_\Lambda^{d''-1} v_r)$ est une base de V''. On note R_{X_Λ, v_r} le $\mathcal{O}_E$-réseau engendré par cette base.*

(ii) *Soit R'' un $\mathcal{O}_E$-réseau de V''. Il existe une fonction polynomiale non nulle Q_S sur $\mathfrak{t}(F)$ et pour tout sous-ensemble compact $\omega_T \subset \mathfrak{t}(F)$ une constante $\alpha \in F^\times$ telles que*

$$\forall X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T, \quad \alpha\, Q_S(X) R'' \subset R_{X''_\Lambda, v_r}.$$

Démonstration. — Soit $X \in \mathfrak{t}(F)^S$. On peut écrire

$$X_\Lambda = c(v_0, w) + \sum_{i=0,\ldots,r-1} \lambda_i c(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0,\ldots,r} \mu_i c(v_i, \eta v_i).$$

D'après le lemme 7.1.2, les fonctions $X \mapsto \lambda_i$, $X \mapsto \mu_i$ et $X \mapsto h(S^i w, S^j w)$ sont polynomiales. Soient R_{X_Λ, v_r} le sous-$\mathcal{O}_E$-module de V'' engendré par $v_r, X_\Lambda v_r, \ldots, X_\Lambda^{d''-1} v_r$ et Q_S la fonction polynomiale sur $\mathfrak{t}(F)$ définie par

$$X \longmapsto \det\Big((h(S^i w, S^j w))_{\substack{0 \leqslant i \leqslant d_{W''}-1 \\ 0 \leqslant j \leqslant d_{W''}-1}}\Big).$$

(Remarquons que cette fonction *a priori* seulement définie sur $\mathfrak{t}(F)^S$ est en fait définie sur $\mathfrak{t}(F)$ d'après le lemme 7.1.2 et qu'elle est polynomiale toujours d'après le même lemme.) Soit $\omega_T \subset \mathfrak{t}(F)$ un sous-ensemble compact. On va montrer les faits suivants dont découlent les deux points du lemme :

1) *Soit* $R_{W''} = \mathcal{O}_E e_1 \oplus \dots \mathcal{O}_E e_{d_{W''}}$ *un* $\mathcal{O}_E$*-réseau de* W''*. Il existe une constante* $\alpha \in F^\times$ *telle que, pour tout* $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$ *et* $i = 0, \dots, r$,

$$\alpha Q_S(X) v_{\pm i} \in R_{X_\Lambda, v_r} \quad \textit{et} \quad \alpha Q_S(X) R_{W''} \subset R_{X_\Lambda, v_r}.$$

Remarquons, d'après l'hypothèse faite sur la fonction $X \mapsto X_\Lambda$, que la fonction $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T \mapsto w$ prend ses valeurs dans un sous-ensemble compact de W''.

On montre d'abord :

2) *Il existe* $\beta \in F^\times$ *telle que pour tout* $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$ *avec*

$$X_\Lambda = c(v_0, w) + \sum_{i=0,\dots,r-1} \lambda_i c(v_i, v_{i+1}) + \sum_{i=0,\dots,r} \mu_i c(v_i, \eta v_i),$$

on ait

- $\beta v_i \in R_{X_\Lambda, v_r}$ *pour* $i = 0, \dots, r$;
- $\beta(S^{i-1} w + (-1)^i \prod_{j=0}^{i-1} \xi_j v_{-i}) \in R_{X_\Lambda, v_r}$ *pour* $i = 1, \dots, r$;
- $\beta S^i w \in R_{X_\Lambda, v_r}$ *pour* $i = 0, \dots, d_{W''} - 1$.

On a déjà en effet $v_r, \xi_{r-1} v_{r-1} = X_\Lambda v_r, \dots, \prod_{i=0}^{r-1} \xi_i v_0 = X_\Lambda^r v_r \in R_{X_\Lambda, v_r}$. Donc il existe une constante $\beta_1 \in F^\times$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$ on ait

$$\beta_1 v_i \in R_{X_\Lambda, v_r} \ \text{ pour } i = 0, \dots, r.$$

Puisque X_Λ varie dans un sous-ensemble compact de $\Xi + S + \Lambda$, on peut certainement trouver $\gamma \in F^\times$ tel que γP_{X_Λ} soit un polynôme à coefficients entiers pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$. Le réseau R_{X_Λ, v_r} est alors stable par l'application $v \mapsto \gamma X_\Lambda v$.

On montre maintenant par récurrence que pour tout $i = 1, \dots, r$, il existe une constante $\alpha_i \in F^\times$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$,

$$\alpha_i \Big(S^{i-1} w + (-1)^i \prod_{j=0}^{i-1} \xi_j v_{-i} \Big) \in R_{X_\Lambda, v_r}.$$

En effet pour $i = 1$, on a

$$\gamma X_\Lambda(\beta v_0) = \gamma \beta \nu_0 \big(w + \lambda_0 v_1 + 2\mu_0 \eta v_0 - \xi_0 v_{-1} \big) \in R_{X_\Lambda, v_r}$$

et μ_0, λ_0 restent dans des compacts d'où le résultat pour $i = 1$. Si on a le résultat pour $i \leqslant r - 1$, alors

$$\alpha_i \gamma X_\Lambda \Big(S^{i-1} w + (-1)^i \prod_{j=0}^{i-1} \xi_j v_{-i} \Big)$$

est égal à

$$\alpha_i \gamma \Big(S^i w + (-1)^i \prod_{j=0}^{i-1} \xi_j (-\xi_i v_{-(i+1)} + 2\eta \mu_i v_i + \lambda_i v_{i+1}) - h(w, S^{i-1} w) v_0 \Big) \in R_{X_\Lambda, v_r}.$$

Comme μ_i, λ_i et $h(w, S^{i-1} w)$ restent dans un certain compact, on en déduit le résultat pour $i + 1$.

On montre de la même façon que pour $i = r, \dots, r + d_{W''} - 1$, il existe une constante α_i telle que $\alpha_i S^i w \in R_{X_\Lambda, v_r}$ pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$. De plus, il existe une constante $\alpha_S \in F^\times$ (ne dépendant que de S) telle que

$$\alpha_S(\mathcal{O}_E w + \mathcal{O}_E Sw + \cdots + \mathcal{O}_E S^{d_{W''}-1}w) \subset \mathcal{O}_E S^r w + \mathcal{O}_E S^{r+1}w + \cdots + \mathcal{O}_E S^{r+d_{W''}-1}w$$

pour tout $w \in W''$ (car S agit sans noyau sur W'').

Cela prouve 2).

Pour prouver 1), il suffit donc de montrer l'existence d'une constante $\alpha \in F^\times$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$, on ait

$$\alpha Q(X) R_{W''} \subset \mathcal{O}_E w + \mathcal{O}_E Sw + \cdots + \mathcal{O}_E S^{d_{W''}-1}w.$$

Les coordonnées de e_i dans la base $w, Sw, \dots, S^{d_{W''}-1}w$ sont données par le vecteur colonne

$$M(X)^{-1}\begin{pmatrix} h(w,e_i) \\ h(Sw,e_i) \\ \vdots \\ h(S^{d_{W''}-1}w,e_i)\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M(X) = \big(h(S^i w, S^j w)\big)_{\substack{0\leqslant i\leqslant d_{W''}-1 \\ 0\leqslant j\leqslant d_{W''}-1}}.$$

On en déduit le résultat puisque pour $X \in \mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_T$, les coefficients de la matrice $\det(M(X))M(X)^{-1}$ et les $h(S^k w, e_i)$ pour $k = 0, \dots, d_{W''} - 1$ sont bornés. ∎

7.4. Calcul de $J_{\kappa''}(\theta'',\varphi)$

Les résultats précédents permettent maintenant d'évaluer $J_{\kappa''}(\theta'',\varphi)$ en fonction de la transformée de Fourier de φ. D'après l'hypothèse faite sur θ'' et le lemme 7.0.1, on a :

$$\begin{aligned} J(\theta'',\varphi,g) &= D^{H''}(S)^{\frac12}\int_{H''_S(F)\backslash H''(F)} \widehat{{}^g\varphi^\xi}(h^{-1}Sh)\,\mathrm{d}h \\ &= D^{H''}(S)^{\frac12}\int_{H''_S(F)\backslash H''(F)}\int_\Sigma {}^g\widehat{\varphi}(\Xi + h^{-1}Sh + X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}h. \end{aligned}$$

La conjugaison par $H''(F)$ laisse stable Ξ et Σ et ne change pas la mesure sur ce dernier. Donc :

$$J(\theta'',\varphi,g) = D^{H''}(S)^{\frac12}\int_{H''_S(F)\backslash H''(F)}\int_\Sigma {}^{hg}\widehat{\varphi}(\Xi + S + X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}h.$$

On en déduit que

$$J_{\kappa''}(\theta'',\varphi) = D^{H''}(S)^{\frac{1}{2}} \int_{H''_S(F)U''(F)\backslash G''(F)} \kappa''(g) \int_{\Sigma} {}^{g}\widehat{\varphi}(\Xi + S + X)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}g.$$

Le lemme 7.2.1 nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} J_{\kappa''}(\theta'',\varphi) = &\sum_{T\in\mathcal{T}(G'')} \left|W(G'',T)\right|^{-1} \int_{H''_S(F)U''(F)\backslash G''(F)} \kappa''(g) \\ &\qquad \int_{H''_S(F)U''(F)} \int_{\mathfrak{t}(F)^S} {}^{\gamma_Y y g}\widehat{\varphi}(Y) D^{G''}(Y)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}y \\ = &\sum_{T\in\mathcal{T}(G'')} \nu(A_T)^{-1} \left|W(G'',T)\right|^{-1} \\ &\qquad \int_{\mathfrak{t}(F)^S} \int_{A_T(F)\backslash G''(F)} \widehat{\varphi}(g^{-1}Yg)\,\kappa''_Y(g)\,\mathrm{d}g\, D^{G''}(Y)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}Y, \end{aligned}$$

où on a posé

$$\kappa''_Y(g) = \nu(A_T) \int_{A_T(F)} \kappa''(\gamma_Y^{-1} a g)\,\mathrm{d}a$$

pour $T \in \mathcal{T}(G'')$ et $Y \in \mathfrak{t}(F)^S$ et $g \in G''(F)$.

CHAPITRE 8

CALCUL DE LA LIMITE DE $J_{x,\omega,N}(\theta, f)$

8.1. Première transformation de $J_{x,\omega,N}(\theta, f)$

On garde les notations du chapitre 6. En reprenant le raisonnement de [**29**, § 10.1], on montre qu'il existe un ensemble fini $\mathcal{S}$ d'éléments de $\mathfrak{h}''_{\mathrm{reg}}(F)$ et une famille $(\widehat{\jmath}_S)_{S\in\mathcal{S}}$ de quasi-caractères de $\mathfrak{h}'_x(F)$ indexée par $\mathcal{S}$ tels que pour tout $S \in \mathcal{S}$, le noyau de S agissant sur W'' soit nul et

$$\forall X = X' + X'' \in \mathfrak{h}_{x,\mathrm{reg}}(F), \quad \theta_{x,\omega}(X) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \widehat{\jmath}_S(X')\,\widehat{\jmath}^{H''}(S, X'').$$

Pour $g \in G(F)$, la transformée de Fourier partielle de ${}^g f_{x,\omega}$ par rapport à la deuxième variable est notée

$$X = X' + X'' \longmapsto {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'').$$

On a donc

$${}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'') = \int_{\mathfrak{h}''(F)} {}^g f_{x,\omega}(X' + Y'')\,\psi\big(\langle Y'', X''\rangle\big)\,\mathrm{d}Y''.$$

Les mêmes manipulations calculatoires que dans le § 10.1 de [**29**] permettent d'aboutir à l'expression suivante :

$$(1) \quad J_{x,\omega,N}(\theta, f) = \sum_{\substack{S\in\mathcal{S} \\ T=T'T''\in\mathcal{T}(G_x)}} \nu(A_{T''})^{-1}\big|W(G_x, T)\big|^{-1} \int_{\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''^S(F)} \widehat{\jmath}_S(X')\,D^{G'_x}(X')\,D^{G''}(X'')^{\frac{1}{2}} \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'')\kappa_{N,X''}(g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}X'\,\mathrm{d}X'',$$

où on a posé

$$\kappa_{N,X''}(g) = \nu(A_{T''}) \int_{A_{T''}(F)} \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a g)\,\mathrm{d}a.$$

Pour $S\in\mathcal{S}$ et $T=T'T''\in\mathcal{T}(G'_x)\times\mathcal{T}(G'')$, soit $\mathbb{Q}_{S,T}$ l'ensemble des trois fonctions polynomiales suivantes sur $\mathfrak{t}(F)$:

$$\begin{cases}\text{la fonction } X=X'+X''\in\mathfrak{t}=\mathfrak{t}'\oplus\mathfrak{t}''\mapsto\det\big(\mathrm{ad}(X')_{|\mathfrak{g}'_x/\mathfrak{t}'}\big)\,;\\ \text{la fonction } X=X'+X''\in\mathfrak{t}=\mathfrak{t}'\oplus\mathfrak{t}''\mapsto\det\big(\mathrm{ad}(X'')_{|\mathfrak{g}''/\mathfrak{t}''}\big)\,;\\ \text{la fonction polynomiale } Q_S \text{ sur } \mathfrak{t}'' \text{ fournie par le lemme 7.3.2.}\end{cases}$$

On note $\mathfrak{t}(F)[>\epsilon]$ (resp. $\mathfrak{t}(F)[\leqslant\epsilon]$) l'ouvert des éléments $X\in\mathfrak{t}(F)$ qui vérifient, pour $Q\in\mathbb{Q}_{S,T}$, les inégalités

$$\big|Q(X)\big|_F>\epsilon\quad\big(\text{resp. }\big|Q(X)\big|_F\leqslant\epsilon\big).$$

Notons

$$J_{x,\omega,N,>N^{-b}}(\theta,f)\quad\big(\text{resp. }J_{x,\omega,N,\leqslant N^{-b}}(\theta,f)\big)$$

l'expression définie par la même formule que (1) où, au lieu d'intégrer sur l'ensemble $\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S$, on intègre sur

$$\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S\cap\mathfrak{t}(F)[>N^{-b}]\quad\big(\text{resp. }\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S\cap\mathfrak{t}(F)[\leqslant N^{-b}]\big).$$

On justifie les manipulations ayant permis d'arriver à l'expression ci-dessus par la convergence absolue des intégrales qui y apparaissent. Notons

$$|J|_{x,\omega,N}(\theta,f)\quad\text{et}\quad|J|_{x,\omega,N,\leqslant N^{-b}}(\theta,f)$$

les mêmes expressions que précédemment où on a remplacé les fonctions intégrées par leurs valeurs absolues. On a alors comme dans [**29**] les majorations suivantes :

- Il existe $k\in\mathbb{N}$ et $c>0$ tels que pour tout $N\geqslant1$,
$$|J|_{x,\omega,N}(\theta,f)\leqslant cN^k.$$
- Il existe un entier $b\in\mathbb{N}$ et une constante $c>0$ tels que pour tout $N\geqslant1$,
$$|J|_{x,\omega,N,\leqslant N^{-b}}(\theta,f)\leqslant cN^{-1}.$$

La démonstration est identique à celle présentée dans [**29**], une fois la majoration suivante établie :

Lemme 8.1.1. — *Soit $T=T'T''\in\mathcal{T}(G_x)$ et $\omega_{T''}$ un sous-ensemble compact de $\mathfrak{t}''(F)$. Soit Q_S la fonction polynomiale sur $\mathfrak{t}''(F)$ obtenue à partir du lemme 7.3.2 pour le réseau $R''=R\cap V''$. Alors il existe $k\in\mathbb{N}$ et $c>0$ tels que*

$$\kappa_{N,X''}(g)\leqslant cN^k\sigma(g)^k\big(1+|\log|Q_S(X'')|_F|\big)^k\big(1+|\log D^{G''}(X'')|\big)^k$$

pour tout $g\in G(F)$, pour tout $X''\in\mathfrak{t}''(F)^S\cap\omega_{T''}$ et pour tout $N\geqslant1$.

Démonstration. — Notons $\alpha \in F^\times$, la constante fournie par le lemme 7.3.2 pour le sous-ensemble compact $\omega_{T''} \subset \mathfrak{t}''(F)$. On adopte la notation suivante : si x est un réel quelconque on pose

$$\pi_E^x = \pi_E^{E(x)}.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $g \in G(F)$, on ait :

$$\pi_E^{C\sigma(g)} R \subset g(R) \subset \pi_E^{-C\sigma(g)} R.$$

D'après le paragraphe 7.3, l'application

$$X'' \in \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_{T''} \longmapsto X''_\Lambda \in \Xi + S + \Lambda$$

a son image incluse dans un sous-ensemble compact de $\Xi + S + \Lambda$. Par conséquent, on peut trouver une constante $C' > 0$ telle que pour tout X'' dans $\mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_{T''}$ on ait, pour $k = 0, \ldots, d_{W''} - 1$,

$$X''^k_\Lambda R \subset \pi_E^{-C'} R.$$

Par définition $\kappa_{N,X''}(g)$ est le volume de l'ensemble des éléments $a \in A_{T''}(F)$ vérifiant $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a g) = 1$. On a les implications :

$$\begin{aligned}
\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a g) = 1 &\Longrightarrow g^{-1} a^{-1} \gamma_{X''}(v_r) \in \pi_E^{-N} R \\
&\Longrightarrow \gamma_{X''}^{-1} a^{-1} \gamma_{X''}(v_r) \in \pi_E^{-N} \gamma_{X''}^{-1} g(R) \\
&\Longrightarrow \gamma_{X''}^{-1} a^{-1} \gamma_{X''}(v_r) \in \pi_E^{-N - C\sigma(g) - C\sigma(\gamma_{X''})} R \\
&\Longrightarrow \gamma_{X''}^{-1} a^{-1} \gamma_{X''}(R_{X''_\Lambda, v_r}) \subset \pi_E^{-N - C\sigma(g) - C\sigma(\gamma_{X''}) - C'} R \\
&\qquad\qquad (\text{car } \gamma_{X''}^{-1} a^{-1} \gamma_{X''} \text{ commute avec } X''_\Lambda) \\
&\Longrightarrow \alpha Q_S(X'') \pi_E^{C\sigma(\gamma_{X''})} a^{-1}(R'') \subset \pi_E^{-N - C\sigma(g) - C\sigma(\gamma_{X''}) - C'} \gamma_{X''}(R) \\
&\Longrightarrow a^{-1}(R'') \subset \alpha^{-1} Q_S(X'')^{-1} \pi_E^{-N - C\sigma(g) - 3C\sigma(\gamma_{X''}) - C'} R.
\end{aligned}$$

Puisque pour $a \in A_{T''}(F)$ on a l'inclusion $a^{-1}(R'') \subset W''$, on déduit des implications précédentes l'existence d'une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout X'' dans $\mathfrak{t}(F)^S \cap \omega''_T$,

$$\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a g) = 1 \Longrightarrow a^{-1}(R'') \subset Q_S(X'')^{-1} \pi_E^{-N - C_0\sigma(g) - C_0\sigma(\gamma_{X''}) - C_0} R''.$$

On a donc

$$\kappa_{N,X''}(g) \leqslant \operatorname{vol}\Big(a \in A_{T''}(F) \,;\, a^{-1}(R'') \subset Q_S(X'')^{-1} \pi_E^{-N - C_0\sigma(g) - C_0\sigma(\gamma_{X''}) - C_0} R''\Big).$$

Il existe une contante une constante $C_1 > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\beta \in E^\times$ on ait

$$\operatorname{vol}\big(\{a \in A_{T''}(F) : a^{-1}(R'') \subset \beta R''\}\big) \leqslant C_1 \max\big(1, -\operatorname{val}_E(\beta)\big)^k.$$

En utilisant l'inégalité $\sigma(\gamma_{X''}) \ll (1+|\log(D^{G''}(X''))|)$ pour tout X'' appartenant à $\mathfrak{t}(F)^S \cap \omega_{T''}$, on en déduit l'inégalité voulue. ∎

On fixe dorénavant un tore $T = T'T'' \in \mathcal{T}(G_x)$ et on note $M_\natural$ le centralisateur de $A_{T''}$ dans G. C'est un Levi de G.

Lemme 8.1.2. — *On a $A_{M_\natural} = A_{T''}$.*

Démonstration. — L'inclusion $A_{T''} \subset A_{M_\natural}$ est évidente. Puisque $T''H' \subset M_\natural$, $A_{M_\natural}$ est inclus dans le centre déployé de $T''H'$ qui est $A_{T''}$ car $A_{H'} = \{1\}$. ∎

8.2. Changement de la fonction de troncature

Pour $g \in G(F)$ on pose

$$\sigma_T(g) = \inf\{\sigma(tg)\ ;\ t \in T(F)\}.$$

Lemme 8.2.1. — *Il existe un réel $C_1 > 0$ et un sous-ensemble compact $\omega_T \subset \mathfrak{t}(F)$ tels que pour tout $g \in G(F)$, pour tout entier $N \geqslant 2$ et pour tout X appartenant à $\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \mathfrak{t}(F)[> N^{-b}]$, si ${}^g f^\sharp_{x,\omega}(X) \neq 0$ alors*

$$X \in \omega_T \quad \textit{et} \quad \sigma_T(g) \leqslant C_1 \log(N).$$

Démonstration. — On sait qu'il existe un sous-ensemble compact-ouvert Γ contenu dans $G(F)$ tel que ${}^g f^\sharp_{x,\omega}(X) = 0$ si $g \notin G_x(F)\Gamma$. De plus, il existe un sous-groupe ouvert-compact $K_f \subset G(F)$ tel que pour tout $g \in G(F)$ et tout $k \in K_f$, on ait ${}^{gk}f_{x,\omega} = {}^g f_{x,\omega}$ et donc ${}^{gk}f^\sharp_{x,\omega} = {}^g f^\sharp_{x,\omega}$. Quitte à agrandir Γ, on peut supposer que $K_f\Gamma = \Gamma$. Soit Γ_f un ensemble de représentants des classes à droite de Γ modulo K_f, c'est un ensemble fini. Posons

$$\Omega = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_f} \mathrm{Supp}({}^\gamma f^\sharp_{x,\omega}) \quad \text{et} \quad \omega_T = \mathrm{Cl}\big(\Omega^{G_x} \cap \mathfrak{t}(F)\big)$$

où Cl désigne l'adhérence. Ce sont des sous-ensembles compacts de $\mathfrak{g}_x(F)$ et $\mathfrak{t}(F)$ respectivement. Il existe deux réels $C, C' > 0$ tels que :

- pour tout $g \in G_x(F)$, pour tout $X \in \omega_T \cap \mathfrak{g}_{x,\mathrm{reg}}(F)$,

$$g^{-1}Xg \in \Omega \Rightarrow \sigma_T(g) \leqslant C\big(1 + |\log D^{G_x}(X)|\big)$$

(c'est le lemme 7.3.1) ;

- pour tout $X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_T[> N^{-b}]$,

$$\big|\log D^{G_x}(X)\big| \leqslant C' \log(N).$$

Pour X, g et N comme dans l'énoncé on a $X \in \omega_T$ d'après ce qui précède et on peut écrire $g = g_x\gamma$ avec $g_x \in G_x(F)$ et $\gamma \in \Gamma_f$. On a alors $g_x^{-1}Xg_x \in \Omega$ et on conclut avec les majorations ci-dessus ∎

Soit $\mathcal{Y} = (Y_{P_\natural})_{P_\natural \in \mathcal{P}(M_\natural)}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}_{M_\natural}$, $(G, M_\natural)$-orthogonale et positive. On reprend les notations de [**29**] qui reprennent celles d'Arthur : pour $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M_\natural)$, on note

$$\sigma_{M_\natural}^Q(.,\mathcal{Y}) \quad (\text{resp. } \tau_Q)$$

la fonction caractéristique dans $\mathcal{A}_{M_\natural}$ de la somme de $\mathcal{A}_L$ et de l'enveloppe convexe des $(Y_{P_\natural})_{P_\natural \subset Q}$ (resp. la fonction caractéristique de $\mathcal{A}_{M_\natural}^L + \mathcal{A}_Q^+$). On a alors, pour tout $\zeta \in \mathcal{A}_{M_\natural}$

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}(M_\natural)} \sigma_{M_\natural}^Q(\zeta, \mathcal{Y})\tau_Q(\zeta - Y_Q) = 1,$$

où pour $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(M_\natural)$, Y_Q désigne la projection de $Y_{P_\natural}$ sur $\mathcal{A}_L$ pour n'importe quel parabolique $P_\natural \in \mathcal{P}(M_\natural)$ vérifiant $P_\natural \subset Q$ (cette projection ne dépend pas du choix de $P_\natural$).

On fixe $M_{\min}$ un Levi minimal de G inclus dans $M_\natural$, un sous-groupe compact spécial K en bonne position par rapport à $M_{\min}$, et un sous-groupe parabolique minimal $P_{\min} \in \mathcal{P}(M_{\min})$.

Soit $Y_{P_{\min}} \in \mathcal{A}_{P_{\min}}^+$. Pour tout $P \in \mathcal{P}(M_{\min})$ il existe un unique $w \in W^G$ tel que $wP_{\min} = P$. On pose alors

$$Y_P = wY_{P_{\min}} \in \mathcal{A}_P^+.$$

La famille $(Y_P)_{P \in \mathcal{P}(M_{\min})}$ est $(G, M_{\min})$-orthogonale positive. Elle définit donc une $(G, M_\natural)$-famille orthogonale positive $(Y_{P_\natural})_{P_\natural \in \mathcal{P}(M_\natural)}$. Pour tout $g \in G(F)$ on notera $\mathcal{Y}(g)$ la $(G, M_\natural)$-famille orthogonale définie par

$$\mathcal{Y}(g)_Q = Y_Q - H_{\overline{Q}}(g).$$

Posons

$$\widetilde{v}(Y_{P_{\min}}, g) = \nu(A_{T''}) \int_{A_{T''}(F)} \sigma_{M_\natural}^G\big(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g)\big)\,\mathrm{d}a.$$

Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour $g \in G(F)$ vérifiant

$$\sigma(g) \leqslant C_2 \inf_{\alpha \in \Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}}),$$

la famille $(\mathcal{Y}(g)_{P_\natural})_{P_\natural \in \mathcal{P}(M_\natural)}$ vérifie $\mathcal{Y}(g)_{P_\natural} \in \mathcal{A}_{P_\natural}^+$ pour tout $P_\natural \in \mathcal{P}(M_\natural)$, donc est orthogonale positive.

Lemme 8.2.2. — *Il existe deux constantes $C_3, C_4 > 0$ et un entier naturel N_0 tels que pour tout entier $N \geqslant N_0$ et pour tout $Y_{P_{\min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{\min}}$ vérifiant*

$$\text{(A)} \qquad C_3 \log(N) \leqslant \inf_{\alpha\in\Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}}),$$

$$\text{(B)} \qquad \sup_{\alpha\in\Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}}) \leqslant C_4 N,$$

on ait, pour tout $X = X' + X'' \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \mathfrak{t}(F)[> N^{-b}]$, l'égalité

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'')\, \kappa_{N,X''}(g)\, \mathrm{d}g$$
$$= \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'')\, \widetilde{v}(Y_{P_{\min}}, g)\, \mathrm{d}g.$$

Démonstration. — D'après le lemme 8.2.1, il n'y a rien à démontrer si $X \notin \omega_T$. On supposera donc $X \in \omega_T$ dans la suite. On fixe des constantes $C_3, C_4 > 0$, des entiers naturels $N \geqslant N_0$ et un élément $Y_{P_{\min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{\min}}$ vérifiant (A) et (B).

On va montrer que l'égalité de l'énoncé est vérifiée si C_3 et N_0 sont assez grands et C_4 assez petit. On peut déjà supposer $C_3 \geqslant C_1$. Alors d'après le lemme 8.2.1, pour tout entier $N \geqslant 2$, pour tout $g \in G(F)$ et pour tout X dans $\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \mathfrak{t}(F)[> N^{-b}]$, si le terme sous l'intégrale est non nul, la $(G, M_\natural)$ famille $(\mathcal{Y}(g)_{P_\natural})_{P_\natural\in\mathcal{P}(M_\natural)}$ est orthogonale positive. Si tel est le cas, pour tout $a \in A_{T''}(F)$, on a

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}(M_\natural)} \sigma^Q_{M_\natural}\big(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g)\big)\, \tau_Q\big(H_{M_\natural}(a) - Y(g)_Q\big) = 1$$

et on peut donc écrire

$$\kappa_{N,X''}(g) = \sum_{Q\in\mathcal{F}(M_\natural)} \kappa_{N,X''}(Q, g),$$

où l'on a posé

$$\kappa_{N,X''}(Q, g)$$
$$= \nu(A_{T''}) \int_{A_{T''}(F)} \sigma^Q_{M_\natural}(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g))\tau_Q(H_{M_\natural}(a) - Y(g)_Q)\, \kappa_N(\gamma^{-1}_{X''} a g)\mathrm{d}a.$$

Les fonctions $\kappa_{N,X''}(Q, .)$ sont invariantes à gauche par $T'(F)A_{T''}(F)$. On a donc une décomposition

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'')\, \kappa_{N,X''}(g)\, \mathrm{d}g = \sum_{Q\in\mathcal{F}(M_\natural)} I(Q, X)$$

où $I(Q, X) = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\kappa_{N,X''}(Q, g)\, \mathrm{d}g$.

On va montrer les deux faits suivants dont découle la proposition :

1) *Si C_4 est assez petit et N_0 est assez grand, on a*

$$I(G,X)=\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^{g}f^{\sharp}_{x,\omega}(X)\widetilde{v}(Y_{P_{\min}},g)\,\mathrm{d}g$$

pour tout $X\in \mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S\cap\omega_T[>N^{-b}]$.

2) *Si C_3 et N_0 sont assez grand, on a $I(Q,X)=0$ pour tout $Q\in\mathcal{F}(M_\natural)$ différent de G et pour tout $X\in\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S\cap\omega_T[>N^{-b}]$.*

Preuve de 1). — D'après le lemme 8.2.1, il suffit d'avoir l'implication

$$\sigma^G_{M_\natural}\big(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Y}(g)\big)=1\implies\kappa_N(\gamma^{-1}_{X''}ag)=1$$

pour tout $a\in A_{T''}(F)$, pour tout $g\in G(F)$ vérifiant $\sigma(g)\leqslant C_1\log(N)$ et pour tout $X\in\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S\cap\omega_T[>N^{-b}]$. Pour $a\in A_{T''}(F)$,

$$\sigma^G_{M_\natural}\big(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Y}(g)\big)=1$$

entraîne $\sigma(a)\ll(\sup_{\alpha\in\Delta_{\min}}\alpha(Y_{P_{\min}})+\sigma(g))$. Il existe une constante $C>0$ telle que $\sigma(g)<CN$ entraîne $\kappa_N(g)=1$ pour tout $g\in G(F)$. Comme de plus $\sigma(\gamma_{X''})\ll\log(N)$ on en déduit le point 1).

Preuve de 2). — Soit $Q=LU_Q\in\mathcal{F}(M_\natural)$ différent de G et $\overline{Q}=LU_{\overline{Q}}$ le parabolique opposé. On a

$$\begin{aligned}I(Q,X)&=\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^{g}f^{\sharp}_{x,\omega}(X)\,\kappa_{N,X''}(Q,g)\,\mathrm{d}g\\&=\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash L_Q(F)}\int_K\int_{U_{\overline{Q}}(F)} {}^{\overline{u}\ell k}f^{\sharp}_{x,\omega}(X)\,\kappa_{N,X''}(Q,\overline{u}\ell k)\,\mathrm{d}\overline{u}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\ell.\end{aligned}$$

Si on a $\kappa_{N,X''}(Q,\overline{u}\ell k)=\kappa_{N,X''}(Q,\ell k)$ pour $\overline{u}\in U_{\overline{Q}}(F)$, $\ell\in L_Q(F)$ et $k\in K$ vérifiant ${}^{\overline{u}\ell k}f^{\sharp}_{x,\omega}(X)\neq0$, alors l'intégrale intérieure sera nulle car f est très cuspidale (c'est le lemme 5.5 de [**29**]) et on aura bien $I(Q,X)=0$.

D'après le lemme 8.2.1, il existe $C_5>0$ telle que ${}^{\overline{u}\ell k}f^{\sharp}_{x,\omega}(X)\neq0$ entraîne $\sigma(\overline{u}\ell k),\sigma(\ell k),\sigma(\overline{u})\leqslant C_5\log(N)$. Puisque l'on a

$$\begin{aligned}\kappa_{N,X''}(Q,g)=\nu(A_{T''})\int_{A_{T''}(F)}&\sigma^Q_{M_\natural}\big(H_{M_\natural}(a),\mathcal{Y}(g)\big)\\&\tau_Q\big(H_{M_\natural}(a)-Y(g)_Q\big)\kappa_N(\gamma^{-1}_{X''}ag)\,\mathrm{d}a\end{aligned}$$

et que les fonctions $\sigma^Q_{M_\natural}(.\,,\mathcal{Y}(g))$ et $\tau_Q(\,.-Y(g)_Q)$ sont invariantes par translation à gauche de g par $U_{\overline{Q}}(F)$ (car elle ne dépendent que de $H_{\overline{P}_\natural}(g)$ pour

$P_\natural \subset Q$), il suffit donc d'assurer que pour tout $X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_T[> N^{-b}]$, tous $a \in A_{T''}(F)$, $g \in G(F)$, $\overline{u} \in U_{\overline{Q}}(F)$ tels que

$$\sigma_{M_\natural}^Q(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g))\tau_Q(H_{M_\natural}(a) - Y(g)_Q) = 1$$

et

$$\sigma(\overline{u}g), \sigma(g), \sigma(\overline{u}) \leqslant C_5 \log(N),$$

on a l'égalité

$$\kappa_{N,X''}(\gamma_{X''}^{-1} a\overline{u}g) = \kappa_{N,X''}(\gamma_{X''}^{-1} ag).$$

Soient $g \in G(F)$ et $a \in A_{T''}(F)$ tels que

$$\sigma(g) \leqslant C_5 \log(N) \quad \text{et} \quad \sigma_{M_\natural}^Q\big(H_{M_\natural}(a), \mathcal{Y}(g)\big)\tau_Q\big(H_{M_\natural}(a) - Y(g)_Q\big) = 1.$$

La fonction $\sigma_{M_\natural}^Q(.\,, \mathcal{Y}(g))\tau_Q(.\, - Y(g)_Q)$ est la fonction caractéristique de la somme de $\mathcal{A}_Q^+$ et de l'enveloppe convexe des $Y(g)_{P_\natural}$ pour $P_\natural \subset Q$. On a donc pour tout $\alpha \in \Sigma_Q^+$ l'inégalité

$$\alpha\big(H_{M_\natural}(a)\big) \geqslant \inf_{P_\natural \subset Q} \alpha\big(Y_{P_\natural} - H_{\overline{P}_\natural}(g)\big).$$

Il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\inf_{P_\natural \subset Q} \alpha\big(Y_{P_\natural} - H_{\overline{P}_\natural}(g)\big) \geqslant C' \inf_{\beta \in \Delta_{\min}} \beta(Y_{P_{\min}}) - C'\sigma(g).$$

Par conséquent, on a $\alpha(H_{M_\natural}(a)) \geqslant C'(C_3 - C_5)\log(N)$. Le lemme suivant nous permet de conclure à l'existence d'une constante C_3 et d'un entier N_2 qui conviennent.

Lemme 8.2.3. — *Soit $C_5 > 0$ une constante. Alors il existe $C_6 > 0$ et N_1 entier tels que la propriété suivante soit vérifiée : pour tous $a \in A_{T''}(F)$, $g \in G(F)$, $\overline{u} \in U_{\overline{Q}}(F)$, tout $X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_T[S; > N^{-b}]$ et tout entier $N \geqslant N_1$ vérifiant*

$$\sigma(g), \sigma(\overline{u}g), \sigma(\overline{u}) \leqslant C_5 \log(N) \quad \text{et} \quad \alpha\big(H_{M_\natural}(a)\big) \geqslant C_6 \log(N)$$

pour tout $\alpha \in \Sigma_Q^+$, on a

$$\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a\overline{u}g) = \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} ag).$$

Démonstration. — Montrons d'abord qu'il existe un entier N_1 tel que pour tout entier $N \geqslant N_1$ et pour tous $a \in A_{T''}(F)$, $g \in G(F)$ et

$$X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_T[S; > N^{-b}],$$

avec $\sigma(g) \leqslant C_5 \log(N)$, on a $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} ag) = 1$ si et seulement si $g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}(v_r)$ appartient à $\pi_E^{-N} R$.

La condition est de toute façon nécessaire. Fixons N, a, g et X vérifiant les conditions précédentes et supposons que $g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}(v_r) \in \pi_E^{-N}R$. On va montrer que si N_1 est assez grand on a $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag) = 1$. On considère comme dans la preuve du lemme 8.1.1 une constante $C > 0$ telle que pour tout $g' \in G(F)$ on ait

$$\pi_E^{C\sigma(g')}R \subset g'(R) \subset \pi_E^{-C\sigma(g')}R$$

et une contante $C' > 0$ telle que

$$X''^{k}_{\Lambda}(R) \subset \pi_E^{-C'}R$$

pour tout $k = 0, \dots, d_{W''} - 1$ et tout $X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_T$. Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 8.1.1 montre que

$$g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}(R) \subset Q_S(X'')^{-1}\pi_E^{-N-2C\sigma(g)-2C\sigma(\gamma_{X''})-C'}R.$$

De plus, on a $|\log|Q_S(X'')|| \ll \log(N)$ et $\sigma(\gamma_{X''}) \ll \log(N)$. Donc pour N_1 assez grand, $g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}(v_r) \in \pi_E^{-N}R$ entraîne $g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}(R) \subset \pi_E^{-N-\sqrt{N}}R$, ce qui permet de conclure.

Soit $N \geqslant N_1$ un entier et soit $a \in A_{T''}(F)$. On peut supposer qu'il existe $g \in G(F)$ et $X \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_T[S; > N^{-b}]$ tels que $\sigma(g) \leqslant C_5 \log(N)$ et $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag) = 1$ (sinon il n'y a rien à dire).

Notons $\mathcal{A}_N$ l'ensemble des $a \in A_{T''}(F)$ qui vérifient cette condition d'existence. En adaptant un tout petit peu le raisonnement précédent, on montre qu'il existe une constante $C'' > 0$ tel que $a^{-1}(R) \subset \pi_E^{-N-C''\log(N)}R$ pour tout a dans $\mathcal{A}_N$. On a alors pour tout $v \in V - \{0\}$,

$$\mathrm{val}_R(a^{-1}v) - \mathrm{val}_R(v) \geqslant -N - C''\log(N).$$

On peut fixer la constante C'' telle qu'on ait aussi

$$\mathrm{val}_R(g^{-1}v) - \mathrm{val}_R(v) \geqslant -C''\log(N) \quad \text{et} \quad \mathrm{val}_R(\gamma_{X''}v) - val_R(v) \geqslant -C''\log(N)$$

pour tout $g \in G(F)$ vérifiant $\sigma(g) \leqslant C_5\log(N)$, pour tout X appartenant à $\mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \omega_T[S; > N^{-b}]$ et pour tout $v \in V - \{0\}$. Enfin, on peut trouver une constante C_6 de sorte que si $\alpha(H_{M_\natural}(a)) \geqslant C_6\log(N)$ pour tout $\alpha \in \Sigma_Q^+$ alors pour tout $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$ tel que $\sigma(\bar{u}) \leqslant C_5\log(N)$, on a pour tout $v \in V - \{0\}$

$$\mathrm{val}_R(a\bar{u}a^{-1}v - v) \geqslant 3C''\log(N) + \mathrm{val}_R(v).$$

Pour a, g, $\overline{u}$, X comme dans l'énoncé, on a donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}_R(g^{-1}\overline{u}^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_r - g^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_r)\\
&\quad\geqslant \mathrm{val}_R(\overline{u}^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_r - a^{-1}\gamma_{X''}v_r) - C''\log(N)\\
&\quad= \mathrm{val}_R(a^{-1}a\overline{u}^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_r - a^{-1}\gamma_{X''}v_r) - C''\log(N)\\
&\quad\geqslant \mathrm{val}_R(a\overline{u}^{-1}a^{-1}\gamma_{X''}v_r - \gamma_{X''}v_r) - N - 2C''\log(N)\\
&\quad\geqslant \mathrm{val}_R(\gamma_{X''}v_r) - N + C''\log(N)\\
&\quad\geqslant -N.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu d'après le premier point. ∎

On déduit du lemme 8.2.2 la proposition suivante.

Proposition 8.2.4. — *Il existe un entier naturel N_1 telle que pour tout $N \geqslant N_1$ et pour tout $Y_{P_{\min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{\min}}$ vérifiant*

$$C_3\log(N) \leqslant \inf_{\alpha\in\Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}})$$

on ait, pour tout $X = X' + X'' \in \mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S \cap \mathfrak{t}(F)[> N^{-b}]$, l'égalité

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X'+X'')\,\kappa_{N,X''}(g)\,\mathrm{d}g = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X'+X'')\,\widetilde{v}(Y_{P_{\min}},g)\,\mathrm{d}g.$$

Démonstration. — En effet, il existe un entier N_1 tel que pour $N \geqslant N_1$ les ensembles

$$\Big\{Y_{P_{\min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{\min}}\ ;\ C_3\log(N) \leqslant \inf_{\alpha\in\Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}}) \text{ et } \sup_{\alpha\in\Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}}) \leqslant C_4 N\Big\},$$

$$\Big\{Y_{P_{\min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{\min}}\ ;\ C_3\log(N+1) \leqslant \inf_{\alpha\in\Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}}) \text{ et } \sup_{\alpha\in\Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}}) \leqslant C_4(N+1)\Big\}$$

soient d'intersection non vide. Alors pour

$X = X' + X'' \in \mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S \cap \mathfrak{t}(F)[> N^{-b}] \subset \mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S \cap \mathfrak{t}(F)[> (N+1)^{-b}]$,

on a d'après le lemme 8.2.2

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X'+X'')\,\kappa_{N,X''}(g)\,\mathrm{d}g = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X'+X'')\,\kappa_{N+1,X''}(g)\,\mathrm{d}g.$$

D'où par une récurrence immédiate, pour tout $N' \geqslant N$,

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'')\, \kappa_{N,X''}(g)\,\mathrm{d}g = \int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X' + X'')\, \kappa_{N',X''}(g)\,\mathrm{d}g.$$

Soit $Y_{P_{\min}} \in \mathcal{A}^+_{P_{\min}}$ tel que

$$C_3 \log(N) \leqslant \inf_{\alpha \in \Delta_{\min}} \alpha(Y_{P_{\min}})$$

On peut alors trouver un entier $N' \geqslant N$ tel que $Y_{P_{\min}}$ vérifie les inégalités (A) et (B) du lemme 8.2.2 pour N'. Cela permet de conclure $\square$

8.3. Le résultat final

Notons $\theta_{f,x,\omega}$ la fonction sur $\mathfrak{g}_x(F)$ définie presque partout par

$$\theta_{f,x,\omega}(X) = \begin{cases} \theta_f\big(x \exp(X)\big) & \text{si } X \in \omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit une fonction $\theta^\sharp_{f,x,\omega}$ sur $\mathfrak{g}_{x,\mathrm{reg}}(F)$ par

$$\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X) = (-1)^{a_{M(X)}}\, \nu(G_{x,X})^{-1} \int_{G_{x,X}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\, v_{M(X)}(g)\,\mathrm{d}g$$

où pour $X \in \mathfrak{g}_{x,\mathrm{reg}}(F)$, on a noté $M(X)$ le commutant de $A_{G_{x,X}}$ dans G (c'est un sous-groupe de Levi de G). Alors les fonctions $\theta_{f,x,\omega}$ et $\theta^\sharp_{f,x,\omega}$ sont localement constantes sur $\mathfrak{g}_{x,\mathrm{reg}}(F)$, localement intégrables sur $\mathfrak{g}_x(F)$ et $\theta^\sharp_{f,x,\omega}$ est la transformée de Fourier partielle de $\theta_{f,x,\omega}$ par rapport à la deuxième variable. Plus précisément, cela signifie que l'on a l'égalité

$$\int_{\mathfrak{g}_x(F)} \theta^\sharp_{f,x,\omega}(X)\, \varphi(X)\,\mathrm{d}X = \int_{\mathfrak{g}_x(F)} \theta_{f,x,\omega}(X)\, \varphi^\sharp(X)\,\mathrm{d}X$$

pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\mathfrak{g}_x(F))$ et où

$$\varphi^\sharp(X) = \int_{\mathfrak{g}''(F)} \varphi(X' + Y'')\, \psi(\langle Y'', X''\rangle)\,\mathrm{d}Y''$$

pour tout $X = X' + X'' \in \mathfrak{g}_x(F) = \mathfrak{g}'_x(F) \oplus \mathfrak{g}''(F)$ (cf. proposition 5.8 de [**29**]).

Lemme 8.3.1. — *Pour $N \geqslant N_1$ et $X = X' + X'' \in \mathfrak{t}'(F) \times \mathfrak{t}''(F)^S \cap \mathfrak{t}(F)[> N^{-b}]$, on a les égalités suivantes :*

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\, \kappa_{N,X''}(g)\, \mathrm{d}g = 0 \qquad \textit{si } A_{T'} \neq \{1\},$$

$$\int_{T'(F)A_{T''}(F)\backslash G(F)} {}^g f^\sharp_{x,\omega}(X)\, \kappa_{N,X''}(g)\, \mathrm{d}g = \nu(T')\,\nu(A_{T''})\,\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X) \qquad \textit{si } A_{T'} = \{1\}.$$

Démonstration. — C'est exactement la même que celle de la proposition 10.9 de [**29**] ▯

Si $A_{G'_x} = \{1\}$ on pose

(1) $$K_{x,\omega}(\theta,f) = \sum_{\substack{S\in\mathcal{S} \\ T=T'T''\in\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(G'_x)\times\mathcal{T}(G'')}} \nu(T')\left|W(G_x,T)\right|^{-1} \int_{\mathfrak{t}'(F)\times\mathfrak{t}''(F)^S} \widehat{\jmath}_S(X')\,D^{G'_x}(X')\,D^{G''}(X'')^{\frac{1}{2}}\,\theta^\sharp_{f,x,\omega}(X)\,\mathrm{d}X$$

où $\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(G'_x)$ désigne un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques dans G'_x. Si $A_{G'_x} \neq \{1\}$, on pose

$$K_{x,\omega}(\theta,f) = 0.$$

Proposition 8.3.2. — *L'expression* (1) *est absolument convergente et on a l'égalité*

$$\lim_{N\to\infty} J_{N,x,\omega}(\theta,f) = K_{x,\omega}(\theta,f).$$

Démonstration. — C'est exactement la même que celle de la proposition 10.10 de [**29**] ▯

CHAPITRE 9

CAS DES SUPPORTS NILPOTENTS

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 9.0.1. — *Supposons que pour tout quasi-caractère θ de $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ qui ne contient pas d'élément nilpotent dans son support on ait $\lim_{N\to\infty} J_N(\theta, f) = J_{\text{geom}}(\theta, f)$. Alors on a*

$$\lim_{N\to\infty} J_N(\theta, f) = J_{\text{geom}}(\theta, f)$$

pour tout quasi-caractère θ de $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$.

On suppose donc dans la suite de ce chapitre que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$\text{(Hyp)} \quad \begin{cases} \textit{Pour tout quasi-caractère } \theta \textit{ de } \mathfrak{h}(F) \textit{ et toute fonction très cuspidale} \\ f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)) \textit{ qui ne contient pas d'élément nilpotent dans son support,} \\ \textit{on a } \lim_{N\to\infty} J_N(\theta, f) = J_{\text{geom}}(\theta, f). \end{cases}$$

9.1. Calcul de la limite de $J_N(\theta, f)$

Soient θ un quasi-caractère de $\mathfrak{h}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ une fonction très cuspidale. Comme dans [**29**, p. 1265], on peut fixer un ensemble fini $\mathcal{S}$ d'éléments de $\mathfrak{h}_{\text{reg}}(F)$ dont tous les éléments ont un noyau nul dans W et des nombres complexes c_S pour $S \in \mathcal{S}$ tels que

$$\forall X \in \mathfrak{h}(F) \cap \mathrm{Supp}(f)^G, \quad \theta(X) = \sum_{S\in\mathcal{S}} c_S\, \widehat{j}^H(S, X)$$

On pose alors

$$(1) \qquad K(\theta, f) = \sum_{\substack{S\in\mathcal{S} \\ T\in\mathcal{T}(G)}} c_S \left|W(G,T)\right|^{-1} \int_{\mathfrak{t}(F)^S} D^G(X)^{\frac{1}{2}}\, \widehat{\theta}_f(X)\, dX,$$

où l'ensemble $\mathfrak{t}(F)^S$ est défini comme dans le chapitre 7. Puisque la fonction $\widehat{\theta}_f$ est à support compact modulo conjugaison, les intégrales intervenant dans la définition de $K(\theta, f)$ sont à support compact. Comme de plus $\widehat{\theta}_f$ est un quasi-caractère (cf. lemme 6.1 de [**29**]), on en déduit d'après Harish-Chandra que les intégrales convergent.

Lemme 9.1.1. — *On a* $\lim_{N\to\infty} J_N(\theta, f) = K(\theta, f)$.

Démonstration. — Soit $\omega \subset \mathfrak{g}(F)$ un bon voisinage de 0 et supposons que $\mathrm{Supp}(f) \subset \omega$. Posons alors $\theta_\omega = \theta \mathbf{1}_\omega$. On relève, via l'exponentielle, les fonctions f et θ_ω en des fonctions notées $\mathbf{f}$ et Θ_ω sur $G(F)$ et $H(F)$ respectivement. On a alors l'égalité $J_N(\theta, f) = J_N(\Theta_\omega, \mathbf{f})$. En appliquant la proposition 8.3.2 aux fonctions $\mathbf{f}$, Θ_ω et à $x = 1$, on obtient alors le résultat voulu.

Dans le cas général, on peut toujours trouver $\lambda \in F^{\times 2}$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \lambda\omega$. On pose alors

$$f'(X) = f(\lambda X), \quad \xi'(N) = \xi(\lambda N), \quad \theta'(X) = \theta(\lambda X).$$

Notons d'un indice ξ' les expressions où on a remplacé ξ par ξ'. Par les changements de variables $N \mapsto \lambda N$ et $X \mapsto \lambda X$ sur $\mathfrak{u}(F)$ et $\mathfrak{h}(F)$ respectivement, on a

$$J_{N,\xi'}(\theta', f') = |\lambda|_F^{-\dim(U)-\dim(H)} J_{N,\xi}(\theta, f).$$

Grâce aux propriétés d'homogénéité des fonctions $\widehat{j}^H$, on a pour tout Y dans $\mathrm{Supp}(f')^G \cap \mathfrak{h}(F)$

$$\theta'(Y) = \sum_{S\in\mathcal{S}} c_S \widehat{j}^H(S, \lambda Y) = \sum_{S\in\mathcal{S}} |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\delta(H)} c_S \widehat{j}^H(\lambda S, Y).$$

On peut donc prendre $\mathcal{S}' = \lambda\mathcal{S}$ et les constantes $c_{\lambda S} = |\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\delta(H)} c_S$ pour définir $K_{\xi'}(\theta', f')$. Pour $T \in \mathcal{T}(G)$, on vérifie que l'ensemble $\mathfrak{t}(F)^{\lambda S}$ défini par ξ' et λS est égal à $\lambda\mathfrak{t}(F)^S$. On a de plus

$$\widehat{\theta}_{f'}(X) = |\lambda|_F^{-\dim(G)} \widehat{\theta}_f(\lambda^{-1} X) \quad \text{et} \quad D^G(\lambda X) = |\lambda|_F^{-\delta(G)} D^G(X).$$

Par changement de variable, on obtient

$$K_{\xi'}(\theta', f') = |\lambda|_F^{-\dim(G)+\dim(T)+\frac{1}{2}\delta(G)-\frac{1}{2}\delta(H)} K_\xi(\theta, f).$$

On a $-\dim(G) + \dim(T) + \frac{1}{2}\delta(G) = -\frac{1}{2}\delta(G)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\frac{1}{2}\delta(G + \frac{1}{2}\delta(H) = \dim(U) + \dim(H)$. On s'est alors ramené au premier cas. ∎

9.2. Une première approximation

Pour θ un quasi-caractère de $\mathfrak{h}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ une fonction très cuspidale, on pose

$$E(\theta, f) = K(\theta, f) - J_{\mathrm{geom}}(\theta, f).$$

Le but est de montrer que $E(.,.)$ est identiquement nul. Le lemme suivant donne une première approximation de ce terme d'erreur.

Lemme 9.2.1. — *La forme bilinéaire $(\theta, f) \mapsto E(\theta, f)$ est proportionnelle à la forme bilinéaire*

$$(\theta, f) \longmapsto \sum_{\mathcal{O}^H \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}(F))} c_{\theta,\mathcal{O}^H}(0) \sum_{\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))} c_{\theta_f,\mathcal{O}}(0).$$

Démonstration. — Montrons dans un premier temps que E est combinaison linéaire, pour $\mathcal{O}^H \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{h}(F))$ et $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}(F))$, des formes bilinéaires

$$(\theta, f) \mapsto c_{\theta,\mathcal{O}^H}(0)\, c_{\theta_f,\mathcal{O}}(0).$$

Supposons que $c_{\theta,\mathcal{O}^H}(0) = 0$ pour tout orbite $\mathcal{O}^H \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{h}(F))$. Il existe alors un G-domaine $\omega \subset \mathfrak{g}(F)$ compact modulo conjugaison et contenant 0 tel que $\theta_{|\omega\cap\mathfrak{h}(F)} = 0$. Posons

$$f' = f - f_{|\omega}.$$

On a $E(\theta, f) = E(\theta, f') + E(\theta, f_{|\omega})$. Puisque f' ne contient aucun élément nilpotent dans son support, on a $E(\theta, f') = 0$ (c'est l'hypothèse (Hyp)). En revenant aux définitions, on voit que $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f_{|\omega}) = 0$ et $J_N(\theta, f_{|\omega}) = 0$ pour tout $N \geqslant 1$. Donc $K(\theta, f_{|\omega}) = 0$ et par conséquent $E(\theta, f) = 0$.

Supposons maintenant que $c_{\theta_f,\mathcal{O}}(0) = 0$ pour toute orbite $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}(F))$. On peut alors trouver un G-domaine compact modulo conjugaison et contenant 0 tel que $\theta_f(X) = 0$ pour tout $X \in \omega$. Posons

$$f' = f - f_{|\omega}.$$

On a encore $E(\theta, f) = E(\theta, f') + E(\theta, f_{|\omega})$ et $E(\theta, f') = 0$ car le support de f' ne contient aucun élément nilpotent. Comme de plus $\theta_{f_{|\omega}} = \theta_f \mathbf{1}_\omega = 0$, on vérifie immédiatement que $K(\theta, f_{|\omega}) = J_{\mathrm{geom}}(\theta, f_{|\omega}) = 0$. Donc $E(\theta, f) = 0$.

Montrons maintenant que E est combinaison linéaire des formes bilinéaires

$$(\theta, f) \longmapsto c_{\theta,\mathcal{O}^H}(0)\, c_{\theta_f,\mathcal{O}}(0),$$

pour $\mathcal{O}^H \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}(F))$ et $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))$. Pour $\lambda \in F^{\times 2}$ on pose

$$\theta^\lambda(X) = \theta(\lambda X) \quad \text{et} \quad f^\lambda(X) = f(\lambda X).$$

On a alors $\theta_{f^\lambda} = \theta_f^\lambda$ et par les propriétés d'homogénéité des germes de Shalika, on obtient

$$c_{\theta^\lambda,\mathcal{O}^H}(0)\,c_{\theta_{f^\lambda},\mathcal{O}}(0) = |\,\lambda\,|_F^{-\frac{1}{2}(\dim(\mathcal{O}^H)+\dim(\mathcal{O}))}\,c_{\theta,\mathcal{O}^H}(0)\,c_{\theta_f,\mathcal{O}}(0).$$

Puisque $\dim(\mathcal{O}^H)+\dim(\mathcal{O}) \leqslant \delta(H)+\delta(G)$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{O}^H$ et $\mathcal{O}$ sont des orbites nilpotentes régulières, il suffit maintenant de montrer que pour tout $\lambda \in F^{\times 2}$ on a

$$E(\theta^\lambda, f^\lambda) = |\,\lambda\,|_F^{-\frac{1}{2}(\delta(H)+\delta(G))}\,E(\theta, f).$$

On a vérifié lors de la démonstration du lemme 9.1.1 une telle propriété d'homogénéité pour $K(\theta, f)$ à condition de changer ξ en ξ^λ. Il est clair que $J_{\text{geom}}(\theta, f)$ ne dépend pas du choix de ξ. De plus, par les propriétés d'homogénéité des fonctions $\widehat{\jmath}(\mathcal{O}, .)$ on vérifie que

$$J_{\text{geom}}(\theta^\lambda, f^\lambda) = |\,\lambda\,|_F^{-\frac{1}{2}(\delta(H)+\delta(G))}\,J_{\text{geom}}(\theta, f).$$

L'expression $K(\theta, f)$ ne dépend de ξ que par la définition des ensembles $\mathfrak{t}(F)^S$ qui dépendent du choix de Ξ, mais changer ξ en ξ' revient à changer Ξ en un élément Ξ' qui lui est conjugué par $A(F)$. On vérifie alors que les ensembles $\mathfrak{t}(F)^S$ ne dépendent en fait pas du choix de ξ. Cela suffit pour obtenir la propriété d'homogénéité voulue.

Il existe donc des nombres complexes $c_{\mathcal{O}^H,\mathcal{O}}$ tels que pour tout quasi-caractère θ de $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on ait

$$E(\theta, f) = \sum_{\mathcal{O},\mathcal{O}^H} c_{\mathcal{O}^H,\mathcal{O}}\,c_{\theta,\mathcal{O}^H}(0)\,c_{\theta_f,\mathcal{O}}(0),$$

où la somme porte sur $\mathcal{O}^H \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}(F))$ et $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))$.

Il nous reste à vérifier que les coefficients $c_{\mathcal{O}^H,\mathcal{O}}$ sont tous égaux. Si G ou H n'est pas quasi-déployé, il n'y a rien à montrer (car la somme est alors vide). Si G et H sont quasi-déployés, alors l'un de ces deux groupes a une seule orbite nilpotente régulière et l'autre en possède deux qui sont permutées par multiplication par n'importe quel élément $\lambda \in F^\times - N_{E/F}(E^\times)$. Pour $\lambda \in F^\times$ quelconque l'égalité

$$E(\theta^\lambda, f^\lambda) = |\lambda|_F^{-\dim(U)-\dim(H)}E(\theta, f)$$

reste valable et on a

$$c_{\theta^\lambda,\mathcal{O}^H}(0)\,c_{\theta_{f^\lambda},\mathcal{O}}(0) = |\,\lambda\,|_F^{-\frac{1}{2}(\dim(\mathcal{O}^H)+\dim(\mathcal{O}))}\,c_{\theta,\lambda\mathcal{O}^H}(0)\,c_{\theta_f,\lambda\mathcal{O}}(0).$$

En choisissant $\lambda \in F^\times - N_{E/F}(E^\times)$ on obtient l'égalité des deux coefficients recherchée. $\square$

9.3. Calcul de germes de Shalika

D'après le lemme précédent, la proposition 9.0.1 est établie si G ou H n'est pas quasi-déployé. On suppose donc dans la suite que G et H sont quasi-déployés.

Lemme 9.3.1. — *Soit B un sous-groupe de Borel de G et T_{qd} un tore maximal de B tous deux définis sur F. Soient $X_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ et $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}(F))$; on a alors*

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(X_{\mathrm{qd}}) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \mathcal{O} \textit{ n'est pas régulière}, \\ 1 & \textit{si } \mathcal{O} \textit{ est régulière}. \end{cases}$$

Démonstration. — Le tore T_{qd} est un Levi de G et la distribution

$$f \longmapsto J_G(X_{\mathrm{qd}}, f)$$

est induite à partir de la distribution $f \mapsto f(X_{\mathrm{qd}})$ sur $T_{\mathrm{qd}}(F)$ (on renvoie à [**32**], § 2.3 pour la définition de l'induction d'une distribution invariante depuis un sous-groupe de Levi). Il s'ensuit que $\Gamma_{\mathcal{O}}(X_{\mathrm{qd}})$ est non nul si et seulement si $\mathcal{O}$ intervient dans l'orbite induite de l'orbite $\{0\}$ de $\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)$. Cette condition équivaut à ce que $\mathcal{O}$ soit régulière. On en déduit la première égalité. Puisque $\Gamma^{T_{\mathrm{qd}}}_{\{0\}}(X_{\mathrm{qd}}) = 1$ on en déduit aussi la deuxième égalité. ∎

9.4. Preuve de la proposition 9.0.1

D'après le lemme 9.2.1, il existe un nombre complexe c tel que pour tout quasi-caractère θ de $\mathfrak{h}(F)$ et toute fonction très cuspidale $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ on ait

$$E(\theta, f) = c \sum_{\mathcal{O}^H \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}(F))} c_{\theta, \mathcal{O}^H} \sum_{\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))} c_{\theta_f, \mathcal{O}}.$$

On doit donc montrer que $c = 0$.

Soit $T_{\mathrm{qd}} \in \mathcal{T}(G)$ resp. $T^H_{\mathrm{qd}} \in \mathcal{T}(H)$ un tore maximal d'un sous-groupe de Borel défini sur F de G resp. H. Soient $X_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ et $X^H_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}^H_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}(F)$. D'après le résultat 6.3 (3) de [**29**], on peut trouver un voisinage $\omega_{X_{\mathrm{qd}}}$ de X_{qd} dans $\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)$ aussi petit que l'on veut et qui ne contient que des éléments réguliers, et une fonction très cuspidale $f = f[X_{\mathrm{qd}}] \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ vérifiant :

1) Pour $T \in \mathcal{T}(G)$ si $T \neq T_{\mathrm{qd}}$, la restriction de $\widehat{\theta}_f$ à $\mathfrak{t}(F)$ est nulle.

2) Pour toute fonction localement intégrable φ sur $\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)$ et invariante par $W(G, T_{\mathrm{qd}})$, on a

$$|W(G,T)|^{-1}\int_{\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)}\varphi(X)D^G(X)^{\frac{1}{2}}\,\widehat{\theta}_f(X)\,\mathrm{d}X = \mathrm{vol}(\omega_{X_{\mathrm{qd}}})^{-1}\int_{\omega_{X_{\mathrm{qd}}}}\varphi(X)\,\mathrm{d}X.$$

3) Pour $Y \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, on a

$$\theta_f(Y) = \mathrm{vol}(\omega_{X_{\mathrm{qd}}})^{-1}\int_{\omega_{X_{\mathrm{qd}}}}\widehat{\jmath}^G(X,Y)\,\mathrm{d}X.$$

La dernière égalité au voisinage de 0 devient

$$\theta_{f[X_{\mathrm{qd}}]}(Y) = \widehat{\jmath}^G(X_{\mathrm{qd}}, Y).$$

Par conséquent $c_{\theta_f,\mathcal{O}} = \Gamma_{\mathcal{O}}(X_{\mathrm{qd}})$.

Soit θ un quasi-caractère de $\mathfrak{h}(F)$ tel que $\theta(X) = \widehat{\jmath}^H(X^H_{\mathrm{qd}}, X)$ pour X appartenant à $\mathrm{Supp}(f)^G \cap \mathfrak{h}(F)$. D'après le lemme 9.3.1, pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))$ et tout $\mathcal{O}^H \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}(F))$, on a

$$c_{\theta_f,\mathcal{O}} = \Gamma_{\mathcal{O}}(X_{\mathrm{qd}}) = 1 \quad \text{et} \quad c_{\theta,\mathcal{O}^H} = \Gamma_{\mathcal{O}^H}(X^H_{\mathrm{qd}}) = 1.$$

On a donc $E(\theta, f) = 2c$.

Pour $T \in \mathcal{T}$, avec $T \neq \{1\}$, et $Y \in \mathfrak{t}(F)$ en position générale il existe selon la parité de $\dim(G)$:

▹ un voisinage de Y dans $\mathfrak{h}(F)$ qui ne rencontre aucune sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{h}(F)$ si $\dim(G)$ est impaire ;

▹ un voisinage de Y dans $\mathfrak{g}(F)$ qui ne rencontre aucune sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}(F)$ si $\dim(G)$ est paire.

Dans les deux cas on en déduit que $c_\theta(Y)c_f(Y) = 0$. Donc la contribution du tore T dans $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f)$ est nulle. La contribution du tore $\{1\}$ étant

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{O}^H\in\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{h}(F))} c_{\theta,\mathcal{O}^H}\sum_{\mathcal{O}\in\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))} c_{\theta_f,\mathcal{O}},$$

on a $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f) = 1$.

D'après la propriété 2) de f on a

$$K(\theta, f) = \mathrm{vol}(\omega_{X_{\mathrm{qd}}})^{-1}\,\mathrm{vol}\left(\omega_{X_{\mathrm{qd}}} \cap \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)^{X^H_{\mathrm{qd}}}\right).$$

Il suffit donc de vérifier que $\mathrm{vol}(\omega_{X_{\mathrm{qd}}} \cap \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)^{X^H_{\mathrm{qd}}}) = \mathrm{vol}(\omega_{X_{\mathrm{qd}}})$ pour en déduire que $c = 0$. Puisqu'on peut choisir $\omega_{X_{\mathrm{qd}}}$ aussi petit que l'on veut, cela revient à montrer qu'on peut trouver X_{qd} et X^H_{qd} comme précédemment tels que

$X_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)^{X_{\mathrm{qd}}^H}$ (car $\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)^{X_{\mathrm{qd}}^H}$ est un ouvert de $\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F)$). Puisque $\Xi + X_{\mathrm{qd}}^H + \Sigma^{X_{\mathrm{qd}}^H}$ est dense dans $\Xi + X_{\mathrm{qd}}^H + \Sigma$, il suffit encore de montrer que

$$(\Xi + X_{\mathrm{qd}}^H + \Sigma) \cap \big(\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)\big)^G \neq \varnothing.$$

On distingue alors deux cas :

▹ Si $\dim(H)$ est paire, alors il existe $A \in \mathfrak{a}(F)$ et $\mu_0 \in F$ tels que

$$\Xi + X_{\mathrm{qd}}^H + \mu_0 c(v_0, \eta v_0) + A \in (\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F))^G.$$

▹ Si $\dim(H)$ est impaire, alors on peut trouver une base $((w_{\pm i})_{i=1,\ldots,p}, w_{p+1})$ de W formée de vecteurs propres pour X_{qd}^H vérifiant

- ▹ $h(w_i, w_j) = \delta_{i,-j}$ si $i, j \in \{\pm 1, \ldots, \pm p\}$,
- ▹ $h(w_{p+1}, w_i) = 0$ si $i \in \{\pm 1, \ldots, \pm p\}$,
- ▹ $h(w_{p+1}, w_{p+1}) = \nu_1$,
- ▹ $X_{\mathrm{qd}}^H w_{p+1} = s_{p+1} w_{p+1}$.

Puisque G est quasi-déployé, G_0 est aussi quasi-déployé. On peut donc supposer $\nu_1 = -\nu_0$. On fixe $\mu_0 \in F$ tel que $s_{p+1} = 2\nu_0\mu_0\eta$. Pour $\lambda \in F$, on vérifie facilement que

$$X_{\mathrm{qd}}^H + \mu_0 c(v_0 + \eta v_0) + c(v_0, \lambda w_{p+1})$$

admet $v_0 + w_{p+1}$ et $v_0 - w_{p+1}$ pour vecteurs propres avec pour valeurs propres respectives $s_{p+1} + \nu_0\lambda$ et $s_{p+1} - \nu_0\lambda$. On peut donc choisir $\lambda \in F$ et $A \in \mathfrak{a}(F)$ tels que l'élément

$$X = X_{\mathrm{qd}}^H + A + \mu_0 c(v_0, \eta v_0) + c(v_0, \lambda w_{p+1})$$

admet pour vecteurs propres $v_{\pm i}$ $i = 1, \ldots, r$, $w_{\pm i}$ $i = 1, \ldots, p$ et $w_{p+1} \pm v_0$ avec des valeurs propres distinctes. Alors on a bien $\Xi + X \in (\mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F))^G$. ∎

CHAPITRE 10

PREUVE DES THÉORÈMES 5.4.1 ET 5.5.1

On démontre les théorèmes 5.4.1 et 5.5.1 par récurrence sur la dimension de V. Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose ces deux théorèmes établis pour tous les couples (V', W') qui vérifient $\dim(V') < \dim(V)$.

Lemme 10.0.1. — *Soient θ un quasi-caractère de $H(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale qui ne contient aucun élément unipotent dans son support. On a alors*

$$\lim_{N\to\infty} J_N(\theta, f) = J_{\mathrm{geom}}(\theta, f).$$

Démonstration. — Fixons, pour tout $x \in G_{\mathrm{ss}}(F)$, un bon voisinage ω_x de 0 dans $\mathfrak{g}_x(F)$. Étant donné l'hypothèse sur f, on peut supposer que le support de f ne rencontre pas $\exp(\omega_1)$. Par un procédé de partition de l'unité, on peut supposer qu'il existe $x \in G_{\mathrm{ss}}(F)$ tel que f soit à support dans $(x\exp(\omega_x))^G$. Si la fonction ${}^g f^\xi$ est non identiquement nulle pour au moins un élément $g \in G(F)$, il existe $h \in H(F)$ et $u \in U(F)$ tels que $hu \in (x\exp(\omega_x))^G$. La partie semisimple de hu étant conjuguée à h, on a aussi $h \in (x\exp(\omega_x))^G$. Donc il existe $X \in \omega_x$ et $g \in G(F)$ tels que $h = g^{-1}x\exp(X)g$. On a alors

$$g(D \oplus Z) \subset \mathrm{Ker}\big(x\exp(X) - 1\big) \subset \mathrm{Ker}(x - 1).$$

Donc $g^{-1}xg$ appartient à $H(F)$. Ainsi si x n'est conjugué à aucun élément de $H(F)$, on a $J_N(\theta, f) = 0$ pour tout $N \geqslant 1$. On vérifie de façon similaire que si x n'est conjugué à aucun élément de $H(F)$, alors la fonction θ_f est nulle au voisinage de $H(F)$ et donc $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f) = 0$.

Par conséquent, on peut supposer que x est conjugué à un élément de $H(F)$ et même, quitte à conjuguer x dès le départ, que x appartient à $H(F)$. Notons $\omega = \omega_x$ et reprenons les notations du début du chapitre 6. Quitte à changer les choix des bons voisinages ω_x, on peut supposer que ω se décompose en un produit $\omega' \times \omega''$ où $\omega' \subset \mathfrak{g}'_x(F)$ et $\omega'' \subset \mathfrak{g}''(F)$ sont des bons voisinages de 0. D'après les lemmes 6.1.1 et 6.2.1, on est ramené à prouver l'égalité

$$\lim_{N\to\infty} J_{x,\omega,N}(\theta, f) = J_{\mathrm{geom},x,\omega}(\theta, f).$$

Comme au début du chapitre 8, on peut trouver une famille $\mathcal{S}$ d'éléments de $\mathfrak{h}''_{\mathrm{reg}}(F)$ et une famille $(\widehat{\jmath}_S)_{S\in\mathcal{S}}$ de quasi-caractères de $\mathfrak{h}'_x(F)$ tels que pour tout $X = X' + X'' \in \mathfrak{h}_{x,\mathrm{reg}}(F)$, on ait

$$\theta_{x,\omega}(X) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \widehat{\jmath}_S(X')\widehat{\jmath}^{H''}(S, X'').$$

Notons $\theta''_S = \widehat{\jmath}^{H''}(S, .)$. On peut de la même façon trouver $(\theta'_{f,b})_{b\in B}$ et $(\theta''_{f,b})_{b\in B}$, deux familles finies de quasi-caractères de $\mathfrak{g}'_x(F)$ et $\mathfrak{g}''(F)$ respectivement, telles que pour tout $X = X' + X'' \in \mathfrak{g}_x(F)$, on a

$$\theta_{f,x,\omega}(X) = \sum_{b\in B} \theta'_{f,b}(X')\theta''_{f,b}(X'').$$

D'après la proposition 6.4 de [**29**], pour tout $b \in B$, on peut trouver une fonction très cuspidale $f''_b \in C_c^\infty(\mathfrak{g}''(F))$ telle que $\theta''_{f,b} = \theta_{f''_b}$. En comparant 5.5 (1) et 6.2 (1), on trouve

$$J_{\mathrm{geom},x,\omega}(\theta, f) = \sum_{b\in B, S\in\mathcal{S}} J'(S, b) J_{\mathrm{geom}}(\theta''_S, f''_b)$$

où

$$J'(S, b) = \sum_{T'\in\mathcal{T}_{\mathrm{ell}}(H'_x)} \left|W(H'_x, T')\right|^{-1} \nu(T') \int_{\mathfrak{t}'(F)} \widehat{\jmath}_S(X')\, \theta'_{f,b}(X') D^{H'_x}(X')\, dX'.$$

On a montré au chapitre 8 que la limite de $J_{x,\omega,N}(\theta, f)$, lorsque $N \to \infty$, est égale à $K_{x,\omega}(\theta, f)$. Si $A_{G_x} \neq \{1\}$, alors $K_{x,\omega}(\theta, f) = 0$ et l'ensemble de tores $\underline{\mathcal{T}}_x$ est vide, donc $J_{\mathrm{geom},x,\omega}(\theta, f) = 0$. Sinon, en comparant les formules 8.3 (1) et 9.1 (1), on trouve

$$K_{x,\omega}(\theta, f) = \sum_{b\in B, S\in\mathcal{S}} J'(S, b) K(\theta''_S, f''_b).$$

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée au couple (V'', W''), on a l'égalité $K(\theta''_S, f''_b) = J_{\mathrm{geom}}(\theta''_S, f''_b)$. D'où le résultat ❏

10.1. Preuve du théorème 5.5.1

D'après le chapitre 9, on peut se restreindre aux fonctions très cuspidales $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ qui ne contiennent pas d'élément nilpotent dans leur support.

Soient f une telle fonction et θ un quasi-caractère sur $\mathfrak{h}(F)$. On a vu dans le chapitre 9 que les distributions $J_N(\theta, f)$ et $J_{\mathrm{geom}}(\theta, f)$ sont homogènes de même degré pour la transformation $\lambda \mapsto (\theta^\lambda, f^\lambda)$. Quitte à dilater, on peut donc supposer que le support de f est dans un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$. Par l'exponentielle, on relève les fonctions f et $\theta\mathbf{1}_\omega$ en des fonctions notées $\mathbf{f}$ et Θ_ω sur respectivement $G(F)$ et $H(F)$. On vérifie alors que

$$J_{\mathrm{geom},1,\omega}(\Theta_\omega, \mathbf{f}) = J_{\mathrm{geom}}(\theta, f) \quad \text{et} \quad J_{N,1,\omega}(\Theta_\omega, \mathbf{f}) = J_N(\theta, f).$$

Puisque f ne contient pas d'élément nilpotent dans son support, $\mathbf{f}$ n'a pas d'élément unipotent dans son support et d'après le lemme précédent, on a donc $\lim_{N\to\infty} J_{N,1,\omega}(\Theta_\omega, \mathbf{f}) = J_{\mathrm{geom},1,\omega}(\Theta_\omega, \mathbf{f})$.

10.2. Preuve du théorème 5.4.1

Soient θ un quasi-caractère de $H(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Soit ω un bon voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$. Alors $f - f\mathbf{1}_{\exp(\omega)}$ ne contient pas d'élément unipotent dans son support. D'après le lemme 10.0.1, il suffit donc d'établir que

$$\lim_{N\to\infty} J_N(\theta, f\mathbf{1}_{\exp(\omega)}) = J_{\mathrm{geom}}(\theta, f\mathbf{1}_{\exp(\omega)}).$$

D'après les lemmes 6.1.1 et 6.2.1, on a les égalités

$$J_N(\theta, f\mathbf{1}_{\exp(\omega)}) = J_N(\theta_{1,\omega}, f_{1,\omega}) \quad \text{et} \quad J_{\mathrm{geom}}(\theta, f\mathbf{1}_{\exp(\omega)}) = J_{\mathrm{geom}}(\theta_{1,\omega}, f_{1,\omega}).$$

Le résultat sur l'algèbre de Lie que l'on vient d'établir permet alors de conclure. $\square$

CHAPITRE 11

DÉCOMPOSITION DE CARTAN RELATIVE

Dans ce chapitre, on démontre l'existence d'une sorte de « décomposition de Cartan relative » analogue à celles obtenues dans [**9**] et [**15**] (pour les variétés symétriques) ou dans [**25**, th. 2.3.8] (pour des variétés sphériques associées à des groupes déployés).

Posons $\nu_0 = h(v_0)$ et soit $w_0 = v_0, w_1, \dots, w_\ell$ une famille maximale de vecteurs deux à deux orthogonaux de V_0 vérifiant $h(w_i) = (-1)^i \nu_0$.

Posons $r_0 = E(\frac{1}{2}(\ell+1))$ et $r_1 = E(\frac{1}{2}\ell)$.

Introduisons $u_{\pm i} = w_{2i-2} \pm w_{2i-1}$ pour $i = 1 \dots, r_0$ et $u'_{\pm i} = w_{2i-1} \pm w_{2i}$ pour $i = 1, \dots, r_1$. Les familles $(u_{\pm i})$ et $(u'_{\pm i})$ sont des familles hyperboliques maximales de V_0 et W respectivement.

Soient $V_{\mathrm{an},0}$ (resp. W_{an}) l'orthogonal de $Eu_1 \oplus Eu_{-1} \oplus \dots \oplus Eu_{r_0} \oplus Eu_{-r_0}$ dans V_0 (resp. de $Eu'_1 \oplus Eu'_{-1} \oplus \dots \oplus Eu'_{r_1} \oplus Eu'_{-r_1}$ dans W). Ce sont des sous-espaces hermitiens totalement anisotropes.

Définissons P_0 et P_H comme les sous-groupes paraboliques de G_0 et H qui conservent les drapeaux de sous-espaces totalement isotropes

$$Eu_1 \subset Eu_1 \oplus Eu_2 \subset \dots \subset Eu_1 \oplus \dots \oplus Eu_{r_0},$$

$$Eu'_1 \subset \dots \subset Eu'_1 \oplus \dots \oplus Eu'_{r_1}$$

respectivement.

Lemme 11.0.1. — *L'application*

$$\overline{P}_0 \times P_H \longrightarrow G_0, \quad (\overline{p}_0, p_H) \longmapsto \overline{p_0} p_H$$

est submersive à l'origine.

Démonstration. — Il s'agit de vérifier l'égalité $\overline{\mathfrak{p}}_0 + \mathfrak{p}_H = \mathfrak{g}_0$. On procède par récurrence sur ℓ. Pour $\ell = 0$, c'est évident car $\overline{\mathfrak{p}}_0 = \mathfrak{g}_0$. Soit $\ell \geqslant 1$ et supposons le résultat vérifié pour $\ell' = \ell - 1$. Soit W' l'orthogonal dans V_0 du sous-espace engendré par $u_{\pm 1}$, H' son groupe unitaire et $P_{H'}$ le sous groupe parabolique de H' qui conserve le drapeau

$$Eu_2 \subset \cdots \subset Eu_2 \oplus \cdots \oplus Eu_{r_0}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\overline{\mathfrak{p}_{H'}} + \mathfrak{p}_H = \mathfrak{h}$ et par conséquent $\mathfrak{h} \subset \overline{\mathfrak{p}}_0 + \mathfrak{p}_H$. On en déduit que $(\overline{\mathfrak{p}}_0 + \mathfrak{p}_H)^\perp \subset \overline{\mathfrak{p}}_0{}^\perp \cap \mathfrak{h}^\perp = \overline{\mathfrak{u}}_0 \cap \mathfrak{h}^\perp$ où $\overline{U}_0$ est le radical unipotent de $\overline{P}_0$ et $\overline{\mathfrak{u}}_0$ est son algèbre de Lie.

Il suffit donc de vérifier que $\overline{\mathfrak{u}}_0 \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$. On a

$$\mathfrak{h}^\perp = \{c(v_0, w), w \in W\} \oplus Fc(v_0, \eta v_0),$$

où η est un élément non nul de trace nulle dans E. Soit

$$N = c(v_0, w) + \lambda c(v_0, \eta v_0) \in \overline{\mathfrak{u}}_0 \cap \mathfrak{h}^\perp.$$

On a alors

$$0 = Nu_{-1} = \nu_0 w + h(w, w_1)v_0 + \lambda \nu_0(\eta - \overline{\eta})v_0$$

d'où l'on tire $w = 0$ puis $\lambda = 0$. ∎

Soient A_0 et A_H les tores déployés maximaux de G_0 et H respectivement qui laissent stables les droites Eu_i ($i = \pm 1, \ldots, \pm r_0$) et Eu'_i ($i = \pm 1, \ldots, \pm r_1$) respectivement. On note A_0^+ et A_H^+ les sous-ensembles de $A_0(F)$ et $A_H(F)$ qui contractent $P_0(F)$ et $P_H(F)$ respectivement.

Posons

$$R_0 = \mathcal{O}_E u_1 \oplus \mathcal{O}_E u_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_E u_r \oplus \mathcal{O}_E u_{-r} \oplus R_{\mathrm{an},0},$$

où $R_{\mathrm{an},0} = \{v \in V_{\mathrm{an},0} \; ; \; \mathrm{val}_E(h(v)) \geqslant \mathrm{val}_E(\nu_0) - 1\}$.

Pour $\mathcal{V}$ un E-espace vectoriel, $\mathcal{R}$ un $\mathcal{O}_E$-réseau de $\mathcal{V}$ et $g \in \mathrm{GL}_E(\mathcal{V})$, on note

$$\mathrm{val}_{\mathcal{R}}(g) = \inf\{\mathrm{val}_{\mathcal{R}}(gv) \; ; \; v \in \mathcal{R}\} \quad \text{et} \quad \|g\|_{\mathcal{R}} = |\pi_E|_E^{\mathrm{val}_{\mathcal{R}}(g)}.$$

Lemme 11.0.2. — *Il existe un sous-ensemble compact C_1 de $G_0(F)$ tel que pour tous $v, v' \in V_0$ vérifiant $h(v) = h(v') = \nu_0$ et $\mathrm{val}_{R_0}(v) = \mathrm{val}_{R_0}(v')$, il existe un $\gamma \in C_1$ tel que $\gamma v = v'$*

Démonstration. — Lorsque $\ell = 0$, $G_0(F)$ est compact et il suffit de prendre $C_1 = G_0(F)$. Supposons dorénavant $\ell \geqslant 1$. Soit $K_0 = \mathrm{Stab}_{G_0(F)}(R_0)$: c'est un sous-groupe ouvert-compact de $G_0(F)$. Pour tout $g \in G_0(F)$, on notera

$$\|g\| = \|g\|_{R_0}.$$

La fonction $g \mapsto \|g\|$ est minorée par une constante strictement positive sur $G_0(F)$ et est bi-invariante par K_0.

Soit $v \in V_0$ et montrons la propriété suivante :

(1) *Il existe $k \in K_0$ tel que $kv \in Eu_1 \oplus Eu_{-1} \oplus V_{0,\mathrm{an}}$.*

On a une décomposition $v = \sum_{i=\pm1,\dots,\pm r} \lambda_i u_i + v_{\mathrm{an}}$ où $v_{\mathrm{an}} \in V_{0,\mathrm{an}}$. Quitte à multiplier v par un élément du groupe de Weyl de A_0 (identifié à un sous-groupe de K_0), on peut supposer que

$$\mathrm{val}(\lambda_1) = \inf_{i=\pm1,\dots,\pm r} \mathrm{val}(\lambda_i).$$

Soit $k_1 \in K_0$ l'élément qui envoie

- u_1 sur $u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}u_2 - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1}u_r$,
- u_{-i} sur $u_{-i} + \overline{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)}u_{-1}$ pour $i = 2, \dots, r$,
- qui agit trivialement sur $V_{0,\mathrm{an}} + Eu_{-1} + Eu_2 + \cdots + Eu_r$.

On a alors $k_1 v = \lambda_1 u_1 + \mu_1 u_{-1} + \lambda_{-2}u_{-2} + \cdots + \lambda_{-r}u_{-r} + v_{\mathrm{an}}$.

Soit $k_2 \in K_0$ l'élément qui envoie

- u_1 sur $u_1 - \frac{\lambda_{-2}}{\lambda_1}u_{-2} - \cdots - \frac{\lambda_{-r}}{\lambda_1}u_{-r}$,
- u_i sur $u_i + \overline{(\frac{\lambda_{-i}}{\lambda_1})}u_{-1}$
- qui agit trivialement sur $V_{0,\mathrm{an}} + Eu_{-1} + \cdots + Eu_{-r}$.

On a alors $k_2k_1v \in Eu_1 \oplus Eu_{-1} \oplus V_{0,\mathrm{an}}$.

2) *Pour tout $v_{\mathrm{an}} \in V_{0,\mathrm{an}}$, on a*

$$R_{\mathrm{an},0} \subset \tfrac{1}{2}\big((R_{\mathrm{an},0} \cap Ev_{\mathrm{an}}) \oplus (R_{\mathrm{an},0} \cap (v_{\mathrm{an}})^{\perp})\big),$$

où $(v_{\mathrm{an}})^{\perp}$ désigne l'orthogonal de v_{an} dans $V_{0,\mathrm{an}}$.

En effet, soient $v \in R_{\mathrm{an},0}$ et $v = v_1 + v_2$ sa décomposition suivant

$$V_{\mathrm{an},0} = Ev_{\mathrm{an}} \oplus (v_{\mathrm{an}})^{\perp}.$$

Supposons que

$$\mathrm{val}_E(h(v_1) + h(v_2)) > \min\big(\mathrm{val}_E(h(v_1)), \mathrm{val}_E(h(v_2))\big) + \mathrm{val}_E(4).$$

Alors $-\frac{h(v_1)}{h(v_2)} \in 1 + 4\mathfrak{p}_F$. Puisque $1 + 4\mathfrak{p}_F \subset \mathcal{O}_F^{\times,2}$, il existerait $\lambda \in \mathcal{O}_F^{\times}$ tel que $h(v_1 + \lambda v_2) = 0$, contredisant le fait que $V_{0,\mathrm{an}}$ est anisotrope. Par conséquent, on a

$$\min\big(\mathrm{val}_E(h(2v_1)), \mathrm{val}_E(h(2v_2))\big) \geqslant \mathrm{val}_E\big(h(v_1 + v_2)\big) = \mathrm{val}_E\big(h(v)\big) \geqslant \mathrm{val}_E(\nu_0) - 1$$

d'où $v_1, v_2 \in \frac{1}{2}R_{0,\mathrm{an}}$.

3) *Il existe $g \in G_0(F)$ tel que*

$$gv = \lambda_1 u_1 + \lambda_{-1} u_{-1} + v_{\mathrm{an}},$$

avec $v_{\mathrm{an}} \in V_{0,\mathrm{an}}$, $\mathrm{val}_E(\lambda_1) = \inf(\mathrm{val}_E(\lambda_1), \mathrm{val}_E(\lambda_{-1}), \mathrm{val}_{R_{\mathrm{an},0}}(v_{\mathrm{an}}))$ et $\|g\| \leqslant |2|_E^{-1}$.

D'après 1), on peut supposer que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_{-1} u_{-1} + v_{\mathrm{an}}$ et quitte à appliquer l'élément qui échange u_1 et u_{-1} et laisse stable l'orthogonal du plan engendré par u_1 et u_{-1}, on peut aussi supposer que $\mathrm{val}_E(\lambda_1) \leqslant \mathrm{val}_E(\lambda_{-1})$.

Si $\mathrm{val}_E(\lambda_1) \leqslant \mathrm{val}_{R_{\mathrm{an},0}}(v_{\mathrm{an}})$, il n'y a rien à ajouter.

Si au contraire $-d = \mathrm{val}_{R_{\mathrm{an},0}}(v_{\mathrm{an}}) < \mathrm{val}_F(\lambda_1)$, on considère l'élément $g \in G_0(F)$ qui envoie u_1 sur u_1, v_{an} sur $v_{\mathrm{an}} + \pi_E^{-d} u_1$, u_{-1} sur

$$u_{-1} - \frac{2\overline{\pi_E}^{-d}\nu_0}{h(v_{\mathrm{an}})} v_{\mathrm{an}} - \frac{N(\pi_E)^{-d}\nu_0}{h(v_{\mathrm{an}})} u_1$$

et qui agit trivialement sur l'orthogonal de $Eu_1 + Eu_{-1} + Ev_{\mathrm{an}}$.

Puisque $\mathrm{val}_E(h(v_{\mathrm{an}})) \leqslant -2d + \mathrm{val}_E(\nu_0)$, on a

$$g\big(R_0 \cap (Eu_1 + Eu_{-1} + Ev_{\mathrm{an}})\big) = R_0 \cap (Eu_1 + Eu_{-1} + Ev_{\mathrm{an}}).$$

D'après 2), on a donc $\|g\| \leqslant |2|_E^{-1}$. En utilisant une fois de plus l'inégalité $\mathrm{val}_E(h(v_{\mathrm{an}})) \leqslant -2d + \mathrm{val}_E(\nu_0)$, on vérifie aisément que gv est bien de la forme désirée.

4) *Il existe $g \in G_0(F)$ tel que $gv \in Eu_1 + Eu_{-1}$ et $\|g\| \leqslant |\pi_E|_E^{-1} \cdot |2|_E^{-4}$.*

D'après 3), on peut supposer que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_{-1} u_{-1} + v_{\mathrm{an}},$$

avec $v_{\mathrm{an}} \in V_{0,\mathrm{an}}$, $\mathrm{val}_E(\lambda_1) = \inf(\mathrm{val}_E(\lambda_1), \mathrm{val}_E(\lambda_{-1}), \mathrm{val}_{R_{\mathrm{an}}}(v_{\mathrm{an}}))$ et montrer le résultat avec un facteur 2 de moins.

Soit $g \in G_0(F)$ l'élément qui agit ainsi sur $u_{\pm 1}$ et v_{an} :

- ▹ $u_{-1} \mapsto u_{-1}$,
- ▹ $u_1 \mapsto u_1 - \frac{1}{\lambda_1} v_{\mathrm{an}} - \frac{h(v_{\mathrm{an}})}{4\nu_0 N(\lambda_1)} u_{-1}$,
- ▹ $v_{\mathrm{an}} \mapsto v_{\mathrm{an}} + \frac{h(v_{\mathrm{an}})}{2\overline{\lambda_1}\nu_0} u_{-1}$
- ▹ g trivialement sur l'orthogonal de $Eu_1 + Eu_{-1} + Ev_{\mathrm{an}}$.

Alors gv est bien de la forme désirée et d'après 2), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{val}_{R_0}(g) \leqslant &-\mathrm{val}_E(2)\\ &+ \inf\Big(0, \mathrm{val}_{R_{\mathrm{an},0}}(v_{\mathrm{an}}) - \mathrm{val}_E(\lambda_1), \mathrm{val}_E(h(v_{\mathrm{an}})) - \mathrm{val}_E(4\nu_0 N(\lambda_1)),\\ &\qquad \mathrm{val}_E(h(v_{\mathrm{an}})) - \mathrm{val}_E(2\lambda_1\nu_0) - \mathrm{val}_{R_{\mathrm{an},0}}(v_{\mathrm{an}})\Big).\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{val}_E(h(v_{\mathrm{an}})) \geqslant 2\,\mathrm{val}_{R_{\mathrm{an},0}}(v_{\mathrm{an}}) + \mathrm{val}_E(\nu_0) - 1$, on a

$$\mathrm{val}_{R_0}(g) \geqslant -1 - 3\,\mathrm{val}_E(2).$$

Supposons maintenant que $h(v) = \nu_0$.

5) *Il existe $g \in G_0(F)$ et $\lambda \in \mathcal{O}_E - \{0\}$ tels que*

$$gv = \lambda u_1 + \tfrac{1}{2}\nu_0\overline{\lambda}^{-1}u_{-1} \quad \textit{et} \quad \|g\| \leqslant |\pi_E|_E^{-1} \cdot |2|_E^{-5}.$$

D'après 4), on sait qu'il existe $g' \in G_0(F)$ de sorte que

$$g'v = \lambda u_1 + \mu u_{-1} \quad \text{et} \quad \|g'\| \leqslant |\pi_E|_E^{-1} \cdot |2|_E^{-4}.$$

Quitte à multiplier g' à gauche par l'élément qui échange u_1 et u_{-1} et agit trivialement sur l'orthogonal du plan engendré par ces deux vecteurs, on peut supposer que $\mathrm{val}_E(\mu) \geqslant \mathrm{val}_E(\lambda)$. Soit

$$u = \frac{\nu_0}{2N(\lambda)} - \frac{\mu}{\lambda}.$$

On a $\frac{\mu}{\lambda} \in \mathcal{O}_E$ et $\nu_0 = h(g'v) = \mathrm{Tr}(\lambda\overline{\mu})$ d'où

$$\mathrm{val}_E(\nu_0) \geqslant \mathrm{val}_E(\lambda) + \mathrm{val}_E(\mu) \geqslant 2\,\mathrm{val}_E(\lambda) = \mathrm{val}_E\big(N(\lambda)\big).$$

Par conséquent u est dans $\frac{1}{2}\mathcal{O}_E$. On vérifie facilement que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Soit $g'' \in G_0(F)$ l'élément qui envoie u_1 sur $u_1 + uu_{-1}$ et qui agit trivialement sur l'orthogonal de u_{-1}. C'est bien un élément de $G_0(F)$ car $\mathrm{Tr}(u) = 0$ et, d'après ce que l'on vient de voir, $\|g''\| \leqslant |2|_E^{-1}$. On a alors

$$g''g'v = \lambda u_{-1} + \tfrac{1}{2}\overline{\lambda}^{-1}\nu_0 u_1 \quad \text{et} \quad \|g''g'\| \leqslant |\pi_E|_E^{-1} \cdot |2|_E^{-5}.$$

On peut maintenant terminer la preuve du lemme. Soient v et v' comme dans le lemme. Il existe $g_1, g_2 \in G_0(F)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{O}_E - \{0\}$ vérifiant

- $\|g_1\|, \|g_2\| \leqslant |\pi_E|_E^{-1} \cdot |2|_E^{-5}$,
- $g_1 v = \lambda_1 u_1 + \frac{1}{2}\nu_0\,\overline{\lambda}_1{}^{-1}u_{-1}$ et $g_2 v' = \lambda_2 u_1 + \frac{1}{2}\nu_0\,\overline{\lambda}_2{}^{-1}u_{-1}$

Il existe un entier N_0 tel que, pour tout $g \in G_0(F)$ et pour tout $v_0 \in V_0$,

$$\big|\mathrm{val}_{R_0}(gv_0) - \mathrm{val}_{R_0}(v_0)\big| \leqslant -\mathrm{val}_{R_0}(g) + N_0.$$

Puisque $\mathrm{val}_{R_0}(g_1 v) = -\mathrm{val}_E(\lambda_1) - \mathrm{val}_E(2)$ et $\mathrm{val}_{R_0}(g_2 v') = -\mathrm{val}_E(\lambda_2) - \mathrm{val}_E(2)$ et que $\mathrm{val}_{R_0}(v) = \mathrm{val}_{R_0}(v')$, on a

$$\big|\mathrm{val}_E(\lambda_1) - \mathrm{val}_E(\lambda_2)\big| \leqslant 2 + 10\,\mathrm{val}_E(2) + 2N_0.$$

Soit a l'élément de $G_0(F)$ qui envoie u_1 sur $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}u_1$, u_{-1} sur $\frac{\overline{\lambda}_1}{\overline{\lambda}_2}u_{-1}$ et qui agit trivialement sur l'orthogonal de $Eu_1 + Eu_{-1}$. On a alors $ag_1v = g_2v'$ d'où l'on tire $g_2^{-1}ag_1v = v'$. Ainsi, $\|g_2^{-1}ag_1\|$ est borné par une constante. ∎

Supposons $\ell \geqslant 1$. Pour tout $\lambda \in E^\times$, on note $a(\lambda)$ l'élément de $G_0(F)$ qui envoie u_1 sur λu_1, u_{-1} sur $\overline{\lambda}^{-1}u_{-1}$ et qui agit trivialement sur l'orthogonal de Eu_1+Eu_{-1}. Soit $R_{\sharp,H}$ un $\mathcal{O}_E$-réseau de l'orthogonal de $Ew_1\oplus\cdots\oplus Ew_\ell$ dans W. On pose alors

$$R_1 = \mathcal{O}_E w_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_E w_\ell \oplus R_{\sharp,H},$$
$$R_2 = \mathcal{O}_E w_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_E w_\ell \oplus R_{\sharp,H}.$$

Lemme 11.0.3. — *Supposons $\ell \geqslant 1$. Il existe un sous-ensemble compact C_2 de $G_0(F)$ et une constante $c_0 > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $h \in H(F)$ et tout $\lambda \in \mathcal{O}_E - \{0\}$, il existe un $h' \in h(a(\lambda)C_2a(\lambda)^{-1} \cap H(F))$ tel que*

$$\mathrm{val}_{R_1}(h') \geqslant \mathrm{val}_{R_1}(h'w_1) - \mathrm{val}_E(\lambda) - c_0.$$

Démonstration. — Soit $e_1,\dots,e_t$ une base orthogonale du $\mathcal{O}_E$-module R_2. Il existe un entier strictement positif α vérifiant :

- ▹ $\frac{h(e_i)}{h(w_1)} \in \mathfrak{p}_E^{-\alpha}$, pour $i=1,\dots,t$;
- ▹ pour tout entier $k \geqslant 0$ et pour tout $x \in (1+\mathfrak{p}_E^{k+\alpha})\cap\mathcal{O}_F$, il existe $y \in 1+\mathfrak{p}_E^k$ tel que $N(y)=x$.

Pour $i=1,\dots,t$ et $\lambda \in \mathcal{O}_E-\{0\}$, on considère l'élément $\gamma_i(\lambda)\in H(F)$ qui agit trivialement sur $(Ew_1+Ee_i)^\perp$ et qui agit de la façon suivante sur w_1 et e_i

$$w_1 \longmapsto aw_1 + \lambda\pi_E^\alpha e_i \quad \text{et} \quad e_i \longmapsto \frac{h(e_i)}{h(w_1)}\overline{\lambda}\,\overline{\pi}_E^\alpha w_1 - \overline{a}e_i,$$

où $a \in 1+\lambda^2\mathcal{O}_E$ satisfait l'égalité $N(a) = 1 - N(\lambda\pi_E^\alpha)\frac{h(e_i)}{h(w_1)}$. Alors $\gamma_i(\lambda)$ laisse stable $\mathcal{O}_E w_1 \oplus R_2$, donc reste dans un compact indépendant de i et de λ. Vérifions que $a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)a(\lambda)$ reste aussi dans un compact. Cet élément envoie u_{-1} sur

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}^{-1}a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)u_{-1} &= \overline{\lambda}^{-1}a(\lambda)^{-1}(w_0-\gamma_i(\lambda)w_1)\\ &= u_{-1} + \overline{\lambda}^{-1}a(\lambda)^{-1}(w_1-\gamma_i(\lambda)w_1).\end{aligned}$$

Mais $w_1-\gamma_i(\lambda)w_1$ est dans $\lambda^2\mathcal{O}_E w_1 \oplus R_2$. Ainsi

$$a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)a(\lambda)u_{-1} \in \tfrac{1}{2}\mathcal{O}_E u_{-1} + R_1.$$

On montre de la même façon que $a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)a(\lambda)u_1$ reste borné. Enfin, puisque

$$a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)a(\lambda)e_i = a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)e_i \quad \text{et} \quad \gamma_i(\lambda)e_i \in \lambda\mathcal{O}_E w_1 + R_2,$$

$a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)a(\lambda)e_i$ reste aussi borné.

Soit C_2 un sous-ensemble compact de $G_0(F)$ qui contient $a(\lambda)^{-1}\gamma_i(\lambda)a(\lambda)$ pour tout $i=1,\dots,t$ et tout $\lambda \in \mathcal{O}_E-\{0\}$. Puisque les $\gamma_i(\lambda)$, pour $\lambda \in \mathcal{O}_E-\{0\}$, sont bornés il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $h \in H(F)$, pour tout $i = 1, \dots, t$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_E - \{0\}$ on ait

$$\mathrm{val}_{R_1}(h\gamma_i(\lambda)) \geqslant \mathrm{val}_{R_1}(h) - c_1.$$

On a

$$\mathrm{val}_{R_1}(h\gamma_i(\lambda)w_1) = \inf(\mathrm{val}_{R_1}(hw_1), \mathrm{val}_E(\lambda) + \alpha + \mathrm{val}_{R_1}(he_i)).$$

Puisque $\mathrm{val}_{R_1}(h) = \inf(\mathrm{val}_{R_1}(hw_1), \mathrm{val}_{R_1}(he_1), \dots, \mathrm{val}_{R_1}(he_t))$, on obtient

$$\begin{aligned}\inf_{i=1,\dots,t}(\mathrm{val}_{R_1}(h\gamma_i(\lambda)w_1)) &\leqslant \mathrm{val}_E(\lambda) + \alpha + \mathrm{val}_{R_1}(h)\\ &\leqslant \mathrm{val}_E(\lambda) + \alpha + c_1 + \inf_{i=1,\dots,t}\mathrm{val}_{R_1}(h\gamma_i(\lambda)).\end{aligned}$$

Pour obtenir le lemme, il suffit donc de prendre $c = \alpha + c_1$ et pour $h \in H(F)$ et $\lambda \in \mathcal{O}_E - \{0\}$, de choisir $h' = h\gamma_j(\lambda)$ où j est tel que

$$\inf_{i=1,\dots,t}\big(\mathrm{val}_{R_1}(h\gamma_i(\lambda)w_1)\big) = \mathrm{val}_{R_1}\big(h\gamma_j(\lambda)w_1\big).$$ ∎

Proposition 11.0.4. — *Il existe des compacts $C_0 \subset G_0(F)$ et $C_H \subset H(F)$ tels que*

$$G_0(F) = C_H A_H^+ A_0^+ C_0.$$

Démonstration. — On démontre le résultat par récurrence sur ℓ. Si $\ell = 0$, c'est vrai car $G_0(F)$ est compact. On peut donc supposer que $\ell \geqslant 1$. Le lemme 11.0.2 nous fournit un compact $C_1 \subset G_0(F)$. Le lemme 11.0.3 nous fournit un compact $C_2 \subset G_0(F)$ ainsi qu'une constante c_0. Posons

$$C = C_2^{-1} \cdot C_1.$$

Soit $g \in G_0(F)$. D'après le lemme 11.0.2, il existe $k_1 \in C_1$ et $\lambda \in \mathcal{O}_E - \{0\}$ tels que

$$k_1 g^{-1} v_0 = a(\lambda)^{-1} v_0,$$

c'est-à-dire $g \in H(F)a(\lambda)k_1$. En utilisant le lemme 11.0.3, on voit qu'il existe $k_2 \in C_2$, $\lambda \in \mathcal{O}_E - \{0\}$ et $h \in H(F)$ tels que $g = ha(\lambda)k_2^{-1}k_1$ et

$$\mathrm{val}_{R_1}(h) \geqslant \mathrm{val}_{R_1}(hw_1) - \mathrm{val}_E(\lambda) - c_0. \tag{1}$$

Posons $k = k_2^{-1}k_1 \in C$. Soit H' le groupe unitaire de $W' = (Ew_0 \oplus Ew_1)^\perp$, $P_{H'}$ le sous-groupe parabolique qui conserve le drapeau $Eu_2 \subset \cdots \subset Eu_2 \oplus \cdots \oplus Eu_r$, $A_{H'}$ le tore maximal déployé qui conserve les droites Eu_i ($i = \pm 2, \dots, \pm r_0$) et $A_{H'}^+$ le sous-ensemble de $A_{H'}(F)$ des éléments positifs pour $P_{H'}$.

Par hypothèse de récurrence, il existe des compacts $C_H^\sharp \subset H(F)$, $C_{H'}^\sharp \subset H'(F)$ tels que

$$H(F) = C_H^\sharp A_H^+ A_{H'}^+ C_{H'}^\sharp.$$

Suivant cette décomposition, on peut écrire $h = k_1^\sharp a_H a_{H'} k_2^\sharp$. On a alors

$$g = k_1^\sharp a_H a_{H'} a(\lambda) k_2^\sharp k.$$

On a bien $a_{H'} a(\lambda) \in A_0(F)$ mais rien n'assure qu'il soit dans la chambre positive pour P_0. On va utiliser l'inégalité (1) pour vérifier que $a_{H'} a(\lambda)$ est bien dans A_0^+ modulo un sous-ensemble fini.

Soit $a_{H',2}$ la valeur propre de $a_{H'}$ agissant sur u_2. Il s'agit de vérifier que $\mathrm{val}_E(a_{H',2}) - \mathrm{val}_E(\lambda)$ est borné par une constante. Il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 et c_4 telles que

- $\mathrm{val}_{R_2}(k^\sharp) \geqslant -c_1$ pour tout $k^\sharp \in C_{H'}^\sharp$
- $\mathrm{val}_{R_1}(h^{-1}) \geqslant \mathrm{val}_{R_1}(h) - c_2$ pour tout $h \in H(F)$
- $\mathrm{val}_{R_1}(hk^\sharp) \geqslant \mathrm{val}_{R_1}(h) - c_3$ pour tout $h \in H(F)$ et $k^\sharp \in C_H^\sharp$
- $\mathrm{val}_{R_1}(hw_1) \geqslant -\mathrm{val}_E(a_{H,1}) - c_4$ si $h = k^\sharp a_H h'$ avec $k^\sharp \in C_{H'}^\sharp$, $a_H \in A_H(F)^+$ et $h' \in H'(F)$, où $a_{H,1}$ est la valeur propre de a_H agissant sur u_1'.

On a alors

$$\begin{aligned}
-\mathrm{val}_E(a_{H',2}) &= \mathrm{val}_{R_1}(a_{H'}^{-1} w_2) + \mathrm{val}_E(2)\\
&\geqslant \mathrm{val}_{R_2}\big((k_2^\sharp)^{-1} a_{H'}^{-1} w_2\big) - c_1\\
&= \mathrm{val}_{R_1}\big((k_2^\sharp)^{-1} a_{H'}^{-1} u_1' - w_1\big) - c_1\\
&= \mathrm{val}_{R_1}(h^{-1} k_1^\sharp a_H u_1' - w_1) - c_1\\
&\geqslant \inf\big(0, \mathrm{val}_{R_1}(h^{-1} k_1^\sharp a_H u_1')\big) - c_1\\
\mathrm{val}_{R_1}(h^{-1} k_1^\sharp a_H u_1') &= \mathrm{val}_E\left(a_{H,1}\right) + \mathrm{val}_{R_1}(h^{-1} k_1^\sharp u_1')\\
&\geqslant \mathrm{val}_E(a_{H,1}) + \mathrm{val}_{R_1}(h) - c_2 - c_3\\
&\geqslant \mathrm{val}_E(a_{H,1}) + \mathrm{val}_{R_1}(h w_1) - \mathrm{val}_E(\lambda) - c_0 - c_2 - c_3\\
&\geqslant -\mathrm{val}_E(\lambda) - c_0 - c_2 - c_3 - c_4.
\end{aligned}$$

On en déduit que $-\mathrm{val}_E(a_{H',2}) \geqslant -\mathrm{val}_E(\lambda) - c_0 - c_1 - c_2 - c_3 - c_4$, ce qu'il nous fallait. $\square$

On aura aussi besoin du lemme suivant

Lemme 11.0.5. — *Soient $C_0 \subset G_0(F)$ et $C_H \subset H(F)$ deux compacts-ouverts vérifiant*

$$G_0(F) = C_H A_H^+ A_0^+ C_0.$$

On a les majorations suivantes

1) $\Xi^{G_0}(a_H a_0) \ll \Xi^{G_0}(a_H)\Xi^{G_0}(a_0)$ *pour tous* $a_0 \in A_0^+, a_H \in A_H^+$;

2) $\mathrm{mes}(C_H a_H a_0 C_0) \ll \delta_{P_H}(a_H)^{-1}\delta_{P_0}(a_0)^{-1}$ *pour tous* $a_0 \in A_0^+, a_H \in A_H^+$;

3) $\sigma(a_0) \ll \sigma(a_0 a_H)$ *pour tous* $a_0 \in A_0^+, a_H \in A_H^+$.

Démonstration. — 1) Soient $K_1 \subset \overline{P}_0(F)$ et $K_2 \subset P_H(F)$ deux sous-groupes ouverts vérifiant

- ▹ $K_1 \subset a_0 K_1 a_0^{-1}$ pour tout $a_0 \in A_0^+$;
- ▹ $K_2 \subset a_H^{-1} K_2 a_H$ pour tout $a_H \in A_H^+$;
- ▹ Ξ^{G_0} est bi-invariant par K_1 et K_2.

Alors, pour tous $a_0 \in A_0^+, a_H \in A_H^+$ et tout $(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2$, on a

$$\Xi^{G_0}(a_H a_0) = \Xi^{G_0}(a_H\, k_2\, k_1\, a_0).$$

D'après le lemme 11.0.1, $K_2 K_1$ contient un sous-groupe ouvert K_3 de $G_0(F)$. On a alors

$$\Xi^{G_0}(a_H a_0) = \mathrm{mes}(K_3)^{-1} \int_{K_3} \Xi^{G_0}(a_H\, k_3\, a_0)\, \mathrm{d}k_3.$$

Or, on a $\int_{K_3} \Xi^{G_0}(g\, k_3\, g')\, \mathrm{d}k_3 \ll \Xi^{G_0}(g)\Xi^{G_0}(g')$ pour tous $g, g' \in G_0(F)$. On obtient ainsi la première partie du lemme.

2) Soient $K_1 \subset G_0(F)$ et $K_2 \subset H(F)$ deux sous-groupes compacts-ouverts tels que, pour tous $a_0 \in A_0^+, a_H \in A_H^+$,

$$K_2 K_1 \subset a_H^{-1}\, C_H\, a_H\, a_0\, C_0\, a_0^{-1}$$

(de tels sous-groupes existent d'après le lemme 11.0.1). Soient $a_0 \in A_0^+$, $a_H \in A_H^+$. On a alors

$$\mathrm{mes}(C_H\, a_H\, a_0\, C_0) = \mathrm{mes}\big((C_H\, a_H\, K_2)(K_1\, a_0\, C_0)\big).$$

L'ensemble $C_H\, a_H\, K_2$ est union de $\mathrm{mes}(C_H a_H K_2)\, \mathrm{mes}(K_2)^{-1}$ classes à gauche pour K_2 et l'ensemble $K_1\, a_0\, C_0$ est union de $\mathrm{mes}(K_{1\,0}\, C_0)\, \mathrm{mes}(K_1)^{-1}$ classes à droite pour K_1. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}\big((C_H\, a_H\, K_2)(K_1\, a_0\, C_0)\big) \leqslant \mathrm{mes}(C_H\, a_H\, K_2)\, \mathrm{mes}(K_1\, a_0\, C_0)\, \mathrm{mes}(K_1)^{-1} \\ \mathrm{mes}(K_2)^{-1}\, \mathrm{mes}(K_2 K_1).\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{mes}(C_H a_H K_2) \ll \delta_{P_W}(a_H)^{-1}$ et $\mathrm{mes}(K_1 a_0 C_0) \ll \delta_{P_0}(a_0)^{-1}$ pour tous $a_H \in A_H^+$ et $a_0 \in A_0^+$, on en déduit l'inégalité de l'énoncé.

3) Il existe une constante c_1 telle que, pour tout $g \in G_0(F)$,

$$\mathrm{val}_{R_0}(g) \leqslant \mathrm{val}_{R_0}(g^{-1}v_0) + c_1.$$

On a donc $\mathrm{val}_{R_0}(a_H a_0) \leqslant \mathrm{val}_{R_0}(a_0^{-1}v_0) + c_1$ pour tous $a_0 \in A_0^+$ et $a_H \in A_H^+$. Pour tout $a_0 \in A_0(F)$, notons $a_{0,1}$ la valeur propre de a_0 agissant sur u_1. On a

$$\mathrm{val}_{R_0}(a_0^{-1}v_0) = -\mathrm{val}_E(a_{0,1}) + \mathrm{val}_E(2) \quad \text{et} \quad \mathrm{val}_{R_0}(a_0) = -\mathrm{val}_E(a_{0,1})$$

pour tout $a_0 \in A_0^+$. Le résultat découle alors de ce que

$$\sup\left(1, -\mathrm{val}_{R_0}(g)\right) \ll \sigma(g) \ll \sup\left(1, -\mathrm{val}_{R_0}(g)\right)$$

pour tout $g \in G(F)$ ∎

CHAPITRE 12

MAJORATIONS D'INTÉGRALES, CAS R = 0

Lemme 12.0.1. — *Il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $h \in H(F)$,*

$$\Xi^{G_0}(h) \ll \exp\big(-\epsilon\sigma(h)\big)\Xi^H(h).$$

Démonstration. — Soient $(z_{\pm i})_{1\leqslant i\leqslant r_0}$ et $(z_{\pm i})_{1\leqslant i\leqslant r_1}$ des familles hyperboliques maximales de V_0 et W respectivement. On a $r_0 \geqslant r_1$. Soit P_{G_0} le sous-groupe parabolique minimal de G_0 qui conserve le drapeau

$$Ez_1 \subset \cdots \subset Ez_1 \oplus \cdots \oplus Ez_{r_0}.$$

Soit A_{0,G_0} le tore des éléments qui stabilisent, pour $i = \pm 1, \ldots, \pm r_0$, les droites Ez_i et qui agissent trivialement sur l'orthogonal de l'espace engendré par ces droites. Soit A^+_{0,G_0} l'ensemble des éléments de $A_{0,G_0}(F)$ qui contractent $P_{G_0}(F)$. Posons

$$A^+_{0,H} = A^+_{0,G_0} \cap H(F).$$

D'après Bruhat-Tits, il existe un sous-ensemble compact $\Gamma \subset H(F)$ tel que

$$H(F) = \Gamma A^+_{0,H}\Gamma.$$

On peut donc se contenter de montrer le lemme pour $h = a \in A^+_{0,H}$. Pour un tel a, on note a_i la valeur propre de a agissant sur z_i pour $i = \pm 1, \ldots, \pm r_1$. D'après le lemme II.1.1 de **[28]**, il existe un réel d tel que

$$\Xi^{G_0}(a) \ll \delta_{P_{G_0}}(a)^{\frac{1}{2}}\sigma(a)^d$$

pour tout $a \in A^+_{0,G_0}$. Un calcul aisé montre que l'on a

$$\delta_{P_{G_0}}(a) = |a_1|_E^{d_V-1}|a_2|_E^{d_V-3}\cdots|a_{r_1}|_E^{d_V+1-2r_1},$$

$$\delta_{P_{0,H}}(a) = |a_1|_E^{d_W-1}|a_2|_E^{d_W-3}\cdots|a_{r_1}|_E^{d_W+1-2r_1}.$$

Par conséquent, $\delta_{P_{G_0}}(a) = \delta_{P_{0,H}}(a)(|a_1|_E \dots |a_{r_1}|_E)$. On en déduit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $a \in A^+_{0,H}$,

$$\Xi^{G_0}(a)^{\frac{1}{2}} \ll \delta_{P_{0,H}}(a)^{\frac{1}{2}} \exp\big(-\epsilon\sigma(a)\big).$$

D'après le lemme II.1.1 de [**28**], on a également $\delta_{P_{0,H}}(a)^{\frac{1}{2}} \ll \Xi^H(a)$ pour tout a dans $A^+_{0,H}$. Le lemme en découle ◻

On reprend les notations $P_0, P_H, A_0, A_H, A_0^+, A_H^+$ du chapitre 11.

Soient $C_0 \subset G_0(F)$ et $C_H \subset H(F)$ des sous-ensembles compacts-ouverts tels que

$$G_0(F) = C_H A_H^+ A_0^+ C_0$$

(une telle décomposition existe d'après la proposition 11.0.4). Soient A_0^1 et A_H^1 les sous-groupes compacts maximaux de $A_0(F)$ et $A_H(F)$ respectivement. On peut toujours supposer que $A_0^1 C_0 = C_0$ et $C_H A_H^1 = C_H$. Posons

$$\Lambda_0^+ = A_0^+/A_0^1 \quad \text{et} \quad \Lambda_H^+ = A_H^+/A_H^1.$$

On identifie Λ_0^+ et Λ_H^+ à des sous-ensembles de $A_0(F)$ et $A_H(F)$ via des sections. On a alors

$$G_0(F) = C_H \Lambda_H^+ \Lambda_0^+ C_0.$$

Pour toute fonction f mesurable à valeurs positives sur $G_0(F)$, on a

$$\text{(1)} \qquad \int_{G_0(F)} f(g)\,\mathrm{d}g \leqslant \sum_{a_H \in \Lambda_H^+, a_0 \in \Lambda_0^+} \int_{C_H a_H a_0 C_0} f(g)\,\mathrm{d}g.$$

Lemme 12.0.2. — *Soient D un réel, $N \geqslant 1$ un entier et $g_0 \in G_0(F)$. Alors l'intégrale*

$$\chi(g_0, N, D) = \int_{G_0(F)} \Xi^{G_0}(g_0^{-1} g)\, \Xi^{G_0}(g)\, \kappa_N(g)\, \sigma(g)^D\, \mathrm{d}g$$

converge. De plus, à D fixé, il existe un réel R tel que

$$\chi(g_0, N, D) \ll \Xi^{G_0}(g_0)\, \sigma(g_0)^R N^R,$$

pour tout $g_0 \in G_0(F)$ et tout $N \geqslant 1$.

Démonstration. — On fixe le réel D. Introduisons un paramètre auxiliaire $\delta > 0$ que l'on précisera plus tard. On a

$$\chi(g_0, N, D) = \chi_{\leqslant \delta N}(g_0, N, D) + \chi_{> \delta N}(g_0, N, D),$$

où on a posé

$$\chi_{\leqslant \delta N}(g_0, N, D) = \int_{G_0(F)} \mathbf{1}_{\sigma \leqslant \delta N}(g) \Xi^{G_0}(g_0^{-1} g) \Xi^{G_0}(g) \kappa_N(g) \sigma(g)^D \, \mathrm{d}g,$$

$$\chi_{> \delta N}(g_0, N, D) = \int_{G_0(F)} \mathbf{1}_{\sigma > \delta N}(g) \Xi^{G_0}(g_0^{-1} g) \Xi^{G_0}(g) \kappa_N(g) \sigma(g)^D \, \mathrm{d}g.$$

Pour tout réel D_1, on a

$$\chi_{\leqslant \delta N}(g_0, N, D) \leqslant (\delta N)^{D_1} \int_{G_0(F)} \Xi^{G_0}(g_0^{-1} g) \Xi^{G_0}(g) \sigma(g)^{D - D_1} \, \mathrm{d}g.$$

Si D_1 est assez grand, l'intégrale précédente est convergente. Fixons un tel D_1. En introduisant une intégrale intérieure sur un sous-groupe compact-ouvert de $G_0(F)$, on voit qu'elle est essentiellement majorée par $\Xi^{G_0}(g_0)$ pour tout $g_0 \in G_0(F)$. On a donc pour tous $g_0 \in G_0(F)$, $N \geqslant 1$, $\delta > 0$ une majoration

(2) $$\chi_{\leqslant \delta N}(g_0, N, D) \ll (\delta N)^{D_1} \Xi^{G_0}(g_0).$$

Majorons à présent $\chi_{>\delta N}(g_0, N, D)$. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\Xi^{G_0}(g'^{-1} g) \ll \exp(\alpha \sigma(g')) \Xi^{G_0}(g)$ pour tous $g, g' \in G_0(F)$.

On a par conséquent, pour tous $g_0 \in G_0(F)$, $N \geqslant 1$, $\delta > 0$,

$$\chi_{> \delta N}(g_0, N, D) \ll \exp\big(\alpha \sigma(g_0)\big) \int_{G_0(F)} \mathbf{1}_{\sigma > \delta N}(g) \Xi^{G_0}(g)^2 \kappa_N(g) \sigma(g)^D \, \mathrm{d}g.$$

Il existe un réel $c_1 > 0$ tel que pour tous $k_H \in C_H$, $k_0 \in C_0$, $a_H \in A_H^+$, $a_0 \in A_0^+$, on ait

$$\sigma(k_H a_H a_0 k_0) \leqslant c_1 + \sigma(a_H) + \sigma(a_0).$$

Il existe aussi une constante $c_2 > 0$ telle que pour tous $k_H \in C_H$, $k_0 \in C_0$, $a_H \in A_H^+$, $a_0 \in A_0^+$ et pour tout $N \geqslant 1$ on ait

$$\kappa_N(k_H a_H a_0 k_0) = 1 \implies \mathrm{val}_E(a_{0,1}) \leqslant c_2 N,$$

où $a_{0,1}$ désigne la valeur propre de a_0 agissant sur u_1. Puisque pour tout a_0 dans A_0^+, on a $\sigma(a_0) \ll \sup(1, val_E(a_{0,1}))$, on peut quitte à agrandir la constante c_2, remplacer $\mathrm{val}_E(a_{0,1})$ par $\sigma(a_0)$ dans l'inégalité précédente.

D'après le lemme 11.0.5 et l'inégalité (1), on a donc

$$\begin{aligned}\int_{G_0(F)} \mathbf{1}_{\sigma>\delta N}(g)\,\Xi^{G_0}(g)^2\,\kappa_N(g)\,\sigma(g)^D\,\mathrm{d}g \\ \ll \Big(\sum_{\substack{a_0\in\Lambda_0^+\\ \sigma(a_0)\leqslant c_2N}} \Xi^{G_0}(a_0)^2\,\delta_{P_0}(a_0)^{-1}\,\sigma(a_0)^D\Big) \\ \Big(\sum_{a_H\in\Lambda_H^+} \mathbf{1}_{\sigma>(\delta-c_2)N-c_1}(a_H)\,\Xi^{G_0}(a_H)^2\,\delta_{P_H}(a_H)^{-1}\,\sigma(a_H)^D\Big).\end{aligned}$$

Il existe des réels D_2 et $\epsilon > 0$ tels que l'on ait les majorations

$$\begin{aligned}&\Xi^{G_0}(a_0)^2 \ll \delta_{P_0}(a_0)\sigma(a_0)^{D_2},\\ &\Xi^{H}(a_H)^2 \ll \delta_{P_H}(a_H)\sigma(a_H)^{D_2},\\ &\Xi^{G_0}(h) \ll \exp(-\epsilon\sigma(h))\Xi^H(h)\end{aligned}$$

pour tous $a_0 \in A_0^+$, $a_H \in A_H^+$, $h \in H(F)$. Le terme $\chi_{>\delta N}(g_0, N, D)$ est donc essentiellement majoré par le produit de $\exp(\alpha\sigma(g_0))$ et des deux sommes

$$\sum_{\substack{a_0\in\Lambda_0^+\\ \sigma(a_0)\leqslant c_2N}} \sigma(a_0)^{D+D_2} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{a_H\in\Lambda_H^+\\ \sigma(a_H)>(\delta-c_2)N-c_1}} \exp\big(-\epsilon\sigma(a_H)\big)\,\sigma(a_H)^{D+D_2}.$$

La première somme est essentiellement majorée par une puissance de N et la deuxième par $\exp(-\epsilon'(\delta - c_2)N)$ pour un certain $\epsilon' > 0$ qui ne dépend que de ϵ. Rassemblant cette majoration avec la majoration (2), on obtient

$$\chi(g_0, N, D) \ll (\delta N)^{D_1}\,\Xi^{G_0}(g_0) + \exp\big(\alpha\sigma(g_0)\big)\,N^{D_3}\exp\big(-\epsilon'(\delta - c_2)N\big)$$

pour tous $g_0 \in G_0(F)$, $N \geqslant 1$, $\delta > 0$ (et pour un certain $D_3 > 0$). On vérifie qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que $\exp(-\beta\sigma(g)) \ll \Xi^{G_0}(g)$ pour tout $g \in G_0(F)$. Il suffit alors de prendre

$$\delta = \frac{(\alpha+\beta)\sigma(g_0)}{\epsilon' N} + c_2$$

pour obtenir la majoration du lemme. ∎

Lemme 12.0.3. — *Pour tout réel D, l'intégrale suivante est convergente :*

$$\int_{H(F)} \Xi^H(h)\,\Xi^{G_0}(h)\,\sigma(h)^D\,\mathrm{d}h.$$

Démonstration. — D'après le lemme 12.0.1, pour tout $d > 0$ et tout $h \in H(F)$, on a une majoration

$$\Xi^{G_0}(h) \ll \Xi^H(h)\,\sigma(h)^{-d}.$$

D'après le lemme II.1.5 de [**28**], pour d assez grand l'intégrale

$$\int_{H(F)} \Xi^H(h)^2 \sigma(h)^{D-d}\, \mathrm{d}h$$

converge. ∎

Lemme 12.0.4. — *Pour tout réel D, l'intégrale suivante est convergente :*

$$\int_{H(F)} \int_{H(F)} \Xi^{G_0}(h) \Xi^H(h'h) \Xi^{G_0}(h') \sigma(h)^D \sigma(h')^D \,\mathrm{d}h\, \mathrm{d}h'.$$

Démonstration. — Soit K_H un sous-groupe compact-ouvert de $H(F)$. Pour tous $h, h' \in H(F)$ et pour tout $k_H \in K_H$, on a des majorations

$$\int_{K_H} \Xi^H(h'kh)\, \mathrm{d}k \ll \Xi^H(h')\Xi^H(h), \quad \sigma(k_H h) \ll \sigma(h), \quad \Xi^{G_0}(k_H h) \ll \Xi^{G_0}(h).$$

Par conséquent, en introduisant une intégrale intérieure sur K_H, l'intégrale de l'énoncé est essentiellement majorée par le carré de l'intégrale suivante :

$$\int_{H(F)} \Xi^{G_0}(h) \Xi^H(h) \sigma(h)^D \,\mathrm{d}h$$

qui est convergente d'après le lemme précédent. ∎

Soient D et $b > 0$ deux réels et $N \geqslant 1$ un entier. Posons

$$I^1(N, D) = \int_{G_0(F)} \int_{H(F)} \Xi^H(h) \Xi^{G_0}(g) \Xi^{G_0}(h^{-1}g) \kappa_N(g) \sigma(h)^D \sigma(g)^D \,\mathrm{d}h\, \mathrm{d}g,$$

$$I^1(N, D, b) = \int_{G_0(F)} \int_{H(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geqslant b}(h) \Xi^H(h) \Xi^{G_0}(g) \Xi^{G_0}(h^{-1}g) \\ \kappa_N(g) \sigma(h)^D \sigma(g)^D \,\mathrm{d}h\, \mathrm{d}g.$$

Lemme 12.0.5. — *Ces deux expressions sont convergentes. À D fixé, il existe des réels R et $\epsilon > 0$ tels que*

1) $I^1(N, D) \ll N^R$ *pour tout* $N \geqslant 1$,
2) $I^1(N, D, b) \ll N^R \exp(-\epsilon b)$ *pour tout* $N \geqslant 1$ *et pour tout* $b > 0$.

Démonstration. — Fixons un réel D. D'après les lemmes 12.0.1 et 12.0.2, il existe un réel $R > 0$ et $\epsilon_1 > 0$ tels que, pour tout $N \geqslant 1$ et pour tout $b > 0$,

$$I^1(N, D) \ll N^R \int_{H(F)} \Xi^H(h)^2 \exp(-\epsilon_1 \sigma(h)) \sigma(h)^D \,\mathrm{d}h,$$

$$I^1(N, D, b) \ll N^R \int_{H(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geqslant b}(h) \Xi^H(h)^2 \exp(-\epsilon_1 \sigma(h)) \sigma(h)^D \,\mathrm{d}h.$$

Pour tout $\epsilon' > 0$, l'intégrale $\int_{H(F)} \Xi^H(h)^2 \exp(-\epsilon'\sigma(h))\,\sigma(h)^D\,dh$ est convergente. On en déduit la première majoration de l'énoncé. Pour $h \in H(F)$ tel que $\sigma(h) \geqslant b$ on a $\exp(-\epsilon_1\sigma(h)) \leqslant \exp(-\frac{1}{2}\epsilon_1 b)\exp(-\frac{1}{2}\epsilon_1\sigma(h))$. On en déduit la deuxième majoration de l'énoncé avec $\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon_1$. $\square$

CHAPITRE 13

MAJORATIONS D'INTÉGRALES, CAS GÉNÉRAL

Pour $N \geqslant 1$ un entier et D un réel, on pose

$$I(N,D) = \int_{G(F)} \Xi^G(g)^2 \kappa_N(g)\sigma(g)^D \,\mathrm{d}g.$$

Proposition 13.0.1. — *Cette intégrale est convergente et le réel D étant fixé, il existe un réel R tel que, pour tout $N \geqslant 1$,*

$$I(N,D) \ll N^R.$$

Démonstration. — Fixons le réel D. Les fonctions Ξ^G, κ_N et σ étant invariantes à droite par K et la fonction κ_N étant invariante à gauche par $U(F)$, on a

$$I(N,D) = \int_{M(F)} \kappa_N(m) \int_{U(F)} \Xi^G(mu)^2\, \sigma(mu)^D \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m.$$

D'après la proposition 2.1.1, il existe un réel D' tel que $I(N,D)$ soit essentiellement majorée, pour tout $N \geqslant 1$, par

$$\int_{M(F)} \Xi^M(m)^2 \kappa_N(m)\,\sigma(m)^{D'} \,\mathrm{d}m.$$

On a $M(F) = A(F) \times G_0(F)$ et, pour tout $m = a g_0 \in M(F) = A(F)\,G_0(F)$,

$$\kappa_N(m) = \kappa_N(a)\,\kappa_N(g_0), \quad \sigma(m) \ll \sigma(a)\,\sigma(g_0), \quad \Xi^M(m) = \Xi^{G_0}(g_0).$$

L'intégrale précédente est donc essentiellement majorée par

$$\int_{A(F)} \kappa_N(a)\,\sigma(a)^{D'} \,\mathrm{d}a \int_{G_0(F)} \Xi^{G_0}(g_0)^2\, \kappa_N(g_0)\,\sigma(g_0)^{D'} \,\mathrm{d}g_0$$

pour tout $N \geqslant 1$. D'après le lemme 12.0.2, l'intégrale sur $G_0(F)$ est essentiellement bornée par une puissance de N et il n'est pas difficile de vérifier qu'il en va de même de l'intégrale sur $A(F)$. $\square$

Soit $c \geqslant 0$ un nombre réel. Notons $U(F)_c$ l'ensemble des éléments $u \in U(F)$ qui vérifient pour tout $i = 0, \ldots, r-1$ l'inégalité

$$\mathrm{val}_F\left(\mathrm{Tr}\left(h(uv_i, v_{-i-1})\right)\right) \geqslant -c.$$

Pour $c \geqslant 0$ un réel et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_{n,c} = \left\{u \in U(F)_c \;;\; q^{-n-1} < \Xi^M(m_{\overline{P}}(u))\,\delta_{\overline{P}}(m_{\overline{P}}(u))^{\frac{1}{2}} \leqslant q^{-n}\right\}.$$

Lemme 13.0.2. — *Il existe des réels $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que l'on ait la majoration*

$$\mathrm{mes}(A_{n,c}) \ll q^{n(1-\epsilon)+\alpha c}$$

pour tout $c \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$

Démonstration. — Si le sous-espace V_0 est anisotrope, c'est le corollaire 2.4.3 appliqué à $\overline{Q} = P$, à un certain sous-groupe parabolique minimal $P_{\min}$ de G tel que P soit anti-standard et à certaines formes linéaires ℓ_α, $\alpha \in \Delta$.

Si V_0 n'est pas anisotrope, les résultats du § 2.4 ne peuvent pas s'appliquer directement. On peut alors trouver deux vecteurs isotropes $e_1, e_{-1} \in V_0$ vérifiant

$$v_0 = e_1 + e_{-1} \quad \text{et} \quad h(e_1, e_{-1}) = \tfrac{1}{2}\nu_0.$$

Fixons deux tels éléments e_1, e_{-1}. Pour $c \geqslant 0$ on définit $U(F)'_c$ comme l'ensemble des éléments $u \in U(F)$ qui vérifient

$$\begin{aligned}&\mathrm{val}_F\left(\mathrm{Tr}\left(h(uv_i, v_{-i-1})\right)\right) \geqslant -c \quad (i = 1, \ldots, r-1),\\ &\mathrm{val}_F\left(\mathrm{Tr}\left(h(ue_1, v_{-1})\right)\right) \geqslant -c.\end{aligned}$$

Les résultats du paragraphe 2.4 s'appliquent à $U(F)'_c$. En particulier, il existe des nombres réels $\epsilon_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$, de sorte que l'on ait une majoration

$$\mathrm{mes}\left\{u \in U(F)'_c \;;\; q^{-n-1} < \Xi^M(m_{\overline{P}}(u))\,\delta_{\overline{P}}(m_{\overline{P}}(u))^{\frac{1}{2}} \leqslant q^{-n}\right\} \ll q^{n(1-\epsilon_1)+\alpha_1 c}$$

pour tout $c \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\delta > 0$ un réel que l'on précisera plus tard. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $c \geqslant 0$,

$$A_{n,c} = \left(A_{n,c} \cap U(F)'_{\delta n}\right) \sqcup \left(A_{n,c} \backslash U(F)'_{\delta n}\right).$$

D'après ce qui précède, la mesure de $A_{n,c} \cap U(F)'_{\delta n}$ est essentiellement majorée par $q^{n(1-\epsilon_1+\alpha_1\delta)}$. Soit B_n le sous-ensemble de $U(F)$ des éléments u qui vérifient

$$q^{-n-1} < \Xi^M\left(m_{\overline{P}}(u)\right)\delta_{\overline{P}}\left(m_{\overline{P}}(u)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant q^{-n}.$$

On a alors

$$\mathrm{mes}\left(A_{n,c} \backslash U(F)'_{\delta n}\right) = \int_{U(F)} \mathbf{1}_{B_n}(u)\mathbf{1}_{U(F)_c \backslash U(F)'_{\delta n}}(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $\lambda \in \mathcal{O}_F^\times$, notons $a(\lambda)$ l'élément de $G_0(F)$ qui envoie e_1 sur λe_1, e_{-1} sur $\lambda^{-1}e_{-1}$ et qui agit trivialement sur l'orthogonal de $Ee_1 \oplus Ee_{-1}$ dans V_0. La conjugaison par $a(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{O}_F^\times$ laisse stable $U(F)$ et ne change pas la mesure. Par conséquent on a

$$\operatorname{mes}(A_{n,c}\backslash U(F)'_{\delta n}) = \int_{\mathcal{O}_F^\times}\int_{U(F)} \mathbf{1}_{B_n}(a(\lambda)ua(\lambda)^{-1}) \mathbf{1}_{U(F)_c\backslash U(F)'_{\delta n}}(a(\lambda)ua(\lambda)^{-1})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\lambda,$$

où $\mathrm{d}\lambda$ est la mesure de Haar sur $\mathcal{O}_F^\times$ de masse totale 1. On ne perd rien à supposer que les $a(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{O}_F^\times$ appartiennent au sous-groupe compact spécial de $G(F)$ qui permet de définir les éléments $m_{\overline{P}}$ et qu'ils laissent stable Ξ^M par translation à gauche. On a alors $\mathbf{1}_{B_n}(a(\lambda)ua(\lambda)^{-1}) = \mathbf{1}_{B_n}(u)$ pour tous $u \in U(F)$ et $\lambda \in \mathcal{O}_F^\times$. On en déduit que

$$\operatorname{mes}(A_{n,c}\backslash U(F)'_{\delta n}) = \int_{U(F)} \mathbf{1}_{B_n}(u)\int_{\mathcal{O}_F^\times} \mathbf{1}_{U(F)_c\backslash U(F)'_{\delta n}}(a(\lambda)ua(\lambda)^{-1})\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}u.$$

Soit $u \in U(F)$. Posons

$$u_1 = \operatorname{Tr}\big(h(ue_1, v_{-1})\big) \quad \text{et} \quad u_{-1} = \operatorname{Tr}\big(h(ue_{-1}, v_{-1})\big).$$

Si l'intégrale intérieure est non nulle, on a $\operatorname{val}_F(u_1) < -\delta n$. Supposons que ce soit le cas. On a alors l'égalité

$$\int_{\mathcal{O}_F^\times} \mathbf{1}_{U(F)_c\backslash U(F)'_{\delta n}}\big(a(\lambda)\,u\,a(\lambda)^{-1}\big)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathcal{O}_F^\times} \mathbf{1}_{\operatorname{val}_F \geqslant -c}(\lambda^{-1}u_1 + \lambda u_{-1})\,\mathrm{d}\lambda.$$

On vérifie aisément que l'intégrale précédente est essentiellement majorée par $q^{\operatorname{val}_F(u_1)+c}$ pour tous $c \geqslant 0, u_1, u_{-1} \in F^\times$. On en déduit que $\operatorname{mes}(A_{n,c}\backslash U(F)'_{\delta n})$ est essentiellement majorée par $\operatorname{mes}(B_n)q^{-\delta n+c}$. D'après les lemmes II.3.4 et II.4.3 de [**28**] alliés au fait que la fonction Ξ^M est bornée par 1, il existe un entier d tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait une majoration

$$\operatorname{mes}(B_n) \ll n^d q^n.$$

Pour δ qui vérifie $0 < \delta < \epsilon_1/\alpha_1$, on obtient le résultat du lemme en sommant les majorations obtenues pour $\operatorname{mes}(A_{n,c} \cap U(F)'_{\delta n})$ et $\operatorname{mes}(A_{n,c}\backslash U(F)'_{\delta n})$ ∎

Lemme 13.0.3. — *Il existe un réel $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tous réels ϵ_0, c, C vérifiant $c \geqslant 0$, $C > 0$ et $\epsilon_0 < \epsilon_1$, l'intégrale suivante est convergente :*

$$\int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma \geqslant C}(u)\,\Xi^M\big(m_{\overline{P}}(u)\big)\,\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(u)\big)^{\frac{1}{2}}\,\exp\big(\epsilon_0\sigma(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

De plus, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que cette intégrale soit essentiellement majorée par $\exp(-(\epsilon_1 - \epsilon_0)C + \alpha c)$ pour tout $c \geqslant 0$, tout $C > 0$ et tout $\epsilon_0 < \epsilon_1$.

Démonstration. — D'après le lemme II.3.4 de [**28**] et puisque la fonction Ξ^M est bornée, il existe deux réels $c_1, c_2 > 0$ tels que, pour tout $u \in U(F)$,

$$\Xi^M\big(m_{\overline{P}}(u)\big)\,\delta_{\overline{P}}(u)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_1 \exp\big(-c_2\sigma(u)\big).$$

La convergence et la majoration de l'énoncé sont alors des conséquences faciles du lemme précédent : il suffit de découper l'intégrale en une somme d'intégrales sur les $A_{n,c}$ pour $n \geqslant 0$, de remarquer que les termes de la somme pour $n \leqslant c_2C - \log(c_1) - 1$ sont nuls et de majorer $\sigma(u)$ par $(n+1+\log(c_1))/c_2$ pour $u \in A_{n,c}$. ∎

Pour $D, c > 0$ deux réels et $m \in M(F)$, posons

$$X(c,D,m) = \int_{U(F)_c} \Xi^G(um)\,\sigma(u)^D\,\mathrm{d}u.$$

Proposition 13.0.4. — *L'intégrale précédente est toujours convergente et à D fixé, il existe un réel R tel que l'on ait, pour tout $m \in M(F)$ et pour tout $c \geqslant 1$, la majoration*

$$X(c,D,m) \ll c^R\,\Xi^M(m)\,\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\,\sigma(m)^R.$$

Démonstration. — Fixons un réel D. Soit $b > 0$ un paramètre auxiliaire que l'on précisera plus tard. On a

$$X(c,D,m) = X_{\leqslant b}(c,D,m) + X_{>b}(c,D,m)$$

où

$$X_{\leqslant b}(c,D,m) = \int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma\leqslant b}(u)\Xi^G(um)\sigma(u)^D\,\mathrm{d}u,$$

$$X_{>b}(c,D,m) = \int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma> b}(u)\Xi^G(um)\sigma(u)^D\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout réel D', on a

$$X_{\leqslant b}(c,D,m) \leqslant b^{D'}\int_{U(F)} \Xi^G(um)\,\sigma(u)^{D-D'}\,\mathrm{d}u.$$

D'après la proposition II.4.5 de [**28**], si D' est assez grand l'intégrale précédente est essentiellement majorée par $\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\,\Xi^M(m)$ pour tout $m \in M(F)$. Fixons un tel D'. Il existe un réel $\beta > 0$ tel que l'on ait la majoration

$$\Xi^G(gg') \ll \Xi^G(g)\exp\big(\beta\sigma(g')\big)$$

pour tous $g, g' \in G(F)$. On en déduit la majoration

$$X_{>b}(c,D,m) \ll \exp\big(\beta\sigma(m)\big)\int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma>b}(u)\,\Xi^G(u)\,\sigma(u)^D\,\mathrm{d}u$$

pour tout $m \in M(F)$, tout $c > 0$ et tout $b > 0$. D'après les lemmes II.1.1 et II.3.2 de [28], il existe un réel D'' tel que

$$\Xi^G(g) \ll \Xi^M\big(m_{\overline{P}}(g)\big)\,\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(g)\big)^{\frac{1}{2}}\,\sigma(g)^{D''}$$

pour tout $g \in G(F)$. Donc, pour tous $m \in M(F)$, $c > 0$ et $b > 0$, on a

$$X_{>b}(c, D, m) \ll \exp\big(\beta\sigma(m)\big)$$
$$\int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma>b}(u)\Xi^M\big(m_{\overline{P}}(u)\big)\,\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(u)\big)^{\frac{1}{2}}\,\sigma(u)^{D+D''}\,\mathrm{d}u.$$

D'après le lemme précédent, il existe deux réels $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que l'intégrale précédente soit essentiellement majorée par $\exp(-\epsilon b + \alpha c)$ pour tous $b, c > 0$. Il existe un réel $\gamma > 0$ tel que

$$\exp\big(-\gamma\sigma(m)\big) \ll \Xi^M(m)\,\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $m \in M(F)$. Il suffit de prendre $b = ((\beta+\gamma)\sigma(m) + \alpha c)/\epsilon$ pour obtenir la majoration de l'énoncé ∎

Corollaire 13.0.5. — *Pour tous réels D et $c \geqslant 0$, les intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\,\Xi^G(hu)\,\sigma(hu)^D\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h,$$

$$\int_{H(F)U(F)_c}\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^G(hu)\,\Xi^G(h'h)\,\Xi^G(h'u')$$
$$\sigma(hu)^D\,\sigma(h'u')^D\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}h'\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h$$

Démonstration. — On peut effectuer dans les deux intégrales le changement de variable $u \mapsto h^{-1}uh$. Puisque la conjugaison par $H(F)$ préserve $U(F)_c$, on obtient les mêmes intégrales où hu a été changé en uh. La convergence de la première intégrale est alors une conséquence de la proposition 13.0.4 et du lemme 12.0.3, et celle de la deuxième une conséquence de la proposition 13.0.4 et du lemme 12.0.4. ∎

Proposition 13.0.6. — *Soient $c > 0$ et $\epsilon > 0$ deux réels. Il existe un réel $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $\epsilon_0 < \epsilon_1$ et pour tout $h \in H(F)$, l'intégrale*

$$\int_{U(F)_c} \exp\big(\epsilon_0\sigma(u)\big)\,\Xi^G(hu)\,\mathrm{d}u$$

soit convergente et soit essentiellement majorée par $\exp(\epsilon\sigma(h))\Xi^{G_0}(h)$ *pour tout $\epsilon_0 < \epsilon_1$ et tout $h \in H(F)$.*

Démonstration. — Fixons $c > 0$ et $\epsilon > 0$ deux réels. Introduisons un $b > 0$ que l'on précisera plus tard. Pour tout réel ϵ_0, on a l'égalité

$$\int_{U(F)_c} \exp\big(\epsilon_0\sigma(u)\big)\Xi^G(hu)\mathrm{d}u = \int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma\leqslant b}(u)\exp\big(\epsilon_0\sigma(u)\big)\Xi^G(hu)\mathrm{d}u \\ + \int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma>b}(u)\exp\big(\epsilon_0\sigma(u)\big)\Xi^G(hu)\mathrm{d}u.$$

Notons $I_{\leqslant b}(\epsilon_0, h)$ et $I_{>b}(\epsilon_0, h)$ la première et la deuxième intégrale. Pour tout réel D', on a une majoration

$$I_{\leqslant b}(\epsilon_0, h) \leqslant b^{D'}\exp(\epsilon_0 b)\int_{U(F)} \Xi^G(hu)\sigma(u)^{-D'}\mathrm{d}u.$$

D'après la proposition II.4.5 de [**28**], pour D' assez grand l'intégrale précécente est essentiellement majorée par $\Xi^{G_0}(h)$ pour tout $h \in H(F)$. On fixe un tel D'. Il existe un réel $\beta > 0$ tel que

$$\Xi^G(gg') \ll \exp\big(\beta\sigma(g)\big)\Xi^G(g')$$

pour tous $g, g' \in G(F)$. On en déduit pour tout ϵ_0, tout $b > 0$ et tout $h \in H(F)$, la majoration

$$I_{>b}(\epsilon_0, h) \ll \exp\big(\beta\sigma(h)\big)\int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma>b}(u)\exp\big(\epsilon_0\sigma(u)\big)\Xi^G(u)\mathrm{d}u.$$

D'après [**28**], lemmes II.1.1 et II.3.2, il existe un réel D'' tel que, pour tout $g \in G(F)$,

$$\Xi^G(g) \ll \Xi^M\big(m_{\overline{P}}(g)\big)\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(g)\big)^{\frac{1}{2}}\sigma(g)^{D''}.$$

On en déduit pour tout ϵ_0, tout $b > 0$ et tout $h \in H(F)$ la majoration

$$I_{>b}(\epsilon_0, h) \ll \exp\big(\beta\sigma(h)\big) \\ \int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma>b}(u)\Xi^M\big(m_{\overline{P}}(u)\big)\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(u)\big)^{\frac{1}{2}}\exp\big(\epsilon_0\sigma(u)\big)\sigma(u)^{D''}\mathrm{d}u.$$

D'après le lemme 13.0.3, il existe un réel $\epsilon_1' > 0$ tel que pour tout réel $\epsilon_0 < \epsilon_1'$, l'intégrale précédente sans le $\sigma(u)^{D''}$ soit convergente et essentiellement majorée par $\exp(-(\epsilon_1' - \epsilon_0)b)$ pour tout $b > 0$ et tout $\epsilon_0 < \epsilon_1'$.

Soit $\epsilon_1' > \epsilon_2 > 0$ un réel ; on peut majorer le terme $\sigma(u)^{D''}$ par une constante multipliée par $\exp(\epsilon_2\sigma(u))$. On en déduit que l'intégrale précédente est convergente pour $\epsilon_0 < \epsilon_1' - \epsilon_2$ et qu'elle est essentiellement majorée par $\exp(-(\epsilon_1' - \epsilon_2 - \epsilon_0)b)$ pour tout $b > 0$ et tout $\epsilon_0 < \epsilon_1' - \epsilon_2$. En particulier, pour tout $b > 0$, pour tout $h \in H(F)$ et tout $\epsilon_0 < \frac{1}{2}(\epsilon_1' - \epsilon_2)$, on a la majoration

$$I_{>b}(\epsilon_0, h) \ll \exp\big(\beta\,\sigma(h)\big)\exp\big(-\tfrac{1}{2}(\epsilon_1' - \epsilon_2)b\big).$$

Il existe un réel $\gamma > 0$ tel que $\exp(-\gamma\sigma(h)) \ll \Xi^{G_0}(h)$ pour tout $h \in H(F)$.

Pour $b < \epsilon\sigma(h)/\epsilon_0$, on a la majoration de l'énoncé pour le terme $I_{\leqslant b}(\epsilon_0, h)$.

Pour $b > 2(\beta+\gamma)\sigma(h)/(\epsilon'_1 - \epsilon_2)$ et $\epsilon_0 < \frac{1}{2}(\epsilon'_1 - \epsilon_2)$ on obtient la majoration de l'énoncé pour le terme $I_{>b}(\epsilon_0, h)$.

On peut trouver un b qui satisfait les trois inégalités précédentes si

$$\epsilon_0 < \min\left(\tfrac{1}{2}(\epsilon'_1 - \epsilon_2), \tfrac{1}{2}\epsilon(\epsilon'_1 - \epsilon_2)/(\beta+\gamma)\right).$$

Il suffit donc de prendre $\epsilon_1 = \min(\frac{1}{2}(\epsilon'_1 - \epsilon_2), \frac{1}{2}\epsilon(\epsilon'_1 - \epsilon_2)/(\beta+\gamma))$ pour obtenir le résultat de l'énoncé ∎

Soient D un réel, c, c' deux entiers tels que $c' \geqslant c > 0$ et $m, m' \in M(F)$. Posons

$$X(c, D, m, m') = \int_{U(F)} \int_{U(F)_c} \Xi^G(um)\Xi^G(vum')\sigma(v)^D \sigma(u)^D \, dv \, du,$$

$$X(c, c', D, m, m') = \int_{U(F)-U(F)_{c'}} \int_{U(F)_c} \Xi^G(um)\Xi^G(vum')\sigma(v)^D \sigma(u)^D \, dv \, du.$$

Lemme 13.0.7. — *Les intégrales ci-dessus sont convergentes et à D fixé, il existe un réel R et un réel $\epsilon > 0$ tels qu'on ait les majorations*

1) $X(c, D, m, m') \ll c^R\sigma(m)^R \sigma(m')^R \delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \delta_P(m')^{\frac{1}{2}} \Xi^M(m)\Xi^M(m')$ *pour tous $m, m' \in M(F)$ et tout $c \geqslant 1$;*
2) $X(c, c', D, m, m') \ll \exp(-\epsilon c')\sigma(m)^R \sigma(m')^R \delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \delta_P(m')^{\frac{1}{2}} \Xi^M(m)\Xi^M(m')$ *pour tous $m, m' \in M(F)$ et tout $c' \geqslant c \geqslant 1$.*

Démonstration. — Pour $c \in \mathbb{N}$ et $x \in F$ on pose

$$\mathrm{val}_c(x) = \min\left(0, \mathrm{val}_F(x) + c\right).$$

Pour $u \in U(F)/U(F)_c$ on définit

$$\mathrm{val}_c(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \mathrm{val}_c\left(\mathrm{Tr}\left(h(uv_i, v_{-i-1})\right)\right).$$

Montrons qu'il existe un réel D_1 tel que l'on ait la majoration

$$(*) \qquad \int_{U(F)_c} \Xi^G(vum)\sigma(vum)^D \, dv \ll \left(c - \mathrm{val}_c(u)\right)^{D_1} q_F^{\mathrm{val}_c(u)} \sigma(m)^{D_1} \delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \Xi^M(m)$$

pour tout $m \in M(F)$, tout $c \geqslant 1$ et tout $u \in U(F)$.

Pour $a \in A(F) \cap K$ on peut remplacer $\Xi^G(vum)$ et $\sigma(vum)$ par $\Xi^G(avuma^{-1})$ et $\sigma(avuma^{-1})$ et on peut alors intégrer sur $A(F) \cap K$. Puisque a commute à m et normalise $U(F)_c$, on obtient

$$\int_{U(F)_c} \Xi^G(vum)\,\sigma(vum)^D\,\mathrm{d}v \ll \int_{A(F)\cap K} \int_{U(F)_c} \Xi^G(vaua^{-1}m)\,\sigma(vaua^{-1}m)^D\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}a.$$

L'application

$$A(F) \cap K \longrightarrow U(F)/U(F)_c, \quad a \longmapsto aua^{-1}$$

a son image incluse dans $U(F)_{c-\mathrm{val}_c(u)}/U(F)_c$ et son jacobien est borné par $q_F^{\mathrm{val}_c(u)}$. On en déduit que

$$\int_{U(F)_c} \Xi^G(vum)\sigma(vum)^D\,\mathrm{d}v \ll q_F^{\mathrm{val}_c(u)} \int_{U(F)_{c-\mathrm{val}_c(u)}} \Xi^G(vm)\sigma(vm)^D\,\mathrm{d}v.$$

La proposition 13.0.4 permet alors d'obtenir la majoration (*).

Dans les expressions définissant $X(c, D, m, m')$ et $X(c', c, D, m, m')$, on peut écrire l'intégrale sur $U(F)$ (resp. $U(F) - U(F)_{c'}$) comme une double intégrale sur $U(F)_c$ et $U(F)/U(F)_c$ (resp. $U(F)_c$ et $(U(F) - U(F)_{c'})/U(F)_c$). D'après (*), pour tous $m, m' \in M(F)$ et pour tous $c' \geqslant c \geqslant 1$, on a les majorations

$$\begin{aligned} X(c, D, m, m') &\ll \sigma(m)^R\sigma(m')^R\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\delta_P(m')^{\frac{1}{2}}\,\Xi^M(m)\,\Xi^M(m') \\ &\qquad \int_{U(F)/U(F)_c} q_F^{2\,\mathrm{val}_c(u)}\big(c - \mathrm{val}_c(u)\big)^{D_1}\,\mathrm{d}u, \\ X(c', c, D, m, m') &\ll \sigma(m)^R\sigma(m')^R\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\delta_P(m')^{\frac{1}{2}}\,\Xi^M(m)\Xi^M(m') \\ &\qquad \int_{U(F)-U(F)_{c'}/U(F)_c} q_F^{2\,\mathrm{val}_c(u)}\big(c - \mathrm{val}_c(u)\big)^{D_1}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Les deux majorations de l'énoncé découlent alors des majorations suivantes

$$\int_{F/\mathfrak{p}_F^{-c}} q_F^{2\,\mathrm{val}_c(x)}\big(c - \mathrm{val}_c(x)\big)^{D_1} dx \ll c^{D_2},$$

$$\int_{(F-\mathfrak{p}_F^{-c'})/\mathfrak{p}_F^{-c}} q_F^{2\,\mathrm{val}_c(x)}\big(c - \mathrm{val}_c(x)\big)^{D_1} dx \ll \exp(-\epsilon c')$$

qui sont vérifiées pour certains réels D_2 et $\epsilon > 0$ ◻

Soient $D, C > 0$, $c > 0$ trois réels et $N \geqslant 1$ un entier. Posons

$$\begin{aligned} \chi(c, C, N, D) = \int_{M(F)} \int_{U(F)_c} &\mathbf{1}_{\sigma\geqslant C}(u)\,\Xi^M(m)\,\Xi^G(um) \\ &\kappa_N(m)\,\delta_P(m)^{-\frac{1}{2}}\sigma(u)^D\sigma(m)^D\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m. \end{aligned}$$

Lemme 13.0.8. — *Cette expression est convergente. Le réel D étant fixé, pour tout réel R, il existe un réel $\beta > 0$ tel que*

$$\chi(c, C, N, D) \ll \exp(-cR) N^{-R}$$

pour tout $c > 0$, $N \geqslant 1$ et tout C tel que $C \geqslant \beta(\log(N) + c)$.

Démonstration. — Fixons le réel D. Il existe un réel D' tel que

$$\Xi^G(g) = \Xi^G(g^{-1}) \ll \Xi^M\big(m_{\overline{P}}(g^{-1})\big)\,\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(g^{-1})\big)^{\frac{1}{2}}\,\sigma(g)^{D'}$$

pour tout $g \in G(F)$. En particulier, pour tous $m \in M(F)$, $u \in U(F)$, on a

$$\Xi^G(um) \ll \Xi^M\big(m^{-1} m_{\overline{P}}(u^{-1})\big)\,\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\,\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(u^{-1})\big)^{\frac{1}{2}}\sigma(u)^{D'}\sigma(m)^{D'}$$

En effectuant le changement de variable $u \mapsto u^{-1}$, on en déduit que l'expression $\chi(c, C, N, D)$ est essentiellement majoré par

$$\int_{U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma \geqslant C}(u)\,\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(u)\big)^{\frac{1}{2}}\,\sigma(u)^{D+D'}$$
$$\int_{M(F)} \Xi^M\big(m^{-1} m_{\overline{P}}(u)\big)\,\Xi^M(m)\,\sigma(m)^{D+D'}\,\kappa_N(m)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u$$

pour tout $c > 0$, pour tout $C > 0$ et pour tout $N \geqslant 1$.

Réécrivons l'intégrale sur $M(F)$ en un intégrale sur $G_0(F)$ et $A(F)$. On a la majoration $\sigma(ag_0) \ll \sigma(a)\sigma(g_0)$ pour tous $a \in A(F)$, $g_0 \in G_0(F)$. L'intégrale sur $M(F)$ est donc essentiellement majorée par le produit des intégrales

$$\int_{A(F)} \kappa_N(a)\sigma(a)^{D+D'}\,\mathrm{d}a \qquad \text{et}$$
$$\int_{G_0(F)} \Xi^{G_0}(g_0)\Xi^{G_0}(g_0^{-1} g_0(m_{\overline{P}}(u)))\sigma(g_0)^{D+D'}\,\kappa_N(g_0)\,\mathrm{d}g_0,$$

où pour $m \in M(F)$ on définit $g_0(m)$ comme l'unique élément de $G_0(F)$ tel que $mg_0(m)^{-1} \in A(F)$. Comme on l'a déjà vu, la première intégrale est essentiellement majorée par N^{R_1} pour un certain réel $R_1 > 0$. D'après le lemme 12.0.2, il existe un réel R_2 tel que la deuxième intégrale soit essentiellement majorée, pour tout $u \in U(F)$ et tout $N \geqslant 1$, par

$$N^{R_2}\,\Xi^{G_0}\big(g_0(m_{\overline{P}}(u))\big)\,\sigma\big(g_0(m_{\overline{P}}(u))\big)^{R_2}.$$

On a évidemment $\Xi^{G_0}(g_0(m_{\overline{P}}(u))) = \Xi^M(m_{\overline{P}}(u))$ pour tout $u \in U(F)$. On a aussi une majoration $\sigma(g_0(m_{\overline{P}}(u))) \ll \sigma(u)$ pour tout $u \in U(F)$. On en déduit que $\chi(c,C,N,D)$ est essentiellement majorée par

$$N^{R_1+R_2}\int_{U(F)_c}\mathbf{1}_{\sigma\geqslant C}(u)\,\delta_{\overline{P}}\big(m_{\overline{P}}(u)\big)^{\frac{1}{2}}\,\Xi^M\big(m_{\overline{P}}(u)\big)\,\sigma(u)^{D+D'+R_2}\,\mathrm{d}u$$

pour tout $c>0$, tout $C>0$ et tout $N\geqslant 1$. Il ne reste plus qu'à évoquer le lemme 13.0.3 pour obtenir la majoration de l'énoncé ∎

Soient D et C deux réels et c,c',N trois entiers naturels qui vérifient les conditions $C,c,c',N\geqslant 1$. Pour $m\in M(F), h\in H(F), u,u'\in U(F)$ on pose

$$\phi(m,h,u,u',D,N)=\Xi^H(h)\,\Xi^G(u'm)\,\Xi^G(uhu'm)$$
$$\kappa_N(m)\,\sigma(u')^D\sigma(u)^D\sigma(h)^D\sigma(m)^D\delta_P(m)^{-1}.$$

On pose aussi

$$I(c,N,D)=\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)}\phi(m,h,u,u',D,N)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}m,$$

$$I(c,c',N,D)=\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)-U(F)_{c'}}\phi(m,h,u,u',D,N)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}m,$$

$$I(c,c',N,C,D)=\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)_{c'}}\mathbf{1}_{\sigma\geqslant C}(hu)\phi(m,h,u,u',D,N)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}m.$$

Proposition 13.0.9. — *Les expressions ci-dessus sont convergentes et à c et D fixés, on a les majorations suivantes :*

1) *Il existe un réel R tel que $I(c,N,D)\ll N^R$ pour tout $N\geqslant 1$.*
2) *Pour tout réel R, il existe $\alpha>0$ tel que $I(c,c',N,D)\ll N^{-R}$ pour tout $N\geqslant 2$ et tout $c'\geqslant\alpha\log(N)$.*
3) *Pour tout réel R, il existe $\alpha>0$ tel que $I(c,c',N,C,D)\ll N^{-R}$ pour tout $N\geqslant 1$, tout $c'\geqslant 1$ et tout $C\geqslant\alpha(\log(N)+c')$.*

Démonstration. — Effectuons dans la première intégrale le changement de variables $u'\mapsto h^{-1}u'h$ et majorons $\sigma(h^{-1}u'h)$ par $\sigma(h)^2\sigma(u')$. On reconnaît l'intégrale intérieure sur $U(F)_c$ et $U(F)$: c'est $X(c,D,m,hm)$. D'après le 1) du lemme 13.0.7, il existe un réel R tel que $I(c,N,D)$ soit essentiellement majoré, pour tout $N\geqslant 1$, par

$$\int_{H(F)}\int_{M(F)}\Xi^H(h)\,\Xi^M(hm)\,\Xi^M(m)\,\sigma(m)^{D+2R}\sigma(h)^{D+R}\kappa_N(m)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}h.$$

L'intégrale intérieure est essentiellement majorée par le produit de

$$\int_{A(F)}\kappa_N(a)\,\sigma(a)^{D+2R}\,\mathrm{d}a \quad\text{et}\quad \int_{G_0(F)}\Xi^{G_0}(hg_0)\,\Xi^{G_0}(g_0)\,\sigma(g_0)^{D+2R}\kappa_N(g_0)\,\mathrm{d}g_0.$$

La première intégrale est essentiellement majorée par une puissance de N. D'après le lemme 12.0.2, il existe un réel R' telle que la deuxième intégrale soit essentiellement majorée par $\Xi^{G_0}(h)\sigma(h)^{R'}N^{R'}$. D'après le lemme 12.0.3, l'intégrale

$$\int_{H(F)} \Xi^{G_0}(h)\,\Xi^{H}(h)\,\sigma(h)^{D+R+R'}\,\mathrm{d}h$$

est convergente. On en déduit la première majoration de la proposition. En utilisant le 2. du lemme 13.0.7 pour majorer l'intégrale intérieure sur $U(F)_c$ et $U(F)$ dans $I(c,c',N,D)$ et en effectuant les même manipulations que précédemment on obtient la même majoration multipliée par $\exp(-\epsilon c')$ pour un certain $\epsilon > 0$. On en déduit la deuxième majoration de l'énoncé.

On a la majoration

$$I(c,c',N,C,D) \leqslant I\big(\max(c,c'),\max(c,c'),N,C,D\big).$$

Pour établir 3), il suffit de majorer $I(c,c,N,C,D)$ à D fixé. Introduisons un paramètre $b > 0$ que l'on précisera plus tard. L'expression $I(c,c,N,C,D)$ est majorée par la somme de deux intégrales similaires $I_{\geqslant b}(c,c,N,C,D)$ et $I_{<b}(c,c,N,C,D)$ où on a échangé le terme $\mathbf{1}_{\sigma\geqslant C}(hu)$ par les termes $\mathbf{1}_{\sigma\geqslant b}(h)$ et $\mathbf{1}_{\sigma<b}(h)\mathbf{1}_{\sigma\geqslant C-b}(u)$ respectivement. D'après la proposition 13.0.4, il existe un réel D' tel que $I_{\geqslant b}(c,c,N,C,D)$ soit essentiellement majoré, pour tout $N \geqslant 1$ et tous $c,C,b > 0$, par le produit d'une puissance de c et de

$$\int_{H(F)}\int_{M(F)} \mathbf{1}_{\sigma\geqslant b}(h)\,\Xi^{H}(h)\,\Xi^{M}(hm)\,\Xi^{M}(m)\,\kappa_N(m)\,\sigma(h)^{D'}\sigma(m)^{D'}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}h.$$

On peut, comme on l'a déjà fait plusieurs fois, décomposer l'intégrale sur $M(F)$ en un produit d'une intégrale sur $A(F)$ et d'une intégrale sur $G_0(F)$. Comme on l'a aussi vu plusieurs fois, l'intégrale sur $A(F)$ est essentiellement majorée par une puissance de N. On reconnaît l'intégrale sur $G_0(F)$: c'est $I^1(N,D',b)$. Cette intégrale est majorée par le lemme 12.0.5.

Alliant cette majoration aux précédentes, on en déduit qu'il existe des réels R_1 et $\epsilon_1 > 0$ tels que $I_{\geqslant b}(c,c,N,C,D)$ soit essentiellement majorée par $c^{R_1}N^{R_1}\exp(-\epsilon_1 b)$ pour tout $N \geqslant 1$ et tous $c,C,b > 0$. En particulier, pour

$$b = \frac{(R+R_1)\log(N) + R_1\log(c)}{\epsilon_1},$$

l'expression $I_{\geqslant b}(c,c,N,C,D)$ est essentiellement majorée par N^{-R}. On fait dorénavant ce choix pour b.

Il reste à majorer $I_{>b}(c,c,N,C,D)$. On effectue les changements de variable $u' \mapsto hu'h^{-1}$ et $u \mapsto uu'^{-1}$. On majore $\sigma(uu'^{-1})$ par $\sigma(u)\sigma(u')$ et $\mathbf{1}_{\geqslant C-b}(uu'^{-1})$

par $\mathbf{1}_{\geqslant\frac{1}{2}(C-b)}(u)+\mathbf{1}_{\geqslant\frac{1}{2}(C-b)}(u')$. On obtient ainsi que $I_{<b}(c,c,N,C,D)$ est essentiellement majoré par l'intégrale sur $H(F)$ du produit de $\mathbf{1}_{\sigma<b}(h)\Xi^H(h)\sigma(h)^D$ et de l'intégrale

$$\int_{M(F)}\int_{U(F)_c}\int_{U(F)_c}(\mathbf{1}_{\geqslant(C-b)/2}(u)+\mathbf{1}_{\geqslant(C-b)/2}(u'))\\ \Xi^G(u'm)\Xi^G(uhm)\kappa_N(m)\sigma(u')^{2D}\sigma(u)^D\sigma(m)^D\\ \delta_P(m)^{-1}dudu'\,\mathrm{d}m,$$

pour tout $c>0$, tout $C>0$ et tout $N\geqslant 1$. Cette intégrale est somme de deux intégrales similaires. Il suffit donc de borner l'une des deux.

Considérons l'intégrale où on a fait disparaître le terme $\mathbf{1}_{\geqslant\frac{1}{2}(C-b)}(u)$; on reconnaît l'intégrale sur u : c'est $X(c,D,hm)$. D'après le lemme 13.0.7, elle est essentiellement majorée par

$$c^{R_2}\,\Xi^M(hm)\,\delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\,\sigma(m)^{R_2}$$

pour un certain réel R_2. On en déduit que $I_{>b}(c,c,N,C,D)$ est essentiellement majorée par l'intégrale sur $H(F)$ du produit de $c^{R_2}\,\mathbf{1}_{\sigma<b}(h)\,\Xi^H(h)\,\sigma(h)^D$ et de l'intégrale

$$\int_{M(F)}\int_{U(F)_c}\mathbf{1}_{\geqslant(\frac{1}{2}C-b)}(u)\,\Xi^M(hm)\,\Xi^G(u'm)\\ \kappa_N(m)\,\sigma(u')^{2D}\,\sigma(m)^{D+R_2}\,\delta_P(m)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m$$

pour tout c, pour tout $C>0$ et pour tout $N\geqslant 1$. Il existe un réel β_1 tel que

$$\Xi^M(mm')\ll\exp\big(\beta_1\sigma(m)\big)\,\Xi^M(m')$$

pour tous $m,m'\in M(F)$. L'intégrale précédente est donc essentiellement majorée par le produit de $\exp(\beta_1\sigma(h))$ et de $\chi(c,\frac{1}{2}(C-b),N,2D)$. D'après le lemme 13.0.8, pour tout réel R', il existe un réel α_1 tel que ce dernier terme soit essentiellement majoré par $\exp(-cR')N^{-R'}$ pour tout $N\geqslant 1$ et pour tous $c>0$, $C>0$ vérifiant $C-b\geqslant\alpha_1(\log(N)+c)$. L'intégrale sur $H(F)$ de

$$\mathbf{1}_{\sigma<b}(h)\,\Xi^H(h)\,\sigma(h)^D\,\exp\big(\beta_1\sigma(h)\big)$$

est majorée par le produit de $b^D\exp(\beta_1 b)$ et de

$$\int_{H(F)}\mathbf{1}_{\sigma<b}(h)\,\mathrm{d}h.$$

D'après l'inégalité 4.3 (1) de [**32**], cette intégrale est essentiellement majorée par $\exp(R_3 b)$ pour un certain réel R_3. Au final, $I_{<b}(c, c, N, C, D)$ est essentiellement majoré par

$$c^{R_2} \exp(-cR')N^{-R'}b^D \exp\big((\beta_1 + R_3)b\big)$$

pour tout $N \geqslant 1$ et tous $c > 0$, $C > 0$ vérifiant

$$C - b \geqslant \alpha_1\big(\log(N) + c\big).$$

D'après notre choix de b, le terme $b^D \exp((\beta_1 + R_3)b)$ est essentiellement majorée par le produit d'une puissance de c et de $N^{(R+R_1)/(2\epsilon_1)}$. La puissance de c multipliée par $c^{R_2} \exp(-cR')$ est essentiellement majorée par 1. Pour $R' = R + (R + R_1)/(2\epsilon_1)$, on obtient la majoration de l'énoncé ∎

CHAPITRE 14

ENTRELACEMENTS TEMPÉRÉS

Soient $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$, $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$ et fixons des produits scalaires invariants sur E_π et E_σ. Pour $e, e' \in E_\pi$, $\epsilon, \epsilon' \in E_\sigma$ et $c \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{L}_{\pi,\sigma,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{H(F)U(F)_c} \big(\sigma(h)\epsilon', \epsilon\big)\big(e', \pi(hu)e\big)\,\bar{\xi}(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h$$

(on renvoie au chapitre 13 pour la définition de $U(F)_c$). D'après le corollaire 13.0.5, $\mathscr{L}_{\pi,\sigma,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$ est défini par une intégrale convergente.

Pour tout réel $c' \geqslant 0$, notons $\omega_A(c')$ l'ensemble des $a \in A(F)$ qui vérifient $\mathrm{val}_F(a_i - 1) \geqslant c'$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Lemme 14.0.1. — *Soit $c' \geqslant 0$ un réel. Alors il existe un réel $c_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$, tout $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$, tous $e, e' \in E_\pi^{\omega_A(c')}$, tous $\epsilon, \epsilon' \in E_\sigma$ et tout $c \geqslant c_0$, on ait*

$$\mathscr{L}_{\pi,\sigma,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \mathscr{L}_{\pi,\sigma,c_0}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e).$$

Démonstration. — Fixons $c' > 0$. Soient $e, e' \in E_\pi^{\omega_A(c')}$ et $\epsilon, \epsilon' \in E_\sigma$. On a alors, pour tout $c \geqslant 0$,

$$\mathscr{L}_{\pi,\sigma,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{H(F)U(F)_c} \big(\sigma(h)\epsilon', \epsilon\big)\big(e', \pi(hu)e\big) \int_{\omega_A(c')} \bar{\xi}(aua^{-1})\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h.$$

Il existe un réel $c_0 \geqslant 0$, tel que $\int_{\omega_A(c')} \bar{\xi}(aua^{-1}) da = 0$ pour tout u appartenant à $U(F) - U(F)_{c_0}$, ce qui permet de conclure ∎

Posons

$$\mathscr{L}_{\pi,\sigma}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \lim_{c \to \infty} \mathscr{L}_{\pi,\sigma,c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e).$$

Pour tous $h, h' \in H(F)$, $u, u' \in U(F)$, $e, e' \in E_\pi$, $\epsilon, \epsilon' \in E_\sigma$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\pi,\sigma}\big(\sigma(h')\epsilon' \otimes \pi(hu)e', \epsilon \otimes \pi(u')e\big)\\ = \xi(u^{-1}u')\mathscr{L}_{\pi,\sigma}\big(\epsilon' \otimes e', \sigma(h^{-1})\epsilon \otimes \pi(h'^{-1})e\big).\end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que $\mathscr{L}_{\pi,\sigma} \neq 0$ entraîne $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma) \neq 0$. L'objectif de ce chapitre est d'établir la réciproque.

14.1. Un lemme sur les entrelacements

Fixons des données $(w_i)_{i=0,\ldots,\ell}, P_0, P_H, A_0, A_H$ comme dans le chapitre 11 et des compacts-ouverts $C_0 \subset G_0(F)$ et $C_H \subset H(F)$ qui vérifient la conclusion de la proposition 11.0.4. On peut toujours supposer (ce que l'on fait) que

$$C_H A_H^1 = C_H \quad \text{et} \quad A_0^1 C_0 = C_0.$$

On a alors $G_0(F) = C_H A_H^+ A_0^+ C_0$ et $M(F) = C_H A_H^+ A_0^+ A(F) C_0$. Posons

$$P_{0,G} = P_0 A U \quad \text{et} \quad A_{0,G} = A A_0.$$

Ce sont respectivement un sous-groupe parabolique minimal et un tore déployé maximal de G. On note $A_{0,G}^+$ l'ensemble des éléments de $A_{0,G}(F)$ qui contractent $P_{0,G}(F)$. On pose

$$\Lambda_H^+ = A_H^+/A_H^1, \quad \Lambda_0^+ = A_0^+/A_0^1, \quad \Lambda_G^+ = A_{0,G}^+/A_{0,G}^1,$$

que l'on identifie à des sous-ensembles de A_H^+, A_0^+ et $A_{0,G}^+$ via le choix de sections.

Lemme 14.1.1. — *Soient Γ_1 et Γ_2 des sous-groupes compacts-ouverts de $G(F)$ et $H(F)$ respectivement. Il existe un sous-ensemble compact-ouvert $C_M \subset M(F)$ et des sous-groupes ouverts $K_1 \subset K$, $K_2 \subset K_H$ tels que, pour tous $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\sigma \in \mathrm{Irr}(H)$ et tout $\ell \in \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma)$, on ait :*

1) *Pour tout $e \in E_\pi^{\Gamma_1}$ et pour tout $m \in M(F) - C_H A_H^+ A_{0,G}^+ C_M$,*

$$\ell\big(\pi(m)e\big) = 0.$$

2) *Pour tous $e \in E_\pi^{\Gamma_1}$, $\epsilon^\vee \in E_{\sigma^\vee}^{\Gamma_2}$ et tous $h \in C_H A_H^+$, $m \in A_{0,G}^+ C_M$, on a*

$$\big\langle \epsilon^\vee, \ell\big(\pi(hm)e\big)\big\rangle = \big\langle \sigma^\vee(e_{K_2})\sigma^\vee(h^{-1})\epsilon^\vee, \ell\big(\pi(e_{K_1})\pi(m)e\big)\big\rangle.$$

Démonstration. — 1) Pour $m \in M(F)$ et une décomposition

$$m = k_H a_H a_0 a k_0,$$

avec $k_H \in C_H$, $k_0 \in C_0$, $a_H \in A_H^+$, $a_0 \in A_0^+$ et $a \in A(F)$, on a alors

$$\ell\big(\pi(m)e\big) = \sigma(k_H a_H)\,\ell\big(\pi(a_0 a k_0)e\big).$$

Puisque C_0 est compact, il suffit de montrer qu'il existe un compact $C_{0,G}$ contenu dans $A_{0,G}(F)$, ne dépendant que de Γ_1, tel que $\ell(\pi(a)e) = 0$ pour tout $a \in A_0^+ A(F) - A_{0,G}^+ C_{0,G}$ et tout $e \in E_\pi^{\Gamma_1}$. Il existe certainement un compact $C_{0,G} \subset A_{0,G}(F)$ tel que pour tout $a \in A_0^+ A(F) - A_{0,G}^+ C_{0,G}$ on ait

$$a\,\Gamma_1\,a^{-1} \cap \big(U(F) - \operatorname{Ker}\xi\big) \neq \varnothing$$

(on utilise ici le fait que $v_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_{-1})$ avec les notations du chapitre 11). Pour un tel a et $u \in a\Gamma_1 a^{-1} \cap (U(F) - \operatorname{Ker}\xi)$, on a alors

$$\ell\big(\pi(a)e\big) = \ell\big(\pi(ua)e\big) = \xi(u)\,\ell\big(\pi(a)e\big),$$

d'où $\ell(\pi(a)e) = 0$.

2) Cette partie résulte du fait que, d'après le lemme 11.0.1, l'application produit $U \times P_H \times \overline{P}_{0,G} \to G$ est submersive à l'origine. ∎

14.2. Entrelacements dans une famille d'induites

Fixons un sous-groupe de Levi minimal de H défini sur F ainsi qu'un sous-groupe compact spécial K_H de $H(F)$ en bonne position par rapport à ce sous-groupe de Levi minimal. Soient

$$Q = L\,U_Q \quad \text{et} \quad R = S\,U_R$$

des sous-groupes paraboliques semi-standards de G et H respectivement et ρ et τ des représentations irréductibles de la série discrète de $L(F)$ et $S(F)$ respectivement.

Pour tous $\lambda \in i\mathscr{A}_{L,F}^*$ et $\mu \in i\mathscr{A}_{S,F}^*$ on note

$$\pi_\lambda = i_Q^G(\rho_\lambda) \quad \text{et} \quad \sigma_\mu = i_R^H(\tau_\mu).$$

Les représentations π_λ se réalisent dans un espace commun $\mathscr{K}_{Q,\rho}^G$ de fonctions sur K et les représentations σ_μ se réalisent dans un espace commun $\mathscr{K}_{R,\tau}^H$ de fonctions sur K_H. On peut munir comme au § 1.5 ces deux espaces de produits scalaires invariants. On utilise ces produits scalaires pour définir les formes sesquilinéaires $\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}$ pour tout $(\lambda, \mu) \in i\mathscr{A}_{L,F}^* \times i\mathscr{A}_{S,F}^*$. On notera

$$\lambda \mapsto m(\rho_\lambda) \quad \text{et} \quad \mu \mapsto m(\tau_\mu)$$

les mesures de Plancherel.

Proposition 14.2.1. — *On conserve les notations précédentes. Alors :*

1) *Pour tous* $e, e' \in \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$ *et* $\epsilon, \epsilon' \in \mathcal{K}^H_{R,\tau}$, *la fonction*

$$(\lambda, \mu) \longmapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda, \sigma_\mu}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e)$$

est analytique sur $i\mathcal{A}^*_{L,F} \times i\mathcal{A}^*_{S,F}$.

2) *S'il existe* $\lambda_0 \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ *et* $\mu_0 \in i\mathcal{A}^*_{S,F}$ *tels que* $\mathcal{L}_{\pi_{\lambda_0}, \sigma_{\mu_0}} \neq 0$, *alors on a*

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda, \sigma_\mu} \neq 0$$

pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ *et tout* $\mu \in i\mathcal{A}^*_{S,F}$.

Démonstration. — 1) Fixons $e, e' \in \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$ et $\epsilon, \epsilon' \in \mathcal{K}^H_{R,\tau}$. Pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ et tout $\mu \in i\mathcal{A}^*_{S,F}$ on a, pour c assez grand,

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda, \sigma_\mu}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \mathcal{L}_{\pi_\lambda, \sigma_\mu, c}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e).$$

On peut choisir un entier c_0 à partir duquel l'égalité précédente est vérifiée qui ne dépend que des stabilisateurs de e et e' dans $A(F) \cap K$. Par conséquent, on peut trouver un entier c tel que l'égalité soit vérifiée simultanément pour tout (λ, μ). On a alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in i\mathcal{A}^*_{L,F} \times i\mathcal{A}^*_{S,F}$,

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda, \sigma_\mu}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = \int_{H(F)U(F)_c} \big(\sigma_\mu(h)\epsilon', \epsilon\big)\big(e', \pi_\lambda(hu)e\big)\, \overline{\xi}(u)\, du\, dh$$

Il suffit de vérifier que cette intégrale est encore uniformément convergente pour (λ, μ) dans un voisinage de $i\mathcal{A}^*_L \times i\mathcal{A}^*_S \subset \mathcal{A}^*_{L,\mathbb{C}} \times \mathcal{A}^*_{S,\mathbb{C}}$. Soit $\epsilon > 0$ pour (λ, μ) dans un voisinage assez petit de $i\mathcal{A}^*_L \times i\mathcal{A}^*_S$, on a des majorations uniformes

$$\big|(\sigma_\mu(h)\epsilon', \epsilon)\big| \ll \exp\big(\epsilon\sigma(h)\big)\Xi^H(h), \quad \big|(e', \pi_\lambda(hu)e)\big| \ll \exp\big(\epsilon\sigma(hu)\big)\Xi^G(hu)$$

pour tout $h \in H(F)$ et pour tout $u \in U(F)$. Il suffit donc de vérifier que pour ϵ assez petit l'intégrale suivante est absolument convergente

$$\int_{H(F)U(F)_c} \exp\big(\epsilon(\sigma(h) + \sigma(hu))\big)\Xi^H(h)\,\Xi^G(hu)\, dh\, du.$$

C'est une conséquence de la proposition 13.0.6 et du lemme 12.0.1.

2) On s'inspire ici grandement de la démonstration de la proposition 6.4.1 de [**26**]. On suppose que la fonction $(\lambda, \mu) \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda, \sigma_\mu}$ n'est pas identiquement nulle et on veut montrer qu'elle est non nulle en $(0, 0)$.

Soient $e \in \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$ et $\epsilon \in \mathcal{K}^G_{R,\tau}$ tels que $(e, e) = (\epsilon, \epsilon) = 1$ et tels que l'ordre d'annulation en $(0, 0)$ de $(\lambda, \mu) \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda, \sigma_\mu}(\epsilon \otimes e, \epsilon \otimes e)$ soit minimal. Reprenons les notations du paragraphe 1.7 où l'on a défini les ensembles $\mathscr{E}(\rho)$ et $\mathscr{E}(\tau)$. Soient ϕ et ψ des fonctions C^∞ sur $i\mathscr{A}^*_{L,F}$ et $i\mathscr{A}^*_{S,F}$ respectivement qui vérifient :

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} (w^{-1}\operatorname{Supp}(\phi)+\mu)\cap\operatorname{Supp}(\phi)=\varnothing \text{ pour tout } (w,\mu)\in\mathscr{E}(\rho)-\{(\mathrm{Id},0)\}, \\ (w^{-1}\operatorname{Supp}(\psi)+\mu)\cap\operatorname{Supp}(\psi)=\varnothing \text{ pour tout } (w,\mu)\in\mathscr{E}(\tau)-\{(\mathrm{Id},0)\}. \end{cases}$$

On définit une fonction Φ sur $G(F)$ par la formule

$$\Phi(g)=\int_{i\mathscr{A}^*_{L,F}\times i\mathscr{A}^*_{S,F}}\phi(\lambda)\psi(\mu)m(\rho_\lambda)m(\tau_\mu)\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}\big(\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)e,\epsilon\otimes e\big)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda.$$

À g fixé, il existe un c assez grand de sorte que l'on ait

$$\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}\big(\epsilon\otimes\pi_\lambda(g)e,\epsilon\otimes e\big) = \int_{H(F)U(F)_c}\big(\sigma_\mu(h)\epsilon,\epsilon\big)\big(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(hu)e\big)\,\bar{\xi}(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h$$

pour tous $\lambda\in i\mathscr{A}^*_{L,F}$ et $\mu\in i\mathscr{A}^*_{S,F}$. Pour un tel c, on a alors

$$\Phi(g)=\int_{i\mathscr{A}^*_{L,F}\times i\mathscr{A}^*_{S,F}}\int_{H(F)U(F)_c}\phi(\lambda)\,\psi(\mu)m(\rho_\lambda)m(\tau_\mu)\big(\sigma_\mu(h)\epsilon,\epsilon\big) \big(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(hu)e\big)\,\bar{\xi}(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h d\mu\,\mathrm{d}\lambda.$$

L'intégrale ci-dessus est absolument convergente, car il existe $C>0$ indépendant de λ et μ tel que pour $h\in H(F)$ et $u\in U(F)$,

$$\big|\big(\sigma_\mu(h)\epsilon,\epsilon\big)\big(\pi_\lambda(g)e,\pi_\lambda(hu)e\big)\big|\leqslant C\,\Xi^H(h)\,\Xi^G(hu)$$

et l'intégrale $\int_{H(F)U(F)_c}\Xi^H(h)\,\Xi^G(hu)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}u$ est absolument convergente. On peut donc changer l'ordre d'intégration et on obtient alors

$$\text{(2)}\qquad \Phi(g)=\int_{H(F)U(F)_c} f_{e,e,\phi}(u^{-1}h^{-1}g)\,f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h$$

(on reprend ici les notations du § 1.7). Montrons que l'on a :

(3) *Il existe un entier c_0 tel que l'égalité (2) soit vérifiée pour tout $c\geqslant c_0$ et pour tout $g\in M(F)K$.*

En effet, l'entier $c_0(g)$ à partir duquel la formule précédente est vérifiée ne dépend que d'un sous-groupe compact-ouvert de $A(F)\cap K$ qui laisse stable e et $\pi_\lambda(g)e$. Comme $A(F)$ commute à $M(F)$, on peut trouver un sous-groupe compact-ouvert de $A(F)$ qui laisse stable ces éléments pour tout $g\in M(F)K$.

(4) *La fonction $(m,k)\mapsto|\Phi(mk)|^2\delta_P(m)^{-1}$ est intégrable sur $M(F)\times K$.*

En effet, les fonctions $f_{e,e,\phi}$ et $f_{\epsilon,\epsilon,\psi}$ sont dans $\mathcal{S}(G(F))$ et $\mathcal{S}(H(F))$ respectivement. Par conséquent pour tout réel $D' > 0$, tout $m \in M(F)$ et tout $k \in K$, on a une majoration

$$\left|\Phi(mk)\right| \ll \int_{H(F)U(F)} \Xi^G(uh^{-1}m)\,\Xi^H(h)\,\sigma(uh^{-1}m)^{-D'}\sigma(h)^{-D'}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}u.$$

D'après le lemme II.4.5 de [**28**], pour tout $D > 0$, il existe $D' > 0$ tel que le terme précédent soit essentiellement majoré par

$$\delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \int_{H(F)} \Xi^M(h^{-1}m)\,\Xi^H(h)\,\sigma(h^{-1}m)^{-D}\sigma(h)^{-D}\,\mathrm{d}h.$$

On a $\delta_P(m) = \delta_P(a)$, $\Xi^M(h^{-1}m) = \Xi^{G_0}(h^{-1}g_0)$ et $\sigma(a)^{\frac{1}{2}} \ll \sigma(h^{-1}m)$ pour tout $h \in H(F)$ et tout $m = ag_0 \in M(F) = A(F)G_0(F)$. Il suffit donc de montrer que les deux intégrales suivantes sont absolument convergentes dès que D est assez grand

$$\int_{G_0(F)}\int_{H(F)\times H(F)} \Xi^{G_0}(h^{-1}g_0)\,\Xi^H(h)\,\Xi^{G_0}(h'^{-1}g_0)\,\Xi^H(h')\,\sigma(h)^{-D}\sigma(h')^{-D}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}h'\,\mathrm{d}g_0,$$

$$\int_{A(F)} \sigma(a)^{-D}\,\mathrm{d}a.$$

La deuxième intégrale ne pose pas de problème et d'après le lemme 12.0.2, la première est essentiellement majorée par

$$\int_{H(F)\times H(F)} \Xi^H(h^{-1}h')\,\Xi^H(h)\,\Xi^H(h')\,\sigma(h)^{-D}\sigma(h')^{-D}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}h'$$

qui est une intégrale convergente pour D assez grand.

On peut faire tendre le réel c vers l'infini dans l'égalité (2). Comme on l'a vu lors de la preuve de (4), le terme sous l'intégrale est intégrable sur $H(F)U(F)$. On en déduit que, pour tout $g \in G(F)$, on a aussi

$$\Phi(g) = \int_{H(F)U(F)} f_{e,e,\phi}(u^{-1}h^{-1}g)\,f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h. \tag{5}$$

Posons

$$S = \int_{M(F)\times K} \left|\Phi(mk)\right|^2 \delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}m$$

et explicitons cette intégrale en remplaçant Φ par son expression (5) et $\overline{\Phi}$ par son expression (2). On obtient ainsi, pour tout $c \geqslant c_0$,

$$S = \int_{M(F)\times K} \int_{H(F)U(F)} \int_{H(F)U(F)_c} f_{e,e,\phi}(u'h'^{-1}mk)\, \overline{f_{e,e,\phi}(uh^{-1}mk)}$$
$$f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h')\overline{f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h)}\delta_P(m)^{-1}\xi(u'u^{-1})du\, \mathrm{d}h du'\, \mathrm{d}h'\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}m$$
$$= \int_{G(F)} \int_{H(F)} \int_{H(F)U(F)_c} f_{e,e,\phi}(h'^{-1}g)\, \overline{f_{e,e,\phi}(uh^{-1}g)}$$
$$f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h')\, \overline{f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h)}\overline{\xi(u)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}h\, \mathrm{d}h'\, \mathrm{d}g.$$

D'après les majorations déjà effectuées, cette triple intégrale est absolument convergente. L'hypothèse (1) permet d'appliquer l'égalité 1.7 (3). On a donc

$$\int_{G(F)} f_{e,e,\phi}(h'^{-1}g)\, \overline{f_{e,e,\phi}(uh^{-1}g)}\, \mathrm{d}g = \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\rho_\lambda)\left|\phi(\lambda)\right|^2 \big(e, \pi_\lambda(uh^{-1}h')e\big)\, \mathrm{d}\lambda.$$

On obtient, après le changement de variable $h' \mapsto hh'$,

$$S = \int_{H(F)} \int_{H(F)U(F)_c} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\rho_\lambda)\left|\phi(\lambda)\right|^2 \big(e, \pi_\lambda(uh')e\big)$$
$$f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(hh')\, \overline{f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h)}\, \overline{\xi(u)}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}h\, \mathrm{d}h'.$$

L'intégrale ci-dessus est encore absolument convergente. Appliquons à nouveau l'égalité 1.7 (3) :

$$\int_{H(F)} f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(hh')\, \overline{f_{\epsilon,\epsilon,\psi}(h)}\, \mathrm{d}h = \int_{i\mathcal{A}^*_{S,F}} m(\tau_\mu)\left|\psi(\mu)\right|^2 (\sigma_\mu(h')\epsilon, \epsilon)\, \mathrm{d}\mu$$

On en déduit que

$$(6)\quad S = \int_{H(F)U(F)_c} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}\times i\mathcal{A}^*_{S,F}} m(\rho_\lambda) m(\tau_\mu)\left|\phi(\lambda)\right|^2 \left|\psi(\mu)\right|^2$$
$$\big(\sigma_\mu(h)\epsilon, \epsilon\big)\big(e, \pi_\lambda(uh)e\big)\, \overline{\xi(u)}\, \mathrm{d}\lambda d\mu\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}h$$
$$= \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}\times i\mathcal{A}^*_{S,F}} m(\rho_\lambda) m(\tau_\mu)\left|\phi(\lambda)\right|^2 \left|\psi(\mu)\right|^2 \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e, \epsilon\otimes e)\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\mu.$$

Soient $\Gamma_1 \subset K$ et $\Gamma_2 \subset K_H$ des sous-groupes ouverts distingués stabilisant e et ϵ. Soient $C_M \subset M(F)$ un compact et $K_1 \subset K$, $K_2 \subset K_H$ des sous-groupes ouverts qui vérifient les conclusions du lemme 14.1.1. On peut toujours supposer que $A^1_{0,G} C_M = C_M$. Puisque pour tout $(\lambda, \mu) \in i\mathcal{A}^*_{L,F} \times i\mathcal{A}^*_{S,F}$ on a

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu} \in \mathrm{Hom}_{H,\xi}(E_{\pi_\lambda}, E_{\sigma_\mu}) \otimes \overline{\mathrm{Hom}_{H,\xi}(E_{\pi_\lambda}, E_{\sigma_\mu})},$$

le 1) du lemme 14.1.1 implique que le support de $(m,k)\mapsto \Phi(mk)$ est contenu dans $(C_H\Lambda_H^+\Lambda_G^+C_M)\times K$.

Soient $\mathscr{B}^{K_1}$ et $\mathscr{B}^{K_2}$ des bases orthonormales de $(\mathscr{K}^G_{Q,\rho})^{K_1}$ et $(\mathscr{K}^H_{R,\tau})^{K_2}$ respectivement. D'après le 2) du lemme 14.1.1, pour tout $m = k_H\, a_H\, a_G\, k_M$ dans $C_H\,\Lambda_H^+\,\Lambda_G^+\,C_M$ et tout $k\in K$, on a

$$\Phi(mk) = \sum_{e'\in\mathscr{B}^{K_1},\epsilon'\in\mathscr{B}^{K_2}} F_{e',\epsilon'}(a_G\, k_M\, k, k_H\, a_H)$$

où on a posé, pour $e'\in\mathscr{B}^{K_1}$ et $\epsilon'\in\mathscr{B}^{K_2}$,

$$F_{e',\epsilon'}(g,h) = \int_{i\mathscr{A}^*_{L,F}\times i\mathscr{A}^*_{S,F}} \phi(\lambda)\,\psi(\mu)\,m(\rho_\lambda)\,m(\tau_\mu)\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e',\epsilon'\otimes e) \\ \big(\pi_\lambda(g)e,e'\big)\big(\sigma_\mu(h)\epsilon',\epsilon\big)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu.$$

Soit

$$F = \sum_{\substack{e'\in\mathscr{B}^{K_1}\\ \epsilon'\in\mathscr{B}^{K_2}}} F_{e',\epsilon'}.$$

D'après ce qui précède, le 3) du lemme 11.0.5 et le fait que $\delta_P\,\delta_{P_0} = \delta_{P_{0,G}}$, on a une majoration

$$S \ll \sum_{\substack{a_G\in\Lambda_G^+\\ a_H\in\Lambda_H^+}} \delta_{P_{0,G}}(a_G)^{-1}\delta_{P_H}(a_H)^{-1}\int_{C_H\times C_M\times K} \big|F(a_G\,k_M\,k,k_H\,a_H)\big|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k_M\,\mathrm{d}k_H,$$

où la constante implicite ne dépend pas de ϕ et ψ.

Soit C_G un sous-ensemble compact de $G(F)$ qui contient C_MK. On a alors

$$\int_{C_H\times C_M\times K} \big|F(a_G\,k_Mk,k_H\,a_H)\big|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k_M\,\mathrm{d}k_H \\ \ll \int_{C_H\times C_G}\big|F(a_G\,k_G,k_H\,a_H)\big|^2\,\mathrm{d}k_G\,\mathrm{d}k_H \\ \ll \int_{(C_H)^2\times(C_G)^2}\big|F(k_G^1\,a_G\,k_G^2,k_H^1\,a_H\,k_H^2)\big|^2\,\mathrm{d}k_G^1\,\mathrm{d}k_G^2\,\mathrm{d}k_H^1\,\mathrm{d}k_H^2.$$

Pour toute fonction f intégrable et mesurable sur $G(F)$ on a

$$\int_{KA^+_{0,G}K} f(g)\,\mathrm{d}g = \sum_{a_G\in\Lambda_G^+}\mathrm{mes}(Ka_GK)\int_{K\times K} f(k_1\,a_G\,k_2)\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2.$$

D'après [**28**, I (5)], on a $\delta_{P_{0,G}}(a_G)^{-1} \ll \mathrm{mes}(Ka_GK)$ pour tout $a_G\in\Lambda^+_{0,G}$. Les mêmes résultats sont bien sûr valables pour $H(F)$. On en déduit, pour toute fonction f mesurable et de carré intégrable sur $G(F)\times H(F)$, la majoration

$$\sum_{\substack{a_G\in\Lambda_G^+\\ a_H\in\Lambda_H^+}} \delta_{P_{0,G}}(a_G)^{-1}\delta_{P_H}(a_H)^{-1} \int_{(C_H)^2\times(C_G)^2} \left|f(k_G^1 a_G k_G^2, k_H^1 a_H k_H^2)\right|^2 \mathrm{d}k_G^1\,\mathrm{d}k_G^2\,\mathrm{d}k_H^1\,\mathrm{d}k_H^2 \ll \int_{G(F)\times H(F)} \left|f(g,h)\right|^2 \mathrm{d}h\,\mathrm{d}g$$

En particulier, on a

$$S \ll \int_{G(F)\times H(F)} \left|F(g,h)\right|^2 \mathrm{d}h\,\mathrm{d}g, \tag{7}$$

la constante implicite ne dépendant pas de ϕ et ψ.

Pour $(\lambda,\mu)\in i\mathscr{A}_{L,F}^*\times i\mathscr{A}_{S,F}^*$, considérons la représentation

$$\pi_\lambda\boxtimes\sigma_\mu = i_{Q\times R}^{G\times H}(\rho_\lambda\boxtimes\sigma_\mu).$$

Avec les notations du § 1.7, on a alors $F_{e',\epsilon'} = f_{e'\otimes\epsilon, e\otimes\epsilon', \varphi_{e',\epsilon'}}$, où

$$\varphi_{e',\epsilon'}(\lambda,\mu) = \phi(\lambda)\,\psi(\mu)\,\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e', \epsilon'\otimes e)$$

pour tout $(\lambda,\mu)\in i\mathscr{A}_{L,F}^*\times i\mathscr{A}_{S,F}^*$. D'après l'hypothèse (1) faite sur les supports de ϕ et ψ et 1.7 (3), les fonctions $(F_{e',\epsilon'})_{e'\in\mathscr{B}^{K_1},\epsilon'\in\mathscr{B}^{K_2}}$ forment une famille orthogonale pour le produit scalaire L^2 et la norme L^2 de $F_{e',\epsilon'}$ est égale à

$$\int_{i\mathscr{A}_{L,F}^*\times i\mathscr{A}_{S,F}^*} \left|\phi(\lambda)\right|^2 \left|\psi(\mu)\right|^2 \left|\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e', \epsilon'\otimes e)\right|^2 \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda.$$

On en déduit que

$$\int_{G(F)\times H(F)} \left|F(g,h)\right|^2 \mathrm{d}g\,\mathrm{d}h = \int_{i\mathscr{A}_{L,F}^*\times i\mathscr{A}_{S,F}^*} \left|\phi(\lambda)\right|^2\cdot\left|\psi(\mu)\right|^2 m(\rho_\lambda)\,m(\tau_\mu) \Big(\sum_{\substack{e'\in\mathscr{B}^{K_1}\\ \epsilon'\in\mathscr{B}^{K_2}}} \left|\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e', \epsilon'\otimes e)\right|^2\Big)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu.$$

D'après l'égalité (6) et l'inégalité (7), il existe une constante C, telle que pour tous ϕ et ψ qui vérifient l'hypothèse (1), on a

$$\int_{i\mathscr{A}^*_{L,F}\times i\mathscr{A}^*_{S,F}} m(\rho_\lambda)m(\tau_\mu)\left|\phi(\lambda)\right|^2\cdot\left|\psi(\mu)\right|^2\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e,\epsilon\otimes e)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant C\int_{i\mathscr{A}^*_{L,F}\times i\mathscr{A}^*_{S,F}}\left|\phi(\lambda)\right|^2\cdot\left|\psi(\mu)\right|^2 m(\rho_\lambda)m(\tau_\mu)$$
$$\sum_{\substack{e'\in\mathscr{B}^{K_1}\\ \epsilon'\in\mathscr{B}^{K_2}}}\left|\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e',\epsilon'\otimes e)\right|^2\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu.$$

Pour presque tout $\lambda\in i\mathscr{A}^*_{L,F}$ il existe un voisinage ω_λ de λ tel que

$$(w^{-1}\omega_\lambda+\mu)\cap\omega_\lambda=\varnothing$$

pour tout $(w,\mu)\in\mathscr{E}(\rho)-\{(\mathrm{Id},0)\}$. On a le même résultat sur $i\mathscr{A}^*_{S,F}$. On a donc l'inégalité

$$\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e,\epsilon\otimes e)\leqslant C\sum_{\substack{e'\in\mathscr{B}^{K_1}\\ \epsilon'\in\mathscr{B}^{K_2}}}\left|\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e',\epsilon'\otimes e)\right|^2$$

pour tout $(\lambda,\mu)\in i\mathscr{A}^*_{L,F}\times i\mathscr{A}^*_{S,F}$. Puisque ϵ et e ont été choisis tels que l'ordre d'annulation en $(0,0)$ de $(\lambda,\mu)\mapsto\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon\otimes e,\epsilon\otimes e)$ soit minimal, on déduit de l'inégalité précédente que $\mathscr{L}_{\pi_0,\sigma_0}(\epsilon\otimes e,\epsilon\otimes e)\neq 0$ ∎

Proposition 14.2.2. — 1) *Soient* $\lambda_0\in i\mathscr{A}^*_{L,F}$ *et* $\mu_0\in i\mathscr{A}^*_{S,F}$ *tels que* $\mathscr{L}_{\pi_{\lambda_0},\sigma_{\mu_0}}\neq 0$. *Il existe alors un unique couple* (π',σ') *constitué de sous-représentations irréductibles de* π_{λ_0} *et* σ_{μ_0} *respectivement tel que* $\mathscr{L}_{\pi',\sigma'}\neq 0$.

2) *Soit* $\sigma\in\mathrm{Temp}(H)$ *et supposons que* $\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma}$ *pour* $\lambda\in i\mathscr{A}^*_{L,F}$ *ne soit pas identiquement nulle, alors*

a) *Pour tout* $\lambda\in i\mathscr{A}^*_{L,F}$, $\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma}$ *est non nul ;*

b) *Il existe des familles finies* $(\epsilon_i)_{i=1,\dots,n}$ *et* $(\epsilon'_i)_{i=1,\dots,n}$ *d'éléments de* E_σ, *des familles finies* $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ *et* $(e'_i)_{i=1,\dots,n}$ *d'éléments de* $\mathscr{K}^G_{Q,\tau}$ *et une famille finie* $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$ *de fonctions holomorphes sur un voisinage de* $i\mathscr{A}^*_{L,F}$ *dans* $\mathscr{A}^*_{L,\mathbb{C}}/i\mathscr{A}^\vee_{L,F}$, *telles que pour tout* $\lambda\in i\mathscr{A}^*_{L,F}$ *on ait*

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\lambda)\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma}(\epsilon'_i\otimes e'_i,\epsilon_i\otimes e_i)=1.$$

Démonstration. — 1) On ne perd rien à supposer que $(\lambda_0,\mu_0)=(0,0)$. Établissons d'abord la propriété suivante :

(1) *Pour tous $e', e \in \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$ et pour tous $\epsilon', \epsilon \in \mathcal{K}^H_{R,\tau}$ on a*

$$\left|\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(e' \otimes \epsilon', e \otimes \epsilon)\right|^2 = \left|\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(e' \otimes \epsilon, e' \otimes \epsilon)\right| \cdot \left|\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(e \otimes \epsilon', e \otimes \epsilon')\right|.$$

En effet, d'après le 1) de la proposition précédente, il suffit de vérifier la même égalité en remplaçant π_0 et σ_0 par π_λ et σ_μ pour (λ, μ) dans un ouvert dense de $i\mathcal{A}^*_{L,F} \times i\mathcal{A}^*_{S,F}$. On peut donc supposer π_λ et σ_μ irréductibles. Mais alors $\dim \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi_\lambda, \sigma_\mu) \leqslant 1$ et il existe $\ell \in \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi_\lambda, \sigma_\mu)$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que pour tous $e', e \in \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$ et tous $\epsilon', \epsilon \in \mathcal{K}^H_{R,\tau}$, on a

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(e' \otimes \epsilon', e \otimes \epsilon) = c\big(\ell(e'), \epsilon\big)\big(\epsilon', \ell(e)\big).$$

L'égalité (1) est alors facile à vérifier. L'existence d'un couple comme dans l'énoncé est évidente. Supposons donc qu'il existe deux tels couples (π', σ') et (π'', σ''). D'après (1), on peut trouver $e_1 \in E_{\pi'} \subset \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$ et $e_2 \in E_{\pi''} \subset \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$, $\epsilon_1 \in E_{\sigma'} \subset \mathcal{K}^H_{R,\tau}$ et $\epsilon_2 \in E_{\sigma''} \subset \mathcal{K}^H_{R,\tau}$ tels que

$$\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(e_1 \otimes \epsilon_1, e_1 \otimes \epsilon_1) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(e_2 \otimes \epsilon_2, e_2 \otimes \epsilon_2) \neq 0.$$

D'après (1), on a aussi $\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(e_1 \otimes \epsilon_2, e_2 \otimes \epsilon_1) \neq 0$. Or $\pi' \neq \pi''$ ou $\sigma' \neq \sigma''$. Dans le premier cas, $E_{\pi'}$ et $E_{\pi''}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire et dans le deuxième cas, $E_{\sigma'}$ et $E_{\sigma''}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire. Dans les deux cas, il s'ensuit que $\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(e_1 \otimes \epsilon_2, e_2 \otimes \epsilon_1) = 0$. On aboutit donc à une contradiction.

2) On peut supposer que σ est une sous-représentation de σ_0. La fonction $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}$ est non nulle sur un ouvert non vide de $i\mathcal{A}^*_{L,F}$. D'après le 1), cela implique que pour toute autre sous-représentation σ' de σ_0 la fonction $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma'}$ s'annule sur un ouvert non vide. Comme elle est analytique, d'après la proposition précédente, elle est donc identiquement nulle. Par conséquent, d'après le 2) de la proposition précédente, la fonction $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}$ n'est jamais nulle. Cela prouve a).

On peut donc certainement trouver des familles finies $(\epsilon_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(\epsilon'_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments de E_σ, et des familles finies $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(e'_i)_{i=1,\ldots,n}$ d'éléments de $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ telles que pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ la famille

$$\big(\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}(\epsilon'_i \otimes e'_i, \epsilon_i \otimes e_i)\big)_{i=1,\ldots,n}$$

contienne un élément non nul. Pour $i = 1, \ldots, n$ les fonctions

$$\psi_i : \lambda \longmapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}(\epsilon'_i \otimes e'_i, \epsilon_i \otimes e_i)$$

admettent un prolongement holomorphe, encore noté ψ_i, dans un voisinage de $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ dans $\mathcal{A}^*_{L,\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{L,F}$. Les fonctions $\lambda \mapsto \overline{\psi_i(\lambda)} = \overline{\psi_i(-\overline{\lambda})}$ pour λ

dans $i\mathcal{A}_L^*$ admettent donc aussi un prolongement holomorphe dans un voisinage de $i\mathcal{A}_{L,F}^*$. Pour obtenir le b), il suffit de prendre pour $i = 1, \dots, n$

$$\phi_i(\lambda) = \overline{\psi_i(\lambda)}\Big(\sum_{i=1}^{n} \big|\psi_i(\lambda)\big|^2\Big)^{-1}. \qquad \square$$

14.3. Tout entrelacement est tempéré

Théorème 14.3.1. — *Soient $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$ et $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$. Alors on a $\mathcal{L}_{\pi,\sigma} \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma) \neq 0$.*

Démonstration. — D'après une remarque déjà faite, il suffit d'établir que si $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma) \neq 0$ alors $\mathcal{L}_{\pi,\sigma} \neq 0$. Soit donc $\ell \in \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \sigma)$ non nul. Il existe des sous-groupes paraboliques semi-standards $Q = L U_Q$ et $R = S U_S$ de G et H respectivement et des représentations irréductibles ρ, τ de la série discrète de $L(F)$ et $S(F)$ tels qu'avec les notations du paragraphe 14.2, π et σ soient des sous-représentations de π_0 et σ_0. Soient $\phi \in C^\infty(i\mathcal{A}_{L,F}^*)$ et $e, e' \in \mathcal{K}_{Q,\rho}^G$. On pose $f = f_{e,e',\phi}$. Soient $\epsilon \in E_\sigma$ et $e_0 \in E_\pi$.

(1) *L'intégrale $I(\epsilon, e_0, f) = \int_{G(F)} (\epsilon, \ell(\pi(g)e_0)) f(g)\,\mathrm{d}g$ converge absolument.*

En effet, on décompose l'intégrale en

$$\int_{U(F)\times M(F)\times K} \big|(\epsilon, \ell(\pi(umk)e_0))\big| \cdot \big|f(umk)\big| \delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u.$$

Puisque f est invariante à droite par un sous-groupe compact-ouvert et que le stabilisateur de e_0 est ouvert, on peut oublier l'intégrale sur K. On a

$$\big|(\epsilon, \ell(\pi(ug)e_0))\big| = \big|(\epsilon, \ell(\pi(g)e_0))\big|$$

pour tout $u \in U(F)$ et $g \in G(F)$. La fonction f appartient à $\mathcal{S}(G(F))$, d'après la proposition II.4.5 de [**28**]. On a donc pour tout $d > 0$

$$\int_{U(F)} \big|f(um)\big|\mathrm{d}u \ll \delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\, \Xi^M(m)\, \sigma(m)^{-d}$$

pour tout $m \in M(F)$. Il suffit donc de montrer que pour d assez grand l'intégrale suivante converge

$$\int_{M(F)} \big|(\epsilon, \ell(\pi(m)e_0))\big| \Xi^M(m)\, \delta_P(m)^{-\frac{1}{2}} \sigma(m)^{-d}\,\mathrm{d}m.$$

Appliquons le lemme 14.1.1 à des sous-groupes ouverts $\Gamma_1 \subset K$ et $\Gamma_2 \subset K_H$ qui laissent stables e_0 et ϵ. On en déduit l'existence d'un compact $C_M \subset M(F)$ et de sous-groupes ouverts $K_1 \subset K$, $K_2 \subset K_H$ qui vérifient les conclusions de ce lemme. On peut toujours supposer que $A^1_{0,G}C_M = C_M$. Alors l'intégrale précédente est à support dans $C_H\,\Lambda_H^+\,\Lambda_G^+\,C_M$. D'après le 2) du lemme 14.1.1, pour tout $m = k_H\,a_H\,a_G\,k_M \in C_H\,\Lambda_H^+\,\Lambda_G^+\,C_M$, on a une majoration

$$\left|\big(\epsilon, \ell(\pi(m)e)\big)\right| \ll \Xi^G(a_G)\Xi^H(a_H).$$

Pour $a_G \in A_{0,G}(F)$, on note $(a_G)_0$ l'unique élément de $A_0(F)$ tel que $a_G(a_G)_0^{-1}$ soit dans $A(F)$. On a alors pour tous $a_G \in A_{0,G}(F)$ et $h \in H(F)$ la majoration

$$\sigma\big(a_G(a_G)_0^{-1}\big)^{\frac{1}{2}}\,\sigma\big(h(a_G)_0\big)^{\frac{1}{2}} \ll \sigma(ha_G).$$

D'après le 3) du lemme 11.0.5, on a donc la majoration

$$\sigma(a_G)^{\frac{1}{2}} \ll \sigma\big((a_G)_0\big)^{\frac{1}{2}}\sigma\big(a_G(a_G)_0^{-1}\big)^{\frac{1}{2}} \ll \sigma(k_H\,a_H\,a_G\,k_M)$$

pour tous $a_G \in A^+_{0,G}$, $a_H \in A^+_H$, $k_H \in C_H$ et $k_M \in C_M$. D'après le lemme 11.0.5, on a aussi, pour tous $a_G \in A^+_{0,G}$, $a_H \in A^+_H$,

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}(C_H\,a_H\,a_G\,C_M) &= \mathrm{mes}(C_H\,a_H(a_G)_0\,C_M)\\ &\ll \delta_{P_H}(a_H)^{-1}\delta_{P_0}\big((a_G)_0\big)^{-1} = \delta_{P_H}(a_H)^{-1}\,\delta_{P_{0,G}\cap M}(a_G)^{-1}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}&\int_{M(F)} \left|\big(\epsilon, \ell(\pi(m)e_0)\big)\right| \Xi^M(m)\,\delta_P(m)^{-\frac{1}{2}}\sigma(m)^{-d}\,\mathrm{d}m\\ &\qquad \ll \sum_{\substack{a_G\in\Lambda_G^+\\ a_H\in\Lambda_H^+}} \delta_{P_{0,G}\cap M}(a_G)^{-1}\delta_{P_H}(a_H)^{-1}\\ &\qquad\qquad \Xi^G(a_G)\,\Xi^H(a_H)\,\Xi^M(a_Ha_G)\,\delta_P(a_G)^{-\frac{1}{2}}\sigma(a_G)^{-\frac{1}{2}d}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 11.0.5, on a

$$\Xi^M(a_Ha_G) = \Xi^{G_0}\big(a_H(a_G)_0\big) \ll \Xi^{G_0}(a_H)\,\Xi^{G_0}\big((a_G)_0\big) = \Xi^{G_0}(a_H)\,\Xi^M(a_G)$$

pour tout $a_H \in \Lambda_H^+$ et pour tout $a_G \in \Lambda_G^+$. La somme ci-dessus est donc essentiellement majorée par le produit des deux sommes

$$\sum_{a_H\in\Lambda_H^+} \delta_{P_H}(a_H)^{-1}\Xi^{G_0}(a_H)\,\Xi^H(a_H),$$

$$\sum_{a_G\in\Lambda_G^+} \delta_{P_{0,G}\cap M}(a_G)^{-1}\delta_P(a_G)^{-\frac{1}{2}}\,\Xi^G(a_G)\,\Xi^M(a_G)\,\sigma(a_G)^{-\frac{1}{2}d}.$$

D'après le lemme 12.0.1 et la majoration $\Xi^H(a_H) \ll \delta_{P_H}(a_H)^{\frac{1}{2}}\sigma(a_H)^{d'}$ pour un certain réel d', la première somme converge absolument. D'après le lemme II.1.1 de [**28**], il existe des réels d_1, d_2 tels qu'on ait des majorations

$$\Xi^G(a_G) \ll \delta_{P_{0,G}}(a_G)^{\frac{1}{2}}\sigma(a_G)^{d_1} \quad \text{et} \quad \Xi^M(a_G) \ll \delta_{P_{0,G}\cap M}(a_G)^{\frac{1}{2}}\sigma(a_G)^{d_2}$$

pour tout $a_G \in \Lambda_G^+$. Puisque $\delta_{P_{0,G}} = \delta_{P_{0,G}\cap M}\delta_P$, la deuxième somme est essentiellement majorée par

$$\sum_{a_G\in\Lambda_G^+} \sigma(a_G)^{d_1+d_2-\frac{1}{2}d}$$

qui est une série absolument convergente pour d assez grand.

On peut calculer $I(\epsilon, e_0, f)$ de deux façons. La première consiste à choisir une suite exhaustive de sous-ensembles compact-ouverts K-bi-invariants (Ω_n) de $G(F)$ et de calculer $I(\epsilon, e_0, f)$ comme la limite de l'intégrale restreinte à Ω_n lorsque n tend vers l'infini. On trouve alors que

$$I(\epsilon, e_0, f) = \big(\epsilon, \ell(\pi(f)e_0)\big). \tag{2}$$

On peut aussi écrire

$$I(\epsilon, e_0, f) = \int_{U(F)}\int_{G_0(F)}\int_K\int_{A(F)} \big(\epsilon, \ell\big(\pi(ag_0k)e_0\big)\big) \\ f(uag_0k)\,\delta_P(a)^{-1}\xi(u)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}g_0\,\mathrm{d}u.$$

Puisque f est bi-invariante par un sous-groupe compact-ouvert de $A(F)$, il existe un entier c tel que l'intégrale intérieure soit nulle pour $u \in U(F) - U(F)_c$ (cf. preuve du lemme 14.0.1). On a alors

$$I(\epsilon, e_0, f) = \int_K\int_{A(F)}\int_{H(F)\backslash G_0(F)}\int_{H(F)U(F)_c} \big(\epsilon, \ell\big(\pi(hag_0k)e_0\big)\big) \\ f(uhag_0k)\,\delta_P(a)^{-1}\xi(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}g_0\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k,$$

et

$$\int_{H(F)U(F)_c} (\epsilon, \ell(\pi(hag_0k)e_0))f(uhag_0k)\xi(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h \\ = \int_{H(F)U(F)_c}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} \phi(\lambda)\,m(\rho_\lambda)\big(\pi_\lambda(uhag_0k)e', e\big) \\ (\epsilon, \sigma(h)\,\ell\big(\pi(ag_0k)e_0\big)\big)\,\xi(u)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h.$$

Comme on l'a déjà vérifié dans la preuve précédente, ce genre d'intégrales est absolument convergente. En permutant les deux intégrales, on voit apparaître le terme

$$\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma,c}\big(\epsilon\otimes\pi_\lambda(ag_0k)e', \ell\big(\pi(ag_0k)e_0\big)\otimes e\big).$$

On peut prendre c aussi grand que l'on veut et comme déjà expliqué dans la preuve de la proposition 14.2.1 , on peut choisir c tel que pour tous $a \in A(F)$,

$g_0 \in G_0(F)$, $k \in K$ et tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, on ait

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma,c}\big(\epsilon \otimes \pi_\lambda(ag_0k)e', \ell\big(\pi(ag_0k)e_0\big) \otimes e\big)$$
$$= \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}\big(\epsilon \otimes \pi_\lambda(ag_0k)e', \ell\big(\pi(ag_0k)e_0\big) \otimes e\big).$$

(Car A commute à $A\,G_0 = M$.) On en déduit que

(3) $$I(\epsilon, e_0, f) = \int_K \int_{A(F)} \int_{H(F)\backslash G_0(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} \phi(\lambda) m(\rho_\lambda) \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}\big(\epsilon \otimes \pi_\lambda(ag_0k)e', \ell\big(\pi(ag_0k)e_0\big) \otimes e\big) \delta_P(a)^{-1}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}h\, \mathrm{d}g_0\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}k.$$

Choisissons $\epsilon \in E_\sigma$ et $e_0 \in E_\pi$ tels que $(\ell(e_0), \epsilon) \neq 0$. On applique les calculs précédents au cas où $e = e' = e_0$ et ϕ à support dans un voisinage ω assez petit de 0 tel que $\phi(0) \neq 0$. Alors $\pi(f)e_0$ est un multiple non nul de e_0. D'après (2), $I(\epsilon, e_0, f)$ n'est pas nulle. Alors (3) implique l'existence de λ tel que $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}$ ne soit pas nul.

D'après la proposition 14.2.1 , $\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}$ n'est pas nul non plus. Si π_0 et σ_0 sont irréductibles alors $\pi = \pi_0$, $\sigma = \sigma_0$ et on a ce que l'on voulait. Sinon d'après la proposition 14.2.2 , 1), il existe un unique couple (π', σ') de sous-représentations irréductibles de π_0 et σ_0 tel que $\mathcal{L}_{\pi',\sigma'}$ soit non nul.

Soient alors $e_1 \in E_{\pi'} \subset \mathcal{K}^G_{Q,\rho}$ et $\epsilon_1 \in E_{\sigma'} \subset \mathcal{K}^H_{R,\tau}$ tels que

$$\mathcal{L}_{\pi_0,\sigma_0}(\epsilon_1 \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_1) \neq 0.$$

Quitte à restreindre ω, on peut supposer que $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_0}(\epsilon_1 \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_1)$ est non nul pour tout $\lambda \in \omega$. Soit ϕ' la fonction à support dans ω définie par

$$\phi'(\lambda) = \phi(\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_0}(\epsilon \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_0)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_0}(\epsilon_1 \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_1)^{-1}$$

Posons $f' = f_{e_1,e_0,\phi'}$. On a alors l'égalité

(4) $$I(\epsilon, e_0, f) = I(\epsilon_1, e_0, f').$$

En effet, d'après (3) il suffit de vérifier que pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ et $g \in G(F)$, on a l'égalité

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_0}(\epsilon \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_0)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_0}\big(\epsilon_1 \otimes \pi_\lambda(g)e_0, \ell\big(\pi(g)e_0\big) \otimes e_0\big)$$
$$= \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_0}(\epsilon_1 \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_1)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma_0}\big(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e_0, \ell\big(\pi(g)e_0\big) \otimes e_0\big).$$

Il suffit même de vérifier l'égalité précédente en remplaçant σ_0 par σ_μ pour λ et μ en position générale. On peut alors supposer π_λ et σ_μ irréductibles.

Alors il existe $\underline{\ell} \in \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi_\lambda, \sigma_\mu)$ et $c \in \mathbb{C}^\times$ tels que pour tous $e, e' \in E_{\pi_\lambda}$ et $\epsilon, \epsilon' \in E_{\sigma_\mu}$,

$$\mathscr{L}_{\pi_\lambda,\sigma_\mu}(\epsilon' \otimes e', \epsilon \otimes e) = c\big(\underline{\ell}(e'), \epsilon)(\epsilon', \underline{\ell}(e)\big).$$

Les deux membres de l'égalité que l'on cherche à prouver valent alors

$$c^2\big(\underline{\ell}(e_1), \epsilon_1\big)\big(\epsilon, \underline{\ell}(e_0)\big)\big(\epsilon_1, \underline{\ell}(e_1)\big)\big(\underline{\ell}(\pi_\lambda(g)e_0), \ell(\pi(g)e_0)\big)$$

Cela prouve (4). En particulier on a $I(\epsilon_1, e_0, f') \neq 0$. D'après (2), cela implique $\pi(f')e_0 \neq 0$ donc notamment $\phi'(0) \neq 0$. On a par conséquent

$$\mathscr{L}_{\pi_0,\sigma_0}(\epsilon \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_0) \neq 0.$$

Mais si $\pi' \neq \pi$ ou $\sigma' \neq \sigma$, il est facile de vérifier que $\mathscr{L}_{\pi_0,\sigma_0}(\epsilon \otimes e_1, \epsilon_1 \otimes e_0) = 0$. On a donc $\pi' = \pi$ et $\sigma' = \sigma$ et le résultat est démontré. $\square$

CHAPITRE 15

INDUCTION ET MULTIPLICITÉS

Le but de ce chapitre est de démontrer qu'en un certain sens la multiplicité $m(\pi,\sigma)$ est compatible à l'induction parabolique. Pour cela il est commode d'étendre un peu la définition de la multiplicité $m(\pi,\sigma)$.

Soient (V,h) et (V',h') deux espaces hermitiens de dimension d et d'. On dira qu'ils sont *compatibles* si d et d' sont de parités différentes et si le plus petit des deux peut s'injecter dans le plus gros.

Supposons que (V,h) et (V',h') soient compatibles. Notons G et G' les groupes unitaires de V et V' respectivement. Fixons une injection de (V',h') dans (V,h) ou de (V,h) dans (V',h') (suivant que $d > d'$ ou $d' > d$). On peut alors toujours trouver une décomposition

$$V = V' \oplus^{\perp} D \oplus^{\perp} (Z_+ \oplus Z_-) \quad \text{ou} \quad V' = V \oplus^{\perp} D \oplus^{\perp} (Z_+ \oplus Z_-),$$

où D est une droite et Z_+, Z_- sont des sous-espaces totalement isotropes.

Soit $P = MU$ le sous-groupe parabolique de G ou G' (suivant que $d > d'$ ou $d' > d$) qui fixe un drapeau complet de sous-espaces de Z_+. On construit comme au § 4 un caractère ξ de $U(F)$. Soient π et π' des représentations irréductibles lisses de $G(F)$ et $G'(F)$ respectivement.

On définit la multiplicité $m'(\pi,\pi')$ comme étant

$$m(\pi,\pi') \text{ si } d > d' \text{ et } m(\pi',\pi) \text{ si } d' > d.$$

Cette multiplicité ne dépend pas des divers choix effectués. Dorénavant on notera aussi $m(\pi,\sigma)$ cette multiplicité généralisée.

Lemme 15.0.1. — *Soient (V,h) et (V',h') deux espaces hermitiens compatibles de groupes unitaires G et G' respectivement. Pour $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ et $\pi' \in \mathrm{Irr}(G')$ on a*

$$m(\pi^{\vee},\pi'^{\vee}) = m(\pi,\pi').$$

Démonstration. — On ne perd rien à supposer que $V' \subset V$. Soit δ un automorphisme F-linéaire de V tel que $h(\delta u, \delta v) = h(v, u)$ pour tout $u, v \in V$. On peut certainement trouver un tel élément qui laisse V' globalement stable. D'après [**22**], chapitre 4, théorème II.1, $\pi^\vee$ est isomorphe à π^δ où $\pi^\delta(x) = \pi(\delta x \delta^{-1})$ et de la même façon π' est isomorphe à $\pi'^{\delta'}$ où δ' est la restriction de δ à V'. Modulo ces isomorphismes on a les égalités

$$\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi^\vee, \pi'^\vee) = \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi^\delta, \pi'^{\delta'}) = \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \pi')$$

et donc l'égalité $m(\pi^\vee, \pi'^\vee) = m(\pi, \pi')$. ∎

Soient (V, h) un espace hermitien et W un sous-espace hermitien de V de sorte que V et W soient compatibles. Fixons une décomposition orthogonale

$$V = (Z_+ \oplus Z_-) \oplus^\perp D \oplus^\perp W$$

où Z_+, Z_- sont des sous-espaces totalement isotropes et D est une droite. Fixons aussi un générateur v_0 de D et posons

$$r = \dim(Z_+) = \dim(Z_-).$$

Cette situation sera conservée jusqu'au § 15.3 inclus.

Soit $k \geqslant 1$ un entier et introduisons quelques notations relatives à des sous-groupes de GL_k. Pour $i = 1, \ldots, k$:

▹ On note $Q_{k-i,i}$ le sous-groupe parabolique standard de GL_k de composante de Levi standard $\mathrm{GL}_{k-i} \times \mathrm{GL}_1 \times \cdots \times \mathrm{GL}_1$ et $U_{k-i,i}$ son radical unipotent.

▹ On définit $P_{k-i,i}$ comme le sous-groupe des éléments de $Q_{k-i,i}$ dont les projections sur les i facteurs GL_1 sont triviales. En particulier $P_{k-1,1}$ est le sous-groupe mirabolique de GL_k.

▹ On définit un caractère ψ_i de $P_{k-i,i}(E)$ par

$$\psi_i(p) = \psi_E\Big(\sum_{j=k-i+1}^{k-1} p_{j,j+1}\Big)$$

pour tout $p \in P_{k-i,i}(E)$ où les $p_{j,\ell}$ désignent les coefficients de p.

15.1. Induction de π et multiplicité I

Soit Y_+ un sous-espace totalement isotrope de dimension k de V ; notons Q son stabilisateur dans G. C'est un sous-groupe parabolique de G, on note N son radical unipotent.

Fixons des sous-espaces $\widetilde{V}$ et Y_-, de sorte que

$$V = (Y_+ \oplus Y_-) \oplus^\perp \widetilde{V},$$

et notons L la composante de Levi de Q qui stabilise $\widetilde{V}$ et Y_-. On a alors un isomorphisme

$$L \simeq \mathrm{GL}(Y_+) \times \widetilde{G}.$$

Soient $\widetilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(\widetilde{G})$, $\pi_+ \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}(Y_+))$, $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$ et posons

$$\pi = i_Q^G(\pi_+ \otimes \widetilde{\pi}).$$

Proposition 15.1.1. — *Supposons $r = 0$. Alors on a*

$$m(\pi, \sigma) = m(\widetilde{\pi}, \sigma).$$

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in i\mathbb{R}/(\frac{2i\pi}{\log(q)}\mathbb{Z})$, posons

$$\pi_\lambda = i_Q^G\big((\pi_+ |\det|^\lambda) \otimes \widetilde{\pi}\big).$$

La représentation π_λ se réalise par translation à droite sur l'espace V_{π_λ} des fonctions $\varphi : G(F) \to V_{\pi_+} \otimes V_{\widetilde{\pi}}$ lisses vérifiant

$$\varphi(g_+ \widetilde{g} n g) = \big|\det(g_+)\big|_E^\lambda \delta_Q(g_+)^{\frac{1}{2}} \big(\pi_+(g_+) \otimes \widetilde{\pi}(\widetilde{g})\big)\varphi(g)$$

pour tous $g_+ \in \mathrm{GL}(Z_+)$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}(F)$, $n \in N(F)$ et $g \in G(F)$. On a

$$m(\pi_\lambda, \sigma) = m(\pi, \sigma)$$

pour tout λ d'après la proposition 14.2.2 , 2-a) et le théorème 14.3.1 . L'espace quotient $Q(F)\backslash G(F)$ paramétrise les sous-espaces totalement isotropes de dimension k de V. L'action de $H(F)$ sur $Q(F)\backslash G(F)$ admet deux orbites : l'une ouverte $\mathcal{U}$ correspond à l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes Y' de dimension k tels que $\dim(Y' \cap W) = k-1$, l'autre fermée $\mathcal{Y}$ correspond à l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes Y' de dimension k inclus dans W.

Définissons $V_{\pi_\lambda, \mathcal{U}}$ comme le sous-espace de V_{π_λ} des fonctions à support dans $\mathcal{U}$ et notons

$$V_{\pi_\lambda, \mathcal{Y}} = V_{\pi_\lambda} / V_{\pi_\lambda, \mathcal{U}}.$$

On a alors la suite exacte de $H(F)$-représentations

$$0 \to V_{\pi_\lambda, \mathcal{U}} \longrightarrow V_{\pi_\lambda} \longrightarrow V_{\pi_\lambda, \mathcal{Y}} \to 0.$$

Lemme 15.1.2. — *On a* $\mathrm{Hom}_H(V_{\pi_\lambda, \mathcal{Y}}, \sigma) = 0$ *et* $\mathrm{Ext}^1(V_{\pi_\lambda, \mathcal{Y}}, \sigma) = 0$.

Démonstration. — On peut toujours supposer que $Y_+ \subset W$. Alors

$$Q \cap H = Q_H = L_H N_H$$

est un sous-groupe parabolique de H et on a un isomorphisme de $H(F)$-représentations

$$V_{\pi_\lambda, \mathcal{Y}} \simeq i_{Q_H}^H \big(\delta_Q^{\frac{1}{2}} \delta_{Q_H}^{-\frac{1}{2}} (\pi_+ |\det|^\lambda \otimes \widetilde{\pi})_{|Q_H}\big).$$

D'après le second théorème d'adjonction de Bernstein, on a

$$\mathrm{Hom}_H(V_{\pi_\lambda, \mathcal{Y}}, \sigma) = \mathrm{Hom}_{L_H}\big(\delta_Q^{\frac{1}{2}} \delta_{Q_H}^{-\frac{1}{2}} (\pi_+ |\det|^\lambda \otimes \widetilde{\pi}), (\sigma)_{\overline{Q}_H}\big),$$
$$\mathrm{Ext}^1_H(V_{\pi_\lambda, \mathcal{Y}}, \sigma) = \mathrm{Ext}^1_{L_H}\big(\delta_Q^{\frac{1}{2}} \delta_{Q_H}^{-\frac{1}{2}} (\pi_+ |\det|^\lambda \otimes \widetilde{\pi}), (\sigma)_{\overline{Q}_H}\big).$$

La représentation $(\sigma)_{\overline{Q}_H}$ est de longueur finie et puisque σ est tempérée, les caractères centraux de tous ses sous-quotients ont leur partie réelle dans un certain cône. La représentation $\delta_Q^{\frac{1}{2}} \delta_{Q_H}^{-\frac{1}{2}} (\pi_+ |\det|^\lambda \otimes \widetilde{\pi})$ est irréductible et son caractère central n'est pas dans ce cône. On en déduit la nullité des deux espaces précédents ∎

D'après le lemme on a

$$\mathrm{Hom}_H(\pi_\lambda, \sigma) = \mathrm{Hom}_H(V_{\pi_\lambda, \mathcal{U}}, \sigma).$$

Quitte à conjuguer, on peut toujours supposer que $\dim(Y_+ \cap W) = k - 1$ et donc $\mathcal{U} = Q(F)\backslash Q(F)H(F)$. La restriction à $H(F)$ de $V_{\pi_\lambda, \mathcal{U}}$ est alors une induite compacte à partir du sous-groupe $H(F) \cap Q(F)$. Décrivons plus en détail ce sous-groupe. On peut fixer une décomposition

$$W = (Y'_+ \oplus Y'_-) \oplus^\perp D' \oplus^\perp \widetilde{V}$$

où $Y'_+ = Y_+ \cap W$ et D' est une droite. Soit $\widetilde{G}'$ le groupe unitaire de $D' \oplus \widetilde{V}$ et Q' le sous-groupe parabolique de H des éléments qui stabilisent Y'_+. On a alors une décomposition

$$Q' = L' N'$$

où L' est la composante de Levi qui stabilise $D' \oplus \widetilde{V}$ et Y'_- ; ce Levi s'identifie donc naturellement à $\mathrm{GL}(Y'_+) \times \widetilde{G}'$. On a alors

$$Q \cap H = \big(\mathrm{GL}(Y'_+) \times \widetilde{G}\big) N'.$$

La représentation $\delta_Q^{\frac{1}{2}} (\pi_+ |\det|^\lambda \otimes \widetilde{\pi})_{|Q(F) \cap H(F)}$ n'est pas triviale sur $N'(F)$ mais elle est triviale sur $N'_\sharp(F)$ où $N'_\sharp$ est le sous-groupe des éléments de N' qui agissent comme l'identité sur D'. On a

$$N'_\sharp = N \cap H$$

et c'est un sous-groupe distingué de $Q \cap H$. Le quotient $(Q(F) \cap H(F))/N'_\sharp(F)$ est naturellement un sous-groupe de $L(F) = \mathrm{GL}(Y_+) \times \widetilde{G}(F)$. On peut fixer une base de Y_+ de sorte que l'isomorphisme déduit $\mathrm{GL}(Y_+) \simeq \mathrm{GL}_k(E)$ identifie $(Q(F) \cap H(F))/N'_\sharp(F)$ avec $P_{k-1,1}(E) \times \widetilde{G}(F)$. On a alors un isomorphisme de $H(F)$-représentations

$$V_{\pi_\lambda,\mathcal{U}} \simeq \text{c-ind}^{H(F)}_{(P_{k-1,1}(E)\times\widetilde{G}(F))N'_\sharp(F)} \big((\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda)_{|P_{k-1,1}(E)} \otimes \widetilde{\pi}\big).$$

D'après [**10**, § 3.5], la représentation $(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda)_{|P_{k-1,1}(E)}$ possède une filtration

$$\{0\} = \tau_{k+1,\lambda} \subset \tau_{k,\lambda} \subset \cdots \subset \tau_{1,\lambda} = (\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda)_{|P_{k-1,1}(E)},$$

les quotients de cette filtration vérifiant

$$\tau_{i,\lambda}/\tau_{i+1,\lambda} \simeq \text{c-ind}^{P_{k-1,1}(E)}_{P_{k-i,i}(E)} \big(\Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda) \otimes \psi_i\big)$$

où $\Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda)$ désigne la dérivée i-ème de $\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda$ (cf. [**10**, § 4.3]). L'induction à support compact étant un foncteur exact, on en déduit une filtration

$$\{0\} = \mu_{k+1,\lambda} \subset \mu_{k,\lambda} \subset \cdots \subset \mu_{1,\lambda} = V_{\pi_\lambda,\mathcal{U}}$$

où pour $i = 1, \ldots, k$ on a

$$\mu_{i,\lambda}/\mu_{i+1,\lambda} \simeq \text{c-ind}^{H(F)}_{(P_{k-i,i}(E)\times\widetilde{G}(F))N'_\sharp(F)} \big(\Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda) \otimes \psi_i \otimes \widetilde{\pi}\big).$$

Pour $i = 1, \ldots, k$, soit Q_{k-i} le sous-groupe parabolique de H qui fixe l'espace engendré par les $k-i$ premiers vecteurs de la base fixée de Y_+. Il admet une composante de Levi naturellement isomorphe à $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_{k-i}) \times \widetilde{G}_{k-i}$ où $\widetilde{G}_{k-i}$ est un groupe unitaire contenant $\widetilde{G}$. La représentation $\Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda) \otimes \psi_i \otimes \widetilde{\pi}$ est triviale sur le radical unipotent de Q_{k-i}. Posons

$$\mu'_i = \text{c-ind}^{\widetilde{G}_{k-i}}_{(U_{k-i,i}(E)\widetilde{G}(F)N'_\sharp(F))\cap\widetilde{G}_{k-i}} (\psi_i \otimes \widetilde{\pi}).$$

On a alors

$$\mu_{i,\lambda}/\mu_{i+1,\lambda} \simeq i^H_{Q_{k-i}}\big(\Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda) \otimes \mu'_i\big).$$

Lemme 15.1.3. — *Pour λ générique, on a pour $i = 1, \ldots, k-1$*

$$\mathrm{Hom}_H(\mu_{i,\lambda}/\mu_{i+1,\lambda}, \sigma) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ext}^1_H(\mu_{i,\lambda}/\mu_{i+1,\lambda}, \sigma) = 0.$$

Démonstration. — On a $\Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda) = \Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+)|\det|^\lambda$ et $\Delta^i(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+)$ est de longueur finie. Par conséquent pour λ générique, tous les sous-quotients de $\mu_{i,\lambda}/\mu_{i+1,\lambda}$ ont des supports cuspidaux différents de celui de σ ∎

D'après le lemme on a donc pour λ générique

$$\mathrm{Hom}_H(\pi,\sigma) = \mathrm{Hom}_H(\mu_{k,\lambda},\sigma).$$

D'après [10], on a $\Delta^k(\delta_Q^{\frac{1}{2}}\pi_+|\det|^\lambda) = 1$ (car π_+ est tempérée donc générique) et $\widetilde{G}_{k-i} = Q_{k-i} = H$. Par conséquent

$$\mu_{k,\lambda} = \text{c-ind}_{\widetilde{G}P_{0,k}(E)N'_\sharp(F)}^H(\psi_k \otimes \widetilde{\pi}).$$

La contragrédiente de l'induite à supports compacts d'une représentation admissible étant l'induite ordinaire de la contragrédiente, on a par réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}_H(\pi,\sigma) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{G}P_{0,k}(E)N'_\sharp(F)}(\sigma^\vee, \psi_k^{-1} \otimes \widetilde{\pi}^\vee).$$

Remarquons que $P_{0,k}(E)N'_\sharp(F)$ n'est autre que le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de H de composante de Levi $\mathrm{Res}_{E/F}(\mathrm{GL}_1) \times \widetilde{G}$ et que ψ_k^{-1} possède alors une définition analogue à celle de ξ pour une normalisation convenable. La multiplicité $m(\widetilde{\pi},\sigma) = m(\widetilde{\pi}^\vee,\sigma^\vee)$ est donc la dimension de l'espace $\mathrm{Hom}_{\widetilde{G}P_{0,k}(E)N'_\sharp(F)}(\sigma^\vee, \psi_k^{-1} \otimes \widetilde{\pi}^\vee)$. D'où le résultat ∎

15.2. Induction de σ et multiplicité

Considérons une décomposition orthogonale

$$W = (Y_{+,H} \oplus Y_{-,H}) \oplus^\perp \widetilde{W}$$

où $Y_{+,H}$ et $Y_{-,H}$ sont totalement isotropes. Notons Q_H le sous-groupe parabolique de H des éléments qui stabilisent $Y_{+,H}$, N_H son radical unipotent et L_H la composante de Levi qui stabilise $Y_{-,H}$.

Notons $\widetilde{H}$ le groupe unitaire de $\widetilde{W}$. On a alors

$$L_H = \mathrm{GL}(Y_{+,H}) \times \widetilde{H}.$$

Soient $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$, $\sigma_+ \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}(Y_{+,H}))$, $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Temp}(\widetilde{H})$ et posons

$$\sigma = i_{Q_H}^H(\sigma_+ \otimes \widetilde{\sigma}).$$

Proposition 15.2.1. — *On a $m(\pi,\sigma) = m(\pi,\widetilde{\sigma})$.*

Démonstration. — Soit $(D', h_{D'})$ un espace hermitien de dimension 1 engendré par un vecteur v_0' tel que $h_{D'}(v_0') = -h(v_0)$. Notons V' la somme orthogonale de V et D' et soit G' son groupe unitaire. Posons

$$Z'_+ = Z_+ \oplus E(v_0 + v_0') \quad \text{et} \quad Z'_- = Z_- \oplus E(v_0 - v_0').$$

On a alors

$$V' = (Z'_+ \oplus Z'_-) \oplus^\perp W$$

et Z'_+, Z'_- sont des sous-espaces totalement isotropes de V'. Notons P' le sous-groupe parabolique de G' des éléments qui stabilisent Z'_+ et M' sa composante de Levi qui stabilise Z'_-. On a alors

$$M' = \mathrm{GL}(Z'_+) \times H.$$

Fixons une représentation tempérée arbitraire π'_+ de $\mathrm{GL}(Z'_+)$. Posons

$$\sigma' = i_{P'}^{G'}(\pi'_+ \otimes \sigma).$$

D'après la proposition 15.1.1, on a $m(\pi, \sigma) = m(\pi, \sigma')$. Soit Q' le sous-groupe parabolique de G' des éléments qui stabilisent $Z'_+ \oplus Y_{+,H}$ et L' sa composante de Levi qui stabilise $Z'_- \oplus Y_{-,H}$. On a alors

$$L' = \mathrm{GL}(Z'_+ \oplus Y_{+,H}) \times \widetilde{H}$$

et on a isomorphisme

$$\sigma' \simeq i_{Q'}^{G'}((\pi'_+ \times \sigma_+) \otimes \widetilde{\sigma}).$$

Appliquant encore la proposition 15.1.1, on a $m(\pi, \sigma') = m(\pi, \widetilde{\sigma})$. ∎

15.3. Induction de π et multiplicité II

On reprend ici les hypothèses et notations du paragraphe 15.1 : une décomposition $V = (Y_+ \oplus Y_-) \oplus^\perp \widetilde{V}$, $\pi_+ \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}(Y_+))$, $\widetilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(\widetilde{G})$, $\pi = i_Q^G(\pi_+ \otimes \widetilde{\pi})$ et $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$.

Proposition 15.3.1. — *On a $m(\pi, \sigma) = m(\widetilde{\pi}, \sigma)$.*

Démonstration. — On démontre le résultat par récurrence sur $\dim(V)$.

Si $\dim(V) = 1$ il n'y a rien à dire. Supposons donc le résultat établi pour tout les couples (V', W') avec $\dim(V') < \dim(V)$. Posons

$$V' = Z_+ \oplus Z_- \oplus W,$$

soient G' le groupe unitaire de V', P' le sous-groupe parabolique de G' qui préserve Z_+ et M' la composante de Levi qui préserve Z_-. On a alors un isomorphisme naturel

$$M' \simeq \mathrm{GL}(Z_+) \times H.$$

Soient $\sigma_+ \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}(Z_+))$ et $\pi' = i_{P'}^{G'}(\sigma_+ \otimes \sigma)$. D'après les propositions 15.1.1 et 15.2.1, on a

$$m(\pi, \sigma) = m(\pi, \pi') \quad \text{et} \quad m(\pi, \pi') = m(\pi', \widetilde{\pi}).$$

Enfin d'après l'hypothèse de récurrence appliquée au couple $(V', \widetilde{V})$, on a l'égalité $m(\pi', \widetilde{\pi}) = m(\widetilde{\pi}, \sigma)$, ce qui conclut. ∎

CHAPITRE 16

LE DÉVELOPPEMENT SPECTRAL

On reprend les hypothèses et notations du chapitre 4 :V, W, P, M, U, ξ, etc. Soit $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. Le but de ce chapitre est de donner une expression spectrale de

$$\lim_{N\to\infty} J_N(\theta_\sigma, f)$$

(on renvoie au chapitre 4 pour la définition de l'expression $J_N(\theta_\sigma, f)$).

16.1. La formule

Soit L un Levi de G et $\mathcal{O} \in \{\Pi_{\mathrm{ell}}(L)\}$ une $i\mathcal{A}_{L,F}^*$ orbite de représentations irréductibles elliptiques de $L(F)$. On a une décomposition

$$L \simeq R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_k} \times \widetilde{G}$$

où $\widetilde{G}$ est le groupe unitaire d'un sous-espace hermitien $\widetilde{V}$ de V. Soit $\pi \in \mathcal{O}$, on a une décomposition analogue de π en produit tensoriel

$$\pi \simeq \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_k \otimes \widetilde{\pi}$$

où pour $j = 1, \ldots, k$, π_j est une représentation irréductible de la série discrète de $\mathrm{GL}_{n_j}(E)$ et $\widetilde{\pi}$ est une représentation irréductible elliptique de $\widetilde{G}(F)$. Alors $\widetilde{\pi}$ ne dépend pas du choix de π et avec la notation du paragraphe 3.1, on peut poser

$$t(\mathcal{O}) = t(\widetilde{\pi}).$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$ une représentation irréductible tempérée de $H(F)$. Les espaces hermitiens W et $\widetilde{V}$ sont compatibles ; on peut donc poser

$$m(\mathcal{O}, \sigma) = m(\widetilde{\pi}, \sigma).$$

Definition 16.1.1. — *Soient $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$ une représentation tempérée irréductible de $H(F)$ et $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction très cuspidale. On pose*

$$J_{\mathrm{spec}}(\sigma, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{\min})} |W^L| \cdot |W^G|^{-1} (-1)^{a_L} \sum_{\substack{\mathcal{O} \in \{\Pi_{\mathrm{ell}}(L)\} \\ m(\mathcal{O},\sigma)=1}} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} t(\mathcal{O})^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} J_L^G(\pi_\lambda, f) \mathrm{d}\lambda,$$

où pour chaque orbite $\mathcal{O}$ on a fixé un point base $\pi \in \mathcal{O}$.

Le but de ce chapitre est de prouver le résultat suivant.

Théorème 16.1.2. — *Soient σ et f comme précédemment. Alors on a*

$$\lim_{N \to \infty} J_N(\theta_\sigma, f) = J_{\mathrm{spec}}(\sigma, f).$$

16.2. Utilisation de la formule de Plancherel

On peut exprimer f grâce à la formule de Plancherel-Harish-Chandra. On a l'égalité

$$f(g) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{\min})} |W^L| \cdot |W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}} f_{\mathcal{O}}(g)$$

où, pour $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}$, on a posé

$$f_{\mathcal{O}}(g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda) \operatorname{Tr}\big(i_Q^G(\tau_\lambda, g^{-1}) i_Q^G(\tau_\lambda, f)\big) \mathrm{d}\lambda$$

avec $Q \in \mathcal{P}(L)$ et $\tau \in \mathcal{O}$ quelconques. La fonction $f_{\mathcal{O}}$ appartient à l'espace de Schwarz-Harish-Chandra et elle est nulle pour presque tout $\mathcal{O}$. Cela permet d'obtenir l'expression suivante de ${}^g f^\xi$:

$${}^g f^\xi(h) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{\min})} |W^L| \cdot |W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}} \int_{U(F)} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u) \mathrm{d}u.$$

On a interverti l'intégrale et la double somme. Cela est justifié car l'intégrale

$$\int_{U(F)} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u) \mathrm{d}u$$

est absolument convergente d'après la proposition II.4.5 de [**28**]. Fixons un produit scalaire invariant sur E_σ et une base orthonormale $\mathcal{B}_\sigma$ pour ce produit scalaire. On a alors l'égalité

$$J(\theta_\sigma, f, g) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}_\sigma} \int_{H(F)} \big(\epsilon, \sigma(h)\epsilon\big)\, {}^g f^\xi(h) \mathrm{d}h.$$

Presque tous les termes de cette somme sont nuls. Substituant l'égalité (1), on obtient

$$J(\theta_\sigma, f, g) = \sum_{\epsilon\in\mathcal{B}_\sigma} \int_{H(F)} \big(\epsilon, \sigma(h)\epsilon\big) \sum_{L\in\mathcal{L}(M_{\min})} |W^L|\cdot|W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}} \int_{U(F)} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\,\xi(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h.$$

Pour $\epsilon\in E_\sigma$, $L\in\mathcal{L}(M_{\min})$, $\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}$ et $g\in G(F)$, posons

(2) $$J_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g) = \int_{H(F)\times U(F)} \big(\epsilon, \sigma(h)\epsilon\big) f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\,\xi(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h.$$

Le lemme 12.0.3 et la proposition II.4.5 de [**28**] montrent que cette expression est absolument convergente. On a donc l'égalité

(3) $$J(\theta_\sigma, f, g) = \sum_{\epsilon\in\mathcal{B}_\sigma} \sum_{L\in\mathcal{L}(M_{\min})} \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}} |W^L|\cdot|W^G|^{-1} J_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g).$$

Fixons provisoirement $L\in\mathcal{L}(M_{\min})$ et $\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}$. On a le fait suivant dont la démonstration est tout à fait analogue à celle du point 14.2 (3) (le point crucial étant la centralité de $A(F)$ dans $M(F)$).

(4) *Il existe un entier naturel c_0 tel que pour tout $c\geqslant c_0$, $g\in M(F)K$ et $h\in H(F)$, on ait l'égalité*

$$\int_{U(F)} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u)\,\mathrm{d}u = \int_{U(F)_c} f_{\mathcal{O}}(g^{-1}hug)\xi(u)\,\mathrm{d}u.$$

Fixons $\tau\in\mathcal{O}$ un point base et un parabolique $Q\in\mathcal{P}(L)$. On notera

$$\pi_\lambda = i_Q^G(\tau_\lambda)$$

pour $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ et on réalise toutes ces représentations sur l'espace commun $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. On munit E_τ d'un produit scalaire invariant, alors $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ hérite d'un produit scalaire induit. Soit $K_f\subset K$ un sous-groupe ouvert tel que f soit bi-invariante par K_f et soit $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}$ une base orthonormée de $(\mathcal{K}^G_{Q,\tau})^{K_f}$. Pour tout $g\in G(F)$ on a

$$f_{\mathcal{O}}(g) = [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1} \sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\big(e, \pi_\lambda(g^{-1})\pi_\lambda(f)e\big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Soit c_0 un entier tel que (4) soit vérifié. Pour $c\geqslant c_0$, $g\in M(F)K$ et $\epsilon\in E_\sigma$, remplaçons $f_{\mathcal{O}}$ dans (2) par son expression précédente. Après les changements de variables $h \mapsto h^{-1}$ et $u \mapsto u^{-1}$, on obtient

$$J_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee} : i\mathcal{A}_{L,F}^{\vee}]^{-1} \int_{H(F)\times U(F)_c} (\sigma(h)\epsilon, \epsilon) \sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)(\pi_\lambda(g)e, \pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h.$$

À g fixé, le coefficient $(\pi_\lambda(g)e, \pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)$ est essentiellement majoré par $\Xi^G(hu)$ de façon uniforme en λ. On en déduit que l'expression précédente est absolument convergente ce qui permet de permuter les intégrales et on reconnaît alors l'intégrale intérieure : c'est

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma,c}(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e, \epsilon \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e).$$

Quitte à accroître c_0 c'est aussi $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e, \epsilon \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)$. On a alors

$$J_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee} : i\mathcal{A}_{L,F}^{\vee}]^{-1} \sum_{e\in\mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda) \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e, \epsilon \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)\,\mathrm{d}\lambda.$$

En particulier, si $m(\mathcal{O}, \sigma) = 0$ alors, pour tous $\epsilon \in E_\sigma$ et $g \in M(F)K$, on a

$$J_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g) = 0.$$

Supposons que $m(\mathcal{O}, \sigma) = 1$ et fixons des familles $(\epsilon'_j)_{j=1,\dots,n}$, $(\epsilon_j)_{j=1,\dots,n}$, $(e'_j)_{j=1,\dots,n}$, $(e_j)_{j=1,\dots,n}$, $(\varphi_j)_{j=1,\dots,n}$ vérifiant le 2-b) de la proposition 14.2.2 . Pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{L,F}^*$, $g \in M(F)K$ et $e \in \mathcal{K}_{Q,\tau}^G$ considérons la somme

$$X_\lambda(e, g) = \sum_{\epsilon\in\mathcal{B}_\sigma} \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\sigma}(\epsilon \otimes \pi_\lambda(g)e, \epsilon \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e).$$

Pour $j = 1, \dots, n$ et $c, c' \in \mathbb{N}$ posons

$$X_{\lambda,j,c,c'}(e, g) = \int_{H(F)U(F)_c} \int_{H(F)U(F)_{c'}} (\sigma(h)\epsilon'_j, \epsilon_j)(\pi_\lambda(h'u'g)e, \pi_\lambda(hu)e_i) (e'_j, \pi_\lambda(h'u'g)\pi_\lambda(f)e)\,\overline{\xi}(u)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}h'\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h.$$

C'est une intégrale absolument convergente. Alors la même discussion que dans [**32**, p. 91] montre que pour c et c' assez grand on a

$$X_\lambda(e, g) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\lambda)\, X_{\lambda,j,c,c'}(e, g).$$

On pose

$$J_{L,\mathcal{O}}(\theta_\sigma, f, g) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{B}_\sigma} J_{L,\mathcal{O}}(\epsilon, f, g).$$

Ce que l'on vient de dire implique alors l'égalité

$$J_{L,\mathcal{O}}(\theta_\sigma, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \sum_{j=1}^n \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda) X_{\lambda,j,c,c'}(e,g)\,\mathrm{d}\lambda.$$

D'après (3), on a aussi

$$J(\theta_\sigma, f, g) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_{\min})} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}} |W^G| \cdot |W^L|^{-1} J_{L,\mathcal{O}}(\theta_\sigma, f, g)$$

et $J_N(\theta_\sigma, f)$ est l'intégrale de $J(\theta_\sigma, f, mk)\kappa_N(mk)\delta_P(m)^{-1}$ sur $m \in H(F)\backslash M(F)$ et $k \in K$. Pour $L \in \mathcal{L}(M_{\min})$, $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}$ et $N, C \in \mathbb{N}$ posons

$$\begin{aligned} J_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\sigma, f) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \sum_{j=1}^n \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda) \\ \int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma < C\log(N)}(hu)\big(\sigma(h)\epsilon'_j, \epsilon_j\big) \int_{G(F)} \big(\pi_\lambda(g)e, \pi_\lambda(hu)e_j\big) \\ \big(e'_j, \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e\big)\kappa_N(g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Lemme 16.2.1. — 1) *Cette expression est absolument convergente.*

2) *Il existe C tel pour tout $N \geqslant 2$ on ait la majoration*

$$\Big| J_N(\theta_\sigma, f) - \sum_{\substack{L \in \mathcal{L}(M_{\min}) \\ \mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}}} |W^G| \cdot |W^L|^{-1} J_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\sigma, f) \Big| \ll N^{-1}.$$

Démonstration. — C'est exactement la même que celle du lemme 6.4 de [**32**] où on remplace les majorations 4.3 (6), (7) et (8) de [**32**] par les majorations de la proposition 13.0.9. ∎

On fixe dorénavant un C qui vérifie le 2) du lemme précédent.

16.3. Changement de fonction de troncature

On fixe jusqu'au paragraphe 16.5 les données suivantes :

$$L \in \mathcal{L}(M_{\min}),\ Q \in \mathcal{P}(L),\ \mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\} \text{ et } \tau \in \mathcal{O}.$$

Soit $Y \in \mathcal{A}_{P_{\min}}^+$. On en déduit une $(G, M_{\min})$-famille orthogonale positive

$$\mathcal{Y} = (Y_P)_{P \in \mathcal{P}(M_{\min})}.$$

Soit $g \mapsto u(g, \mathcal{Y})$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $g \in G(F)$ qui s'écrivent $g = k_1 m k_2$ avec $k_1, k_2 \in K$ et $m \in M_{\min}(F)$ qui vérifie

$$\sigma^G_{M_{\min}}(H_{M_{\min}}(m), \mathcal{Y}) = 1.$$

Soient $e', e'' \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ et φ une fonction holomorphe sur un voisinage de $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ dans $\mathcal{A}^*_{L,\mathbb{C}}/i\mathcal{A}^\vee_{L,F}$. Pour $e \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, $g, g' \in G(F)$ et $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ posons

$$\Phi(e, g, g', \lambda) = \big(\pi_\lambda(g)e, \pi_\lambda(g')e'\big)\big(e'', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e\big).$$

On définit alors

$$\Phi_N(g') = \sum_{e \in \mathcal{B}^{K_f}_{\mathfrak{S}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} \phi(\lambda) m(\tau_\lambda) \int_{G(F)} \Phi(e, g, g', \lambda) \kappa_N(g) \,\mathrm{d}g \,\mathrm{d}\lambda,$$

$$\Phi_Y(g') = \sum_{e \in \mathcal{B}^{K_f}_{\mathfrak{S}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} \phi(\lambda) m(\tau_\lambda) \int_{G(F)} \Phi\big(e, g, g', \lambda) u(g, \mathcal{Y}\big) \,\mathrm{d}g \,\mathrm{d}\lambda.$$

Proposition 16.3.1. — *Les deux expressions ci-dessus sont absolument convergentes. Soit R un réel, il existe deux réels $c_1, c_2 > 0$ tels que*

$$\big|\Phi_N(g') - \Phi_Y(g')\big| \ll N^{-R}$$

pour tout $N \geqslant 2$ et tous $g' \in G(F)$, $Y \in \mathcal{A}^+_{P_{\min}}$ vérifiant

$$\sigma(g') \leqslant C \log(N) \quad et \quad c_1 \log(N) \leqslant \alpha(Y) \leqslant c_2 N$$

pour tout $\alpha \in \Delta_{\min}$.

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 6.6 de [**32**] et d'y apporter trois modifications :

▹ Il faut remplacer la majoration 4.3 (2) de [**32**] par la majoration de la proposition 13.0.1.

▹ Pour établir l'analogue du point (5) de la preuve dans [**32**], on n'a besoin que de la propriété suivante sur la fonction de troncature κ_N :

> *Il existe une constante $c_3 > 0$ tel que pour tout $g \in G(F)$ vérifiant $\sigma(g) \leqslant c_3 N$ on a $\kappa_N(g) = 1$*

▹ Il y a une erreur dans la preuve de la proposition 6.6 de [**32**] qui a été corrigée dans [**30**]. L'erreur se trouve dans l'utilisation de l'inégalité (11) pour majorer la fonction f_5. Si la fonction f_5 est seulement C^∞ cela ne suffit pas, car ses coefficients de Fourier ne seront qu'à décroissance rapide. Puisque l'on a supposé ici que la fonction ϕ admet un prolongement holomorphe sur un voisinage de $i\mathcal{A}^*_{L,F}$, la fonction f_4 de la référence admettra elle aussi un prolongement holomorphe dans un tel voisinage. Ainsi les coefficients de Fourier de f_4 seront à décroissance exponentielle. Il suffit alors de remplacer l'inégalité (11) de la référérence par la suivante

(11′) *Pour tout* $c > 0$ *et tous* $x, y \in K_1$, *on a la minoration*

$$\left|\zeta(xm', ym)\right| > c\log(N)$$

pourvu que c_1 *soit assez grand.*

On peut alors majorer f_5 par une puissance négative de N aussi grande que l'on veut, pourvu que c_1 soit assez grand. Avec cette correction mineure la preuve de [**32**] devient correcte. $\square$

16.4. Utilisation des calculs spectraux d'Arthur

Pour tout $\epsilon > 0$ on note $\mathscr{D}(\epsilon)$ l'ensemble des $Y \in \mathscr{A}^+_{P_{\min}}$ tels que

$$\inf\left\{\alpha(Y)\ ;\ \alpha \in \Delta\right\} > \epsilon \sup\left\{\alpha(Y)\ ;\ \alpha \in \Delta\right\}.$$

Fixons une norme $|.|$ sur $\mathscr{A}_{M_{\min}}$. Pour $L' \in \mathscr{L}(L)$, on note $\Lambda^{L'}_{\mathcal{O},\mathrm{ell}}$ l'ensemble des $\lambda \in i\mathscr{A}^*_L$ tels que

$$R^{L'}(\tau_\lambda) \cap W^{L'}(L)_{\mathrm{reg}} \neq \varnothing.$$

Cet ensemble est stable par translation par $i\mathscr{A}^\vee_{L,F} + i\mathscr{A}^*_{L'}$. Pour un tel L' et un tel λ on dispose d'une décomposition

$$i^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda) = \bigoplus_{\zeta \in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee} i^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda, \zeta).$$

Fixons $S' = L'U' \in \mathscr{P}(L')$ et posons

$$Q(S') = (L' \cap Q)U'.$$

On en déduit par induction une décomposition analogue de $E^G_{Q(S'),\tau_\lambda}$ que l'on peut aussi écrire

$$\mathscr{K}^G_{Q(S'),\tau} = \bigoplus_{\zeta \in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee} \mathscr{K}^G_{Q(S'),\tau,\zeta}.$$

On note $\mathrm{proj}_{\lambda,\zeta}$ la projection de $\mathscr{K}^G_{Q(S'),\tau}$ sur $\mathscr{K}^G_{Q(S'),\tau,\zeta}$ par rapport aux autres facteurs. Pour tout $g' \in G(F)$, on pose

$$\Phi(g') = \sum_{L' \in \mathscr{L}(L)} (-1)^{a_{L'}} \sum_{\lambda \in \Lambda^{L'}_{\mathcal{O},\mathrm{ell}}/(i\mathscr{A}^\vee_{L,F} + i\mathscr{A}^*_{L'})} |R^{L'}(\tau_\lambda)| 2^{a_{L'}-a_L} \sum_{\zeta \in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee}$$
$$\int_{i\mathscr{A}^*_{L',F}} \Big(\mathrm{proj}_{\lambda,\zeta} \circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu}) e'', \mathrm{proj}_{\lambda,\zeta} \circ R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\, i^G_Q(\tau_{\lambda+\mu}, g') e' \Big)$$
$$J^G_{L'}(i^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_{\lambda+\mu}, \zeta), f) \varphi(\lambda+\mu)\, \mathrm{d}\mu.$$

Proposition 16.4.1. — *Soient $\epsilon > 0$ et $R \geqslant 1$. Alors on a*

$$\big|\Phi_Y(g') - \Phi(g')\big| \ll \sigma(g')^R\, \Xi^G(g') |Y|^{-R}$$

pour tout $g' \in G(F)$ et tout $Y \in \mathscr{D}(\epsilon) \cap \mathscr{A}_{M_{\min},F}$.

Démonstration. — C'est la même que celle des sections 6.7 et 6.8 de [**32**]. La proposition 6.7 de [**32**] reprend les calculs spectraux d'Arthur pour la formule des traces locale (dans [**6**, p. 69–88]) qui donnent une approximation de notre terme $\Phi_Y(1)$ dans le cas où $\varphi = 1$. Waldspurger montre qu'on peut alors glisser une fonction φ tout le long des calculs d'Arthur et que ceci donne une approximation du terme $\Phi_Y(g')$ même lorsque $g' \neq 1$. Le lemme 6.8 de [**32**] démontre que cette approximation est alors exactement notre terme $\Phi(g')$. Ces deux démonstrations sont tout à fait générales et s'appliquent à des groupes G réductifs connexes généraux sauf le dernier paragraphe de la preuve du lemme 6.8 où il est fait usage de propriétés particulières des R-groupes dans le cas des groupes spéciaux orthogonaux. Ces propriétés sont aussi vérifiées dans le cas unitaire (cf. § 3.2). ∎

16.5. Évaluation d'une limite

Lemme 16.5.1. — *On a l'égalité*

$$\lim_{N\to\infty} J_{L,\mathcal{O},N,C}(\theta_\sigma, f)$$
$$= [i\mathscr{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathscr{A}^\vee_{L,F}]^{-1} \sum_{L' \in \mathscr{L}(L)} (-1)^{a_{L'}} \sum_{\lambda \in \Lambda^{L'}_{\mathcal{O},\mathrm{ell}}/(i\mathscr{A}^\vee_{L,F} + i\mathscr{A}^*_{L'})} \big|R^{L'}(\tau_\lambda)\big| 2^{a_{L'}-a_L}$$
$$\sum_{\substack{\zeta \in R^{L'}(\tau_\lambda)^\vee \\ m(i^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda,\zeta),\sigma)=1}} \int_{i\mathscr{A}^*_{L',F}} J^G_{L'}(i^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_{\lambda+\mu}, \zeta), f)\, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. — Encore une fois c'est exactement la même que celle du lemme 6.9 de [**32**]. Il suffit d'utiliser la majoration du corollaire 13.0.5 (1) à la place de la majoration 4.3 (4) de [**32**], et de remarquer que le théorème 14.3.1 et la proposition 15.3.1 entraînent les analogues des lemmes 5.3 (ii) et 5.4 de [**32**]. ∎

16.6. Preuve du théorème

Il suffit de reprendre le paragraphe 6.10 de [**32**].

Fixons $L' \in \mathcal{L}(M_{\min})$ et $\mathcal{O}' \in \{\Pi_{\mathrm{ell}}(L')\}$. D'après les lemmes 16.2.1 et 16.5.1, il s'agit essentiellement de compter les quadruplets $(L, \mathcal{O}, \lambda, \zeta)$ où

$$L \in \mathcal{L}^{L'}(M_{\min}),\ \mathcal{O} \in \{\Pi_{\mathrm{ell}}(L)\},\ \lambda \in \Lambda^{L'}_{\mathcal{O},\mathrm{ell}}/(i\mathcal{A}^{\vee}_{L,F} + i\mathcal{A}^{*}_{L'}) \text{ et } \zeta \in R^{L'}(\tau_\lambda)^{\vee}$$

(τ est un point base de $\mathcal{O}$), tels que

$$\{i^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda, \zeta)_\mu\ ;\ \mu \in i\mathcal{A}^{*}_{L'}\} = \mathcal{O}'$$

(Q est n'importe quel élément de $\mathcal{P}(L)$). ∎

CHAPITRE 17

UNE FORMULE POUR LA MULTIPLICITÉ

17.1. Le théorème

Soient (V, h_V) et (W, h_W) deux espaces hermitiens compatibles de groupes unitaires respectifs G et H. Soient θ et θ' des quasi-caractères sur $G(F)$ et $H(F)$ respectivement. Supposons que $d_V > d_W$. On reprend alors les notations du chapitre 5. Il y est défini un ensemble $\mathcal{T}$ de tores de H. On pose alors

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta, \theta') = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left| W(H,T) \right|^{-1} \lim_{s \to 0^+} \int_{T(F)} c_{\theta'}(t)\, c_{\theta}(t)\, D^H(t)^{\frac{1}{2}}\, D^G(t)^{\frac{1}{2}}\, \Delta(t)^{s-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Cette expression a un sens d'après les lemmes 5.2.2 et 5.3.1. Si $d_W > d_V$ on pose

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta, \theta') = m_{\mathrm{geom}}(\theta', \theta).$$

Pour $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$ et $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$ on notera

$$\begin{aligned} c_\pi &= c_{\theta_\pi}, & m_{\mathrm{geom}}(\pi, \sigma) &= m_{\mathrm{geom}}(\theta_\pi, \theta_{\sigma^\vee}), \\ c_\sigma &= c_{\theta_\sigma}, & m_{\mathrm{geom}}(\theta, \sigma) &= m_{\mathrm{geom}}(\theta, \theta_{\sigma^\vee}). \end{aligned}$$

Théorème 17.1.1. — *Pour tout* $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$ *et* $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$*, on a l'égalité*

$$m(\pi, \sigma) = m_{\mathrm{geom}}(\pi, \sigma).$$

Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale et $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$. Posons

$$m_{\mathrm{spec}}(f, \sigma) = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\mathrm{ell}}(G) \\ m(\pi, \sigma^\vee) = 1}} t(\pi)^{-1} \theta_\pi(f)$$

(on renvoie au § 3.2, p. 35, pour la définition du terme $t(\pi)$). Le théorème précédent découlera alors du théorème suivant.

Théorème 17.1.2. — *Soient f et σ comme ci-dessus. On a*

$$m_{\mathrm{spec}}(f, \sigma) = m_{\mathrm{geom}}(I\theta_f, \sigma).$$

Ces deux théorèmes seront démontrés aux §§ 17.5 et 17.6.

17.2. Induction pour la multiplicité géométrique

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Pour θ un quasi-caractère de $\mathrm{GL}_k(E)$ on pose

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta) = c_{\theta,\mathcal{O}_k}(1),$$

où $\mathcal{O}_k$ est l'unique orbite nilpotente régulière de $\mathfrak{gl}_k(E)$. Remarquons d'abord que ce terme ne dépend que de la restriction de θ au sous-ensemble $\{H_{R_{E/F}\,\mathrm{GL}_k} = 0\}$ de $\mathrm{GL}_k(E)$, car ce sous-ensemble est un voisinage de 1.

Fixons deux espaces hermitiens compatibles (V, h_V) et (W, h_W) de groupes unitaires respectifs G et H et soit L un Levi de G. On a alors une décomposition

$$L \simeq R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_k} \times \widetilde{G}$$

où $\widetilde{G}$ est le groupe unitaire d'un sous-espace hermitien $\widetilde{V}$ de V. Soit θ_j un quasi-caractère de $R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_j}$, avec $j = 1, \ldots, k$, et $\widetilde{\theta}$ un quasi-caractère de $\widetilde{G}$. On note

$$\theta^L = \theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_k \otimes \widetilde{\theta}$$

le quasi-caractère de $L(F)$ donné par

$$\theta^L(g_1, \ldots, g_k, \tilde{g}) = \theta_1(g_1) \cdots \theta_k(g_k)\widetilde{\theta}(\tilde{g}).$$

Enfin, on pose

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta^L, \rho) = m_{\mathrm{geom}}(\widetilde{\theta}, \rho)\, m_{\mathrm{geom}}(\theta_1) \cdots m_{\mathrm{geom}}(\theta_k).$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Temp}(H)$.

Lemme 17.2.1. — *Supposons que $\theta = \mathrm{Ind}_L^G(\theta^L)$. Alors on a*

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta, \sigma) = m_{\mathrm{geom}}(\theta^L, \sigma).$$

Démonstration. — Posons $n = n_1 + \cdots + n_k$. Fixons une injection (W, h_W) dans (V, h_V). On distingue trois cas.

▹ *Premier cas* : $d_V > d_{\widetilde{V}} > d_W$. — Quitte à conjuguer L, on peut supposer que W est contenu dans $\widetilde{V}$. Les ensembles de tores à partir desquels sont définis

$m_{\mathrm{geom}}(\theta,\sigma)$ et $m_{\mathrm{geom}}(\widetilde{\theta},\sigma)$ sont alors les mêmes : c'est l'ensemble noté $\mathcal{T}$ dans le chapitre 5. On a par définition

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta,\sigma)=\sum_{T\in\mathcal{T}}\left|W(H,T)\right|^{-1}\lim_{s\to 0^+}\int_{T(F)}c_{\sigma^\vee}(t)\,c_\theta(t)\,D^H(t)^{\frac12}\,D^G(t)^{\frac12}\,\Delta(t)^{s-\frac12}\,\mathrm{d}t,$$

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta^L,\sigma)=c_{\theta_1,\mathcal{O}_{n_1}}(1)\cdots c_{\theta_k,\mathcal{O}_{n_k}}(1)\sum_{T\in\mathcal{T}}\left|W(H,T)\right|^{-1}\lim_{s\to 0^+}\int_{T(F)}c_{\sigma^\vee}(t)\,c_{\widetilde{\theta}}(t)\,D^H(t)^{\frac12}\,D^{\widetilde{G}}(t)^{\frac12}\,\Delta(t)^{s-\frac12}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $T\in\mathcal{T}$. On a alors une décomposition orthogonale

$$W=W'\oplus W''$$

telle que T soit un tore maximal anisotrope de H' le groupe unitaire de W'. On note H'', G'' et $\widetilde{G}''$ les groupes unitaires des supplémentaires orthogonaux de W' dans W, V et $\widetilde{V}$ respectivement. Rappelons que $T_\natural$ est l'ensemble des $t\in T$ dont toutes les valeurs propres sur W' sont distinctes et différentes de 1. On a $Z_G(t)=G''\times T$ pour tout $t\in T_\natural(F)$. Il suffit de montrer que pour tout $t\in T_\natural(F)$ on a

$$D^G(t)^{\frac12}\,c_\theta(t)=c_{\widetilde{\theta}}(t)\,c_{\theta_1,\mathcal{O}_{n_1}}(1)\cdots c_{\theta_k,\mathcal{O}_{n_k}}(1)\,D^{\widetilde{G}}(t)^{\frac12}. \tag{1}$$

Rappelons que l'on a

$$c_\theta(t)=\frac{1}{|\,\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}|}\sum_{\mathcal{O}\in\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}}c_{\theta,\mathcal{O}}(t).$$

Soit $\mathcal{O}\in\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}$. Le lemme 2.3 de **[32]** permet d'exprimer $c_{\theta,\mathcal{O}}(t)$ à partir de θ^L. Explicitons la formule dans notre cas particulier. Il y figure une somme sur $\mathcal{X}^L(t)$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $L(F)$ des éléments de $L(F)$ conjugués à t par $G(F)$.

(2) *On peut prendre* $\mathcal{X}^L(t)=\{t\}$.

En effet, soit $g\in G(F)$ tel que $gtg^{-1}\in L(F)$. Alors A_L commute à gtg^{-1} donc $A_L\subset gZ_G(t)g^{-1}=g(G''\times T)g^{-1}$. Le tore T étant anisotrope on en déduit $A_L\subset gG''g^{-1}$. L'intersection des noyaux des $a-1$ dans V pour $a\in A_L(F)$ est $\widetilde{V}$ d'où $gW'\subset\widetilde{V}$. Comme on a aussi $W'\subset\widetilde{V}$, d'après le théorème de Witt quitte à multiplier g par un élément de $\widetilde{G}(F)\subset L(F)$, on peut supposer que $gW'=W'$. Alors g stabilise aussi V'' et si on note g' la restriction de g à W' on a $gtg^{-1}=g'tg'^{-1}$ et $g'\in H'(F)\subset L(F)$. Ceci prouve le point (2).

La deuxième somme du lemme 2.3 de [**32**] porte alors sur $\Gamma_t/G_t(F)$ où $\Gamma_t = Z_{G(F)}(t)$ et on a vu que ce centralisateur est connexe. La deuxième somme est donc elle aussi triviale. Enfin la dernière somme porte sur les orbites $\mathcal{O}' \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{l}_t)$ telles que $[\mathcal{O} : \mathcal{O}'] = 1$, c'est-à-dire telles que $\mathcal{O}$ soit dans l'induite de $\mathcal{O}'$. On a

$$\begin{gathered} L_t = R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_k} \times \widetilde{G}'' \times T, \\ \mathrm{Nil}(\mathfrak{l}_t) = \mathrm{Nil}\left(\mathfrak{gl}_{n_1}(E)\right) \times \cdots \times \mathrm{Nil}\left(\mathfrak{gl}_{n_k}(E)\right) \times \mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}''). \end{gathered}$$

De plus si $[\mathcal{O} : \mathcal{O}'] = 1$, alors l'orbite nilpotente $\mathcal{O}'$ est régulière. Comme

$$\mathrm{Nil}\left(\mathfrak{gl}_{n_j}(E)\right)_{\mathrm{reg}} = \{\mathcal{O}_{n_j}\}$$

pour $j = 1, \ldots, k$, cette dernière somme porte en fait sur les $\mathcal{O}' \in \mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}'')_{\mathrm{reg}}$ telles que $[\mathcal{O} : \mathcal{O}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{n_k} \times \mathcal{O}'] = 1$. On vérifie aisément à partir de la description en 3.3 des orbites nilpotentes régulières d'un groupe unitaire qu'il existe une unique telle orbite $\mathcal{O}'$ et que l'application $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}'$ est une bijection entre $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}'')_{\mathrm{reg}}$ et $\mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}'')_{\mathrm{reg}}$.

Enfin le terme $[Z_L(t)(F) : L_t(F)]$ apparaissant dans le lemme 2.3 de [**32**] est trivial car

$$Z_L(t) = R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_k} \times \widetilde{G}'' \times T = L_t.$$

Finalement on obtient

$$\sum_{\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}} c_{\theta,\mathcal{O}}(t) = D^G(t)^{-\frac{1}{2}} D^L(t)^{\frac{1}{2}} c_{\theta_1,\mathcal{O}_{n_1}}(1) \cdots c_{\theta_k,\mathcal{O}_{n_k}}(1) \sum_{\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}''(F))_{\mathrm{reg}}} c_{\widetilde{\theta},\mathcal{O}}(t).$$

Puisque $D^L(t) = D^{\widetilde{G}}(t)$ et $|\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}| = |\mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}''(F))_{\mathrm{reg}}|$, on obtient l'égalité (1), ce qu'il nous fallait.

▹ *Deuxième cas* : $d_V > d_W > d_{\widetilde{V}}$. — À nouveau, quitte à conjuguer L, on peut supposer que $\widetilde{V} \subset W$. Les ensembles de tores définissant $m_{\mathrm{geom}}(\theta, \sigma)$ et $m_{\mathrm{geom}}(\widetilde{\theta}, \sigma)$ sont cette fois différents. On les note $\mathcal{T}$ et $\widetilde{\mathcal{T}}$ respectivement : ce sont des classes de représentants dans des ensembles de tores $\underline{\mathcal{T}}$ et $\underline{\widetilde{\mathcal{T}}}$ pour l'action par conjugaison de $H(F)$ et $\widetilde{G}(F)$ respectivement. On a alors

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta,\sigma) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \left|W(H,T)\right|^{-1} \lim_{s\to 0^+} \int_{T(F)} c_{\sigma^\vee}(t)\, c_\theta(t)\, D^H(t)^{\frac{1}{2}}\, D^G(t)^{\frac{1}{2}}\, \Delta(t)^{s-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t,$$

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta^L,\sigma) = c_{\theta_1,\mathcal{O}_{n_1}}(1)\cdots c_{\theta_k,\mathcal{O}_{n_k}}(1) \sum_{T\in\widetilde{\mathcal{T}}} \left|W(\widetilde{G},T)\right|^{-1}$$
$$\lim_{s\to 0^+} \int_{T(F)} c_{\sigma^\vee}(t)\, c_{\widetilde{\theta}}(t)\, D^{\widetilde{G}}(t)^{\frac{1}{2}}\, D^H(t)^{\frac{1}{2}}\, \Delta(t)^{s-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Notons $m_T(\theta,\sigma)$ le terme correspondant à $T\in\mathcal{T}$ dans la première somme.

(3) *Si $T\in\mathcal{T}$ n'est conjugué à aucun élément de $\widetilde{\mathcal{T}}$ par $H(F)$ alors $m_T(\theta,\sigma)=0$.*

Soit

$$W = W'_T \oplus W''_T$$

la décomposition orthogonale associée à T et soit $t\in T(F)$ en position générique. Il suffit de montrer que t n'est conjugué à aucun élément de $L(F)$ par $G(F)$ car alors t n'est pas dans le support de $\theta = \mathrm{Ind}_L^G(\theta^L)$. Or si $g\in G(F)$ est tel que $gtg^{-1}\in L(F)$ alors par le même raisonnement que pour (2), on a

$$gW'_T \subset \widetilde{V} \subset W.$$

D'après le théorème de Witt, il existe $h\in H(F)$ tel que $hW'_T = gW'_T \subset \widetilde{V}$. Mais alors $hTh^{-1}\in\widetilde{\mathcal{T}}$, ce qui contredit l'hypothèse.

(4) *Si $T\in\mathcal{T}$ est conjugué par $H(F)$ à un élément $T'\in\widetilde{\mathcal{T}}$, alors cet élément est unique et on a $|W(H,T)| = |W(\widetilde{G},T')|$.*

Soient $T_1,T_2\in\widetilde{\mathcal{T}}$ et $h\in H(F)$ tel que $hT_1h^{-1}=T_2$. On a des décompositions orthogonales

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}'_1 \oplus \widetilde{V}''_1 \quad \text{et} \quad \widetilde{V} = \widetilde{V}'_2 \oplus \widetilde{V}''_2$$

associées à T_1 et T_2 respectivement. On a alors

$$h\widetilde{V}'_1 = \widetilde{V}'_2.$$

D'après le théorème de Witt, quitte à multiplier h par un élément de $\widetilde{G}(F)$, on peut supposer que $\widetilde{V}'_1 = \widetilde{V}'_2$. Soit h' la restriction de h à $\widetilde{V}'_1$; on a alors

$$h'T_1h'^{-1} = T_2 \quad \text{et} \quad h'\in\widetilde{G}(F),$$

ce qui prouve le premier point. Soient $T'\in\widetilde{\mathcal{T}}$ et $\widetilde{V} = \widetilde{V}'\oplus\widetilde{V}''$ la décomposition orthogonale associée. On note W'' le supplémentaire orthogonal de $\widetilde{V}'$ dans W

et H', $\widetilde{G}''$ H'' les groupes unitaires de $\widetilde{V}'$, $\widetilde{V}''$ et W'' respectivement. Pour établir le deuxième point il suffit de remarquer que l'on a les égalités

$$\mathrm{Norm}_{H(F)}(T') = H'' \times \mathrm{Norm}_{H'(F)}(T), \quad \mathrm{Norm}_{\widetilde{G}(F)}(T') = \widetilde{G}'' \times \mathrm{Norm}_{H'(F)}(T),$$

d'où l'on tire des isomorphismes $W(H,T') \simeq W(H',T) \simeq W(\widetilde{G},T')$.

D'après les points (3) et (4), on peut faire porter la somme définissant $m_{\mathrm{geom}}(\theta,\sigma)$ sur $T \in \widetilde{\mathcal{T}}$. Soient $T \in \widetilde{\mathcal{T}}$ un tel tore, $\widetilde{V} = \widetilde{V}' \oplus \widetilde{V}''$ la décomposition orthogonale associée à T, V'' l'orthogonal de $\widetilde{V}'$ dans V et $\widetilde{G}''$, G'' les groupes unitaires de $\widetilde{V}''$ et V'' respectivement. D'après (4), pour établir l'égalité voulue, il suffit de voir que pour $t \in T_\natural(F)$, on a

$$c_\theta(t)D^G(t)^{\frac{1}{2}} = c_{\widetilde{\theta}}(t)c_{\theta_1,\mathcal{O}_{n_1}}(1)\ldots c_{\theta_k,\mathcal{O}_{n_k}}(1)D^{\widetilde{G}}(t)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

On a toujours

$$c_\theta(t) = \frac{1}{|\,\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}|}\sum_{\mathcal{O}\in\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}} c_{\theta,\mathcal{O}}(t).$$

Soit $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''(F))_{\mathrm{reg}}$ et exprimons $c_{\theta,\mathcal{O}}(t)$ à partir du lemme 2.3 de [**32**]. Le même raisonnement que dans le premier cas montre que l'on a $\Gamma_t = G_t(F)$ et que l'on peut prendre $\mathcal{X}^L(t) = \{t\}$. De plus, si $\widetilde{V} \neq 0$, il existe une unique orbite $\mathcal{O}' \in \mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}'')_{\mathrm{reg}}$ telle que $[\mathcal{O} : \mathcal{O}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{n_k} \times \mathcal{O}'] = 1$ et l'application $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}'$ est une bijection de $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}'')_{\mathrm{reg}}$ sur $\mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}'')_{\mathrm{reg}}$. Si $\widetilde{V} = 0$, alors $\mathrm{Nil}(\widetilde{\mathfrak{g}}'')_{\mathrm{reg}}$ ne contient qu'une seule orbite $\mathcal{O}'$ et pour toute orbite $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}'')_{\mathrm{reg}}$ on a $[\mathcal{O} : \mathcal{O}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{n_k} \times \mathcal{O}'] = 1$. Dans tout les cas, on en déduit que

$$c_\theta(t) = c_{\widetilde{\theta}}(t)\, c_{\theta_1,\mathcal{O}_{n_1}}(1) \cdots c_{\theta_k,\mathcal{O}_{n_k}}(1)\, D^G(t)^{-\frac{1}{2}}\, D^L(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $D^L(t) = D^{\widetilde{G}}(t)$, c'est l'égalité (5).

▹ *Troisième cas* : $d_W > d_V > d_{\widetilde{V}}$. — On peut trouver une décomposition orthogonale

$$W = (Z_+ \oplus Z_-) \oplus D \oplus V,$$

où D est une droite et Z_+, Z_- sont deux sous-espaces totalement isotropes. Soit D' une droite munie d'une forme hermitienne opposée à h_D. Considérons l'espace hermitien V' somme orthogonale de W et D' et notons G' son groupe unitaire. Alors V' est somme orthogonale de $Z'_+ \oplus Z'_-$ et de V où Z'_+ et Z'_- sont totalement isotropes. Posons

$$L' = \mathrm{GL}(Z'_+) \times G.$$

C'est naturellement un sous-groupe de Levi de G'. Soit $\mathcal{O}_{GL}$ l'unique orbite nilpotente régulière de $\mathfrak{gl}(Z'_+)$ et θ_{GL} un quasi-caractère de $\mathrm{GL}(Z'_+)$ tel que $c_{\theta_{GL},\mathcal{O}_{GL}}(1) = 1$ (il en existe). Posons

$$\theta' = \mathrm{Ind}_{L'}^{G'}(\theta_{GL} \otimes \theta).$$

D'après le deuxième cas on a $m_{\mathrm{geom}}(\theta, \sigma) = m_{\mathrm{geom}}(\theta', \sigma)$. Soit

$$L'' = \mathrm{GL}(Z'_+) \times L.$$

C'est naturellement un sous-groupe de Levi de G'. Puisque $\theta = \mathrm{Ind}_L^G(\theta^L)$, on a aussi $\theta' = \mathrm{Ind}_{L''}^{G'}(\theta_{GL} \otimes \theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_k \otimes \widetilde{\theta})$. Appliquant à nouveau le deuxième cas, on obtient l'égalité voulue □

17.3. Pseudo-coefficients

Soit (V, h_V) un espace hermitien de groupe unitaire G. Soient L un sous-groupe de Levi de G et τ une représentation irréductible de la série discrète de $L(F)$ telle que

$$R(\tau) \cap W(L)_{\mathrm{reg}} \neq \varnothing.$$

On a vu dans le paragraphe 3.1 qu'alors $R(\tau) \cap W(L)_{\mathrm{reg}}$ ne contient qu'un seul élément que l'on avait noté t. Pour tout $\zeta \in R(\tau)^\vee$, on pose

$$\pi(\zeta) = i_Q^G(\tau, \zeta),$$

où $Q \in \mathcal{P}(L)$. Les considérations des paragraphes 7.3 et 7.4 de [**32**] valent toujours car elles n'utilisaient que le fait que $A_G = \{1\}$. En particulier, on a :

Lemme 17.3.1. — *Il existe une fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$ vérifiant*

1) $I\theta_f = \sum_{\zeta \in R(\tau)^\vee} \zeta(t)\theta_{\pi(\zeta)}$,

2) $\theta_{\pi(\zeta)^\vee}(f) = \zeta(t)t(\pi(\zeta)^\vee)$ *pour tout* $\zeta \in R(\tau)^\vee$,

3) $\theta_{\sigma^\vee}(f) = 0$ *pour tout* $\sigma \in \mathrm{Temp}(G)$ *qui n'est pas l'une des représentations* $\pi(\zeta)$.

On définit $T_{\mathrm{ell}}(G)$ comme l'ensemble des représentations virtuelles tempérées de $G(F)$ de la forme

$$\sum_{\zeta \in R(\tau)^\vee} \zeta(t)\, \pi(\zeta),$$

où τ est comme précédemment.

17.4. Le cas du groupe linéaire

Soient $k \geqslant 1$ un entier et $G = R_{E/F}\,\mathrm{GL}_k$. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. Posons

$$m_{\mathrm{spec}}(f) = \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{\mathrm{ell}}(G)\}} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\widetilde{\mathcal{A}}_{G,F}^\vee]^{-1}\theta_\pi(f\mathbf{1}_{H_G=0}),$$

où on a fixé un point base π dans chaque orbite.

Lemme 17.4.1. — *Pour toute fonction cuspidale $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a l'égalité*

$$m_{\mathrm{geom}}(I\theta_f) = m_{\mathrm{spec}}(f).$$

Démonstration. — C'est le lemme 7.6 de [**32**]. ∎

17.5. Le théorème 17.1.2 implique le théorème 17.1.1

Supposons le théorème 17.1.2 vérifié et montrons que le théorème 17.1.1 l'est aussi. Le résultat est établi par récurrence. On veut montrer que pour tout $(\pi,\sigma) \in \mathrm{Temp}(G)\times\mathrm{Temp}(H)$, on a

$$m_{\mathrm{geom}}(\pi,\sigma) = m(\pi,\sigma).$$

Fixons σ. On peut étendre la définition des multiplicités $m(.,\sigma)$ et $m_{\mathrm{geom}}(.,\sigma)$ par linéarité à l'ensemble des représentations virtuelles tempérées. Il suffit de montrer l'égalité sur une famille génératrice de cet espace. Une telle famille est formée par l'union de $T_{\mathrm{ell}}(G)$ et de l'ensemble des représentations tempérées qui sont des induites propres paraboliques de représentations tempérées irréductibles.

Traitons d'abord le cas où π est une induite propre. On peut alors trouver un sous-groupe de Levi L de la forme

$$R_{E/F}\,\mathrm{GL}_k \times \widetilde{G},$$

où $\widetilde{G}$ est le groupe unitaire d'un sous-espace hermitien $\widetilde{V}$ de V, un parabolique $Q \in \mathcal{P}(L)$ et une représentation

$$\mu\otimes\widetilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(L) = \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_k(E))\times\mathrm{Temp}(\widetilde{G}),$$

de sorte que $\pi \simeq i_Q^G(\mu\otimes\widetilde{\pi})$. D'après la proposition 15.3.1, on a alors

$$m(\pi,\sigma) = m(\widetilde{\pi},\sigma).$$

D'après le lemme 17.2.1 on a $m_{\mathrm{geom}}(\pi,\sigma) = m_{\mathrm{geom}}(\widetilde{\pi},\sigma)c_{\theta_\mu,\mathcal{O}_k}(1)$. D'après un résultat de Rodier [**24**], le coefficient $c_{\theta_\mu,\mathcal{O}_k}(1)$ vaut 1 si μ admet un modèle de Whittaker et 0 sinon. Puisque μ est tempérée, μ admet un modèle de

Whittaker et ce coefficient vaut 1. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $m(\widetilde{\pi},\sigma)=m_{\mathrm{geom}}(\widetilde{\pi},\sigma)$. D'où l'égalité $m(\pi,\sigma)=m_{\mathrm{geom}}(\pi,\sigma)$.

Il reste à établir l'égalité pour $\pi\in T_{\mathrm{ell}}(G)$. On peut trouver L et τ comme dans le § 17.3 tels qu'avec les notations de ce paragraphe on ait

$$\pi=\sum_{\zeta\in R(\tau)^\vee}\zeta(t)\pi(\zeta).$$

Soit $f\in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale vérifiant les conclusions du lemme 17.3.1. On a alors

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{spec}}(f,\sigma)&=\sum_{\substack{\pi'\in\Pi_{\mathrm{ell}}(G)\\ m(\pi',\sigma^\vee)=1}}t(\pi')^{-1}\,\theta_{\pi'}(f)\\&=\sum_{\zeta\in R(\tau)^\vee}m(\pi(\zeta)^\vee,\sigma^\vee)\,\zeta(t)\\&=\sum_{\zeta\in R(\tau)^\vee}m(\pi(\zeta),\sigma)\,\zeta(t)\\&=m(\pi,\sigma),\end{aligned}$$

où à la troisième ligne, on a utilisé le lemme 15.0.1. Enfin, d'après le premier point du lemme 17.3.1, on a aussi $I\theta_f=\theta_\pi$ d'où $m_{\mathrm{geom}}(I\theta_f,\sigma)=m_{\mathrm{geom}}(\pi,\sigma)$. Le théorème 17.1.2 appliqué à f et σ donne alors l'égalité voulue.

17.6. Preuve du théorème 17.1.2

La démonstration de ce théorème procède aussi par récurrence. Les multiplicités $m_{\mathrm{geom}}(I\theta_f,\sigma)$ et $m_{\mathrm{spec}}(f,\sigma)$ vues comme distributions en f sont invariantes. D'après le lemme 1.8.1, on peut donc supposer f très cuspidale. Les théorèmes 5.4.1 et 16.1.2 calculent de deux façons la limite lorsque N tend vers l'infini de $J_N(\theta_{\sigma^\vee},f)$. Ces deux expressions sont donc égales, autrement dit on a $J_{\mathrm{geom}}(\theta_{\sigma^\vee},f)=J_{\mathrm{spec}}(\sigma^\vee,f)$. Par définition, on a

$$J_{\mathrm{geom}}(\theta_{\sigma^\vee},f)=m_{\mathrm{geom}}(\theta_f,\sigma),$$

$$J_{\mathrm{spec}}(\sigma^\vee,f)=\sum_{L\in\mathscr{L}(M_{\min})}|W^L|\cdot|W^G|^{-1}(-1)^{a_L}\,J_{\mathrm{spec},L}(\sigma^\vee,f),$$

où on a posé

$$J_{\mathrm{spec},L}(\sigma^\vee,f)=\sum_{\substack{\mathcal{O}\in\{\Pi_{\mathrm{ell}}(L)\}\\ m(\mathcal{O},\sigma^\vee)=1}}[i\mathscr{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathscr{A}_{L,F}^\vee]^{-1}t(\mathcal{O})^{-1}\int_{i\mathscr{A}_{L,F}^*}J_L^G(\pi_\lambda,f)\,\mathrm{d}\lambda.$$

On reconnaît $J_{\mathrm{spec},G}(\sigma^\vee, f)$: c'est $m_{\mathrm{spec}}(f,\sigma)$. Plus généralement, soit L appartenant à $\mathcal{L}(M_{\min})$. Reprenons les notations et les résultats d'Arthur rappelés dans le § 1.8. On pose

$$f_L = \phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L=0}.$$

C'est une fonction cuspidale de $L(F)$. Puisqu'on a fixé les mesures de sorte que $i\widetilde{\mathcal{A}}^*_{L,F}$ soit de mesure 1, l'égalité § 1.8 (1), nous donne

$$J_{\mathrm{spec},L}(\sigma^\vee, f) = \sum_{\substack{\mathcal{O}\in\{\Pi_{\mathrm{ell}}(L)\}\\ m(\mathcal{O},\sigma^\vee)=1}} [i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\widetilde{\mathcal{A}}^\vee_{L,F}]^{-1} t(\mathcal{O})^{-1}\theta_\pi(f_L).$$

Le sous-groupe de Levi L admet une décomposition

$$L \simeq R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_1}\times\cdots\times R_{E/F}\,\mathrm{GL}_{n_k}\times\widetilde{G},$$

où $\widetilde{G}$ est le groupe unitaire d'une sous-espace hermitien $\widetilde{V}$ de V. L'espace des fonctions cuspidales sur $L(F)$ est produit tensoriel des espaces des fonctions cuspidales sur les $\mathrm{GL}_{n_j}(E)$ et de l'espace de fonctions cuspidales sur $\widetilde{G}(F)$. On définit sur cet espace la forme linéaire $m_{\mathrm{spec}}(.,\sigma)$ comme le produit tensoriel des formes linéaires m_{spec} sur les $\mathrm{GL}_{n_j}(E)$ et de la forme linéaire $m_{\mathrm{spec}}(.,\sigma)$ sur $\widetilde{G}(F)$. On vérifie alors aisément l'égalité

$$J_{\mathrm{spec},L}(\sigma^\vee, f) = m_{\mathrm{spec}}(f_L,\sigma).$$

Si $L\neq G$, on a aussi

$$m_{\mathrm{spec}}(f_L,\sigma) = m_{\mathrm{geom}}(I\theta_{f_L},\sigma).$$

En effet, il suffit de vérifier l'égalité sur les tenseurs purs et c'est alors une conséquence du lemme 17.4.1 et de l'hypothèse de récurrence sur les espaces compatibles $\widetilde{V}$ et W. On a donc l'égalité

$$(1)\qquad m_{\mathrm{spec}}(f,\sigma) = m_{\mathrm{geom}}(\theta_f,\sigma) - \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}(M_{\min})\\ L\neq G}} |W^L|\cdot|W^G|^{-1}(-1)^{a_L}\, m_{\mathrm{geom}}(I\theta_{f_L},\sigma).$$

D'après le lemme 1.8.2, on a l'égalité

$$m_{\mathrm{geom}}(\theta_f,\sigma) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M_{\min})} |W^L|\cdot|W^G|^{-1}(-1)^{a_L}\, m_{\mathrm{geom}}\big(\mathrm{Ind}_L^G(I\theta_{\phi_L(f)}),\sigma\big).$$

D'après le lemme 17.2.1, pour tout $L\in\mathcal{L}(M_{\min})$, on a

$$m_{\mathrm{geom}}\big(\mathrm{Ind}_L^G(I\theta_{\phi_L(f)}),\sigma\big) = m_{\mathrm{geom}}(I\theta_{\phi_L(f)},\sigma).$$

Le quasi-caractère $I\theta_{\phi_L(f)}$ est la somme des quasi caractères $I\theta_{\phi_L(f)\mathbf{1}_{H_L}=Z}$ pour $Z \in \mathcal{A}_{L,F}$. D'après une remarque faite au début du paragraphe 17.2, seul le terme correspondant à $Z = 0$ intervient de façon non nulle dans $m_{\text{geom}}(I\theta_{\phi_L(f)}, \sigma)$. On a donc $m_{\text{geom}}(I\theta_{\phi_L(f)}, \sigma) = m_{\text{geom}}(I\theta_{f_L}, \sigma)$. La plupart des termes de l'égalité (1) se simplifient et on obtient l'égalité voulue

$$m_{\text{spec}}(f, \sigma) = m_{\text{geom}}(I\theta_f, \sigma).$$ ∎

CHAPITRE 18

UNE APPLICATION À LA CONJECTURE DE GROSS-PRASAD

18.1. Propriétés des L-paquets tempérés pour les groupes unitaires

On reprend la situation du chapitre 4. On note d la dimension de V et d_W celle de W. On suppose désormais G et H quasi-déployés et on affecte les objets que l'on avait définis d'un indice i : G_i, H_i, V_i, W_i, etc. Il existe à isomorphisme près un unique espace hermitien V_a non isomorphe à V_i et de même dimension que V_i.

Si $d_W \geqslant 1$, il existe aussi un unique espace hermitien W_a non isomorphe à W_i et de même dimension que W_i. Si $d_W = 0$, on pose simplement $W_a = 0$. Notons G_a et H_a les groupes unitaires de V_a et W_a respectivement. Dans le cas où $d_W \geqslant 1$, les espaces hermitiens V_a et $Z \oplus^\perp D \oplus^\perp W_a$ sont isomorphes et on fixe un tel isomorphisme. Pour tous $\pi \in \mathrm{Temp}(G_a)$, $\sigma \in \mathrm{Temp}(H_a)$, on dispose donc de la multiplicité $m(\pi, \sigma)$ (indépendante de l'isomorphisme choisi).

Si $d_W = 0$, il n'existe alors pas d'isomorphisme entre V_a et $Z \oplus D \oplus W_a$ et pour tous $\pi \in \mathrm{Temp}(G_a)$, $\sigma \in \mathrm{Temp}(H_a)$ on pose $m(\pi, \sigma) = 0$.

On affectera d'un indice a les objets définis à partir du couple (V_a, W_a). Fixons un isomorphisme entre les $E \otimes_F \overline{F}$-espaces hermitiens $V_i \otimes_F \overline{F}$ et $V_a \otimes_F \overline{F}$. On obtient alors un isomorphisme (sur $\overline{F}$) entre G_i et G_a qui est bien défini à conjugaison près. Par conséquent, la bijection déduite

$$G_{a,\mathrm{reg}}/\,\mathrm{conj} \simeq G_{i,\mathrm{reg}}/\,\mathrm{conj}$$

entre les classes de conjugaisons régulières ne dépend pas de l'isomorphisme choisi. Par restriction aux classes de conjugaisons stables dans $G_{a,\mathrm{reg}}(F)$, on aboutit à une injection canonique

$$G_{a,\mathrm{reg}}(F)/\,\mathrm{stconj} \hookrightarrow G_{i,\mathrm{reg}}(F)/\,\mathrm{stconj},$$

où $G_{a,\mathrm{reg}}(F)/\,\mathrm{stconj}$, respectivement $G_{i,\mathrm{reg}}(F)/\,\mathrm{stconj}$, désigne l'ensemble des classes de conjugaison stable (i.e. pour la conjugaison par $G_a(\overline{F})$) dans $G_{a,\mathrm{reg}}(F)$, respectivement dans $G_{i,\mathrm{reg}}(F)$. Notons $\gamma_a \mapsto \gamma_i$ cette injection. Soit θ une fonction sur $G_{i,\mathrm{reg}}(F)$ constante sur les classes de conjugaison stable (on dit alors que θ est *stable*). On définit le transfert de θ à $G_a(F)$ comme la fonction θ' définie sur $G_{a,\mathrm{reg}}(F)/\,\mathrm{stconj}$ par

$$\theta'(\gamma_a) = \theta(\gamma_i)$$

pour tout $\gamma_a \in G_{a,\mathrm{reg}}(F)/\,\mathrm{stconj}$. On définit de la même façon le transfert d'une fonction stable sur $H_{i,\mathrm{reg}}(F)$ à $H_a(F)$.

Comme expliqué dans l'introduction, à la suite du travail monumental d'Arthur [**8**], la correspondance de Langlands locale pour les groupes unitaires a récemment été démontrée par Mok [**23**] et Kaletha, Minguez, Shin et White [**21**].

On peut résumer les résultats principaux de ces articles de la façon informelle suivante : il existe des décompositions de $\mathrm{Temp}(G_i)$ et $\mathrm{Temp}(G_a)$ en sous-ensembles finis disjoints appelés L-paquets qui vérifient un certain nombre de propriétés (notamment endoscopiques) les caractérisant uniquement.

Comme nous n'aurons pas besoin de toute la puissance de la correspondance de Langlands, nous n'extrayons de [**23**] et [**21**] que les propriétés des L-paquets qui nous seront utiles. Celles dont nous avons besoin sont les suivantes (cf. theorem 2.5.1 et corollary 9.2.4 de [**23**] et theorem 1.6.1 de [**21**]) :

1) Si Π est un L-paquet de $\mathrm{Temp}(G_i)$ ou $\mathrm{Temp}(G_a)$ alors $\theta_\Pi = \sum_{\pi\in\Pi}\theta_\pi$ est une distribution stable.
2) Il existe une application injective des L-paquets de $\mathrm{Temp}(G_a)$ dans les L-paquets de $\mathrm{Temp}(G_i)$ qui vérifie les deux conditions suivantes :
   (a) Si le L-paquet Π_i est l'image du L-paquet Π_a alors $(-1)^{d+1}\theta_{\Pi_a}$ est le transfert à $G_a(F)$ de θ_{Π_i}.
   (b) Si le L-paquet Π_i n'est l'image d'aucun L-paquet de $\mathrm{Temp}(G_a)$ alors le transfert de la distribution θ_{Π_i} à $G_a(F)$ est nul.
3) Pour tout L-paquet Π_i de $\mathrm{Temp}(G_i)$ et toute orbite nilpotente régulière $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}_i(F)$, il existe un et un seul élément de Π qui admet un modèle de Whittaker relativement à $\mathcal{O}$.

Bien évidemment les L-paquets tempérés de H_i et H_a vérifient les mêmes propriétés.

18.2. Un calcul de fonction $\widehat{\jmath}$

Lemme 18.2.1. — *Soient B un sous-groupe de Borel de G_i défini sur F, T_{qd} un tore maximal de B défini sur F et $X_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{i,\mathrm{reg}}(F)$. Posons $W^{G_i} = W(G_i, T)$. Alors pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_i(F))$, on a*

$$\widehat{\jmath}(\mathcal{O}, X_{\mathrm{qd}}) = \left|\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}_i(F))\right|^{-1} \cdot |W^{G_i}| D^{G_i}(X_{\mathrm{qd}})^{-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in F^{\times,2}$ on a

$$\widehat{\jmath}(\mathcal{O}, \lambda X_{\mathrm{qd}}) = |\lambda|_F^{\frac{1}{2}(\dim(T)-\dim(G_i))}\, \widehat{\jmath}(\mathcal{O}, X_{\mathrm{qd}}),$$

$$D^{G_i}(\lambda X_{\mathrm{qd}}) = |\lambda|_F^{\frac{1}{2}(\dim(G_i)-\dim(T))}\, D^{G_i}(X_{\mathrm{qd}}).$$

Il suffit donc d'établir le résultat pour X_{qd} dans un voisinage de 0. Pour $X_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{i,\mathrm{reg}}(F)$ assez proche de 0, on a

$$\widehat{\jmath}(X_{\mathrm{qd}}, X_{\mathrm{qd}}) = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_i(F))} \Gamma_{\mathcal{O}}(X_{\mathrm{qd}})\, \widehat{\jmath}(\mathcal{O}, X_{\mathrm{qd}}).$$

Appliquons l'égalité 1.4 (1) à $M = T_{\mathrm{qd}}$ et $X = Y = X_{\mathrm{qd}}$. On obtient

$$\widehat{\jmath}(X_{\mathrm{qd}}, X_{\mathrm{qd}}) = |W^{G_i}| D^{G_i}(X_{\mathrm{qd}})^{-\frac{1}{2}}.$$

D'après le lemme 9.3.1, on a donc

$$\sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_i(F))_{\mathrm{reg}}} \widehat{\jmath}(\mathcal{O}, X_{\mathrm{qd}}) = |W^{G_i}| D^{G_i}(X_{\mathrm{qd}})^{-\frac{1}{2}}.$$

Si $\dim(V_i)$ est impaire, alors il n'y a qu'une seule orbite nilpotente régulière dans $\mathfrak{g}_i(F)$ et on a le résultat voulu.

Si $\dim(V_i)$ est paire alors il y a deux orbites nilpotentes régulières que l'on note $\mathcal{O}_+$ et $\mathcal{O}_-$. Soit g un élément du groupe des similitudes de V_i qui centralise T_{qd} et dont le facteur de similitude ν appartient à $F^\times - N(E^\times)$. Alors la conjugaison par g échange $\mathcal{O}_+$ et $\mathcal{O}_-$ et on a, pour tout $X_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{qd}}(F) \cap \mathfrak{g}_{i,\mathrm{reg}}(F)$

$$\widehat{\jmath}(\mathcal{O}_-, X_{\mathrm{qd}}) = \widehat{\jmath}(g\mathcal{O}_+ g^{-1}, gX_{\mathrm{qd}}g^{-1}) = \widehat{\jmath}(\mathcal{O}_+, X_{\mathrm{qd}}). \qquad \square$$

18.3. Classes de conjugaison stable de tores

Dans la suite, on notera

$$\underline{\mathcal{T}}_\flat = \underline{\mathcal{T}}(W_\flat, D), \quad \text{où } \flat = i \text{ ou } a.$$

Fixons un $E \otimes_F \overline{F}$-isomorphisme

$$\Phi : W_a \otimes_F \overline{F} \longrightarrow W_i \otimes_F \overline{F}$$

tel que, pour tous $w, w' \in W_a \otimes_F \overline{F}$,

$$h_{W_i}\big(\Phi(w), \Phi(w')\big) = h_{W_a}(w, w').$$

Pour $h \in H_a$, on notera

$$\phi(h) = \Phi \circ h \circ \Phi^{-1} \in H_i.$$

Soient $T, T' \in \underline{\mathcal{T}}_a \cup \underline{\mathcal{T}}_i$, on dit que T et T' sont *stablement conjugués* si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1) $T, T' \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$ pour un certain indice $\flat$ et il existe $h \in H_\flat$ tel que $hTh^{-1} = T'$ et l'isomorphisme $t \mapsto hth^{-1}$ de T sur T' est défini sur F.
2) Quitte à échanger T et T', on a $T \in \underline{\mathcal{T}}_a$ et $T' \in \underline{\mathcal{T}}_i$ et il existe $h \in H_i$ tel que $h\phi(T)h^{-1} = T'$ et l'isomorphisme $t \mapsto h\phi(t)h^{-1}$ de T sur T' est défini sur F.

Soit $\flat = i$ ou a. Pour $T \in \underline{\mathcal{T}}_\flat$, on introduit le groupe de cohomologie

$$H^1(T) = H^1(F, T).$$

On définit alors

$$h(T) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big|H^1(T)\big| & \text{si } T \neq \{1\}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$\overline{W}(H_\flat, T) = \mathrm{Norm}_{H_\flat}(T)/Z_{H_\flat}(T).$$

C'est un groupe algébrique défini sur F. On note

$$\overline{W}_F(H_\flat, T)$$

l'ensemble de ses points sur F. Rappelons qu'à T est associé un sous-espace hermitien W''_T de $W_\flat$ (on renvoie aux §§ 5.1–5.2 pour sa définition).

Lemme 18.3.1. — (i) *Soient $T, T' \in \underline{\mathcal{T}}_a \sqcup \underline{\mathcal{T}}_i$ tels que*

$$T \sim_{\mathrm{stab}} T'.$$

Alors W''_T est isomorphe à $W''_{T'}$.

▹ *Si on est dans le cas* 1), *on peut trouver h qui vérifie* 1) *et dont la restriction à W''_T est un isomorphisme défini sur F avec $W''_{T'}$.*

▹ *Si on est dans le cas* 2), *on peut trouver h qui vérifie* 2) *et tel que la restriction à W''_T de $h \circ \Phi$ soit un isomorphisme défini sur F avec $W''_{T'}$.*

(ii) *Soit $T \in \mathscr{T}_\flat$ où $\flat = i$ ou a. On a alors*

$$\sum_{\substack{T' \in \mathscr{T}_\flat \\ T' \sim_{\mathrm{stab}} T}} \left|W(H_\flat, T')\right|^{-1} = h(T)\left|\overline{W}_F(H_\flat, T)\right|^{-1}$$

et les termes $h(T)$ et $|\overline{W}_F(H_\flat, T)|$ ne dépendent que de la classe de conjugaison stable de T.

(iii) *Toutes les classes de conjugaison stable dans $\mathscr{T}_a \sqcup \mathscr{T}_i$ coupent $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}_i$ sauf la classe du tore $\{1\} \in \mathscr{T}_i$ qui ne coupe pas $\mathscr{T}_a$.*

Démonstration. — (i) Dans les deux cas, les espaces hermitiens W''_T et $W''_{T'}$ sont de même dimension et leurs groupes unitaires sont quasi-déployés sur F. Si $\dim(W''_T)$ est pair cela suffit à prouver que W''_T et $W''_{T'}$ sont isomorphes sur F. Si $\dim(W''_T)$ est impair, on utilise le fait que $W''_T \oplus D$ et $W''_{T'} \oplus D$ ont aussi des groupes unitaires quasi-déployés sur F donc sont isomorphes et d'après le théorème de Witt, c'est aussi le cas de W''_T et $W''_{T'}$.

Si on est dans le cas 1), il suffit de changer la restriction de h à $W''_T \otimes \overline{F}$, qui est un isomorphisme entre $W''_T \otimes \overline{F}$ et $W''_{T'} \otimes \overline{F}$, par un isomorphisme entre W''_T et $W''_{T'}$ défini sur F : le nouvel élément h vérifie alors 1) et le (i) du lemme.

Si on est dans le cas 2), on remplace la restriction de h à $\Phi(W''_T \otimes \overline{F})$ par $h'' \circ \Phi^{-1}_{|W''_T \otimes \overline{F}}$ où h'' est un isomorphisme défini sur F de W''_T sur $W''_{T'}$.

(ii) Soit $T \in \underline{\mathscr{T}}_\flat$, alors d'après (i) pour tout $T' \in \underline{\mathscr{T}}_\flat$ qui est stablement conjugué à T, on peut trouver $h \in H_\flat$ qui vérifie à la fois 1) et (i). Pour un tel h, on a alors $\sigma(h)^{-1}h \in T$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Réciproquement, pour $h \in H_\flat$ vérifiant $\sigma(h)^{-1}h \in T$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, le tore hTh^{-1} est défini sur F, appartient à $\underline{\mathscr{T}}_\flat$ et est stablement conjugué à T. Soit

$$\mathscr{H}_T = \left\{h \in H_\flat\ ;\ \forall \sigma \in \Gamma_F, \sigma(h)^{-1}h \in T\right\}.$$

On a alors une surjection

$$\begin{aligned} Z : H_\flat(F)\backslash\mathscr{H}_T/T &\longrightarrow \left\{T' \in \mathscr{T}_\flat : T' \sim_{\mathrm{stab}} T\right\}, \\ H_\flat(F)hT &\longmapsto \text{l'unique élément de } \mathscr{T}_\flat \text{ qui est conjugué} \\ &\qquad\qquad \text{à } hTh^{-1} \text{ par un élément de } H_\flat(F). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que l'application

$$H_\flat(F)\backslash\mathscr{H}_T/T \longrightarrow H^1(F, T)$$

qui à $H_\flat(F)hT$ associe la classe du 1-cocyle $\sigma \mapsto \sigma(h)^{-1}h$ induit une bijection entre $H_\flat(F)\backslash\mathscr{H}_T/T$ et $\mathrm{Ker}(H^1(F, T) \to H^1(F, H_\flat))$ dont le cardinal vaut $h(T)$.

D'autre part, le cardinal de $H_\flat(F)\backslash\mathscr{H}_T/T$ est aussi la somme des cardinaux des fibres de l'application Z. Soit $T'\in\mathcal{T}_\flat$ vérifiant $T'\sim_{\mathrm{stab}} T$ et $h\in\mathscr{H}_T$ tel que $hTh^{-1}=T'$. La fibre de Z au-dessus de T' est alors l'image de l'application

$$\mathscr{H}_{T'}\cap \mathrm{Norm}_{H_\flat}(T')\longrightarrow H_\flat(F)\backslash\mathscr{H}_T/T,\quad n\longmapsto H_\flat(F)nhT$$

qui se quotiente en une bijection de la fibre avec

$$(\mathrm{Norm}_{H_\flat(F)}(T')T')\backslash\mathscr{H}_{T'}\cap \mathrm{Norm}_{H_\flat}(T').$$

Puisque l'on a un isomorphisme naturel

$$\big(H''_{T'}(F)T'\big)\backslash\,\mathrm{Norm}_{H_\flat(F)}(T')T'\simeq Z_{H_\flat(F)}(T')\backslash\,\mathrm{Norm}_{H_\flat(F)}(T')=W(H_\flat,T'),$$

le nombre d'éléments dans la fibre est

$$\big|W(H_\flat,T')\big|^{-1}\cdot\big|H''_{T'}(F)T'\backslash\mathscr{H}_{T'}\cap\mathrm{Norm}_{H_\flat}(T')\big|.$$

On a une application naturelle

$$H''_{T'}(F)T'\backslash\mathscr{H}_{T'}\cap\mathrm{Norm}_{H_\flat}(T')\longrightarrow \overline{W}_F(H_\flat,T').$$

On vérifie aisément qu'elle est injective. Montrons qu'elle est aussi surjective. Soient $w\in\overline{W}_F(H_\flat,T')$ et $n\in\mathrm{Norm}_{H_\flat}(T')$ qui relève w ; pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, on a alors $\sigma(n)^{-1}n\in Z_{H_\flat}(T')=H''_{T'}T'$. Soit n' la restriction de n à $W'_{T'}\otimes\overline{F}$: c'est un élément de $H'_{T'}$ que l'on considère comme un élément de $H_\flat$ en le laissant agir comme l'identité sur $W''_{T'}\otimes\overline{F}$ et qui relève alors encore w. On a encore $\sigma(n')^{-1}n'\in T'$ pour tout $\sigma\in\Gamma_F$, donc $n'\in\mathscr{H}_{T'}\cap\mathrm{Norm}_{H_\flat}(T')$. L'application est donc bijective et par conséquent

$$\big|H''_{T'}(F)T'\backslash\mathscr{H}_{T'}\cap\mathrm{Norm}_{H_\flat}(T')\big|=\big|\overline{W}_F(H_\flat,T')\big|.$$

D'où la formule suivante

$$\sum_{\substack{T'\in\mathcal{T}_\flat\\ T'\sim_{\mathrm{stab}}T}}\big|W(H_\flat,T')\big|^{-1}\cdot\big|\overline{W}_F(H_\flat,T')\big|=h(T).$$

Pour obtenir le résultat annoncé, il suffit donc de montrer que $|\overline{W}_F(H_\flat,T)|$ ne dépend que de la classe de conjugaison stable de T. Or si on est dans le cas 1), alors on a une bijection $\overline{W}_F(H_\flat,T)\to\overline{W}_F(H_\flat,T')$ donnée par $w\mapsto hwh^{-1}$. On a une bijection analogue dans le cas 2). Enfin, $h(T)$ ne dépend aussi que de la conjugaison stable de T car si $T\sim_{\mathrm{stab}}T'$, alors T et T' sont isomorphes sur F. Cela établit (ii).

(iii) Soit $T\in\mathcal{T}_a$. Puisque l'un des deux groupes G_a et H_a n'est pas quasi-déployé, on a $W'_T\neq 0$ donc la classe de conjugaison stable de $\{1\}\in\mathcal{T}_i$ ne coupe pas $\mathcal{T}_a$. De plus, il existe un unique espace hermitien W'_i de même dimension que W'_T mais non isomorphe à W'_T et W_i est isomorphe à $W'_i \oplus W''_T$. On peut transférer T en un tore maximal T' du groupe unitaire de W'_i et on a $T' \in \underline{\mathcal{T}}_i$ donc la classe de conjugaison stable de T coupe $\mathcal{T}_i$.

De la même façon, soit $T \in \mathcal{T}_i$ tel que $W'_T \neq 0$. Il existe un unique espace hermitien W'_a de même dimension que W'_T mais qui ne lui est pas isomorphe et W_a est isomorphe à $W'_a \oplus W''_T$. On peut transférer T en un tore maximal T' du groupe unitaire de W'_a et on a alors $T' \in \underline{\mathcal{T}}_a$; donc la classe de conjugaison stable de T coupe $\mathcal{T}_a$. ∎

18.4. Un résultat dans le sens de la conjecture de Gross-Prasad

Théorème 18.4.1. — *Soient Π_i et Σ_i des L-paquets de* $\mathrm{Temp}(G_i)$ *et* $\mathrm{Temp}(H_i)$ *respectivement. Si Π_i est l'image d'un L-paquet de* $\mathrm{Temp}(G_a)$, *on note Π_a ce L-paquet, sinon on pose $\Pi_a = \varnothing$. On définit de même Σ_a. Il existe alors un unique couple $(\pi,\sigma) \in (\Pi_i \times \Sigma_i) \cup (\Pi_a \times \Sigma_a)$ tel que*

$$m(\pi,\sigma^\vee) = 1.$$

Démonstration. — Le cas $d_W = 0$ est une conséquence immédiate de la propriété 18.1 3) pour le L-paquet Π_i (en effet dans ce cas $m(\pi,\sigma)$ est la dimension de l'espace des fonctionnelles de Whittaker sur π relativement à la donnée de Whittaker (U,ξ)). On suppose dorénavant que $d_W \geqslant 1$. Soit $\flat = i$ ou a. On pose

$$m_{\Pi_\flat,\Sigma_\flat} = \sum_{\substack{\pi\in\Pi_\flat\\ \sigma\in\Sigma_\flat}} m(\pi,\sigma^\vee).$$

Pour $T \in \mathcal{T}_\flat$ on définit les fonctions $c_{\Pi_\flat}$ et $c_{\Sigma_\flat}$ sur $T_\natural(F)$ par

$$c_{\Pi_\flat}(t) = \sum_{\pi\in\Pi_\flat} c_\pi(t) \quad \text{et} \quad c_{\Sigma_\flat}(t) = \sum_{\sigma\in\Sigma_\flat} c_\sigma(t)$$

D'après le théorème 17.1.1, on a

$$(1) \quad m_{\Pi_\flat,\Sigma_\flat} = \sum_{T\in\mathcal{T}_\flat} \left|W(H_\flat,T)\right|^{-1} \nu(T) \lim_{s\to 0^+} \int_{T(F)} c_{\Pi_\flat}(t)\, c_{\Sigma_\flat}(t)\, D^{H_\flat}(t)^{\frac12}\, D^{G_\flat}(t)^{\frac12}\, \Delta(t)^{s-\frac12}\, \mathrm{d}t.$$

Soient $T \in \mathcal{T}_\flat$ et $t \in T_\natural(F)$. Soient $B \subset G''_{\flat,T}$ un sous-groupe de Borel défini sur F, $T_B \subset B$ un tore maximal défini sur F et $X_{\mathrm{qd}} \in \mathfrak{t}_B(F) \cap \mathfrak{g}''_{\flat,T,\mathrm{reg}}(F)$. On fixe de la même façon un élément $X_{\mathrm{qd}}^H \in \mathfrak{h}''_{\flat,T,\mathrm{reg}}(F)$. Pour $\lambda \in F^{\times,2}$ assez petit, on a

$$\theta_{\Pi_\flat}\big(t\exp(\lambda X_{\mathrm{qd}})\big) = \sum_{\mathcal{O}\in\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}''_{\flat,T})} c_{\theta_{\Pi_\flat},\mathcal{O}}(t)|\lambda|_F^{-\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O})}\,\widehat{\jmath}(\mathcal{O},X_{\mathrm{qd}}).$$

D'après le lemme 18.2.1, on a

$$c_{\Pi_\flat}(t) = \lim_{\substack{\lambda\in F^\times\\ \lambda\to 0}} \left|W^{G''_{\flat,T}}\right|^{-1}\cdot|\lambda|_F^{\frac{1}{2}\delta(G''_{\flat,T})}\,\theta_{\Pi_\flat}\big(t\exp(\lambda X_{\mathrm{qd}})\big)$$

et de la même façon

$$c_{\Sigma_\flat}(t) = \lim_{\substack{\lambda\in F^\times\\ \lambda\to 0}} \left|W^{H''_{\flat,T}}\right|^{-1}\cdot|\lambda|_F^{\frac{1}{2}\delta(H''_{\flat,T})}\,\theta_{\Sigma_\flat}\big(t\exp(\lambda X^H_{\mathrm{qd}})\big).$$

Soient $T'\in\mathcal{T}_\flat$ stablement conjugué à T, $h\in H_\flat$ qui vérifie 18.3.1 (i) et posons

$$t' = hth^{-1}\in T'_\natural(F),\quad X'_{\mathrm{qd}} = hX_{\mathrm{qd}}h^{-1},\quad X'^H_{\mathrm{qd}} = hX^H_{\mathrm{qd}}h^{-1}.$$

Alors X'_{qd} et X'^H_{qd} vérifient les mêmes hypothèses par rapport à T' que X_{qd} et X^H_{qd} par rapport à T. On a donc

$$c_{\Pi_\flat}(t') = \lim_{\substack{\lambda\in F^\times\\ \lambda\to 0}} |W^{G''_{\flat,T'}}|^{-1}\cdot|\lambda|_F^{\frac{1}{2}\delta(G''_{\flat,T'})}\,\theta_{\Pi_\flat}\big(t'\exp(\lambda X'_{\mathrm{qd}})\big),$$
$$c_{\Sigma_\flat}(t') = \lim_{\substack{\lambda\in F^\times\\ \lambda\to 0}} |W^{H''_{\flat,T'}}|^{-1}\cdot|\lambda|_F^{\frac{1}{2}\delta(H''_{\flat,T'})}\,\theta_{\Sigma_\flat}\big(t'\exp(\lambda X'^H_{\mathrm{qd}})\big).$$

Puisque $\theta_{\Pi_\flat}$ et $\theta_{\Sigma_\flat}$ sont des distributions stables et que

$$t'\exp(\lambda X'_{\mathrm{qd}}) = ht\exp(\lambda X_{\mathrm{qd}})h^{-1}\quad\text{et}\quad |W^{G''_{\flat,T}}| = |W^{G''_{\flat,T'}}|$$

(car $G''_{\flat,T}$ et $G''_{\flat,T'}$ sont isomorphes sur F), on a

$$c_{\Pi_\flat}(t) = c_{\Pi_\flat}(t').$$

De la même façon $c_{\Sigma_\flat}(t) = c_{\Sigma_\flat}(t')$. Comme de plus on a

$$D^{H_\flat}(t') = D^{H_\flat}(t),\quad D^{G_\flat}(t') = D^{G_\flat}(t),\quad \Delta(t') = \Delta(t)$$

et que l'isomorphisme $T(F)\to T'(F)$, $t\mapsto hth^{-1}$ envoie la mesure $\nu(T)\,\mathrm{d}t$ sur la mesure $\nu(T')\,\mathrm{d}t'$, les termes indexés par T et T' dans (1) sont les mêmes.

Soit $\mathcal{T}_{\flat,stab}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable dans $\mathcal{T}_{\flat}$. D'après 18.3.1 (ii), la formule (1) peut se réécrire

$$m_{\Pi_\flat,\Sigma_\flat} = \sum_{T\in\mathcal{T}_{\flat,stab}} h(T)|\overline{W}_F(H_\flat,T)|^{-1} \lim_{s\to 0^+}\int_{T(F)} c_{\Pi_\flat}(t)\,c_{\Sigma_\flat}(t)\,D^{H_\flat}(t)^{\frac12}\,D^{G_\flat}(t)^{\frac12}\,\Delta(t)^{s-\frac12}\,\mathrm{d}t.$$

Soient $T'\in\mathcal{T}_i$ et $T\in\mathcal{T}_a$ stablement conjugués et $h\in H_i$ qui vérifie 18.3.1 (i). Soit $t\in T_\natural(F)$ et posons

$$t' = h\phi(t)h^{-1},\quad X'_{\mathrm{qd}} = h\phi(X_{\mathrm{qd}})h^{-1},\quad X'^{H}_{\mathrm{qd}} = h\phi(X'_{\mathrm{qd}})h^{-1}.$$

Puisque le transfert de θ_{Π_a} à G_i est $(-1)^d\theta_{\Pi_i}$, on montre comme précédemment que

$$c_{\Pi_i}(t') = (-1)^d c_{\Pi_a}(t).$$

De la même façon, on a $c_{\Sigma_i}(t') = (-1)^{d_W} c_{\Sigma_a}(t)$. On a aussi

$$D^{H_i}(t') = D^{H_a}(t),\quad D^{G_i}(t') = D^{G_a}(t),\quad \Delta(t') = \Delta(t).$$

L'isomorphisme $T(F)\to T'(F)$, $t\mapsto hth^{-1}$ envoie la mesure $\nu(T)\mathrm{d}t$ sur la mesure $\nu(T')\mathrm{d}t'$. Puisque $(-1)^{d+d_W} = -1$, on a par conséquent

$$\int_{T(F)} c_{\Pi_a}(t)c_{\Sigma_a}(t)\,D^{H_a}(t)^{\frac12}\,D^{G_a}(t)^{\frac12}\,\Delta(t)^{s-\frac12}\,\mathrm{d}t = -\int_{T'(F)} c_{\Pi_i}(t)c_{\Sigma_i}(t)\,D^{H_i}(t)^{\frac12}\,D^{G_i}(t)^{\frac12}\,\Delta(t)^{s-\frac12}\,\mathrm{d}t$$

pour tout $s\in\mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s)>0$. D'après 18.3.1 (ii), on a aussi

$$h(T)|\overline{W}_F(H_a,T)|^{-1} = h(T')|\overline{W}_F(H_i,T')|^{-1}.$$

Par conséquent, la contribution de la classe de conjugaison stable de T dans m_{Π_a,Σ_a} est l'opposé de la contribution de la classe de conjugaison stable de T' dans m_{Π_i,Σ_i}. Puisque la seule classe de conjugaison stable qui ne coupe pas $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_a$ est celle de $\{1\}$ (cf. proposition 18.3.1 (iii)), seule cette classe contribue dans la somme $m_{\Pi_i,\Sigma_i}+m_{\Pi_a,\Sigma_a}$. On a donc

$$m_{\Pi_i,\Sigma_i}+m_{\Pi_a,\Sigma_a} = c_{\Pi_i}(1)\,c_{\Sigma_i}(1)$$

D'après un résultat de Rodier [**24**], pour une représentation $\pi\in\mathrm{Irr}(G)$ et $\mathcal{O}\in\mathrm{Nil}_{\mathrm{reg}}(\mathfrak{g}(F))$, le coefficient $c_{\theta_\pi,\mathcal{O}}(1)$ vaut 1 si et seulement si π admet un modèle de Whittaker par rapport à $\mathcal{O}$, et vaut 0 sinon. D'après la propriété 18.1 3) du L-paquet Π_i, on a donc

$$m_{\Pi_i,\Sigma_i}+m_{\Pi_a,\Sigma_a} = 1$$

Il y a par conséquent un seul terme qui vaut 1 dans la somme

$$m_{\Pi_i,\Sigma_i} + m_{\Pi_a,\Sigma_a} = \sum_{(\sigma,\pi)\in(\Sigma_i\times\Pi_i)\cup(\Sigma_a\times\Pi_a)} m(\pi,\sigma^\vee) \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, and G. Schiffmann, *Multiplicity one theorems*, Ann. of Math. (2), 172 (2010), pp. 1407–1434.

[2] J. Arthur, *The trace formula in invariant form*, Annals of Math., 114 (1981), pp. 1–74.

[3] ——, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : explicit formulas*, Amer. J. Math., 104 (1982), pp. 1289–1336.

[4] ——, *The invariant trace formula I. Local theory*, J. Amer. Math. Soc., 1 (1988), pp. 323–383.

[5] ——, *Intertwining operators and residues I. Weighted characters*, J. Funct. Analysis, 84 (1989), pp. 19–84.

[6] ——, *A local trace formula*, Publ. IHÉS, 73 (1991), pp. 5–96.

[7] ——, *On elliptic tempered characters*, Acta Math., 171 (1993), pp. 73–138.

[8] ——, *The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups*, vol. 61 of Amer. Math. Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[9] Y. Benoist and H. Oh, *Polar decomposition for p-adic symmetric spaces*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 24 (2007).

[10] I. Bernstein and A. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups I*, Ann. Sci. ÉNS, 10 (1977), pp. 441–472.

[11] J.-N. Bernstein, *Le « centre » de Bernstein*, p. 1–32 in « Représentations des groupes réductifs sur un corps local», P. Deligne éd., Hermann, Paris, 1984.

[12] R. Beuzart-Plessis, *Expression d'un facteur epsilon de paire par une formule intégrale*, Canad. J. Math., 66 (2014), pp. 993–1049.

[13] ——, *Endoscopie et conjecture locale raffinée de Gross-Prasad pour les groupes unitaires*, Compos. Math., 151 (2015), pp. 1309–1371.

[14] W. Casselman and J. Shalika, *The unramified principal series of p-adic groups II. The Whittaker function*, Comp. Math., 41 (1980), pp. 207–231.

[15] P. Delorme and V. Sécherre, *An analogue of the Cartan decomposition for p-adic reductive symmetric spaces of split p-adic reductive groups*, Pacific J. Math., 251 (2011), pp. 1–21.

[16] W.-T. Gan, B. Gross, and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L-values and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque, 346 (2012).

[17] B. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}, Canad. J. Math., 44 (1992), pp. 974–1002.

[18] ——, *On irreducible representations of* $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{SO}_{2m}$, Can. J. Math., 46 (1994), pp. 930–950.

[19] Harish-Chandra, S. DeBacker, and P. Sally, *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, Amer. Math. Soc. Univ. Lecture Series, 16 (1999).

[20] A. Ichino and T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, Geom. Funct. Anal., 19 (2010), pp. 1378–1425.

[21] T. Kaletha, A. Minguez, S. W. Shin, and P.-J. White, *Endoscopic classification of representations : inner forms of unitary groups*, prepublication 2014.

[22] C. Moeglin, M.-F. Vignéras, and J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, vol. 1291 of Springer Lecture Notes, 1987.

[23] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc., 235 (2015).

[24] F. Rodier, *Modèle de Whittaker et caractères de représentations,* p. 151–171 in « Non commutative harmonic analysis », J. Carmona, J. Dixmier, M. Vergne éd., vol. 466 of Springer Lecture Notes, 1981.

[25] Y. Sakellaridis, *Spherical varieties and integral representations of L-functions*. Prépublication 2009.

[26] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*. Prépublication 2012.

[27] J.-L. Waldspurger, *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque, 269 (2001).

[28] ———, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques, d'après Harish-Chandra*, J. Inst. Math. Jussieu, 2 (2003), pp. 235–333.

[29] ———, *Une formule intégrale reliée à la conjecture de Gross-Prasad*, Compos. Math., 146 (2010), pp. 1180–1290.

[30] ———, *Calcul d'une valeur d'un facteur ϵ par une formule intégrale,* in « Sur les conjectures de Gross et Prasad II », Astérisque, 347 (2012), pp. 1–102.

[31] ———, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux,* in « Sur les conjectures de Gross et Prasad II », Astérisque, 347 (2012), pp. 103–165.

[32] ———, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad,* 2^{e} *partie : extension aux représentations tempérées,* in « Sur les conjectures de Gross et Prasad I », Astérisque, 346 (2012), pp. 171–312.