Yiwen DING

FORMES MODULAIRES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

MÉMOIRES DE LA SMF 155

Société Mathématique de France 2017

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.munusami@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 45 € ($ 67)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 162 €, *hors Europe :* 186 € ($ 279)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
nathalie.christiaen@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633X (print) 2275-3230 (electronic)

ISBN 978-2-85629-877-0

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

MÉMOIRES DE LA SMF 155

FORMES MODULAIRES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

Yiwen DING

Société Mathématique de France 2017
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Yiwen DING

Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing, 100871.

E-mail : yiwen.ding@bicmr.pku.edu.cn

***Classification mathématique par sujets* (2010). —** 14F41, 11F85, 22E50.

***Mots clefs.* —** Cohomologie complétée, compatibilité local-global, courbe de Shimura unitaire, forme modulaire p-adique, programme de Langlands p-adique, représentation localement analytique, variété de Hecke.

***DOI.* —** 10.24033/msmf.463

Cet ouvrage est ma thèse sous la direction de Christophe Breuil. J'aimerais tout d'abord le remercier de m'avoir fait confiance et m'avoir amené à un domaine mathématique très intéressant et enrichissant. Je le remercie pour des discussions, des remarques et des conseils très utiles. Cela a changé ma façon de faire des mathématiques. Je lui suis aussi très reconnaissant d'avoir pris le temps pour lire et relire cette thèse, et pour corriger de nombreuse erreurs en mathématiques et en français.

Je remercie sincèrement Joël Bellaïche et Payman Kassaei d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je les remercie pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture de cette thèse et à l'élaboration de leur rapport. Je remercie également Laurent Berger, Gaëtan Chenevier, Vincent Pilloni et Jacques Tilouine qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Je remercie le China Scholarship Council pour avoir financé cette thèse. Durant sa préparation, le département de mathématiques de l'Université Paris-Sud m'a fourni de merveilleuses conditions de travail. Merci à Valérie Blandin-Lavigne et à Marie-Christine Myoupo, qui m'ont beaucoup aidé durant toutes ces années.

Je remercie Yi Ouyang qui a eu une grande influence sur mon orientation mathématique. Il m'a fait découvrir les représentations galoisiennes p-adiques et m'a conseillé de poursuivre mes études en France.

Je remercie Riccardo Brasca, Marco De Ieso, Payman Kassaei, Santosh Nadimpalli, Vincent Pilloni, Jyoti Praskash Saha, Xu Shen, Haoran Wang, surtout Yichao Tian et Liang Xiao pour des discussions et leurs réponses à mes questions au cours de ce travail.

Mes remerciements vont aussi à mes parents qui ont toujours cru en moi et m'ont soutenu dans mes choix. J'aimerais remercier Shu, mon épouse, pour m'avoir accompagné et soutenu, et pour tout le bonheur qu'elle m'a apporté durant toutes ces années.

Enfin, je remercie les rapporteurs pour de nombreux commentaires et suggestions utiles.

FORMES MODULAIRES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

Yiwen DING

***Résumé.* —** On étudie les formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires et montre l'existence des formes compagnons surconvergentes en utilisant les théorèmes de comparaison p-adique. Ceci, combiné avec des résultats sur les représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(L)$, nous permet d'obtenir des résultats de compatibilité local-global sur le socle localement analytique dans le H^1-complété des courbes de Shimura unitaires. En outre, en utilisant une loi d'adjonction en famille du foncteur de Jacquet-Emerton et la théorie de triangulation globale, on montre également des résultats de compatibilité local-global sur des représentations localement analytiques non semi-simples.

***Abstract* (*p*-adic modular forms over unitary Shimura curves and local-global compatibility)**

We study p-adic modular forms over unitary Shimura curves and prove the existence of overconvergent companions forms over unitary Shimura curves using p-adic comparison theorems. From which, together with some locally analytic representation theory of $\mathrm{GL}_2(L)$, we deduce some local-global compatibility results on the socle for the completed H^1 of unitary Shimura curves. In addition, using an adjunction formula for Jacquet-Emerton functor in family and global triangulation theory, we also prove some local-global compatibility results for non semi-simple locally analytic representations.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ assez grande pour contenir tous les plongements de L dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, le programme de Langlands p-adique pour le groupe $\mathrm{GL}_2(L)$ consiste à chercher une correspondance entre certaines représentations p-adiques ρ_L de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ de dimension 2 sur E et certaines représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur E. Dans le cas $L = \mathbb{Q}_p$, une telle correspondance est bien construite (*cf.* [**14**], [**27**], [**36**]). Le programme de Langlands local p-adique pour $\mathrm{GL}_2(L)$ avec $L \neq \mathbb{Q}_p$ est encore mystérieux et s'est déjà révélé nettement plus compliqué (*e.g.* voir [**14**, § 3]).

Cependant, lorsque la représentation ρ_L de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ provient d'une représentation galoisienne *globale* ρ qui apparaît par exemple dans la cohomologie étale de certaines courbes de Shimura, en utilisant la cohomologie étale complétée à la Emerton, on peut associer à ρ une représentation de Banach admissible $\widehat{\Pi}(\rho)$ de $\mathrm{GL}_2(L)$ (*e.g.* voir (1.2.2) ci-dessous), qui est supposée être la « bonne » représentation correspondant à ρ_L. Un aspect essentiel dans le programme de Langlands p-adique est alors de comprendre cette représentation, *e.g.* peut-on décrire $\widehat{\Pi}(\rho)$ en terme de ρ_L ?

Dans cette thèse, on étudie les vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\widehat{\Pi}(\rho)$ et on montre divers résultats sur cette représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique (en direction d'un analogue de la conjecture 8.1 de [**15**] dans le cas de courbes de Shimura unitaires). Un ingrédient crucial est l'étude des formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires.

1.1. Courbes de Shimura unitaires

Soient F un corps de nombres totalement réel de degré fini $d_F > 1$, $\mathscr{E}$ une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ telle que la place p soit décomposée dans $\mathscr{E}$, u une place de $\mathscr{E}$ au-dessus de p, et $\mathscr{F} := \mathscr{E} \cdot F$. Supposons pour simplifier dans cette introduction qu'il n'existe qu'une place $\wp$ de F au-dessus de p, et notons :

- $F_\wp$ le complété de F en $\wp$ avec $\mathcal{O}_\wp$ son anneau des entiers,
- ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_\wp$,
- $(u,\wp)$ la place de $\mathscr{F}$ au-dessus de $\wp$ et u,
- $\mathscr{F}_{(u,\wp)}$ le complété de $\mathscr{F}$ en $(u,\wp)$ qui est donc isomorphe à $F_\wp$.

Notons encore :

- $F_{\wp,0}$ la sous-extension non ramifiée maximale de $F_\wp$,
- Σ_p l'ensemble des plongements $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$,
- $\Sigma_\wp$ l'ensemble des plongements $F_\wp \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ (qui est alors supposé être égal à Σ_p dans cette introduction),
- $\Sigma_{\wp,0}$ l'ensemble des plongements $F_{\wp,0} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$,
- $d := [F_\wp : \mathbb{Q}_p]$, $d_0 := [F_{\wp,0} : \mathbb{Q}_p]$,
- $q := p^{d_0}$, $\quad e := d/d_0$.

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ assez grande pour contenir tous les plongements de $F_\wp$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ avec $\mathcal{O}_E$ son anneau des entiers. Fixons un plongement

$$u_\infty : \mathscr{F} \longhookrightarrow \mathbb{C}$$

et notons encore u_∞ sa restriction à $\mathscr{E}$ ou à F. Fixons de plus un isomorphisme

$$\varsigma : \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \quad \text{tel que } u = \varsigma^{-1} \circ u_\infty : \mathscr{E} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p.$$

Dans cette thèse, on considère les courbes de Shimura unitaires (de type PEL) comme dans [**20**, § 2] :on dispose d'un groupe de similitudes unitaires G sur $\mathbb{Q}$ (noté G' dans *loc. cit.*, voir aussi § 2.1) vérifiant

$$G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p^\times \times \mathrm{GL}_2(F_\wp), \tag{1.1.1}$$

(où l'isomorphisme dépend du choix de u) et d'une classe X (notée X' dans [**20**, § 2]) de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes $\mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{R}}$ qui peut s'identifier au demi-plan de Poincaré. Soient $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}^S$ l'anneau des adèles hors de S pour un ensemble fini S des places de $\mathbb{Q}$. Au couple (G,X), la théorie de Shimura associe (*cf. loc. cit.*) un système projectif indexé par les sous-groupes ouverts compacts K de $G(\mathbb{A}^\infty)$ de courbes algébriques propres M_K sur $\mathscr{F}$, de sorte que

$$M_K(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q}) \setminus \big(X \times G(\mathbb{A}^\infty)/K\big).$$

On note (d'après (1.1.1))

$$G(\mathbb{A}^{\infty,\wp}) := G(\mathbb{A}^{\infty,p})\mathbb{Q}_p^\times \subsetneq G(\mathbb{A}^\infty).$$

Pour un sous-groupe ouvert compact H de $G(\mathbb{Q}_p)$, on note (via (1.1.1))

$$H^\wp := H \cap \mathbb{Q}_p^\times.$$

1.2. Cohomologie étale complétée

Soient K^p un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$,

$$K_p^{\wp} \cong \mathbb{Z}_p^{\times} \subset G(\mathbb{Q}_p) \quad \text{et} \quad K^{\wp} := K^p K_p^{\wp}.$$

Suivant Emerton [**34**, § 2], posons

$$\widetilde{H}^1(K^{\wp}, E) := \big(\varprojlim_n \varinjlim_{K_{\wp}} H^1_{\text{ét}}(M_{K_{\wp}K^{\wp}} \times_F \overline{\mathbb{Q}}, \mathscr{O}_E/p^n)\big) \otimes_{\mathscr{O}_E} E \tag{1.2.1}$$

où $K_{\wp}$ parcourt tous les sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$. Soit

$$\mathscr{H}\big(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^{\wp}\big)$$

la $\mathscr{O}_E$-algèbre des opérateurs de doubles classes de $G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})$ modulo $K^{\wp}$. Toujours d'après Emerton, $\widetilde{H}^1(K^{\wp}, E)$ est muni d'une représentation de Banach admissible et unitaire de $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$ et d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^{\wp})$ qui commute à celle de $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$. Notons

$$\chi_p \in \mathscr{H}\big(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^{\wp}\big)$$

l'opérateur $[K_p^{\wp} p K_p^{\wp}]$ (où on voit p comme élément de $G(\mathbb{Q}_p)$ via l'injection (1.1.1))

$$\mathbb{Q}_p^{\times} \longrightarrow \mathbb{Q}_p^{\times} \times \mathrm{GL}_2(F_{\wp}) \quad \big(\cong G(\mathbb{Q}_p)\big), \quad a \longmapsto a \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette thèse, on considère (*cf.* § 3.2.3) une sous-$\mathscr{O}_E$-algèbre de $\mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^{\wp})$ contenant χ_p, notée

$$\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big).$$

Soit ρ une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E qui apparaît dans la cohomologie étale (classique) des courbes de Shimura unitaires. On peut alors associer à ρ un système de valeurs propres γ_ρ de $\mathscr{H}^*(S(K^{\wp}))$ à valeurs dans E [(1)]. On pose

$$\widehat{\Pi}(\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})}\big(\rho, \widetilde{H}^1(K^{\wp}, E)\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma_\rho\big]\big) \tag{1.2.2}$$

(où $(*)[\mathscr{H}^*(S(K^{\wp})) = \gamma_\rho]$ désigne le sous-E-espace vectoriel de $(*)$ sur lequel $\mathscr{H}^*(S(K^{\wp}))$ agit par γ_ρ), qui est une représentation de Banach admissible et unitaire de $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$ sur E.

La structure de cette représentation reste mystérieuse : par exemple, on ne sait pas à ce jour si $\widehat{\Pi}(\rho)$ ne dépend que de $\gamma_\rho(\chi_p)$ et de la représentation

$$\rho_{\wp} := \rho\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{(u,\wp)})}$$

de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\wp})$. Pourtant, il est connu (voir [**43**]) que la sous-représentation *localement algébrique*, notée $\Pi_0(\rho_{\wp})$, de $\widehat{\Pi}(\rho)$ peut être décrite en terme de la représentation $\mathrm{WD}(\rho_{\wp})$ de Weil-Deligne associée à $\rho_{\wp}$ via *la correspondance de Langlands locale clas-*

1. Quitte à augmenter E s'il le faut ; en effet, par les relations d'Eichler-Shimura et le théorème de densité de Chebotarev, la représentation ρ est déterminée par γ_ρ.

sique (voir par exemple (1.5.2) ci-dessous). Mais en général, on perd beaucoup d'information en passant de $\rho_\wp$ à $\mathrm{WD}(\rho_\wp)$. Une question essentielle dans le programme de Langlands p-adique est alors : (comment) peut-on retrouver l'information perdue en passant de $\rho_\wp$ à $\mathrm{WD}(\rho_\wp)$ dans $\widehat{\Pi}(\rho)$?

On montrera dans cette thèse qu'une représentation [(2)] localement $\mathbb{Q}_p$-analytique, notée $\Pi_1(\rho_\wp)$, de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$, qui contient $\Pi_0(\rho_\wp)$ et révèle plus d'information sur $\rho_\wp$ que $\mathrm{WD}(\rho_\wp)$, est une sous-représentation de $\widehat{\Pi}(\rho)$ dans le cas où $\rho_\wp$ est cristalline au sens de Fontaine [(3)].

1.3. Représentations cristallines de dimension 2

Soit V une représentation cristalline de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur E. Par la théorie de Fontaine (*e.g.* voir [**42**]), on associe à V un φ-module filtré admissible (D_0, D) où :

- ▹ $D_0 \cong D_{\mathrm{cris}}(V) \cong (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)}$
  est libre de rang 2 sur $F_{\wp,0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et est muni d'une action $F_{\wp,0}$-semi-linéaire et E-linéaire de φ ;
- ▹ $D \cong D_{\mathrm{dR}}(V) \cong (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)} \cong D_0 \otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp$
  est muni d'une filtration de Hodge donnée par des sous-$F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-modules.

On déduit de l'isomorphisme

$$F_{\wp,0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}} E, \quad a \otimes b \longmapsto \big(\sigma_0(a)b\big)_{\sigma_0}$$

une décomposition

$$D_0 \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}} D_{0,\sigma_0},$$

où D_{0,σ_0} est un E-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une action E-linéaire de φ^{d_0}. De même, en utilisant l'isomorphisme

$$F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \Sigma_\wp} E, \quad a \otimes b \longmapsto \big(\sigma(a)b\big)_{\sigma}, \tag{1.3.1}$$

on obtient une décomposition

$$D \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_\wp} D_\sigma$$

où D_σ est un E-espace vectoriel filtré de dimension 2. Pour $\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}$, on note

$$\Sigma_{\wp,\sigma_0} := \big\{\sigma \in \Sigma_\wp \; ; \; \sigma_{|F_{\wp,0}} = \sigma_0\big\}.$$

2. Construite par Breuil [**15**], voir aussi § 1.4 ci-dessous.
3. On renvoie au § 1.5 pour des énoncés plus précis.

L'isomorphisme $D_0 \otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp \xrightarrow{\sim} D$ induit donc, pour tout $\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}$, un isomorphisme

$$D_{0,\sigma_0} \otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \Sigma_{\wp,\sigma_0}} D_\sigma .$$

En particulier, D_σ est muni d'une action E-linéaire de φ^{d_0} induite par l'action E-linéaire de $\varphi^{d_0} \otimes \mathrm{id}$ sur $D_{0,\sigma_0} \otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp$.

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$ et supposons V de poids de Hodge-Tate $(-k_{2,\sigma} + 1 - k_{1,\sigma}, -k_{2,\sigma})_{\sigma \in \Sigma_\wp}$ (la convention que l'on adopte pour le poids de Hodge-Tate du caractère cyclotomique p-adique est 1), *i.e.* on a pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$

$$\dim_E \mathrm{Fil}^i D_\sigma = \begin{cases} 2 & \text{si } i \leq k_{2,\sigma} , \\ 1 & \text{si } k_{2,\sigma} < i \leq k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1 , \\ 0 & \text{si } i > k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1 . \end{cases}$$

Supposons de plus D_0 φ-semi-simple avec α, $\widetilde{\alpha}$ les valeurs propres de φ^{d_0} sur D_σ différentes pour un (ou de manière équivalente tout) $\sigma \in \Sigma_\wp$, et notons :

$$Z_D(\alpha) := \big\{\sigma \in \Sigma_\wp \ ; \ \varphi^{d_0}(v) = \alpha v, \ 0 \neq v \in \mathrm{Fil}^i D_\sigma \text{ pour } k_{2,\sigma} < i \leq k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1\big\},$$
$$Z_D(\widetilde{\alpha}) := \big\{\sigma \in \Sigma_\wp \ ; \ \varphi^{d_0}(v) = \widetilde{\alpha} v, \ 0 \neq v \in \mathrm{Fil}^i D_\sigma \text{ pour } k_{2,\sigma} < i \leq k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1\big\}.$$

Noter que $Z_D(\alpha) \cap Z_D(\widetilde{\alpha}) = \varnothing$.

Pour $\sigma \in \Sigma_\wp$, on dit que V est *σ-critique* si $\sigma \in Z_D(\alpha) \cup Z_D(\widetilde{\alpha})$.

On notera enfin que l'on perd l'information sur $Z_D(\alpha)$ et $Z_D(\widetilde{\alpha})$ en passant de V à la représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(V)$.

1.4. Représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$

À la représentation cristalline V (ou de manière équivalente au φ-module filtré (D_0, D)), Breuil a associé une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E, dont on rappelle maintenant la construction.

Reprenons les notations du § 1.3. Pour $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \Sigma_\wp$, on note

$$\begin{aligned}\chi_{D,J_1,J_2} := \Big(\mathrm{unr}\left(\tfrac{\alpha}{q}\right) \prod_{\sigma \in J_1} \sigma^{1-k_{1,\sigma}-k_{2,\sigma}} \prod_{\sigma \in J_2 \setminus J_1} \sigma^{-k_{2,\sigma}}\Big) \\ \otimes \Big(\mathrm{unr}(\widetilde{\alpha}) \prod_{\sigma \in J_1} \sigma^{1-k_{2,\sigma}} \prod_{\sigma \in J_2 \setminus J_1} \sigma^{2-k_{1,\sigma}-k_{2,\sigma}}\Big),\end{aligned}$$

qui est un caractère *localement J_2-analytique* (*cf.* §6.1) de $T(F_\wp)$ (le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ des matrices diagonales) sur E (et donc on peut le voir comme un caractère localement J-analytique du sous-groupe de Borel triangulaire inférieur $\overline{B}(F_\wp)$ de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ via la projection $\overline{B}(F_\wp) \twoheadrightarrow T(F_\wp)$), où $\mathrm{unr}(z)$ désigne le caractère non ramifié de $F_\wp^\times$ envoyant ϖ sur z. On note pour simplifier

$$\chi_{D,J} := \chi_{D,J,J} .$$

Posons :

- $I_D(J_1,J_2) := \big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi_{D,J_1,J_2}\delta^{-1}\big)^{J_2\text{-an}}$,

  qui est l'induite parabolique *localement J_2-analytique* (*cf.* §6.3.1) de $\chi_{D,J_1,J_2}\delta^{-1}$, où δ désigne le caractère module de $T(F_\wp)$ associé au parabolique $\overline{B}(F_\wp)$ (triangulaire supérieur).

- $W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J_2},\underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J_2})} := \bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J_2} (\mathrm{Sym}_E^{k_{1,\sigma}-2} E^2 \circ \det^{k_{2,\sigma}})_\sigma$,

  qui est une représentation $\Sigma_\wp \setminus J_2$*-algébrique* de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E, où l'action de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur $(\mathrm{Sym}_E^{k_{1,\sigma}-2} E^2 \circ \det^{k_{2,\sigma}})_\sigma$ est induite par l'action standard de $\mathrm{GL}_2(E)$ via le plongement σ.

- $\pi_D(J_1,J_2) := \big(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J_2},\underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J_2})}\big)^\vee \otimes_E I_D(J_1,J_2)$.

On définit $\widetilde{\chi}_{D,J_1,J_2}$, $\widetilde{\chi}_{D,J}$, $\widetilde{I}_D(J_1,J_2)$, $\widetilde{\pi}_D(J_1,J_2)$ en remplaçant α et $\widetilde{\alpha}$. Notons que

$$\pi_D := \pi_D(\varnothing,\varnothing) \cong \widetilde{\pi}_D(\varnothing,\varnothing)$$

est une représentation *localement $\mathbb{Q}_p$-algébrique* (*cf.* §6.1.1) (topologiquement) irréductible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E (en supposant $\alpha\widetilde{\alpha}^{-1} \neq q^{\pm 1}$), qui est en fait associée à la représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(V)$ via la correspondance de Langlands locale classique.

Suivant Breuil [**15**, §4 (9)], posons :

$$\begin{aligned}\Pi(D) := \Big(\pi_D\big(\varnothing,\Sigma_\wp\setminus Z_D(\alpha)\big) \bigoplus_{\pi(D)} \widetilde{\pi}_D\big(\varnothing,\Sigma_\wp\setminus Z_D(\widetilde{\alpha})\big)\Big)& \\ \oplus \Big(\bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\alpha)} \pi_D\big(J, J \amalg (\Sigma_\wp\setminus Z_D(\alpha))\big)\Big)& \\ \oplus \Big(\bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\widetilde{\alpha})} \widetilde{\pi}_D\big(J, J \amalg (\Sigma_\wp\setminus Z_D(\widetilde{\alpha}))\big)\Big)&.\end{aligned}$$

Les représentations $\pi_D(J,J)$ et $\widetilde{\pi}_D(J,J)$ sont (topologiquement) irréductibles pour tout $J\subseteq\Sigma_\wp$, et on a

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D) \xrightarrow{\sim} \pi_D \oplus \bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\alpha)} \pi_D(J,J) \oplus \bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\widetilde{\alpha})} \widetilde{\pi}_D(J,J), \tag{1.4.1}$$

où $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D)$ désigne le socle de $\Pi(D)$. Notons

$$\mathrm{soc}^1_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D) := \bigoplus_{\tau\in Z_D(\alpha)} \pi_D\big(\{\tau\},\{\tau\}\big) \oplus \bigoplus_{\tau\in Z_D(\widetilde{\alpha})} \widetilde{\pi}_D\big(\{\tau\},\{\tau\}\big) \subseteq \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D).$$

On renvoie à [**15**] pour des propriétés agréables de $\Pi(D)$. Noter que l'on peut retrouver l'information sur $Z_D(\alpha)$ et $Z_D(\widetilde{\alpha})$ dans $\Pi(D)$, ainsi que dans ses sous-représentations $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D)$ et $\mathrm{soc}^1_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D)$.

1.5. Une conjecture de Breuil sur la compatibilité local-global

Reprenons les notations du § 1.2.

Fixons $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ et supposons $\rho_{\wp}$ cristalline de poids de Hodge-Tate

$$(-k_{2,\sigma} + 1 - k_{1,\sigma}, -k_{2,\sigma})_{\sigma \in \Sigma_{\wp}}.$$

On peut montrer que $a_0 := \gamma_\rho(\chi_p)$ est dans $\mathscr{O}_E^\times$. Posons

$$\rho'_{\wp} := \rho_{\wp} \otimes \mathrm{unr}(a_0^{d_0})^{-1}$$

(on considère ici $\mathrm{unr}(a_0^{d_0})$ comme un caractère non ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\wp})$ via l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local normalisé pour envoyer un Frobenius arithmétique sur l'inverse d'une uniformisante de $F_{\wp}$). La représentation $\rho'_{\wp}$ est aussi cristalline de mêmes poids de Hodge-Tate que $\rho_{\wp}$. Supposons que $\rho'_{\wp}$ vérifie toutes les conditions du § 1.3 et notons

$$D := D_{\mathrm{dR}}(\rho'_{\wp}).$$

La conjecture suivante est essentiellement due à Breuil (*cf.* [**15**, conj. 8.1]) et adaptée au cas unitaire.

Conjecture 1.5.1. — *Il existe un entier $r \geq 1$ tel que l'on ait un plongement de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$*

$$\Pi(D)^{\oplus r} \longhookrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}, \tag{1.5.1}$$

qui induit un isomorphisme entre les socles.

Un tel énoncé est appelé « énoncé de compatibilité local-global » puisque la représentation $\widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ est d'origine globale alors que la construction de $\Pi(D)$ est purement locale. Signalons qu'on peut déduire de la compatibilité local-global de la correspondance de Langlands locale *classique* pour $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$, un plongement continu $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$-équivariant (*cf.* remarque 7.3.2)

$$\pi_D^{\oplus r} \longhookrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}, \tag{1.5.2}$$

pour un $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. De plus, cette conjecture implique que l'on peut retrouver l'information sur $Z_D(\alpha)$ et $Z_D(\widetilde{\alpha})$ dans $\widehat{\Pi}(\rho)$.

1.6. Les résultats principaux sur $\widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$

Théorème 1.6.1 (*cf.* th. 7.3.7). — *Soit ϖ_E une uniformisante de $\mathscr{O}_E$. Supposons que :*

- ▹ ρ *est absolument irréductible modulo* ϖ_E,
- ▹ $(\alpha\widetilde{\alpha}^{-1})^e \neq 1$,
- ▹ $\alpha\widetilde{\alpha}^{-1} \neq q^{\pm 1}$.

Alors l'application de restriction

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\Pi(D),\widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big)\\&\qquad\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\,\Pi(D),\widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big)\end{aligned}$$

est bijective.

En utilisant cet énoncé, pour démontrer la conjecture 1.5.1 (dans le cas ρ absolument irréductible modulo ϖ_E), il suffit de montrer l'existence d'un plongement comme en (1.5.1) avec $\Pi(D)$ remplacé par $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\,\Pi(D)$. En particulier, le théorème combiné avec (1.5.2) entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.2. — *Supposons ρ absolument irréductible modulo ϖ_E,*

$$Z_D(\alpha)=Z_D(\alpha')=\varnothing,\quad (\alpha\,\widetilde{\alpha}^{-1})^e\neq 1\quad \textit{et}\quad \alpha\,\widetilde{\alpha}^{-1}\neq q^{\pm 1}.$$

Alors il existe un plongement continu

$$\Pi(D)^{\oplus r}\lhook\joinrel\longrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}},$$

de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ pour un $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Théorème 1.6.3 (*cf.* prop. 7.3.6). — *Supposons ρ absolument irréductible modulo ϖ_E et $(\alpha\widetilde{\alpha}^{-1})^e\neq 1$. Soit $J\subseteq\Sigma_\wp\neq\varnothing$. Si $\pi_D(J,J)$ (resp. $\widetilde{\pi}_D(J,J)$) est une sous-représentation de $\widehat{\Pi}(\rho)$, alors on a*

$$J\subseteq Z_D(\alpha)\quad \big(\textit{resp. } J\subseteq Z_D(\widetilde{\alpha})\big).$$

Théorème 1.6.4 (*cf.* th. 7.3.3). — *Soient $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ et $\alpha\,\widetilde{\alpha}^{-1}\neq q^{\pm1}$. Alors il existe une injection continue de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$*

$$\mathrm{soc}^1_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\,\Pi(D)\lhook\joinrel\longrightarrow \Pi(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}, \tag{1.6.1}$$

où

$$\begin{aligned}\mathrm{soc}^1_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\,\Pi(D):=\bigoplus_{\tau\in Z_D(\alpha)}\pi_D(\{\tau\},\{\tau\})\oplus\bigoplus_{\tau\in Z_D(\widetilde{\alpha})}\widetilde{\pi}_D\big(\{\tau\},\{\tau\}\big)&\\ \subseteq \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\,\Pi(D).&\end{aligned}$$

Cet énoncé, combiné avec le théorème 1.6.1 et le plongement (1.5.1), permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.5. — *Supposons $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, ρ absolument irréductible modulo ϖ_E, $|Z_D(\alpha)|\leq 1$, $|Z_D(\alpha')|\leq 1$, $(\alpha\,\widetilde{\alpha}^{-1})^e\neq 1$ et $\alpha\,\widetilde{\alpha}^{-1}\neq 1,q^{\pm1}$. Alors il existe une injection continue de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$*

$$\Pi(D)\lhook\joinrel\longrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.$$

Les théorèmes 1.6.3 et 1.6.4 entraînent le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.6. — *Supposons $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, $\alpha\,\widetilde{\alpha}^{-1}\neq 1,q^{\pm1}$ et ρ absolument irréductible modulo ϖ_E. Soit encore $\tau\in\Sigma_\wp$. Alors on a $\tau\in Z_D(\alpha)$ (resp. $\tau\in Z_D(\widetilde{\alpha})$) si et seulement si $\pi_D(\{\tau\},\{\tau\})$ (resp. $\widetilde{\pi}_D(\{\tau\},\{\tau\})$ est une sous-représentation de $\widehat{\Pi}(\rho)$).*

En particulier, ceci montre que l'information sur $Z_D(\alpha)$ et $Z_D(\widetilde{\alpha})$ peut être retrouvée dans $\widehat{\Pi}(\rho)$ lorsque $F_\wp$ est non ramifié et ρ absolument irréductible.

Voici quelques grandes lignes de la preuve des théorèmes 1.6.1, 1.6.3–1.6.4 ainsi que des résultats intermédiaires.

1.7. Modules de Jacquet-Emerton et loi d'adjonction

Un outil puissant pour étudier les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques est le foncteur de Jacquet-Emerton, introduit par Emerton [**33**], [**35**]. Il s'agit d'une généralisation du foncteur de Jacquet *classique* (pour les représentations lisses).

Soient $J \subseteq \Sigma_\wp$ et $B(F_\wp)$ le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur. Le foncteur de Jacquet-Emerton $J_B(-)$ envoie une représentation localement J-analytique *admissible* W de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur une représentation localement J-analytique *essentiellement admissible* $J_B(W)$ de $T(F_\wp)$ (*cf.* §6.1.5).

▹ Pour un caractère continu χ de $\mathscr{O}_\wp^\times$ (resp. de $F_\wp^\times$) à valeurs dans $E^\times$, on note

$$\underline{k_\chi} := (k_{\chi,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp} \in E^d$$

le poids de χ (*cf.* définition 4.4.1).

▹ Pour un caractère continu $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $E^\times$, on note

$$C_{\overline{B}}(\chi) := \left\{\sigma \in \Sigma_\wp \,;\, k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}.$$

Proposition 1.7.1 (Loi d'adjonction, cor. 6.3.33). — *Soient V une représentation de Banach admissible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E, $J \subseteq \Sigma_\wp$ et χ un caractère localement J-analytique de $T(F_\wp)$ sur E vérifiant*

$$C_{\overline{B}}(\chi) \cap J = \varnothing.$$

Alors il existe une bijection de E-espaces vectoriels

$$J_B(V_{J\text{-an}})\big[T(F_\wp) = \chi\big] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi\delta^{-1}\big)^{J\text{-an}}, V_{J\text{-an}}\Big),$$

où $V_{J\text{-an}}$ désigne la sous-représentation localement J-analytique maximale de V.

Avec les notations et l'hypothèse de la proposition, lorsque $J \neq \varnothing$, l'induite parabolique

$$\big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi\delta^{-1}\big)^{J\text{-an}}$$

est topologiquement irréductible d'après [**74**, cor. 2.10]. Dans ce cas, pour montrer que $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi\delta^{-1})^{J\text{-an}}$ est une sous-représentation de V, il suffit alors de trouver des vecteurs χ-propres (pour l'action de $T(F_\wp)$) non-nuls dans $J_B(V_{J\text{-an}})$.

Reprenons les notations du §1.5. La proposition permet d'obtenir, pour tout $J \subseteq \Sigma_L$, des bijections de E-espaces vectoriels (voir le lemme 7.2.20)

$$J_B\Big(\big(\widetilde{H}^1(K^\wp, E) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\Big)\big[T(F_\wp) = \chi_{D,J}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma_\rho\big] \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\pi_D(J,J), \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big),$$

$$J_B\Big(\big(\widetilde{H}^1(K^\wp, E) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\Big)\big[T(F_\wp) = \widetilde{\chi}_{D,J}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma_\rho\big] \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\widetilde{\pi}_D(J,J), \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big).$$

L'existence d'un plongement continu $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$-équivariant (*cf.* (1.4.1))

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\, \Pi(D) \longrightarrow \widehat{\Pi}(\rho) \tag{1.7.1}$$

est alors équivalente à l'existence de vecteurs non nuls dans

$$J_B\Big(\big(\widetilde{H}^1(K^\wp, E) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\Big)\big[T(F_\wp) = \chi_{D,J}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma_\rho\big]$$

pour tout $J \subseteq Z_D(\alpha)$ et dans

$$J_B\Big(\big(\widetilde{H}^1(K^\wp, E) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\Big)\big[T(F_\wp) = \widetilde{\chi}_{D,J}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma_\rho\big]$$

pour tout $J \subseteq Z_D(\widetilde{\alpha})$. Notons que le cas $J = \varnothing$ est déjà connu par (1.5.2).

1.8. Variétés de Hecke

Soient $J \subseteq \Sigma_\wp$, $J \neq \varnothing$ et V une représentation localement J-analytique admissible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$. Le module de Jacquet-Emerton $J_B(V)$ est alors une représentation localement J-analytique essentiellement admissible de $T(F_\wp)$. On peut alors associer au module $J_B(V)$ (voir le §6.1.5) un faisceau cohérent sur l'espace rigide $\widehat{T}_J$ (sur E) qui paramètre les caractères localement J-analytiques de $T(F_\wp)$ (voir le §6.1.4). C'est le point de départ dans la construction de variétés de Hecke (à partir de la cohomologie complétée) d'Emerton.

Suivant Emerton [**34**, §2.3], on peut obtenir :

Théorème 1.8.1 (*cf.* théorème 7.2.10)

(1) *Soient* $\varnothing \neq J \subseteq \Sigma_\wp$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$. *Pour tout* $\sigma \in \Sigma_p \setminus J$, *il existe un espace rigide* $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ *sur* E *muni d'un morphisme de* E*-algèbres*

$$\psi : \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) \otimes_{\mathscr{O}_E} E \longrightarrow \mathscr{O}\big(\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})\big)$$

et d'un morphisme fini d'espaces analytiques rigides

$$\varkappa : \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J}) \longrightarrow \widehat{T}_J$$

tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

(a) *pour tout ouvert affinoïde* U *de* $\widehat{T}_J$, *le morphisme induit*

$$\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) \otimes_{\mathscr{O}_E} \mathscr{O}(U) \longrightarrow \mathscr{O}\big(\varkappa^{-1}(U)\big)$$

est surjectif;

(b) *pour une extension finie* L *de* E, *un* L*-point* (χ,γ) (*où* χ *est un caractère de* $T(F_\wp)$ *à valeurs dans* $L^\times$ *et* $\gamma : \mathscr{H}^*(S(K^\wp)) \to L$ *un morphisme de* $\mathscr{O}_E$*-algèbres, voir le lemme* 7.2.5) *appartient à* $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})(L)$ *si et seulement si on a*

$$\Big(J_B\big(\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J};\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\big) \otimes_E L\Big)$$
$$\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \neq 0,$$

où l'on a posé $\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J};\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big) := \widetilde{H}^1_{ét}(K^\wp, E) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J})}$.

(2) *Soient* $\varnothing \neq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \Sigma_\wp$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ *et* $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in \Sigma_\wp \setminus J_1$. *Alors il existe un plongement fermé naturel d'espaces rigides sur* E :

$$\mathscr{E}\big(J_1; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J_1}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J_1}\big) \hookrightarrow \mathscr{E}\big(J_2; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J_2}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J_2}\big).$$

Reprenons les notations du § 1.5.

En utilisant le théorème 1.8.1 et la discussion au-dessous de la proposition 1.7.1 on se ramène, pour démontrer l'existence d'un plongement comme en (1.7.1), à montrer que le *point compagnon* (*cf.* § 1.4)

$$z_{D,J} := (\chi_{D,J}, \gamma_\rho) \quad \big(\text{resp. } \widetilde{z}_{D,J} := (\widetilde{\chi}_{D,J}, \gamma_\rho)\big)$$

se trouve dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ pour tout $J \subseteq Z_D(\alpha)$ (resp. $J \subseteq Z_D(\alpha')$), $J \neq \varnothing$.

Supposons ρ absolument irréductible modulo ϖ_E et notons $\bar\rho$ la réduction modulo ϖ_E d'un $\mathscr{O}_E$-réseau $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$-équivariant ρ_0 de ρ (qui ne dépend pas du choix de ρ_0). Il existe un sous-espace rigide fermé de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J})$, équidimensionnel de dimension $2|J|$ (*cf.* proposition 7.2.30) et noté $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$, qui vérifie les assertions du théorème. 1.8.1 où le terme

$$\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)$$

remplacé par *le localisé en* $\bar\rho$ (*cf.* § 7.1.3)

$$\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{\bar\rho}.$$

À tout point fermé z de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$, on peut associer naturellement une représentation continue ρ_z de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur $\overline{E}$, et on a :

Théorème 1.8.2 (*cf.* § 7.2.3). — *La représentation de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$

$$\rho_{z,\wp} := \rho_z|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{(u,\wp)})}$$

est trianguline (*cf.* [**26**] *et* [**59**]), *de* $\Sigma_\wp \setminus J$*-de Rham de poids de Hodge-Tate égal à*

$$\big(-(k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1), -k_{2,\sigma}\big)_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J}$$

(*voir la définition* 7.2.39).

De plus, la théorie de la *triangulation globale* [**53**], [**55**]) permet d'obtenir le :

Théorème 1.8.3 (*cf.* cor. 7.2.53). — *Supposons ρ absolument irréductible modulo ϖ_E et soit $\varnothing \neq J \subseteq \Sigma_\wp$. Si le point $z_{D,J}$ (resp. $\widetilde{z}_{D,J}$) se trouve dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$, alors on a*

$$J \subseteq Z_D(\alpha) \quad \big(\textit{resp. } J \subseteq Z_D(\widetilde{\alpha})\big).$$

Le théorème 1.6.3 découle donc des théorèmes 1.8.3, 1.8.1 et de la proposition 1.7.1 (voir la discussion au-dessous de la proposition 1.7.1). En utilisant une version « en famille » de la proposition 1.7.1 (*cf.* corollaire 6.3.30), le théorème 1.6.1 peut se déduire du théorème 1.6.3 (voir § 7.3.2).

Passons maintenant au théorème 1.6.4. On a vu ci-dessus (théorème 1.8.1 et discussion au-dessous de la proposition 1.7.1) que l'existence d'un plongement comme en (1.6.1) équivaut à l'existence du point $z_{D,\{\tau\}}$ (resp. $\widetilde{z}_{D,\{\tau\}}$) dans $\mathscr{E}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ pour tout $\tau \in Z_D(\alpha)$ (resp. $\tau \in Z_D(\alpha')$).

On va « reconstruire » la variété de Hecke $\mathscr{E}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ à partir de faisceaux de *formes modulaires sur les courbes de Shimura unitaires*, à la Coleman-Mazur. Les points fermés de $\mathscr{E}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ peuvent s'interpréter comme systèmes de valeurs propres de *formes modulaires surconvergentes* (sur les courbes de Shimura unitaires). L'existence des points $z_{D,\{\tau\}}$ et $\widetilde{z}_{D,\{\tau\}}$ équivaut alors à l'existence de certaines formes surconvergentes spéciales, appelées *formes compagnons surconvergentes*. Le théorème 1.6.4 se ramène donc à trouver des formes compagnons surconvergentes.

1.9. Formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires

Passons aux formes modulaires. Notons encore

$$M_K : \text{le changement de base de } \operatorname{Spec}\mathscr{F} \text{ à } \operatorname{Spec}\mathscr{F}_{(u,\wp)} \cong \operatorname{Spec} F_\wp.$$

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_p (= \Sigma_\wp)$, on peut associer à la représentation algébrique $W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ de G sur E un système local de E-espaces vectoriels

$$\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}$$

sur M_K pour tout sous-groupe ouvert compact et *net* K de $G(\mathbb{A}^\infty)$ (*cf.* § 3.2.1). De plus, le système local $\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ est de de Rham (*cf.* [**73**, § 7]), et on note

$$\big(\mathrm{DR}(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}), \nabla\big)$$

le $\mathscr{O}_{M_K}$-module filtré à connexion intégrable associé (*cf.* § 3.3.2). On déduit de l'isomorphisme (1.3.1) que $(\mathrm{DR}(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}), \nabla)$ admet une décomposition (voir la proposition 3.3.8)

$$\big(\mathrm{DR}(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}), \nabla\big) \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau\in\Sigma_\wp} \big(\mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}), \nabla_\tau\big)$$

où, pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$,

$$\left(\mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}), \nabla_\tau\right)$$

est un $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-module filtré à connexion intégrable que l'on considère comme un $\mathscr{O}_{M_K}$-module filtré à connexion intégrable par l'image directe via le morphisme canonique $(M_K)_{\tau,E} \to M_K$ (on a posé $(M_K)_{\tau,E} := M_K \times_{\mathrm{Spec}\, F_\wp, \tau} \mathrm{Spec}\, E$).

De plus, la filtration de Hodge de $\mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ vérifie :

- ▷ $\mathrm{Fil}^i\, \mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}) = 0$, si $i > k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 2$.
- ▷ $\mathrm{Fil}^i\, \mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}) = \mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$, si $i \leq k_{2,\tau}$.
- ▷ On pose $\mathrm{gr}^i(\cdot) := \mathrm{Fil}^i(\cdot)/\,\mathrm{Fil}^{i+1}(\cdot)$. Alors, pour tout $k_{2,\tau} \leq i \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 2$,

$$\mathrm{gr}^i\, \mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$$

  est un $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-module localement libre de rang

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}} (k_{1,\sigma} - 1).$$

À l'aide de la description modulaire de M_K (*cf.* §3.1.1.2), pour tous $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$ et $\tau \in \Sigma_\wp$, on dispose en outre d'un $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-module localement libre de rang $\sum_{\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}} (k_{1,\sigma} - 1)$ sur $(M_K)_{\tau,E}$ que l'on note

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})}$$

(voir la définition 3.3.3 pour la définition explicite). Ce module est appelé *le faisceau de formes modulaires de poids* $(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})$ *sur* (τ, E), de sorte que pour tout $k_{2,\tau} \leq i \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 2$, on a

$$\mathrm{gr}^i\, \mathrm{DR}_\tau(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}) \cong \mathscr{S}_{\tau,E}^{(i-(2k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2), i; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})}.$$

Une section de $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})}$ sur $(M_K)_{\tau,E}$ est appelée *une forme modulaire classique sur* (τ, E) *de niveau* K *de poids* $(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})$. De plus, on dispose d'un opérateur (*cf.* §3.3.1.4)

$$\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1} : \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})} \longrightarrow \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}+1, k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})} \tag{1.9.1}$$

tel que le complexe en (1.9.1) soit quasi-isomorphe au complexe (encore noté ∇_τ) défini par la connexion ∇_τ.

Théorème 1.9.1 (*cf.* §3.3.2). — *Il existe un isomorphisme équivariant sous l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ *et compatible aux filtrations de Hodge*

$$H^1_{ét}(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \left(\prod_{\tau \in \Sigma_\wp} \mathbb{H}^1\left((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\right)\right) \otimes_{F_\wp} B_{\mathrm{dR}},$$

et la filtration de Hodge sur $\mathbb{H}^1((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau)$ *vérifie*

$$\mathrm{Fil}^i\,\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau\big)$$
$$\cong\begin{cases}\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau\big) & \textit{si } i\le k_{2,\tau},\\ H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}+1,k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) & \\ & \textit{si } k_{2,\tau}+1\le i\le \textit{ et } k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1,\\ 0 & \textit{si } i\ge k_{1,\tau}+k_{2,\tau}.\end{cases}$$

On peut déduire, par la fonctorialité des théorèmes de comparaison p-adique, de l'action naturelle des opérateurs de Hecke (de doubles classes de $G(\mathbb{A}^\infty)$ modulo K) sur $H^1_{\text{ét}}(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})$, une action pour tout $\tau\in\Sigma_\wp$ (*cf.* § 3.3.3) des opérateurs de Hecke sur

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}+1,k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).$$

Supposons maintenant K maximal en p, *i.e.*

$$K_p\cong\mathbb{Z}_p^\times\times\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp)$$

via (1.1.1). On définit le E-espace vectoriel

$$S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}$$

des *formes modulaires surconvergentes de niveau* K *et de poids*

$$(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$$

sur (τ,E) comme la limite inductive des sections de

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

sur les voisinages stricts du *lieu ordinaire* de $(M_K)_{\tau,E}$ (*cf.* [**48**, § 9.2]).

Cet espace est muni naturellement d'une action continue de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et de l'opérateur $S_\wp$ (*i.e.* l'opérateur de double classe $[K(\begin{smallmatrix}\varpi&0\\0&\varpi\end{smallmatrix})K]$). Par la théorie du sous-groupe canonique de Kassaei [**48**, § 10], on dispose de plus d'un opérateur compact $U_\wp$ agissant sur

$$S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}.$$

Pour des raisons techniques (concernant la structure entière de l'espace de formes modulaires surconvergentes), nous supposons $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ dans les théorèmes 1.9.2–1.9.3 et 1.9.6 ci-dessous (ainsi dans les théorèmes 1.9.4 et 1.6.4).

Par la méthode du *prolongement analytique* de Kassaei [**49**], [**50**], on peut montrer :

Théorème 1.9.2 (Classicité, *cf.* th. 4.3.1). — *Supposons $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ et soit f une forme modulaire surconvergente sur $(M_K)_{\tau,E}$ de poids $(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$, vecteur* *propre sous l'action de $U_\wp$ de valeur propre $a_\wp \in E^\times$. Si*

$$v_\wp(a_\wp) < k_- + \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}} k_{2,\sigma}$$

(où $v_\wp$ est la valuation additive de $F_\wp$ qui se prolonge à $\overline{\mathbb{Q}}_p$ normalisée de sorte que l'on a $v_\wp(\varpi) = 1$), alors f est classique.

Remarquons que certains cas du théorème C (*e.g.* le cas où $k_{1,\sigma} = 2$, $k_{2,\sigma} = 0$, pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$ et $k_+ = 0$) sont déjà démontrés par Kassaei [**50**] (sans l'hypothèse $F_\wp$ non ramifié). Le théorème 1.9.2 fait partie des théorèmes de classicité sur les formes de Hilbert surconvergentes (*cf.* [**50**], [**64**] et [**79**] ; voir aussi [**13**]).

Supposons $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ et soient L une extension finie de E, χ_+ et χ_- deux caractères localement τ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$ à valeurs dans $L^\times$. Par la méthode de Pilloni [**63**] (voir aussi [**1**] et [**12**]), on peut obtenir un faisceau localement libre

$$S_{\tau,L}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

sur un voisinage strict suffisamment petit du lieu ordinaire de $(M_K)_{\tau,L}$ (cela utilise en particulier le résultat de Brasca dans [**12**]). On définit le L-espace vectoriel

$$S_{\tau,L}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}$$

des formes modulaires surconvergentes de poids $(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ de niveau K comme la limite inductive des sections de

$$S_{\tau,L}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

sur les voisinages stricts suffisamment petits du lieu ordinaire.

Cet espace est muni naturellement d'une action continue de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et des opérateurs $\widetilde{S}_\wp$, $\widetilde{U}_\wp$ (qui dépendent du choix de ϖ) vérifiant en particulier

$$\widetilde{S}_\wp = \tau(\varpi)^{k_+-k_-}S_\wp, \quad \widetilde{U}_\wp = \tau(\varpi)^{k_+}U_\wp.$$

lorsque $\chi_+ = \tau^{k_+}$ et $\chi_- = \tau^{k_-}$ avec $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$. L'opérateur $\widetilde{U}_\wp$ est de plus compact.

Notons :

- ▹ $\mathscr{W}_\tau$ l'espace rigide analytique (sur E) qui paramètre les caractères localement τ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$,
- ▹ $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K))$ la E-algèbre engendrée par $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et les opérateurs $\widetilde{S}_\wp$, $\widetilde{U}_\wp$.

Théorème 1.9.3 (Surface de Hecke). — *Supposons $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ et soient $\tau \in \Sigma_\wp$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}$ et $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$. Il existe un espace analytique rigide*

$$\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

sur E muni d'un morphisme de E-algèbres

$$\psi : \widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big) \longrightarrow \mathscr{O}\big(\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

et d'un morphisme d'espaces analytiques rigides sur E

$$\varkappa : \mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \longrightarrow \mathscr{W}_\tau \times \mathscr{W}_\tau$$

tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) *le morphisme d'espaces analytiques rigides*

$$\big(\varkappa, \psi(\widetilde{U}_\wp)\big) : \mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \longrightarrow \mathscr{W}_\tau \times \mathscr{W}_\tau \times \mathbb{G}_m$$

est fini.

(2) *Pour tout ouvert affinoïde U de $\mathscr{W}_\tau \times \mathscr{W}_\tau \times \mathbb{G}_m$ le morphisme induit*

$$\widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}(U) \longrightarrow \mathscr{O}\big(\varkappa^{-1}(U)\big)$$

est surjectif;

(3) *Soient L une extension finie de E, $\chi_+ \in \mathscr{W}_\tau(L)$, $\chi_- \in \mathscr{W}_\tau(L)$, $\gamma : \widetilde{\mathscr{H}}(S(K)) \to L$ un morphisme de E-algèbres tel que $\widetilde{a}_\wp := \gamma(\widetilde{X}'_{u,\wp}) \in L^\times$.*

Alors il existe un L-point z de $\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ vérifiant $\varkappa(z) = (\chi_+, \chi_-)$ et tel que le morphisme associé $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K)) \to L$ est égal à γ si et seulement si il existe une forme modulaire surconvergente sur (τ, L) de niveau K et de poids $(\chi_+, \chi_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ propre sous l'action des opérateurs T dans $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K))$ de valeur propre $\gamma(T)$.

Par le théorème 1.9.2 de classicité, on en déduit que les points *classiques* sont Zariski-denses dans $\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ (*cf.* proposition 4.4.39). Ceci, combiné avec les théorèmes de comparaison p-adique, peut nous permettre d'obtenir :

Théorème 1.9.4 (*cf.* th. 7.2.58). — *Supposons $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$. Pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$, $\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^{d-1}$ et $\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}} \in \mathbb{Z}^{d-1}$, il existe un plongement fermé canonique d'espaces rigides analytiques sur E :*

$$\mathscr{S}(K)_{\tau,\mathrm{red}}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \lhook\joinrel\longrightarrow \mathscr{E}\big(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}\big)_{\mathrm{red}}, \tag{1.9.2}$$

où « red » signifie le sous-espace réduit.

Reprenons les notations du § 1.5. Supposons que ρ est une sous-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ dans

$$H^1_{\text{ét}}(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})$$

pour un sous-groupe ouvert compact net K de $G(\mathbb{A}^\infty)$ maximal en p. Le théorème 1.9.1 associe à ρ des formes modulaires h_τ de poids

$$\big(- k_{2,\tau} + 1, k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 1; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}\big)$$

de niveau K sur (τ, E) pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$, vecteurs propres pour les opérateurs de Hecke dans $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et les opérateurs $T_\wp$, $S_\wp$ tels que $T(h_\tau) = \gamma_\rho(T)h_\tau$ pour $T \in \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$. Par la compatibilité local-global de la correspondance de Langlands locale classique dans le cas $\ell = p$ (*cf.* [**66**] et [**4**]), on a de plus

$$T_\wp(h_\tau) = (\alpha + \widetilde{\alpha})h_\tau \quad \text{et} \quad S_\wp(h_\tau) = \frac{\alpha\,\widetilde{\alpha}}{q} h_\tau\,.$$

À partir de la forme h_τ, on peut obtenir deux formes $h_{\tau,\alpha}$ et $h_{\tau,\tilde{\alpha}}$ (*cf.* lemme 5.3.2) sur la courbe de Shimura unitaire *de niveau Iwahorique en* $\wp$, vecteurs propres de mêmes valeurs propres que h_τ pour les opérateurs de Hecke dans $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et l'opérateur $S_\wp$, de sorte que

$$U_\wp(h_{\tau,\alpha}) = \alpha h_{\tau,\alpha} \quad \text{et} \quad U_\wp(h_{\tau,\tilde{\alpha}}) = \widetilde{\alpha}\, h_{\tau,\widetilde{\alpha}}\,. \tag{1.9.3}$$

Le théorème suivant est un analogue de [**17**, th. 4.3.3], qui a son propre intérêt.

Théorème 1.9.5 (*cf.* th. 5.3.3). — *Avec les notations ci-dessus, alors on a* $\tau \in Z_D(\widetilde{\alpha})$ (*resp.* $\tau \in Z_D(\alpha)$) *si et seulement si il existe une forme modulaire surconvergente* g_τ *de niveau* K *et de poids* $(-k_{2,\tau} - k_{1,\tau} + 2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ *sur* (τ, E), *vecteur propre pour les opérateurs de* $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ *et les opérateurs* $U_\wp$, $S_\wp$, *de mêmes valeurs propres que* $h_{\tau,\alpha}$ (*resp.* $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$), *telle que* $\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}(g_\tau) = h_{\tau,\alpha}$ (*resp.* $\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}(g_\tau) = h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$).

La forme g_τ est appelée *une forme compagnon surconvergente* de $h_{\tau,\alpha}$ (resp. $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$).

Dans le cas $F_\wp$ non ramifié, on peut montrer (*cf.* corollaire 7.2.60) que le plongement (1.9.2) envoie le point fermé de l'espace rigide $\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ associé à g_τ sur le point $z_{D,\{\tau\}}$ (resp. $\widetilde{z}_{D,\{\tau\}}$) lorsque $\tau \in Z_D(\alpha)$ (resp. $\tau \in Z_D(\widetilde{\alpha})$), d'où on déduit le théorème 1.6.4 (voir la discussion à la fin du § 1.8).

Terminons cette introduction par un théorème dans le style « Fontaine-Mazur ». Supposons encore $F_\wp$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$. On peut associer à une forme modulaire surconvergente h de niveau K de poids $(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ sur (τ, E) (avec $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$), vecteur propre pour les opérateurs de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et les opérateurs $U_\wp$, $S_\wp$ de valeurs propres dans E, une représentation continue ρ_h de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E. On montre de plus que

$$\rho_{h,\wp} := \rho_h\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{u,\wp})}$$

est trianguline et de $\Sigma_\wp \setminus \{\tau\}$-de Rham de poids de Hodge-Tate

$$\big(- (k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1), -k_{2,\sigma}\big)_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}$$

(*cf.* corollaire 7.2.62).

Théorème 1.9.6 (*cf.* cor. 7.2.64). — *Avec les notations ci-dessus, supposons* $k_+ + k_- \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, ρ_h *absolument irréductible modulo* ϖ_E *et isomorphe à la réduction d'une représentation de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ *associée aux formes modulaires classiques. Si la restriction* $\rho_{h,\wp}$ *est cristalline et non* τ*-critique* (*cf.* § 1.3), *alors il existe une forme modulaire classique* h_0 *de niveau* K *de poids* $(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ *sur* (τ, E), *vecteur propre pour les opérateurs de* $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ *et les opérateurs* $U_\wp$, $S_\wp$, *de même valeurs propres que* h, *et on a* $\rho_h \cong \rho_{h_0}$.

CHAPITRE 2

PRÉLIMINAIRE ET NOTATIONS

2.1. Groupes de similitudes unitaires et courbes de Shimura unitaires

Soit F un corps de nombres totalement réel de degré fini $d_F > 1$, notons Σ_∞ l'ensemble des plongements réels de F. Soit B une algèbre de quaternions de centre F où $S(B)$ est l'ensemble des places de F et B est ramifiée (donc $S(B)$ est fini de cardinal pair). Supposons que

$$\left|S(B) \cap \Sigma_\infty\right| = d_F - 1$$

et notons τ_∞ l' unique plongement réel de F qui n'appartient pas à $S(B)$.

Soit $\mathscr{E}$ une extension imaginaire quadratique de $\mathbb{Q}$, notons

$$\mathscr{F} := F \cdot \mathscr{E}.$$

Fixons un plongement $u_\infty : \mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et désignons par $z \mapsto c(z)$ la conjugaison de $\mathscr{F}$ par rapport à F (qui se restreint en une conjugaison de $\mathscr{E}$ par rapport à $\mathbb{Q}$). Notons

$$u_{\mathbb{C}} : \mathscr{F} \longhookrightarrow \mathbb{C}$$

le plongement tel que $u_{\mathbb{C}\,|F} = \tau_\infty$ et $u_{\mathbb{C}\,|\mathscr{E}} = u_\infty$. Soit

$$D := B \otimes_F \mathscr{F}$$

et désignons par $l \mapsto \bar{l}$ le produit tensoriel de l'involution canonique de B et de la conjugaison de $\mathscr{F}$. Soit $\delta \in D$ un élément symétrique (*i.e.* $\bar{\delta} = \delta$) inversible, nous définissons une involution sur D de seconde espèce, notée $l \mapsto l^*$, en posant

$$l^* := \delta^{-1} \bar{l} \delta.$$

Notons V le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel sous-jacent à D qui est donc muni d'une action de $D \otimes_{\mathscr{F}} D^{\mathrm{op}}$ donnée par

$$d_1 \otimes d_2 \cdot v = d_1 v d_2 \quad \text{pour tous } d_1, d_2 \in D \text{ et } v \in V.$$

Choisissons un élément $\alpha \in \mathscr{F}$ non nul imaginaire (*i.e.* $\bar{\alpha} = -\alpha$) et définissons, pour v et w dans V,

$$\psi(v,w) := \mathrm{tr}_{\mathscr{F}/\mathbb{Q}}\big(\alpha\, \mathrm{tr}_{D/\mathscr{F}}(v\delta w^*)\big),$$

où $\mathrm{tr}_{D/\mathscr{F}}$ désigne la trace réduite de D sur $\mathscr{F}$. On voit que ψ est une forme alternée non dégénérée sur V vérifiant, pour tout $l \in D$:

$$\psi(lv,w) = \psi(v,l^*w).$$

Soit G le groupe algébrique des similitudes symplectiques D-linéaires de (V,ψ) (sur $\mathbb{Q}$), *i.e.* pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, $G(R)$ est le groupe des similitudes symplectiques D-linéaires de $(V \otimes_{\mathbb{Q}} R, \psi \otimes_{\mathbb{Q}} R)$.

Considérons l'action de D^{op} sur V, et identifions $D^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$ à l'ensemble des R-endomorphismes D-linéaires de $V \otimes_{\mathbb{Q}} R$. Soit $g \in D^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$, vu comme R-endomorphisme de $V \otimes_{\mathbb{Q}} R : v \mapsto vg$. Alors on a $g \in G(R)$ si et seulement si il existe un $r \in R^\times$ tel que

$$\psi(vg,wg) = r\psi(v,w)$$

pour tous v, $w \in V \otimes_{\mathbb{Q}} R$. Par la définition de ψ, cela est équivalent à $gg^* = r$. On dispose donc d'un isomorphisme naturel

$$i'_R : G(R) \xrightarrow{\sim} \big\{(r,g) \in R^\times \times (D^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \ ;\ gg^* = r\big\}$$

pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R. Mais dans la suite, on utilisera plutôt l'isomorphisme

$$(2.1.1) \qquad i_R : G(R) \xrightarrow{\sim} \big\{(r,g) \in R^\times \times (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \ ;\ gg^* = r\big\}$$

qui est la composition de i'_R avec l'isomorphisme

$$R^\times \times (D^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \xrightarrow{\sim} R^\times \times (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times, \quad (r,g) \longmapsto (r^{-1}, g^{-1}).$$

Noter que via i_R, l'action de $(r,g) \in R^\times \times (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times$ sur $V \otimes_{\mathbb{Q}} R$ est alors donnée par $(r,g)(a) = ag^{-1}$ pour tout $a \in V \otimes_{\mathbb{Q}} R$. Notons

$$(2.1.2) \qquad \nu_R := \mathrm{pr}_1 \circ i_R : G(R) \longrightarrow R^\times.$$

Soit R une $\mathscr{E}$-algèbre avec $j : \mathscr{E} \to R$ le morphisme structural. On a alors des isomorphismes

$$(2.1.3) \qquad D \otimes_{\mathbb{Q}} R \cong B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} R \cong B \otimes_{\mathbb{Q}} (R \oplus R) \cong (D \otimes_{\mathscr{E},j} R) \oplus (D \otimes_{\mathscr{E},j\circ c} R).$$

On note

$$(D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^+ := D \otimes_{\mathscr{E},j} R \quad \text{et} \quad (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^- := D \otimes_{\mathscr{E},j\circ c} R.$$

L'involution $*$ sur $D \otimes_{\mathbb{Q}} R$ échange les facteurs $(D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^+$ et $(D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^-$. De plus, pour

$$g = (g_+, g_-) \in (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \cong (D \otimes_{\mathscr{E},j} R)^\times \times (D \otimes_{\mathscr{E},j\circ c} R)^\times,$$

on voit que $gg^* = r \in R^\times$ si et seulement si $g_+ = r(g_-^*)^{-1}$. On déduit alors de l'application i_R (2.1.1) un isomorphisme :

$$(2.1.4) \qquad G(R) \xrightarrow{\sim} R^\times \times (D \otimes_{\mathscr{E},j\circ c} R)^\times, \quad \big(r,(g_+,g_-)\big) \longmapsto (r, g_-).$$

Via cet isomorphisme, l'action de $(a,g) \in R^\times \times (D \otimes_{\mathscr{E},j\circ c} R)^\times$ sur

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} R \cong (V \otimes_{\mathscr{E},j} R) \oplus (V \otimes_{\mathscr{E},j\circ c} R)$$

est donnée, pour tout $(v_+, v_-) \in V \otimes_{\mathbb{Q}} R \cong (V \otimes_{\mathbb{Q}} R)^+ \oplus (V \otimes_{\mathbb{Q}} R)^-$, par les relations

$$(a,g) \cdot v_- = v_- g^{-1}, \quad \psi\big((a,g)\cdot v_+, (a,g)\cdot v_-\big) = a^{-1}\psi(v_+, v_-).$$

Soit $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$. Dans [**20**, 2.2.4], un morphisme $h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ est défini tel que X, la classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de h, s'identifie à $\mathscr{H}^+$, le demi-plan de Poincaré. La composition

$$\mathbb{S} \xrightarrow{h} G_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$$

définit une structure de Hodge sur $V_{\mathbb{R}}$ de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$. On choisit δ et α de sorte que la forme ψ soit une polarisation de la structure de Hodge (*e.g.* voir l'argument dans [**46**, p. 52]).

Considérons le système projectif de courbes de Shimura sur $\mathbb{C}$ associé au couple (G,X), indexé par les sous-groupes ouverts compacts K de $G(\mathbb{A}^\infty)$,

$$M_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \setminus \big(X \times (G(\mathbb{A}^\infty)/K)\big).$$

La courbe $M_K(\mathbb{C})$ admet un modèle canonique, lisse et propre, noté M_K, sur $\mathscr{F}$ (voir [**20**, § 2]) via le plongement $u_{\mathbb{C}} : \mathscr{F} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Enfin, soit $\mathscr{O}_D$ un ordre de D stable par l'involution $l \mapsto l^*$, avec $V_{\mathbb{Z}}$ le réseau de V (sur $\mathbb{Z}$) qu'il définit, tel que ψ soit à valeurs entières sur $V_{\mathbb{Z}}$.

2.2. Groupes de similitudes unitaires sur les corps locaux

Soit ℓ une place finie de $\mathbb{Q}$ telle que ℓ soit décomposée dans $\mathscr{E}$ et $\mathfrak{l} \notin S(B)$ pour toute place $\mathfrak{l}$ de F au-dessus de ℓ. Notons $F_{\mathfrak{l}}$ le complété de F en $\mathfrak{l}$ avec $\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}$ son anneau des entiers, et $\varpi_{\mathfrak{l}}$ une uniformisante de $\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}$. Notons $F_{\mathfrak{l},0}$ la sous-extension non ramifiée maximale de $F_{\mathfrak{l}}$. Enfin notons

$$d_{\mathfrak{l}} := [F_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_\ell] \quad \text{et} \quad d_{\mathfrak{l},0} := [F_{\mathfrak{l},0} : \mathbb{Q}_\ell].$$

Fixons un plongement

$$\lambda : \mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell$$

(qui correspond donc à une place de $\mathscr{E}$ au-dessus de ℓ). On voit que $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ admet des décompositions (*cf.* (2.1.3))

$$(2.2.1)\quad \begin{aligned} D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell &\cong (D \otimes_{\mathscr{E},\lambda} \mathbb{Q}_\ell) \oplus (D \otimes_{\mathscr{E},\lambda\circ c} \mathbb{Q}_\ell) \\ &\cong \Big(\prod_{\mathfrak{l}\mid\ell} M_2(F_{\mathfrak{l}})\Big) \oplus \Big(\prod_{\mathfrak{l}\mid\ell} M_2(F_{\mathfrak{l}})\Big) =: \Big(\prod_{\mathfrak{l}\mid\ell} D_{\mathfrak{l}}^+\Big) \oplus \Big(\prod_{\mathfrak{l}\mid\ell} D_{\mathfrak{l}}^-\Big). \end{aligned}$$

En fait, $D_{\mathfrak{l}}^+$ (resp. $D_{\mathfrak{l}}^-$) est la sous-D-algèbre (maximale) de $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ sur laquelle l'action de $\mathscr{E}$ via les plongements $\mathscr{E} \hookrightarrow \mathscr{F} \hookrightarrow D$ se factorise à travers $\lambda : \mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell$

(resp. $\lambda \circ c : \mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell$) et l'action de F via les plongements $F \hookrightarrow \mathscr{F} \hookrightarrow D$ se factorise à travers $F \hookrightarrow F_\mathfrak{l}$. Noter que l'involution induite $l \mapsto l^*$ sur $D \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell$ échange les facteurs $D_\mathfrak{l}^+$ et $D_\mathfrak{l}^-$.

De même, l'anneau $\mathscr{O}_D \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_\ell$ admet une décomposition :

$$\mathscr{O}_D \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_\ell \cong \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} (\mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^+} \oplus \mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-}).$$

On fait les hypothèses suivantes (sur ℓ et λ) :

Hypothèse 2.2.1

(1) *La forme ψ induit une dualité parfaite ψ_ℓ sur $V_{\mathbb{Z}_\ell} := V_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_\ell$.*

(2) *L'anneau $\mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^+}$ (resp. $\mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-}$) est un ordre maximal dans $D_\mathfrak{l}^+$ (resp. $D_\mathfrak{l}^-$) et l'anneau $\mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-}$ s'identifie à $M_2(\mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}})$ via la composée $\mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-} \hookrightarrow D_\mathfrak{l}^- \cong M_2(F_\mathfrak{l})$ pour tout $\mathfrak{l} \mid \ell$.*

Supposons que ℓ, λ vérifient l'hypothèse 2.2.1. Soit $e_\mathfrak{l}^{-,1} \in \mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-}$ (resp. $e_\mathfrak{l}^{-,2} \in \mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-}$) l'élément qui s'identifie à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (resp. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$) via l'isomorphisme $\mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}})$, et notons

$$e_\mathfrak{l}^{+,k} := (e_\mathfrak{l}^{-,k})^* \quad \text{pour } k = 1, 2.$$

Tout $\mathscr{O}_D \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_\ell$-module Λ admet alors des décompositions :

$$\Lambda \cong \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} (\Lambda_\mathfrak{l}^+ \oplus \Lambda_\mathfrak{l}^-) \cong \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} (\Lambda_\mathfrak{l}^{+,1} \oplus \Lambda_\mathfrak{l}^{+,2} \oplus \Lambda_\mathfrak{l}^{-,1} \oplus \Lambda_\mathfrak{l}^{-,2}) \tag{2.2.2}$$

où $\Lambda_\mathfrak{l}^{\pm,k} := e_\mathfrak{l}^{\pm,k}\Lambda$ est un $\mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}}$-module. Noter que $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^-}$ (resp. $g^* \in \mathscr{O}_{D_\mathfrak{l}^+}$) induit un isomorphisme entre $\Lambda_\mathfrak{l}^{-,1}$ et $\Lambda_\mathfrak{l}^{-,2}$ (resp. entre $\Lambda_\mathfrak{l}^{+,1}$ et $\Lambda_\mathfrak{l}^{+,2}$).

Par (2.1.4) et (2.2.1), on en déduit un isomorphisme

$$G(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} \mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{l}). \tag{2.2.3}$$

Via cet isomorphisme, l'action de $\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{l})$ sur $V_\mathfrak{l}^-$ (le $F_\mathfrak{l}$-espace vectoriel sous-jacent à $D_\mathfrak{l}^-$) est donnée par

$$g(v) = v \cdot g^{-1}$$

(où « $\cdot$ » désigne la multiplication dans $D_\mathfrak{l}^-$) pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{l})$ et $v \in V_\mathfrak{l}^-$. Le $F_\mathfrak{l}$-espace vectoriel $V_\mathfrak{l}^{-,1}$ se réalise alors comme le contragrédient de la représentation standard de $\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{l})$.

Notons $K_\mathfrak{l}^0 := \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}})$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

$$I_\mathfrak{l}^n := \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}}) \ ; \ g \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \pmod{\varpi_\mathfrak{l}^n} \right\},$$
$$K_\mathfrak{l}^n := \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}}) \ ; \ g \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod{\varpi_\mathfrak{l}^n} \right\}.$$

Notons $S_\mathbb{Q}$ l'ensemble des places finies ℓ de $\mathbb{Q}$ décomposées dans $\mathscr{E}$ telles que ℓ et λ vérifient l'hypothèse 2.2.1 pour toutes les places λ de $\mathscr{E}$ au-dessus de ℓ. Toutes les places finies ℓ de $\mathbb{Q}$ décomposées dans $\mathscr{E}$ appartiennent alors à $S_\mathbb{Q}$ sauf un nombre fini. Notons $S_{\mathscr{F}}$ l'ensemble des places finies de $\mathscr{F}$ au-dessus des places dans $S_{\mathbb{Q}}$. Une place finie dans $S_{\mathscr{F}}$ sera alors désignée par $(\lambda, \mathfrak{l})$ où $\mathfrak{l}$ est une place de F au-dessus de $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$, et où λ est un plongement de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{Q}_\ell$.

Voici un corollaire facile du théorème de densité de Chebotarev :

Lemme 2.2.2. — *Soit L une extension galoisienne de $\mathscr{F}$ non ramifiée hors d'un ensemble fini des places S de $\mathscr{F}$. Alors l'image des éléments de Frobenius* (*arithmétique*) *des places $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S_{\mathscr{F}} \setminus (S \cap S_{\mathscr{F}})$ est dense dans* $\mathrm{Gal}(L/\mathscr{F})$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour toute sous-extension J finie et galoisienne sur $\mathscr{F}$ dans L, et pour tout $g \in \mathrm{Gal}(J/\mathscr{F})$, il existe une place $(\lambda, \mathfrak{l})$ dans $S_{\mathscr{F}} \setminus (S \cap S_{\mathscr{F}})$ telle que $\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})} = g$ où $\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \in \mathrm{Gal}(J/\mathscr{F})$ (noter que $(\lambda, \mathfrak{l}) \notin S$) désigne le Frobenius arithmétique de $(\lambda, \mathfrak{l})$. Considérons la tour d'extensions galoisiennes :

$$\mathbb{Q} \subset \mathscr{F} \subset J,$$

en appliquant le théorème de densité de Chebotarev au groupe $\mathrm{Gal}(J/\mathbb{Q})$ (*e.g.* voir [**60**, th. 13.4]), on voit que pour tout $g \in \mathrm{Gal}(J/\mathscr{F}) \subseteq \mathrm{Gal}(J/\mathbb{Q})$ il existe une infinité de places ℓ de $\mathbb{Q}$ telles que $\mathrm{Frob}_\ell = g$. De plus, une telle place ℓ doit être décomposée dans $\mathscr{F}$. Le lemme en découle. ∎

Soit $K = \prod_\ell K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ avec K_ℓ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{Q}_\ell)$, notons

$$K^\ell := \prod_{\ell' \neq \ell} K_\ell.$$

Soit $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$, via l'isomorphisme (2.2.3). Pour $(\lambda, \mathfrak{l}) \mid \ell$, notons

$$G(\mathbb{Q}_\ell^{\mathfrak{l}}) := \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'}), \quad G(\mathbb{A}^{\infty,\mathfrak{l}}) := G(\mathbb{A}^{\infty,\ell}) G(\mathbb{Q}_\ell^{\mathfrak{l}}),$$

$$K_{\mathfrak{l}} := K_\ell \cap \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}), \quad K_\ell^{\mathfrak{l}} := K_\ell \cap G(\mathbb{Q}_\ell^{\mathfrak{l}}), \quad K^{\mathfrak{l}} := K^\ell K_\ell^{\mathfrak{l}} \cong K \cap G(\mathbb{Q}_\ell^{\mathfrak{l}}).$$

Donc un élément $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ peut s'écrire comme

$$g = g_\ell \, g^\ell = g_{\mathfrak{l}} \, g_\ell^{\mathfrak{l}} \, g^\ell = g_{\mathfrak{l}} \, g^{\mathfrak{l}}$$

avec $g_\ell \in G(\mathbb{Q}_\ell)$, $g^\ell \in G(\mathbb{A}^{\infty,\ell})$, $g_{\mathfrak{l}} \in \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})$, $g_\ell^{\mathfrak{l}} \in \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'})$ et $g^{\mathfrak{l}} \in G(\mathbb{A}^{\infty,\ell}) \times (\mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'}))$.

2.3. Notations

Fixons une place finie p de $\mathbb{Q}$ dans $S_{\mathbb{Q}}$. Notons :

▷ $\wp_1, \ldots, \wp_s$ les places de F au-dessus de p ;

▷ $\wp := \wp_1$;

- $F_\wp$ le complété de F en $\wp$ avec $\mathscr{O}_\wp$ son anneau des entiers;
- ϖ une uniformisante de $\mathscr{O}_\wp$,
- $F_{\wp,0}$ la sous-extension non ramifiée maximale de $F_\wp$;
- $d := [F_\wp : \mathbb{Q}_p]$, $d_0 := [F_{\wp,0} : \mathbb{Q}_p]$, $q := p^{d_0}$.

Désignons par $v_\wp$ la valuation additive de $F_\wp$ qui se prolonge à $\overline{\mathbb{Q}}_p$ telle que $v_\wp(\varpi) = 1$. Fixons une place finie u de $\mathscr{E}$ au-dessus de p, ou de manière équivalente un plongement $u : \mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$, d'où on déduit un isomorphisme (*cf.* (2.2.3)) :

$$G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p^* \times \prod_{\wp_i \mid p} \mathrm{GL}_2(F_{\wp_i}). \tag{2.3.1}$$

Pour tout $\wp_i \mid p$, notons

$$\Sigma_p := \{\sigma : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p\} \quad \text{et} \quad \Sigma_{\wp_i} := \{\sigma : F_{\wp_i} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p\}$$

(donc $\Sigma_p = \amalg_{\wp_i \mid p} \Sigma_{\wp_i}$). Soient E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, avec $\mathscr{O}_E$ son anneau des entiers, et ϖ_E une uniformisante de $\mathscr{O}_E$, assez grande pour contenir tous les plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Donc $D \otimes_{\mathbb{Q}} E$ admet des décompositions (*cf.* (2.2.1))

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} E \cong \Big(\prod_{\wp_i \mid p} D^+_{\wp_i} \oplus D^-_{\wp_i} \Big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} (D^+_{\wp_i,\sigma} \oplus D^-_{\wp_i,\sigma})$$

où $D^\pm_{\wp_i,\sigma} \cong D^\pm_{\wp_i} \otimes_{F_{\wp_i},\sigma} E$ est isomorphe à $M_2(E)$ et l'involution $l \mapsto l^*$ échange les facteurs $D^+_{\wp_i,\sigma}$ et $D^-_{\wp_i,\sigma}$. Tout $D \otimes_{\mathbb{Q}} E$-module Λ se décompose alors comme :

$$\Lambda \cong \prod_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} \Lambda^+_{\wp_i,\sigma} \oplus \Lambda^-_{\wp_i,\sigma}. \tag{2.3.2}$$

En utilisant les idempotents

$$e^{-,1}_{\wp_i,\sigma} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in D^-_{\wp_i,\sigma}, \quad e^{-,2}_{\wp_i,\sigma} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in D^-_{\wp_i,\sigma},$$

$\Lambda^-_{\wp_i,\sigma}$ admet une décomposition

$$\Lambda^-_{\wp_i,\sigma} \cong \Lambda^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus \Lambda^{-,2}_{\wp_i,\sigma}$$

où $\Lambda^{-,k}_{\wp_i,\sigma} := e^{-,k}_{\wp_i,\sigma}\Lambda$. De même, on a

$$\Lambda^+_{\wp_i,\sigma} \cong \Lambda^{+,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus \Lambda^{+,2}_{\wp_i,\sigma}$$

en utilisant les idempotents $e^{+,k}_{\wp_i,\sigma} := (e^{-,k}_{\wp_i,\sigma})^*$ où $\Lambda^{+,k}_{\wp_i,\sigma} := e^{+,k}_{\wp_i,\sigma}\Lambda$.

Remarquons que $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in D^-_{\wp_i,\sigma}$ (resp. $g^* \in D^+_{\wp_i,\sigma}$) induit un isomorphisme (de E-espaces vectoriels) entre $\Lambda^{-,1}_{\wp_i,\sigma}$ et $\Lambda^{-,2}_{\wp_i,\sigma}$ (resp. entre $\Lambda^{+,1}_{\wp_i,\sigma}$ et $\Lambda^{+,2}_{\wp_i,\sigma}$).

On fixe un isomorphisme

$$\varsigma : \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

tel que $\tau_0 := \varsigma^{-1} \circ \tau_\infty$ se factorise à travers $F_\wp$ et tel que $\varsigma^{-1} \circ u_\infty = u$.

Soient V un espace vectoriel sur E, et A un ensemble des opérateurs agissant de façon E-linéaire sur V. Pour un système de valeurs propres

$$\gamma = \{\gamma(x) \in E\}_{x \in A},$$

on note $V[A = \gamma]$ le sous-espace propre associé.

CHAPITRE 3

FORMES MODULAIRES CLASSIQUES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES

On rappelle au §3.1 la description modulaire des courbes de Shimura unitaires. Au §3.2, on étudie la cohomologie étale des courbes de Shimura unitaires à coefficients dans certains systèmes locaux. Enfin, dans la section 3.3, on étudie les formes modulaires sur les courbes de Shimura unitaires et les opérateurs de Hecke.

3.1. Description modulaire des courbes de Shimura unitaires

3.1.1. Problème de modules. — Soit K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$. La courbe

$$M_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \setminus \big(X \times (G(\mathbb{A}^\infty)/K)\big)$$

admet un modèle canonique M_K sur $\mathscr{F}$ via

$$u_{\mathbb{C}} : \mathscr{F} \longhookrightarrow \mathbb{C}.$$

De plus, lorsque K est assez petit, M_K admet une interprétation modulaire. Le plongement $u : \mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ induit un plongement $u : \mathscr{F} \hookrightarrow F_\wp$. Dans cette section, suivant [**20**], on donne des rappels sur la description modulaire de la courbe $M_K \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{F},u} \operatorname{Spec} F_\wp$, encore notée M_K.

On présente deux problèmes de modules sur $F_\wp$ qui sont représentés par M_K lorsque K est assez petit.

3.1.1.1. *La première version.* — Rappelons (*cf.* [**28**, th. 4.19] et [**20**, §2.3]) que lorsque K est assez petit, la courbe M_K (sur $F_\wp$) représente le foncteur

$$M_K{}^1 : \{\text{Schémas sur } \operatorname{Spec} F_\wp\} \longrightarrow \{\text{Ensembles}\},$$

défini comme suit.

Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} F_\wp$ avec $\tau : S \to \operatorname{Spec} F_\wp$ le morphisme structural, $M_K{}^1(S)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets $(A, \iota, \bar\theta, \bar\alpha)$ où :

(1) A est un schéma abélien à isogénie près de dimension relative $4d_F$ sur S, muni d'une action de $\mathscr{O}_D$ via $\iota : \mathscr{O}_D \hookrightarrow \mathrm{End}_S(A)$ (ainsi $\mathrm{Lie}(A)$ est un $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p$-module) vérifiant :

(a) $\mathrm{Lie}(A)^{-,1}_{\wp}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 1 sur lequel $F_\wp$ agit via le morphisme structural τ ;

(b) pour $\wp_i \neq \wp$, $\mathrm{Lie}(A)^{-}_{\wp_i}$ est nul.

(2) $\bar\theta$ est une polarisation homogène de A (*cf.* [**28**, 4.3]) telle que l'involution de Rosati associée envoie $\iota(\gamma)$ sur $\iota(\gamma^*)$.

(3) $\bar\alpha$ est une classe modulo K de similitudes symplectiques $\mathscr{O}_D$-linéaires localement pour la topologie étale sur S :

$$\alpha : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^\infty \longrightarrow \widehat{V}(A),$$

où $\widehat{V}(A) := \widehat{T}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, avec $\widehat{T}(A) := \varprojlim_n A[n]$, est bien défini pour un schéma abélien à isogénie près, et où la forme symplectique $\mathscr{O}_D$-linéaire sur $\widehat{T}(A)$ (qui se prolonge sur $\widehat{V}(A)$ de manière unique) est définie par

$$\widehat{T}(A) \times \widehat{T}(A) \xrightarrow{(1,\theta)} \widehat{T}(A) \times \widehat{T}(A^\vee) \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}(1),$$

en choisissant une polarisation effective $\theta : A \to A^\vee$ dans la classe $\bar\theta$. Noter que la forme symplectique sur $\widehat{V}(A)$ induite ne dépend pas du choix de θ.

Remarque 3.1.1

(1) On dit que $(A, \iota, \bar\theta, \bar\alpha)$ et $(A', \iota', \bar\theta', \overline{\alpha'})$ sont *isomorphes* s'il existe une isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\phi : A \to A'$ telle que

$$\bar\theta = \overline{\phi^\vee \circ \theta' \circ \phi} \quad \text{et} \quad \bar\alpha = \overline{\widehat{\phi}^{-1} \circ \alpha'}$$

où $\phi^\vee$ désigne l'isogénie duale de ϕ et où $\widehat{\phi}$ désigne l'application $\widehat{V}(A) \to \widehat{V}(A')$ induite par ϕ.

(2) L'action de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sur le système des courbes $\{M_K\}$ est, pour $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$, donnée par

$$r_g : M_K \longrightarrow M_{g^{-1}Kg}, \quad (A, \iota, \bar\theta, \bar\alpha) \longmapsto (A, \iota, \bar\theta, \overline{\alpha \circ g}).$$

3.1.1.2. *La deuxième version.* — Notons $V'_{\mathbb{Z}}$ le réseau dual de $V_{\mathbb{Z}}$ par rapport à ψ, *i.e.*

$$V'_{\mathbb{Z}} := \{v \in V \ ; \ \psi(v, w) \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } w \in V_{\mathbb{Z}}\}.$$

Notons

$$V_{\widehat{\mathbb{Z}}} := V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad V'_{\widehat{\mathbb{Z}}} := V'_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \qquad \Big(\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell\Big).$$

Soit K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ assez petit pour laisser $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ invariant. D'après [**20**, § 2.6], le foncteur $M_K{}^1$ est isomorphe au foncteur M_K défini comme suit.

Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} F_\wp$ avec $\tau : S \to \operatorname{Spec} F_\wp$ le morphisme structural, $M_K(S)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets $(A, \iota, \theta, \bar{\alpha})$ où :

(1) A est un schéma abélien de dimension relative $4d_F$ sur S, muni d'une action de $\mathscr{O}_D$ via $\iota : \mathscr{O}_D \hookrightarrow \operatorname{End}_S(A)$ (ainsi $\operatorname{Lie}(A)$ est un $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p$-module) vérifiant :

   (a) $\operatorname{Lie}(A)_\wp^{-,1}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 1, et $F_\wp$ y opère via le morphisme structural τ ;

   (b) pour tout $\wp_i \neq \wp$, $\operatorname{Lie}(A)_{\wp_i}^-$ est nul.

(2) $\theta : A \to A^\vee$ est une polarisation de A telle que l'involution de Rosati associée envoie $\iota(\gamma)$ sur $\iota(\gamma^*)$.

(3) $\bar{\alpha}$ est une classe modulo K d'isomorphismes symplectiques $\mathscr{O}_D$-linéaires localement pour la topologie étale sur S :

$$\alpha : V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{T}(A).$$

En effet, suivant [**20**, §2.6.2], étant donné un point $(A, \iota, \bar{\theta}, \bar{\alpha})$ du problème de module $M_K{}^1$, comme K laisse invariant $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$, on voit que le réseau adélique $\alpha(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ ne dépend pas du choix de α. Il existe un unique schéma abélien A_0 dans la classe d'isogénie de A, tel que $\widehat{T}(A_0)$ soit égal à $\alpha(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$. Comme $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ est stable sous l'action de $\mathscr{O}_D$, ce dernier anneau opère sur A_0. De plus, il est possible, et ce de façon unique, de choisir une polarisation effective $\theta \in \bar{\theta}$ de A_0, telle que $\alpha(V'_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ soit le réseau adélique dual de $\alpha(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ pour la forme symplectique associée à θ. L'isomorphisme de foncteurs $M_K{}^1 \xrightarrow{\sim} M_K$ envoie donc $(A, \iota, \bar{\theta}, \bar{\alpha})$ sur $(A_0, \iota, \theta, \overline{\alpha_{|V_{\widehat{\mathbb{Z}}}}})$. Enfin, noter que $\deg(\theta) = |V'_{\widehat{\mathbb{Z}}}/V_{\widehat{\mathbb{Z}}}|$.

Remarque 3.1.2

(1) Dans cet ouvrage, un sous-groupe ouvert compact K est dit *net* si M_K admet la description modulaire ci-dessus.

(2) Soit $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$, comme ψ induit une dualité parfaite sur $V_{\mathbb{Z}_\ell}$, la condition (3) implique que le degré de θ est premier à ℓ.

On spécifie une place finie ℓ de $\mathbb{Q}$. Soit $K = K_\ell K^\ell$. Alors la condition (3) peut être séparée comme suit :

(i) $\overline{\alpha_\ell} : T_\ell(A) \cong V_{\mathbb{Z}_\ell} (:= V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell)$ est une classe modulo K_ℓ d'isomorphismes symplectiques $\mathscr{O}_D$-linéaires pour la topologie étale sur S ;

(ii) $\overline{\alpha^\ell} : T^\ell(A) \cong V_{\widehat{\mathbb{Z}}^\ell} (:= V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^\ell)$ est une classe modulo K^ℓ d'isomorphismes symplectiques $\mathscr{O}_D$-linéaires pour la topologie étale sur S.

Soit $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$, on fixe jusqu'à la fin de cette section une place finie $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S_{\mathscr{F}}$ au-dessus de ℓ. Pour ce choix de λ, on en déduit (*cf.* (2.2.3)) un isomorphisme

$$G(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\mathfrak{l}' \mid \ell} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'}).$$

Le module de Tate $T_\ell(A)$ (dans le problème de module) admet alors des décompositions :

$$T_\ell(A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathfrak{l}' \mid \ell} T_{\mathfrak{l}'}(A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathfrak{l}' \mid \ell} T^+_{\mathfrak{l}'}(A) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{l}' \mid \ell} T^-_{\mathfrak{l}'}(A)$$

où

$$T_{\mathfrak{l}}(A) := \varprojlim_n A[\varpi_{\mathfrak{l}}^n]$$

avec $A[\varpi_{\mathfrak{l}}^n] := \bigcap_{\gamma \in \mathfrak{l}^n \mathscr{O}_F} \operatorname{Ker}(A \xrightarrow{\gamma} A)$. Notons

$$T_\ell^{-,\mathfrak{l}}(A) := \bigoplus_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} T^-_{\mathfrak{l}'}(A), \quad (V_{\mathbb{Z}_\ell})^{-,\mathfrak{l}} := \bigoplus_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} (V_{\mathbb{Z}_\ell})^-_{\mathfrak{l}'}$$

(puisque $V_{\mathbb{Z}_\ell}$ est un $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$-module).

Soit C un sous-groupe fini et plat $\mathscr{O}_D$-linéaire de A annulé par une puissance de ℓ (*e.g.* $C = A[\varpi_{\mathfrak{l}}^n]$). Alors C admet des décompositions (voir (2.2.2)) en utilisant les idempotents $e^{\pm,k}_{\mathfrak{l}'}$ de $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$:

$$C \xrightarrow{\sim} C^+ \times C^- \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{l}' \mid \ell} (C^+_{\mathfrak{l}'} \times C^-_{\mathfrak{l}'}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{l}' \mid \ell} (C^{+,1}_{\mathfrak{l}'} \times C^{+,2}_{\mathfrak{l}'} \times C^{-,1}_{\mathfrak{l}'} \times C^{-,2}_{\mathfrak{l}'}). \tag{3.1.1}$$

S'il existe de plus $\mathfrak{l}' \mid \ell$ et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tels que C soit un sous-groupe de $A[\varpi^n_{\mathfrak{l}'}]$, on voit facilement que l'on a $C^{\pm,k}_{\mathfrak{l}''} = 0$ pour tout $\mathfrak{l}'' \mid \ell$, $\mathfrak{l}'' \neq \mathfrak{l}'$ et $k = 1, 2$. Dans ce cas, on note alors

$$C^{\pm,k} := C^{\pm,k}_{\mathfrak{l}'} \quad \text{pour } k = 1, 2.$$

Considérons les exemples suivants :

Exemple 3.1.3. — Supposons

$$K_\ell \cong \mathbb{Z}_\ell^\times \times K^n_{\mathfrak{l}} \times K^{\mathfrak{l}}_\ell$$

avec $K^{\mathfrak{l}}_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'})$. Alors la condition (i) est équivalente à

(a) $\alpha_{\mathfrak{l}} : (\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}/\varpi^n_{\mathfrak{l}} \mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}})^2 \xrightarrow{\sim} A[\varpi^n_{\mathfrak{l}}]^{-,1}$ est un isomorphisme $\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}$-linéaire localement pour la topologie étale sur S ;

(b) $\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}_\ell} : T^{-,\mathfrak{l}}_\ell(A) \xrightarrow{\sim} (V_{\mathbb{Z}_\ell})^{-,\mathfrak{l}}$ est une classe modulo $K^{\mathfrak{l}}_\ell$ d'isomorphismes $\mathscr{O}_D$-linéaires localement pour la topologie étale sur S.

Lorsque $n = 0$, on dit que le groupe K est *maximal* en $\mathfrak{l}$. Dans ce cas, un S-point de M_K sera désigné par $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}})$ avec $\alpha^{\mathfrak{l}} := \alpha^\ell \times \alpha^{\mathfrak{l}}_\ell$. De plus, si c'est le cas, pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on note $K_{m,\mathfrak{l}}$ le sous-groupe de K avec

$$K^\ell_{m,\mathfrak{l}} = K^\ell \quad \text{et} \quad (K_{m,\mathfrak{l}})_\ell \cong \mathbb{Z}_\ell^\times \times K^m_{\mathfrak{l}} \times K^{\mathfrak{l}}_\ell.$$

Alors $M_{K_{m,\mathfrak{l}}}$ est un revêtement galoisien de M_K de groupe $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}/\varpi^m_{\mathfrak{l}})$ via la projection canonique $M_{K_{m,\mathfrak{l}}} \to M_K$ (*cf.* [**20**, §3.3.2]). Lorsque $\mathfrak{l} = \wp$, on notera $K_m := K_{m,\wp}$.

Exemple 3.1.4. — Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Supposons

$$K_\ell \cong \mathbb{Z}_\ell^\times \times I_\mathfrak{l}^n \times K_\ell^\mathfrak{l}.$$

Alors la condition (i) est équivalente à :

(a) il existe un sous-groupe $\mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}}$-linéaire fini et plat H de $A[\varpi_\mathfrak{l}^n]^{-,1}$ d'ordre $\ell^{nd_{\mathfrak{l},0}}$ tel que $H \cong \mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}}/\varpi_\mathfrak{l}^n$ localement pour la topologie étale sur S ;

(b) $\overline{\alpha_\ell^\mathfrak{l}} : T_\ell^{-,\mathfrak{l}}(A) \xrightarrow{\sim} (V_{\mathbb{Z}_\ell})^{-,\mathfrak{l}}$ est une classe modulo $K_\ell^\mathfrak{l}$ d'isomorphismes $\mathscr{O}_D$-linéaires localement pour la topologie étale sur S.

Dans ce cas, on dit que K est *Iwahorique* en $\mathfrak{l}$. Un S-point de M_K sera désigné par $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\mathfrak{l}}, H)$ avec $\alpha^\mathfrak{l} := \alpha^\ell \times \alpha_\ell^\mathfrak{l}$. Pour un sous-groupe net K de $\mathbb{G}(\mathbb{A}^\infty)$ maximal en $\mathfrak{l}$, on note $M_K(\mathfrak{l}^n) := M_{K'}$ où K' est un sous-groupe de K tel que $(K')^\ell = K^\ell$ et $K'_\ell \cong \mathbb{Z}_\ell^\times \times I_\mathfrak{l}^n \times K_\ell^\mathfrak{l}$. On dispose donc d'une projection naturelle

$$p_1 : M_K(\mathfrak{l}^n) \longrightarrow M_K,\ (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\mathfrak{l}}, H) \mapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\mathfrak{l}}).$$

Soient $\ell \in S_\mathbb{Q}$, $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S_\mathscr{F}$ au-dessus de ℓ, posons (*cf.* [**48**, §4.4] et [**46**, p. 109–110])

Définition 3.1.5. — Soit $(A, \iota, \theta, \bar{\alpha})$ un S-point de M_K, un sous-groupe (fermé) fini et plat $\mathscr{O}_D$-linéaire C de A est appelé un *sous-$(\lambda, \mathfrak{l})$-groupe d'échelon $n \in \mathbb{Z}_{>0}$* s'il satisfait les conditions ci-après :

- C est annulé par $\ell^{d_{\mathfrak{l},0}n}$, et d'ordre $(\ell^{d_{\mathfrak{l},0}})^{4d_F n}$;
- $C_\mathfrak{l}^{-,1}$ est un sous-groupe de $A[\varpi_\mathfrak{l}^n]^{-,1}$ d'ordre $\ell^{d_{\mathfrak{l},0}n}$ tel que $C_\mathfrak{l}^{-,1} \cong \mathscr{O}_{F_\mathfrak{l}}/\varpi_\mathfrak{l}^n$ localement pour la topologie étale sur S ;
- $C_{\mathfrak{l}'}^{-,1} = 0$, pour toute place $\mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}$ de F au-dessus de ℓ ;
- $\theta : A[\ell^{d_{\mathfrak{l}_0}n}] \xrightarrow{\sim} A^\vee[\ell^{d_{\mathfrak{l}_0}n}]$ envoie C sur $(A[\ell^{d_{\mathfrak{l}_0}n}]/C)^\vee$.

Remarque 3.1.6

(1) L'accouplement de Weil induit une dualité parfaite entre $A[\ell^{d_{\mathfrak{l}_0}n}]^+$ et $A[\ell^{d_{\mathfrak{l}_0}n}]^-$, alors la dernière condition ci-dessus est équivalente à $C \cong C^- \oplus (C^-)^\perp$.

(2) On voit facilement qu'un sous-$(\lambda, \mathfrak{l})$-groupe C d'échelon n est déterminé uniquement par le sous-groupe $C_\mathfrak{l}^{-,1}$. Un S-point $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\mathfrak{l}}, H)$ de M_K comme dans l'exemple 3.1.4 sera désigné parfois par $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\mathfrak{l}}, C)$ où C est le sous-$(\lambda, \mathfrak{l})$-groupe d'échelon n de A vérifiant $C_\mathfrak{l}^{-,1} \cong H$.

On utilisera cette version du problème de modules dans la suite.

3.1.2. Actions de $G(\mathbb{A}^\infty)$. — Nous décrivons l'action de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sur le système des courbes de Shimura $\{M_K\}$ en terme du problème de modules (voir aussi [**20**, §3.4] et [**66**, §5]).

Par (2.1.2), on dispose d'une application $\nu_{\mathbb{A}^\infty} : G(\mathbb{A}^\infty) \to (\mathbb{A}^\infty)^\times$. Notons ν la composée :

$$\nu : G(\mathbb{A}^\infty) \xrightarrow{\nu_{\mathbb{A}^\infty}} (\mathbb{A}^\infty)^\times \longrightarrow (\mathbb{A}^\infty)^\times/\widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \mathbb{Q}_+^\times.$$

Soient K un sous-groupe ouvert compact net de $G(\mathbb{A}^\infty)$ et $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$, alors g induit un morphisme $r_g : M_K \to M_{g^{-1}Kg}$. Supposant $g^{-1}Kg$ net, on décrit ce morphisme en terme du problème de modules. Soient S un schéma sur $\operatorname{Spec} F_\wp$ et $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha})$ un S-point de M_K, on déduit de $\alpha : V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{T}(A)$ un isomorphisme :

$$\alpha_{\mathbb{Q}} : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^\infty \cong V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \widehat{V}(A).$$

On obtient donc un isomorphisme $\mathscr{O}_D$-linéaire

$$V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^\infty \xrightarrow[\sim]{g} V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^\infty \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathbb{Q}}} \widehat{V}(A).$$

Supposons de plus $V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \subset g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$, alors $(\alpha_{\mathbb{Q}} \circ g)(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ est un réseau adélique contenant $\widehat{T}(A)$ dans $\widehat{V}(A)$. Il existe donc un unique schéma abélien A' dans la classe d'isogénie de A tel que $\widehat{T}(A')$ soit égal à $(\alpha_{\mathbb{Q}} \circ g)(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$. On obtient une isogénie $\phi : A \to A'$, de façon unique, telle que l'application sur les modules de Tate induite $\widehat{\phi} : \widehat{T}(A) \to \widehat{T}(A')$ soit égale à l'injection $\widehat{T}(A) \hookrightarrow (\alpha_{\mathbb{Q}} \circ g)(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$. Comme le réseau $(\alpha_{\mathbb{Q}} \circ g)(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ est invariant sous l'action de $\mathscr{O}_D$, le schéma abélien A' est muni d'une action naturelle de $\mathscr{O}_D$, notée

$$\iota' : \mathscr{O}_D \longrightarrow \operatorname{End}_S(A').$$

L'isogénie ϕ est $\mathscr{O}_D$-linéaire car $\alpha_{\mathbb{Q}} \circ g$ l'est.

De plus, il est possible, et ce de façon unique, de choisir une polarisation effective

$$\theta' : A' \longrightarrow A'^\vee$$

telle que $(\alpha_{\mathbb{Q}} \circ g)(V'_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ soit le réseau adélique dual de $(\alpha_{\mathbb{Q}} \circ g)(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ pour la forme symplectique associée à θ'. Explicitement, notons $\phi^\vee : A'^\vee \to A^\vee$ l'isogénie duale de ϕ, on choisit θ', de manière unique, telle que le diagramme suivant soit commutatif (*cf.* [**66**, §5] et [**46**, p. 110]) :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\nu(g)\theta} & A^\vee \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\phi^\vee} \\ A' & \xrightarrow{\theta'} & A'^\vee . \end{array} \tag{3.1.2}$$

Enfin, on obtient une classe modulo $g^{-1}Kg$ d'isomorphismes symplectiques $\mathscr{O}_D$-linéaires :

$$\alpha' : V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \xrightarrow[\sim]{g} g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}}) \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathbb{Q}}} \widehat{T}(A').$$

On vérifie que $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha})$ est envoyé sur $(A', \iota', \theta', \overline{\alpha'})$ via le morphisme r_g.

Exemple 3.1.7. — Soient $(\lambda, \mathfrak{l}) \mid \ell \in S_{\mathscr{F}}$ et $K = K_\ell K^\ell$ un sous-groupe net de $G(\mathbb{A}^\infty)$ avec $K_\ell \cong \mathbb{Z}_\ell^\times \times K_{\mathfrak{l}}^n \times K_\ell^{\mathfrak{l}}$, alors l'action de $g \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}})$ ($\hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell)$, via (2.2.3)) sur M_K (noter que $K_{\mathfrak{l}}^n$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{l}}})$) est donnée par (voir l'exemple 3.1.3)

$$r_g(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},\alpha_{\mathfrak{l}}) = \big(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},\alpha_{\mathfrak{l}}\circ(g^{-1})^t\big),$$

où « t » signifie la transposition et où $\alpha_{\mathfrak{l}}\circ(g^{-1})^t$ signifie la composée

$$(\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{l}}}/\varpi_{\mathfrak{l}}^n\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{l}}})^2 \xrightarrow[\sim]{(g^{-1})^t} (\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{l}}}/\varpi_{\mathfrak{l}}^n\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{l}}})^2 \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathfrak{l}}} A[\varpi_{\mathfrak{l}}^n]^{-,1}.$$

3.1.3. Correspondances de Hecke. — Soient K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$, $g\in G(\mathbb{A}^\infty)$, on dispose donc d'une correspondance de Hecke associée à la double classe KgK :

$$\begin{tikzcd} M_{K\cap gKg^{-1}} \arrow[r, "r_g"] \arrow[d] & M_{K\cap g^{-1}Kg} \arrow[d] \\ M_K \arrow[r, dashed, "{[KgK]}"'] & M_K . \end{tikzcd}$$

Supposons de plus K net, nous pouvons décrire cette correspondance en terme du problème de modules de la même façon qu'au § 3.1.2. Précisons plusieurs exemples que nous utiliserons.

Commençons par un lemme (voir [**48**, lemme 4.4]).

Lemme 3.1.8. — *Soient S un schéma, A un schéma abélien sur S, $\theta : A\to A^\vee$ une polarisation et C un sous-groupe fini et plat de A sur S, notons*

$$\phi : A \longrightarrow A/C$$

l'isogénie naturelle. Supposons C annulé par $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ avec $(n,\deg\theta)=1$ et soit

$$\psi : A/C \longrightarrow A$$

l'isogénie telle que $\psi\circ\phi=[n]$ (le noyau de ψ est donc $A[n]/C$). Supposons de plus que l'isomorphisme $\theta : A[n]\xrightarrow{\sim} A^\vee[n]$ envoie C sur $(A[n]/C)^\vee$. Alors il existe une unique polarisation θ' de A/C telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} A/C \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[d, "\theta"'] \\ (A/C)^\vee \arrow[r, "\phi^\vee"] & A^\vee . \end{tikzcd} \tag{3.1.3}$$

Démonstration. — La preuve est la même que celle de [**48**, lemme 4.4]. ∎

On fixe jusqu'à la fin de cette section une place finie $\ell\in S_{\mathbb{Q}}$ et une place finie $(\lambda,\mathfrak{l})\in S_{\mathscr{F}}$ au-dessus de ℓ (on fixe donc un isomorphisme *cf.* (2.2.3) :

$$G(\mathbb{Q}_\ell)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}_\ell^\times\times\prod_{\mathfrak{l}'\mid\ell}\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'})\big).$$

Exemple 3.1.9. — Soit
$$g=\ell^n\times\prod_{\mathfrak{l}'\mid\ell}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in G(\mathbb{Q}_\ell).$$
Considérons la correspondance de Hecke χ_{λ,ℓ^n} associée à la double classe $[KgK]$ (comme $gK=Kg$, χ_{λ,ℓ^n} n'est autre que le morphisme r_g). Soient S un schéma sur $\operatorname{Spec}F_\wp$, $(A,\iota,\theta,\bar\alpha)$ un S-point de M_K, notons $A':=A/A[\ell^n]^+$ et $\phi:A\to A'$ l'isogénie canonique. Comme $A[\ell^n]^+$ est invariant sous l'action de $\mathscr{O}_D$, il existe donc une action naturelle de $\mathscr{O}_D$ sur A' (notée $\iota':\mathscr{O}_D\to\operatorname{End}(A')$). De plus, il est clair (par la condition (3) dans le problème de modules, voir aussi la remarque 3.1.6) que l'isomorphisme $\theta:A[\ell^n]\xrightarrow{\sim}A^\vee[\ell^n]$ envoie $A[\ell^n]^+$ sur $(A[\ell^n]/A[\ell^n]^+)^\vee$, par le lemme 3.1.8, on dispose d'une isogénie $\theta':A'\to(A')^\vee$. Enfin notons
$$\alpha'=\alpha\circ g:V_{\widehat{\mathbb{Z}}}\xrightarrow{g}g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})\xrightarrow{\alpha}\widehat{T}\big(A/A[\ell^n]^+\big)$$
(on a bien $g(V_{\mathbb{Z}_\ell})=(\frac{1}{\ell^n}V^+_{\mathbb{Z}_\ell})\oplus V^-_{\mathbb{Z}_\ell}\supset V_{\mathbb{Z}_\ell}$). Selon la discussion au §3.1.2, on vérifie que le morphisme χ_{λ,ℓ^n} envoie $(A,\iota,\theta,\bar\alpha)$ sur $(A',\iota',\theta',\overline{\alpha'})$. On voit facilement que χ_{λ,ℓ^n} est un isomorphisme, et on a $\chi_{\lambda,\ell^n}=\chi^n_{\lambda,\ell}$.

Exemple 3.1.10. — Soit
$$g=\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}\times\left(\begin{smallmatrix}\varpi_{\mathfrak{l}}&0\\0&\varpi_{\mathfrak{l}}\end{smallmatrix}\right)\times\prod_{\substack{\mathfrak{l}'\mid\ell\\ \mathfrak{l}'\neq\mathfrak{l}}}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{Q}_\ell^\times\times\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})\times\prod_{\substack{\mathfrak{l}'\mid\ell\\ \mathfrak{l}'\neq\mathfrak{l}}}\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'}).$$
Considérons la correspondance de Hecke $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$ de la double classe KgK (qui n'est autre encore que le morphisme r_g). Soient S un schéma sur $\operatorname{Spec}F_\wp$, $(A,\iota,\theta,\bar\alpha)$ un S-point de M_K. Notons
$$C:=A[\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}/\varpi_{\mathfrak{l}}]^+\oplus A[\varpi_{\mathfrak{l}}]^-,$$
$A':=A/C$ et $\phi:A\to A'$ l'isogénie canonique. Comme C est invariant sous l'action de $\mathscr{O}_D$, il existe une action naturelle de $\mathscr{O}_D$ sur A' (notée $\iota:\mathscr{O}_D\to\operatorname{End}(A')$). Il est clair que l'isomorphisme $\theta:A[\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}]\xrightarrow{\sim}A^\vee[\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}]$ envoie C sur $(A[\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}]/C)^\vee$. Par le lemme 3.1.8, on obtient une polarisation $\theta':A'\to(A')^\vee$. On vérifie que le morphisme $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$ est donné par
$$Y_{\lambda,\mathfrak{l}}:M_K\longrightarrow M_K,\quad(A,\iota,\theta,\bar\alpha)\longmapsto(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha'}),$$
où α' est défini comme dans l'exemple 3.1.9. Notons
$$S_{\lambda,\mathfrak{l}}:=\chi^{-1}_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}}Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$$
qui est donc égal au morphisme $r_{g'}:M_K\to M_K$ avec
$$g'=1\times\left(\begin{smallmatrix}\varpi_{\mathfrak{l}}&0\\0&\varpi_{\mathfrak{l}}\end{smallmatrix}\right)\times\prod_{\substack{\mathfrak{l}'\mid\ell\\ \mathfrak{l}'\neq\mathfrak{l}}}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{Q}_\ell^\times\times\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})\times\prod_{\substack{\mathfrak{l}'\mid\ell\\ \mathfrak{l}'\neq\mathfrak{l}}}\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'}),$$
et $S_\wp:=S_{u,\wp}$ pour simplifier.

Exemple 3.1.11. — Soit

$$g = \ell^{d_{\mathfrak{l},0}} \times \begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{l}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_\ell^\times \times \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}) \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid l \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'}),$$

et considérons la correspondance $[KgK] : M_K \dashrightarrow M_K$. On se penche sur les deux cas suivants :

(1) Supposons le groupe K maximal en $\mathfrak{l}$.

Soient S un schéma sur $\operatorname{Spec} F_\wp$, $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}})$ un S-point de M_K, C un sous-$(\lambda, \mathfrak{l})$-groupe de A d'échelon 1. Comme le groupe C est $\mathscr{O}_D$-linéaire, il existe une action naturelle de $\mathscr{O}_D$ sur A/C, que nous notons $\iota' : \mathscr{O}_D \to \operatorname{End}(A/C)$. Par le lemme 3.1.8 (et la définition 3.1.5), nous disposons d'une polarisation $\theta' : A/C \to (A/C)^\vee$. Nous avons deux morphismes :

$$p_1 : M_K(\mathfrak{l}) \longrightarrow M_K, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}, C) \longmapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}),$$
$$p_2 : M_K(\mathfrak{l}) \longrightarrow M_K, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}, C) \longmapsto (A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}).$$

La correspondance de Hecke $X_{\lambda,\mathfrak{l}} := [KgK]$ sur M_K est alors donnée par

$$X_{\lambda,\mathfrak{l}} : M_K \dashrightarrow M_K, \ (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}) \mapsto \sum_C (A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}),$$

où C parcourt tous les sous-$(\lambda, \mathfrak{l})$-groupes d'échelon 1 de A.

(2) Soit K' le sous-groupe de K avec

$$(K')^\ell = K^\ell \quad \text{et} \quad K'_\ell \cong \mathbb{Z}_\ell^\times \times I_{\mathfrak{l}}^n \times K^{\mathfrak{l}} \quad \text{pour un } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

On vérifie de façon analogue que la correspondance

$$X'_{\lambda,\mathfrak{l}} := [K'gK']$$

sur $M_K(\mathfrak{l}^n)\,(= M_{K'})$ est donnée par (*cf.* la remarque 3.1.6 (2)) :

$$X'_{\lambda,\mathfrak{l}} : M_K(\mathfrak{l}^n) \dashrightarrow M_K(\mathfrak{l}^n), \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}, C) \longmapsto \sum_{C'} \left(A/C', \iota', \theta', \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}, \overline{C_{\mathfrak{l}}^{-,1}}\right)$$

où C' parcourt tous les sous-$(\lambda, \mathfrak{l})$-groupes d'échelon 1 de A différents de C_1 qui est l'unique sous-$(\lambda, \mathfrak{l})$-groupe d'échelon 1 de A contenu dans C (autrement dit, $(C')_{\mathfrak{l}}^{-,1} \cap C_{\mathfrak{l}}^{-,1} = 0$), où $\overline{C_{\mathfrak{l}}^{-,1}}$ désigne l'image de $C_{\mathfrak{l}}^{-,1}$ via l'isogénie $A \to A/C'$ et où les ι', θ' sont définis comme précédemment. Noter que l'on a utilisé deux notations pour désigner un point de $M_K(\mathfrak{l}^n)$ (*cf.* l'exemple 3.1.4 et la remarque 3.1.6 (2)).

Dans ce cas, lorsque $n = 1$, on a aussi une correspondance (un morphisme) $[K'g'K'] = r_{g'}$ où

$$g' := \ell^{d_{\mathfrak{l},0}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_{\mathfrak{l}} \end{pmatrix} \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \Phi_{\lambda,\mathfrak{l}} : M_K(\mathfrak{l}) \longrightarrow M_K(\mathfrak{l}),$$
$$\left(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}, C\right) \longmapsto \left(A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}, A[\varpi_{\mathfrak{l}}]^{-,1}/C_{\mathfrak{l}}^{-,1}\right).$$

Notons $T_{\lambda,\mathfrak{l}} := \chi^{-1}_{\lambda,\mathfrak{l}^d\mathfrak{l},0} X_{\lambda,\mathfrak{l}}$ (resp. $U_{\lambda,\mathfrak{l}} := \chi^{-1}_{\lambda,\mathfrak{l}^d\mathfrak{l},0} X'_{\lambda,\mathfrak{l}}$), qui est donc égal à la correspondance $[Kg''K]$ lorsque K est maximal en $\mathfrak{l}$ (resp. lorsque K est Iwahorique en $\mathfrak{l}$) sur M_K où

$$g'' = 1 \times \left(\begin{smallmatrix} \varpi_{\mathfrak{l}} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}_\ell^\times \times \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}) \times \prod_{\substack{\mathfrak{l}' \mid \ell \\ \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}}} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}'}).$$

Posons $T_\wp := T_{u,\wp}$ et $U_\wp := U_{u,\wp}$.

3.2. Systèmes locaux sur les courbes de Shimura unitaires

3.2.1. Systèmes locaux. — Soient K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ et W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une représentation de $G(\mathbb{C})$. On définit un système local $\mathscr{V}'_{W,K}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur $M_K(\mathbb{C})$ en posant

$$\mathscr{V}'_{W,K}(\mathbb{C}) := G(\mathbb{Q}) \setminus \big(W \times (X \times G(\mathbb{A}^\infty)/K)\big),$$

où $G(\mathbb{Q})$ agit sur W via le plongement $G(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{C})$.

On considère W comme représentation de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via $\varsigma^{-1} : \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$, qui est donc munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p)$ via le plongement $G(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On obtient alors un système local de $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espaces vectoriels sur $M_K(\mathbb{C})$:

$$\mathscr{V}_{W,K}(\mathbb{C}) := \big(\big(G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}^\infty)\big) \times W\big)/K, \tag{3.2.1}$$

où K agit sur W par

$$x \cdot k = k_p^{-1} x$$

pour tout $x \in W$ et tout $k = k_p k^p \in K$ avec $k_p \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $k^p \in G(\mathbb{A}^{\infty,p})$. On vérifie que le morphisme de systèmes locaux de $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espaces vectoriels sur $M_K(\mathbb{C})$:

$$\varsigma^{-1}\big(\mathscr{V}'_{W,K}(\mathbb{C})\big) \longrightarrow \mathscr{V}_{W,K}(\mathbb{C}), \quad (w, g) \longmapsto (g_p^{-1} w, g)$$

où $w \in W$, $g \in X \times G(\mathbb{A}^\infty)$, $g_p \in G(\mathbb{Q}_p)$, est un isomorphisme (voir par exemple [**34**, lemme 2.2.4]).

On utilisera la deuxième définition (3.2.1) dans la suite.

Soit W une représentation algébrique de dimension finie de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Alors W se trouve être une représentation de G sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$.

Soit W_0 un $\mathscr{O}_E$-réseau de W invariant sous l'action de K_p. On associe à W_0 un système local de $\mathscr{O}_E$-réseaux sur $M_K(\mathbb{C})$:

$$\mathscr{V}_{W_0,K}(\mathbb{C}) := \big(\big(G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}^\infty)\big) \times W_0\big)/K\,, \tag{3.2.2}$$

où K_n agit sur W_0 par

$$x \cdot k = k_p^{-1} x$$

pour tout $x \in W_0$ et tout $k = k_p k^p \in K$ avec $k_p \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $k^p \in G(\mathbb{A}^{\infty,p})$.

De même, pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on dispose d'un système local de $\mathscr{O}_E/\varpi_E^s\mathscr{O}_E$-réseaux sur $M_K(\mathbb{C})$:

$$\mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s,K}(\mathbb{C}) := \big(\big(G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}^\infty)\big) \times W_0/\varpi_E^s\big)/K. \tag{3.2.3}$$

Les systèmes locaux $\mathscr{V}_{W,K}(\mathbb{C})$, $\mathscr{V}_{W_0,K}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s W_0,K}(\mathbb{C})$ sur $M_K(\mathbb{C})$ proviennent de systèmes locaux sur M_K (sur $\mathscr{F}$) lorsque K est net.

En effet, pour $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, soit K' un sous-groupe normal ouvert compact de K assez petit pour que l'action de $(K')_p$ sur $W_0/\varpi_E^s W_0$ soit triviale, *i.e.*

$$\mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s W_0,K'}(\mathbb{C}) \cong M_{K'}(\mathbb{C}) \times W_0/\varpi_E^s W_0.$$

Comme $M_{K'}$ est un revêtement galoisien de M_K de groupe K/K', on obtient un système local de $\mathscr{O}_E/\varpi_E^s\mathscr{O}_E$-réseaux sur M_K :

$$\mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s,K} := (M_{K'} \times W_0/\varpi_E^s W_0)/(K/K') \tag{3.2.4}$$

(où K agit sur $W_0/\varpi_E^s W_0$ par $x \cdot k = k_p^{-1}x$ pour tout $x \in W_0/\varpi_E^s$ et tout $k = k_p k^p \in K$) dont les $\mathbb{C}$-points coïncident avec $\mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s,K}(\mathbb{C})$ (voir (3.2.3)). On pose

$$\mathscr{V}_{W_0,K} := \varprojlim_s \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s W_0,K} \quad \text{et} \quad \mathscr{V}_{W,K} := \mathscr{V}_{W_0,K} \otimes_{\mathscr{O}_E} E.$$

Remarque 3.2.1. — Considérons le système projectif des courbes de Shimura unitaires $\{M_K\}_K$. On voit que les systèmes locaux $\{\mathscr{V}_{W,K}\}$ sont compatibles avec les morphismes de transition (dans ce système projectif), *i.e.* pour $K' \subset K$, le pull-back du système local $\mathscr{V}_{W,K}$ sur $M_{K'}$ est isomorphe naturellement au système local $\mathscr{V}_{W,K'}$. On omet alors parfois le niveau « K » dans la notation d'un système local sur M_K.

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$. Posons

$$W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})} := \bigotimes_{\sigma \in \Sigma_p} \big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} E^2 \otimes (\overset{2}{\wedge} E^2)^{k_{2,\sigma}}\big)^\sigma, \tag{3.2.5}$$

où les produits tensoriels sont sur E. C'est une représentation de $\mathrm{GL}_2(F \otimes_\mathbb{Q} E)$ (donc une représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ via (2.3.1)) où l'action de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur

$$\big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} E^2 \otimes (\overset{2}{\wedge} E^2)^{k_{2,\sigma}}\big)^\sigma$$

est induite par l'action standard de $\mathrm{GL}_2(E)$ via le plongement $\sigma : F \hookrightarrow E$.

Le système local associé sur M_K (sur $\mathscr{F}$) est noté

$$\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}.$$

3.2.2. Description modulaire de systèmes locaux. — Soit K un sous-groupe ouvert compact net de $G(\mathbb{A}^\infty)$, et notons $\varepsilon : \mathscr{A} \to M_K$ le schéma abélien universel sur M_K (sur $F_\wp$) . Considérons le système local

$$R^1\varepsilon_* E \cong (R^1\varepsilon_*\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$$

de E-espaces vectoriels (de dimension $8d_F$) sur M_K. Comme $\mathscr{A}$ est muni d'une action de $\mathscr{O}_D$, $R^1\varepsilon_*E$ est muni d'une action de $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} E$. Notons

$$(R^1\varepsilon_*E)^{\pm,k}_{\wp_i,\sigma} := e^{\pm,k}_{\wp_i,\sigma}(R^1\varepsilon_*E)$$

pour tout $\wp_i \,|\, p,\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}$ et $k = 1, 2$. Posons

$$\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E) := \bigotimes_{\substack{\wp_i \,|\, p \\ \sigma\in\Sigma_{\wp_i}}} \big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2}(R^1\varepsilon_*E)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \otimes_E (\bigwedge^2_E (R^1\varepsilon_*E)^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^{k_{2,\sigma}}\big). \tag{3.2.6}$$

Le but de cette sous-section est de montrer le résultat suivant.

Proposition 3.2.2. — *On a un isomorphisme naturel de systèmes locaux sur M_K (sur $F_\wp$) :*

$$\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \xrightarrow{\sim} \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E). \tag{3.2.7}$$

Pour toute place $\wp_i \,|\, p$ de F, notons $V_i := F^2_{\wp_i}$ la représentation standard de $\mathrm{GL}_2(F_{\wp_i})$ de dimension 2 sur $F_{\wp_i}$. On peut voir V_i comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ via la projection $G(\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(F_{\wp_i})$ (*cf.* (2.3.1)). Notons $\mathscr{V}_i$ le système local associé sur M_K, on a alors (*cf.* (3.2.1))

$$\mathscr{V}_i(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \big(\big(G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}^\infty)\big) \times V_i\big)/K.$$

Supposons $K_{\wp_i} \subset \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{\wp_i})$, et notons

$$V_i^0 := \mathscr{O}^2_{\wp_i}$$

le $\mathscr{O}_{\wp_i}$-réseau $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{\wp_i})$-stable de $F^2_{\wp_i}$. On peut associer à V_i^0 un système local de $\mathscr{O}_{\wp_i}$-réseaux $\mathscr{V}_i^0$ sur M_K tel que (*cf.* (3.2.2))

$$\mathscr{V}_i^0(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \big(\big(G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}^\infty)\big) \times V_i^0\big)/K.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on a de plus un système local de $\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n$-réseaux

$$\mathscr{V}^0_{i,n} := \mathscr{V}_i^0/\varpi_i^n \quad (\text{où } \varpi_i := \varpi_{\wp_i})$$

vérifiant

$$\mathscr{V}^0_{i,n}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \big(\big(G(\mathbb{Q}) \setminus X \times G(\mathbb{A}^\infty)\big) \times V_i^0/\varpi_i^n\big)/K.$$

Pour tout plongement $\sigma : F_{\wp_i} \hookrightarrow E$, notons

$$V_{i,\sigma} := V_i \otimes_{F_{\wp_i},\sigma} E$$

la représentation de $\mathrm{GL}_2(F_{\wp_i})$ de dimension 2 sur E. On associe à $V_{i,\sigma}$, vu comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E via (2.3.1), un système local $\mathscr{V}_{i,\sigma}$ de E-espaces vectoriels sur M_K. On a par définition

$$\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} \mathrm{Sym}_E^{k_{1,\sigma}-2} \mathscr{V}_{i,\sigma} \otimes_E (\bigwedge^2 \mathscr{V}_{i,\sigma})^{k_{2,\sigma}}.$$

On donne des comparaisons entre les systèmes locaux $\mathscr{V}_{i,n}^0$ et $\mathscr{A}[\varpi_i^n]^{-,1}$ (d'où on peut déduire la proposition). Supposant K maximal en $\wp_i$, on a un isomorphisme de faisceaux sur $M_{K_{n,\wp_i}}$ (*cf.* l'exemple 3.1.3)

$$\alpha_i := \alpha_{\wp_i} : M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2 \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}[\varpi_i^n]^{-,1}.$$

Soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{\wp_i}) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$, selon la description modulaire du morphisme $r_g : M_{K_{n,\wp_i}} \to M_{K_{n,\wp_i}}$ (voir l'exemple 3.1.7). On dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2 \arrow[r, "(\mathrm{id},g^t)"] \arrow[d, "\alpha_i"] & M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2 \arrow[r, "(r_g,\mathrm{id})"] \arrow[d, "\alpha_i\circ(\mathrm{id},(g^{-1})^t)"] & M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2 \arrow[d, "\alpha_i"] \\
\mathscr{A}[\varpi_i^n]^{-,1} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \mathscr{A}[\varpi_i^n]^{-,1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A}[\varpi_i^n]^{-,1} \arrow[d, "\varepsilon"] \\
 & M_{K_{n,\wp_i}} \arrow[r, "r_g"] & M_{K_{n,\wp_i}}
\end{tikzcd}$$

où les carrés de droite sont cartésiens. On en déduit qu'il existe un isomorphisme canonique de systèmes locaux sur M_K :

$$\alpha_i : \left(M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2\right)/(K/K_{n,\wp_i}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}[\varpi_i^n]^{-,1}, \tag{3.2.8}$$

où l'action de K sur $M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2$ est donnée par

$$M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2 \xrightarrow{(r_g,(g_{\wp_i}^{-1})^t)} M_{K_{n,\wp_i}} \times (\mathscr{O}_{\wp_i}/\varpi_i^n)^2, \tag{3.2.9}$$

pour tout $g = g_{\wp_i} g^{\wp_i} \in K$ avec $g_{\wp_i} \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{\wp_i})$. On voit alors que le terme de gauche de (3.2.8) est isomorphe au système local $(\mathscr{V}_{i,n}^0)^\vee$ (*cf.* (3.2.4)). On obtient donc un isomorphisme de systèmes locaux sur M_K

$$\alpha_i^\vee : \mathscr{V}_{i,n}^0 \xrightarrow{\sim} \left(\mathscr{A}[\varpi_i^n]^{-,1}\right)^\vee.$$

Rappelons que l'on a une dualité canonique entre $\mathscr{A}[p^n]$ et $R^1\varepsilon_*(\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p)$ qui induit une dualité entre $\mathscr{A}[\varpi_i^{e_i n}]^{-,1}$ et $(R^1\varepsilon_*(\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p))_{\wp_i}^{-,1}$ (où e_i désigne le degré de ramification de $F_{\wp_i}$ sur $\mathbb{Q}_p$). On dispose donc d'un isomorphisme naturel de systèmes locaux sur M_K :

$$\alpha_i^\vee : \mathscr{V}^0_{i,e_in} \xrightarrow{\sim} \big(R^1\varepsilon_*(\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p)\big)^{-,1}_{\wp_i}. \tag{3.2.10}$$

En prenant la limite projective puis le produit tensoriel avec $\mathbb{Q}_p$, on obtient un isomorphisme naturel de systèmes locaux de $F_{\wp_i}$-espaces vectoriels (de dimension 2) sur M_K :

$$\alpha_i^\vee : \mathscr{V}_i \xrightarrow{\sim} (R^1\varepsilon_*\mathbb{Q}_p)^{-,1}_{\wp_i}, \tag{3.2.11}$$

d'où on déduit l'isomorphisme (3.2.7).

3.2.3. Cohomologie étale. — Soit K un sous-groupe ouvert compact net de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, on a des isomorphismes de E-espaces vectoriels de dimension finie

$$\begin{aligned} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) &\xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \\ &\xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)\big) \end{aligned}$$

où $M_{K,\overline{\mathbb{Q}}} := M_K \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{F}} \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Q}}$, et

$$M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p} := M_K \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{F}} \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Q}}_p \cong (M_K \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{F},u} \operatorname{Spec} F_\wp) \times_{\operatorname{Spec} F_\wp} \operatorname{Spec}\overline{\mathbb{Q}}_p.$$

Le premier est muni d'une action de $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ et les autres sont munis d'une action de $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$, et les isomorphismes sont $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$-équivariants. Les cohomologies sont munies d'une action de Hecke de $[KgK]$ (l'opérateur de double classe) pour tout $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$. Expliquons cette action sur

$$H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)\big)$$

en terme du problème de modules du §3.1.1.2.

Notons $K' := gKg^{-1} \cap K$ et supposons K' net. Considérons la correspondance de Hecke :

$$M_K \xleftarrow{\mathrm{pr}} M_{K'} \xrightarrow{r_g} M_K.$$

Supposons de plus $V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \subseteq g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$. D'après le §3.1.2, on dispose d'un diagramme commutatif (avec les notations du §3.1.2) :

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{A} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dl] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \mathscr{A}' \arrow[dl, "\varepsilon'"'] \arrow[dr] & \\ \mathscr{A} \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & M_{K'} \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \arrow[dr, "r_g"] & & \mathscr{A} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & M_K & & M_K & \end{tikzcd} \tag{3.2.12}$$

où les deux carrés sont cartésiens. On vérifie que l'opérateur $[KgK]$ est donné par la composée

$$\begin{aligned}[KgK] : H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_* E)\big) \\ \xrightarrow{r_g^*} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K',\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon'_* E)\big) \\ \xrightarrow{\phi^*} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K',\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_* E)\big) \\ \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_* E)\big),\end{aligned}$$

où l'application trace $\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}$ est bien définie car le morphisme pr est fini étale. En particulier, par les exemples 3.1.9, 3.1.10, et 3.1.11, on dispose des opérateurs χ_{λ,ℓ^n}, $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$ et $X_{\lambda,\mathfrak{l}}$ (resp. $X'_{\lambda,\mathfrak{l}}$ et $\Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}$) sur $H^1_{\text{ét}}(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_* E))$ lorsque K est maximal en $\mathfrak{l}$ (resp. K est de niveau Iwahorique en $\mathfrak{l}$).

Fixons une place $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$ différente de p, et $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S_{\mathscr{F}}$ au-dessus de ℓ. Supposons le groupe K maximal en $\mathfrak{l}$, la courbe $M_K \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{F},\lambda} \operatorname{Spec} F_{\mathfrak{l}}$ admet alors un $\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}$-modèle $\mathbb{M}_{K,\mathfrak{l}}$ lisse et propre (*cf.* [**20**, § 5]). De plus, en utilisant la description modulaire de $\mathbb{M}_{K,\mathfrak{l}}$ de *loc. cit.* et la description modulaire de $\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ du § 3.2.2), on peut voir que le système local $\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ provient d'un système local de E-espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{M}_{K,\mathfrak{l}}$. En particulier, on en déduit (*cf.* [**29**, th. v.3.1]) que la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})$

$$\begin{aligned} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\big|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})} \\ \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}\big(M_K \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{F},(\lambda,\mathfrak{l})} F_{\mathfrak{l}} \times_{F_{\mathfrak{l}}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\end{aligned}$$

est non ramifiée. De plus, d'après [**20**, §4 et § 10.3] (voir aussi [**21**, § 5]), on a la relation d'Eichler-Shimura sur cette dernière :

$$\mathrm{Frob}^{-2}_{(\lambda,\mathfrak{l})} - X_{\lambda,\mathfrak{l}}\,\mathrm{Frob}^{-1}_{(\lambda,\mathfrak{l})} + \chi_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}} Y_{\lambda,\mathfrak{l}} \ell^{d_{\mathfrak{l},0}} = 0, \tag{3.2.13}$$

où $\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})$ désigne le Frobenius arithmétique.

Notation 3.2.3. — Pour un sous-groupe ouvert compact $K = K_\wp K^\wp$ de $G(\mathbb{A}^\infty)$, notons :

- ▹ $\mathscr{H}^+(G(\mathbb{A}^\infty)//K)$ la $\mathscr{O}_E$-algèbre engendrée par les opérateurs de doubles classes $[KgK]$ avec $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ et $g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}}) \subseteq V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$.
- ▹ $S(K^\wp) := \{(\lambda, \mathfrak{l}) \in S_{\mathscr{F}} \ ; \ (\lambda, \mathfrak{l}) \nmid p \text{ et } K \text{ est maximal en } \mathfrak{l}\}$.
- ▹ $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ la sous-$\mathscr{O}_E$-algèbre de $\mathscr{H}^+(G(\mathbb{A}^\infty)//K)$ engendrée par $X_{\lambda,\mathfrak{l}}$.
- ▹ $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}\chi_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}}$ pour tout $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$, où ℓ est la place de $\mathbb{Q}$ en dessous de $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$.
- ▹ $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ la sous-$\mathscr{O}_E$-algèbre de $\mathscr{H}^+(G(\mathbb{A}^\infty)//K)$ engendrée par $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ et l'opérateur $\chi_{u,p}$.

3.3. Formes modulaires classiques sur les courbes de Shimura unitaires

3.3.1. Généralités

3.3.1.1. *Schémas abéliens munis d'une action de $\mathscr{O}_D$.* — Soit K un sous-groupe ouvert compact net de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} F_\wp$ avec $\tau : F_\wp \to \mathscr{O}_S$ le morphisme structural. Supposons de plus que l'on peut identifier les ensembles $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathscr{O}_S)$ et Σ_p. Alors $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{O}_S$ se décompose comme

$$F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{O}_S \cong F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathscr{O}_S \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma : F \to \mathscr{O}_S} \mathscr{O}_S.$$

Soit $(A, \iota, \theta, \bar{\alpha})$ un S-point de M_K (avec $a : A \to S$ le morphisme structural). Le $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_S$-module $\operatorname{Lie}(A)$ admet alors des décompositions de $\mathscr{O}_S$-modules (voir (2.3.2))

$$\begin{aligned}\operatorname{Lie}(A) &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\wp_i \mid p} \left(\operatorname{Lie}(A)^{+,1}_{\wp_i} \oplus \operatorname{Lie}(A)^{+,2}_{\wp_i}\right) \oplus \bigoplus_{\wp_i \mid p} \left(\operatorname{Lie}(A)^{-,1}_{\wp_i} \oplus \operatorname{Lie}(A)^{-,2}_{\wp_i}\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} \left(\operatorname{Lie}(A)^{+,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus \operatorname{Lie}(A)^{+,2}_{\wp_i,\sigma}\right) \oplus \bigoplus_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} \left(\operatorname{Lie}(A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus \operatorname{Lie}(A)^{-,2}_{\wp_i\sigma}\right).\end{aligned}$$

D'après la condition (1 a) du problème de modules du § 3.1.1.2, $\operatorname{Lie}(A)^{-,1}_{\wp,\tau}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 1 et $\operatorname{Lie}(A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma}$ est nul pour tout $\sigma \neq \tau$. En outre, il résulte de la condition (3) que $\operatorname{Lie}(A)$ est localement libre (de rang 4) sur $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathscr{O}_S$ (*cf.* [**46**, lemme III.1.1]). On en déduit que $\operatorname{Lie}(A)_{\wp_i,\sigma}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 4 pour tout $\wp_i \mid p$ et $\sigma \in \Sigma_{\wp_i}$. Comme il y a un isomorphisme de $\mathscr{O}_S$-modules entre $\operatorname{Lie}(A)^{\pm,1}_{\wp_i,\sigma}$ et $\operatorname{Lie}(A)^{\pm,2}_{\wp_i,\sigma}$ (*cf.* § 2.3), il en résulte que $\operatorname{Lie}(A)^{+,1}_{\wp,\tau}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 1 et $\operatorname{Lie}(A)^{+,1}_{\wp_i,\sigma}$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 2.

Soit $\lambda \in \mathscr{O}_D$. Par la condition (2) du problème de modules du § 3.1.1.2, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\lambda^*"'] & A^\vee \arrow[d, "\lambda"'] \\ A \arrow[r, "\theta"] & A^\vee \end{tikzcd}$$

d'où on déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Lie}(A) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\lambda^*"'] & \operatorname{Lie}(A^\vee) \arrow[d, "\lambda"'] \\ \operatorname{Lie}(A) \arrow[r, "\theta"] & \operatorname{Lie}(A^\vee)\,. \end{tikzcd}$$

Noter que $\theta : \mathrm{Lie}(A) \to \mathrm{Lie}(A^\vee)$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}_S$-modules, car $\deg(\theta)$ est inversible dans S. En outre, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R^1 a_* \mathscr{O}_A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\cong"'] & R^1 a_* \mathscr{O}_A \arrow[d, "\cong"'] \\ \mathrm{Lie}(A^\vee) \arrow[r, "\lambda"] & \mathrm{Lie}(A^\vee) \end{tikzcd}$$

d'où on déduit des isomorphismes naturels de $\mathscr{O}_S$-modules

$$(R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(A^\vee)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} \big((a^\vee_* \Omega^1_{A^\vee/S})^{-,1}_{\wp_i,\sigma}\big)^\vee \tag{3.3.1}$$

pour tout $\wp_i \mid p$ et $\sigma \in \Sigma_{\wp_i}$, où $a^\vee$ désigne le morphisme structural de $A^\vee$ sur S.

Remarque 3.3.1. — On déduit des applications

$$\theta : \mathrm{Lie}(A) \to \mathrm{Lie}(A^\vee) \quad \text{et} \quad R^1 a_* \mathscr{O}_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(A^\vee)$$

et de $a_* \Omega^1_{A/S} \cong \mathrm{Lie}(A)^\vee$ un accouplement $\mathscr{O}_D$-$*$-linéaire entre $a_* \Omega^1_{A/S}$ et $R^1 a_* \mathscr{O}_A$, c'est-à-dire une application $\mathscr{O}_S$-bilinéaire :

$$\langle .\,,. \rangle : a_* \Omega^1_{A/S} \times R^1 a_* \mathscr{O}_A \longrightarrow \mathscr{O}_S$$

vérifiant $\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda^* y \rangle$ pour tout $\lambda \in \mathscr{O}_D$. On obtient ainsi, pour tout $\wp_i \mid p$, $\sigma \in \Sigma_{\wp_i}$, un isomorphisme de $\mathscr{O}_S$-modules (qui dépend de θ) :

$$(R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(A)^{+,1}_{\wp_i,\sigma}$$

En particulier, $(R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp,\tau}$ (resp. $(R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma}$ avec $\sigma \neq \tau$) est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang 1 (resp. 2).

Considérons maintenant le faisceau cohérent $R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}$, qui est situé dans une suite exacte de $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_S$-modules :

$$0 \to a_* \Omega^1_{A/S} \longrightarrow R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S} \longrightarrow R^1 a_* \mathscr{O}_A \to 0. \tag{3.3.2}$$

On déduit de ce qui précède :

Proposition 3.3.2

(1) *Le $\mathscr{O}_S$-module $(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp_i,\sigma}$ est localement libre de rang 2 et isomorphe naturellement au $\mathscr{O}_S$-module $(R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma}$ pour tout $\wp_i \mid p$ et $\sigma \neq \tau$.*

(2) *Le $\mathscr{O}_S$-module $(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp,\tau}$ est localement libre de rang 2 et s'insère dans la suite exacte de $\mathscr{O}_S$-modules*

$$0 \to (a_* \Omega^1_{A/S})^{-,1}_{\wp,\tau} \longrightarrow (R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp,\tau} \longrightarrow (R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp,\tau} \to 0.$$

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$, pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, notons :

$$\begin{aligned}
&\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}) \\
&\quad := \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} \Big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} (R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \otimes (\overset{2}{\wedge} (R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^{k_{2,\sigma}} \Big) \\
&\quad \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i},\ \sigma \neq \tau}} \Big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} (R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \otimes (\overset{2}{\wedge} (R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^{k_{2,\sigma}} \Big) \\
&\qquad\qquad \otimes \mathrm{Sym}^{k_{1,\tau}-2} (R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp,\tau} \otimes (\overset{2}{\wedge} (R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp,\tau})^{k_{2,\tau}}
\end{aligned}$$

où les produits tensoriels, symétriques et extérieurs sont tous pris sur $\mathscr{O}_S$. Notons pour simplifier :

$$\begin{aligned}
(3.3.3)\quad &\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}) \\
&:= \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i},\ \sigma \neq \tau}} \Big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} (R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \otimes (\overset{2}{\wedge} (R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^{k_{2,\sigma}} \Big).
\end{aligned}$$

Notons encore :

$$\underline{\omega}_{A/S,-} := (a_* \Omega^1_{A/S})^{-,1}_{\wp,\tau} \quad \text{et} \quad \underline{\omega}_{A/S,+} := \big((R^1 a_* \mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp,\tau} \big)^\vee \cong \big(a^\vee_* \Omega^1_{A^\vee/S} \big)^{-,1}_{\wp,\tau}.$$

On a alors

$$\overset{2}{\wedge} (R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})^{-,1}_{\wp,\tau} \cong \underline{\omega}^{-1}_{A/S,+} \otimes_{\mathscr{O}_S} \underline{\omega}_{A/S,-}.$$

Le $\mathscr{O}_S$-module $\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})$ est naturellement muni d'une filtration de Hodge telle que (par la proposition 3.3.2)

$$\begin{cases}
\mathrm{Fil}^j\, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}) = \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}) & \text{si } j \leq k_{2,\tau}; \\
\mathrm{gr}^j\, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}) & \\
\qquad \cong \underline{\omega}^{j-(2k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2)}_{A/S,+} \otimes \underline{\omega}^{j}_{A/S,-} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}) & \\
& \text{si } k_{2,\tau} \leq j \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 2; \\
\mathrm{Fil}^j\, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S}) = 0 & \text{si } j \geq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 1\,.
\end{cases}$$

où $\mathrm{gr}^j(\cdot) := \mathrm{Fil}^j / \mathrm{Fil}^{j+1}$. En particulier, $\mathrm{gr}^j\, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})$ est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang $\sum_{\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}} (k_{1,\sigma} - 1)$ lorsque $k_{2,\tau} \leq j \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 2$.

Étant donnée une isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\phi : A \to A'$ sur S, on en déduit canoniquement un morphisme de $\mathscr{O}_S$-modules

$$\phi^* : \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a'_* \Omega^\bullet_{A'/S}) \longrightarrow \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 a_* \Omega^\bullet_{A/S})$$

qui respecte la filtration de Hodge (où a' est le morphisme structural $a' : A' \to S$).

3.3.1.2. *Formes modulaires sur les courbes de Shimura unitaires.* — Soit K un sous-groupe ouvert compact net de $G(\mathbb{A}^\infty)$. On fixe dans cette sous-section un plongement

$$\tau : F_\wp \hookrightarrow E.$$

Notons :

- ▷ $(M_K)_{\tau,E} := M_K \times_{\tau, \operatorname{Spec} F_\wp} \operatorname{Spec} E$,
- ▷ $\varepsilon : \mathscr{A} \to (M_K)_{\tau,E}$ le schéma abélien universel.

On voit $(M_K)_{\tau,E}$ comme schéma sur $\operatorname{Spec} F_\wp$ via la composée

$$(M_K)_{\tau,E} \longrightarrow \operatorname{Spec} E \xrightarrow{\tau} \operatorname{Spec} F_\wp.$$

Si $a : A \to (M_K)_{\tau,E}$ est un schéma abélien comme au § 3.3.1.1, notons :

- ▷ $\underline{\omega}_{A,+} := \underline{\omega}_{A/(M_K)_{\tau,E},+}$ et $\underline{\omega}_{A,-} := \underline{\omega}_{A/(M_K)_{\tau,E},-}$;
- ▷ $\underline{\omega}_+ := \underline{\omega}_{\mathscr{A},+}$ et $\underline{\omega}_- := \underline{\omega}_{\mathscr{A},-}$.

Définition 3.3.3. — Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$, $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$, et E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ assez grande pour contenir tous les plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

- ▷ On appelle *forme modulaire classique de niveau K de poids*

$$(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$$

sur (τ, E) une section sur $(M_K)_{\tau,E}$ du faisceau cohérent localement libre de rang $\sum_{\sigma\in\Sigma_p\setminus\{\tau\}}(k_{1,\sigma} - 1)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \\ := (\underline{\omega}_+^{k_+} \otimes \underline{\omega}_-^{k_-}) \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

où tous les produits tensoriels sont sur $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$.

- ▷ Soient $k_{1,\tau} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\tau} \in \mathbb{Z}$, notons (voir (3.3.9) ci-dessous)

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})} := \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}+1,k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}.$$

Une section de ce dernier sur $(M_K)_{\tau,E}$ est appelée une *forme modulaire classique de niveau K* de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})$ sur (τ, E).

3.3.1.3. *Isomorphisme de Kodaira-Spencer.* — Reprenons les notations du § 3.3.1.2. On a une suite exacte de $\mathscr{O}_A$-modules :

$$0 \to a^*\Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E} \longrightarrow \Omega^1_{A/E} \longrightarrow \Omega^1_{A/(M_K)_{\tau,E}} \to 0.$$

En appliquant $R^\bullet a_*$, on obtient un morphisme naturel de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules :

$$\begin{aligned}a_*\Omega^1_{A/(M_K)_{\tau,E}} \longrightarrow R^1 a_* a^*\Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E} &\cong R^1 a_*\big(\mathscr{O}_A \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}\big) \\ &\cong R^1 a_*\mathscr{O}_A \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E},\end{aligned}$$

(où le dernier isomorphisme provient de la formule de projection) qui est fonctoriel en A, donc $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-linéaire. On en déduit une application

$$\underline{\omega}_{A,-} \longrightarrow \underline{\omega}_{A,+}^{-1} \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}$$

et donc une application de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules

$$\mathrm{KS}_a : \underline{\omega}_{A,+} \otimes \underline{\omega}_{A,-} \longrightarrow \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}. \tag{3.3.5}$$

On a comme dans [**30**, lemme 7] :

Lemme 3.3.4 (Kodaira-Spencer). — *Le morphisme de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules*

$$\mathrm{KS} := \mathrm{KS}_\varepsilon : \underline{\omega}_+ \otimes \underline{\omega}_- \longrightarrow \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}$$

est un isomorphisme. De plus, si l'on a une isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\phi : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ sur $(M_K)_{\tau,E}$ (avec ε' le morphisme structural de $\mathscr{A}'$ sur $(M_K)_{\tau,E}$), alors $\mathrm{KS}_{\varepsilon'}$ est aussi un isomorphisme et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\omega}_+ \otimes \underline{\omega}_- & \xrightarrow{\mathrm{KS}} & \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E} \\ {\scriptstyle \phi^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \underline{\omega}_{\mathscr{A}',+} \otimes \underline{\omega}_{\mathscr{A}',-} & \xrightarrow{\mathrm{KS}_{\varepsilon'}} & \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}, \end{array}$$

où ϕ^* est induit canoniquement de l'isogénie ϕ (voir la remarque 3.3.5 ci-dessous).

Remarque 3.3.5. — Précisons l'application ϕ^*. L'isogénie $\phi : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ induit des morphismes (isomorphismes) de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules :

$$\phi^* : \varepsilon_*\Omega^1_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}} \xrightarrow{\sim} \varepsilon'_*\Omega^1_{\mathscr{A}'/(M_K)_{\tau,E}},$$
$$\phi^* : R^1\varepsilon_*\mathscr{O}_{\mathscr{A}} \xrightarrow{\sim} R^1\varepsilon'_*\mathscr{O}_{\mathscr{A}'}.$$

Comme ϕ est $\mathscr{O}_D$-linéaire, on en déduit des isomorphismes de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules

$$\phi^*_- := (\phi^*)^{-,1}_{\wp,\tau} : \underline{\omega}_{\mathscr{A},-} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{A}',-},$$
$$(\phi^*)^{-,1}_{\wp,\tau} : (\underline{\omega}_{\mathscr{A},+})^\vee \xrightarrow{\sim} (\underline{\omega}_{\mathscr{A}',+})^\vee.$$

Notant

$$\phi^*_+ := \Big(\big((\phi^*)^{-,1}_{\wp,\tau}\big)^\vee\Big)^{-1} : \underline{\omega}_{\mathscr{A},+} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathscr{A}',+},$$

le morphisme ϕ^* du lemme est donc donné par $\phi^*_+ \otimes \phi^*_-$.

3.3.1.4. *Connexions de Gauss-Manin.* — Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$. On a une connexion de Gauss-Manin (*cf.* [**51**, § 2]) sur $(M_K)_{\tau,E}$:

$$R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}} \longrightarrow R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}} \otimes_{\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}} \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}$$

fonctorielle en $\mathscr{A}$ et donc $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-linéaire. En particulier, cela induit une connexion

$$(3.3.6)\qquad \nabla_\tau : \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \longrightarrow \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}.$$

qui vérifie la transversalité de Griffiths, *i.e.* définit des sous-complexes pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$(3.3.7)\qquad \mathrm{Fil}^i\,\nabla_\tau : \mathrm{Fil}^i\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \longrightarrow \mathrm{Fil}^{i-1}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}.$$

De plus, elle induit des isomorphismes sur les gradués pour $k_{2,\tau}+1 \leq i \leq k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2$

$$\mathrm{gr}^i\,\nabla_\tau := \mathrm{Fil}^i\,\nabla_\tau/\,\mathrm{Fil}^{i+1}\,\nabla_\tau : \mathrm{gr}^i\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{i-1}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}.$$

On en déduit que la composée

$$(3.3.8)\qquad \psi : \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \xrightarrow{\mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\nabla_\tau} \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E} \longrightarrow \frac{\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}}{\mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}}$$

est en fait un isomorphisme de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules. Signalons que l'on a

$$(3.3.9)\qquad \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E} \xrightarrow[\sim]{\mathrm{KS}^{-1}} \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}.$$

On peut alors déduire de ∇_τ une application comme dans [**24**, §4] :

$$\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1} : \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \longrightarrow \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\ \big(= \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}+1,k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2 &= (-k_{2,\tau}+1)-(k_{1,\tau}-1)\,,\\ k_{2,\tau} &= (k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1)-(k_{1,\tau}-1)\end{aligned}$$

et

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \cong \frac{\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})}{\mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})}.$$

Pour $s \in \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$, soit $\tilde{s}$ un relevé quelconque de s dans

$$\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}).$$

Alors l'application $\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}$ envoie s sur (*cf.* [**17**, §4.2])

$$\begin{aligned}\nabla_\tau\big(\tilde{s} - (\psi)^{-1}\big(\overline{\nabla_\tau(\tilde{s})}\,\big)\big)&\\ \in \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2}\,\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}&\\ \xrightarrow[\sim]{\mathrm{KS}^{-1}} \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}.&\end{aligned}$$

De la même façon que dans [**17**, lemme 4.2.1], on a :

Lemme 3.3.6. — *Il existe un quasi-isomorphisme de complexes de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules :*

$$(3.3.10)\quad \begin{aligned}&\Big[\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \xrightarrow{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}} \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\Big]\\ &\xrightarrow{\sim} \Big[\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\\ &\qquad\xrightarrow{\nabla_\tau} \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}\Big].\end{aligned}$$

Soient :

- $\phi : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ une isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire sur $(M_K)_{\tau,E}$ où ε' est le morphisme structural de $\mathscr{A}'$ sur $(M_K)_{\tau,E}$,
- k_+ et $k_- \in \mathbb{Z}$;
- $k_{1,\tau} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et $k_{2,\tau} \in \mathbb{Z}$;
- $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$.

Notons

$$\big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)' \quad \big(\text{resp. } \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)'\big)$$

le faisceau cohérent sur $(M_K)_{\tau,E}$ obtenu de manière analogue à $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ (resp. $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}$) en échangeant ε et ε'. De façon analogue, on a un morphisme

$$(\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1})' : \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)' \longrightarrow \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)'.$$

L'isogénie ϕ induit un morphisme naturel de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules (*cf.* la remarque 3.3.12 ci-dessous)

$$\phi^* : \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)' \longrightarrow \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}.$$

Par fonctorialités des constructions précédentes et le lemme 3.3.4, on a :

Lemme 3.3.7. — *Avec les notations ci-dessus, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}\big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)' & \xrightarrow{(\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1})'} & \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)' \\ {\scriptstyle\phi^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\phi^*} \\ \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} & \xrightarrow{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}} & \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\end{array}.$$

3.3.2. Théorèmes de comparaison p-adique. — Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$. Pour un sous-groupe ouvert compact net K de $G(\mathbb{A}^\infty)$, considérons la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ sur E :

$$V_\wp := H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)\big). \tag{3.3.11}$$

D'après [**73**, th. 1.10], le système local $R^1\varepsilon_*E$ est de *de Rham* (*cf.* [**73**, déf. 8.3]) et le $\mathscr{O}_{M_K}$-module filtré à connexion intégrable associé est donné par

$$R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$$

avec la filtration canonique de Hodge et la connexion de Gauss-Manin. Cette association est fonctorielle (*e.g.* voir [**73**, th. 8.8 (i)]) et donc $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} E$-linéaire. On en déduit que le système local $\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)$ est aussi de de Rham.

Soit $(\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet)$ le $\mathscr{O}_{M_K}$-module filtré à connexion intégrable associé.

Proposition 3.3.8. — *Il existe un isomorphisme de $\mathscr{O}_{M_K}$-modules filtrés à connexion intégrable*

$$\begin{aligned}&\big(\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}, \nabla, \mathrm{Fil}^\bullet\big)\\ &\qquad \xrightarrow{\sim} \Big(\prod_{\tau\in\Sigma_\wp} \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}), \prod_{\tau\in\Sigma_\wp}\nabla_\tau, \prod_{\tau\in\Sigma_\wp}\mathrm{Fil}^\bullet\Big)\end{aligned}$$

où la filtration sur $\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$ est donnée par la filtration canonique de Hodge (voir § 3.3.1.1) pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$ (voir (3.3.6) pour ∇_τ).

Démonstration. — On a un isomorphisme de $\mathscr{O}_{M_K}$-modules filtrés à connexion intégrable

$$R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau\in\Sigma_\wp} R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}} \tag{3.3.12}$$

avec la filtration de Hodge canonique et la connexion de Gauss-Manin. Cet isomorphisme est de plus $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} E$-linéaire. Par la définition de $\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)$, on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_{M_K}$-modules filtrés à connexion (*cf.* [**38**, lemme 5.5])

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p\\ \sigma\in\Sigma_{\wp_i}}} \Big(&\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2}\big(R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\big)^{-,1}_{\wp_i,\sigma}\\ &\otimes \big(\textstyle\bigwedge^2 \big(R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\big)^{-,1}_{\wp_i,\sigma}\big)^{k_{2,\sigma}}\Big)\end{aligned}$$

où les produits tensoriels, produits symétriques et produits extérieurs sans indice sont pris sur

$$\mathscr{O}_{M_K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\tau\in\Sigma_\wp} \mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}},$$

et où la filtration sur le terme de droite est donnée par la filtration (produit tensoriel) de Hodge et la connexion sur le terme de droite est induite par la connexion de Gauss-Manin. En outre, on a des isomorphismes de $\mathscr{O}_{M_K}$-modules filtrés (pour les filtrations de Hodge) compatibles aux connexions (de Gauss-Manin)

$$\big(R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\big)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} \Big(\prod_{\tau\in\Sigma_\wp} R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}\Big)^{-,1}_{\wp_i,\sigma}$$
$$\xrightarrow{\sim} \prod_{\tau\in\Sigma_\wp}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma},$$

où le deuxième isomorphisme résulte du fait que (3.3.12) est une décomposition $\mathscr{O}_D\otimes_{\mathbb{Z}}E$-linéaire.

Par la proposition 3.3.2 :

▷ si $\wp_i\neq\wp$, on a

$$\big(R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\big)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau\in\Sigma_\wp}(R^1\varepsilon_*\mathscr{O}_{\mathscr{A}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma};$$

▷ si $\wp_i=\wp$, on a

$$\big(R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\big)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} (R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\sigma,E}})^{-,1}_{\wp,\sigma}\times\prod_{\substack{\tau\in\Sigma_\wp\\ \tau\neq\sigma}}(R^1\varepsilon_*\mathscr{O}_{\mathscr{A}})^{-,1}_{\wp,\sigma}.$$

On déduit de tout cela un isomorphisme de $\mathscr{O}_{M_K}$-modules filtrés

$$\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau\in\Sigma_\wp}\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}), \tag{3.3.13}$$

et un isomorphisme compatible aux connexions :

$$\big[\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\otimes_{\mathscr{O}_{M_K}}\Omega^1_{M_K/F_\wp}\big]$$
$$\xrightarrow{\sim}\prod_{\tau\in\Sigma_\wp}\big[\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$
$$\xrightarrow{\nabla_\tau}\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\otimes\Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}\big].$$

Ceci permet de conclure. ◻

D'après [**73**, th. 1.6], la représentation $V_\wp$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ est de de Rham au sens de Fontaine, et on a des isomorphismes de E-espaces vectoriels filtrés

$$D_{\mathrm{dR}}(V_\wp):=(B_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V_\wp)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)}\xrightarrow{\sim}\mathbb{H}^1(M_K,\nabla)$$
$$\xrightarrow{\sim}\prod_{\tau\in\Sigma_\wp}\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau\big), \tag{3.3.14}$$

où la filtration sur $\mathbb{H}^1(M_K,\nabla)$ (resp. sur $\mathbb{H}^1((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau)$) est donnée par

$$\mathrm{Fil}^i\,\mathbb{H}^1(M_K,\nabla):=\mathrm{Im}\,\big[\mathbb{H}^1(M_K,\mathrm{Fil}^i\,\nabla)\longrightarrow\mathbb{H}^1(M_K,\nabla)\big]$$

respectivement

$$\mathrm{Fil}^i\,\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau\big):=\mathrm{Im}\,\big[\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\mathrm{Fil}^i\,\nabla_\tau\big)\to\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau\big)\big],$$

où $\mathrm{Fil}^i \nabla$ signifie le complexe

$$\mathrm{Fil}^i \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \xrightarrow{\mathrm{Fil}^i \nabla} \mathrm{Fil}^{i-1} \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \otimes \Omega^1_{M_K/F_\wp}$$

sur M_K. En fait, $D_{\mathrm{dR}}(V_\wp)$ est un $F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module filtré libre de rang fini et admet donc une décomposition de E-espaces vectoriels filtrés

$$D_{\mathrm{dR}}(V_\wp) \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau \in \Sigma_\wp} D_{\mathrm{dR}}(V_\wp)_\tau$$

de la décomposition

$$F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \Sigma_\wp} E, \quad a \otimes b \longmapsto \big(\sigma(a) b\big)_{\sigma \in \Sigma_\wp}.$$

On a en fait pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$ un isomorphisme de E-espaces vectoriels filtrés

$$D_{\mathrm{dR}}(V_\wp)_\tau \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big). \tag{3.3.15}$$

Proposition 3.3.9. — *On a*

$$\mathrm{Fil}^i \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \cong \begin{cases} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) & si\ \ i \leq k_{2,\tau}, \\ H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) & \\ & si\ \ k_{2,\tau}+1 \leq i\ \ et\ \ i \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 1, \\ 0 & si\ \ i \geq k_{1,\tau} + k_{2,\tau}. \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que

$$\mathrm{Fil}^i \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \cong H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)$$

pour tout $k_{2,\tau} + 1 \leq i \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 1$. On a par définition et le lemme 3.3.4

$$\begin{aligned} &\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1} \nabla_\tau\big) \\ &\quad \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \big[0 \to \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2}\, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1 \varepsilon_* \Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}\big]\big) \\ &\quad \xrightarrow{\sim} H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2}\, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big(R^1 \varepsilon_* \Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}}\big) \otimes \Omega^1_{(M_K)_{\tau,E}/E}\big) \\ &\quad \xrightarrow[\sim]{\mathrm{KS}^{-1}} H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big), \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

et $\mathbb{H}^0((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1} \nabla_\tau) = 0$. En outre, il y a une suite exacte de complexes de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules :

$$0 \to \mathrm{Fil}^{i+1} \nabla_\tau \longrightarrow \mathrm{Fil}^i \nabla_\tau \longrightarrow \mathrm{gr}^i \nabla_\tau \to 0,$$

avec $\mathrm{gr}^i \nabla_\tau$ un isomorphisme lorsque $k_{2,\tau} + 1 \leq i \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 2$. On en déduit que l'application canonique

$$\mathbb{H}^j\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{i+1} \nabla_\tau\big) \longrightarrow \mathbb{H}^j\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^i \nabla_\tau\big) \tag{3.3.17}$$

est un isomorphisme, pour tout $k_{2,\tau}+1 \leq i \leq k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-2$ et $j \geq 0$. En particulier, on a

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\nabla_\tau\big) \tag{3.3.18}$$

et $\mathbb{H}^0((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\nabla_\tau) = 0$. Donc il suffit de montrer que l'application canonique

$$\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\nabla_\tau\big) \longrightarrow \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \tag{3.3.19}$$

est injective. Considérons la suite exacte de complexes de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}$-modules

$$0 \to \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\nabla_\tau \longrightarrow \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}}\nabla_\tau (=\nabla_\tau) \longrightarrow \mathrm{gr}^{k_{2,\tau}}\nabla_\tau \to 0, \tag{3.3.20}$$

d'où on déduit une suite exacte de E-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathbb{H}^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\nabla_\tau\big)(=0) \\ &\longrightarrow \mathbb{H}^0\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \longrightarrow \mathbb{H}^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{gr}^{k_{2,\tau}}\nabla_\tau\big) \\ &\longrightarrow \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+1}\nabla_\tau\big) \longrightarrow \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big). \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Mais d'après la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham (*cf.* [**73**, th. 8.4]), la troisième flèche de (3.3.21) est un isomorphisme, d'où on déduit l'injectivité de (3.3.19). ∎

3.3.3. Opérateurs de Hecke. — Soient K un sous-groupe ouvert compact et net de $G(\mathbb{A}^\infty)$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, et soit $\tau \in \Sigma_\wp$.

Soit $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ tel que le sous-groupe $gKg^{-1} \cap K$ soit net et que $V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \subseteq g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$. Reprenons les notations du § 3.2.3. Notons $\nabla_{\tau,K}$ (resp. $\nabla_{\tau,K'}$) la connexion ∇_τ (3.3.6) sur $(M_K)_{\tau,E}$ (resp. sur $(M_{K'})_{\tau,E}$) pour l'instant. On a alors

$$\mathrm{pr}^*\nabla_{\tau,K} \cong \nabla_{\tau,K'}.$$

On en déduit une application trace :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{\mathrm{pr}} : \mathrm{pr}_*\nabla_{\tau,K'} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_*\mathrm{pr}^*\nabla_{\tau,K} \\ &\xrightarrow{\sim} \nabla_{\tau,K} \otimes_{\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}}} \mathrm{pr}_*\mathscr{O}_{(M_{K'})_{\tau,E}} \xrightarrow{\mathrm{tr}} \nabla_{\tau,K}, \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme provient de la formule de projection et la dernière application trace est bien définie car le morphisme pr est fini étale. On voit de plus que $\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}$ respecte la filtration de Hodge. On en déduit une application encore notée $\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}$ via la composée

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{\mathrm{pr}} : \mathbb{H}^1\big((M_{K'})_{\tau,E}, \nabla_{\tau,K'}\big) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \mathrm{pr}_*\nabla_{\tau,K'}\big) \\ &\xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_{\tau,K}\big) \end{aligned}$$

qui respecte la filtration de Hodge (*cf.* (3.3.7)), où le premier isomorphisme découle du fait que

$$\mathrm{R}^i\mathrm{pr}_*\nabla_{\tau,K'} \xrightarrow{\sim} \nabla_{\tau,K} \otimes \mathrm{R}^i\mathrm{pr}_*\mathscr{O}_{(M_{K'})_{\tau,E}} = 0 \quad \text{pour } i > 1.$$

Notons $\nabla'_{\tau,K'}$ la connexion suivante sur $(M_{K'})_{\tau,E}$ (voir §3.2.3 pour $\mathscr{A}'$) :

$$\begin{aligned}\nabla'_{\tau,K'} : \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon'_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}'/(M_{K'})_{\tau,E}}) \\ \longrightarrow \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon'_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}'/(M_{K'})_{\tau,E}}) \otimes \Omega^1_{(M_{K'})_{\tau,E}/E}\end{aligned}$$

induite par la connexion de Gauss-Manin

$$R^1\varepsilon'_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}'/(M_{K'})_{\tau,E}} \longrightarrow R^1\varepsilon'_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}'/(M_{K'})_{\tau,E}} \otimes \Omega^1_{(M_{K'})_{\tau,E}/E}.$$

On a alors $r_g^*\nabla_{\tau,K} \xrightarrow{\sim} \nabla'_{\tau,K'}$. De plus, l'isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ induit un morphisme canonique $\phi^* : \nabla'_{\tau,K'} \to \nabla_{\tau,K'}$ de complexes sur $(M_{K'})_{\tau,E}$. De ce qui précède, on définit une action de $[KgK]$ sur $\mathbb{H}^1((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau)$ par la composée :

$$\begin{aligned}(3.3.22)\quad [KgK] : \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_{\tau,K}\big) \xrightarrow{r_g^*} \mathbb{H}^1\big((M_{K'})_{\tau,E},\nabla'_{\tau,K'}\big) \\ \xrightarrow{\phi^*} \mathbb{H}^1\big((M_{K'})_{\tau,E},\nabla_{\tau,K'}\big) \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_{\tau,K}\big).\end{aligned}$$

Par la fonctorialité des théorèmes de comparaison p-adique, on a (*cf.* §3.3.2)

Proposition 3.3.10. — *L'isomorphisme naturel* (*cf.* (3.3.14))

$$\begin{aligned}H^1_{\acute{e}t}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p},\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)\big)\otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}} \\ \xrightarrow{\sim} \Big(\prod_{\tau\in\Sigma_\wp}\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau\big)\Big)\otimes_{F_\wp} B_{\mathrm{dR}}\end{aligned}$$

est équivariant sous l'action de $[KgK]$.

Par la formule (3.3.22) et la discussion qui précède, on voit que l'action de $[KgK]$ respecte la filtration de Hodge de $\mathbb{H}^1((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau)$. En particulier, on en déduit une action de $[KgK]$ sur le E-espace vectoriel des formes modulaires de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})$ sur (τ,E) donnée par la composée (*cf.* (3.3.16))

$$\begin{aligned}H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E}\big) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathrm{KS}}} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1}\,\nabla_{\tau,K}\big) \\ \xrightarrow{r_g^*} \mathbb{H}^1\big((M_{K'})_{\tau,E},\mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1}\,\nabla'_{\tau,K'}\big) \xrightarrow{\phi^*} \mathbb{H}^1\big((M_{K'})_{\tau,E},\mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1}\,\nabla_{\tau,K'}\big) \\ \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\mathrm{Fil}^{k_{2,\tau}+k_{1,\tau}-1}\,\nabla_{\tau,K}\big) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathrm{KS}^{-1}}} H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E}\big).\end{aligned}$$

D'après la deuxième partie du lemme 3.3.4, on voit que l'opérateur $[KgK]$ est en fait égal à la composée (où l'application ϕ^* est naturellement induite par l'isogénie ϕ, voir la remarque 3.3.12 ci-dessous)

$$\begin{aligned}(3.3.23)\quad H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E}\big) \xrightarrow{r_g^*} H^0\big((M_{K'})_{\tau,E},\big(\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E}\big)'\big) \\ \xrightarrow{\phi^*} H^0\big((M_{K'})_{\tau,E},\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E}\big) \xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}} H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E}\big),\end{aligned}$$

où le faisceau $(\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E})'$ est défini de manière analogue à $\mathscr{S}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}_{\tau,E}$ en échangeant ε et ε'.

On prend la formule (3.3.23) pour définir encore une action de $[KgK]$ sur

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

avec k_+, $k_- \in \mathbb{Z}$ quelconques.

Notation 3.3.11. — Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} E$. Pour un S-point de $(M_K)_{\tau,E}$

$$x = (A, \iota, \theta, \bar{\alpha}) : S \longrightarrow (M_K)_{\tau,E},$$

on note

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(A) := x^*\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

qui est alors un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang $\sum_{\sigma\in\Sigma_p\setminus\{\tau\}}(k_{1,\sigma}-1)$. On a en fait

$$\begin{aligned}&\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(A)\\ &\qquad\cong \underline{\omega}_{A/S,+}^{k_+} \otimes \underline{\omega}_{A/S,-}^{k_-} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1a_*\Omega^\bullet_{A/S}).\end{aligned}$$

Soit f une forme modulaire de poids $(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ de niveau K sur (τ, E). On note alors

$$f(A, \iota, \theta, \bar{\alpha}) \in \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(A)$$

l'image de f via l'application canonique

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(A).$$

Étant donnée une isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\phi : A \to A'$, on note

$$\phi^* : \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(A') \longrightarrow \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(A) \tag{3.3.24}$$

le morphisme induit (voir la remarque 3.3.12 ci-dessous). Enfin, étant donné un sous-groupe fini et plat $\mathscr{O}_D$-linéaire C de A, on note

$$\phi_C : A \to A/C$$

l'isogénie canonique.

Remarque 3.3.12. — Précisons le morphisme ϕ^*. L'isogénie $\phi : A \to A'$ induit des isomorphismes de $\mathscr{O}_S$-modules (*cf.* la remarque 3.3.5)

$$\begin{aligned}\phi_-^* &: \underline{\omega}_{A',-} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{A,-},\\ \phi_+^* &: \underline{\omega}_{A',+} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{A,+},\\ (\phi^*)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} &: (R^1a_*\mathscr{O}_{A'})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} (R^1a_*\mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma},\end{aligned}$$

pour tout $\wp_i \mid p$ et $\sigma \in \Sigma_{\wp_i}$, $\sigma \neq \tau$. On en déduit des isomorphismes

$$\begin{aligned}\operatorname{Sym}^{k_{1,\sigma}-2}(\phi^*)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} &: \operatorname{Sym}^{k_{1,\sigma}-2}(R^1a_*\mathscr{O}_{A'})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sym}^{k_{1,\sigma}-2}(R^1a_*\mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma},\\ \textstyle\bigwedge^2(\phi^*)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} &: \textstyle\bigwedge^2(R^1a_*\mathscr{O}_{A'})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \xrightarrow{\sim} \textstyle\bigwedge^2(R^1a_*\mathscr{O}_A)^{-,1}_{\wp_i,\sigma}.\end{aligned}$$

Les morphismes $(\phi_-^*)^k$, $(\phi_+^*)^k$ et $(\overset{2}{\wedge}(\phi^*)^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^k$ sont alors bien définis pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (*e.g.* lorsque $k < 0$, nous posons $(\phi_-^*)^k := (((\phi_-^*)^\vee)^{-1})^{-k})$, et le morphisme (3.3.24) est donné par

$$(\phi_+^*)^{k_+} \otimes (\phi_-^*)^{k_-} \otimes \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}, \sigma \neq \tau}} \big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2}(\phi^*)^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \otimes (\overset{2}{\wedge}(\phi^*)^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^{k_{2,\sigma}}\big).$$

Précisons plusieurs exemples que nous utiliserons. Fixons jusqu'à la fin de cette section une place $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$ et une place finie $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S_{\mathscr{F}}$ au-dessus de ℓ.

Exemple 3.3.13. — Reprenons les notations de l'exemple 3.1.9. La correspondance χ_{λ,ℓ^n} induit un opérateur encore noté χ_{λ,ℓ^n} sur le E-espace vectoriel

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

donné par

$$\chi_{\lambda,\ell^n}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha}) = \phi^*\big(f(A/A[\ell^n]^+,\iota',\theta',\overline{\alpha'})\big).$$

On voit facilement que χ_{λ,ℓ^n} est en fait un isomorphisme de E-espaces vectoriels et que l'on a $\chi_{\lambda,\ell^n} = \chi^n_{\lambda,\ell}$.

Exemple 3.3.14. — Supposons K maximal en $\mathfrak{l}$ et reprenons les notations de l'exemple 3.1.11. La correspondance $X_{\lambda,\mathfrak{l}}$ induit un opérateur encore noté $X_{\lambda,\mathfrak{l}}$ sur

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

donné par

$$X_{\lambda,\mathfrak{l}}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}) = \sum_C \phi_C^*\big(f(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}})\big), \tag{3.3.25}$$

où C parcourt tous les sous-$(\lambda,\mathfrak{l})$-groupes de A d'échelon 1.

La correspondance $X'_{\lambda,\mathfrak{l}}$ (sur $M_K(\mathfrak{l}^n)$) induit un opérateur encore noté $X'_{\lambda,\mathfrak{l}}$ sur

$$H^0\big(M_K(\mathfrak{l}^n)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

donné par

$$X'_{\lambda,\mathfrak{l}}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},C) = \sum_{C'} \phi_{C'}^*\big(f(A/C',\iota',\theta',\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},\overline{(C)^{-,1}_{\mathfrak{l}}})\big), \tag{3.3.26}$$

où C' parcourt tous les sous-$(\lambda,\mathfrak{l})$-groupes de A d'échelon 1 vérifiant

$$(C')^{-,1}_{\mathfrak{l}} \cap C^{-,1}_{\mathfrak{l}} = 0.$$

Enfin, la correspondance $\Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}$ induit un opérateur encore noté $\Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}$ sur

$$H^0\big(M_K(\mathfrak{l})_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

donné par

$$\Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},C) = \phi_C^*\big(f(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},A[\varpi_{\mathfrak{l}}]^{-,1}/C_{\mathfrak{l}}^{-,1})\big). \tag{3.3.27}$$

On note encore

$$T_{\lambda,\mathfrak{l}} := \chi^{-1}_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}} X_{\lambda,\mathfrak{l}}, \quad U_{\lambda,\mathfrak{l}} := \chi^{-1}_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}} X'_{\lambda,\mathfrak{l}}, \quad T_{\wp} := T_{u,\wp}, \quad U_{\wp} := U_{u,\wp}.$$

Exemple 3.3.15. — Reprenons les notations de l'exemple 3.1.10. La correspondance $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$ induit un opérateur encore noté $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$ sur le E-espace vectoriel

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

donné par

$$Y_{\lambda,\mathfrak{l}}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha}) = \phi^*\big(f(A/(A[\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}/\varpi_{\mathfrak{l}}]^+\oplus A[\varpi_{\mathfrak{l}}]^-),\iota',\theta',\overline{\alpha'})\big).$$

On voit facilement que l'opérateur $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$ est en fait bijectif. On note

$$S_{\lambda,\mathfrak{l}} := \chi^{-1}_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}} Y_{\lambda,\mathfrak{l}} \quad \text{et} \quad S_{\wp} := S_{u,\wp}.$$

Supposons K maximal en $\mathfrak{l}$, on dispose alors d'une application de restriction naturelle (*cf.* exemple 3.1.4)

$$\begin{aligned} i_1 : H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\ \longrightarrow H^0\big(M_K(\mathfrak{l})_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \end{aligned}$$

avec $i_1(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},C) = f(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}})$. On voit facilement que l'application i_1 est équivariante sous l'action des opérateurs de Hecke *hors de* $\mathfrak{l}$ et de $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $\chi_{\lambda,\ell}$.

Lemme 3.3.16. — *On a les égalités :*

(1) $X_{\lambda,\mathfrak{l}} = X'_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ i_1 + \Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ i_1$;

(2) $X'_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ\Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ i_1 = \ell^{d_{\mathfrak{l},0}}\chi_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}}\circ Y_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ i_1$.

Démonstration. — On les vérifie au niveau des points. Soient

$$f\in H^0\big((M_K)_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big),$$

S un schéma sur $\operatorname{Spec} E$ et $x = (A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},H)$ un S-point de $M_K(\mathfrak{l})_{\tau,E}$ où H est un sous-groupe de $A[\varpi_{\mathfrak{l}}]^{-,1}$. La partie (1) découle facilement de (3.3.25), (3.3.26) et (3.3.27). On a (*cf.* (3.3.26) et (3.3.27)) :

$$\begin{aligned}
&\big(X'_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ\Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ i_1(f)\big)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},H)\\
&\quad=\sum_{C_{\mathfrak{l}}^{-,1}\neq H}\phi_C^*\big((\Phi_{\lambda,\mathfrak{l}}\circ i_1(f))(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},\overline{H})\big)\\
&\qquad=\sum_{C_{\mathfrak{l}}^{-,1}\neq H}\phi_C^*\phi_{C'}^*\big(i_1(f)\big((A/C)/C',(\iota')',(\theta')',\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}},(A/C)[\varpi_{\mathfrak{l}}]^{-,1}/\overline{H}\big)\big)\\
&\qquad\quad=\sum_{C_{\mathfrak{l}}^{-,1}\neq H}\phi_C^*\phi_{C'}^*\big(f\big((A/C)/C',(\iota')',(\theta')',\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}\big)\big),
\end{aligned}$$

où $\overline{H}$ désigne l'image de H dans A/C et C' désigne le sous-$(\lambda,\mathfrak{l})$-groupe de A/C d'échelon 1 vérifiant $(C')_{\mathfrak{l}}^{-,1}=\overline{H}$. Notons

$$A'':=A/\big(A[\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}/\varpi_{\mathfrak{l}}]^{+}\oplus\mathscr{A}[\varpi_{\mathfrak{l}}]^{-}\big).$$

On vérifie que l'on a

$$(A/C)/C'\cong A''/A''[\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}]^{+},$$

d'où l'on tire

$$\phi_C^*\phi_{C'}^*\big(f\big((A/C)/C',(\iota')',(\theta')',\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}\big)\big)=\big(\chi_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}}\circ Y_{\lambda,\mathfrak{l}}(f)\big)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\mathfrak{l}}}).$$

Comme on a $A[\varpi_{\mathfrak{l}}]^{-,1}\cong\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}/\varpi_{\mathfrak{l}}\oplus\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}}/\varpi_{\mathfrak{l}}$ localement pour la topologie étale sur S, il existe $\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}$ sous-$(\lambda,\mathfrak{l})$-groupes C d'échelon 1 de A vérifiant $C_{\mathfrak{l}}^{-,1}\neq H$, la partie (2) en découle. ∎

CHAPITRE 4

FORMES MODULAIRES SURCONVERGENTES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES

On développe des théories p-adiques pour nos formes modulaires dans ce chapitre. Au §4.1, suivant Kassaei, on étudie les formes modulaires surconvergentes sur les courbes de Shimura unitaires. Au §4.2, on donne des rappels sur la théorie de schémas en groupes finis et plats. Ensuite, on montre le théorème de classicité pour nos formes modulaires au §4.3 par la méthode de Kassaei [**49**]. Enfin, au §4.4, on applique la théorie de Pilloni [**63**] pour construire des surfaces de Hecke.

Dans ce chapitre, on fixe un sous-groupe ouvert compact net K de $G(\mathbb{A}^\infty)$ maximal en $\wp$.

4.1. Formes modulaires surconvergentes

4.1.1. Affinoïdes des courbes de Shimura unitaires. — D'après [**20**, §5], M_K (sur $\operatorname{Spec} F_\wp$) admet un modèle $\mathbb{M}_K$ propre et lisse sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp$, qui représente le foncteur :

$$\mathbb{M}_K : \{\text{Schémas sur } \operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp\} \longrightarrow \{\text{Ensembles}\}$$

défini comme ci-après.

Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp$ où $\tau : S \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp$ est le morphisme structural, $\mathbb{M}_K(S)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ qui vérifient :

(1) A est un schéma abélien de dimension relative $4d_F$ sur S, muni d'une action de $\mathscr{O}_D$ via $\iota : \mathscr{O}_D \hookrightarrow \operatorname{End}_S(A)$ (ainsi $\operatorname{Lie}(A)$ est un $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$-module) vérifiant :

   (a) le $\mathscr{O}_S$-module projectif $\operatorname{Lie}(A)^{-,1}_\wp$ est de rang 1 et $\mathscr{O}_\wp$ y opère via le morphisme structural $\tau : \mathscr{O}_\wp \to \mathscr{O}_S$;

   (b) $\operatorname{Lie}(A)^{-}_{\wp_i}$ est nul pour tout $\wp_i \mid p$ et $\wp_i \neq \wp$;

(2) θ est une polarisation de A, d'ordre premier à p, telle que l'involution de Rosati associée envoie $\iota(\gamma)$ sur $\iota(\gamma^*)$;

(3) $\overline{\alpha^\wp}$ est une classe modulo $K^\wp$ d'isomorphismes :

$$\alpha^\wp = \alpha^p \oplus \alpha_p^\wp : T^p(A) \oplus T_p^{-,\wp}(A) \xrightarrow{\sim} V_{\widehat{\mathbb{Z}}^p} \oplus (V_{\mathbb{Z}_p})^{-,\wp}$$

avec α^p symplectique et $\alpha_p^\wp$ linéaire.

Considérons le groupe p-divisible associé à A :

$$A[p^\infty] := \varinjlim_n A[p^n],$$

qui est donc muni d'une action de $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$. On a un isomorphisme naturel de $\mathscr{O}_S$-modules

$$\mathrm{Lie}(A[p^\infty]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(A).$$

En utilisant les idempotents $e_{\wp_i}^{\pm,k} \in \mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, $A[p^\infty]$ se décompose comme

$$A[p^\infty] \xrightarrow{\sim} \prod_{\wp_i \mid p} \left(A[p^\infty]_{\wp_i}^{+,1} \times A[p^\infty]_{\wp_i}^{+,2} \times A[p^\infty]_{\wp_i}^{-,1} \times A[p^\infty]_{\wp_i}^{-,2}\right) \tag{4.1.1}$$

avec $A[p^\infty]_{\wp_i}^{\pm,k} \cong A[\varpi_i^\infty]^{\pm,k}$ (où $A[\varpi_i^\infty] := \varinjlim_n A[\varpi_i^n]$, voir §3.1.1.2). Notons

$$\mathrm{Lie}\left(A[\varpi_i^\infty]^{\pm,k}\right) \cong \mathrm{Lie}(A)_{\wp_i}^{\pm,k}.$$

Notons $\varepsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{M}_K$ le schéma abélien universel sur $\mathbb{M}_K$ où $e : \mathbb{M}_K \to \mathbb{A}$ est la section identité. Alors

$$\underline{\omega}_{\mathbb{A},-} := (\varepsilon_* \Omega^1_{\mathbb{A}/\mathbb{M}_K})_{\wp}^{-,1} \cong e^* \Omega^1_{\mathbb{A}[\varpi^\infty]^{-,1}/\mathbb{M}_K},$$

est un $\mathscr{O}_{\mathbb{M}_K}$-module localement libre de rang 1 d'après la condition (1 a). Notons

$$\overline{\mathbb{M}}_K := \mathbb{M}_K \otimes_{\mathscr{O}_\wp} \mathbb{F}_q.$$

Soit $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-point de $\overline{\mathbb{M}}_K$. On déduit de la condition (1 a) que le groupe p-divisible $A[\varpi^\infty]^{-,1}$, appelé *un groupe ϖ-divisible* comme dans [**20**], est de dimension 1 sur $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p$. Suivant [**20**, appendice], posons :

Définition 4.1.1. — Soit H un groupe ϖ-divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On appelle *$\wp$-hauteur* de H l'entier $\mathrm{ht}_\wp(H) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\mathrm{rang}\, H[\varpi^n] = q^{n\,\mathrm{ht}_\wp(H)}$.

On a $\mathrm{ht}_\wp(A[\varpi^\infty]^{-,1}) = 2$, puisque le module de Tate $T_p(A[\varpi^\infty]^{-,1})$ est isomorphe à $\mathscr{O}_\wp^2$. Notons $(A[\varpi^\infty]^{-,1})^0$ la composante neutre de $A[\varpi^\infty]^{-,1}$. On a alors

$$h_0(A) := \mathrm{ht}_\wp\left((A[\varpi^\infty]^{-,1})^0\right) \in \{1,2\}.$$

▹ Lorsque $h_0(A) = 1$, on dit que A (ou le point x) est *ordinaire*.

▹ Lorsque $h_0(A) = 2$, on dit que A (ou le point x) est *supersingulier*.

D'après Kassaei [**48**, §6], il existe une section $\mathbf{H} \in H^0(\overline{\mathbb{M}}_K, \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{q-1})$ de sorte que pour tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-point $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ de $\overline{\mathbb{M}}_K$, la restriction de $\mathbf{H}$ à x via

$$H^0(\overline{\mathbb{M}}_K, \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{q-1}) \longrightarrow H^0(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p, x^* \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{q-1}),$$

est nulle si et seulement si A est supersingulier. On en déduit :

Lemme 4.1.2. — *Les points ordinaires de $\overline{\mathbb{M}}_K(\overline{\mathbb{F}}_p)$ sont Zariski-denses dans $\overline{\mathbb{M}}_K$.*

Notons $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ss}}$ le sous-schéma fermé de $\overline{\mathbb{M}}_K$ défini par $\mathbf{H}$ et $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}$ son complément dans $\overline{\mathbb{M}}_K$, qui est donc un ouvert Zariski-dense de $\overline{\mathbb{M}}_K$. Signalons que $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ss}}$ est un schéma réduit d'après [**48**, prop. 6.3].

Proposition 4.1.3 (*cf.* [**48**, prop. 7.2]). — *Supposons $q > 3$, alors il existe une section $\widetilde{\boldsymbol{H}} \in H^0(\mathbb{M}_K, \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{q-1})$ telle que l'application canonique*

$$H^0(\mathbb{M}_K, \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{q-1}) \longrightarrow H^0(\overline{\mathbb{M}}_K, \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{q-1})$$

envoie $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ sur $\boldsymbol{H}$.

Remarque 4.1.4. — En général, le relevé $\widetilde{\mathbf{H}}$ n'est pas unique, mais nous fixerons un choix dans la suite.

Notons $\mathfrak{M}_K$ le complété de $\mathbb{M}_K$ le long de sa fibre spéciale $\overline{\mathbb{M}}_K$, $\mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}}$ l'espace analytique rigide associé au sens de Raynaud (*cf.* [**8**, §0.2]) et M_K^{an} l'espace analytique rigide associé à M_K. Comme $\mathbb{M}_K$ est propre, on a un isomorphisme canonique $\mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}} \cong M_K^{\mathrm{an}}$ d'espaces analytiques rigides (*cf.* [**8**, (0.3.5)]). Notons

$$\mathrm{sp} : \mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}} \longrightarrow \overline{\mathbb{M}}_K$$

l'application de spécialisation (*cf.* [**8**, (0.2.2.1)]) et

$$M_K^{\mathrm{ord}} := \mathrm{sp}^{-1}(\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}})$$

(noter que l'application $\overline{\mathbb{M}}_K \to \mathfrak{M}_K$ est un homémorphisme), qui est alors un ouvert admissible dans $\mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}}$.

Soit $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}})$ un point fermé de M_K, notons L_x le corps résiduel de x, qui est une extension finie de $F_\wp$, et R_x l'anneau des entiers de L_x. La valuation $\upsilon_\wp$ de $F_\wp$ s'étend naturellement à L_x. Comme $\mathbb{M}_K$ est propre, il existe un unique morphisme

$$\underline{x} : \mathrm{Spec}\, R_x \to \mathbb{M}_K$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, L_x & \longrightarrow & M_K \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Spec}\, R_x & \xrightarrow{\underline{x}} & \mathbb{M}_K\,. \end{array}$$

Choisissons un générateur s de $\underline{x}^*\underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{q-1}$. Il existe alors $a \in R_x$ tel que $\underline{x}^*\widetilde{\mathbf{H}} = as$. Posons

$$\mathrm{Ha}(x) := \upsilon_\wp(a) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

(qu'on note parfois $\mathrm{Ha}(A)$ ou $\mathrm{Ha}(\underline{x})$) qui ne dépend pas du choix de s et qu'on appelle *l'invariant de Hasse* de A. Pour toute extension finie L de $F_\wp$, on a alors

$$M_K^{\mathrm{ord}} = \big\{x \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}}(L)\ ;\ \mathrm{Ha}(x) = 0\big\} = \big\{x \in M_K^{\mathrm{an}}(L)\ ;\ \mathrm{Ha}(x) = 0\big\}.$$

On dispose des affinoïdes $M_K^{\leq r}$ (*cf.* [**48**, §8.2], voir aussi [**24**, §1]) dans M_K^{an} pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ définis par

$$M_K^{\leq r}(L) = \{x \in M_K^{\mathrm{an}}(L) \ ; \ \mathrm{Ha}(x) \leq r\}$$

pour toute extension finie L de $F_\wp$. D'après Kassaei (*cf.* [**48**, prop. 8.7]), $M_K^{\leq r}$ admet un $\mathscr{O}_\wp$-modèle canonique $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$ (*i.e.* un schéma formel sur $\mathscr{O}_\wp$ de fibre générique $(\mathfrak{M}_K^{\leq r})^{\mathrm{rig}}$ isomorphe à $M_K^{\leq r}$) tel que

$$\mathfrak{M}_K^{\leq r}(\mathscr{O}_L) = \{\underline{x} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_L) \ ; \ \mathrm{Ha}(\underline{x}) \leq r\}$$

pour toute extension finie L de $F_\wp$ avec $\mathscr{O}_L$ son anneau des entiers. En fait, les

$$\{M_K^{\leq r}\}_{r \in \mathbb{Q} \cap]0,1[}$$

forment une famille de voisinages stricts (*cf.* [**8**, (1.2.1)]) de M_K^{ord} dans M_K^{an}.

Remarque 4.1.5. — Soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{q}{q+1}[$. D'après [**48**, cor. 13.2], l'affinoïde $M_K^{\leq r}$ ne dépend pas du choix de $\widetilde{\mathbf{H}}$.

Soit $\tau \in \Sigma_\wp$ et notons :

- $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E} := \mathbb{M}_K \times_{\tau, \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_\wp} \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_E$ et $(\mathfrak{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E} := \mathfrak{M}_K \times_{\tau, \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_\wp} \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_E$, qui est le complété de $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ le long de sa fibre spéciale.
- $(\mathfrak{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}^{\mathrm{rig}} := \mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}} \times_{\tau, \mathrm{Spec}\, F_\wp} \mathrm{Spec}\, E$, qui est l'espace analytique rigide associé à $(\mathfrak{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ et isomorphe à l'espace analytique rigide $(M_K)_{\tau,E}^{\mathrm{an}}$ associé à $(M_K)_{\tau,E}$.
- Pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$,
  $(M_K)_{\tau,E}^{\mathrm{ord}} := M_K^{\mathrm{ord}} \times_{\tau, \mathrm{Spec}\, F_\wp} \mathrm{Spec}\, E,$
  $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r} := M_K^{\leq r} \times_{\tau, \mathrm{Spec}\, F_\wp} \mathrm{Spec}\, E,$
  $(\mathfrak{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}^{\leq r} := \mathfrak{M}_K^{\leq r} \times_{\tau\, \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_\wp} \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_E.$
- Pour un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $(M_K)_{\tau,E}$, notons encore $\mathscr{F}$ le faisceau cohérent associé sur $(M_K)_{\tau,E}^{\mathrm{an}}$.

Définition 4.1.6. — Soient $\tau \in \Sigma_\wp$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$ et $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$ (resp. $k_{1,\tau} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\tau} \in \mathbb{Z}$).

On appelle *espace des formes modulaires surconvergentes de niveau K de poids*

$$(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \{\tau\}})$$

(resp. *de poids* $(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})$) sur (τ, E) le E-espace vectoriel (*cf.* la définition 3.3.3)

$$S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger} := \varinjlim_{r \to 0^+} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \tag{4.1.2}$$

respectivement

$$S_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p}),\dagger} := \varinjlim_{r \to 0^+} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big).$$

Lemme 4.1.7. — *L'application de restriction*

$$H^0\big((M_K)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

est injective. Plus généralement, pour tous $r_1 \leq r_2 \in \mathbb{Q}$*, l'application de restriction*

$$H^0\big((M_K)^{\leq r_2}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big((M_K)^{\leq r_1}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

est injective.

Démonstration. — La preuve est la même que celle de [**8**, (0.1.13)] puisque $(M_K)^{\mathrm{ord}}_{\tau,E}$ est Zariski-dense dans $(M_K)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}$. ∎

Le E-espace vectoriel

$$H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

est muni d'une norme naturelle de Banach (voir (4.3.7) et le lemme 4.3.3 ci-dessous) et les morphismes de transition dans (4.1.2) sont compacts. Par conséquent, le E-espace vectoriel

$$S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}$$

est un E-espace vectoriel de type compact au sens de Schneider-Teitelbaum [**70**, § 1].

Considérons la courbe $M_K(\wp^n)$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$, *cf.* l'exemple 3.1.4, d'après [**20**, § 7.3], $M_K(\wp^n)$ admet un modèle propre $\mathbb{M}_K(\wp^n)$ sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp$ avec

$$\mathbb{M}_K(\wp^n)(S) = \big\{(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C_n)\ ;\ (A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp}) \in \mathbb{M}_K(S) \text{ et } C_n \text{ est un sous-}(u,\wp)\text{-groupe de } A \text{ d'échelon } n\big\}$$

pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp$. En effet, le problème de module $\mathbb{M}_K(\wp^n)$ défini ci-dessus est relativement représentable sur $\mathbb{M}_K$, donc représentable puisque $\mathbb{M}_K$ l'est. Le schéma représentant ce foncteur est fini sur $\mathbb{M}_K$ et donc propre sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp$.

Soit $\varepsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{M}_K(\wp^n)$ le schéma abélien universel avec $\mathbb{C}_n \to \mathbb{M}_K(\wp^n)$ le sous-$(u,\wp)$-groupe universel de $\mathscr{A}$ d'échelon n, notons

$$\mathbb{H}_n := (\mathbb{C}_n)^{-,1}_{\wp}$$

avec $e : \mathbb{H}_n \to \mathbb{M}_K(\wp^n)$ la section identité. On dispose donc sur $\mathbb{M}_K(\wp^n)$ d'un faisceau cohérent

$$\underline{\omega}_{\mathbb{H}_n} := e^*\Omega^1_{\mathbb{H}_n/\mathbb{M}_K(\wp^n)}.$$

Notons $\mathfrak{M}_K(\wp^n)$ le complété de $\mathbb{M}_K(\wp^n)$ le long de sa fibre spéciale et $\mathfrak{M}_K(\wp^n)^{\mathrm{rig}}$ l'espace analytique rigide associé. Comme $\mathbb{M}_K(\wp^n)$ est propre, on a

$$\mathfrak{M}_K(\wp^n)^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} M_K(\wp^n)^{\mathrm{an}}$$

(l'espace analytique rigide associé à $M_K(\wp^n)$) par [**8**, (0.3.5)]. En particulier, $\mathfrak{M}_K(\wp^n)^{\mathrm{rig}}$ est lisse sur $F_\wp$ comme $M_K(\wp^n)$ l'est.

Soient L une extension finie de $F_\wp$ avec $\mathscr{O}_L$ son anneau des entiers et G un schéma en groupes fini et plat sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L$ avec $e : \operatorname{Spec}\mathscr{O}_L \to G$ la section identité, on voit que

$$\underline{\omega}_G := e^*\Omega^1_{G/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L}$$

est un $\mathscr{O}_L$-module fini. Il existe alors des $x_i \in \mathscr{O}_L$ en nombre fini tels que

$$\underline{\omega}_G \cong \bigoplus_i \mathscr{O}_L/x_i.$$

Suivant Fargues, posons

$$\deg(G) := \sum_i v_\wp(x_i).$$

On a (*cf.* [**40**, lemme 4]) :

Proposition 4.1.8

(1) *Soit* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *une suite exacte de schémas en groupes finis et plats sur* $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L$. *Alors on a*

$$\deg(G) = \deg(G') + \deg(G'').$$

(2) *Soit* G *un schéma en groupes fini et plat sur* $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L$. *Alors on a*

$$\deg(G) + \deg(G^\vee) = e\,\mathrm{ht}(G),$$

où $G^\vee$ *désigne le dual de Cartier de* G, $\mathrm{ht}(G)$ *est la hauteur de* G *et où* e *est l'indice de ramification de* $F_\wp$ *sur* $\mathbb{Q}_p$ (*ainsi* $e = d/d_0$).

Soit maintenant $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_n)$ un L-point de $M_K(\wp^n)^{\mathrm{an}}$ où

$$\underline{x} = (\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, \mathfrak{C}_n)$$

est le $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K(\wp^n)$ associé. La suite exacte

$$0 \to \mathfrak{A}[\varpi^n]^{-,1} \longrightarrow \mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1} \xrightarrow{\varpi^n} \mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1} \to 0$$

induit une suite exacte de $\mathscr{O}_L$-modules

$$0 \to e^*\Omega^1_{\mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L} \xrightarrow{\varpi^n} e^*\Omega^1_{\mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{A}[\varpi^n]^{-,1}} \to 0$$

d'où on déduit $\deg(\mathfrak{A}[\varpi^n]^{-,1}) = n$ puisque $e^*\Omega^1_{\mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L}$ est un $\mathscr{O}_L$-module libre de rang 1. Posons :

$$\deg(x) := \deg\big((\mathfrak{C}_n)^{-,1}_\wp\big) \in \mathbb{Q} \cap [0, n].$$

Lemme 4.1.9. — *Pour tous* $a, b \in [0, n] \cap \mathbb{Q}$, $a \leq b$, *il existe un unique ouvert admissible* $M_K(\wp^n)[a, b]$ *de* $M_K(\wp^n)^{\mathrm{an}}$ *tel que, pour toute extension finie* L *de* $F_\wp$, *on a*

$$M_K(\wp^n)[a, b](L) = \big\{x \in M_K(\wp^n)^{\mathrm{an}}(L)\ ;\ a \leq \deg(x) \leq b.\big\}$$

Démonstration. — On construit $M_K(\wp^n)[a,b]$ localement. Soit $\mathfrak{U} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spf} R$ un sous-schéma formel affine ouvert de $\mathfrak{M}_K(\wp^n)$ assez petit pour que $\underline{\omega}_{\mathbb{A}/\mathbb{C}_n,-}|_{\mathfrak{U}}$ et $\underline{\omega}_{\mathbb{A},-}|_{\mathfrak{U}}$ soient libres. On dispose d'une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{U}}$-modules

$$0 \to \underline{\omega}_{\mathbb{A}/\mathbb{C}_n,-}|_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\ \phi^*\ } \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}|_{\mathfrak{U}} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathbb{C}_n,-}|_{\mathfrak{U}} \to 0$$

induite par l'isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/\mathbb{C}_n$.

Soit e_1 (resp. e_2) un générateur de $\underline{\omega}_{\mathbb{A},-}|_{\mathfrak{U}}$ (resp. de $\underline{\omega}_{\mathbb{A}/\mathbb{C}_n,-}|_{\mathfrak{U}}$) et soit $s \in R$ tel que $\phi^*(e_2) = se_1$. Supposons $a = a_1/a_2$, $b = b_1/b_2$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i = 1, 2$. Posons :

$$U_a := \operatorname{Spm} R\langle T\rangle/(s^{a_1} - \varpi^{a_2}T) \quad \text{et} \quad U_b := \operatorname{Spm} R\langle T\rangle/(\varpi^{b_2} - s^{b_1}T).$$

L'ouvert $U_a \cap U_b$ de $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}$ est alors par définition $M_K(\wp^n)[a,b]_{|\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}}$. □

Soit $\tau \in \Sigma_\wp$. Par le changement de base de $\mathscr{O}_\wp$ à $\mathscr{O}_E$ ou de $F_\wp$ à E via τ, on définit

$$\mathbb{M}_K(\wp^n)_{\tau,\mathscr{O}_E},\ \mathfrak{M}_K(\wp^n)_{\tau,\mathscr{O}_E},\ \mathfrak{M}_K(\wp^n)^{\mathrm{rig}}_{\tau,\mathscr{O}_E} \xrightarrow{\ \sim\ } M_K(\wp^n)^{\mathrm{an}}_{\tau,E},\ M_K(\wp^n)_{\tau,E}[a,b].$$

Soit K' le sous-groupe ouvert compact de K tel que $(K')^\wp = K^\wp$ et

$$K'_\wp \cong \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp) \ ; \ g \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \pmod{\varpi} \right\}.$$

Notons $M_K(\wp;\wp) := M_{K'}$. Pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec} F_\wp$, on a alors

$$\begin{aligned} M_K(\wp;\wp)(S) = \big\{ &(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_1, C_1') \ ; \ (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_1) \in M_K(\wp)(S) \\ &\text{et } C_1' \text{ est un sous-}(u,\wp)\text{-groupe de } A \text{ d'échelon 1 différent de } C_1 \big\}. \end{aligned}$$

De plus, $M_K(\wp;\wp)$ admet un $\mathscr{O}_\wp$-modèle propre $\mathbb{M}_K(\wp;\wp)$ sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_K(\wp;\wp)(S) = \big\{ &(\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_1') \ ; \ (\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, \mathfrak{C}_1) \in \mathbb{M}_K(\wp)(S) \\ &\text{et } \mathfrak{C}_1' \text{ est un sous-}(u,\wp)\text{-groupe de } \mathfrak{A} \text{ d'échelon 1 différent de } \mathfrak{C}_1 \big\} \end{aligned}$$

pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp$. Notons :

- ▷ $\mathfrak{M}_K(\wp;\wp)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ le complété le long de la fibre spéciale de

$$\mathbb{M}_K(\wp;\wp)_{\tau,\mathscr{O}_E} := \mathbb{M}_K(\wp;\wp) \times_{\tau,\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spec}\mathscr{O}_E,$$

- ▷ $\mathfrak{M}_K(\wp;\wp)^{\mathrm{rig}}_{\tau,\mathscr{O}_E}$ l'espace analytique rigide associé,
- ▷ $M_K(\wp;\wp)^{\mathrm{an}}$ l'espace analytique rigide associé à $M_K(\wp;\wp)$.

On a un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur $\operatorname{Spec} E$:

$$\mathfrak{M}_K(\wp;\wp)^{\mathrm{rig}}_{\tau,\mathscr{O}_E} \cong M_K(\wp;\wp)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}$$

(où $M_K(\wp;\wp)^{\mathrm{an}}_{\tau,E} := M_K(\wp;\wp)^{\mathrm{an}} \times_{\operatorname{Spec} F_\wp} \operatorname{Spec} E$). On dispose de deux morphismes naturels (finis étales) d'espaces analytiques rigides :

$$\begin{aligned} M_K(\wp;\wp)^{\mathrm{an}} &\xrightarrow{\ p_1\ } M_K(\wp)^{\mathrm{an}}, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_1, C_1') \longmapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_1), \\ M_K(\wp;\wp)^{\mathrm{an}} &\xrightarrow{\ p_1'\ } M_K(\wp)^{\mathrm{an}}, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_1, C_1') \longmapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_1'). \end{aligned}$$

Soient $a, b \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, $a \leq b$, notons

$$M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[a,b] := p_1^{-1}\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[a,b]\big),$$
$$M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}\{[a,b];[c,d]\} := p_1^{-1}\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[a,b]\big) \cap (p_1')^{-1}\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[c,d]\big),$$

qui sont des ouverts admissibles de $M_K(\wp;\wp)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}$.

4.1.2. Sous-groupes canoniques. — On rappelle dans cette section la théorie du sous-groupe canonique pour les courbes de Shimura unitaires selon Kassaei [**48**, § 10].

D'après Kassaei, on a (*cf.* [**48**, th. 10.1]) :

Proposition 4.1.10. — *Soient $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$ et R une $\mathscr{O}_\wp$-algèbre ϖ-adiquement complétée. Soit $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un R-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$. Alors le schéma abélien A admet un unique sous-$(u,\wp)$-groupe C d'échelon 1 vérifiant :*

- *la formation de C est stable par le changement de base ;*
- *lorsque $\varpi = 0 \in R$, le schéma en groupes C s'identifie au noyau du morphisme de Frobenius $A \to A^{(q)}$.*

Avec les notations de la proposition, on dit que C, resp. $C_\wp^{-,1}$, resp. $C \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spec} F_\wp$, resp. $C_\wp^{-,1} \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spec} F_\wp$ est *le sous-groupe canonique d'échelon* 1 de A, resp. $A[\varpi^\infty]^{-,1}$, resp. $A \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spec} F_\wp$, resp. $A[\varpi^\infty]^{-,1} \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spec} F_\wp$.

Pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$, on dispose alors d'un morphisme canonique d'espaces analytiques rigides :

$$M_K^{\leq r} \longrightarrow M_K(\wp)^{\mathrm{an}}, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}) \longmapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C) \tag{4.1.3}$$

où C est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A. Comme la composition de (4.1.3) avec le morphisme fini étale

$$p_1 : M_K(\wp)^{\mathrm{an}} \longrightarrow M_K^{\mathrm{an}}, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C) \longmapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}) \tag{4.1.4}$$

est une immersion ouverte ($M_K^{\leq r} \hookrightarrow M_K^{\mathrm{an}}$), on en déduit que (4.1.3) est étale.

Par la construction du sous-groupe canonique dans la démonstration du théorème 10.1 de [**48**] (voir aussi [**12**, p. 10]), on a :

Proposition 4.1.11. — *Soient $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$, L une extension finie de $F_\wp$ d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$ et $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$. Soit C le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A. Alors on a*

$$\deg(C_\wp^{-,1}) = 1 - \mathrm{Ha}(x).$$

On en déduit que le morphisme (4.1.3) se factorise par

$$M_K^{\leq r} \longrightarrow M_K(\wp)[1-r, 1]. \tag{4.1.5}$$

Soit $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C)$ un L-point de $M_K(\wp)^{\mathrm{an}}$. On a par la construction du sous-groupe canonique dans [**48**, § 10] :

Proposition 4.1.12

(1) *Lorsque* $\deg(x) > \frac{1}{q+1}$, *on a*

$$\mathrm{Ha}\left(p_1(x)\right) = 1 - \deg(x) < \frac{q}{q+1}$$

(*cf.* (4.1.4)) *et* C *est le sous-groupe canonique d'échelon* 1 *de* A. *De plus, pour tout* L*-point* x' *de* $M_K(\wp)^{\mathrm{an}}$ *avec* $p_1(x') = p_1(x)$ *et* $x' \neq x$, *on a*

$$\deg(x') = \frac{1-\deg(x)}{q} < \frac{1}{q+1} \cdot$$

(2) *Lorsque* $\deg(x) < \frac{1}{q+1}$, *on a*

$$\mathrm{Ha}(x) = q \deg(x) < \frac{q}{q+1} \cdot$$

(3) *Lorsque* $\deg(x) = \frac{1}{q+1}$, *pour tout* L*-point* y *de* $M_K(\wp)^{\mathrm{an}}$ *vérifiant* $p_1(y) = p_1(x)$, *on a*

$$\deg(y) = \deg(x) = \frac{1}{q+1} \cdot$$

Par la proposition 4.1.12 (1), le morphisme p_1 induit, pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{q}{q+1}[$, un morphisme d'espaces analytiques rigides :

$$p_1 : M_K(\wp)[1-r, 1] \longrightarrow M_K^{\leq r}.$$

On a alors :

Corollaire 4.1.13. — *Le morphisme* (4.1.5) *est un isomorphisme d'espaces analytiques rigides.*

Corollaire 4.1.14. — *Soient* $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$, $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}) \in M_K^{\leq r}(L)$ *où* L *est une extension finie de* $F_{\wp}$ *et* $x' = (A', \iota', \theta', \overline{(\alpha^{\wp})'}) \in M_K(L)$. *Alors, si*

$$A'[\varpi^\infty]^{-,1} \cong A[\varpi^\infty]^{-,1},$$

on a $\mathrm{Ha}(A) = \mathrm{Ha}(A')$.

Démonstration. — Soient $(\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}})$, $(\mathfrak{A}', \iota', \theta', \overline{(\alpha^{\wp})'})$ les $\mathscr{O}_L$-points de $\mathfrak{M}_K$ associés à x et x' respectivement. On a donc $\mathfrak{A}'[\varpi^\infty]^{-,1} \cong \mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1}$ (*cf.* [**77**, th. 4]). Si $\mathfrak{C}$ est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de $\mathfrak{A}$, on a

$$\deg(\mathfrak{C}_{\wp}^{-,1}) = 1 - \mathrm{Ha}(A) > \frac{1}{q+1} \cdot$$

En considérant $\mathfrak{C}_{\wp}^{-,1}$ comme sous-groupe de $\mathfrak{A}'$ via l'isomorphisme

$$\mathfrak{A}'[\varpi^\infty]^{-,1} \cong \mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1},$$

on a $\mathrm{Ha}(A') = 1 - \deg(\mathfrak{C}_{\wp}^{-,1}) = \mathrm{Ha}(A)$ d'après la proposition 4.1.12 (1). ∎

Proposition 4.1.15. — *Soient $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$ et R une $\mathscr{O}_\wp$-algèbre ϖ-adiquement complétée. Soit $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un R-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$ avec C le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A. Alors $y := (A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^\wp})$ est un R-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq qr}$. De plus, si $R = \mathscr{O}_L$ (l'anneau des entiers d'une extension L finie de $F_\wp$), on a*

$$\mathrm{Ha}(y) = q\,\mathrm{Ha}(x).$$

Démonstration. — La première partie découle de [**48**, th. 10.1 (2)]. Soient $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$ et C le sous-groupe canonique de A d'échelon 1. Selon la proposition 4.1.11, on a $\deg(C_\wp^{-,1}) = 1 - \mathrm{Ha}(x) > \frac{q}{q+1}$. On dispose d'une suite exacte $\mathscr{O}_\wp$-linéaire de schémas en groupes sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_L$:

$$0 \to C_\wp^{-,1} \longrightarrow A[\varpi]^{-,1} \longrightarrow A[\varpi]^{-,1}/C_\wp^{-,1} \to 0$$

d'où on déduit par la proposition 4.1.8 (1)

$$\deg\left(A[\varpi]^{-,1}/C_\wp^{-,1}\right) = 1 - \deg(C_\wp^{-,1}) = \mathrm{Ha}(x) < \frac{1}{q+1}\cdot$$

Par la proposition 4.1.12 (2), pour le $\mathscr{O}_L$-point $y = (A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^\wp})$ de $\mathfrak{M}_K$, on a

$$\mathrm{Ha}(y) = q \deg(A[\varpi]^{-,1}/C_\wp^{-,1}) = q\,\mathrm{Ha}(x).$$

Ceci permet de conclure. ∎

Corollaire 4.1.16. — *Soient $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$, R une $\mathscr{O}_\wp$-algèbre ϖ-adiquement complétée et $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un R-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$ avec C_1 le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A. Alors A admet un sous-$(u,\wp)$-groupe C_2 d'échelon 2 tel que $C_1 \subset C_2$ et que $(C_2)_\wp^{-,1}/(C_1)_\wp^{-,1}$ soit isomorphe au sous-groupe canonique d'échelon 1 de $(A/C)[\varpi^\infty]^{-,1}$. Si l'on suppose de plus $R = \mathscr{O}_L$ (l'anneau des entiers d'une extension finie L de $F_\wp$), alors on a*

$$\deg\left((C_2)_\wp^{-,1}\right) = 2 - \frac{1-q^2}{1-q}\,\mathrm{Ha}(x).$$

Démonstration. — Soit $\mathbb{A}$ le schéma abélien universel sur $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$, on construit un sous-$(u,\wp)$-groupe d'échelon 2 de $\mathbb{A}$. Soient $\mathbb{C}_1$ le sous-groupe canonique d'échelon 1 de $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}_1'$ le sous-groupe canonique d'échelon 1 de $\mathbb{A}/\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}_2$ le sous-groupe de $\mathbb{A}$ (de $\mathbb{A}[\varpi^\infty]^{-,1}$) tel que

$$(\mathbb{C}_1)_\wp^{-,1} \subset \mathbb{H}_2 \quad \text{et} \quad \mathbb{H}_2/(\mathbb{C}_1)_\wp^{-,1} \cong (\mathbb{C}_1')_\wp^{-,1}.$$

Montrons que $\mathbb{H}_2 \neq \mathbb{A}[\varpi]^{-,1}$. Soient L une extension finie de $F_\wp$ d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$, $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$; notons $C_1 = x^*\mathbb{C}_1$ et $H_2 = x^*\mathbb{H}_2$. Par la proposition 4.1.11, on a

$$\deg\left((C_1)_\wp^{-,1}\right) = 1 - \mathrm{Ha}(x).$$

Notons $y := (A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^\wp})$. Alors on a

$$\deg\left((C_1')_\wp^{-,1}\right) = 1 - \mathrm{Ha}(y) = 1 - q\,\mathrm{Ha}(x)$$

(où $C_1' := y^*(\mathbb{C}_1')$ est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A/C), d'où on déduit

$$\deg(H_2) = 2 - (q+1)\,\mathrm{Ha}(x) > 1, \tag{4.1.6}$$

avec $H_2 := y^*\mathbb{H}_2$. Par conséquent, on a $H_2 \neq A[\varpi]^{-,1}$ et donc $\mathbb{H}_2 \neq \mathbb{A}[\varpi]^{-,1}$. On associe alors à $\mathbb{H}_2$ un sous-$(u,\wp)$-groupe $\mathbb{C}_2$ d'échelon 2 (*i.e.* $\mathbb{C}_2$ étant le sous-$(u,\wp)$-groupe de $\mathbb{A}$ tel que $(\mathbb{C}_2)_{\wp}^{-,1} = \mathbb{H}_2$). La deuxième partie découle de (4.1.6). ∎

Par récurrence sur n, on a :

Corollaire 4.1.17. — *Soient $n \geq 2$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q^{n-2}(q+1))[$, R une $\mathscr{O}_{\wp}$-algèbre ϖ-adiquement complétée et $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}})$ un R-point de $\mathfrak{M}_K^{\leq r}$. Alors A admet des sous-$(u,\wp)$-groupes C_k d'échelon k pour tout $k \leq n$ tels que le schéma en groupes $(C_k)_{\wp}^{-,1}/(C_{k-1})_{\wp}^{-,1}$ soit le sous-groupe canonique d'échelon* 1 *de $(A/C_{k-1})[\varpi^{\infty}]^{-,1}$. Si de plus $R = \mathscr{O}_L$, alors on a pour tout $1 \leq k \leq n$,*

$$\deg\big((C_k)_{\wp}^{-,1}\big) = k - \frac{1-q^k}{1-q}\,\mathrm{Ha}(x).$$

On dit que C_k (respectivement $(C_k)_{\wp}^{-,1}$) est *le sous-groupe canonique d'échelon k* de A (respectivement $A[\varpi^{\infty}]^{-,1}$).

Comme dans le corollaire 4.1.13, pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{q^{n-2}(q+1)}[$, on a un isomorphisme d'espaces analytiques rigides

$$M_K^{\leq r} \xrightarrow{\sim} M_K(\wp^n)\Big[n - \frac{1-q^n}{1-q}r, n\Big], \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}) \longmapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, C_n), \tag{4.1.7}$$

où C_n est le sous-groupe canonique d'échelon n de A.

Proposition 4.1.18. — *Avec les notations de la définition* 4.1.6*, il existe une injection naturelle de E-espaces vectoriels*

$$H^0\big(M_K(\wp^n)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longhookrightarrow S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}(K). \tag{4.1.8}$$

Démonstration. — Soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{q^{n-2}(q+1)}[$ et considérons la composée

$$\begin{aligned} &H^0\big(M_K(\wp^n)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\ &\qquad\longrightarrow H^0\big(M_K(\wp^n)_{\tau,E}\big[n - \tfrac{1-q^n}{1-q}r, n\big], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\ &\qquad\qquad\xrightarrow{\sim} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big), \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

où la première application est l'application de restriction, et où l'isomorphisme découle de (4.1.7). Montrons que la première application en (4.1.9) est injective (d'où la proposition par le lemme 4.1.7). Comme on a vu dans la preuve du lemme 4.1.7, il suffit de montrer que

$$M_K(\wp^n)_{\tau,E}\Big[n - \frac{1-q^n}{1-q}r, n\Big]$$

est Zariski-dense dans $M_K(\wp^n)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}$. Par [**20**, § 3.2], la projection naturelle

$$M_K(\wp^n) \longrightarrow M_K, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, C_n) \mapsto (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}})$$

induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $M_K(\wp^n)$ et celui de M_K, et induit une projection de chacune des composantes connexes de $M_K(\wp^n)$ à la composante connexe de M_K correspondante. Comme $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ est Zariski-dense dans $(M_K)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}$, par l'isomorphisme (4.1.7), on voit que

$$M_K(\wp^n)_{\tau,E}[n - (1-q^n)/(1-q)r, n]$$

est Zariski-dense dans $M_K(\wp^n)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}$. La proposition en découle. $\square$

4.1.3. Opérateurs de Hecke. — Considérons l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des formes modulaires surconvergentes. Soient $\tau \in \Sigma_{\wp}$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$, et $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$.

4.1.3.1. *Opérateurs de Hecke hors de* $\wp$. — Soit $g = g_{\wp} g^{\wp} \in G(\mathbb{A}^{\infty})$. On dit que g est *premier à* $\wp$, si $g_{\wp} = 1$.

Comme au § 3.2.3, supposons que $V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \subset g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ et que le groupe $K' := gKg^{-1} \cap K$ est net. Si l'on suppose de plus g premier à $\wp$, alors l'action de $[KgK]$ sur

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

peut se prolonger canoniquement sur $H^0((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$ pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$ (donc sur $S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}(K)$) de la manière suivante. Le morphisme $r_g : M_{K'} \to M_K$, $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha}) \mapsto x' = (A', \iota', \theta', \overline{\alpha'})$ induit un morphisme d'espaces analytiques rigides $r_g : M_{K'}{}^{\leq r} \to M_K^{\leq r}$ pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$, puisque g est premier à $\wp$ (donc $\mathrm{Ha}(A) = \mathrm{Ha}(A')$ par le corollaire 4.1.14). On dispose alors d'un diagramme commutatif (induit par le diagramme (3.2.12))

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dl] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \mathscr{A}' \arrow[dl, "\varepsilon'"'] \arrow[dr] & \\
\mathscr{A} \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & M_{K'}{}^{\leq r} \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \arrow[dr, "r_g"] & & \mathscr{A} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
 & M_K{}^{\leq r} & & M_K{}^{\leq r} &
\end{tikzcd} \tag{4.1.10}$$

d'où on déduit un opérateur continu encore noté $[KgK]$ sur

$$H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

(qui prolonge l'opérateur $[KgK]$ sur $H^0((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$, *cf.* (3.3.23)) par la composée

$$
\begin{aligned}
(4.1.11)\quad & H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\
&\xrightarrow{r_g^*} H^0\big((M_{K'})_{\tau,E}^{\leq r}, \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)'\big)\\
&\xrightarrow{\phi^*} H^0\big((M_{K'})_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\
&\xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)
\end{aligned}
$$

où le faisceau cohérent

$$\big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)'$$

est défini de manière analogue à $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ en échangeant ε et ε' (on renvoie à la remarque 3.3.12 pour la définition de ϕ^*).

4.1.3.2. *Opérateurs de Hecke en* $\wp$. — Commençons par l'opérateur $Y_{u,\wp}$. Soient $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$, L une extension finie de $F_\wp$, $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un L-point de M_K. Par le corollaire 4.1.14, on a

$$\mathrm{Ha}(A) = \mathrm{Ha}\left(A/(A[q/\varpi]^+ \oplus A[\varpi]^-)\right).$$

Par conséquent, le morphisme $Y_{u,\wp} : M_K \to M_K$ (*cf.* l'exemple 3.1.10) induit un morphisme encore noté $Y_{u,\wp} : M_K^{\leq r} \to M_K^{\leq r}$ pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{q}{q+1}[$. On dispose donc d'un diagramme commutatif

$$
(4.1.12)\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \mathscr{A}/(\mathscr{A}[\frac{q}{\varpi}]^+ \oplus \mathscr{A}[\varpi]^-) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] & \mathscr{A} \arrow[d, "\varepsilon"] \\
& M_K^{\leq r} \arrow[r, "Y_{u,\wp}"] & M_K^{\leq r}
\end{tikzcd}
$$

d'où on déduit un opérateur continu encore noté $Y_{u,\wp}$ sur

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

par la composée

$$
\begin{aligned}
Y_{u,\wp} : & H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\
&\xrightarrow{Y_{u,\wp}^*} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)'\big)\\
&\xrightarrow{\phi^*} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).
\end{aligned}
$$

Considérons le morphisme d'espaces analytiques rigides

$$(4.1.13)\qquad p_2 : M_K(\wp)^{\mathrm{an}} \longrightarrow M_K^{\mathrm{an}}, \quad (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C_1) \longmapsto (A/C_1, \iota', \theta', \overline{\alpha^\wp}).$$

Lemme 4.1.19. — *Soit* $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$, *le morphisme* p_2 *induit un morphisme d'espaces analytiques rigides :*

$$p_2 : M_K(\wp)\big[0, \tfrac{r}{q}\big] \longrightarrow M_K^{\leq \frac{r}{q}}.$$

Démonstration. — On le vérifie au niveau des points. Soient L une extension finie de $F_\wp$, $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, C)$ un L-point de $M_K(\wp)[0, \frac{r}{q}]$ avec $(\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp}, \mathfrak{C})$ le $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K(\wp)$ associé, on a par définition

$$s := \deg(\mathfrak{C}_\wp^{-,1}) \leq \tfrac{r}{q} < \frac{1}{q+1}.$$

Selon la suite exacte de schémas en groupes sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_L$

$$0 \to \mathfrak{C}_\wp^{-,1} \longrightarrow \mathfrak{A}[\varpi]^{-,1} \longrightarrow \mathfrak{A}[\varpi]^{-,1}/\mathfrak{C}_\wp^{-,1} \to 0,$$

on a, par la proposition 4.1.8 (1), $\deg(\mathfrak{A}[\varpi]^{-,1}/\mathfrak{C}_\wp^{-,1}) = 1 - s > \frac{q}{q+1}$. D'après la proposition 4.1.12 (1), $\mathfrak{A}[\varpi]^{-,1}/\mathfrak{C}_\wp^{-,1}$ est le sous-groupe canonique de $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}[\varpi^\infty]^{-,1}$ et $\operatorname{Ha}(A/C) = s$. Le lemme en découle. ∎

En outre, par la proposition 4.1.8 (2), le morphisme (4.1.4) induit, en restriction à $M_K(\wp)[0, r/q]$ et pour tout $r \in [0, q/(q+1)[$, un morphisme encore noté p_1 d'espaces analytiques rigides :

$$p_1 : M_K(\wp)\big[0, \tfrac{r}{q}\big] \longrightarrow M_K^{\leq r}.$$

On dispose donc d'un diagramme commutatif

(4.1.14)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[rr, "\phi_{\mathscr{C}}"] \arrow[dl] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \mathscr{A}/\mathscr{C} \arrow[dl, "\varepsilon'"'] \arrow[dr] & \\
\mathscr{A} \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & M_K(\wp)[0, r/q] \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & \mathscr{A} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
 & M_K^{\leq r} & & M_K^{\leq \frac{r}{q}} &
\end{tikzcd}$$

d'où on déduit un opérateur continu $X'_{u,\wp}$ par la composée

(4.1.15)
$$\begin{aligned}
X'_{u,\wp} : H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq \frac{r}{q}}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\
\xrightarrow{p_2^*} H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0, \frac{r}{q}], \big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)'\big) \\
\xrightarrow{\phi_{\mathscr{C}}^*} H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0, \frac{r}{q}], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\
\xrightarrow{\operatorname{tr}_{p_1}} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big),
\end{aligned}$$

où le faisceau cohérent

$$\big(\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)'$$

est défini de manière analogue à $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ en échangeant ε et ε', et on renvoie à la remarque 3.3.12 pour la définition de $\phi^*_{\mathscr{C}}$. Notons encore $X'_{u,\wp}$ la composée :

$$\begin{aligned}
&H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\
&\qquad \xrightarrow{i} H^0\big((M_K)^{\leq \frac{r}{q}}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\
&\qquad\qquad \xrightarrow{X'_{u,\wp}} H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big),
\end{aligned}$$

qui est donc un opérateur compact sur $H^0((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$ pour $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$ car l'application de restriction i l'est. Explicitement, pour

$$f \in H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big),$$

on a $X'_{u,\wp}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}}) = \sum_C \phi^*_C(f(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}}))$, où C parcourt tous les sous-$(u,\wp)$-groupes de A d'échelon 1 différents du sous-groupe canonique d'échelon 1 de A. En prenant la limite inductive, on obtient un opérateur compact $X'_{u,\wp}$ sur $S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}$. Signalons que l'opérateur

$$U_{\wp} := \chi^{-1}_{u,p^{d_0}} X'_{u,\wp}$$

est aussi un opérateur compact sur $S_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger}$ car l'opérateur $\chi^{-1}_{u,p^{d_0}}$ (voir l'exemple 3.1.9) est un isomorphisme.

Par la proposition 4.1.15, on a :

Lemme 4.1.20. — *Soit $r \in \mathbb{Q} \in [0, 1/(q+1)[$, le morphisme* (4.1.13) *induit un morphisme d'espaces analytiques rigides :*

$$p_2 : M_K(\wp)[1-r, 1] \longrightarrow M_K^{\leq qr}.$$

En prenant la composition de p_2 avec l'isomorphisme (4.1.5), on obtient un morphisme

$$p_2 : M_K^{\leq r} \longrightarrow M_K^{\leq qr}, \quad (A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}}) \longmapsto (A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}}) \tag{4.1.16}$$

où C est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$. On dispose donc d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, "\phi_{\mathscr{C}}"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \mathscr{A}/\mathscr{C} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"] & \mathscr{A} \arrow[d, "\varepsilon"] \\
& M_K^{\leq r} \arrow[r, "p_2"] & M_K^{\leq qr}
\end{tikzcd} \tag{4.1.17}$$

d'où on déduit un opérateur continu $\Phi_{u,\wp}$ par la composée :

$$\begin{aligned}\Phi_{u,\wp} : H^0\big((M_K)^{\leq qr}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big) \\ \xrightarrow{p_2^*} H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \big(\mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big)'\big) \\ \xrightarrow{\phi^*_{\mathscr{C}}} H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big).\end{aligned}$$

Explicitement, pour tout $f \in H^0((M_K)^{\leq qr}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E})$, on a

$$\Phi_{u,\wp}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}}) = \phi^*_C\big(f(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}})\big),$$

où C est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A.

Remarque 4.1.21. — On vérifie sans peine que le plongement (4.1.8) est invariant sous l'action des opérateurs de Hecke hors de $\wp$ et de $Y_{u,\wp}$, $X'_{u,\wp}$ (et de $\Phi_{u,\wp}$ lorsque $n = 1$) (voir les exemples 3.3.14 et 3.3.15).

4.1.3.3. *Dynamique de l'opérateur $X'_{u,\wp}$.* — On continue l'étude de l'opérateur $X'_{u,\wp}$. Considérons le morphisme

$$p_2 : M_K(\wp;\wp)_{\tau,E} \longrightarrow M_K(\wp)_{\tau,E}, \quad (A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}},C_1,C'_1) \longmapsto \big(A/C'_1,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{(C_1)^{-,1}_{\wp}}\big)$$

où $\overline{(C_1)^{-,1}_{\wp}}$ est l'image de $(C_1)^{-,1}_{\wp}$ dans A/C'_1. On a :

Lemme 4.1.22

(1) *Soit $r \in [0, q/(q+1)] \cap \mathbb{Q}$. Alors la restriction de p_2 à $M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[1-r,1]$ induit un morphisme d'espaces analytiques rigides :*

$$p_2 : M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[1-r,1] \longrightarrow M_K(\wp)_{\tau,E}\big[1-\tfrac{r}{q},1\big].$$

(2) *Soit $r \in [0, 1/(q+1)[\cap\mathbb{Q}$. Alors la restriction de p_2 à $M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[r,1]$ induit un morphisme d'espaces analytiques rigides :*

$$p_2 : M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[r,1] \longrightarrow M_K(\wp)_{\tau,E}[qr,1].$$

(3) *Soit $r \in [0, 1/(q+1)[\cap\mathbb{Q}$. Alors la restriction de p_2 à $M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}\{[0,r];[0,r]\}$ induit un morphisme d'espaces analytiques rigides :*

$$p_2 : M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}\big\{[0,r];[0,r]\big\} \longrightarrow M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1].$$

Démonstration. — Montrons ce lemme au niveau des points. Soient L une extension finie de E et $\mathscr{O}_L$ son anneau des entiers.

(1). — Soient $r \in [0, \frac{q}{q+1}] \cap \mathbb{Q}$ et $x = (A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}},C_1,C'_1)$ un L-point de

$$M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[1-r,1]$$

où $(\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1)$ est le $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K(\wp;\wp)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ associé. Par la proposition 4.1.12 (1) et (3), on a

$$s := \deg\big(p_1(x)\big) \geq 1 - r \geq \frac{1}{q+1}\,.$$

- ▹ Lorsque $s > 1/(q+1)$, $\mathfrak{C}_1$ est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de $\mathfrak{A}$ et l'on a $\deg(\mathfrak{C}_{\wp}^{-,1}) = (1-s)/q$ pour tous les sous-$(u,\wp)$-groupes $\mathfrak{C}$ d'échelon 1 de $\mathfrak{A}$ différents de $\mathfrak{C}_1$.
- ▹ Lorsque $s = 1/(q+1)$, on a $\deg(\mathfrak{C}_{\wp}^{-,1}) = 1/(q+1)$ pour tous les sous-$(u,\wp)$-groupes $\mathfrak{C}$ d'échelon 1 de $\mathfrak{A}$.

En résumé, on a bien $\deg((\mathfrak{C}'_1)_{\wp}^{-,1}) = (1-s)/q$. Par la suite exacte de schémas en groupes (qui découle du fait que $(\mathfrak{C}'_1)_{\wp}^{-,1} \cap (\mathfrak{C}_1)_{\wp}^{-,1} = 0$)

$$0 \to (\mathfrak{C}'_1)_{\wp}^{-,1} \longrightarrow \mathfrak{A}[\varpi]^{-,1} \longrightarrow \overline{(\mathfrak{C}_1)_{\wp}^{-,1}} \to 0,$$

on a $\deg\big(\overline{(\mathfrak{C}_1)_{\wp}^{-,1}}\big) = 1 - (1-s)/q \geq 1 - r/q$. Donc le L-point $(A/C, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, \overline{(C_1)_{\wp}^{-,1}})$ de $M_K(\wp)_{\tau,E}$ se trouve bien dans $M_K(\wp)_{\tau,E}\big[1 - \frac{r}{q}, 1\big]$.

(2) et (3). — Soit $r \in [0, \frac{1}{q+1}[\cap \mathbb{Q}$, par (1), le morphisme p_2 envoie alors $M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[\frac{1}{q+1}, 1]$ sur $M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[\frac{q}{q+1}, 1]$. Considérons la restriction de p_2 à

$$M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}\Big[r, \frac{1}{q+1}\Big[.$$

Soit $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, C_1, C'_1)$ un L-point de $M_K(\wp;\wp)_{\tau,E}[r, \frac{1}{q+1}[$. Notons

$$(\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1)$$

le $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K(\wp;\wp)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ associé et

$$s := \deg\big(p_1(x)\big) < \frac{1}{q+1}\,.$$

D'après la proposition 4.1.12 (2), il existe un sous-$(u,\wp)$-groupe $\mathfrak{C}$ d'échelon 1 de $\mathfrak{A}$ (qui est le sous-groupe canonique de $\mathfrak{A}$) tel que $\deg(\mathfrak{C}_{\wp}^{-,1}) = 1 - qs$. De plus, pour tous les sous-$(u,\wp)$-groupes $\mathfrak{C}'$ d'échelon 1 de $\mathfrak{A}$ différents de $\mathfrak{C}_1$ et de $\mathfrak{C}$, on a $\deg((\mathfrak{C}')_{\wp}^{-,1}) = s$. On en déduit que l'on a

$$\deg\big(\overline{(\mathfrak{C}_1)_{\wp}^{-,1}}\big) = 1 - (1 - qs) = qs \geq qr$$

si $\deg((\mathfrak{C}'_1)_{\wp}^{-,1}) = 1 - qs$ (c'est le cas lorsque $\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}$) et $\deg(\overline{(\mathfrak{C}_1)_{\wp}^{-,1}}) = 1 - s$ si $\deg((\mathfrak{C}')_{\wp}^{-,1}) = s$. La partie (3) en découle.

Comme on a $1 - s > qs$, le L-point $(A/C, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, \overline{(C_1)_{\wp}^{-,1}})$ de $M_K(\wp)_{\tau,E}^{\mathrm{an}}$ est bien dans $M_K(\wp)_{\tau,E}[qr, 1]$. La partie (2) en découle. ∎

Par conséquent, on a :

Proposition 4.1.23

(1) *Soit* $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)]$, *l'opérateur* (*cf.* (3.3.26))

$$X'_{u,\wp} : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \tag{4.1.18}$$

se prolonge en un opérateur encore noté

$$X'_{u,\wp} : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[1-\tfrac{r}{q}, 1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r, 1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big). \tag{4.1.19}$$

(2) *Soit* $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$. *Alors l'opérateur* $X'_{u,\wp}$ (4.1.18) *se prolonge en un opérateur encore noté*

$$X'_{u,\wp} : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[qr, 1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[r, 1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big). \tag{4.1.20}$$

(3) *Soit* $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$. *Il existe un opérateur :*

$$(X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}} : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r, 1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0, r], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

tel que pour tout $f \in H^0(M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$, *on a*

$$(X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}}(f)(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, C_1) = \sum_C \phi_C^*\big(f\big(A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^{\wp}}, \overline{(C_1)_{\wp}^{-,1}}\big)\big),$$

où C *parcourt tous les sous-*$(u, \wp)$*-groupes d'échelon* 1 *de* A *différents de* C_1 *et du sous-groupe canonique d'échelon* 1 *de* A.

(4) *Soient* $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{q+1}[$ *avec* $r_1 \leq r_2$. *Alors il existe un opérateur*

$$(X'_{u,\wp})^{\mathrm{sp}} : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[qr_1, qr_2], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[r_1, r_2], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

tel que pour tout $f \in H^0(M_K(\wp)_{\tau,E}[qr_1, qr_2], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$, *on a*

$$(X'_{u,\wp})^{\mathrm{sp}}(f)(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}}, C_1) = \phi_C^*\big(f\big(A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^{\wp}}, \overline{(C_1)_{\wp}^{-,1}}\big)\big),$$

où C *est le sous-groupe canonique d'échelon* 1 *de* A.

Démonstration. — (1) Soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{q}{q+1}]$, par le lemme 4.1.22 (1), on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[rr, "\phi_{\mathscr{C}'_1}"] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathscr{A}/\mathscr{C}'_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathscr{A} \arrow[dr, "\varepsilon"] & & M_K(\wp;\wp)[1-r,1] \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & & \mathscr{A} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
 & M_K(\wp)[1-r,1] & & M_K(\wp)[1-\frac{r}{q},1] &
\end{tikzcd}$$

d'où on déduit un opérateur par la composée (comme dans (4.1.15))

$$\begin{aligned}
X'_{u,\wp} := \mathrm{tr}_{p_1} \circ \phi^*_{\mathscr{C}'_1} \circ p_2^* : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}\big[1-\tfrac{r}{q},1\big], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\
\longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).
\end{aligned}$$

(2) De même, soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{q+1}[$, par le lemme 4.1.22 (2) on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[rr, "\phi_{\mathscr{C}'_1}"] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathscr{A}/\mathscr{C}'_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathscr{A} \arrow[dr, "\varepsilon"] & & M_K(\wp;\wp)[r,1] \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & & \mathscr{A} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
 & M_K(\wp)[r,1] & & M_K(\wp)[qr,1] &
\end{tikzcd}$$

d'où déduit un opérateur par la composée

$$\begin{aligned}
X'_{u,\wp} := \mathrm{tr}_{p_1} \circ \phi^*_{\mathscr{C}'_1} \circ p_2^* : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[qr,1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\
\longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[r,1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).
\end{aligned}$$

(3) Par le lemme 4.1.22 (3) on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \arrow[rr, "\phi_{\mathscr{C}'_1}"] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathscr{A}/\mathscr{C}'_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathscr{A} \arrow[dr, "\varepsilon"] & & M_K(\wp;\wp)\{[0,r];[0,r]\} \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & & \mathscr{A} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
 & M_K(\wp)[0,r] & & M_K(\wp)[1-r,1] &
\end{tikzcd}$$

d'où on déduit un opérateur $(X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}}$ par la composée

$$\begin{aligned}(X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}} := \mathrm{tr}_{p_1} \circ \phi^*_{\mathscr{C}'} \circ p_2^* : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\ \longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0,r], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).\end{aligned}$$

Soit f une section de $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1]$, on voit par définition que

$$\begin{aligned}&(X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}},C_1)\\ &\quad= \sum_C \phi_C^*\big(f(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{(C_1)_{\wp}^{-,1}})\big) \in \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}}),\end{aligned}$$

où C parcourt tous les sous-$(u,\wp)$-groupes de A d'échelon 1 différents de C_1 et du sous-groupe canonique d'échelon 1 de A.

(4) Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$ $(r_1 \leq r_2)$, d'après la proposition 4.1.12 (1), on dispose d'un morphisme d'espaces analytiques rigides (*cf.* la démonstration du lemme 4.1.22) :

$$p_2' : M_K(\wp)_{\tau,E}[r_1,r_2] \to M_K(\wp)_{\tau,E}[qr_1,qr_2], \quad (A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}},C_1) \mapsto \big(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{(C_1)_{\wp}^{-,1}}\big)$$

où C est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A (on a bien $C \neq C_1$ en vertu de la proposition 4.1.12 (1)). On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{A} & \xrightarrow{\phi_{\mathscr{C}}} & \mathscr{A}/\mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & M_K(\wp)_{\tau,E}[r_1,r_2] & \xrightarrow{p_2'} & M_K(\wp)_{\tau,E}[qr_1,qr_2] \end{array}$$

(où $\mathscr{C}$ est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de $\mathscr{A}$) d'où on déduit un opérateur par la composée

$$\begin{aligned}(X'_{u,\wp})^{\mathrm{sp}} := \phi^*_{\mathscr{C}} \circ (p_2')^* : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[qr_1,qr_2], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\ \longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[r_1,r_2], \mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).\end{aligned}$$

Soit f une section de $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[qr_1,qr_2]$, on a alors

$$(X'_{u,\wp})^{\mathrm{sp}}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}},C_1) = \phi_C^*\big(\big(A/C,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{(C_1)_{\wp}^{-,1}}\big)\big),$$

où C est le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A. ∎

4.2. Schémas en groupes munis d'une action de $\mathscr{O}_{\wp}$

Supposons jusqu'à la fin de ce chapitre $F_{\wp}$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, on dispose alors d'une décomposition

$$\mathscr{O}_{\wp} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_{\wp}} \mathscr{O}_E, \quad a \otimes b \longmapsto \big(\sigma(a)b\big)_{\sigma\in\Sigma_{\wp}}. \tag{4.2.1}$$

4.2.1. Applications de Hodge-Tate. — Soient S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$, G un schéma en groupes fini et plat sur S, notons $e : S \to G$ la section identité, $\underline{\omega}_G := e^*\Omega^1_{G/S}$ et $G^\vee$ le dual de Cartier de G. Rappelons que l'on dispose d'une application de Hodge-Tate de faisceaux sur le site *fppf* de S :

$$\mathrm{HT} : G^\vee \longrightarrow \underline{\omega}_G$$

définie comme ci-après :soient S' un schéma fidèlement plat et de présentation finie sur S, $x \in G^\vee(S')$, qui correspond donc à un morphisme de schémas en groupes sur S' :

$$x : G \times_S S' \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_{S'};$$

l'application $\mathrm{HT}(S') : G^\vee(S') \to \underline{\omega}_G(S')$ envoie alors x sur $x^*\frac{\mathrm{d}T}{T} \in \underline{\omega}_G(S')$ pour tout $x \in G^\vee(S')$. L'application de Hodge-Tate est fonctorielle en G, *i.e.* si l'on a un morphisme $f : G \to G'$ de schémas en groupes sur S, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} (G')^\vee \arrow[r, "f^\vee"] \arrow[d, "\mathrm{HT}"'] & G^\vee \arrow[d, "\mathrm{HT}"] \\ \underline{\omega}_{G'} \arrow[r, "f^*"] & \underline{\omega}_G . \end{tikzcd} \tag{4.2.2}$$

Soient S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$, et G un schéma en groupes fini et plat sur S muni d'une action de $\mathscr{O}_\wp$: $\underline{\omega}_G$ est donc un $\mathscr{O}_\wp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_S$-module. On déduit de la décomposition (4.2.1) que le $\mathscr{O}_\wp \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_S$-module $\underline{\omega}_G$ se décompose comme

$$\underline{\omega}_G \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_\wp} \underline{\omega}_{G,\sigma}. \tag{4.2.3}$$

Soit $\sigma \in \Sigma_\wp$ et notons HT_σ la composée

$$\mathrm{HT}_\sigma : G^\vee \xrightarrow{\mathrm{HT}} \underline{\omega}_G \twoheadrightarrow \underline{\omega}_{G,\sigma}. \tag{4.2.4}$$

Soient G, G' deux schémas en groupes munis d'une action de $\mathscr{O}_\wp$ et $f : G \to G'$ un morphisme $\mathscr{O}_\wp$-linéaire. On déduit du diagramme (4.2.2) le diagramme commutatif (car f est $\mathscr{O}_\wp$-linéaire) :

$$\begin{tikzcd} (G')^\vee \arrow[r, "f^\vee"] \arrow[d, "\mathrm{HT}_\sigma"'] & G^\vee \arrow[d, "\mathrm{HT}_\sigma"] \\ \underline{\omega}_{G',\sigma} \arrow[r, "f^*_\sigma"] & \underline{\omega}_{G,\sigma} \end{tikzcd} \quad \text{où } f^*_\sigma := f^*|_{\underline{\omega}_{G',\sigma}}. \tag{4.2.5}$$

Soit τ un plongement de $\mathscr{O}_\wp$ dans $\mathscr{O}_E$. Suivant Faltings [**39**], on dit que l'action de $\mathscr{O}_\wp$ sur G est τ-*stricte* si $\underline{\omega}_{G,\sigma}$ est nul pour tout $\sigma \neq \tau$.

Soit $\mathscr{LT}$ un groupe formel de Lubin-Tate associé à $\mathscr{O}_\wp$ sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp$ où $\omega_{\mathscr{LT}}$ est un générateur de $\underline{\omega}_{\mathscr{LT}}$ sur $\mathscr{O}_\wp$. Par abus de notation,

$$\mathscr{LT} \quad \text{désigne} \quad \mathscr{LT} \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_\wp,\tau} S.$$

Noter que $\omega_{\mathscr{LT}}$ est aussi un générateur de $\underline{\omega}_{\mathscr{LT}}$ sur $\mathscr{O}_S$. Les schémas en groupes $\mathscr{LT}[\varpi^n]$ sont alors munis d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_\wp$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Soit G un schéma en groupes fini et plat muni d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_\wp$ sur S, d'après Faltings (*loc. cit.*), il existe un schéma en groupes $G^{\mathscr{D}}$ sur S, appelé *dual strict* de G, qui représente le foncteur

$$\{\text{Schémas sur } S\} \longrightarrow \{\text{Ensembles}\}, \quad S' \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\wp}(G_{S'}, \mathscr{LT}_{S'}),$$

où $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\wp}(G_{S'}, \mathscr{LT}_{S'})$ désigne l'ensemble des morphismes $\mathscr{O}_\wp$-linéaires de schémas en groupes $G_{S'} \to \mathscr{LT}_{S'}$. Le schéma en groupes $G^{\mathscr{D}}$ est muni naturellement d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_\wp$. De plus, pour un morphisme $\mathscr{O}_\wp$-linéaire $f : G \to G'$ de schémas en groupes munis d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_\wp$, il existe un morphisme $\mathscr{O}_\wp$-linéaire canonique de schémas en groupes :

$$f^{\mathscr{D}} : (G')^{\mathscr{D}} \longrightarrow G^{\mathscr{D}}.$$

On dispose d'une application de Hodge-Tate *relative à* $\mathscr{LT}$ entre faisceaux sur le site *fppf* de S : $\mathrm{HT}_{\mathscr{LT}} : G^{\mathscr{D}} \longrightarrow \underline{\omega}_G$ définie comme ci-après.

Soient S' un schéma fidèlement plat et de présentation finie sur S, $x \in G^{\mathscr{D}}(S')$, qui correspond donc à un morphisme de schémas en groupes $\mathscr{O}_\wp$-linéaire sur S' :x : $G \times_S S' \to \mathscr{LT} \times_S S'$; l'application

$$\mathrm{HT}_{\mathscr{LT}}(S') : G^{\mathscr{D}}(S') \longrightarrow \underline{\omega}_G(S')$$

envoie x sur $x^*\omega_{\mathscr{LT}} \in \underline{\omega}_G(S')$ pour tout $x \in G^{\mathscr{D}}(S')$. L'application $\mathrm{HT}_{\mathscr{LT}}$ est fonctorielle en G, *i.e.* pour un morphisme $\mathscr{O}_\wp$-linéaire $f : G \to G'$ de schémas en groupes sur S munis d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_\wp$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} (G')^{\mathscr{D}} & \xrightarrow{f^{\mathscr{D}}} & G^{\mathscr{D}} \\ {\scriptstyle \mathrm{HT}_{\mathscr{LT}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{HT}_{\mathscr{LT}}} \\ \underline{\omega}_{G'} & \xrightarrow{f^*} & \underline{\omega}_G . \end{array} \tag{4.2.6}$$

4.2.2. Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$. — Soit G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_E$ muni d'une action de $\mathscr{O}_\wp$, pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, il existe alors des $x_i \in \mathscr{O}_E$ en nombre fini tels que

$$\underline{\omega}_{G,\sigma} \cong \bigoplus_i \mathscr{O}_E/x_i.$$

Posons

$$\deg_\sigma(G) := \sum_i \upsilon_\wp(x_i).$$

Par la décomposition (4.2.3), on a

$$\deg(G) = \sum_{\sigma \in \Sigma_\wp} \deg_\sigma(G).$$

Soit G un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels fini et plat sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$ au sens de Raynaud [**65**, §1.2], avec $G(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathbb{F}_q$. Notons χ le caractère

$$\chi : \mathbb{F}_q^\times \xrightarrow{\text{Teichmüller}} \mathscr{O}_\wp^\times \xrightarrow{\tau} \mathscr{O}_E^\times.$$

D'après Raynaud [**65**, th. 1.4.1], pour chaque $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ il existe un $\delta_i \in \mathscr{O}_E$ tel que $G \cong \operatorname{Spec} A$ avec $A \cong \mathscr{O}_E[T_i]_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}/(T_i^p - \delta_i T_{i+1})$ et $d = [F_\wp : \mathbb{Q}_p] = [\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p]$, et tel que que l'action de $\mathbb{F}_q$ sur A est donnée par $\lambda(T_i) = \chi^{p^i}(\lambda) T_i$ pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$. Notons

$$A^* := \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_E}(A, \mathscr{O}_E).$$

La structure d'algèbre (resp. de coalgèbre) de A induit une structure de coalgèbre (resp. d'algèbre) de A^*, et on a bien

$$G^\vee \cong \operatorname{Spec} A^*.$$

Le schéma en groupes $G^\vee$ (donc l'algèbre A^*) est muni canoniquement d'une action de $\mathbb{F}_q$. En fait, soient $X_i \in A^*$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ tels que $X_i(T_i) = 1$ et

$$X_i\Big(\prod_{j\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} T_j^{n_j}\Big) = 0 \quad \text{pour tout } \textstyle\prod_{j\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} T_j^{n_j} \neq T_i \text{ avec } 0 \le n_j \le p-1,$$

l'action de $\mathbb{F}_q$ sur A^* est alors donnée par

$$\lambda(X_i) = \chi^{p^i}(\lambda) X_i$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$ et $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

D'après Raynaud [**65**, §1.5.3], il existe $\gamma_i \in \mathscr{O}_E$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ tel que

$$\upsilon_\wp(\gamma_i) + \upsilon_\wp(\delta_i) = 1 \quad \text{et} \quad A^* \cong \mathscr{O}_E[X_i]_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}/(X_i^p - \gamma_i X_{i+1}).$$

On a donc

$$\underline{\omega}_G \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathscr{O}_E/\delta_{i-1}\mathscr{O}_E\, dT_i \quad \text{et} \quad \underline{\omega}_{G^\vee} \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathscr{O}_E/\gamma_{i-1}\mathscr{O}_E\, dX_i.$$

Le schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels G (resp. $G^\vee$) est muni d'une action de $\mathscr{O}_\wp$ induite par celle de $\mathbb{F}_q$ via la projection $\mathscr{O}_\wp \twoheadrightarrow \mathbb{F}_q$. Soit $\sigma = \tau \circ \operatorname{Frob}^i : \mathscr{O}_\wp \to \mathscr{O}_E$ $(i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$. Avec les notations du §4.1.1, on a des isomorphismes de $\mathscr{O}_E$-modules

$$\underline{\omega}_{G,\sigma} \cong \mathscr{O}_E/\delta_{i-1}\mathscr{O}_E \quad \text{et} \quad \underline{\omega}_{G^\vee,\sigma} \cong \mathscr{O}_E/\gamma_{i-1}\mathscr{O}_E.$$

En particulier, $\deg_\sigma(G) + \deg_\sigma(G^\vee) = 1$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$. Si l'on suppose de plus l'action de $\mathscr{O}_\wp$ sur G τ-stricte, par [**41**, §1.1.2], on a en fait $\deg(G) + \deg(G^{\mathscr{D}}) = 1$. Par récurrence sur n, on obtient le lemme suivant.

Lemme 4.2.1. — *Soit G un schéma en groupes fini et plat sur* $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$ *muni d'une action de $\mathscr{O}_\wp$, et supposons $G(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp$ pour $n \ge 1$. Alors, pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, on a*

$$\deg_\sigma(G) + \deg_\sigma(G^\vee) = n.$$

Si on suppose de plus que l'action de $\mathscr{O}_\wp$ sur G est τ-stricte pour $\tau \in \Sigma_\wp$, alors on a

$$\deg(G) + \deg(G^{\mathscr{D}}) = n.$$

Considérons l'application de Hodge-Tate (*cf.* (4.2.4), avec $\sigma = \tau \circ \mathrm{Frob}^i$)

$$\mathrm{HT}_\sigma(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) : G^\vee(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \longrightarrow \underline{\omega}_{G,\sigma}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/\delta_{i-1}.$$

Soit $x = (\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in G^\vee(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ (*i.e.* le morphisme $A^* \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ envoyant X_i sur λ_i pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$), on a alors $\lambda_i^p = \gamma_i \lambda_{i+1}$. On en déduit

$$\upsilon_\wp(\lambda_i) = \frac{1}{q-1}\Big(\sum_{j=i}^{d-1} p^{d-1-j+i}\upsilon_\wp(\gamma_j) + \sum_{j=0}^{i-1} p^{i-j-1}\upsilon_\wp(\gamma_j)\Big), \tag{4.2.7}$$

en supposant $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. En outre, le point x correspond à un morphisme (par la définition de $G^\vee$)

$$x : \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}[T, T^{-1}] \longrightarrow A \otimes_{\mathscr{O}_E} \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}[T_i]_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}/(T_i^p - \delta_i T_{i+1}).$$

Notons y l'image de T. On déduit de la définition de X_i que

$$y = 1 + \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \lambda_i T_i + \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ 0 \le n_i \le p-1, \sum_i n_i > 1}} a_{(n_0,\dots,n_{d-1})} \prod T_i^{n_i},$$

avec $a_{(n_0,\dots,n_{d-1})} \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$. On a alors

$$x^*\Big(\frac{\mathrm{d}T}{T}\Big) = (\overline{\lambda_0}, \dots, \overline{\lambda_1} \cdots, \overline{\lambda_{d-1}}) \in (\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/\delta_{d-1})\mathrm{d}T_0 \oplus \cdots \oplus (\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/\delta_{d-2})\mathrm{d}T_{d-1}.$$

Lemme 4.2.2. — *Soit G un schéma en groupes fini et plat et de type $(p, \dots, p)$ muni d'une action de $\mathscr{O}_\wp$ sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$ tel que $G(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathscr{O}_\wp/\varpi$ et que l'action induite de $\mathscr{O}_\wp$ sur $G^\vee$ soit τ-stricte. Alors le sous-$\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$-module de $\underline{\omega}_{G,\tau}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ engendré par l'image de $\mathrm{HT}_\tau(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ est isomorphe à $a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/b\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$, où*

$$\upsilon_\wp(a) = \frac{1 - \deg_\tau(G)}{q-1} \quad \textit{et} \quad \upsilon_\wp(b) = \deg_\tau(G).$$

Démonstration. — Comme l'action de $\mathscr{O}_\wp$ sur $G^\vee$ est τ-stricte, on a $\gamma_i \in \mathscr{O}_E^\times$ pour tout $i \neq d-1 \pmod d$. Soit $0 \neq (\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in G^\vee(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$, par (4.2.7), il vient

$$\upsilon_\wp(\lambda_i) = \frac{p^i}{q-1}\upsilon_\wp(\gamma_{d-1}) = \frac{p^i}{q-1}\big(1 - \upsilon_\wp(\delta_{d-1})\big).$$

Le lemme en découle. ∎

Pour l'application de Hodge-Tate relative à $\mathscr{LT}$, on a d'après [**41**, 1.1.2] :

Lemme 4.2.3. — *Soit G un schéma en groupes de type $(p, \dots, p)$ muni d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_\wp$ sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$ avec $G(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathbb{F}_q$. Alors le sous-$\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$-module de $\underline{\omega}_G$ engendré par l'image de $\mathrm{HT}_{\mathscr{LT}}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ est isomorphe à $a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/b\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ où*

$$\upsilon_\wp(a) = \frac{1 - \deg(G)}{q-1} \quad \textit{et} \quad \upsilon_\wp(b) = \deg(G).$$

REMARQUE 4.2.4 (Dual de Cartier et dual de Faltings). — Soient S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$, et G un schéma en groupes fini et plat muni d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_{\wp}$, considérons les deux faisceaux cohérents $\underline{\omega}_{G^\vee,\tau}$ et $\underline{\omega}_{G^{\mathscr{D}}}$ sur S. On peut se demander : sont-ils isomorphes ?

Comme vu précédemment, on dispose de deux applications de Hodge-Tate :

$$\mathrm{HT}_\tau : G \to \underline{\omega}_{G^\vee,\tau} \quad \text{et} \quad \mathrm{HT}_{\mathscr{L}\mathscr{T}} : G \to \underline{\omega}_{G^{\mathscr{D}}}.$$

En outre, par la propriété universelle de $\underline{\omega}_{G^\vee}$ (*cf.* [**57**, prop. IV.1.3 et rem. IV.1.4]), il existe un morphisme de faisceaux cohérents sur S :

$$i_\tau : \underline{\omega}_{G^\vee} \longrightarrow \underline{\omega}_{G^{\mathscr{D}}}$$

tel que $\mathrm{HT}_{\mathscr{L}\mathscr{T}} = i_\tau \circ \mathrm{HT}$. D'après [**57**, rem. IV.1.6], i_τ est de plus $\mathscr{O}_{\wp}$-linéaire, et se factorise donc à travers $\underline{\omega}_{G^\vee,\tau}$. En résumé, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{HT}_\tau"] \arrow[dr, "\mathrm{HT}_{\mathscr{L}\mathscr{T}}"'] & \underline{\omega}_{G^\vee,\tau} \arrow[d, "i_\tau"] \\ & \underline{\omega}_{G^{\mathscr{D}}} . \end{tikzcd} \tag{4.2.8}$$

Mais l'auteur ignore si i_τ est un isomorphisme.

4.2.3. Sous-groupes canoniques. — Soient $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{q^{n-2}(q+1)}[$, S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$ et $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}})$ un S-point de $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,\mathscr{O}_E}$ avec C_n le sous-groupe canonique d'échelon n de A (*cf.* corollaire 4.1.17). Notons :

- $G := A[\varpi^\infty]^{-,1}$,
- $H_n := (C_n)_{\wp}^{-,1}$ le sous-groupe canonique d'échelon n de G,
- $\phi_n : G \to G/H_n$ l'isogénie naturelle, et
- $G^\vee$ le dual de Cartier de G.

Considérons la suite exacte :

$$0 \to G[\varpi^n]/H_n \to G/H_n \xrightarrow{\psi_n} G \to 0,$$

où l'isogénie $\psi_n : G/H_n \to G$ est l'unique isogénie telle que $\psi_n \circ \phi_n = [\varpi^n]$. En prenant les duaux de Cartier, on obtient une suite exacte

$$0 \to \big(G[\varpi^n]/H_n\big)^\vee \xrightarrow{\iota_n} G^\vee \xrightarrow{\psi_n^\vee} (G/H_n)^\vee \to 0.$$

Notons

$$\widetilde{H}_n := \big(G[\varpi^n]/H_n\big)^\vee.$$

LEMME 4.2.5. — *Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Alors l'application ι_n ci-dessus se factorise par*

$$\iota_{n+1} : \widetilde{H}_{n+1} \to G^\vee$$

et le schéma en groupes $\widetilde{H}_n$ s'identifie à un sous-schéma en groupes de $\widetilde{H}_{n+1}$ sur S.

Démonstration. — Pour $n \in Z_{>0}$, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G[\varpi^n]/H_n & \xrightarrow{j_n} & G/H_n & \xrightarrow{\psi_n} & G & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle i'} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle [\varpi]} & & \\ 0 & \to & G[\varpi^{n+1}]/H_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & G/H_{n+1} & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & G & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle j'} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \to & G[\varpi^n]/H_n & \xrightarrow{j_n} & G/H_n & \xrightarrow{\psi_n} & G & \to & 0 \end{array}$$

où i désigne l'isogénie naturelle (induit par le plongement $H_n \hookrightarrow H_{n+1}$), j désigne l'isogénie telle que $j \circ i = [\varpi]$ et où l'existence du morphisme j' provient du fait que $\psi_n \circ j \circ j_{n+1} = 0$. En prenant les duaux de Cartier, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \widetilde{H}_n & \xrightarrow{\iota_n} & G^\vee & \xrightarrow{\psi_n^\vee} & (G/H_n)^\vee & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle (j')^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle j^\vee} & & \\ 0 & \to & \widetilde{H}_{n+1} & \xrightarrow{\iota_{n+1}} & G^\vee & \xrightarrow{\psi_{n+1}^\vee} & (G/H_{n+1})^\vee & \to & 0\,. \end{array}$$

Le lemme en découle. ∎

On dit que $\widetilde{H}_n$ est *le sous-groupe canonique d'échelon n* de $G^\vee$. Notons que $\widetilde{H}_n^\vee$ est muni d'une action τ-stricte de $\mathscr{O}_\wp$. Notons

$$\mathrm{HT}_- := \mathrm{HT}_{\mathscr{L}\mathscr{T}} : H_n^{\mathscr{D}} \longrightarrow \underline{\omega}_{H_n}, \quad \mathrm{HT}_+ := \mathrm{HT}_\tau : \widetilde{H}_n^\vee \longrightarrow \underline{\omega}_{\widetilde{H}_n^\vee,\tau}.$$

Par (4.2.5) et (4.2.6), on a :

Lemme 4.2.6. — *Les applications de Hodge-Tate HT_- et HT_+ sont τ-linéaires sous l'action de $\mathscr{O}_\wp$ (qui se factorise à travers $\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp$), i.e. pour tout $\lambda \in \mathscr{O}_\wp$, les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{array}{ccc} H_n^{\mathscr{D}} & \xrightarrow{\mathrm{HT}_-} & \underline{\omega}_{H_n} \\ \downarrow{\scriptstyle [\lambda]} & & \downarrow{\scriptstyle \tau(\lambda)} \\ H_n^{\mathscr{D}} & \xrightarrow{\mathrm{HT}_-} & \underline{\omega}_{H_n} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{H}_n^\vee & \xrightarrow{\mathrm{HT}_+} & \underline{\omega}_{\widetilde{H}_n,\tau} \\ \downarrow{\scriptstyle [\lambda]} & & \downarrow{\scriptstyle \tau(\lambda)} \\ \widetilde{H}_n^\vee & \xrightarrow{\mathrm{HT}_+} & \underline{\omega}_{\widetilde{H}_n,\tau}\,. \end{array}$$

Enfin, on a comme dans [**63**, prop. 3.1] :

Proposition 4.2.7. — *Soient L une extension finie de E avec $\mathscr{O}_L$ son anneau des entiers, $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ un $\mathscr{O}_L$-point de $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ avec $\mathrm{Ha}(x) = r < 1/q^{n-2}(q+1)$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ avec $k \leq n$:*

(1) $\deg_\tau(\widetilde{H}_k) = \deg(H_k) = k - \frac{1-q^k}{1-q} r$;

(2) $H_k(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \widetilde{H}_k(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathscr{O}_\wp/\varpi^k\mathscr{O}_\wp$;

(3) *le sous-$\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$-module de $\underline{\omega}_{H_k} \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ (resp. $\underline{\omega}_{\widetilde{H}_k,\tau} \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$) engendré par l'image de l'application de Hodge-Tate*

$$H_k^{\mathscr{D}} \longrightarrow \underline{\omega}_{H_k} \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p} \quad (\textit{resp. } \widetilde{H}_k^{\vee} \longrightarrow \underline{\omega}_{\widetilde{H}_k,\tau} \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$$

est isomorphe à $c\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}/a_k\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ avec $c, a_k \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ tels que

$$\upsilon_{\wp}(c) = \frac{r}{q-1} \quad \textit{et} \quad \upsilon_{\wp}(a_k) = k - \frac{1-q^k}{1-q} r .$$

Démonstration. — (1) et (2). — La partie pour H_k a déjà été obtenue dans le corollaire 4.1.17. On a $\widetilde{H}_k(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cong \mathscr{O}_{\wp}/\varpi^k\mathscr{O}_{\wp}$. Par le lemme 4.2.1, on a

$$\deg_\tau(\widetilde{H}_k) = k - \deg_\tau\big(G[\varpi^k]/H_k\big).$$

Comme l'action de $\mathscr{O}_{\wp}$ sur $G[\varpi^k]/H_k$ est τ-stricte, on voit que

$$\deg_\tau\big(G[\varpi^k]/H_k\big) = \deg\big(G[\varpi^k]/H_k\big) = k - \deg(H_k).$$

La partie (1) en découle.

(3). — On obtient les résultats pour le cas $k = 1$ par les lemmes 4.2.2 et 4.2.3 appliqués à $\widetilde{H}_1$ et H_1. Pour le cas $k > 1$, considérons les inclusions $i : H_1 \hookrightarrow H_k$ et $\tilde{\imath} : \widetilde{H}_1 \hookrightarrow \widetilde{H}_k$. Par (4.2.5) et (4.2.6), on dispose des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} H_k^{\mathscr{D}} \arrow[r, "\mathrm{HT}_-"] \arrow[d, "i^{\mathscr{D}}"'] & \underline{\omega}_{H_k} \arrow[d, two heads] \\ H_1^{\mathscr{D}} \arrow[r, "\mathrm{HT}_-"] & \underline{\omega}_{H_1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{H}_k^{\vee} \arrow[r, "\mathrm{HT}_+"] \arrow[d, "\tilde{\imath}^{\vee}"'] & \underline{\omega}_{\widetilde{H}_k,\tau} \arrow[d, two heads] \\ \widetilde{H}_1^{\vee} \arrow[r, "\mathrm{HT}_+"] & \underline{\omega}_{\widetilde{H}_1,\tau} \end{tikzcd} .$$

Donc la partie (3) suit des résultats pour le cas $k = 1$ et de la partie (1). ∎

4.3. Classicité

Soient K un sous-groupe net de $G(\mathbb{A}^\infty)$ maximal en $\wp$, $\tau \in \Sigma_\wp$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$, et $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$. Cette section a pour but de montrer :

Théorème 4.3.1. — *Supposons $F_{\wp_i}$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout $\wp_i \,|\, p$. Soit f une forme modulaire surconvergente de poids*

$$(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),$$

de niveau K sur (τ, E) et vecteur propre sous l'action de $X'_{u,\wp}$ de valeur propre $a_\wp \in E^\times$. Si l'on a

$$\upsilon_\wp(a_\wp) < \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}} k_{2,\sigma} + k_-,$$

alors f est une forme modulaire classique sur $M_K(\wp)_{\tau,E}$.

Remarque 4.3.2

(1) Le résultat pour le cas où $k_{1,\sigma} = 2$, $k_{2,\sigma} = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$ et $k_+ = 0$ (sans l'hypothèse $F_{\wp_i}$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$) a déjà été obtenu par Kassaei [**50**, th. 5.1]).

(2) Lorsqu'il existe $(k_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_p}$ et w des entiers de même parité tels que $k_\sigma \geq 2$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, $k_{1,\sigma} = k_\sigma$, $k_{2,\sigma} = \frac{1}{2}(w - k_\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$, et que $k_+ = \frac{1}{2}(k_\tau - w - 2)$, $k_- = \frac{1}{2}(w + k_\tau - 2)$ (soient $k_{1,\tau} = k_\tau$, $k_{2,\tau} = \frac{1}{2}(w - k_\tau)$, on a donc $k_+ = -k_{2,\tau} + 1$, $k_- = k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 1$, voir la définition 3.3.3) (ceci est en fait l'hypothèse de parité sur les poids de formes modulaires de Hilbert), on voit que si l'on a

$$\upsilon_\wp(a_\wp) < \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} \frac{1}{2}(w - k_\sigma) + (k_\tau - 1),$$

alors f est classique.

4.3.1. « Gluing lemma » revisité. — Soit X un schéma réduit, plat et de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_E$. Notons X_E sa fibre générique, $\mathfrak{X}$ le complété le long de sa fibre spéciale, et $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ l'espace analytique rigide associé à $\mathfrak{X}$ au sens de Raynaud.

Soit N un faisceau cohérent localement libre de rang r sur X, et notons N_E, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}$ les faisceaux associés sur X_E, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ respectivement. Soit $f \in H^0(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$ une section de $\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}$ sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, pour un L-point $x : \operatorname{Spec} L \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$. On note $f(x)$ l'image de f dans $H^0(\operatorname{Spec} L, x^*\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$ (étant un L-espace vectoriel de dimension r) via l'application de restriction naturelle :

$$H^0(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}) \longrightarrow H^0(\operatorname{Spec} L, x^*\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}).$$

En outre, le morphisme $x : \operatorname{Spec} L \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ se factorise de manière unique

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} L & \xrightarrow{x} & \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\mathscr{O}_L & \xrightarrow{\mathfrak{x}} & \mathfrak{X} \end{array}$$

ce qui donne un $\mathscr{O}_L$-réseau $H^0(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L, \mathfrak{x}^*\mathfrak{N})$ dans $H^0(\operatorname{Spec} L, x^*\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$, *i.e.*

$$H^0(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L, \mathfrak{x}^*\mathfrak{N}) \otimes_{\mathscr{O}_L} L \cong H^0(\operatorname{Spec} L, x^*\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}).$$

On définit

$$\upsilon_x(f) := \inf\left\{r \in \mathbb{Q}\ ;\ f(x) \in \varpi^r H^0(\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L, \mathfrak{x}^*\mathfrak{N})\right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Pour un ouvert admissible $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, on définit

$$\upsilon_{\mathfrak{Y}}(f) := \inf\left\{\upsilon_x(f)\ ;\ x : \operatorname{Spec} L \to \mathfrak{Y}\right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \tag{4.3.1}$$

Notons $\upsilon(f) = \upsilon_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}(f)$ pour simplifier. Le résultat suivant est bien connu (voir par exemple [**49**, lemme 2.2]) :

Lemme 4.3.3. — *Soit $\mathfrak{Y}$ un ouvert affinoïde admissible de l'espace rigide $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, alors $H^0(\mathfrak{Y},\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$ muni de la topologie définie par la valuation $\upsilon_{\mathfrak{Y}}$ est un E-espace de Banach.*

Soit $\{\mathfrak{U}_i \to \mathfrak{X}\}_{i\in I}$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{N}_{|\mathfrak{U}_i}$ soit libre, c'est-à-dire $\mathfrak{N}_{|\mathfrak{U}_i} \cong \mathscr{O}_{\mathfrak{U}_i}^{\oplus r}$. Notons $\mathfrak{U}_i^{\mathrm{rig}}$ l'espace analytique rigide associé à $\mathfrak{U}_i$. On obtient alors un recouvrement admissible $\{\mathfrak{U}_i^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}\}_{i\in I}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ tel que

$$\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}{}_{|\mathfrak{U}_i^{\mathrm{rig}}} \cong (\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_i^{\mathrm{rig}}})^{\oplus r}.$$

Il est clair que $\upsilon(f) = \inf_{i\in I} \upsilon_{\mathfrak{U}_i^{\mathrm{rig}}}(f)$. D'après Kassaei, on a le « gluing lemma » (voir par exemple [**49**, lemme 2.3]) :

Proposition 4.3.4. — *Soit $\mathfrak{Y}$ un ouvert admissible et lisse dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$. Supposons que $\mathfrak{Y}$ est une union de deux ouverts admissibles disjoints $\mathfrak{Y} = \mathfrak{V}\cup\mathfrak{W}$, où $\mathfrak{W}$ est un affinoïde. Supposons de plus qu'il existe une famille d'ouverts affinoïdes $\{\mathfrak{W}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{>0}}$ tels que*

$$\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}_1 \subset \mathfrak{W}_2 \subset \cdots$$

et que $\{\mathfrak{V},\mathfrak{W}_n\}$ soit un recouvrement admissible de $\mathfrak{Y}$ pour tout n. Soient $f \in H^0(\mathfrak{V},\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$ et $g \in H^0(\mathfrak{W},\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$. S'il existe des $g_n \in H^0(\mathfrak{W}_n,\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que

$$v_{\mathfrak{V}\cap\mathfrak{W}_n}(g_n - f) \longrightarrow +\infty \quad \textit{et} \quad v_{\mathfrak{W}}(g_n - g) \longrightarrow +\infty,$$

lorsque $n \to +\infty$, alors f et g se recollent en une section de $\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}$ sur $\mathfrak{Y}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer la proposition dans le cas où $\mathfrak{Y}$ est affinoïde et $\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}{}_{|\mathfrak{Y}} \cong \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}^r$. On fixe une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,r}$ de $H^0(\mathfrak{Y},\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}})$ sur $H^0(\mathfrak{Y},\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$. Soit $\mathfrak{U}$ un ouvert admissible de $\mathfrak{Y}$, on obtient une application bijective, E-linéaire et continue

$$\bigoplus_{i=1}^r H^0(\mathfrak{U},\mathscr{O}_{\mathfrak{U}}) \longrightarrow H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{N}^{\mathrm{rig}}), \quad (h_i)_{i=1,\dots,r} \longmapsto \sum_{i=1}^r h_i e_i. \tag{4.3.2}$$

En fait, cette dernière est un isomorphisme d'espaces topologiques. Lorsque $\mathfrak{U}$ est affinoïde, cela suit du théorème de Banach-Steinhaus (*cf.* [**11**, prop. 3.7.3/3]) ; pour $\mathfrak{U}$ général, cela découle du fait que $\mathfrak{U}$ admet un recouvrement fini par des ouverts admissibles affinoïdes $\{\mathfrak{U}_i\}$. Notons

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{i=1}^r f_i e_i, \quad f_i \in H^0(\mathfrak{V},\mathscr{O}_{\mathfrak{U}}),\\
g &= \sum_{i=1}^r g_i e_i, \quad g_i \in H^0(\mathfrak{W},\mathscr{O}_{\mathfrak{U}}),\\
g_n &= \sum_{i=1}^r g_{n,i} e_i, \quad g_{n,i} \in H^0(\mathfrak{W}_n,\mathscr{O}_{\mathfrak{U}}).
\end{aligned}$$

Comme (4.3.2) est un isomorphisme, on voit que $v_{\mathfrak{V}\cap\mathfrak{W}_n}(g_{n,i} - f_i) \to +\infty$ et $v_{\mathfrak{W}}(g_{n,i} - g_i) \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$. La proposition découle alors de [**49**, lemme 2.3]. ∎

4.3.2. Structures entières des espaces de formes modulaires

4.3.2.1. *Décompositions de $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_E$-modules.* — Rappelons que $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ se décompose comme

$$\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \prod_{\wp_i \mid p} (\mathcal{O}_{D^+_{\wp_i}} \oplus \mathcal{O}_{D^-_{\wp_i}}) \tag{4.3.3}$$

où $\mathcal{O}_{D^-_{\wp_i}} \cong M_2(\mathcal{O}_{\wp_i})$ pour tout $\wp_i \mid p$, et que tout $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$-module Λ se décompose comme

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} \prod_{\wp_i \mid p} (\Lambda^{+,1}_{\wp_i} \oplus \Lambda^{+,2}_{\wp_i} \oplus \Lambda^{-,1}_{\wp_i} \oplus \Lambda^{-,2}_{\wp_i}), \tag{4.3.4}$$

où $\Lambda^{\pm,k}_{\wp_i}$ est un $\mathcal{O}_{\wp_i}$-module (voir (2.2.2)).

Supposons jusqu'à la fin de ce chapitre $F_{\wp_i}$ *non ramifié* sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout $\wp_i \mid p$. On déduit de la décomposition

$$\mathcal{O}_{\wp_i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \Sigma_{\wp_i}} \mathcal{O}_E, \quad a \otimes b \longmapsto \big(\sigma(a) b\big)_{\sigma \in \Sigma_{\wp_i}} \tag{4.3.5}$$

que le $\mathcal{O}_{\wp_i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$-module $\Lambda^{\pm,k}_{\wp_i}$ peut se décomposer comme

$$\Lambda^{\pm,k}_{\wp_i} \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \Sigma_{\wp_i}} \Lambda^{\pm,k}_{\wp_i,\sigma} \tag{4.3.6}$$

où $\Lambda^{\pm,k}_{\wp_i,\sigma} \cong \Lambda^{\pm,k}_{\wp_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\wp_i},\sigma} \mathcal{O}_E$ est un $\mathcal{O}_E$-module.

4.3.2.2. *Structures entières des espaces de formes modulaires.* — Soit

$$\varepsilon : \mathbb{A} \longrightarrow (\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}$$

le schéma abélien universel sur $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}$. Considérons les $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}}$-modules $R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ et $\varepsilon_*\Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}}$, qui sont des $\mathcal{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}}$-modules localement libres de rang $4d_F$. On a donc des isomorphismes de $\mathcal{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}}$-modules

$$R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} \big((R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{+,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus (R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{+,2}_{\wp_i,\sigma} \oplus (R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus (R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{-,2}_{\wp_i,\sigma}\big),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_*\Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}}} \Big(& (\varepsilon_*\Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}})^{+,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus (\varepsilon_*\Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}})^{+,2}_{\wp_i,\sigma} \\ & \oplus (\varepsilon_*\Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \oplus (\varepsilon_*\Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}})^{-,2}_{\wp_i,\sigma}\Big).\end{aligned}$$

Comme au § 3.3.1.1, on a :

Lemme 4.3.5. — *Le $\mathcal{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}}$-module $(R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma}$ est localement libre de rang 2 pour tout $\wp_i \mid p$ et $\sigma \neq \tau$, et les $\mathcal{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}}$-modules $(R^1\varepsilon_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{-,1}_{\wp,\tau}$ et $(\varepsilon_*\Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathcal{O}_E}})^{-,1}_{\wp,\tau}$ sont localement libres de rang 1.*

Notons :

$$\underline{\omega}_{\mathbb{A},-} := (\varepsilon_* \Omega^1_{\mathbb{A}/(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}})^{-,1}_{\wp,\tau} \quad \text{et} \quad \underline{\omega}_{\mathbb{A},+} := \Big((R^1 \varepsilon_* \mathscr{O}_{\mathbb{A}})^{-,1}_{\wp,\tau} \Big)^{\vee}$$

et posons

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E} &:= \underline{\omega}^{k_+}_{\mathbb{A},+} \otimes \underline{\omega}^{k_-}_{\mathbb{A},-} \\ &\otimes \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}, \sigma \neq \tau}} \big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} (R^1 \varepsilon_* \mathscr{O}_{\mathbb{A}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \otimes (\textstyle\bigwedge^2 (R^1 \varepsilon_* \mathscr{O}_{\mathbb{A}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^{k_{2,\sigma}} \big), \end{aligned}$$

où tous les produits tensoriels, symétriques et extérieurs sont sur $\mathscr{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}}$. Notons

$$\mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E}$$

le faisceau cohérent associé sur $(\mathfrak{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$. On a alors un isomorphisme de faisceaux cohérents sur $(\mathfrak{M}_K)^{\mathrm{rig}}_{\tau,\mathscr{O}_E} \cong (M_K)^{\mathrm{an}}_{\tau,E}$

$$\big(\mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E} \big)^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}.$$

Soient L une extension finie de E avec $\mathscr{O}_L$ son anneau des entiers, $x = (A, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}})$ un L-point de $(\mathfrak{M}_K)^{\mathrm{rig}}_{\tau,\mathscr{O}_E}$ avec $\mathfrak{x} = (\mathfrak{A}, \iota, \theta, \overline{\alpha^{\wp}})$ le $\mathscr{O}_L$-point de $(\mathfrak{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ associé. Notons

$$\mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E}(\mathfrak{A}) := H^0\big(\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_L, \mathfrak{x}^* \mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E} \big)$$

qui est en fait un $\mathscr{O}_L$-réseau (libre de rang $\sum_{\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}} (k_{1,\sigma} - 1)$) dans le L-espace vectoriel

$$S^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}(A).$$

Soient U un ouvert admissible de $(M_K)^{\mathrm{rig}}_{\tau,E}$ contenant x, f une section de $\mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}$ sur U, posons (voir §4.3.1)

$$\upsilon_x(f) := \inf \big\{ r \in \mathbb{Q} \ ; \ f(x) \in \varpi^r \mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E}(\mathfrak{A}) \big\}$$

et

$$\upsilon_U(f) := \inf_{x \in U} \upsilon_x(f). \tag{4.3.7}$$

On a par définition

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau}(\mathfrak{A}) &\xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\omega}^{k_+}_{\mathfrak{A},+} \otimes \underline{\omega}^{k_-}_{\mathfrak{A},-} \\ &\otimes \bigotimes_{\substack{\wp_i \mid p \\ \sigma \in \Sigma_{\wp_i}, \sigma \neq \tau}} \big(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} H^1(\mathfrak{A}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma} \otimes (\textstyle\bigwedge^2 H^1(\mathfrak{A}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}})^{-,1}_{\wp_i,\sigma})^{\otimes k_{2,\sigma}} \big) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{A},+} := (H^1(\mathfrak{A}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}})^{-,1}_{\wp,\tau})^{\vee} \quad \text{et} \quad \underline{\omega}_{\mathfrak{A},-} := (e^* \Omega^1_{\mathfrak{A}/\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_L})^{-,1}_{\wp,\tau}$$

et où $e : \operatorname{Spec}\mathscr{O}_L \to \mathfrak{A}$ est la section identité (ce sont des $\mathscr{O}_L$-modules libres de rang 1). Soient $\mathfrak{C}$ un sous-groupe fini et plat $\mathscr{O}_D$-linéaire de $\mathfrak{A}$ sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L$, et

$$C := \mathfrak{C} \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L} \operatorname{Spec} L.$$

L'isogénie $\phi_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ induit des morphismes de $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_L$-modules :

$$\phi_{\mathfrak{C}}^* : e^*\boldsymbol{\Omega}_{(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L} \longrightarrow e^*\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{A}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L}, \quad \phi_{\mathfrak{C}}^* : H^1(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{A}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}}),$$

et donc des morphismes de $\mathscr{O}_L$-modules (comparer avec la remarque 3.3.12) :

$$(\phi_{\mathfrak{C}}^*)_- : \underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C},-} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{A},-}, \quad (\phi_{\mathfrak{C}}^*)_{\wp_i,\sigma}^{-,1} : H^1(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}})_{\wp_i,\sigma}^{-,1} \longrightarrow H^1(\mathfrak{A}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}})_{\wp_i,\sigma}^{-,1}$$

pour tout $\wp_i \mid p$ et $\sigma \in \Sigma_{\wp_i}$. On voit par définition (*cf.* la remarque 3.3.12) que

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathfrak{C}}^* \otimes_{\mathscr{O}_L} L &= \phi_C^*, \\
(\phi_{\mathfrak{C}}^*)_- \otimes_{\mathscr{O}_L} L &= (\phi_C^*)_-, \\
(\phi_{\mathfrak{C}}^*)_{\wp_i,\sigma}^{-,1} \otimes_{\mathscr{O}_L} L &= (\phi_C^*)_{\wp_i,\sigma}^{-,1}, \\
(\phi_{\mathfrak{C}}^*)_{\wp,\tau}^{-,1} \otimes_{\mathscr{O}_L} L &= \big((\phi_C^*)_+^{\vee}\big)^{-1}.
\end{aligned}$$

En outre, on dispose d'une isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\phi_{\mathfrak{C}}^{\vee} : (\mathfrak{A}/\mathfrak{C})^{\vee} \to \mathfrak{A}^{\vee}$ qui induit des morphismes

$$\big((\phi_{\mathfrak{C}}^{\vee})^*\big)_{\wp_i,\sigma}^{-,1} : (e^*\boldsymbol{\Omega}^1_{\mathfrak{A}^{\vee}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L})_{\wp_i,\sigma}^{-,1} \longrightarrow (e^*\boldsymbol{\Omega}^1_{(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})^{\vee}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L})_{\wp_i,\sigma}^{-,1}.$$

On a $((\phi_{\mathfrak{C}}^{\vee})^*)_{\wp_i,\sigma}^{-,1} = ((\phi_{\mathfrak{C}}^*)_{\wp_i,\sigma}^{-,1})^{\vee}$ via les isomorphismes naturels de $\mathscr{O}_L$-modules

$$\begin{aligned}
(e^*\boldsymbol{\Omega}^1_{\mathfrak{A}^{\vee}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L})_{\wp_i,\sigma}^{-,1} &\cong (H^1(\mathfrak{A}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}})_{\wp_i,\sigma}^{-,1})^{\vee}, \\
(e^*\boldsymbol{\Omega}^1_{(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})^{\vee}/\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L})_{\wp_i,\sigma}^{-,1} &\cong (H^1(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}, \mathscr{O}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}})_{\wp_i,\sigma}^{-,1})^{\vee}.
\end{aligned}$$

Lemme 4.3.6. — *Soient $n \in \mathbb{Z}$, $x = (A, \iota, \theta, \bar{\alpha})$ un L-point de $(M_K)_{\tau,E}^{\mathrm{an}}$ avec $\mathfrak{x} = (\mathfrak{A}, \iota, \theta, \bar{\alpha})$ le $\mathscr{O}_L$-point de $(\mathfrak{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ associé, et $\mathfrak{C}_n$ un sous-$(u,\wp)$-groupe de $\mathfrak{A}$ d'échelon n sur* $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L$ *tel que* $\deg((\mathfrak{C}_n)_{\wp}^{-,1}) = r = v_{\wp}(a) \in [0, n] \cap \mathbb{Q}$ *(avec $a \in \mathscr{O}_L$). Soit*

$$C_n := \mathfrak{C}_n \times_{\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L} \operatorname{Spec} L.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\phi_{C_n}^*\big(\mathfrak{S}_{\tau,\mathscr{O}_E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n)\big) \\
&\qquad\qquad \subseteq a^{k_++k_-}\varpi^{n(\sum_{\sigma\in\Sigma_{\wp}\setminus\{\tau\}} k_{2,\sigma}-k_+)}\mathfrak{S}_{\tau,\mathscr{O}_E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(\mathfrak{A}).
\end{aligned}$$

Démonstration. — Pour tout $\wp_i \mid p$, $\wp_i \neq \wp$, comme le schéma en groupes $(\mathfrak{C}_n)_{\wp_i}^{-,1}$ est trivial, on voit que les morphismes $(\phi_{\mathfrak{C}_n}^*)_{\wp_i,\sigma}^{-,1}$ sont des isomorphismes de $\mathscr{O}_L$-modules pour tout $\sigma \in \Sigma_{\wp_i}$.

Notons $\mathfrak{H}_n := (\mathfrak{C}_n)_{\wp}^{-,1}$. L'isogénie $\phi_{\mathfrak{C}_n} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n$ induit une suite exacte de $\mathscr{O}_L$-modules

$$0 \to \underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,-} \xrightarrow{(\phi_{\mathfrak{C}_n}^*)_-} \underline{\omega}_{\mathfrak{A},-} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n} \to 0. \tag{4.3.8}$$

Par la discussion au-dessus de ce lemme, l'isogénie $\phi_{\mathfrak{C}_n}^\vee : (\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n)^\vee \to \mathfrak{A}^\vee$ induit une suite exacte de $\mathscr{O}_L$-modules

$$(4.3.9)\quad 0 \to \left(H^1(\mathfrak{A},\mathscr{O}_{\mathfrak{A}})^{-,1}_{\wp,\sigma}\right)^\vee \xrightarrow{((\phi^*_{\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma})^\vee} \left(H^1(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,\mathscr{O}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma}\right)^\vee \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n^\vee,\sigma} \to 0,$$

(on a bien $\mathfrak{H}_n^\vee \cong (\mathfrak{C}_n^\vee)^{-,1}_{\wp}$) et donc une suite exacte de $\mathscr{O}_L$-modules

$$(4.3.10)\qquad 0 \to H^1(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,\mathscr{O}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma} \xrightarrow{(\phi^*_{\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma}} H^1(\mathfrak{A},\mathscr{O}_{\mathfrak{A}})^{-,1}_{\wp,\sigma} \longrightarrow \underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{H}_n^\vee,\sigma} \to 0,$$

pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, où

$$\underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{H}_n^\vee,\sigma} := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}(\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n^\vee,\sigma}, L/\mathscr{O}_L)$$

désigne le dual de Pontryagin de $\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n^\vee,\sigma}$. On a

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n} \cong \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n,\tau} \cong \mathscr{O}_L/a\mathscr{O}_L.$$

Par le lemme 4.2.1, pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, $\sigma \neq \tau$, on a

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n^\vee,\tau} \cong \mathscr{O}_L/(\varpi^n/a)\mathscr{O}_L \quad \text{et} \quad \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n^\vee,\sigma} \cong \mathscr{O}_L/\varpi^n\mathscr{O}_L\,.$$

On en déduit que

$$(\phi^*_{\mathfrak{C}_n})_-(\underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,-}) \cong a\underline{\omega}_{\mathfrak{A},-}, \quad (\phi^*_{\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\tau}(\underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,+}) \cong (\varpi^n/a)\underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{A},+}$$

et que $\left(\overset{2}{\wedge}(\phi^*_{\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma}\right)\left(\overset{2}{\wedge} H^1(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,\mathscr{O}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma}\right) = \varpi^n \overset{2}{\wedge} H^1(\mathfrak{A},\mathscr{O}_{\mathfrak{A}})^{-,1}_{\wp,\sigma}$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2}(\phi^*_{\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma})(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} H^1(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,\mathscr{O}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n})^{-,1}_{\wp,\sigma})&\\ \subseteq \mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} H^1(\mathfrak{A},\mathscr{O}_{\mathfrak{A}})^{-,1}_{\wp,\sigma}&\end{aligned}$$

pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp \setminus \{\tau\}$. Donc par la discussion au-dessus de ce lemme et la définition de $\phi^*_{C_n}$ (*cf.* remarque 3.3.12), on a

$$\begin{aligned}&\phi^*_{C_n}\left(\mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E}(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n)\right)\\ &\quad\subseteq a^{k_-}(\varpi^n/a)^{-k_+}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}\varpi^{nk_{2,\sigma}}\mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E}(\mathfrak{A})\\ &\quad= a^{k_++k_-}\varpi^{n(-k_++\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}k_{2,\sigma})}\mathfrak{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,\mathscr{O}_E}(\mathfrak{A}).\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. ▯

4.3.3. Classicité. — Soit f une forme modulaire surconvergente de niveau K de poids $(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ sur (τ,E). Soit $r \in \mathbb{Q}\cap[0,q/(q+1)[$ tel que

$$f \in H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big).$$

Via l'isomorphisme (4.1.5) d'espaces analytiques rigides (*cf.* corollaire 4.1.13), on considère f comme section de $\mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}$ sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1]$. Supposons $X'_{u,\wp}(f) = a_\wp f$ avec $a_\wp \in E^\times$.

Par la théorie de Buzzard [**18**], on a :

Proposition 4.3.7. — *La forme f se prolonge sur $M_K(\wp)_{\tau,E}]0,1]$ en une section de*

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}.$$

Démonstration. — Par la proposition 4.1.23 (1), pour tout $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, on dispose d'une application

$$(4.3.11)\qquad (X'_{u,\wp})^n : H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}\big[1-\tfrac{1}{q^{n-1}(q+1)},1\big],\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$
$$\longrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}\big[1-\tfrac{q}{q+1},1\big],\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).$$

Soit $n\in\mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{q^{n-1}(q+1)}<r$, f est alors une section sur $M_K(\wp)_{\tau,E}\big[1-\frac{1}{q^{n-1}(q+1)},1\big]$. Par (4.3.11), $(X'_{u,\wp})^n(f)$ est une section sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[1-\frac{q}{q+1},1]$. La forme f se prolonge donc en une section sur l'espace rigide

$$M_K(\wp)_{\tau,E}\big[\tfrac{1}{q+1},1\big]$$

via $(X'_{u,\wp})^n(f)/a_\wp^n$ (*i.e.* $(X'_{u,\wp})^n(f)/a_\wp^n$ est une section de $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[\frac{1}{q+1},1]$ telle que $(X'_{u,\wp})^n(f)/a^n_{\wp\,|M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1]}=f$) qui est encore un vecteur propre sous l'action de $X'_{u,\wp}$ de valeur propre $a_\wp$. Soit $\{s_n\in\mathbb{Q}\cap]0,\frac{1}{q+1}[\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite décroissante telle que $\lim_{n\to\infty}s_n=0$. En appliquant la proposition 4.1.23 (2), on voit que f se prolonge en une section f_1 sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[s_1,1]$. Par récurrence sur n, f se prolonge en une section f_n sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[s_n,1]$ avec $f_{n\,|M_K(\wp)_{\tau,E}[s_{n-1},1]}=f_{n-1}$. Comme $\{M_K(\wp)_{\tau,E}[s_n,1]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un recouvrement admissible de l'espace rigide $M_K(\wp)_{\tau,E}]0,1]$, f se prolonge enfin en une section sur $M_K(\wp)_{\tau,E}]0,1]$. ∎

On a comme dans [**49**, th. 1.3] :

Proposition 4.3.8. — *Soit f une forme modulaire classique sur $M_K(\wp)_{\tau,E}$ de poids $(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$, vecteur propre de $X'_{u,\wp}$ de valeur propre $a_\wp\in E^\times$. Supposons que l'on a $v_\wp(a_\wp)<\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}k_{2,\sigma}+k_-$. Soient L une extension finie de E et*

$$x=(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)\in M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0](L).$$

Notons C_n le sous-groupe canonique d'échelon n de A pour tout $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ (noter que C est différent de C_1 d'après les propositions 4.1.11 et 4.1.12 (1)) et $H:=C_\wp^{-,1}$. On a alors

$$f(A,\iota,\theta,C)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_\wp}\right)^n\sum_{C'_n}\phi^*_{C'_n}\big(f(A/C'_n,\iota',\theta',\overline{\alpha^\wp},\overline{H})\big),$$

où C'_n parcourt l'ensemble des sous-$(u,\wp)$-groupes de A d'échelon n qui contiennent C_{n-1} et qui vérifient

- ▷ $(C'_n)_\wp^{-,1}/(C_{n-1})_\wp^{-,1}\neq\overline{H}$ *(l'image de H dans A/C_{n-1}) ;*
- ▷ $(C'_n)_\wp^{-,1}/(C_{n-1})_\wp^{-,1}\neq(C_1^{(n-1)})_\wp^{-,1}$ *où $C_1^{(n-1)}$ désigne le sous-groupe canonique d'échelon 1 de A/C_{n-1}.*

Démonstration. — Par la définition de $X'_{u,\wp}$, on a

$$\begin{aligned}
&f(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}},C)\\
&=\frac{1}{a_{\wp}}X'_{u,\wp}(f)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}},C)\\
&=\frac{1}{a_{\wp}}\sum_{C'_1}\phi^*_{C'_1}\big(f(A/C'_1,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)+\frac{1}{a_{\wp}}\phi^*_{C_1}\big(f(A/C_1,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)\\
&=\frac{1}{a_{\wp}}\sum_{C'_1}\phi^*_{C'_1}\big(f(A/C'_1,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)+\frac{1}{a_{\wp}^2}\phi^*_{C_1}\big(X'_{u,\wp}(f)\big(A/C_1,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H}\big)\big)\\
&=\frac{1}{a_{\wp}}\sum_{C'_1}\phi^*_{C'_1}\big(f(A/C'_1,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)+\frac{1}{a_{\wp}^2}\phi^*_{C_1}\Big(\sum_{\bar{C}'_1}\phi^*_{\bar{C}'_1}\big(f\big((A/C_1)/\bar{C}'_1,\iota'',\theta'',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H}\big)\big)\Big)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{a_{\wp}^2}\phi^*_{C_2}\big(f(A/C_2,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)\\
&=\sum_{n=1}^{2}\Big(\frac{1}{a_{\wp}}\Big)^n\sum_{C'_n}\phi^*_{C'_n}\big(f(A/C'_n,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)+\frac{1}{a_{\wp}^2}\phi^*_{C_2}\big(f(A/C_2,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)\\
&\ \ \vdots\\
&=\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{a_{\wp}}\Big)^n\sum_{C'_n}\phi^*_{C'_n}\big(f(A/C'_n,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)+\Big(\frac{1}{a_{\wp}}\Big)^N\phi^*_{C_N}\big(f(A/C_N,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)
\end{aligned}$$

où les C'_n sont comme dans la proposition, et où $\bar{C}'_1$ parcourt tous les sous-$(u,\wp)$-groupes d'échelon 1 de A/C_1 tels que $(\bar{C}'_1)^{-,1}_{\wp}$ soit différent de $\overline{H}$ et du sous-groupe canonique d'échelon 1 de $(A/C_1)[\varpi^{\infty}]^{-,1}$ (on a donc $(A/C_1)/\bar{C}'_1\cong A/C'_2$ pour un C'_2 comme dans la proposition). Il suffit alors de montrer que

$$\Big(\frac{1}{a_{\wp}}\Big)^N\phi^*_{C_N}\big(f(A/C_N,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)\longrightarrow 0 \tag{4.3.12}$$

lorsque $N\to+\infty$. Quitte à multiplier f par un scalaire non nul, on peut bien supposer (*cf.* (4.3.1)) $\upsilon_{M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0]}(f)\geq 0$. Notons $(\mathfrak{A},\iota,\theta,\mathfrak{C}_0)$ le $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K(\wp)$ associé à x, $\mathfrak{C}_N$ le sous-groupe canonique d'échelon N de $\mathfrak{A}$ (on a donc $C_N\cong\mathfrak{C}_N\times_{\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_L}\mathrm{Spec}\,L$). D'après la proposition 4.1.12 (2), on a bien $\mathrm{Ha}(A)=0$. Par le corollaire 4.1.17, on a donc $\deg((\mathfrak{C}_N)^{-,1}_{\wp})=N$. Par le lemme 4.3.6, on a

$$\begin{aligned}
&\upsilon_x\big(\phi^*_{C_N}\big(f(A/C_N,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)\big)\\
&\qquad\geq N(k_++k_-)+\Big(-k_++\sum_{\sigma\in\Sigma_{\wp}\backslash\{\tau\}}k_{2,\sigma}\Big)N=\Big(k_-+\sum_{\sigma\in\Sigma_{\wp}\backslash\{\tau\}}k_{2,\sigma}\Big)N.
\end{aligned}$$

Choisissons $\epsilon>0$ tel que $\upsilon_{\wp}(a_{\wp})\leq\sum_{\sigma\in\Sigma_{\wp}\backslash\{\tau\}}k_{2,\sigma}+k_--\epsilon$, on a alors

$$\upsilon_x\Big(\Big(\frac{1}{a_{\wp}}\Big)^N\phi^*_{C_N}\big(f(A/C_N,\iota',\theta',\overline{\alpha^{\wp}},\overline{H})\big)\Big)\geq\epsilon N.$$

La proposition en découle puisque $\epsilon N\to+\infty$ quand $N\to+\infty$. ∎

Soit maintenant f une section de $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ sur $M_K(\wp)_{\tau,E}]0,1]$, vecteur propre de valeur propre $a_\wp\in E^\times$ de l'opérateur $X'_{u,\wp}$ avec

$$\upsilon(a_\wp)<\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}k_{2,\sigma}+k_-\,,$$

et soit $r\in\mathbb{Q}\cap]0,\frac{1}{q+1}[$. On voit f comme section sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1]$. Quitte à multiplier f par un scalaire non nul, on peut bien supposer $\upsilon_{M_K(\wp)_{\tau,E}[1-r,1]}(f)\geq 0$. Par la proposition 4.1.23 (3), on a

$$(X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}}(f)\in H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0,r],\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).$$

De plus, par la proposition 4.1.23 (4), pour tout $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, on a

$$\big((X'_{u,\wp})^{\mathrm{sp}}\big)^{n-1}\circ(X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}}(f)\in H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q^{n-1}}\big],\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).$$

Posons

$$\begin{aligned}g_N:=&\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{a_\wp}\Big)^n\big(((X'_{u,\wp})^{\mathrm{sp}})^{n-1}((X'_{u,\wp})^{\mathrm{nsp}}(f)\big)\\&\in H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q^{N-1}}\big],\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\end{aligned}$$

pour tout $N\in\mathbb{Z}_{>0}$. Explicitement, pour toute extension L finie de E et pour tout L-point $(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)$ de $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q^N}]$, on a avec les notations de la proposition 4.3.8 :

$$g_N(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)=\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{a_\wp}\Big)^n\sum_{C'_n}\phi^*_{C'_n}\big(f(A/C'_n,\iota',\theta',\overline{H})\big).\tag{4.3.13}$$

Considérant la restriction de g_N à $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0]$, on a :

Lemme 4.3.9. — *Les sections $\{g_{N\,|M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0]}\}_{N\in\mathbb{Z}_{>0}}$ forment une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $H^0(M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0],\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$.*

Démonstration. — Soit $x=(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)$ un L point de $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0]$. Par (4.3.13), on a

$$(g_N-g_{N-1})(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)=\frac{1}{a_\wp^N}\sum_{C'_N}\phi^*_{C'_N}\big(f(A/C'_N,\iota',\theta',\overline{H})\big).$$

De la suite exacte de schémas en groupes sur $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_L$:

$$0\to\mathfrak{C}_{N-1}\longrightarrow\mathfrak{C}'_N\longrightarrow\mathfrak{C}'_1\to 0,$$

et puisque l'on a $\deg((\mathfrak{C}_{N-1})_\wp^{-,1})=N-1$ et $\deg((\mathfrak{C}'_1)_\wp^{-,1})=0$, on déduit de la proposition 4.1.8 (1) que

$$\deg\big((\mathfrak{C}'_N)_\wp^{-,1}\big)=\deg\big((\mathfrak{C}_{N-1})_\wp^{-,1}\big)+\deg\big((\mathfrak{C}'_1)_\wp^{-,1}\big)=N-1.$$

Par le lemme 4.3.6, on voit que

$$\upsilon_x\Big(\sum_{C'_N}\phi^*_{C'_N}\big(f(A/C'_N,\iota',\theta',\overline{H})\big)\Big)\geq\Big(k_-+\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\backslash\{\tau\}}k_{2,\sigma}\Big)N-k_--k_+ .$$

Choisissons $\epsilon>0$ tel que

$$\upsilon_\wp(a_\wp)\leq\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\backslash\{\tau\}}k_{2,\sigma}+k_--\epsilon.$$

On a donc $\upsilon_x(g_N-g_{N-1})\geq\epsilon N-k_--k_+$, d'où le lemme. ∎

Posons

$$g:=\lim_{N\to\infty}g_N\in H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0],\mathscr{S}_{\tau,E}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\backslash\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\backslash\{\tau\}})}\big).$$

Pour toute extension L finie de E, et pour tout L-point $(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)$ de $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0]$, on a alors (avec les notations de la proposition 4.3.8),

$$g(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a_\wp}\Big)^n\sum_{C'_n}\phi^*_{C'_n}\big(f(A/C_n,\iota',\theta',\overline{H})\big).$$

Notons

$$\mathfrak{V}:=M_K(\wp)_{\tau,E}]0,1],\quad \mathfrak{W}:=M_K(\wp)_{\tau,E}[0,0],\quad \mathfrak{W}_N:=M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{1}{q^{N-1}(q+1)}\big[.$$

Lemme 4.3.10. — *Supposons $\upsilon(a_\wp)\leq\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\backslash\{\tau\}}k_{2,\sigma}+k_--\epsilon$. Alors on a*

$$\upsilon_{\mathfrak{W}_N\cap\mathfrak{V}}(f-g_N)\geq N\epsilon-\frac{q^2}{q^2-1}\big(|k_-|+|k_+|\big)$$

où $|\,.\,|$ désigne la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Soit $x=(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)$ un L-point de $\mathfrak{W}_N\cap\mathfrak{V}$, notons $(\mathfrak{A},\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},\mathfrak{C})$ le $\mathscr{O}_L$-point de $\mathfrak{M}_K(\wp)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ associé. Notons

$$r:=\mathrm{Ha}(x)\leq\frac{1}{q^{N-1}(q+1)},$$

on a alors (*cf.* corollaire 4.1.17)

$$\deg\big((\mathfrak{C}_N)_\wp^{-,1}\big)=N-\frac{1-q^N}{1-q}r$$

où $\mathfrak{C}_N$ est le sous-groupe canonique de $\mathfrak{A}$ d'échelon n. Comme dans la démonstration de la proposition 4.3.8, on a

$$(f-g_N)(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^\wp},C)=\Big(\frac{1}{a_\wp}\Big)^N\phi^*_{C_N}f(A/C_N,\iota',\theta',\overline{\alpha^\wp},\overline{H}).$$

Par le lemme 4.3.6, on a

$$\begin{aligned}\upsilon_x\big(\phi_{C_N}^* f(A/C_N, \iota', \theta', \overline{\alpha^{\wp}}, \overline{H})\big) \\ &\geq \Big(N - \frac{1-q^N}{1-q} r\Big) k_- - \frac{1-q^N}{1-q} r k_+ + \Big(\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\backslash\{\tau\}} k_{2,\sigma}\Big) N \\ &= \Big(k_- + \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\backslash\{\tau\}} k_{2,\sigma}\Big) N - (k_- + k_+) \frac{1-q^N}{1-q} r.\end{aligned}$$

Comme $r \leq \frac{1}{q^{N-1}(q+1)}$, on voit facilement que

$$\frac{1-q^N}{1-q} r \leq \frac{q^2}{q^2-1}.$$

On en déduit

$$\upsilon_x(f - g_N) \geq N\epsilon - \frac{q^2}{q^2-1}\big(|k_-| + |k_+|\big),$$

d'où le lemme. ☐

Démonstration du théorème 4.3.1. — On applique la proposition 4.3.4 au triplet

$$\big((f, \mathfrak{V}); (g_N, \mathfrak{W}_N)_{N\in\mathbb{Z}_{>0}}; (g, \mathfrak{W})\big).$$ ☐

4.4. Familles p-adiques de formes modulaires sur les courbes de Shimura unitaires

On applique la théorie de Pilloni [**63**]) aux formes modulaires sur les courbes de Shimura unitaires pour construire des surfaces de Hecke (voir le théorème 4.4.34) pour G (le groupe de similitudes unitaire). Beaucoup de résultats se généralisent directement au cas que l'on considère ici.

4.4.1. Caractères localement analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$. — On donne des rappels sur les caractères localement analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$.

4.4.1.1. *Caractères localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques.* — Notons $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$ le E-espace vectoriel des fonctions localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques $f : \mathscr{O}_\wp^\times \to E$. L'algèbre de Lie $F_\wp$ de $\mathscr{O}_\wp^\times$ agit donc sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$ par

$$(a \cdot f)(g) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(g \exp(at)\big)_{|t=0} \tag{4.4.1}$$

pour tout $a \in F_\wp$, $f \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$. Cette action est $\mathbb{Q}_p$-linéaire, ainsi $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$ est un $F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} E$-module.

Soit J un sous-ensemble de $\Sigma_\wp$.

▹ On dit qu'une fonction localement $\mathbb{Q}_p$-analytique f est *localement J-analytique* si l'action de $F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ sur f se factorise à travers $\prod_{\sigma\in J} E$ (*cf.* [**74**, déf. 2.1]).

▹ On désigne par $C^{J\text{-an}}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$ le sous-E-espace vectoriel des fonctions localement J-analytiques.

Soit $\chi : \mathscr{O}_\wp^\times \to E^\times$ un caractère continu (donc localement $\mathbb{Q}_p$-analytique, *e.g.* voir [**72**, ex. 16.2]), en particulier $\chi \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$.

▹ On dit que χ est *localement J-analytique*, si $\chi \in C^{J\text{-an}}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$.

Le caractère χ induit une application E-linéaire (*cf.* (4.4.1))

$$d_\chi : F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \longrightarrow E, \quad a \longmapsto (a \cdot \chi)(1).$$

Définition 4.4.1. — Soient $k_\sigma \in E$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$.

▹ On dit que χ est de *poids* $\underline{k}_{\Sigma_\wp}$ si l'application d_χ est donnée par

$$d_\chi\big((a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\wp}\big) = \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} a_\sigma k_\sigma$$

pour tout $(a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\wp} \in F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} E$.

▹ On note $\underline{k}_{\chi,\Sigma_\wp}$ le poids de χ (avec $k_{\chi,\sigma} \in E$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$), et on dit que $k_{\chi,\sigma}$ est le *σ-poids* de χ pour $\sigma \in \Sigma_\wp$.

Remarque 4.4.2. — Soit χ un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathscr{O}_\wp^\times$ de poids $\underline{k}_{\Sigma_\wp}$. Il est clair que χ est localement J-analytique si et seulement si k_σ=0 pour tout $\sigma \notin J$.

Lemme 4.4.3. — *Soit χ un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathscr{O}_\wp^\times$ de poids $\underline{k}_{\Sigma_\wp}$. Alors il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in 1 + \varpi^m\mathscr{O}_\wp$,*

$$\chi(z) = \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} \sigma(z)^{k_\sigma}$$

où $\sigma(z)^{k_\sigma} := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k_\sigma}{n}(\sigma(z) - 1)^n$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que si $k_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, χ est localement constant, ce qui est clair. □

Lemme 4.4.4. — *Soit $\underline{k}_{\Sigma_\wp} \in E^{|\Sigma_\wp|}$. Alors il existe un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique χ de $\mathscr{O}_\wp^\times$ tel que χ soit de poids $\underline{k}_{\Sigma_\wp}$.*

Démonstration. — Le cas où $\mathscr{O}_\wp^\times = \mathbb{Z}_p^\times$ est bien connu (*e.g.* en utilisant les résultats dans [**63**, §2]), et le cas général en découle (noter qu'en utilisant le logarithme p-adique, on se ramène à montrer un résultat similaire pour $\log(1 + \varpi\mathscr{O}_\wp) \cong \mathbb{Z}_p^d$). □

4.4.1.2. *Caractères localement τ-analytiques.* — Soit $\tau \in \Sigma_\wp$, considérons les caractères localement τ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$ dans $\mathbb{C}_p^\times$.

- ▹ Désignons par $\mathscr{W}_\tau$ l'espace analytique rigide sur E qui paramètre les caractères localement τ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$. En particulier, pour toute extension finie L de E, $\mathscr{W}_\tau(L)$ est l'ensemble des caractères localement τ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$ dans L. En effet, l'existence de $\mathscr{W}_\tau$ est montrée dans [**68**, § 2], et on sait que $\mathscr{W}_\tau$ est équidimensionnel de dimension 1 (*e.g.* voir la proposition 6.1.13 ci-dessous). Notons $\mathscr{W}_{\tau,1}$ l'espace analytique rigide sur E qui paramètre les caractères localement τ-analytiques de $1+\varpi\mathscr{O}_\wp$.
- ▹ Soit $k \in L$. On dit qu'un caractère χ localement τ-analytique de $\mathscr{O}_\wp^\times$ dans L est *de poids* k si $k_{\chi,\tau} = k$ (noter que $k_{\chi,\sigma} = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp \setminus \{\tau\}$, *cf.* la remarque 4.4.2). On a (*e.g.* par le lemme 4.4.3)
$$k = \frac{\log(\chi(z))}{\log(\tau(z))} \in L \quad \text{pour tout } z \in 1+\varpi\mathscr{O}_\wp,$$
où $\log(a) := \frac{1}{p^m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(a^{p^m}-1)^n$ pour tout $a \in 1+\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $a^{p^m} \in 1+p\mathbb{C}_p$.
- ▹ Soit $r>0$. Désignons par $\mathscr{W}_{\tau,1}(r)$ le sous-espace analytique rigide de $\mathscr{W}_{\tau,1}$ vérifiant
$$\mathscr{W}_{\tau,1}(r)(L) = \left\{\chi \in \mathscr{W}_{\tau,1}(L)\ ;\ \chi(z) \in 1+\varpi^r\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p} \text{ pour tout } z \in 1+\varpi\mathscr{O}_\wp\right\}$$
pour toute extension finie L de E. On voit que $\mathscr{W}_{\tau,1}(r)$ est un ouvert affinoïde admissible de $\mathscr{W}_{\tau,1}$, et que $\mathscr{W}_{\tau,1} = \cup_{r>0}\mathscr{W}_{\tau,1}(r)$. Notons $\mathscr{W}_\tau(r)$ le sous-espace analytique rigide de $\mathscr{W}_\tau$ vérifiant
$$\mathscr{W}_\tau(r)(L) = \left\{\chi \in \mathscr{W}_\tau(L)\ ;\ \chi(z) \in 1+\varpi^r\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p} \text{ pour tout } z \in 1+\varpi\mathscr{O}_\wp\right\},$$
pour toute extension finie L de E. On a alors $\mathscr{W}_\tau = \bigcup_{r>0}\mathscr{W}_\tau(r)$.

Posons (*cf.* [**12**, déf. 6.1]) :

Définition 4.4.5. — Soient L une extension finie de $F_\wp$, $k \in L$ et $a \in \mathbb{Z}_{>0}$. On dit qu'un caractère χ *localement τ-analytique de poids k* de $\mathscr{O}_\wp^\times$ est a-analytique, si l'on a
$$\upsilon_\wp(k) > -a + \frac{1}{p-1} \quad \text{et} \quad \chi(z) = \tau(z)^k := \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}(\tau(z)-1)^n$$
pour tout $z \in 1+\varpi^a\mathscr{O}_\wp$.

En effet, pour $z \in 1+\varpi^a\mathscr{O}_\wp$, on a
$$\upsilon_\wp\Big(\binom{k}{n}(\tau(z)-1)^n\Big) \geq n\upsilon_\wp(k) - n\frac{1}{p-1} + na = n\Big(\upsilon_\wp(k) + a - \frac{1}{p-1}\Big),$$
lorsque $\upsilon_\wp(k) < 0$; et
$$\upsilon_\wp\Big(\binom{k}{n}(\tau(z)-1)^n\Big) \geq -n\frac{1}{p-1} + na = n\Big(a - \frac{1}{p-1}\Big),$$

lorsque $\upsilon_\wp(k) \geq 0$. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} (\tau(z) - 1)^n$ converge bien pour tout $z \in 1 + \varpi^a \mathscr{O}_\wp$ si $\upsilon_\wp(k) > -a + \frac{1}{p-1}$.

Lemme 4.4.6. — *Soit $r > 0$, il existe $a(r) \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour toute extension finie L de E, tous les caractères $\chi \in \mathscr{W}_\tau(r)(L)$ soient $a(r)$-analytiques.*

Démonstration. — Soit $z \in 1 + \varpi\mathscr{O}_\wp$ vérifiant $\upsilon_\wp(z-1) = 1$ (pour le cas où $p = 2$, supposons de plus $\upsilon_\wp(\frac{1}{2}(z-1) - 1) = 0$), on a donc $\upsilon_\wp(\log(\tau(z))) = 1$. Soit $k = \log(\chi(z))/\log(\tau(z))$ le poids de χ. On vérifie que

$$\upsilon_\wp(k) \geq \alpha(r) := \min\left\{nr - [\log_p(n)]\ ;\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right\} - 1$$

où $[\log_p(n)] \in \mathbb{Z}$ est tel que $\log_p(n) \leq [\log_p(n)] < \log_p(n) + 1$.

Soit $b(r) \in \mathbb{Z}$ vérifiant $b(r) \geq |\alpha(r)| + \frac{1}{p-1}$. On obtient un caractère de $1 + \varpi^{b(r)}\mathscr{O}_\wp$ à valeurs dans L :

$$\chi'(z) = \tau(z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} \big(\tau(z) - 1\big)^n$$

pour tout $z \in 1 + \varpi^{b(r)}\mathscr{O}_\wp$ (la convergence suit de la discussion au-dessus de ce lemme).

Soit $c(r) \in \mathbb{Z}$ tel que $c(r) \geq b(r) + r$. On a alors $\chi'(z) \in 1 + \varpi^r\mathscr{O}_L$ pour tout $z \in 1 + \varpi^{c(r)}\mathscr{O}_\wp$. Considérons le caractère $\chi(\chi')^{-1}$ de $1 + \varpi^{c(r)}\mathscr{O}_\wp$ à valeurs dans L : il est localement constant (par le lemme 4.4.3, car χ est de poids k) et sa source est contenue dans $1 + \varpi^r\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$. Donc il existe $d(r) \in \mathbb{Z}_{>0}$, tel que

$$\begin{aligned}&\big(\chi(\chi')^{-1}\big)(1 + \varpi^{c(r)}\mathscr{O}_\wp)\\ &\qquad \subseteq \left\{\zeta \in \mathbb{C}_p^\times\ ;\ \zeta^{q^{d(r)}} = 1\right\} = (1 + \varpi^r\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \cap \left\{\zeta \in \mathbb{C}_p^\times\ ;\ \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \zeta^{p^n} = 1\right\}.\end{aligned}$$

Soit $a(r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que pour tout $z \in 1 + \varpi^{a(r)}\mathscr{O}_\wp$, il existe alors un $x \in 1 + \varpi^{c(r)}\mathscr{O}_\wp$ vérifiant $x^{q^{d(r)}} = z$. On a donc

$$\big(\chi(\chi')^{-1}\big)(1 + \varpi^{a(r)}\mathscr{O}_\wp) = 1.$$

Autrement dit, le caractère χ est $a(r)$-analytique. ∎

En voyant $\mathscr{O}_\wp^\times$ comme sous-groupe de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ via τ, il est clair que si un caractère χ localement τ-analytique de poids k de $\mathscr{O}_\wp^\times$ à valeurs dans $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ est a-analytique, il se prolonge en un caractère localement analytique

$$\chi^\sharp : \mathscr{O}_\wp^\times(1 + \varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}^\times, \quad \alpha \cdot z \longmapsto \chi(\alpha)\tau(z)^k. \tag{4.4.2}$$

On a comme dans [**63**, lemme 2.1] :

Proposition 4.4.7. — *Soient $r > 0$, $\chi \in \mathscr{W}_\tau(r)$ et $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq a(r)$. Toute fonction analytique g sur*

$$\mathscr{O}_\wp^\times(1 + \varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) = \bigcup_{x \in \mathscr{O}_\wp^\times/(1+\varpi^a\mathscr{O}_\wp)} x(1 + \varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$$

c'est-à-dire telle que $g \in \prod_{x \in \mathscr{O}_\wp^\times/(1+\varpi^a\mathscr{O}_\wp)} \Gamma(x(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}), \mathscr{O}_{x(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})})$, *homogène de poids* χ *pour l'action du groupe* $\mathscr{O}_\wp^\times$ *agissant par translation* (*i.e.* $g(az) = \chi(a)g(z)$ *pour tout* $a \in \mathscr{O}_\wp^\times$ *et tout* $z \in \mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$) *est de la forme* $C\chi^\sharp$ *avec* $C \in \mathbb{C}_p$.

Démonstration. — Soit $C = g(1)$ et considérons la fonction analytique

$$h = g - C \cdot \chi^\sharp$$

sur $\mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$. Comme g est homogène de poids χ, on a $h(a) = 0$ pour tout a dans $\mathscr{O}_\wp^\times$. Soit $x \in \mathscr{O}_\wp^\times/(1+\varpi^a\mathscr{O}_\wp)$, par le théorème de préparation de Weierstrass, on a $h(z) = 0$ pour tout $z \in x(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$. La proposition en découle. ∎

Corollaire 4.4.8. — *Soient* $r > 0$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathscr{W}_\tau(r)$ *et* $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq a(r)$. *Toute fonction analytique* F *sur*

$$\mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}) \times \mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$$

qui est homogène de poids $\chi_1 \times \chi_2$ *pour l'action de* $\mathscr{O}_\wp^\times \times \mathscr{O}_\wp^\times$ *agissant par translation est de la forme*

$$(z_1, z_2) \longmapsto C\chi_1^\sharp(z_1)\chi_2^\sharp(z_2) \quad \textit{pour } C \in \mathbb{C}_p.$$

Démonstration. — Fixons $z_2 \in \mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ et considérons la fonction analytique $F(.\,, z_2)$ sur $\mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$, qui est donc homogène de poids χ_1 pour l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$. Par la proposition 4.4.7, il existe $C(z_2) \in \mathbb{C}_p$ tel que

$$F(z_1, z_2) = C(z_2)\chi_1^\sharp(z_1)$$

pour tout $z_1 \in \mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$.

Fixons maintenant $z_1 \in \mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$. La fonction $C(.)\chi^\sharp(z_1) = F(z_1, .)$ est une fonction analytique sur $\mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$. Donc

$$C(.) = \chi^\sharp(z_1)^{-1}F(z_1, .)$$

est une fonction analytique sur $\mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ homogène de poids χ_2. Par la proposition 4.4.7 encore, il existe $C \in \mathbb{C}_p$ tel que

$$C(z_2) = C \cdot \chi_2^\sharp(z_2)$$

pour tout $z_2 \in \mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^a\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$. Le corollaire en découle. ∎

4.4.2. Faisceaux de formes modulaires de poids non entiers. — Nous appliquons la théorie de Pilloni [**63**] pour définir les formes modulaires surconvergentes de poids non entiers. Cette section est organisée comme dans [**63**, §§3–4]. Les résultats concernant $\underline{\omega}_-$ ont été obtenus par Brasca [**12**], mais on les récrit sous la forme qui nous convient le mieux.

Soient $\tau \in \Sigma_\wp$ et

▷ $\varepsilon : \mathbb{A} \to (\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ le schéma abélien universel sur $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$;

▹ $\mathbb{T}_-$ (resp. $\mathbb{T}_+$) le schéma sur $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ qui représente le faisceau $\underline{\omega}_{\mathbb{A},-}$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathbb{A},+}$), *i.e.*

$$\mathbb{T}_- \cong \mathrm{Spec}_{\mathscr{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}}}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{-n}\Big), \quad \Big(\text{resp. } \mathbb{T}_+ \cong \mathrm{Spec}_{\mathscr{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}}}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \underline{\omega}_{\mathbb{A},+}^{-n}\Big)\Big),$$

▹ $\mathbb{T}_-^\times$ (resp. $\mathbb{T}_+^\times$) l'ouvert

$$\mathrm{Spec}_{\mathscr{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}}}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{n}\Big), \quad \Big(\text{resp. } \mathrm{Spec}_{\mathscr{O}_{(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}}}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \underline{\omega}_{\mathscr{A},+}^{n}\Big)\Big)$$

de $\mathbb{T}_-$ (resp. $\mathbb{T}_+$).

L'anneau $\mathscr{O}_\wp$ agit sur le faisceau $\underline{\omega}_{\mathbb{A},-}$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathbb{A},+}$) par

$$\lambda \cdot f = \tau(\lambda) f$$

pour tout $\lambda \in \mathscr{O}_\wp$, et pour tout ouvert U de $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$, $f \in \underline{\omega}_{\mathbb{A},-}(U)$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathbb{A},+}(U)$). On en déduit une action de l'anneau $\mathscr{O}_\wp$ (resp. de $\mathscr{O}_\wp \setminus \{0\}$) sur $\mathbb{T}_-$ et $\mathbb{T}_+$ (resp. $\mathbb{T}_-^\times$ et $\mathbb{T}_+^\times$).

Remarque 4.4.9. — Notons

$$i_- : \mathbb{T}_-^\times \to (\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E} \quad (\text{resp. } i_+ : \mathbb{T}_+^\times \to (\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E})$$

le morphisme canonique. On vérifie (voir aussi la remarque 4.4.10) que le sous-faisceau de $(i_-)_*\mathscr{O}_{\mathbb{T}_-^\times}$ (resp. $(i_+)_*\mathscr{O}_{\mathbb{T}_+^\times}$) homogène de poids τ^{-n} (le caractère $\mathscr{O}_\wp^\times \to \mathscr{O}_\wp^\times : \lambda \mapsto \tau(\lambda)^{-n}$) est isomorphe au faisceau $\underline{\omega}_{\mathbb{A},-}^{\otimes n}$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathbb{A},+}^{\otimes n}$).

Notons :

▹ $\mathfrak{T}_-$ (resp. $\mathfrak{T}_-^\times$, $\mathfrak{T}_+$, $\mathfrak{T}_+^\times$) le complété de $\mathbb{T}_-$ (resp. $\mathbb{T}_-^\times$, $\mathbb{T}_+$, $\mathbb{T}_+^\times$) le long de sa fibre spéciale :

▹ $\mathfrak{T}_-^{\mathrm{rig}}$ (resp. $(\mathfrak{T}_-^\times)^{\mathrm{rig}}$, $\mathfrak{T}_+^{\mathrm{rig}}$, $(\mathfrak{T}_+^\times)^{\mathrm{rig}}$) sa fibre générique au sens de Raynaud :

▹ $\mathscr{T}_-$ (resp. $\mathscr{T}_-^\times$, $\mathscr{T}_+$, $\mathscr{T}_+^\times$) la fibre générique de $\mathbb{T}_-$ (resp. $\mathbb{T}_-^\times$, $\mathbb{T}_+$, $\mathbb{T}_+^\times$) sur E :

▹ $\mathscr{T}_-^{\mathrm{an}}$ (resp. $(\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}}$, $\mathscr{T}_+^{\mathrm{an}}$, $(\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}}$) l'analytifié de $\mathscr{T}_-$ (resp. $\mathscr{T}_-^\times$, $\mathscr{T}_+$, $\mathscr{T}_+^\times$).

Remarque 4.4.10. — Soit $U = \mathrm{Spec}\, R$ un ouvert affine de $(\mathbb{M}_K)_{\tau,\mathscr{O}_E}$ tel que le faisceau de $\mathscr{O}_U$-modules $\underline{\omega}_{\mathbb{A},-|U}$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathbb{A},+|U}$) soit libre de rang 1, notons $\mathfrak{U} \cong \mathrm{Spf}\, \mathfrak{R}$ le complété de U le long de sa fibre spéciale, et $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}} \cong \mathrm{Spm}\, \mathfrak{R}_E$ la fibre générique de $\mathfrak{U}$ au sens de Raynaud. On fixe un générateur w des sections de $\underline{\omega}_{\mathbb{A},-}$ (reps. $\underline{\omega}_{\mathbb{A},+}$)

sur U, on a alors (resp. aussi pour $\underline{\omega}_{\mathbb{A},+}$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{-\,|U} &\cong \operatorname{Spec} R[X] \\
\mathbb{T}^{\times}_{-\,|U} &\cong \operatorname{Spec} R[X,Y]/(XY-1) \\
\mathfrak{T}_{-\,|\mathfrak{U}} &\cong \operatorname{Spf} \mathfrak{R}\langle X\rangle \\
\mathfrak{T}^{\times}_{-\,|\mathfrak{U}} &\cong \operatorname{Spf} \mathfrak{R}\langle X,Y\rangle/(XY-1) \\
\mathfrak{T}^{\mathrm{rig}}_{-\,|\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}} &\cong \operatorname{Spm} \mathfrak{R}_E\langle X\rangle \cong \{x\in\mathbb{A}^1_E\ ;\ \|x\|\leq 1\}\times_{\operatorname{Spec} E}\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}} \\
(\mathfrak{T}^{\times}_{-})^{\mathrm{rig}}{}_{|\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}} &\cong \operatorname{Spm} \mathfrak{R}_E\langle X,Y\rangle/(XY-1) \cong \{x\in\mathbb{A}^1_E\ ;\ \|x\|= 1\}\times_{\operatorname{Spec} E}\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}} \\
\mathscr{T}^{\mathrm{an}}_{-\,|\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}} &\cong \mathbb{A}^1_E\times_{\operatorname{Spec} E}\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}} \\
(\mathscr{T}^{\times}_{-})^{\mathrm{an}}{}_{|\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}} &\cong \mathbb{A}^1_E\setminus\{0\}\times_{\operatorname{Spec} E}\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}
\end{aligned}$$

où $\mathbb{A}^1_E$ est l'espace analytique rigide associé à $\operatorname{Spec}(E[X])$ et les morphismes (pour toutes les algèbres ci-avant) envoyant X sur 1 correspondent à la section w. L'action de $\mathscr{O}_\wp$ sur $\mathbb{T}_{-\,|U}$ est donnée par

$$[\lambda] : R[X] \longrightarrow R[X], \quad X \longmapsto \tau(\lambda)X$$

pour tout $\lambda\in\mathscr{O}_\wp$. L'action de $\mathscr{O}_\wp$ ou de $\mathscr{O}_\wp\setminus\{0\}$ sur les autres est analogue.

Soient $n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $r\in\mathbb{Q}\cap[0,\frac{1}{q^{n-2}(q+1)}[$ et $\varepsilon:\mathfrak{A}\to(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ le schéma abélien universel. Notons :

- ▹ $\mathfrak{C}_n\to(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ le sous-groupe canonique d'échelon n universel de $\mathfrak{A}$;
- ▹ $\mathfrak{G}:=\mathfrak{A}[\varpi^\infty]^{-,1}$, $\mathfrak{H}_n=(\mathfrak{C}_n)^{-,1}_\wp$ le sous-groupe canonique d'échelon n de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^{\mathscr{D}}$ le dual strict de $\mathfrak{G}$ sur $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E}$;
- ▹ $\widetilde{\mathfrak{H}}_n\cong(\mathfrak{G}[\varpi^n]/\mathfrak{H}_n)^\vee$ le sous-groupe canonique d'échelon n de $\mathfrak{G}^\vee$ (voir §4.2.3).

L'isogénie $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n$ sur $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,\mathscr{O}_E}$ induit une suite exacte de schémas en groupes

$$0\to\mathfrak{H}_n\longrightarrow\mathfrak{G}\xrightarrow{\ \phi\ }\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_n\to 0$$

d'où on déduit une application surjective

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{A},-}\cong\underline{\omega}_{\mathfrak{G}}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n}.$$

En outre, soit ψ l'unique isogénie telle que $\psi\circ\phi=[\varpi^n]$, on dispose d'une suite exacte de schémas en groupes :

$$0\to\mathfrak{G}[\varpi^n]/\mathfrak{H}_n\longrightarrow\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_n\xrightarrow{\ \psi\ }\mathfrak{G}\to 0$$

d'où on déduit une suite exacte de schémas en groupes :

$$0\to\widetilde{\mathfrak{H}}_n\longrightarrow\mathfrak{G}^\vee\xrightarrow{\ \psi^\vee\ }(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_n)^\vee\to 0$$

qui induit donc une suite exacte de $\mathscr{O}_{(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,\mathscr{O}_E}}$-modules

$$0 \to \underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,+} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{A},+} \longrightarrow \underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n,\tau} \to 0.$$

On notera que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{A},+} \cong \underline{\omega}_{\mathfrak{G}^\vee,\tau} \quad \text{et} \quad \underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_n,+} \cong \underline{\omega}_{(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_n)^\vee,\tau}.$$

Notons $\mathscr{H}_n$ (resp. $\widetilde{\mathscr{H}}_n$) la fibre générique de $\mathfrak{H}_n$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{H}}_n$) sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$. On a comme dans [**63**, th. 3.1] :

Théorème 4.4.11. — *Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $r \in \mathbb{Q}$, $r < \frac{1}{q^{n-2}(q+1)}$. Alors il existe un unique ouvert rigide*

$$F_{n,-} \longhookrightarrow \mathfrak{T}^{\mathrm{rig}}_{-} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}} \mathscr{H}^{\mathscr{D}}_n \quad \big(\textit{resp. } F_{n,+} \longhookrightarrow \mathfrak{T}^{\mathrm{rig}}_{+} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}} \widetilde{\mathscr{H}}^\vee_n\big)$$

vérifiant la condition suivante.

Pour toute extension finie L de E avec $\mathscr{O}_L$ l'anneau des entiers, soit

$$x : \operatorname{Spec} L \longrightarrow (M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$$

un L-point de $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ avec $(A,\iota,\theta,\overline{\alpha^{\wp}})$ le $\mathscr{O}_L$-point de $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,\mathscr{O}_E}$ associé (noté encore x). Alors l'espace analytique rigide $F_{n,-}$ (resp. $F_{n,+}$) vérifie

$$F_{n,-\,|x}(\mathbb{C}_p) = \big\{(\omega, y) \in \underline{\omega}_{A_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}},-} \times (\mathfrak{H}^{\mathscr{D}}_n{}_{|x}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}))\ ;\ \mathrm{HT}_-(y) = \omega_{|\underline{\omega}_{H_n}}\big\}$$

$$(\textit{resp. } F_{n,+\,|x}(\mathbb{C}_p) = \{(\omega, y) \in \underline{\omega}_{A_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}},+} \times (\widetilde{\mathfrak{H}}^\vee_n{}_{|x}(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}))\ ;\ \mathrm{HT}_+(y) = \omega_{|\underline{\omega}_{\widetilde{H}_n,\tau}}\})\ \textit{où}$$

$$F_{n,-\,|x} := \operatorname{Spec} L \times_{x,(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}} F_{n,-} \quad (\textit{resp. } F_{n,+\,|x} := \operatorname{Spec} L \times_{x,(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}} F_{n,+}),$$

où $H_n := \mathfrak{H}_{n\,|x}$ (resp. $\widetilde{H}_n := \widetilde{\mathfrak{H}}_{n\,|x}$) est alors le sous-groupe canonique de $A[\varpi^\infty]^{-,1}$ (resp. de $(A[\varpi^\infty]^{-,1})^\vee$) et où $\omega_{|\underline{\omega}_{H_n}}$ (resp. $\omega_{|\underline{\omega}_{\widetilde{H}_n,\tau}}$) désigne l'image de ω dans $\underline{\omega}_{H_n}$ (resp. $\underline{\omega}_{\widetilde{H}_n,\tau}$) via la projection $\underline{\omega}_{A,-} \twoheadrightarrow \underline{\omega}_{H_n}$ (resp. $\underline{\omega}_{A,+} \twoheadrightarrow \underline{\omega}_{\widetilde{H}_n,\tau}$).

Démonstration. — La preuve est la même que celle de [**63**, th. 3.1]. Nous donnons une démonstration pour la commodité du lecteur. On voit que si $F_{n,-}$ (resp. $F_{n,+}$) existe, il est uniquement caractérisé par la propriété du théorème. Donc il suffit de construire $F_{n,-}$ (resp. $F_{n,+}$) localement sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$. Soit $U \cong \operatorname{Spf}(B)$ un sous-schéma formel ouvert affine de $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ sur lequel les $\mathscr{O}_U$-modules $\underline{\omega}_{\mathfrak{A},-}$ et $\underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{H}_n,-}$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathfrak{A},+}$ et $\underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{H}_n,+}$) sont triviaux.

Soit ω un générateur de $\underline{\omega}_{\mathfrak{A},-}$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathfrak{A},+}$) sur $\mathscr{O}_U$, par la suite exacte

$$0 \to \underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{H}_n} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{A},-} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n} \to 0$$

$$(\text{resp. } 0 \to \underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{H}_n,+} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathfrak{A},+} \longrightarrow \underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n,\tau} \to 0),$$

on voit qu'il existe $a \in B$ (resp. $\tilde{a} \in B$) tel que $\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n}{}_{|U} \cong B/aB \cdot \omega$ (resp. $\underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n,\tau}{}_{|U} \cong B/\tilde{a}B \cdot \omega$). Considérons le schéma en groupes

$$\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}} \to (\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E} \quad \big(\text{resp. } \widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee} \to (\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E}\big),$$

et supposons $\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}{}_{|U} \cong \operatorname{Spf}(R)$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee} \cong \operatorname{Spf}(\widetilde{R})$) où R (resp. $\widetilde{R}$) est une B-algèbre. Comme dans la remarque 4.4.10, on a un isomorphisme

$$\mathfrak{T}_{-}{}_{|U} \times_U \mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}{}_{|U} \cong \operatorname{Spf} R\langle T_1\rangle$$

$$(\text{resp. } \mathfrak{T}_{+}{}_{|U} \times_U \mathfrak{H}_n^{\vee}{}_{|U} \cong \operatorname{Spf} \widetilde{R}\langle T_1\rangle)$$

où le morphisme $T_1 \mapsto 1$ correspond à la section ω. Le morphisme $\mathrm{id} : \mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}} \to \mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}} \in \mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}(\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}})$ (resp. $\mathrm{id} : \widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee} \to \widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee} \in \widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}(\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee})$) induit (*cf.* §4.1.1) un morphisme de schémas en groupes sur $\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}$) :

$$i : \mathfrak{H}_n \times_U (\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}{}_{|U}) \longrightarrow \mathscr{L}\mathscr{T} \times_U (\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}{}_{|U})$$

$$\big(\text{resp. } i : \widetilde{\mathfrak{H}}_n \times_U (\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}{}_{|U}) \longrightarrow \mathbb{G}_m \times_U (\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}{}_{|U})\big).$$

Comme $\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n}{}_{|U} \cong B/aB \cdot \omega$ (resp. $\underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n,\tau}{}_{|U} \cong B/\widetilde{a}B \cdot \omega$), on a

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n \times_U (\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}{}_{|U})} \cong R/aR \cdot \omega \quad (\text{resp. } \underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n \times_U (\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}{}_{|U}),\tau} \cong \widetilde{R}/\widetilde{a}\widetilde{R} \cdot \omega).$$

Soit $X \in R$ (resp. $\widetilde{X} \in \widetilde{R}$) tel que $i^*(\omega_{\mathscr{L}\mathscr{T}}) = X\omega \in \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n \times_U (\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}{}_{|U})}$ (voir §4.2.1 pour la définition de $\omega_{\mathscr{L}\mathscr{T}}$) (resp. $i^*_\tau(\frac{\mathrm{d}t}{t}) = \widetilde{X}\omega \in \underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n \times_U (\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}{}_{|U}),\tau}$ où i^*_τ désigne la composition de i^* avec la projection $\underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n \times_U (\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}{}_{|U})} \twoheadrightarrow \underline{\omega}_{\widetilde{\mathfrak{H}}_n \times_U (\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}{}_{|U}),\tau}$), et considérons le schéma formel

$$\operatorname{Spf} R\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - X - aT_2)$$

(resp. $\operatorname{Spf} \widetilde{R}\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \widetilde{X} - \widetilde{a}T_2)$) sur U. On vérifie que l'espace analytique rigide associé (au sens de Raynaud) est par définition $F_{n,-}{}_{|U^{\mathrm{rig}}}$ (resp. $F_{n,+}{}_{|U^{\mathrm{rig}}}$), et on a bien un morphisme d'espaces analytiques rigides :

$$F_{n,-}{}_{|U^{\mathrm{rig}}} \hookrightarrow (\mathfrak{T}_-^{\mathrm{rig}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}} \mathscr{H}_n^{\mathscr{D}})_{|U^{\mathrm{rig}}}$$

(resp. $F_{n,+}{}_{|U^{\mathrm{rig}}} \hookrightarrow (\mathfrak{T}_+^{\mathrm{rig}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}} \widetilde{\mathscr{H}}_n^{\vee})_{|U^{\mathrm{rig}}}$). Ceci permet de conclure. ∎

Notons $(\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}})^\times$ (resp. $(\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee})^\times$) le sous-schéma ouvert $\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}} \setminus \mathfrak{H}_{n-1}^{\mathscr{D}}$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee} \setminus \widetilde{\mathfrak{H}}_{n-1}^{\vee}$) de $\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}}$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{H}}_n^{\vee}$) sur $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ (qui est donc un $(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times$-torseur sur $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,E}$), et définissons $(\mathscr{H}_n^{\mathscr{D}})^\times$ et $(\widetilde{\mathscr{H}}_n^{\vee})^\times$ de façon analogue. Posons

$$F_{n,-}^\times := F_{n,-} \times_{\mathscr{H}_n^{\mathscr{D}}} (\mathscr{H}_n^{\mathscr{D}})^\times \quad \text{et} \quad (F_{n,+})^\times := F_{n,+} \times_{\widetilde{\mathscr{H}}_n^{\vee}} (\widetilde{\mathscr{H}}_n^{\vee})^\times.$$

Le morphisme

$$F_{n,-} \hookrightarrow \mathfrak{T}_-^{\mathrm{rig}} \times \mathscr{H}_n^{\mathscr{D}} \xrightarrow{p_1} \mathfrak{T}_-^{\mathrm{rig}} \tag{4.4.3}$$

$$(\text{resp. } F_{n,+} \hookrightarrow \mathfrak{T}_+^{\mathrm{rig}} \times \widetilde{\mathscr{H}}_n^{\vee} \xrightarrow{p_1} \mathfrak{T}_+^{\mathrm{rig}})$$

induit un morphisme d'espaces analytiques rigides au-dessus de $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$

$$j_- : F^{\times}_{n,-} \longrightarrow \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_- \text{ (resp. } j_+ : F^{\times}_{n,+} \longrightarrow \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_+\text{)}. \tag{4.4.4}$$

Comme $\mathscr{H}^{\mathscr{D}}_n$ et $\widetilde{\mathscr{H}}^{\vee}_n$ sont étales sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ (car on est ici sur la fibre générique), on en déduit que les morphismes j_- et j_+ sont aussi étales.

Remarque 4.4.12. — Les espaces analytiques rigides $F^{\times}_{n,+}$ et $F^{\times}_{n,-}$ sont appelés dans [**63**] des *fibrations en boules*. En effet, on peut décrire $F^{\times}_{n,-}$ et $F_{n,-}$ localement pour la topologie étale sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ comme suit (le cas de $F^{\times}_{n,+}$ et $F_{n,+}$ est analogue). Soit $U \cong \operatorname{Spf} R$ un ouvert de $(\mathfrak{M}_K)^{\leq r}_{\tau,\mathscr{O}_E}$ sur lequel les faisceaux $\underline{\omega}_{\mathfrak{A},-}$ et $\underline{\omega}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_{n,-}}$ sont triviaux. Il existe donc $a \in R$ et $\omega \in \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n\,|U}$ tels que $\underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n\,|U} \cong R/aR \cdot \omega$. Soit $V \cong \operatorname{Spf} R'$ un schéma formel sur U tel que V^{rig} soit étale sur U^{rig} (*cf.* [**45**, ch. 8]) et qu'il existe une section $i : V \to (\mathfrak{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times}{}_{|V}$ (un tel schéma formel V existe, par exemple on peut prendre $V = (\mathfrak{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times}{}_{|U}$, et l'application diagonale : $\Delta : (\mathfrak{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times}{}_{|U} \to (\mathfrak{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times}{}_{|U} \times (\mathfrak{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times}{}_{|U}$ donne une telle section). La section i correspond à un morphisme de schémas en groupes sur V :

$$i : \mathfrak{H}_{n\,|V} \longrightarrow \mathscr{L}\mathscr{T}{}_{|V}.$$

Il existe donc $c \in R'$ tel que $i^*\omega_{\mathscr{L}\mathscr{T}} = c\omega \in \underline{\omega}_{\mathfrak{H}_n\,|V} \cong R'/aR'$. De plus, pour toute section

$$i_\lambda := [\lambda] \circ i : V \to \mathfrak{H}^{\mathscr{D}}_n{}_{|V}$$

avec $\lambda \in \mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp$, on en déduit un morphisme de schémas en groupes sur V :

$$i_\lambda : \mathfrak{H}_{n\,|V} \longrightarrow \mathscr{L}\mathscr{T}{}_{|V}.$$

On a $i^*_\lambda\omega_{\mathscr{L}\mathscr{T}} = \tau(\lambda)c\omega$. Fixons un relevé quelconque $\widetilde{\lambda}$ de λ dans $\mathscr{O}_\wp$. On vérifie (voir la démonstration du théorème 4.4.11) que

$$F_{n,-\,|V^{\mathrm{rig}}} \cong \coprod_{\lambda\in\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spm}\Big(\big(R'\langle T_1,T_2\rangle/(T_1-\tau(\widetilde{\lambda})c-aT_2)\big)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_E}E\Big),$$

$$F^{\times}_{n,-\,|V^{\mathrm{rig}}} \cong \coprod_{\lambda\in(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^{\times}} \operatorname{Spm}\Big(\big(R'\langle T_1,T_2\rangle/(T_1-\tau(\widetilde{\lambda})c-aT_2)\big)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_E}E\Big).$$

Le morphisme (4.4.3) au-dessus de V^{rig} est alors donné par (voir aussi la remarque 4.4.10)

$$\begin{aligned} R'\langle T\rangle\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_E}E &\longrightarrow \prod_{\lambda\in\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp}\big(R'\langle T_1,T_2\rangle/(T_1-\tau(\widetilde{\lambda})c-aT_2)\big)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_E}E,\\ T &\longmapsto (T_1)_{\lambda\in\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp}.\end{aligned}$$

Enfin, soient L une extension finie de E et $x : R'\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_E}E \to L$ un L-point de V^{rig} (donc un L-point de $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ encore noté x), on a par la proposition 4.2.7 (3)

$$\upsilon_\wp\big(x(a)\big) = n - \frac{q^n-1}{q-1}\operatorname{Ha}(x), \quad \upsilon_\wp\big(x(c)\big) = \frac{\operatorname{Ha}(x)}{q-1}\,. \tag{4.4.5}$$

De la même façon que dans [**63**, prop. 3.2], on a :

Proposition 4.4.13. — *Soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0, (q-1)/q^n[$. Le morphisme d'espaces analytiques rigides sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$:$j_- : F^{\times}_{n,-} \to \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_-$ (resp. $j_+ : F^{\times}_{n,+} \to \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_+$) se factorise à travers $(\mathscr{T}^{\times}_-)^{\mathrm{an}}$ (resp. $(\mathscr{T}^{\times}_+)^{\mathrm{an}}$) et est une immersion ouverte. On peut donc identifier $F^{\times}_{n,-}$ (resp. $F^{\times}_{n,+}$) à un ouvert de $(\mathscr{T}^{\times}_-)^{\mathrm{an}}$ (resp. $(\mathscr{T}^{\times}_+)^{\mathrm{an}}$).*

Considérons l'action de $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$ sur $F^{\times}_{n,-}$ et $F^{\times}_{n,+}$. On a des diagrammes commutatifs d'espaces analytiques rigides

$$\begin{tikzcd} F^{\times}_{n,-} \arrow[r, "\alpha_-"] \arrow[d, "p_0"] & \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_- \times (\mathscr{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times} \arrow[d, "p_1"] \arrow[dl, "p_2"'] \\ (\mathscr{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times} \arrow[d] & \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_- \arrow[dl] \\ (M_K)^{\leq r}_{\tau,E} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F^{\times}_{n,+} \arrow[r, "\alpha_+"] \arrow[d, "p'_0"] & \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_+ \times (\widetilde{\mathscr{H}}^{\vee}_n)^{\times} \arrow[d, "p'_1"] \arrow[dl, "p'_2"'] \\ (\widetilde{\mathscr{H}}^{\vee}_n)^{\times} \arrow[d] & \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_+ \arrow[dl] \\ (M_K)^{\leq r}_{\tau,E} & \end{tikzcd}$$

Le groupe $\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp}$ agit sur $\mathscr{H}^{\mathscr{D}}_n$ (resp. $\widetilde{H}^{\vee}_n$). Le groupe $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$ agit sur $\mathscr{T}^{\mathrm{an}}_-$ (resp. $\mathscr{T}^{\mathrm{an}}_+$). Le groupe $\mathscr{O}_{\wp}^{\times} \times (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp})^{\times}$ agit donc sur $\mathscr{T}^{\mathrm{an}}_- \times \mathscr{H}^{\mathscr{D}}_n$ (resp. $\mathscr{T}^{\mathrm{an}}_+ \times \widetilde{\mathscr{H}}^{\vee}_n$) et le morphisme p_1 (resp. p'_1) est équivariant sous la première projection $\mathscr{O}_{\wp}^{\times} \times (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp})^{\times} \to \mathscr{O}_{\wp}^{\times}$, le morphisme p_2 (resp. p'_2) est équivariant sous la seconde projection $\mathscr{O}_{\wp}^{\times} \times (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp})^{\times} \to (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp})^{\times}$. Le groupe $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$ vu comme sous-groupe de $\mathscr{O}_{\wp}^{\times} \times (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp})^{\times}$ via l'application diagonale laisse stable $F^{\times}_{n,-} \hookrightarrow \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_- \times (\mathscr{H}^{\mathscr{D}}_n)^{\times}$ (resp. $F^{\times}_{n,+} \hookrightarrow \mathscr{T}^{\mathrm{an}}_+ \times (\widetilde{\mathscr{H}}^{\vee}_n)^{\times}$). La projection p_0 (resp. p'_0) est équivariante sous la projection $\mathscr{O}_{\wp}^{\times} \to (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp})^{\times}$. Enfin, le morphisme $j_- = p_1 \circ \alpha_-$ (resp. $j_+ = p'_1 \circ \alpha_+$) est $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$-équivariant.

Remarque 4.4.14. — Reprenons les notations de la remarque 4.4.12. L'action de $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$ sur

$$F^{\times}_{n,-\,|V^{\mathrm{rig}}} \cong \coprod_{\lambda \in (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n\mathscr{O}_{\wp})^{\times}} \mathrm{Spm}\Big(\big(R'\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \tau(\widetilde{\lambda})c - aT_2)\big)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_E} E\Big)$$

est alors donnée par

$$[\mu] : R'\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \tau(\widetilde{\lambda})c - aT_2) \xrightarrow{\sim} R'\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \tau(\widetilde{\lambda\overline{\mu}})c - aT_2),$$

$$T_1 \longmapsto \tau(\mu)T_1, \quad T_2 \longmapsto T_2 + \frac{\tau(\mu) - \tau(\widetilde{\overline{\mu}})}{a}\tau(\lambda)c$$

pour tout $\mu \in \mathscr{O}_{\wp}^{\times}$ (avec $\overline{\mu}$ son image dans $(\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n)^{\times}$) et $\lambda \in (\mathscr{O}_{\wp}/\varpi^n)^{\times}$ (noter que $\varpi^n \in aR'$ et $\mu - \widetilde{\overline{\mu}} \in \varpi^n\mathscr{O}_{\wp}$).

Soit χ un caractère localement τ-analytique de $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$ à valeurs dans $E^{\times}$. Supposons $\chi \in \mathscr{W}_{\tau}(w)$ avec $w > 0$, et soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $r \in \mathbb{Q} \cap]0, \frac{q-1}{q^n}[$ tels que $n - \frac{q^n}{q-1}r > a(w)$

($cf.$ le lemme 4.4.6). Notons

$$u_- : F_{n,-}^\times \longrightarrow (M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \quad u_+ : F_{n,+}^\times \longrightarrow (M_K)_{\tau,E}^{\leq r},$$

$$\Omega_{n,-} := (u_-)_* \mathscr{O}_{F_{n,-}^\times}, \quad \Omega_{n,+} := (u_+)_* \mathscr{O}_{F_{n,+}^\times}.$$

Suivant Pilloni [**63**, §3.5], posons :

Définition 4.4.15. — Le faisceau $\underline{\omega}_-^\chi$ (resp. $\underline{\omega}_+^\chi$) sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$ est le sous-faisceau de $\Omega_{n,-}$ (resp. $\Omega_{n,+}$) des sections homogènes de poids χ^{-1} (voir la remarque 4.4.9) sous l'action du groupe $\mathscr{O}_\wp^\times$.

Proposition 4.4.16. — *Gardons les notations, les $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}}$-modules $\underline{\omega}_-^\chi$ et $\underline{\omega}_+^\chi$ sont localement libres de rang* 1.

Démonstration. — Construisons $\underline{\omega}_-^\chi$ (la construction de $\underline{\omega}_+^\chi$ est analogue) localement pour la topologie étale sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$ ($cf.$ [**45**, ch. 8]). Soit $\{V_i^{\mathrm{rig}} \cong \mathrm{Spm}\, R_i\}_{i\in I}$ un recouvrement fini de $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$ (pour la topologie étale) tel que pour tout $i \in I$, on ait un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur V_i^{rig} (avec les notations de la remarque 4.4.12) :

$$F_{n,-}^\times{}_{|V_i^{\mathrm{rig}}} \cong \coprod_{\lambda\in(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times} \mathrm{Spm}\, R_i\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \tau(\widetilde{\lambda})c_i - a_iT_2)$$

où c_i, a_i sont notés c, a dans la remarque 4.4.12. Notons $(\underline{\omega}_-^\chi)_i$ le sous-faisceau de $((u_-)_*\mathscr{O}_{F_{n,-}^\times})_{|V_i^{\mathrm{rig}}}$ homogène de poids χ^{-1} sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$. Notons $k_\chi \in E$ le τ-poids de χ, et pour tout $\lambda \in (\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times$ posons

$$\Big(\frac{T_1}{\tau(\widetilde{\lambda})c_i}\Big)^{-k_\chi} := \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{-k_\chi}{l} \Big(\frac{T_1}{\tau(\widetilde{\lambda})c_i} - 1\Big)^l \in R_i\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \tau(\widetilde{\lambda})c_i - a_iT_2).$$

La convergence de $(T_1/\tau(\widetilde{\lambda})c_i)^{-k_\chi}$ peut être vérifiée au niveau des points (de $\mathrm{Spm}\, R_i$). Soient L une extension finie de E, $x : R_i \to L$ un L-point de V_i^{rig} et donc un L-point de $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$, comme $\frac{T_1}{\tau(\widetilde{\lambda})c_i} - 1 = \frac{a_iT_2}{\tau(\widetilde{\lambda})c_i} \in R_i\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \tau(\widetilde{\lambda})c_i - a_iT_2)$, il suffit de montrer que

$$v_\wp\Big(\binom{-k_\chi}{l}\frac{x(a_i)}{x(c_i)}\Big) \longrightarrow +\infty$$

quand $l \to +\infty$. Ceci découle de la discussion au-dessus du lemme 4.4.6 puisque par (4.4.5), on a

$$v_\wp\Big(\frac{x(a_i)}{x(c_i)}\Big) = n - \frac{q^n}{q-1}\,\mathrm{Ha}(x) > a(w).$$

De plus, comme χ est n-analytique, on voit que ($cf.$ remarque 4.4.14)

$$[\mu]\Big(\Big(\frac{T_1}{\tau(\widetilde{\lambda})c_i}\Big)^{-k_\chi}\Big) = \chi(\mu)^{-1}\Big(\frac{T_1}{\tau(\widetilde{\lambda})c_i}\Big)^{-k_\chi}$$

pour tout $\mu \in 1 + \varpi^n \mathscr{O}_\wp$. Posons (comparer avec (4.4.2))

$$f_{i,\chi} := \left(\chi^{-1}(\widetilde{\lambda})\left(\frac{T_1}{\tau(\widetilde{\lambda})c_i}\right)^{-k_\chi}\right)_{(\lambda\in\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times} \in \prod_{\lambda\in(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times} R_i\langle T_1, T_2\rangle/(T_1 - \tau(\widetilde{\lambda})c_i - a_iT_2).$$

On a donc $[\mu](f_{i,\chi}) = \chi^{-1}(\mu)f_{i,\chi}$ pour tout $\mu \in \mathscr{O}_\wp^\times$. Par la proposition 4.4.7 et le lemme de Nakayama, on montre

$$(\underline{\omega}_-^\chi)_i \cong \mathscr{O}_{V_i^{\mathrm{rig}}} \cdot f_{i,\chi}$$

de la manière suivante. Soit $g \in (\underline{\omega}_-^\chi)_i$, notons $M_1 := \mathscr{O}_{V_i^{\mathrm{rig}}} \cdot f_{i,\chi}$, et M_2 le sous-$\mathscr{O}_{V_i^{\mathrm{rig}}}$-module de $((u_-)_*\mathscr{O}_{F_{n,-}^\times})_{|V_i^{\mathrm{rig}}}$ engendré par $f_{i,\chi}$ et g. Par la proposition 4.4.7, l'inclusion naturelle de $\mathscr{O}_{V_i^{\mathrm{rig}}}$-modules $M_1 \hookrightarrow M_2$ induit un isomorphisme $x^*M_1 \xrightarrow{\sim} x^*M_2$ pour tout L-point $x : \operatorname{Spec} L \to V_i^{\mathrm{rig}}$ et toute extension finie L de E, d'où on déduit $M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$ par le lemme 4.4.17 ci-dessous.

Enfin, par la théorie de la descente sur le site étale (*cf.* [**10**, th. 3.1]), on obtient un faisceau cohérent localement libre de rang 1 sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$, dont les sections sont homogènes de poids χ^{-1} (qui n'est autre que $\underline{\omega}_-^\chi$). □

Le lemme suivant découle facilement du lemme de Nakayama.

Lemme 4.4.17. — *Soient R une E-algèbre affinoïde (cf.* [**11**, déf. 6.1.1/1]*), $i : M_1 \hookrightarrow M_2$ une injection de R-modules de type fini, si $i \otimes \mathrm{id} : M_1 \otimes_R R/\mathfrak{m} \to M_2 \otimes_R R/\mathfrak{m}$ est un isomorphisme pour tout idéal maximal fermé $\mathfrak{m}$ de R, alors i est un isomorphisme.*

Notation 4.4.18. — Soit χ un caractère localement τ-analytique de $\mathscr{O}_\wp^\times$ dans E, on note $a(\chi) \in \mathbb{Z}$ le plus petit nombre tel que χ soit $a(\chi)$-analytique et on pose

$$r(\chi) := \frac{q-1}{q^{a(\chi)+1}}\cdot$$

Si l'on suppose de plus $a(\chi) < n - 1 - \frac{q^{n-1}}{q-1}r$, on peut donc construire les faisceaux $\underline{\omega}_-^\chi$ (resp. $\underline{\omega}_+^\chi$) en appliquant la construction de la proposition 4.4.16 avec n ou $n-1$. Notons $\underline{\omega}_{-,i}^\chi$ (resp. $\underline{\omega}_{+,i}^\chi$) le faisceau $\underline{\omega}_-^\chi$ (resp. $\underline{\omega}_+^\chi$) construit via $F_{i,-}^\times$ (resp. $F_{i,+}^\times$) avec $i \in \{n-1, n\}$ pour l'instant. Considérons les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
F_{n,-}^\times \arrow[r] \arrow[d] & F_{n-1,-}^\times \arrow[r] \arrow[d] & (\mathfrak{T}_-^\times)^{\mathrm{rig}} \\
(\mathfrak{H}_n^{\mathscr{D}})^\times \arrow[r] \arrow[d] & (\mathfrak{H}_{n-1}^{\mathscr{D}})^\times \arrow[dl] & \\
(M_K)_{\tau,E}^{\leq r} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_{n,+}^\times \arrow[r] \arrow[d] & F_{n-1,+}^\times \arrow[r] \arrow[d] & (\mathfrak{T}_+^\times)^{\mathrm{rig}} \\
(\widetilde{\mathfrak{H}}_n^\vee)^\times \arrow[r] \arrow[d] & (\widetilde{\mathfrak{H}}_{n-1}^\vee)^\times \arrow[dl] & \\
(M_K)_{\tau,E}^{\leq r} & &
\end{tikzcd}$$

Via le morphisme canonique $\mathscr{O}_\wp^\times$-équivariant $F_{n,-}^\times \to F_{n-1,-}^\times$ (resp. $F_{n,+}^\times \to F_{n-1,+}^\times$), on obtient une application $\mathscr{O}_\wp^\times$-équivariante de faisceaux sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$:

$$(u_-)_*\mathscr{O}_{F_{n-1,-}^\times} \longrightarrow (u_-)_*\mathscr{O}_{F_{n,-}^\times} \text{ (resp. } (u_+)_*\mathscr{O}_{F_{n-1,+}^\times} \longrightarrow (u_+)_*\mathscr{O}_{F_{n,+}^\times}).$$

En prenant les sections homogènes de poids χ^{-1}, on obtient un morphisme de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}}$-modules

$$\underline{\omega}_{-,n-1}^{\chi} \longrightarrow \underline{\omega}_{-,n}^{\chi} \text{ (resp. } \underline{\omega}_{+,n-1}^{\chi} \longrightarrow \underline{\omega}_{+,n}^{\chi}).$$

Proposition 4.4.19. — *Les morphismes ci-dessus sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'ils sont des isomorphismes pour la topologie étale sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$. Par le lemme de Nakayama (voir la démonstration de la proposition 4.4.16 et le lemme 4.4.17), on se ramène à montrer que toute fonction analytique homogène de poids χ^{-1} de $\mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^n\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ se prolonge en une fonction analytique homogène de poids χ^{-1} de $\mathscr{O}_\wp^\times(1+\varpi^{n-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ lorsque $a(\chi) \leq n-1-\frac{q^{n-1}}{q-1}r$, ce qui découle de la proposition 4.4.7. $\square$

Par ailleurs, on peut déduire de j_- (resp. de j_+) (*cf.* (4.4.4)) un morphisme $\mathscr{O}_\wp^\times$-équivariant de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}}$-modules :

$$(i_-)_*\mathscr{O}_{(\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}}} \to (u_-)_*\mathscr{O}_{F_{n,-}^\times} \quad \text{(resp. } (i_+)_*\mathscr{O}_{(\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}}} \to (u_+)_*\mathscr{O}_{F_{n,+}^\times}),$$

où $i_\pm$ désigne le morphisme canonique de $(\mathscr{T}_\pm^\times)^{\mathrm{an}}$ sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, en prenant les sections homogènes de poids τ^{-k}, on obtient un morphisme de $\mathscr{O}_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}}$-modules (voir la remarque 4.4.9)

$$\underline{\omega}_-^k \longrightarrow \underline{\omega}_-^{\tau^k} \quad \text{(resp. } \underline{\omega}_+^k \longrightarrow \underline{\omega}_+^{\tau^k}). \tag{4.4.6}$$

De la même façon que dans [**63**, prop. 3.3], on a :

Proposition 4.4.20. — *Les morphismes en* (4.4.6) *sont des isomorphismes.*

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$ et χ_+, χ_- deux caractères localement τ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$ à valeurs dans $E^\times$. De manière similaire à (3.3.4), posons

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} := \underline{\omega}_+^{\chi_+} \otimes \underline{\omega}_-^{\chi_-} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$

qui est un faisceau cohérent localement libre de rang $\sum_{\sigma\in\Sigma_p\setminus\{\tau\}}(k_{1,\sigma}-1)$ sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$ pour tout $r \leq \min\{r(\chi_+), r(\chi_-)\}$ (*cf.* notation 4.4.18).

Définition 4.4.21. — Le E-espace vectoriel de formes modulaires surconvergentes de poids $(\chi_+, \chi_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ sur (τ, E) de niveau K est

$$S_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),\dagger} := \varinjlim_{r\to 0^+} H^0\Big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\Big).$$

En fait, $H^0((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$ est muni d'une topologie de E-espace de Banach (*cf.* [**11**, th. 9.4.3/3 et prop. 3.7.3/3]). Et les morphismes de transition dans la limite inductive ci-dessus sont compacts.

Remarque 4.4.22. — Reprenons les notations ci-dessus. Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $r \in \mathbb{Q} \cap\,]0, (q-1)/q^n[$ tels que $n - \frac{q^n}{q-1}r > \max\{a(\chi_+), a(\chi_-)\}$, considérons sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ le faisceau

$$\Omega_{n,+} \otimes \Omega_{n,-} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$

qui est muni d'une action de $\mathscr{O}_\wp^\times \times \mathscr{O}_\wp^\times$ (avec le premier terme agissant sur $\Omega_{n,+}$ et le deuxième sur $\Omega_{n,-}$). On voit par le corollaire 4.4.8 (et le lemme de Nakayama, voir aussi la démonstration de la proposition 4.4.16) que $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ est le sous-faisceau de

$$\Omega_{n,+} \otimes \Omega_{n,-} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$

des sections homogènes de poids $\chi_+^{-1} \otimes \chi_-^{-1}$ sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times \times \mathscr{O}_\wp^\times$.

4.4.3. Opérateurs de Hecke

4.4.3.1. *Opérateurs de Hecke hors de* $\wp$. — Commençons par les opérateurs de Hecke hors de $\wp$. Soit $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ premier à $\wp$ (*cf.* §4.1.3.1), et supposons comme au §3.2.3 que $V_{\widehat{\mathbb{Z}}} \subset g(V_{\widehat{\mathbb{Z}}})$ et que le groupe $K' := gKg^{-1} \cap K$ est net. Reprenons les notations du §4.1.3.1, l'isogénie universelle $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ induit des isomorphismes (voir la remarque 3.3.12) de faisceaux sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ (avec $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$) :

$$\phi_-^* : \underline{\omega}_{\mathscr{A}',-} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{A},-}, \quad \phi_+^* : \underline{\omega}_{\mathscr{A}',+} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{A},+}.$$

Or, on voit (selon le diagramme commutatif (4.1.10)) que le $\mathscr{O}_{(M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}}$-module $\underline{\omega}_{\mathscr{A}',\pm}$ (resp. $\underline{\omega}_{\mathscr{A},\pm}$) est représenté par l'espace analytique rigide

$$(\mathscr{T}_\pm^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, r_g} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}$$

(resp. $(\mathscr{T}_\pm^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathrm{pr}} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}$) sur $(M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}$. Donc les morphismes ϕ_-^* et ϕ_+^* induisent respectivement des isomorphismes d'espaces analytiques rigides sur $(M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}$ (équivariants sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$) :

$$\Phi_- : (\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, r_g} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathrm{pr}} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E},$$

$$\Phi_+ : (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, r_g} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathrm{pr}} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}.$$

Remarque 4.4.23. — On déduit de Φ_-^{-1} (resp. Φ_+^{-1}) un isomorphisme de faisceaux sur $(M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}$ équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:

$$r_g^*((i_-)_*\mathscr{O}_{(\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}^*((i_-)_*\mathscr{O}_{(\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}}})$$
$$(\text{resp. } r_g^*((i_+)_*\mathscr{O}_{(\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}^*((i_+)_*\mathscr{O}_{(\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}}}))$$

(où $i_\pm$ désigne le morphisme naturel de $(\mathscr{T}_\pm^\times)^{\mathrm{an}}$ sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$) pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$. Ce dernier induit, en restriction aux sous-faisceaux homogènes de poids τ^{-k}, un isomorphisme de $\mathscr{O}_{(M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}}$-modules :

$$\underline{\omega}^k_{\mathscr{A}',-} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}^k_{\mathscr{A},-}$$

(resp. $\underline{\omega}^k_{\mathscr{A}',+} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}^k_{\mathscr{A},+}$), qui n'est autre que $(\phi_-^*)^k$ (resp. $(\phi_+^*)^k$) pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

De la même façon que dans [**63**, prop. 4.2], on a :

Proposition 4.4.24. — *Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, (q-1)/q^n[$, le morphisme Φ_- (resp. Φ_+) induit un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur $(M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}$ équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:*

$$\Phi_- : F^\times_{n,-} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, r_g} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E} \xrightarrow{\sim} F^\times_{n,-} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathrm{pr}} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}$$
$$\big(\textit{resp. } \Phi_+ : F^\times_{n,+} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, r_g} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E} \xrightarrow{\sim} F^\times_{n,+} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathrm{pr}} (M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}\big).$$

On en déduit des isomorphismes de $\mathscr{O}_{(M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}}$-modules équivariants sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:

$$\Phi_-^* : \mathrm{pr}^*\,\Omega_{n,-} \xrightarrow{\sim} r_g^*\Omega_{n,-}, \quad \Phi_+^* : \mathrm{pr}^*\,\Omega_{n,+} \xrightarrow{\sim} r_g^*\Omega_{n,+}.$$

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$, on obtient un opérateur encore noté $[KgK]$ par la composée :

$$\begin{aligned}
&H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \Omega_{n,-} \otimes \Omega_{n,+} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big)\\
&\quad\xrightarrow{r_g^*} H^0\big((M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}, r_g^*\big(\Omega_{n,-} \otimes \Omega_{n,+} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big)\big)\\
&\quad\xrightarrow{(\Phi_-^*)^{-1}\otimes(\Phi_+^*)^{-1}\otimes\phi^*} H^0\big((M_{K'})^{\leq r}_{\tau,E}, \mathrm{pr}^*\,\big(\Omega_{n,-} \otimes \Omega_{n,+} \otimes\\
&\qquad\qquad \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big)\big)\\
&\quad\xrightarrow{\mathrm{tr}_{\mathrm{pr}}} H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \Omega_{n,-} \otimes \Omega_{n,+} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big).
\end{aligned}$$

où le morphisme ϕ^* est défini de la même façon que dans la remarque 3.3.12.

Cet opérateur est de plus équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times \times \mathscr{O}_\wp^\times$. Soient $s > 0$ tel que $a(s) < n - \frac{q^n}{q-1}r$, et χ_+, $\chi_- \in \mathscr{W}_\tau(s)$, en prenant la restriction de $[KgK]$ au sous-faisceau de

$$\Omega_{n,+} \otimes \Omega_{n,-} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$

homogène de poids $\chi_+^{-1}\otimes\chi_-^{-1}$ (qui n'est autre que $\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ par la remarque 4.4.22), on obtient finalement un opérateur continu encore noté $[KgK]$

$$\begin{aligned}[KgK] : H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, &\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\\ &\longrightarrow H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).\end{aligned}$$

Notons que lorsque $\chi_-=\tau^{-k_-}$, $\chi_+=\tau^{-k_+}$ avec $k_\pm\in\mathbb{Z}$, on retrouve l'opérateur (3.3.23) (*cf.* la remarque 4.4.23).

4.4.3.2. *Opérateurs de Hecke en* $\wp$. — Commençons par l'opérateur $Y_{u,\wp}$. Soit $r\in\mathbb{Q}\cap[0,q/(q+1)[$ et reprenons les notations de (4.1.12). Notons pour simplifier

$$p_1 := Y_{u,\mathfrak{p}} : (M_K)_{\tau,E}^{\leq r}\longrightarrow (M_K)_{\tau,E}^{\leq r} \quad \text{et} \quad \mathscr{C} := \big(\mathscr{A}[q/\varpi]^+\oplus\mathscr{A}[\varpi]^-\big).$$

L'isogénie $\phi_{\mathscr{C}}:\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{C}$ induit des isomorphismes de faisceaux cohérents sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$ (*cf.* remarque 3.3.12) :

$$(\phi_{\mathscr{C}}^*)_- : \underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},-}\xrightarrow{\ \sim\ }\underline{\omega}_{\mathscr{A},-},\qquad (\phi_{\mathscr{C}}^*)_+ : \underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},+}\xrightarrow{\ \sim\ }\underline{\omega}_{\mathscr{A},+},$$

d'où on déduit comme précédemment des isomorphismes d'espaces analytiques rigides sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$ équivariants sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:

$$\Phi_{\mathscr{C},-} : (\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}}\times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r},p_1}(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}\xrightarrow{\ \sim\ }(\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}},$$

$$\Phi_{\mathscr{C},+} : (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}}\times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r},p_1}(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}\xrightarrow{\ \sim\ }(\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}}.$$

Notons

$$\mathscr{G} := \mathscr{A}[\varpi^\infty]^{-,1} \quad \text{et} \quad \mathscr{H} := \mathscr{A}[\varpi]^{-,1}.$$

On a alors des isomorphismes canoniques de faisceaux cohérents sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$

$$\underline{\omega}_{\mathscr{A},-}\cong\underline{\omega}_{\mathscr{G}},\quad \underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},-}\cong\underline{\omega}_{\mathscr{G}/\mathscr{H}}.$$

L'isogénie $\mathscr{O}_D$-linéaire $\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{C}$ induit une isogénie $\mathscr{O}_\wp$-linéaire

$$\phi_{\mathscr{H}} : \mathscr{G}\to\mathscr{G}/\mathscr{H}$$

et on peut identifier les morphismes $(\phi_{\mathscr{C}}^*)_-$ et $\phi_{\mathscr{H}}^*$. Soit

$$\psi : \mathscr{G}/\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{G}$$

l'unique isogénie $\mathscr{O}_\wp$-linéaire telle que

$$\psi\circ\phi_{\mathscr{H}} = [\varpi].$$

Elle induit alors un isomorphisme de faisceaux cohérents sur $(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}$:

$$\psi^* : \underline{\omega}_{\mathscr{A},-}\xrightarrow{\ \sim\ }\underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},-}.$$

On voit par la définition de ψ que

$$\psi^*\circ(\phi_{\mathscr{C}}^*)_- = [\varpi]^* \quad \big(=\tau(\varpi)\big).$$

On déduit du morphisme ψ^* un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$

$$\Psi_- : (\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, p_1} (M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$$

et qui vérifie

$$\Psi_- \circ \Phi_{\mathscr{C},-} = [\varpi]. \tag{4.4.7}$$

(Rappelons que $(\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}}$ est muni d'une action naturelle du groupe $\mathscr{O}_\wp \setminus \{0\}$, *cf.* §4.4.2.) De même, l'isogénie $\phi_{\mathscr{C}}^\vee : (\mathscr{A}/\mathscr{C})^\vee \to \mathscr{A}^\vee$ induit une isogénie $\mathscr{O}_\wp$-linéaire

$$\phi_{\mathscr{H}}^\vee : (\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee \longrightarrow \mathscr{G}^\vee$$

et on peut identifier les morphismes

$$\big((\phi_{\mathscr{C}}^\vee)^*\big)^{-,1}_{\wp,\tau} : (e^*\Omega^1_{\mathscr{A}^\vee})^{-,1}_{\wp,\tau} \to (e^*\Omega^1_{(\mathscr{A}/\mathscr{C})^\vee})^{-,1}_{\wp,\tau} \quad \text{et} \quad (\phi_{\mathscr{H}}^\vee)^*_\tau : \underline{\omega}_{\mathscr{G}^\vee,\tau} \to \underline{\omega}_{(\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee,\tau}.$$

On a donc (voir la discussion avant le lemme 4.3.6)

$$(\phi_{\mathscr{H}}^\vee)^*_\tau = \big((\phi_{\mathscr{C}}^*)_+^\vee\big)^{-1}.$$

L'isogénie $\psi^\vee : (\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee \to \mathscr{G}^\vee$ vérifie

$$\psi^\vee \circ \phi_{\mathscr{H}}^\vee = [\varpi]$$

et induit un isomorphisme de faisceaux cohérents sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$:

$$(\psi^\vee)^*_\tau : \underline{\omega}_{(\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee,\tau} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{G}^\vee,\tau}$$

(donc un isomorphisme $\psi_+^* := (\psi^\vee)^*_\tau : \underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},+} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{A},+}$). On voit facilement que

$$(\psi^\vee)^*_\tau \circ (\phi_{\mathscr{H}}^\vee)^* = [\varpi]^* \ \big(= \tau(\varpi)\big).$$

Comme ci-dessus, l'isomorphisme ψ_+^* induit un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:

$$\Psi_+ : (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, p_1} (M_K)^{\leq r}_{\tau,E} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}},$$

qui vérifie

$$\Psi_+ \circ \Phi_{\mathscr{C},+}^{-1} = [\varpi]. \tag{4.4.8}$$

Par le même argument que celui dans la démonstration de [**63**, prop. 4.2], on a :

Proposition 4.4.25. — *Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, (q-1)/q^n[$, l'isomorphisme Ψ_- (resp. Ψ_+) induit un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$ équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:*

$$\Psi_- : F_{n,-}^\times \xrightarrow{\sim} F_{n,-}^\times \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, p_1} (M_K)^{\leq r}_{\tau,E}$$
$$\big(\textit{resp.}\ \Psi_+ : F_{n,+}^\times \times_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, p_1} (M_K)^{\leq r}_{\tau,E} \xrightarrow{\sim} F_{n,+}^\times\big).$$

On en déduit des isomorphismes de $\mathscr{O}_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}}$-modules équivariants sous l'action de $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$

$$\Psi_-^* : p_1^*\Omega_{n,-} \xrightarrow{\sim} \Omega_{n,-},\ \Psi_+^* : \Omega_{n,+} \xrightarrow{\sim} p_1^*\Omega_{n,+}.$$

On obtient donc un opérateur noté $\widetilde{Y}_{u,\wp}$ par la composée :

$$\begin{aligned}
&H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \Omega_{n,-}\otimes\Omega_{n,+}\otimes\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big)\\
&\quad\xrightarrow{p_1^*} H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, p_1^*\big(\Omega_{n,-}\otimes\Omega_{n,+}\otimes\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big)\big)\\
&\qquad\xrightarrow{\Psi_-^*\otimes(\Psi_+^*)^{-1}\otimes\phi_{\mathscr{C}}^*} H^0\Big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \Omega_{n,-}\otimes\Omega_{n,+}\\
&\qquad\qquad\otimes\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\Big),
\end{aligned}$$

où le morphisme $\phi_{\mathscr{C}}^*$ est défini comme dans la remarque 3.3.12. L'opérateur $\widetilde{Y}_{u,\wp}$ est équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_{\wp}^{\times}\times\mathscr{O}_{\wp}^{\times}$. Soient $s>0$ tel que $a(s)<n-\frac{q^n}{q-1}r$, et χ_+, $\chi_-\in\mathscr{W}_\tau(s)$, en prenant la restriction de $\widetilde{Y}_{u,\wp}$ au sous-faisceau de

$$\Omega_{n,+}\otimes\Omega_{n,-}\otimes\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$

homogène de poids $\chi_+^{-1}\otimes\chi_-^{-1}$, on obtient donc un opérateur continu encore noté $\widetilde{Y}_{u,\wp}$

$$\begin{aligned}
(4.4.9)\qquad \widetilde{Y}_{u,\wp} : H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big)&\\
\xrightarrow{\sim} H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big)&.
\end{aligned}$$

Par (4.4.7) et (4.4.8), lorsque $\chi_+=\tau^{-k_+}$, $\chi_-=\tau^{-k_-}$ avec k_+, $k_-\in\mathbb{Z}$, on a :

Proposition 4.4.26. — *On a $\widetilde{Y}_{u,\wp}=\tau(\varpi)^{k_+-k_-}Y_{u,\wp}$ sur le E-espace vectoriel*

$$H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big).$$

Remarque 4.4.27. — Cette proposition implique que l'opérateur $Y_{u,\wp}$ ne peut pas (sans surprise) se prolonger naturellement sur l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids non entiers sauf lorsque $\chi_+\chi_-^{-1}=\tau^k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. C'est analogue au fait que l'on dispose de l'opérateur diamant $\langle p\rangle$ plutôt que de l'opérateur S_p sur la famille p-adique de formes modulaires elliptiques où $\widetilde{Y}_{u,\wp}$ (resp. $Y_{u,p}$) est l'analogue de $\langle p\rangle$ (resp. S_p). Enfin, signalons que l'opérateur $\widetilde{Y}_{u,\wp}$ *dépend du choix* de ϖ.

Considérons l'opérateur $X'_{u,\wp}$. Soit $r\in[0,q/(q+1)[\cap\mathbb{Q}$ et reprenons les notations de (4.1.14). L'isogénie universelle $\phi_{\mathscr{C}}:\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{C}$ induit des isomorphismes de $\mathscr{O}_{M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q}]}$-modules :

$$(\phi_{\mathscr{C}}^*)_- : \underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},-}\xrightarrow{\sim}\underline{\omega}_{\mathscr{A},-},\quad (\phi_{\mathscr{C}}^*)_+ : \underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},+}\xrightarrow{\sim}\underline{\omega}_{\mathscr{A},+},$$

d'où on déduit comme précédemment des isomorphismes d'espaces analytiques rigides sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q}]$ équivariants sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathscr{C},-} : (\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}} &\times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq\frac{r}{q}},p_2} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big] \\ &\xrightarrow{\sim} (\mathscr{T}_-^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r},p_1} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big],\\ \Phi_{\mathscr{C},+} : (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}} &\times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq\frac{r}{q}},p_2} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big] \\ &\xrightarrow{\sim} (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r},p_1} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big].\end{aligned}$$

De la même façon que dans [**63**, prop. 4.3], on a :

Proposition 4.4.28. — *Soient $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $r\in\mathbb{Q}\cap[0,(q-1)/q^n[$, l'isomorphisme $\Phi_{\mathscr{C},-}^{-1}$ induit un morphisme d'espaces analytiques rigides sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q}]$ équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:*

$$\Phi_{\mathscr{C},-}^{-1} : F_{n,-}^\times \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r},p_1} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big] \to F_{n-1,-}^\times \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq\frac{r}{q}},p_2} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big]. \tag{4.4.10}$$

On en déduit un morphisme de $\mathscr{O}_{M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q}]}$-modules

$$(\Phi_{\mathscr{C},-}^{-1})^* : p_2^*\Omega_{n-1,-} \longrightarrow p_1^*\Omega_{n,-}.$$

On a besoin de « normaliser » le morphisme $\Phi_{\mathscr{C},+}$ pour obtenir un résultat analogue. Notons

$$\mathscr{H} := \mathscr{C}_\wp^{-,1}.$$

On déduit de $\phi_{\mathscr{C}}$ une isogénie $\phi_{\mathscr{H}} : \mathscr{G}\to\mathscr{G}/\mathscr{H}$. Soit $\psi : \mathscr{G}/\mathscr{H}\to\mathscr{G}$ l'unique isogénie $\mathscr{O}_\wp$-linéaire telle que $\psi\circ\phi_{\mathscr{H}} = [\varpi]$. En prenant les duaux de Cartier, on obtient une isogénie $\psi^\vee : \mathscr{G}^\vee\to(\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee$ d'où on déduit un isomorphisme $\mathscr{O}_\wp$-linéaire de faisceaux cohérents sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q}]$:

$$(\psi^\vee)^* : \underline{\omega}_{(\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{G}^\vee},$$

et donc un isomorphisme

$$(\psi^\vee)^*_\tau : \underline{\omega}_{(\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee,\tau} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{G}^\vee,\tau}.$$

Comme on a des isomorphismes canoniques $\underline{\omega}_{\mathscr{G}^\vee,\tau}\xrightarrow{\sim}\underline{\omega}_{\mathscr{A},+}$ et $\underline{\omega}_{(\mathscr{G}/\mathscr{H})^\vee,\tau}\xrightarrow{\sim}\underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},+}$, on obtient un isomorphisme de faisceaux cohérents sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q}]$

$$(\psi^\vee)^*_\tau : \underline{\omega}_{\mathscr{A}/\mathscr{C},+} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{\mathscr{A},+}$$

d'où on déduit un isomorphisme d'espaces analytiques rigides :

$$\Psi : (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq\frac{r}{q}},p_2} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big] \xrightarrow{\sim} (\mathscr{T}_+^\times)^{\mathrm{an}} \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r},p_1} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0,\tfrac{r}{q}\big].$$

Comme $(\psi^\vee)^*\circ(\phi_{\mathscr{H}}^\vee)^* = [\varpi]^*$ et $(\phi_{\mathscr{H}}^\vee)^*_\tau = (\phi_{\mathscr{C}}^*)_+^{-1}$, on a

$$\Psi = [\varpi]\circ\Phi_{\mathscr{C},+}. \tag{4.4.11}$$

De la même façon que dans [**63**, prop. 4.3], on a :

Proposition 4.4.29. — *Soient $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $r \in \mathbb{Q} \cap [0, (q-1)/q^n[$, l'isomorphisme Ψ^{-1} induit un morphisme d'espaces analytiques rigides sur $M_K(\wp)_{\tau,E}[0, r/q]$ équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:*

$$\Psi^{-1} : F_{n,+}^\times \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, p_1} M_K(\wp)_{\tau,E}[0, \tfrac{r}{q}] \to F_{n-1,+}^\times \times_{(M_K)_{\tau,E}^{\leq \frac{r}{q}}, p_2} M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0, \tfrac{r}{q}\big]. \tag{4.4.12}$$

On en déduit un morphisme de $\mathscr{O}_{M_K(\wp)_{\tau,E}[0,\frac{r}{q}]}$-modules :

$$(\Psi^{-1})^* : p_2^*\Omega_{n-1,+} \longrightarrow p_1^*\Omega_{n,+},$$

et on obtient alors un opérateur noté $\widetilde{X}'_{u,\wp}$ par la composée :

$$\begin{aligned}
&H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq \frac{r}{q}}, \Omega_{n-1,-} \otimes \Omega_{n-1,+} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big) \\
&\quad \xrightarrow{p_2^*} H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0, \tfrac{r}{q}], p_2^*\big(\Omega_{n-1,-} \otimes \Omega_{n-1,+} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big)\big) \\
&\quad \xrightarrow{(\Phi_{\mathscr{C},-}^{-1})^* \otimes (\Psi^{-1})^* \otimes \phi_{\mathscr{C}}^*} H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}[0, \tfrac{r}{q}], p_1^*\big(\Omega_{n,-} \otimes \Omega_{n,+} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big)\big) \\
&\quad \xrightarrow{\mathrm{tr}_{p_1}} H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \Omega_{n,-} \otimes \Omega_{n,+} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})\big).
\end{aligned}$$

Cet opérateur est équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times \times \mathscr{O}_\wp^\times$. Soient $w > 0$ tel que

$$a(w) < n - 1 - \frac{q^{n-1}}{q-1} r$$

et $\chi_+, \chi_- \in \mathscr{W}_\tau(w)$, en prenant la restriction de $\widetilde{X}'_{u,\wp}$ au sous-faisceau de

$$\Omega_{n-1,+} \otimes \Omega_{n-1,-} \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$

homogène de poids $\chi_+^{-1} \otimes \chi_-^{-1}$, on obtient un opérateur continu encore noté $\widetilde{X}'_{u,\wp}$:

$$\begin{aligned}
&H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq \frac{r}{q}}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\
&\qquad\qquad \longrightarrow H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big).
\end{aligned}$$

En prenant la composition de ce dernier avec la restriction canonique (compacte)

$$\begin{aligned}
&H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\
&\qquad\qquad \hookrightarrow H^0\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq \frac{r}{q}}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big),
\end{aligned}$$

on obtient alors un opérateur compact encore noté $\widetilde{X}'_{u,\wp}$

$$\widetilde{X}'_{u,\wp} : H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big) \longrightarrow H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big).$$

Signalons que l'opérateur $\widetilde{X}'_{u,\wp}$ *dépend du choix de* ϖ. Lorsque $\chi_+ = \tau^{k_+}$ et $\chi_- = \tau^{k_-}$ avec $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$, par la remarque 4.4.23 et (4.4.11), on a :

Proposition 4.4.30. — *On a $\widetilde{X}'_{u,\wp} = \tau(\varpi^{k_+})X'_{u,\wp}$ sur le E-espace vectoriel*

$$H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big).$$

Cette proposition implique que l'opérateur $X'_{u,\wp}$ (ainsi que $U_\wp$) ne peut pas se prolonger naturellement sur l'espace des formes modulaires de poids non entiers sauf lorsque $\chi_+ = \tau^{k_+}$ avec $k_+ \in \mathbb{Z}$. Notons

$$\widetilde{S}_\wp := \chi^{-1}_{u,p^{d_0}}\widetilde{Y}_{u,\wp} \quad \text{et} \quad \widetilde{U}_\wp := \chi^{-1}_{u,p^{d_0}}\widetilde{X}'_{u,\wp}.$$

Sur l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids $(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ sur (τ, E), on a alors $\widetilde{S}_\wp = \tau(\varpi)^{k_+-k_-}S_\wp$ et $\widetilde{U}_\wp = \tau(\varpi)^{k_+}U_\wp$.

4.4.4. Surfaces de Hecke. — Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $r \in]0, (q-1)/q^n[\cap\mathbb{Q}$, et w_+, $w_- \in \mathbb{Q}$ tels que $a(w_\pm) < n - 1 - (q^{n-1})/(q-1)r$ (*cf.* lemme 4.4.6), et B_r, $R_\pm$ des E-algèbres affinoïdes telles que $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E} \cong \operatorname{Spm} B_r$ et $\mathscr{W}_\tau(w_\pm) \cong \operatorname{Spm} R_\pm$. Notons

$$R := R_+ \widehat{\otimes}_E R_-$$

(donc $\mathscr{W}_\tau(w_+) \times \mathscr{W}_\tau(w_-) \cong \operatorname{Spm} R$), et le caractère universel

$$(\chi_{\mathrm{univ},+}, \chi_{\mathrm{univ},-}) : \mathscr{O}^\times_\wp \times \mathscr{O}^\times_\wp \longrightarrow R^\times.$$

Considérons le morphisme d'espaces analytiques rigides

$$u_- \times \mathrm{id} : F^\times_{n,-} \times \mathscr{W}_\tau(w_-) \to (M_K)^{\leq r}_{\tau,E} \times \mathscr{W}_\tau(w_-)$$

(resp. $u_+ \times \mathrm{id} : F^\times_{n,+} \times \mathscr{W}_\tau(w_+) \to (M_K)^{\leq r}_{\tau,E} \times \mathscr{W}_\tau(w_+)$), et notons $\mho_-$ (reps. $\mho_+$) le sous-faisceau des sections $\chi^{-1}_{\mathrm{univ},-}$-homogènes (resp. $\chi^{-1}_{\mathrm{univ},+}$-homogènes) de

$$(u_- \times \mathrm{id})_*\mathscr{O}_{F^\times_{n,-}\times\mathscr{W}_\tau(w_-)} \quad \big(\text{resp. } (u_+ \times \mathrm{id})_*\mathscr{O}_{F^\times_{n,+}\times\mathscr{W}_\tau(w_+)}\big).$$

C'est un faisceau de $\mathscr{O}_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}\times\mathscr{W}_\tau(w_-)}$-modules (resp. de $\mathscr{O}_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}\times\mathscr{W}_\tau(w_+)}$-modules) localement libre de rang 1.

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$ et notons

$$\mathscr{S}^{(\chi_{\mathrm{univ},+},\chi_{\mathrm{univ},-};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E} := \mho_+ \otimes \mho_- \otimes \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/(M_K)_{\tau,E}})$$

où les produits tensoriels sont sur $\mathscr{O}_{(M_K)^{\leq r}_{\tau,E}}$. Notons

$$N_r := H^0\Big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E} \times_E \mathscr{W}_\tau(w_+) \times_E \mathscr{W}_\tau(w_-), \mathscr{S}^{(\chi_{\mathrm{univ},+},\chi_{\mathrm{univ},-};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\Big),$$

qui est un $R\widehat{\otimes}_E B_r$-module de Banach (*cf.* [**11**, prop. 3.7.3/3]), et donc un R-module de Banach. Comme $(M_K)^{\leq r}_{\tau,E} \times_E \mathscr{W}_\tau(w_+) \times_E \mathscr{W}_\tau(w_-)$ est un affinoïde, on voit de plus que

$$\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\chi_{\mathrm{univ},+},\chi_{\mathrm{univ},-};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

est le faisceau cohérent associé au $R\widehat{\otimes}_E B_r$-module N_r.

Définition 4.4.31 (*cf.* [**19**, §3])

(1) Soient B une E-algèbre de Banach et M un B-module de Banach. On dit que M est *orthonormalisable* s'il existe un ensemble I et une collection d'éléments $(e_i \in M)_{i\in I}$ tels que tout élément $\alpha \in M$ s'écrive uniquement $\alpha = \sum_{i\in I} c_i e_i$ avec $c_i \in B$ pour tout $i \in I$ vérifiant que $\lim_{i\to+\infty} c_i = 0$ (*i.e.* $\{i \in I\ ;\ \|c_i\|_B \geq \epsilon\}$ est un ensemble fini pour tout $\epsilon > 0$) et tels que $\|\alpha\|_M = \sup_{i\in I}\{\|c_i\|_B\}$.

(2) On dit que M est *potentiellement orthonormalisable* s'il existe une norme $\|.\|'$ sur M équivalente à $\|.\|_M$, telle que $(M, \|.\|')$ soit orthonormalisable.

(3) On dit que M *satisfait* (Pr) s'il est un facteur direct d'un B-module M' potentiellement orthonormalisable.

De la même façon que dans [**63**, cor. 5.1], on a

Proposition 4.4.32. — *Le R-module de Banach N_r vérifie* (Pr).

Comme au §4.4.3, on peut munir N_r d'une action continue des opérateurs de Hecke (hors de $\wp$ et $\widetilde{Y}_{u,\wp}$, $\widetilde{X}'_{u,\wp}$), l'opérateur $\widetilde{Y}_{u,\wp}$ étant un isomorphisme et l'opérateur $\widetilde{X}'_{u,\wp}$ (qui se factorise à travers la restriction $N_r \to N_{\frac{r}{q}}$) étant compact. Notons $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K))$ la $\mathscr{O}_E$-algèbre engendrée par $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et les opérateurs $\widetilde{Y}_{u,\wp}$ et $\widetilde{X}'_{u,\wp}$, qui est aussi engendrée par $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et les opérateurs $\widetilde{U}_\wp$ et $\widetilde{S}_\wp$.

En appliquant le formalisme de [**19**] (voir aussi [**22**, §6]), on peut construire *une surface de Hecke* :

Proposition 4.4.33. — *Il existe un espace rigide $\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),r}$ sur E, muni d'un morphisme de E-algèbres*

$$\psi : \widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big) \longrightarrow \mathscr{O}\Big(\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),r}\Big)$$

et d'un morphisme d'espaces analytiques rigides sur E

$$\varkappa_r : \mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),r} \longrightarrow \mathscr{W}_\tau(w_+) \times \mathscr{W}_\tau(w_-),$$

tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) *Le morphisme suivant d'espaces analytiques rigides est fini :*

$$\big(\varkappa_r, \psi(\widetilde{X}'_{u,\wp})\big) : \mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),r} \longrightarrow \mathscr{W}_\tau(w_+) \times \mathscr{W}_\tau(w_-) \times \mathbb{G}_m.$$

(2) *Pour tout ouvert affinoïde U de $\mathscr{W}_\tau(w_+)\times\mathscr{W}_\tau(w_-)\times\mathbb{G}_m$, le morphisme induit*

$$\widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{O}(U)\longrightarrow\mathscr{O}\big(\varkappa_r^{-1}(U)\big)$$

est surjectif.

(3) *Soient L une extension finie de E, $\chi_+\in\mathscr{W}_\tau(w_+)(L)$, $\chi_-\in\mathscr{W}_\tau(w_-)(L)$ et*

$$\gamma:\widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big)\longrightarrow L$$

un morphisme de E-algèbres tel que $\widetilde{a}_\wp:=\gamma(\widetilde{X}'_{u,\wp})\in L^\times$, alors il existe un L-point z de $\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),r}$ vérifiant que $\varkappa_r(z)=(\chi_+,\chi_-)$ et que le morphisme associé (via ψ) $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K))\to L$ est égal à γ si et seulement s'il existe un forme modulaire surconvergente de poids $(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ de niveau K sur (τ,L) propre sous l'action des opérateurs T dans $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K))$ de valeur propre $\gamma(T)$.

Lorsqu'on fait tendre r vers 0, on peut faire tendre w_+,w_- vers 0. À w_+,w_- fixés, les surfaces de Hecke $\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),r}\to\mathscr{W}_\tau(w_+)\times\mathscr{W}_\tau(w_-)$ sont en fait indépendantes du choix du rayon de surconvergence r suffisamment petit, ce qui suit du fait que la série caractéristique de $\widetilde{X}'_{u,\wp}$ est indépendante de r (voir [**48**, prop. 12.6] et la discussion à la fin de [**19**, part 1]).

On peut donc recoller pour obtenir la surface de Hecke totale :

Théorème 4.4.34 (Surface de Hecke). — *Il existe un espace rigide*

$$\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

sur E muni d'un morphisme de E-algèbres

$$\psi:\widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big)\longrightarrow\mathscr{O}\Big(\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\Big)$$

et d'un morphisme d'espaces analytiques rigides sur E

$$\varkappa:\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\longrightarrow\mathscr{W}_\tau\times\mathscr{W}_\tau$$

tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

(1) *Le morphisme d'espaces analytiques rigides est fini :*

$$\big(\varkappa,\psi(\widetilde{X}'_{u,\wp})\big):\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\longrightarrow\mathscr{W}_\tau\times\mathscr{W}_\tau\times\mathbb{G}_m.$$

(2) *Pour tout ouvert affinoïde U de $\mathscr{W}_\tau\times\mathscr{W}_\tau\times\mathbb{G}_m$ le morphisme induit*

$$\widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{O}(U)\longrightarrow\mathscr{O}\big(\varkappa^{-1}(U)\big)$$

est surjectif.

(3) *Soient L une extension finie de E, $\chi_+\in\mathscr{W}_\tau(L)$, $\chi_-\in\mathscr{W}_\tau(L)$ et*

$$\gamma:\widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big)\longrightarrow L$$

un morphisme de E-algèbres tel que $\widetilde{a}_{\wp} := \gamma(\widetilde{X}'_{u,\wp}) \in L^\times$, alors il existe un L-point z de $\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ vérifiant que $\varkappa(z) = (\chi_+, \chi_-)$ et que le morphisme associé $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K)) \to L$ est égal à γ si et seulement s'il existe un forme modulaire surconvergente sur (τ, L) de niveau K et de poids $(\chi_+, \chi_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ propre sous l'action des opérateurs T dans $\widetilde{\mathscr{H}}(S(K))$ de valeur propre $\gamma(T)$.

Remarque 4.4.35. — Un point fermé de $\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ est uniquement déterminé (*cf.* [**5**, lemme 7.2.7]) par son image (χ_+, χ_-) dans $\mathscr{W}_\tau \times \mathscr{W}_\tau$ et le système de valeurs propres associé
$$\gamma : \widetilde{\mathscr{H}}\big(S(K)\big) \longrightarrow \overline{E}.$$
Un tel point sera noté $(\chi_+, \chi_-, \widetilde{a}_{\wp}, \widetilde{b}_{\wp}, \gamma|_{\mathscr{H}^*(S(K^{\wp}))})$ où $\widetilde{a}_{\wp} := \gamma(\widetilde{U}_{\wp})$, $\widetilde{b}_{\wp} := \gamma(\widetilde{S}_{\wp})$ sont à valeurs dans $\overline{E}^\times$.En effet, on peut vérifier facilement que l'opérateur $\chi_{u,p^{d_0}}$ agit sur N_r par un isomorphisme pour tout r et on peut alors récrire ce théorème en remplaçant $\widetilde{X}'_{u,\wp}$ et $\widetilde{U}_{\wp}$.

Comme $\mathscr{W}_\tau$ est équidimensionnel de dimension 1 (*cf.* [**68**, §2], voir aussi la proposition 6.1.13 ci-dessous), par [**22**, prop. 6.4.2], on a :

Proposition 4.4.36. — *L'espace analytique rigide $\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ est équidimensionnel de dimension 2.*

Rappelons qu'un espace rigide X (sur $\operatorname{Spec} E$) est dit *emboîté* (« nested » dans la terminologie de [**23**]) si X admet un recouvrement admissible $\{U_i\}$ des ouverts affinoïdes tel que $U_i \subseteq U_{i+1}$ et que le morphisme naturel $\mathscr{O}(U_{i+1}) \to \mathscr{O}(U_i)$ soit compact. On munit $\mathscr{O}(X)$ de la topologie la plus faible qui rende continue l'application $\mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(U)$ pour tout ouvert affinoïde U de X. On note

$$\mathscr{O}(X)^0 := \big\{f \in \mathscr{O}(X)\ ;\ \upsilon_{\wp}(f(x)) \geq 0 \text{ pour tout } x \in X\big\}. \tag{4.4.13}$$

Comme $\mathscr{W}_{1,\tau} \times \mathscr{W}_{1,\tau} \times \mathbb{G}_m$ est emboîté, par [**5**, lemme 7.2.11], on a :

Proposition 4.4.37. — *L'espace rigide $\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ est emboîté, et l'ensemble $\mathscr{O}(\mathscr{S}(K)_{\tau,\mathrm{red}}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})^0$ est un sous-ensemble compact de $\mathscr{O}(\mathscr{S}(K)_{\tau,\mathrm{red}}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})$ où* « red » *signifie le sous-espace réduit.*

Soit L une extension finie de E, on dit qu'un point
$$z = (\chi_+, \chi_-, \widetilde{a}_{\wp}, \widetilde{b}_{\wp}, \gamma)$$
(*cf.* la remarque 4.4.35) de $\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ est *classique* s'il existe $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$ (tels que $\chi_\pm = \tau^{k_\pm}$), $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et une forme modulaire classique de poids
$$\big(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}\big)$$

sur $M_K(\wp^n)_{\tau,L}$, propre sous l'action de $\widetilde{X}'_{u,\wp}(=\tau(\varpi)^{k_+}X'_{u,\wp})$, $\widetilde{Y}_{u,\wp}(=\tau(\varpi)^{k_+-k_-}Y_{u,\wp})$ et $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$, de valeurs propres respectives $\widetilde{a}_\wp$, $\widetilde{b}_\wp$ et $\gamma(T)$ pour $T\in\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$. On peut récrire le théorème de classicité (théorème 4.3.1) à l'aide de $\widetilde{X}'_{u,\wp}$:

Corollaire 4.4.38. — *Soit f une forme modulaire surconvergente sur (τ,L) de poids*

$$\big(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}\big)$$

($k_+,k_-\in\mathbb{Z}$) de niveau K, vecteur propre sous l'action de $\widetilde{X}'_{u,\wp}$ de valeur propre $\widetilde{a}_\wp\in E^\times$, si

$$\upsilon_\wp(\widetilde{a}_\wp)<k_++k_-+\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}k_{2,\sigma},$$

alors f est une forme modulaire classique sur $M_K(\wp)_{\tau,E}$.

De la même façon que dans [**22**, prop. 6.4.6] (voir aussi la proposition 6.2.7 de *loc. cit.*), on peut déduire du corollaire 4.4.38 la proposition suivante.

Proposition 4.4.39. — *L'ensemble des points classiques est Zariski-dense dans l'espace rigide $\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$.*

CHAPITRE 5

FORMES COMPAGNONS SURCONVERGENTES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES

On étudie la cohomologie rigide des courbes de Shimura unitaires au §5.1. On rappelle au §5.2 ce dont on a besoin sur les représentations automorphes (classiques) de G. Au §5.3, on démontre de la même façon que chez Breuil-Emerton [**17**, th. 4.3.3]) l'existence des formes compagnons surconvergentes sur les courbes de Shimura unitaires.

5.1. Cohomologie rigide des courbes de Shimura unitaires

On étudie la cohomologie rigide des courbes de Shimura unitaires, qui est naturellement liée à formes modulaires surconvergentes sur les courbes de Shimura unitaires.

Soient K un sous-groupe ouvert compact et net de $G(\mathbb{A}^\infty)$ maximal en $\wp$ (*cf.* exemple 3.1.3), et $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{M_K}$-module localement libre de rang fini. Notons encore $\mathscr{L}$ son analytifié sur M_K^{an}. Étant donné un complexe de $\mathscr{O}_{M_K}$-modules :

$$\nabla_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_{M_K}} \Omega^1_{M_K/F_\wp},$$

notons encore $\nabla_{\mathscr{L}}$ son analytifié sur M_K^{an}. Posons pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (voir §4.1.1 pour $M_K^{\leq r}$)

$$H^i_{\mathrm{rig}}(M_K{}^{\mathrm{ord}}, \nabla_{\mathscr{L}}) := \varinjlim_{r \to 0^+} \mathbb{H}^i(M_K{}^{\leq r}, \nabla_{\mathscr{L}}).$$

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$. Considérons la connexion de Gauss-Manin pour $\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ (*cf.* §3.3.2) sur M_K

$$\nabla : \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \longrightarrow \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \otimes_{\mathscr{O}_{M_K}} \Omega^1_{M_K/\operatorname{Spec} F_\wp}.$$

Lemme 5.1.1. — *Reprenons les notations ci-dessus.*

(1) *On a une bijection naturelle*

$$\mathbb{H}^i(M_K, \nabla) \longrightarrow \mathbb{H}^i(M_K^{\mathrm{an}}, \nabla).$$

(2) *Pour tout* $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, *l'application suivante de restriction est injective :*

$$\mathbb{H}^1(M_K^{\mathrm{an}}, \nabla) \longrightarrow \mathbb{H}^1(M_K{}^{\leq r}, \nabla). \tag{5.1.1}$$

Démonstration. — La partie (1) est bien connue (*e.g.* voir [**2**, th. 2]).

(2) Choisissons un relevé Z de $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ss}}$ (*cf.* §4.1.1) dans M_K^{an} via l'application sp (*cf. loc. cit.*), qui est donc une union finie de points de M_K^{an}. Notons

$$\widetilde{\nabla} : \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \longrightarrow \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})} \otimes \Omega^1_{M_K^{\mathrm{an}}/F_\wp}\big(\log(Z)\big)$$

le complexe de $\mathscr{O}_{M_K^{\mathrm{an}}}$-modules induit par ∇. On a donc une suite exacte de complexes sur M_K^{an}

$$0 \longrightarrow \nabla \longrightarrow \widetilde{\nabla} \longrightarrow \bigoplus_{x \in Z} \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}{}_{|x}[-1] \to 0,$$

où $\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}|_x := x_* x^* \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}$. On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}^1(M_K^{\mathrm{an}}, \nabla) \longrightarrow \mathbb{H}^1(M_K^{\mathrm{an}}, \widetilde{\nabla}),$$

car $\mathbb{H}^0(M_K^{\mathrm{an}}, \bigoplus_{x \in Z} \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}{}_{|x}[-1])$ est nul. Il résulte de [**3**, cor. 2.5] qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{H}^1(M_K^{\mathrm{an}}, \widetilde{\nabla}) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{rig}}\big((M_K)^{\mathrm{ord}}, \nabla\big).$$

On obtient alors une injection

$$\mathbb{H}^1(M_K^{\mathrm{an}}, \nabla) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}\big((M_K)^{\mathrm{ord}}, \nabla\big) \tag{5.1.2}$$

qui se factorise en fait à travers (5.1.1), d'où on déduit que l'application en (5.1.1) est aussi injective. $\square$

Par l'isomorphisme de complexes $\nabla \cong \prod_{\tau \in \Sigma_p} \nabla_\tau$ (*cf.* proposition 3.3.8), on a

Lemme 5.1.2. — *Pour tout* $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, *on a un isomorphisme naturel de* E*-espaces vectoriels*

$$\mathbb{H}^i(M_K^{\leq r}, \nabla) \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau \in \Sigma_\wp} \mathbb{H}^i\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big). \tag{5.1.3}$$

Par le lemme 5.1.1, on a alors :

Lemme 5.1.3. — *Pour tout* $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, *l'application de restriction*

$$\mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \longrightarrow \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big)$$

est injective.

Lemme 5.1.4. — *Pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, il y a un isomorphisme de E-espaces vectoriels (voir* § 3.3.1.4 *pour* $\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}$*)*

(5.1.4)

$$\mathbb{H}^1\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \xrightarrow{\sim} \frac{H^0((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})}{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}(H^0((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}))}.$$

Démonstration. — On déduit du quasi-isomorphisme (3.3.10) un isomorphisme de E-espaces vectoriels

$$\mathbb{H}^i\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^i\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \big[\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \xrightarrow{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}} \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big]\big),$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, d'où le lemme car l'espace analytique rigide $(M_K)^{\le r}_{\tau,E}$ est un affinoïde (*cf.* [**48**, § 9.2]) donc quasi-Stein pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. ∎

Pour tout $r \in [0, q/(q+1)[$, le morphisme de E-espaces vectoriels

$$\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1} : H^0\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \longrightarrow H^0\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)$$

est en fait équivariant sous l'action de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$, $Y_{u,\wp}$, $\chi_{u,p}$ et de $X'_{u,\wp}$ (par définitions (*cf.* § 4.2.2) et le lemme 3.3.7). De façon analogue à (3.3.22), on peut définir, à partir des diagrammes commutatifs (4.1.10) et (4.1.12), une action naturelle de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et de $Y_{u,\wp}$ sur $\mathbb{H}^1((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \nabla_\tau)$. De plus, l'isomorphisme (5.1.4) est équivariant sous cette action.

On considère les opérateurs $X'_{u,\wp}$ et $\Phi_{u,\wp}$. Soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0, q/(q+1)[$, à partir du diagramme commutatif (4.1.14), on obtient un opérateur (voir [**24**, § 2] pour le cas des courbes modulaires) encore noté $X'_{u,\wp}$ par la composée (avec les notations de (4.1.14))

$$\begin{aligned} X'_{u,\wp} : \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\le \frac{r}{q}}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) &\xrightarrow{p_2^*} \mathbb{H}^1\big(M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0, \tfrac{r}{q}\big], p_2^*\nabla_\tau\big) \\ &\xrightarrow{\phi^*_{\mathscr{C}}} \mathbb{H}^1\big(M_K(\wp)_{\tau,E}\big[0, \tfrac{r}{q}\big], p_1^*\nabla_\tau\big) \xrightarrow{\mathrm{tr}_{p_1}} \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big). \end{aligned}$$

On voit que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\le \frac{r}{q}}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \dfrac{H^0\big((M_K)^{\le \frac{r}{q}}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)}{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}\big(H^0\big((M_K)^{\le \frac{r}{q}}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\big)} \\ {\scriptstyle X'_{u,\wp}}\big\downarrow & & {\scriptstyle X'_{u,\wp}}\big\downarrow \\ \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \dfrac{H^0\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)}{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}\big(H^0\big((M_K)^{\le r}_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\big)} \end{array}.$$

On obtient de même, à partir du diagramme (4.1.17), un opérateur encore noté $\Phi_{u,\wp}$ par la composée (avec les notations de *loc. cit.*)

$$\Phi_{u,\wp} : \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\leq qr}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \xrightarrow{p_2^*} \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, p_2^*\nabla_\tau\big) \xrightarrow{\phi^*_{\mathscr{C}}} \mathbb{H}^1\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big), \tag{5.1.5}$$

pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$. Et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H}^1\big((M_K)^{\leq qr}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) & \xrightarrow{\sim} & \dfrac{H^0\big((M_K)^{\leq qr}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(\underline{k_1}\Sigma_p, \underline{k_2}\Sigma_p)}_{\tau,E}\big)}{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}\Big(H^0\big((M_K)^{\leq qr}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}\Sigma_p\setminus\{\tau\}, \underline{k_2}\Sigma_p\setminus\{\tau\})}_{\tau,E}\big)\Big)} \\
{\scriptstyle \Phi_{u,\wp}}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \Phi_{u,\wp}}\Big\downarrow \\
\mathbb{H}^1\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) & \xrightarrow{\sim} & \dfrac{H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(\underline{k_1}\Sigma_p, \underline{k_2}\Sigma_p)}_{\tau,E}\big)}{\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}\Big(H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E}, \mathscr{S}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}\Sigma_p\setminus\{\tau\}, \underline{k_2}\Sigma_p\setminus\{\tau\})}_{\tau,E}\big)\Big)}.
\end{array}$$

Rappelons que M_K admet un $\mathscr{O}_\wp$-modèle lisse et propre $\mathbb{M}_K$ (puisque K est maximal en $\wp$, *cf.* §4.1.1). Notons :

- ▹ $\varepsilon : \mathbb{A} \to \mathbb{M}_K$ le schéma abélien universel,
- ▹ $\overline{\mathbb{A}} := \mathbb{A} \times_{\operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$,
- ▹ $\overline{\mathbb{M}}_K := \mathbb{M}_K \times_{\operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp} \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$,
- ▹ $\overline{\varepsilon} : \overline{\mathbb{A}} \to \overline{\mathbb{M}}_K$.

D'après Faltings [**38**], on dispose d'un F-isocristal convergent noté $\eta^{(\underline{k_1}\Sigma_p, \underline{k_2}\Sigma_p)}(\mathscr{E}_E)$ sur $\overline{\mathbb{M}}_K/W(\mathbb{F}_q)$ (où $W(\mathbb{F}_q)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt sur $\mathbb{F}_q$) associé au faisceau localement constant $\eta^{(\underline{k_1}\Sigma_p, \underline{k_2}\Sigma_p)}(R^1\varepsilon_* E)$ (*cf.* (3.2.6)) sur $\mathbb{M}_K \times_{\operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp} \overline{F_\wp}$ et on a un isomorphisme équivariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ et de φ (le Frobenius cristallin) (*cf.* [**38**, th. 5.6])

$$H^1_{\mathrm{cris}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/W(\mathbb{F}_q), \eta^{(\underline{k_1}\Sigma_p, \underline{k_2}\Sigma_p)}(\mathscr{E}_E)\big) \otimes_{F_{\wp,0}} B_{\mathrm{cris}} \cong V_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}} \tag{5.1.6}$$

(voir (3.3.11) pour $V_\wp$, et on renvoie à [**38**, §4(e)] pour la définition de la cohomologie cristalline des isocristaux convergents). En particulier, la représentation $V_\wp$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ est cristalline au sens de Fontaine. En effet, le F-isocristal convergent sur $\overline{\mathbb{M}}_K/W(\mathbb{F}_q)$ associé au faisceau $R^1\varepsilon_* E$ sur $\mathbb{M}_K \times_{\operatorname{Spec} \mathscr{O}_\wp} \overline{F_\wp}$ est donné par

$$\mathscr{E}_E := R^1\varepsilon_{*,\mathrm{cris}}(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{A}}/F_{\wp,0}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$$

(*cf.* [**38**, th. 6.3]) où $\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{A}}/F_{\wp,0}}$ désigne le F-isocristal convergent trivial sur $\overline{\mathbb{A}}/W(\mathbb{F}_q)$. Donc le F-isocristal convergent $\eta^{(\underline{k_1}\Sigma_p, \underline{k_2}\Sigma_p)}(\mathscr{E}_E)$ peut être construit à partir de $\mathscr{E}_E$ en utilisant les idempotents dans $\mathscr{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ de façon analogue à $\eta^{(\underline{k_1}\Sigma_p, \underline{k_2}\Sigma_p)}(R^1\varepsilon_* E)$ (*cf.* (3.2.6), voir [**38**, lemme 5.5]).

Comme l'évaluation de $\mathscr{E}_E$ sur $\mathfrak{M}_K$ (le complété de $\mathbb{M}_K$ le long de sa fibre spéciale) est le $\mathscr{O}_{\mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}}}$-module $R^1\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ (on a bien $M_K^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}}$)

avec la connexion de Gauss-Manin (*cf.* [**61**, lemme 3.3]), on voit que l'évaluation de $\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(\mathscr{E}_E)$ sur $\mathfrak{M}_K$ n'est autre que le $\mathscr{O}_{\mathfrak{M}_K^{\mathrm{rig}}}$-module $\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ avec la connexion de Gauss-Manin ∇, qui est appelé un *isocristal convergent* sur $\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp$ dans [**8**, déf. 2.3.2]. On a un isomorphisme naturel de $F_\wp$-espaces vectoriels (*e.g.* voir [**80**, th. 5.2.1])

$$(5.1.7)\quad H^1_{\mathrm{cris}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/W(\mathbb{F}_q),\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(\mathscr{E}_E)\big)\otimes_{F_{\wp,0}}F_\wp \cong H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp,\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\ \big(\cong\mathbb{H}^1(M_K,\nabla)\big).$$

Soient $a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sigma: F_\wp\xrightarrow{\sim}F_\wp$ un relevé de $\sigma_0^a: F_{\wp,0}\xrightarrow{\sim}F_{\wp,0}$ où σ_0 est le relevé canonique du Frobenius $\mathbb{F}_q\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}_q$, $x\mapsto x^p$. L'isocristal $\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ est en fait un F-isocristal convergent sur $\overline{\mathbb{M}}_K/(F_\wp,\sigma)$ (*cf.* [**61**, th. 5.7]), et l'isomorphisme en (5.1.7) est équivariant sous l'action de F_σ où l'action de F_σ sur le premier terme de (5.1.7) est donnée par $\varphi^a\otimes_{\sigma_0^a}\sigma$, et l'action de F_σ sur $H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp,\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ est donnée par la composée (*cf.* [**8**, (2.3.7)])

$$(5.1.8)\quad H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp,\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\longrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K^{\sigma_0^a}/F_\wp,\sigma^*\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \xrightarrow{(\mathrm{Fr}^a)^*} H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp,F_\sigma^*\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\cong H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp,\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)$$

(où on renvoie à *loc. cit.* pour la définition du morphisme F_σ^* d'isocristaux sur $\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp$) via le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{M}}_K \arrow[r, "\mathrm{Fr}^a"] \arrow[dr] & \overline{\mathbb{M}}_K^{\sigma_0^a} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathbb{M}}_K \arrow[d] \\
& \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q \arrow[r, "\sigma_0^a"] & \operatorname{Spec}\mathbb{F}_q
\end{tikzcd}$$

où la composition des applications en haut est le morphisme $\overline{\mathbb{M}}_K\to\overline{\mathbb{M}}_K$, $x\mapsto x^{p^a}$ et où

$$\overline{\mathbb{M}}_K^{\sigma_0^a}:=\overline{\mathbb{M}}_K\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q,\sigma_0^a}\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q.$$

En particulier, lorsque $a=d_0$ et $\sigma=\mathrm{id}$, on dispose d'une action E-linéaire de $\varphi^{d_0}:=F_\sigma$ sur $H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp,\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ telle que l'isomorphisme (5.1.7) soit équivariant sous l'action de φ^{d_0} (noter que l'action de φ^{d_0} sur le premier terme de (5.1.7) est donnée par $\varphi^{d_0}\otimes\mathrm{id}$).

Notons $\Sigma_{\wp,0}:=\{\sigma:F_{\wp,0}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p\}$. De l'isomorphisme

$$F_{\wp,0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E\xrightarrow{\sim}\prod_{\sigma\in\Sigma_{\wp,0}}E,\quad a\otimes b\longmapsto\big(\sigma(a)b\big)_{\sigma\in\Sigma_{\wp,0}},$$

on déduit que le $F_{\wp,0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$-module

$$D_{\mathrm{cris}}(V_\wp)\cong H^1_{\mathrm{cris}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/W(\mathbb{F}_q),\eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(\mathscr{E}_E)\big)$$

admet une décomposition

$$D_{\mathrm{cris}}(V_\wp) \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_{\wp,0}} D_{\mathrm{cris}}(V_\wp)_\sigma$$

avec $D_{\mathrm{cris}}(V_\wp)_\sigma$ stable sous l'action de φ^{d_0}. De l'isomorphisme

$$F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} E, \quad a\otimes b \longmapsto \big(\sigma(a)b\big)_{\sigma\in\Sigma_\wp},$$

on déduit une décomposition

$$D_{\mathrm{cris}}(V_\wp)\otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} \big(D_{\mathrm{cris}}(V_\wp)\otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp\big)_\sigma$$

(resp. $H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp, \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp, \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})_\sigma$, *cf.* (5.1.7)). L'isomorphisme (5.1.7) induit donc un isomorphisme équivariant sous l'action de φ^{d_0} pour tout $\tau\in\Sigma_\wp$:

$$\big(D_{\mathrm{cris}}(V_\wp)\otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp\big)_\tau \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp, \mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)_\tau \quad \big(\cong \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau\big)\big).$$

Posons (*cf.* [**8**, §2.1])

$$j^\dagger\big(\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) := \varinjlim_{r\to 0^+} (j_r)_* j_r^*\big(\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big),$$

où j_r désigne le plongement $M_K^{\leq r} \hookrightarrow M_K^{\mathrm{an}}$, c'est en fait un F-isocristal surconvergent le long de $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ss}} = \overline{\mathbb{M}}_K - \overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}$ sur $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}/(F_\wp,\sigma)$ pour un relevé quelconque σ de σ_0^a et pour tout $a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. En effet, d'après [**7**, th. 5], on voit que $R^1\varepsilon_{*,\mathrm{rig}}(\overline{\mathbb{A}}^{\mathrm{ord}}/\mathfrak{M}_K)$ (*cf.* [**7**, rem. 2.5 (c)]) est un F-isocristal surconvergent le long de $\overline{\mathbb{M}}_K - \overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}$ sur $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}/(F_\wp,\sigma)$ où $\overline{\mathbb{A}}^{\mathrm{ord}}$ désigne le schéma abélien universel sur $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}$. On a un isomorphisme naturel (de $j^\dagger\mathscr{O}_{M_K^{\mathrm{an}}}$-modules à connexions)

$$j^\dagger(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K}) := \varinjlim_r (j_r)_* j_r^*(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K}) \cong R^1\varepsilon_{*,\mathrm{rig}}(\overline{\mathbb{A}}^{\mathrm{ord}}/\mathfrak{M}_K),$$

d'où on déduit que $j^\dagger(R^1\varepsilon_*\Omega^\bullet_{\mathscr{A}/M_K})$ est aussi surconvergent le long de $\overline{\mathbb{M}}_K - \overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}$. La surconvergence de $j^\dagger(\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ en découle.

On a un morphisme (de restriction) canonique équivariant sous l'action de F_σ (*cf.* (5.1.8)), avec σ un relevé quelconque de σ_0^a pour $a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ et en particulier, équivariant sous l'action de φ^{d_0}) (voir [**52**, (4.4.0.1)])

$$H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K/F_\wp, \mathscr{L}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \longrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}/F_\wp, j^\dagger\mathscr{L}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \tag{5.1.9}$$

qui est en fait injectif d'après [**80**, cor. 4.1.2]. Or, on a un isomorphisme canonique de E-espaces vectoriels (*e.g.* voir [**3**, (2.2)])

$$H^1_{\mathrm{rig}}\big(\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}/F_\wp, j^\dagger\mathscr{L}_E^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \cong \varinjlim_r \mathbb{H}^1(M_K^{\leq r},\nabla).$$

Le plongement (5.1.9) est en fait égal à (5.1.2). Notons :

- $\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}} \cong \operatorname{Spec} R_0$ (*e.g.* voir [**48**, §9.1]),
- $M_K^{\leq r} \cong \operatorname{Spm} R_r$,
- $R^\dagger := \varinjlim_r R_r$,
- $\Phi_{u,\wp} : R^\dagger \to R^\dagger$ le morphisme induit par $p_2 : R_r \to R_{qr}$ (*cf.* (4.1.16)) pour tout $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$.

Par la théorie du sous-groupe canonique (*cf.* proposition 4.1.10), le morphisme p_2 est un relevé de

$$\sigma_0^{d_0} : R_0 \longrightarrow R_0 \quad x \longmapsto x^q.$$

D'après [**8**, (2.5.6)], l'action de φ^{d_0} sur $H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathbb{M}}_K^{\mathrm{ord}}/F_\wp, j^\dagger \mathscr{L}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ est égale à l'opérateur (induit par (5.1.5))

$$\Phi_{u,\wp} : \varinjlim_r \mathbb{H}^1(M_K^{\leq r}, \nabla) \longrightarrow \varinjlim_r \mathbb{H}^1(M_K^{\leq r}, \nabla).$$

De tout ce qui précède, on a comme dans [**17**, lemme 4.3.1]

Proposition 5.1.5. — *Soit $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/(q+1)[$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{d_0}"'] & \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq qr}, \nabla_\tau\big) \arrow[d, "\Phi_{u,\wp}"] \\ \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big) \arrow[r] & \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}^{\leq r}, \nabla_\tau\big) \end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$ où les applications horizontales sont les morphismes (*injectifs*) *de restriction.*

5.2. Représentations automorphes et représentations galoisiennes

On rappelle ce dont on a besoin sur les représentations automorphes classiques de G (*cf.* [**21**], [**66**], [**46**]).

5.2.1. Représentations lisses de $G(\mathbb{Q}_\ell)$. — Soient $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$, $\lambda \mid \ell$ une place de $\mathscr{E}$ au-dessus de ℓ, qui correspond à un plongement $\mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell$. On en déduit un isomorphisme (*cf.* (3.2.6))

$$i_\lambda : G(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}).$$

De même, on déduit du plongement $\lambda^c : \mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ un isomorphisme

$$i_{\lambda^c} : G(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}).$$

Noter que l'application

$$i_{\lambda^c} \circ i_\lambda^{-1} : \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell^\times \times \prod_{\mathfrak{l} \mid \ell} \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}) \tag{5.2.1}$$

est donnée par $(a,g)\mapsto(a,(g^{-1})^*a)$ avec l'involution (F-linéaire) $*$ donnée par la composée (voir (2.1.4))

$$\prod_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})\xrightarrow{\sim}(D\otimes_{\mathscr{E},\lambda^c}\mathbb{Q}_\ell)^\times\xrightarrow{*}(D\otimes_{\mathscr{E},\lambda}\mathbb{Q}_\ell)^\times\xrightarrow{\sim}\prod_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}).$$

Soit π_ℓ une représentation lisse et irréductible de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ sur E, par l'isomorphisme i_λ (resp. i_{λ^c}), π_ℓ admet donc une décomposition

$$\pi_\ell\xrightarrow{\sim}\psi_\lambda\otimes\bigotimes_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}\quad\Big(\text{resp. }\pi_\ell\xrightarrow{\sim}\psi_{\lambda^c}\otimes\bigotimes_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}\pi_{\lambda^c,\mathfrak{l}}\Big)$$

où ψ_λ et ψ_{λ^c} sont des caractères de $\mathbb{Q}_\ell^\times$, $\pi_{\lambda^c,\mathfrak{l}}$ et $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}$ sont des représentations lisses et irréductibles de $\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})$ sur E. Notons

$$\pi_\lambda:=\otimes_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}\quad\text{et}\quad\pi_{\lambda^c}:=\otimes_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}\pi_{\lambda^c,\mathfrak{l}}.$$

On vérifie par (5.2.1) que $\pi_{\lambda^c,\mathfrak{l}}\cong\pi^*_{\lambda,\mathfrak{l}}$ où $\pi^*_{\lambda,\mathfrak{l}}(g):=\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}(g^{-*})$ pour tout $g\in\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})$, et que $\psi_{\lambda^c}\cong\psi_\lambda(\psi_{\pi_\lambda}|_{\mathbb{Q}_\ell^\times})$ où $\psi_{\pi_\lambda}:(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{E},\lambda^c}\mathbb{Q}_\ell)^\times\to E^\times$ désigne le caractère central de la représentation π_λ (de $(D\otimes_{\mathscr{E},\lambda^c}\mathbb{Q}_\ell)^\times$), et où on voit $\mathbb{Q}_\ell^\times$ comme sous-groupe de $(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{E},\lambda^c}\mathbb{Q}_\ell)^\times$ via le plongement $a\mapsto 1\otimes a$ pour tout $a\in\mathbb{Q}_\ell^\times$.

Soit K_ℓ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{Q}_\ell)$. On considère les deux cas suivants :

(1) Supposons que $K_\ell\cong\mathbb{Z}_\ell^\times\times\prod_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{F_{\mathfrak{l}}})$ via l'isomorphisme i_λ et que $\pi_\ell^{K_\ell}\neq 0$, ce dernier est donc de dimension 1 sur E (comme π_ℓ est irréductible) et est muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G(\mathbb{Q}_\ell)//K_\ell)$ des doubles classes de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ modulo K_ℓ qui est engendrée par les opérateurs $\{\chi_{\lambda,\ell},T_{\lambda,\mathfrak{l}},S_{\lambda,\mathfrak{l}}\}_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}$ (*cf.* les exemples 3.1.9–3.1.11) et aussi par les opérateurs $\{\chi_{\lambda,\ell},X_{\lambda,\mathfrak{l}},Y_{\lambda,\mathfrak{l}}\}_{\mathfrak{l}\,|\,\ell}$, puisque

$$X_{\lambda,\mathfrak{l}}=\chi_{\lambda,\ell}^{d_{\mathfrak{l},0}}T_{\lambda,\mathfrak{l}}\quad\text{et}\quad Y_{\lambda,\mathfrak{l}}=\chi_{\lambda,\ell}^{d_{\mathfrak{l},0}}S_{\lambda,\mathfrak{l}},$$

où $d_{\mathfrak{l},0}=[F_{\mathfrak{l},0}:\mathbb{Q}_\ell]$. Soit $0\neq v\in\pi^{K_\ell}$, alors il existe des $a_{\lambda,\ell}\in E^\times$, $a_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $b_{\lambda,\mathfrak{l}}\in E$ tels que $\chi_{\lambda,\ell}(v)=a_{\lambda,\ell}v$, $T_{\lambda,\mathfrak{l}}(v)=a_{\lambda,\mathfrak{l}}v$ et $S_{\lambda,\mathfrak{l}}(v)=b_{\lambda,\mathfrak{l}}v$. On a $\psi_\lambda\cong\mathrm{unr}_\ell(a_{\lambda,\ell})$ le caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_\ell^\times$ envoyant ℓ sur $a_{\lambda,\ell}$. Notons

$$L_{\lambda,\mathfrak{l}}(X):=X^2-a_{\lambda,\mathfrak{l}}X+\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}b_{\lambda,\mathfrak{l}}\in E[X],$$

et soient $\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mathfrak{l}}$ les deux racines de $L_{\lambda,\mathfrak{l}}(X)$ dans E (quitte à augmenter E s'il faut), lorsque $\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}}\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mathfrak{l}}^{-1}\neq\ell^{\pm d_{\mathfrak{l},0}}$, on a

$$\begin{aligned}\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}&\cong\big(\mathrm{Ind}_{B(F_{\mathfrak{l}})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})}\mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}}/\ell^{d_{\mathfrak{l},0}})\otimes\mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mathfrak{l}})\big)^\infty\\&\cong\big(\mathrm{Ind}_{B(F_{\mathfrak{l}})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})}\mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mathfrak{l}}/\ell^{d_{\mathfrak{l},0}})\otimes\mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}})\big)^\infty\end{aligned}$$

où « ∞ » signifie l'induite parabolique lisse, $\mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(z)$ désigne le caractère non ramifié de $F_{\mathfrak{l}}^\times$ envoyant une uniformisante $\varpi_{\mathfrak{l}}$ sur z ; lorsque $\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}}=\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mathfrak{l}}$ (resp. $\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}}=\ell^{-d_{\mathfrak{l},0}}\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mathfrak{l}}$), on a $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}\cong\mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mathfrak{l}})\circ\det$ (resp. $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}\cong\mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}})\circ\det$).

(2) Supposons K_ℓ Iwahorique en $\mathfrak{l}$, *i.e.*

$$K_{\mathfrak{l}} := K_\ell \cap \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}}) \cong I_{\mathfrak{l}}^n$$

via l'isomorphisme i_λ pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}^{I_{\mathfrak{l}}^n} \neq 0$, qui est donc muni d'une action des opérateurs de Hecke $U_{\lambda,\mathfrak{l}}$ et $S_{\lambda,\mathfrak{l}}$ (*cf.* les exemples 3.1.10–3.1.11). Supposons de plus que l'action de $U_{\lambda,\mathfrak{l}}$ sur $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}^{I_{\mathfrak{l}}^n}$ n'est pas nulle. On en déduit alors (*e.g.* voir [**33**, prop. 4.3.2]) que le module de Jacquet (classique) $J_{B(F_{\mathfrak{l}})}(\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}) \neq 0$ (où $B(F_{\mathfrak{l}})$ désigne le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur), en particulier, la représentation $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}$ n'est pas supercuspidale. Soit $0 \neq v \in \pi_{\lambda,\mathfrak{l}}^{I_{\mathfrak{l}}^n}$ un vecteur propre pour $U_{\lambda,\mathfrak{l}}$ et $S_{\lambda,\mathfrak{l}}$ de valeurs propres respectives $a_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $b_{\lambda,\mathfrak{l}}$. Par la loi d'adjonction pour le module de Jacquet classique (*cf.* [**33**, (0.2)]), on obtient une application non nulle

$$\big(\mathrm{Ind}_{B(F_{\mathfrak{l}})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})} \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(b_{\lambda,\mathfrak{l}}/a_{\lambda,\mathfrak{l}}) \otimes \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(a_{\lambda,\mathfrak{l}})\big)^\infty \longrightarrow \pi_{\lambda,\mathfrak{l}},$$

d'où on déduit alors que ($\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}$ étant irréductible)

- si $a_{\lambda,\mathfrak{l}}^2 \neq b_{\lambda,\mathfrak{l}}, \ell^{2d_{\mathfrak{l},0}} b_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}$ est isomorphe à

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{Ind}_{B(F_{\mathfrak{l}})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})} \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}\big(b_{\lambda,\mathfrak{l}}/a_{\lambda,\mathfrak{l}}\big) \otimes \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(a_{\lambda,\mathfrak{l}})\big)^\infty \\ &\qquad\cong \big(\mathrm{Ind}_{B(F_{\mathfrak{l}})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})} \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}\big(a_{\lambda,\mathfrak{l}}/\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}\big) \otimes \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}\big(\ell^{d_{\mathfrak{l},0}} b_{\lambda,\mathfrak{l}}/a_{\lambda,\mathfrak{l}}\big)\big)^\infty;\end{aligned}$$

- si $a_{\lambda,\mathfrak{l}}^2 = b_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}}$ est l'unique représentation quotient (de dimension infinie sur E) de la représentation réductible $(\mathrm{Ind}_{B(F_{\mathfrak{l}})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})} \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(a_{\lambda,\mathfrak{l}}) \otimes \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(a_{\lambda,\mathfrak{l}}))^\infty$;
- si $a_{\lambda,\mathfrak{l}}^2 = \ell^{2d_{\mathfrak{l},0}} b_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $\pi_{\lambda,\mathfrak{l}} \cong \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(a_{\lambda,\mathfrak{l}}/\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}) \circ \det$ est l'unique représentation quotient de la représentation réductible $(\mathrm{Ind}_{B(F_{\mathfrak{l}})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{l}})} \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(a_{\lambda,\mathfrak{l}}/\ell^{2d_{\mathfrak{l},0}}) \otimes \mathrm{unr}_{\mathfrak{l}}(a_{\lambda,\mathfrak{l}}))^\infty$.

Soit $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$. On associe à une représentation lisse irréductible π_ℓ de $G(\mathbb{Q}_\ell)$, par les isomorphismes (*cf.* 2.1.4)

$$G(\mathscr{E}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\ell^\times \times (D \otimes_{\mathscr{E},c} \mathscr{E}_\ell)^\times \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\lambda^\times \times \mathscr{E}_{\lambda^c}^\times \times (D \otimes_{\mathscr{E}} \mathscr{E}_\lambda)^\times \times (D \otimes_{\mathscr{E}} \mathscr{E}_{\lambda^c})^\times,$$

une représentation $\mathrm{BC}(\pi_\ell)$ de $G(\mathscr{E}_\ell)$ sur E en posant (*cf.* [**46**, p. 199])

$$\mathrm{BC}(\pi_\ell) := (\psi_{\lambda^c} \circ c) \otimes (\psi_\lambda \circ c) \otimes \pi_{\lambda^c} \otimes \pi_\lambda.$$

En fait, on peut associer une représentation $\mathrm{BC}(\pi_\ell)$ de $G(\mathscr{E}_\ell)$ à une représentation lisse irréductible π_ℓ de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ pour toute place finie ℓ de $\mathbb{Q}$ sauf un nombre fini (on renvoie à [**46**, p. 199] pour les détails). Noter que l'on a

$$G(\mathscr{E}_\ell) \cong \mathscr{E}_\ell^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathscr{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)$$

pour toute place finie ℓ de $\mathbb{Q}$ vérifiant que $x \notin S(D)$ (l'ensemble des places de $\mathscr{F}$ où D est ramifiée) pour toute place $x \mid \ell$ de $\mathscr{F}$.

5.2.2. Représentations automorphes. — On donne des rappels sur des représentations automorphes de G. On utilise [**46**, §VI] comme référence. Mais noter que les résultats dans cette section ont été obtenus (essentiellement) dans [**21**], [**62**].

Soit π une représentation automorphe irréductible de G sur $\mathbb{C}$ (donc sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ via l'isomorphisme $\varsigma : \overline{\mathbb{Q}}_p \cong \mathbb{C}$), π admet une décomposition

$$\pi \cong \pi_\infty \otimes {\bigotimes_{\ell}}' \pi_\ell$$

où ℓ parcourt toutes les places finies de $\mathbb{Q}$. Notons ψ_π le caractère central de π. Noter que l'image du plongement naturel $\mathbb{A}_{\mathscr{E}}^\times \hookrightarrow G(\mathbb{A})$ (induit par $\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A} \to D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}$) est contenue dans le centre de $G(\mathbb{A})$.

Soient $\ell \in S_{\mathbb{Q}}$, $\lambda \mid \ell$ une place de $\mathscr{E}$, comme dans la section précédente, π_ℓ admet une décomposition $\pi_\ell \cong \psi_\lambda \otimes \pi_\lambda$ avec ψ_λ un caractère de $\mathbb{Q}_\ell^\times$ et π_λ une représentation irréductible de $(D \otimes_{\mathscr{E},\lambda^c} \mathbb{Q}_\ell)^\times$. Considérons le caractère $\psi_{\pi \,|\mathscr{E}_\ell^\times}$ de

$$\mathscr{E}_\ell^\times \cong \mathscr{E}_\lambda^\times \times \mathscr{E}_{\lambda^c}^\times \cong \mathbb{Q}_\ell^\times \times \mathbb{Q}_\ell^\times.$$

On a (*cf.* §2.1)

$$\psi_{\pi \,|\mathscr{E}_\ell^\times}(a,b) = \psi_\lambda(ab)\psi_{\pi_\lambda}(b) \tag{5.2.2}$$

pour tout $a \in \mathscr{E}_\lambda$, $b \in \mathscr{E}_{\lambda^c}$, où ψ_{π_λ} désigne le caractère central de π_λ. En particulier, on a $\psi_\lambda \cong \psi_{\pi \,|\mathscr{E}_\lambda^\times}$ comme caractères de $\mathbb{Q}_\ell^\times$.

Soit ξ une représentation algébrique de G de dimension finie sur $\mathbb{C}$, on dit que π_∞ est *cohomologique pour* ξ s'il existe $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que (*cf.* [**46**, §VI.2])

$$H^i\big(\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U, \pi_\infty \otimes \xi\big) \neq 0$$

où $\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$ est l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{R})$, et où U, défini comme dans [**46**, p. 92] (noté U_τ là), est un sous-groupe connexe et compact maximal de $G(\mathbb{R})$. On définit une représentation algébrique Ξ de

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{\mathscr{E}}(G \times_{\mathbb{Q}} \mathscr{E}) \times \mathbb{C} \cong (G \times \mathbb{C}) \times (G \times \mathbb{C})$$

en posant $\Xi := \xi \otimes \xi$. Notons $\xi_{\mathscr{E}}$ la restriction de Ξ à $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{\mathscr{E}}(G \times_{\mathbb{Q}} \mathscr{E})(\mathbb{R})$. Rappelons que

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{\mathscr{E}}(G \times_{\mathbb{Q}} \mathscr{E})(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} G(\mathscr{E}_\infty) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\infty^\times \times (D \otimes_{\mathscr{E},c} \mathscr{E}_\infty)^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathscr{F}_\infty)$$

(où $\mathscr{E}_\infty := \mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $\mathscr{F}_\infty := \mathscr{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$), et on prend l'abus de notation $\xi_{\mathscr{E}}$ pour désigner aussi sa restriction à $\mathrm{GL}_2(\mathscr{F}_\infty)$ via le dernier isomorphisme.

Soit Π_∞ une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{F}_\infty)$, on dit que Π_∞ est *cohomologique pour* $\xi_{\mathscr{E}}$ s'il existe $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que

$$H^i(M_2(\mathscr{F}_\infty) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U(0,2)^d, \Pi_\infty \otimes \xi_{\mathscr{E}}) \neq 0.$$

En particulier, Π_∞ a le même caractère infinitésimal que $\xi_{\mathscr{E}}$ (*cf.* [**9**, th. 4.1]). Pour une représentation automorphe Π de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$, notons ψ_Π le caractère central de Π, et Π^* la représentation de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ avec $\Pi^*(g) := \Pi((g^{-1})^*)$ pour tout $g \in (D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$. D'après [**46**, th. VI.2.1], on a :

Théorème 5.2.1 (Changement de base de Clozel). — *Soient ξ une représentation algébrique de G de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $\pi \cong \pi_\infty \otimes \pi^\infty$ une représentation automorphe irréductible de $G(\mathbb{A})$ avec π_∞ cohomologique pour ξ. Il existe une unique représentation automorphe irréductible* $\mathrm{BC}(\pi) = (\psi, \Pi)$ *de $\mathbb{A}_{\mathscr{E}}^\times \times (D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$ vérifiant :*

(1) $\psi = (\psi_\pi|_{\mathbb{A}_{\mathscr{E}}^\times})^c$ *;*

(2) $\mathrm{BC}(\pi)_\ell \cong \mathrm{BC}(\pi_\ell)$ *pour toutes les places finies de $\mathbb{Q}$ sauf un nombre fini* (*noter que la représentation* $\mathrm{BC}(\pi_\ell)$ *est définie pour toutes les places finies de $\mathbb{Q}$ sauf pour un nombre fini d'entre elles, voir la fin du* § 5.2.1) *;*

(3) Π_∞ *est cohomologique pour* $\xi_{\mathscr{E}}$ *;*

(4) $(\psi_{|\mathscr{E}_\infty^\times})^c = \xi_{|\mathscr{E}_\infty^\times}{}^{-1}$ (*via* $\mathscr{E}_\infty^\times \hookrightarrow G(\mathbb{R})$ *induit par* $\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \hookrightarrow D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$) *;*

(5) $\psi_{\Pi\,|\mathbb{A}_{\mathscr{E}}^\times} = \psi^c/\psi$ *;*

(6) $\Pi^* \cong \Pi$.

Pour toute représentation automorphe irréductible Π de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$, on note $\mathrm{JL}(\Pi)$ la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathscr{F}})$ associée à Π via la correspondance de Jacquet-Langlands (voir [**46**, th. VI.1.1]). On sait que

$$\mathrm{JL}(\Pi)^{S(D)} \cong \Pi^{S(D)}$$

comme représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathscr{F}}^{S(D)})$. On a

$$\mathrm{JL}(\Pi^*) \cong \mathrm{JL}(\Pi)^\vee \circ c$$

(*cf.* [**46**, p. 199]). D'après [**46**, cor. VI.1.2], on a :

Proposition 5.2.2. — *Soit Π une représentation automorphe irréductible de $(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A})^\times$, les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) $\mathrm{JL}(\Pi)$ *est cuspidale;*

(2) *il existe une place $x \notin S(D)$ de $\mathscr{F}$ telle que Π_x soit générique* (*i.e. de dimension infinie dans notre cas*) *;*

(3) *pout toute place $x \notin S(D)$ de $\mathscr{F}$, Π_x est générique.*

On dit qu'une représentation automorphe irréductible π de $G(\mathbb{A})$ est *cuspidale* si $\mathrm{JL}(\Pi)$ est cuspidale où $(\psi, \Pi) = \mathrm{BC}(\pi)$. De la même façon que dans la preuve de [**22**, cor. 7.3.4], on a :

Lemme 5.2.3. — *Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$. Pour une représentation automorphe irréductible $\pi \cong \pi_\infty \otimes \pi^\infty$ de $G(\mathbb{A})$ sur $\mathbb{C}$ avec π_∞ cohomologique pour $\varsigma(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$* (*cf.* (3.2.5)) *s'il existe $\sigma \in \Sigma_p$ tel que $k_{1,\sigma} > 2$, alors π est cuspidale.*

Démonstration. — Soit $(\psi,\Pi) = \mathrm{BC}(\pi)$, par [**46**, th. VI.1.1], la représentation automorphe $\mathrm{JL}(\Pi)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathscr{F}})$ apparaît dans le spectre discret. D'après [**58**], si $\mathrm{JL}(\Pi)$ n'est pas cuspidale, il existe un caractère automorphe de $\mathbb{A}_{\mathscr{F}}^{\times}$ tel que

$$\mathrm{JL}(\Pi) \cong \chi \circ \det .$$

Mais ceci n'est pas possible s'il existe $\sigma \in \Sigma_p$ tel que $k_{1,\sigma} > 2$, puisque $\mathrm{JL}(\Pi)_\infty$ a le même caractère infinitésimal que $\varsigma(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})_{\mathscr{E}}$ (voir la discussion au-dessus du théorème 5.2.1). ◻

5.2.3. Représentations galoisiennes. — On donne des rappels sur les représentations galoisiennes qui apparaissent dans la cohomologie étale des courbes de Shimura unitaires (autrement dit, qui sont associée aux formes modulaires classiques sur les courbes de Shimura unitaires, voir la proposition 5.2.7 ci-dessous).

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, considérons le $\overline{E}$-espace vectoriel

$$H^1_{\text{ét}}\big(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) := \varinjlim_{K} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \otimes_E \overline{E}\,,$$

où $\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ est le système local associé à la représentation algébrique $W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ (voir §3.2.1) avec K parcourant tous les sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Il est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ et d'une représentation lisse admissible de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on a donc une décomposition de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times G(\mathbb{A}^\infty)$-représentations :

$$H^1_{\text{ét}}\big(\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\pi^\infty} \pi^\infty \otimes R(\pi^\infty) \tag{5.2.3}$$

où π^∞ parcourt toutes les représentations lisses admissibles et irréductibles de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sur $\overline{E}$, et où $R(\pi^\infty)$ (éventuellement nul) est une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension finie (qui est réalisable sur une extension finie de E). Rappelons (*e.g.* voir [**46**, prop. III.2.1]) que $R(\pi^\infty) \neq 0$ si et seulement s'il existe une représentation π_∞ de $G(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}$ telle que $\pi := \pi_\infty \otimes \varsigma(\pi^\infty)$ soit une représentation automorphe de G sur $\mathbb{C}$ et

$$H^1\big(\,\mathrm{Lie}\,\big(G(\mathbb{R})\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U, \pi_\infty \otimes \varsigma(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})\big) \neq 0.$$

Fixons une représentation lisse admissible et irréductible π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ telle que $R(\pi^\infty) \neq 0$ dans la suite.

Soit K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ tel que $(\pi^\infty)^K \neq 0$. Les opérateurs de doubles classes $[KgK]$ agissent sur ce dernier pour tout $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$. Il existe en fait un ensemble fini $S_{K^\wp}$ (avec $S_{K^\wp} \cap S(K^\wp) = \varnothing$, voir la remarque 5.2.4 ci-dessous), qui ne dépend que de $K^\wp$, des places finies de $\mathscr{F}$ contenant toutes les places au-dessus de p tel que $R(\pi^\infty)_x := R(\pi^\infty)_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathscr{F}}_x/\mathscr{F}_x)}$ est non ramifiée pour toute place finie $x \notin S_{K^\wp}$ de $\mathscr{F}$.

Remarque 5.2.4. — On sait que $S(K^\wp)$ (*cf.* notation 3.2.3) contient toutes les places $(\lambda,\mathfrak{l})$ sauf un nombre fini qui vérifient que la place de $\mathbb{Q}$ au-dessous de $(\lambda,\mathfrak{l})$ est décomposée dans $\mathscr{E}$. Par la discussion du §3.2.3, $R(\pi^{\infty})_x$ est non ramifiée pour toute place finie $x \in S(K^{\wp})$. Notons $S'(K^{\wp})_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des places finies ℓ de $\mathbb{Q}$ inertes dans $\mathscr{E}$ telles que ℓ vérifie les conditions dans [**46**, l. 12–14, p. 199], et que le sous-groupe ouvert compact $K_\ell := K \cap G(\mathbb{Q}_\ell)$ de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ est maximal. On voit que $S'(K^{\wp})_{\mathbb{Q}}$ contient toutes les places finies de $\mathbb{Q}$ inertes dans $\mathscr{E}$ sauf un nombre fini. Notons $S'(K^{\wp})$ l'ensemble des places de $\mathscr{F}$ au-dessus des places dans $S'(K^{\wp})_{\mathbb{Q}}$. Soient $\ell \in S'(K^{\wp})$, π_ℓ une représentation lisse, admissible et irréductible de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ telle que $\pi_\ell^{K_\ell} \neq 0$, on voit par la définition de $\mathrm{BC}(\pi_\ell)$ (dans [**46**, p. 199]) que $\mathrm{BC}(\pi_\ell)$ est une représentation non ramifiée de $G(\mathscr{E}_\ell)$. On déduit donc de [**46**, th. VII.1.9 et cor. VII.1.10] que $R(\pi^{\infty})_x$ est non ramifiée pour toute $x \in S'(K^{\wp})$ (à condition que $(\pi^{\infty})^K \neq 0$). On peut donc choisir $S_{K^{\wp}}$ comme le complément de $S(K^{\wp}) \cup S'(K^{\wp})$ dans l'ensemble des places finies de $\mathscr{F}$.

Si K est maximal en $\wp$ (resp. Iwahorique en $\wp$), alors la E-algèbre

$$\mathscr{H}\big(S(K)\big) := \mathscr{H}\big(S(K^{\wp})\big)[X_{u,\wp}, Y_{u,\wp}, \chi_{u,p}]$$

(resp. $\mathscr{H}(S(K)) := \mathscr{H}\big(S(K^{\wp})\big)[X'_{u,\wp}, Y_{u,\wp}, \chi_{u,p}]$) agit sur $(\pi^{\infty})^K$ via un morphisme de E-algèbres

$$\gamma_{\pi^\infty} : \mathscr{H}\big(S(K)\big) \longrightarrow \overline{E}$$

qui se factorise à travers une extension finie de E.

Lemme 5.2.5. — *Gardons les notations précédentes, on a* $\gamma_{\pi^\infty}(\chi_{u,p}) \in \mathscr{O}_{\overline{E}}^{\times}$.

Démonstration. — Notons $a_0 := \gamma_{\pi^\infty}(\chi_{u,p})$, et $\mathrm{unr}_p(a_0)$ le caractère de $\mathbb{Q}_p^{\times}$ envoyant p sur a_0. Par (5.2.2), on a $\mathrm{unr}_p(a_0) = \varsigma^{-1} \circ \psi_{\pi}|_{\mathscr{E}_u^{\times}}$ où $\pi \cong \pi_\infty \otimes \varsigma(\pi^{\infty})$ est une représentation automorphe de G sur $\mathbb{C}$ telle que π_∞ soit cohomologique pour $\varsigma(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$, et où ψ_π est le caractère central de π. Comme π_∞ et $\varsigma(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ ont le même caractère central, on en déduit

$$\psi_{\pi}|_{(\mathscr{E}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^{\times}} = \big((c \circ u_\infty) \otimes \mathrm{id}\big)^{\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(2k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-2)}$$

(ψ_π est dit *algébrique* dans ce cas, voir [**46**, p. 20]). On obtient alors un caractère ψ' continu de $\mathbb{A}_{\mathscr{E}}^{\times}/\overline{\mathscr{E}^{\times}\mathbb{C}^{\times}}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ tel que (*cf.* [**46**, p. 21])

$$\psi'(x) = \varsigma^{-1}\Big(\psi_\pi(x)\big((c \circ u_\infty) \otimes \mathrm{id}\big)(x_\infty)^{-\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(2k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-2)}\Big)$$
$$\big((c \circ u) \otimes \mathrm{id}\big)(x_p)^{\sum_{\sigma\in\Sigma_p}(2k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-2)}$$

pour tout $x \in \mathbb{A}_{\mathscr{E}}$ (où $x_\infty \in (\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times}$ et $x_p \in (\mathscr{E} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)^{\times}$). On a

$$\psi'|_{\mathscr{E}_u^{\times}} = \varsigma^{-1} \circ \psi_{\pi}|_{\mathscr{E}_u^{\times}}$$

et donc $\mathrm{unr}_p(a_0) = \psi'|_{\mathscr{E}_u^{\times}}$. Mais via l'isomorphisme

$$\mathrm{Art}_{\mathscr{E}} : \mathbb{A}_{\mathscr{E}}^{\times}/\overline{\mathscr{E}^{\times}\mathbb{C}^{\times}} \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathscr{E}}/\mathscr{E})^{\mathrm{ab}},$$

le caractère $\psi'_{|\mathscr{E}_u^\times}$ correspond en fait à un caractère non ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, d'où on déduit $a_0 \in \mathscr{O}_{\overline{E}}^\times$. ∎

Soit $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$ (ou $(\lambda, \mathfrak{l}) = (u, \wp)$ si K est maximal en $\wp$), notons

$$L_{\pi^\infty,(\lambda,\mathfrak{l})}(X) := X^2 - \gamma_{\pi^\infty}(X_{\lambda,\mathfrak{l}})X + \ell^{d_{\mathfrak{l},0}}\gamma_{\pi^\infty}(\chi_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}}Y_{\lambda,\mathfrak{l}}) \in \overline{E}[X]$$

avec $\alpha_{(\lambda,\mathfrak{l})}$, $\widetilde{\alpha}_{(\lambda,\mathfrak{l})}$ ses deux racines dans $\overline{E}$. Pour tout $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$, la représentation non ramifiée $R(\pi^\infty)_{(\lambda,\mathfrak{l})}$ vérifie (*cf.* (3.2.13), voir [**21**, th. A] et [**46**, cor. VII.1.10])

$$L_{\pi^\infty,(\lambda,\mathfrak{l})}(\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-1}) = 0$$

où $\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})$ désigne le Frobenius arithmétique.

Supposons π cuspidale. On a (*e.g.* voir [**46**, cor. VI.2.7 et cor. VII.2.10])

$$\dim_{\overline{E}} R(\pi^\infty) = 2m_\pi$$

où m_π est la multiplicité de π dans l'espace vectoriel $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ (qui ne dépend pas du choix de π_∞, *e.g.* voir [**46**, cor. VI.2.7]), et il existe une (unique) représentation semi-simple $\rho(\pi^\infty)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur $\overline{E}$ telle que

$$R(\pi^\infty)^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\sim} \rho(\pi^\infty)^{\oplus m_\pi}$$

où $R(\pi^\infty)^{\mathrm{ss}}$ désigne la semi-simplification de $R(\pi^\infty)$. Notons que $\rho(\pi^\infty)$ est réalisable sur une extension finie L de E.

Soit K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ tel que $(\pi^\infty)^K \neq 0$. La représentation

$$\rho(\pi^\infty)_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})}$$

est non ramifiée avec $L_{\pi^\infty,(\lambda,\mathfrak{l})}(\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-1}) = 0$ pour tout $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$. La représentation

$$\rho(\pi^\infty)_\wp := \rho(\pi^\infty)_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{(u,\wp)})}$$

de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate

$$\big(-(k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1), -k_{2,\sigma}\big)_{\sigma\in\Sigma_\wp}$$

(*cf.* [**46**, th. VII.1.9], voir aussi la proposition 3.3.9) (la convention que l'on adopte pour le poids de Hodge-Tate du caractère cyclotomique p-adique est 1). De plus, d'après [**66**, th. 2.2] (voir aussi [**4**, th. A]), lorsque le groupe K est maximal en $\wp$, la représentation $\rho(\pi^\infty)_\wp$ est cristalline et l'action L-linéaire de φ^{d_0} sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho(\pi^\infty)_\wp)$ (et $D_{\mathrm{dR}}(\rho(\pi^\infty)_\wp)_\tau$ pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$) vérifie

$$(\varphi^{d_0})^2 - \gamma_{\pi^\infty}(X_{u,\wp})\varphi^{d_0} + \gamma_{\pi^\infty}(\chi_{u,p^{d_0}}Y_{u,\wp})p^{d_0} = 0. \tag{5.2.4}$$

Lorsque K est Iwahorique en $\wp$ (*cf.* l'exemple 3.1.4), la représentation $\rho(\pi^\infty)_\wp$ est semi-stable (*cf.* [**66**, th. 2.2], [**4**, th. A]) avec les valeurs propres de φ^{d_0} sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho(\pi^\infty)_\wp)_\tau$ (pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$) données par $\gamma_{\pi^\infty}(X'_{u,\wp})$ et

$$\gamma_{\pi^\infty}(Y_{u,\wp})\gamma_{\pi^\infty}(\chi_{u,p^{d_0}})p^{d_0}/\gamma_{\pi^\infty}(X'_{u,\wp}).$$

Lemme 5.2.6. — *Avec les notations précédentes, on a alors*

$$\gamma_{\pi^\infty}(X'_{u,\wp})^2 \neq \gamma_{\pi^\infty}(Y_{u,\wp})\gamma_{\pi^\infty}(\chi_{u,p^{d_0}})p^{2d_0}.$$

Démonstration. — Selon la discussion au § 5.2.1 (*i.e.* le cas (2)), si

$$\gamma_{\pi^\infty}(X'_{u,\wp})^2 = \gamma_{\pi^\infty}(Y_{u,\wp})\gamma_{\pi^\infty}(\chi_{u,p^{d_0}})p^{2d_0},$$

alors $(\pi_p^\infty)_{u,\wp}$ est de dimension 1 sur $\overline{E}$. Mais comme π est cuspidale, d'après le théorème 5.2.1 et la proposition 5.2.2, $(\pi_p^\infty)_{u,\wp}$ doit être de dimension infinie, ce qui est une contradiction. ∎

En particulier, si $\gamma_{\pi^\infty}(X'_{u,\wp})^2 \neq \gamma_{\pi^\infty}(Y_{u,\wp})\gamma_{\pi^\infty}(\chi_{u,p^{d_0}})$, $\rho(\pi^\infty)_\wp$ est cristalline. Enfin, selon la proposition 5.2.2, l'hypothèse que π est cuspidale est équivalente aux conditions équivalentes ci-après :

- ▹ il existe une place $(\lambda,\mathfrak{l})\mid \ell \in S(K^\wp)$ (resp. $(\lambda,\mathfrak{l}) \in S(K^\wp)\cup\{(u,\wp)\}$ si K est de plus maximal en $\wp$) telle que $\alpha_{(\lambda,\mathfrak{l})}\widetilde{\alpha}^{-1}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \neq \ell^{\pm d_{\mathfrak{l},0}}$;
- ▹ $\alpha_{(\lambda,\mathfrak{l})}\widetilde{\alpha}^{-1}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \neq \ell^{\pm d_{\mathfrak{l},0}}$ pour toute place $(\lambda,\mathfrak{l})\mid \ell \in S(K^\wp)$ (resp. pour $(\lambda,\mathfrak{l}) \in S(K^\wp)\cup\{(u,\wp)\}$ si K est de plus maximal en $\wp$).

Soient $\tau \in \Sigma_\wp$, et h une forme modulaire classique de niveau K de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})$ sur (τ, E) (*cf.* définition 3.3.3), γ_h-propre pour $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ (avec $\gamma_h : \mathscr{H}(S(K^\wp)) \to E$ un morphisme de E-algèbres), alors il existe une représentation lisse admissible et irréductible π_h de $G(\mathbb{A}^\infty)$ telle que

$$\pi_h^K \neq 0 \quad \gamma_{\pi_h} = \gamma_h \quad \text{et} \quad R(\pi_h) \neq 0.$$

En effet, on a des isomorphismes équivariants sous l'action de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ (*cf.* (3.2.7), (5.2.3) et la proposition 3.3.10) :

$$\begin{aligned} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \otimes_E \overline{E} &\xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)\big) \otimes_E \overline{E} \\ &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\pi^\infty} (\pi^\infty)^K \otimes R(\pi^\infty), \\ H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \eta^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}(R^1\varepsilon_*E)\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{dR}} &\xrightarrow{\sim} \Big(\prod_{\tau\in\Sigma_\wp} \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big)\Big) \otimes_{F_\wp} B_{\text{dR}}, \end{aligned}$$

d'où l'existence de π_h. On dit que h est *cuspidale* s'il existe une représentation π_h de $G(\mathbb{A}^\infty)$ ayant les propriétés ci-dessus et vérifiant de plus que $\varsigma(\pi_h) \otimes \pi_\infty$ est cuspidale pour une certaine représentation π_∞ de $G(\mathbb{R})$ telle que $\varsigma(\pi_h)\otimes\pi_\infty$ soit automorphe. Si c'est le cas, notons

$$\rho_h := \rho(\pi_h),$$

qui est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E (quitte à augmenter E s'il faut) vérifiant les relations d'Eichler-Shimura (3.2.13), et qui ne dépend pas du choix de π_h (par le théorème de densité de Chebotarev). Lorsque K est maximal en $\wp$ (resp. Iwahorique en $\wp$), on suppose que γ_h s'étend en un morphisme encore noté

$$\gamma_h : \mathscr{H}\big(S(K)\big) \longrightarrow E,$$

et que h est aussi γ_h-propre pour les opérateurs $X_{u,\wp}$, $Y_{u,\wp}$ et $\chi_{u,p}$ (resp. γ_h-propre pour les opérateurs $X'_{u,\wp}$, $Y_{u,\wp}$ et $\chi_{u,p}$). Pour $(\lambda, \mathfrak{l}) \mid \ell \in S(K^{\wp})$ (ou $(\lambda,\mathfrak{l}) = (u,\wp)$, $\ell = p$ lorsque K est maximal en $\wp$), notons

$$L_{h,(\lambda,\mathfrak{l})}(X) := X^2 - \gamma_h(X_{\lambda,\mathfrak{l}})X + \gamma_h(Y_{\lambda,\mathfrak{l}})\gamma_h(\chi_{\lambda,\ell^{d_{\mathfrak{l},0}}})\ell^{d_{\mathfrak{l},0}} \in E[X].$$

De ce qui précède, on obtient :

Proposition 5.2.7. — *Soit h une forme modulaire classique cuspidale de niveau K et de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})$ sur (τ, E), γ_h-propre pour $\mathscr{H}(S(K^{\wp}))$ (pour $\mathscr{H}(S(K))$ si K est maximal en $\wp$ ou Iwahorique en $\wp$) de valeurs propres dans E, alors il existe une représentation continue ρ_h de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E ayant les propriétés suivantes :*

(1) *La représentation $\rho_{h,x} := \rho_{h\,|\mathrm{Gal}(\overline{\mathscr{F}_x}/\mathscr{F}_x)}$ est non ramifiée pour toute place finie $x \notin S_{K^{\wp}}$ de $\mathscr{F}$ (cf. remarque 5.2.4).*

(2) *Sur $\rho_{h,(\lambda,\mathfrak{l})}$, on a $L_{h,(\lambda,\mathfrak{l})}(\mathrm{Frob}^{-1}_{(\lambda,\mathfrak{l})}) = 0$ où $\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})$ désigne le Frobenius arithmétique pour tout $(\lambda,\mathfrak{l}) \mid \ell \in S(K^{\wp})$.*

(3) *La représentation $\rho_{h,\wp} := \rho_{h,(u,\wp)}$ est potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate $(-(k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1), -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp}$.*

De plus, si K est maximal en $\wp$, alors $\rho_{h,\wp}$ est cristalline et l'action E-linéaire de φ^{d_0} sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho_{h,\wp})_\sigma$ (pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$) vérifie

$$L_{h,(u,\wp)}(\varphi^{d_0}) = 0.$$

Si K est Iwahorique en $\wp$, $\rho_\wp$ est semi-stable avec les valeurs propres de φ^{d_0} sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho_{h,\wp})_\sigma$ (pour un ou tout $\sigma \in \Sigma_\wp$) données par $\gamma_h(X'_{u,\wp})$ et

$$\gamma_h(Y_{u,\wp})\gamma_h(\chi_{u,p^{d_0}})p^{d_0}/\gamma_h(X'_{u,\wp}).$$

Dans ce cas, $\rho_\wp$ est encore cristalline si $\gamma_h(X'_{u,\wp})^2 \neq \gamma_h(Y_{u,\wp})\gamma_h(\chi_{u,p^{d_0}})$.

5.3. Formes compagnons surconvergentes

5.3.1. Représentations cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2. — On donne des rappels sur les représentations cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur E et on introduit quelques notations supplémentaires.

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$ et V une représentation cristalline de $G_{F_\wp} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur E de poids de Hodge-Tate

$$(-k_{2,\sigma} + 1 - k_{1,\sigma}, -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp}.$$

Par la théorie de Fontaine (*cf.* [**42**], [**44**]), on obtient un φ-module

$$D_0 := D_{\mathrm{cris}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}})^{G_{F_\wp}}$$

qui est libre de rang 2 sur $F_{\wp,0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ muni d'une action $F_{\wp,0}$-semi-linéaire et E-linéaire de φ. De plus, on a un isomorphisme naturel

$$D := D_0 \otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp \cong D_{\mathrm{dR}}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}})^{G_{F_\wp}}.$$

En particulier, D est muni d'une filtration de Hodge donnée par des sous-$F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-modules. Notons

$$\Sigma_{\wp,0} := \left\{\sigma : F_{\wp,0} \to E\right\} \quad \text{et} \quad \Sigma_{\wp,\sigma_0} := \left\{\sigma : F_\wp \to E \ ; \ \sigma_{|F_{\wp,0}} = \sigma_0\right\}$$

pour $\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}$. De l'isomorphisme

$$F_{\wp,0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_{\wp,0}} E, \quad a\otimes b \longmapsto (\sigma(a)b)_{\sigma\in\Sigma_{\wp,0}}$$

$$\Big(\text{resp. } F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_{\wp}} E, \quad a\otimes b \longmapsto (\sigma(a)b)_{\sigma\in\Sigma_{\wp}}\Big),$$

on déduit que D_0 (resp. D) admet une décomposition $D_0 \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_{\wp,0}} D_{0,\sigma}$ (respectivement $D \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} D_\sigma$). De plus, on a un isomorphisme

$$D_{0,\sigma_0} \otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma_{\wp,\sigma_0}} D_\sigma \tag{5.3.1}$$

pour tout $\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}$. Noter que l'opérateur φ sur D_0 envoie D_{0,σ_0} sur $D_{0,\sigma_0\circ\mathrm{Fr}^{-1}}$ où $\mathrm{Fr} : F_{\wp,0} \to F_{\wp,0}$ désigne le Frobenius arithmétique. Le $F_\wp \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module $D \cong D_0 \otimes_{F_{\wp,0}} F_\wp$ est donc muni d'une action E-linéaire de φ^{d_0} donnée par $\varphi^{d_0} \otimes \mathrm{id}$.

Supposons d'abord le φ-module D_0 semi-simple, *i.e.* pour tout $\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}$, il existe e_{σ_0}, $\widetilde{e}_{\sigma_0} \in D_{0,\sigma_0}$ tels que

$$D_{0,\sigma_0} = Ee_{\sigma_0} \oplus E\,\widetilde{e}_{\sigma_0}$$

et qu'il existe $a, \widetilde{a} \in E^\times$ avec $\varphi(e_{\sigma_0}) = ae_{\sigma_0\circ\mathrm{Fr}^{-1}}$, $\varphi(\widetilde{e}_{\sigma_0}) = \widetilde{a}\,\widetilde{e}_{\sigma_0\circ\mathrm{Fr}^{-1}}$. Notons $\alpha := a^{d_0}$, $\widetilde{\alpha} := \widetilde{a}^{\,d_0}$ qui sont donc des valeurs propres de φ^{d_0} sur D_σ pour un (ou de manière équivalente tout) $\sigma \in \Sigma_\wp$. Soient e_σ, $\widetilde{e}_\sigma \in D_\sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$ tels que

$$(e_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_{\wp,\sigma_0}} = e_{\sigma_0} \otimes 1 \quad \text{et} \quad (\widetilde{e}_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_{\wp,\sigma_0}} = \widetilde{e}_{\sigma_0} \otimes 1$$

via l'isomorphisme (5.3.1) pour tout $\sigma_0 \in \Sigma_{\wp,0}$, on a alors

$$\varphi^{d_0}(e_\sigma) = \alpha e_\sigma \quad \text{et} \quad \varphi^{d_0}(\widetilde{e}_\sigma) = \widetilde{\alpha}\,\widetilde{e}_\sigma.$$

Comme V est de poids de Hodge-Tate

$$(-k_{2,\sigma} + 1 - k_{1,\sigma}, -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp},$$

il existe $(a_\sigma, \widetilde{a}_\sigma) \in E \times E \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$ tels que

$$\mathrm{Fil}^j D_\sigma = \begin{cases} D_\sigma & \text{si } j \leq k_{2,\sigma}\,, \\ E(a_\sigma e_\sigma + \widetilde{a}_\sigma \widetilde{e}_\sigma) & \text{si } k_{2,\sigma} < j \leq k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1\,, \\ 0 & \text{si } j > k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1\,. \end{cases}$$

Si $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$, notons

$$Z_D(\alpha) := \big\{\sigma \in \Sigma_\wp \ ; \ \widetilde{a}_\sigma = 0\big\}, \quad Z_D(\widetilde{\alpha}) := \big\{\sigma \in \Sigma_\wp \ ; \ a_\sigma = 0\big\}.$$

Noter que $Z_D(\alpha) \cap Z_D(\widetilde{\alpha}) = \varnothing$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$. De plus, comme le φ-module filtré D est admissible, on a (voir aussi [**15**, lemme 3.4])

$$\upsilon_\wp(\widetilde{\alpha}) + \upsilon_\wp(\alpha) = \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} (2k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1);$$

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} k_{2,\sigma} + \sum_{\sigma\in Z_D(\alpha)} (k_{1,\sigma} - 1) \leq \upsilon_\wp(\alpha) \leq \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} k_{2,\sigma} + \sum_{\sigma\notin Z_D(\widetilde{\alpha})} (k_{1,\sigma} - 1).$$

En particulier, pour $J \subseteq \Sigma_\wp$, on a $Z_D(\alpha) \cap J = \varnothing$ lorsque

$$\upsilon_\wp(\alpha) < \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} k_{2,\sigma} + \inf_{\sigma\in J}\{k_{1,\sigma} - 1\}.$$

Si $\alpha = \widetilde{\alpha}$, notons $Z_D := \Sigma_\wp$.

Supposons maintenant le φ-module D_0 non semi-simple, alors les valeurs propres α, $\widetilde{\alpha}$ de φ^{d_0} sur D_σ sont les mêmes pour un (ou de manière équivalente tout) $\sigma \in \Sigma_\wp$. Dans ce cas, on note

$$Z_D := \big\{\sigma \in \Sigma_\wp \ ; \ \mathrm{Fil}^j D_\sigma \text{ est stable par } \varphi^{d_0}, \text{ pour } k_{2,\sigma} < j \leq k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1\big\}.$$

5.3.2. Formes compagnons surconvergentes. — On montre l'existence de formes compagnons surconvergentes par la méthode de Breuil-Emerton [**17**, th. 4.3.3]).

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ maximal en $\wp$. Soit ρ une représentation *indécomposable* de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E qui apparaît (comme sous-représentation) dans $H^1_{\text{ét}}(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$, il existe donc une représentation π^∞ lisse admissible et irréductible de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sur E telle que ρ soit une sous-représentation de $R(\pi^\infty)$ et $(\pi^\infty)^K \neq 0$ (*cf.* § 5.2.3). Notons

$$\gamma : \mathscr{H}\big(S(K)\big) \longrightarrow E$$

le système de valeurs propres de $\mathscr{H}(S(K))$ associé à ρ sur $(\pi^\infty)^K$. Supposons qu'il existe une représentation π_∞ admissible irréductible de $G(\mathbb{R})$ et cohomologique pour $\varsigma(W^{(\underline{k_1}_{\sigma\in\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ telle que $\pi_\infty \otimes \varsigma(\pi^\infty)$ soit cuspidale, on a donc

$$\rho \cong \rho(\pi^\infty).$$

Notons

$$\rho_\wp := \rho_{\,|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{(u,\wp)})}$$

qui est alors une représentation cristalline de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ (par (5.1.6)). Notons α, $\widetilde{\alpha}$ les valeurs propres de φ^{d_0} sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho_\wp)_\tau$ pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$, on a alors $\alpha\widetilde{\alpha}^{-1} \neq q^{\pm 1}$ car π est cuspidale et $(\pi^\infty)^K \neq 0$ (voir le § 5.2.1 (1) et la proposition 5.2.2). La représentation $\rho_\wp$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ est de poids de Hodge-Tate $(-(k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1), -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp}$. On peut attacher à ρ une forme modulaire classique (et cuspidale) h_τ de niveau K

de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})$ et γ-propre pour $\mathscr{H}(S(K))$ sur (τ, E) pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$ par les théorèmes de comparaison p-adique (*cf.* ci-dessous). En effet, étant donnée une injection de représentations galoisiennes

$$\rho_\wp \longhookrightarrow H^1_{\text{ét}}\big(M_{K,\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\big[\mathscr{H}\big(S(K)\big) = \gamma\big]$$

(où $*[\mathscr{H}(S(K)) = \gamma]$ désigne le sous-espace vectoriel sur lequel $\mathscr{H}(S(K))$ agit par γ), on en déduit une injection de E-espaces vectoriels filtrés équivariante sous l'action de φ^{d_0}

$$D_{\mathrm{dR}}(\rho_\wp)_\tau \longhookrightarrow \mathbb{H}^1\big((M_K)_{\tau,E}, \nabla_\tau\big)$$

pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$. En particulier, pour $k_{2,\tau} < j \leq k_{2,\tau} + k_{1,\tau} - 1$, on obtient une injection de E-espaces vectoriels (*cf.* proposition 3.3.9) :

$$\mathrm{Fil}^j\, D_{\mathrm{dR}}(\rho(\pi^\infty)_\wp)_\tau \longhookrightarrow H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\big[\mathscr{H}\big(S(K)\big) = \gamma\big] \tag{5.3.2}$$

pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$. Il existe donc une forme modulaire h_τ, γ-propre pour $\mathscr{H}(S(K))$, de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})$ de niveau K sur (τ, E) telle que l'image de l'application (5.3.2) soit engendrée par h_τ pour tout $\tau \in \Sigma_\wp$. La forme modulaire h_τ est dite *attachée* à ρ.

Notons pour simplifier

$$D_0 := D_{\mathrm{cris}}(\rho_\wp) \quad \text{et} \quad D := D_{\mathrm{dR}}(\rho_\wp).$$

Comme on a vu dans la discussion au § 5.2.3, les α, $\widetilde{\alpha} \in E$ (quitte à augmenter E s'il faut) ne sont autres que les deux racines de

$$L_{u,\wp}(X) = X^2 - \gamma(X_{u,\wp})X + p^{d_0}\gamma(\chi_{u,p^{d_0}})\gamma(Y_{u,\wp}) \in E[X].$$

Voyons h_τ comme forme modulaire sur $M_K(\wp)_{\tau,E}$ via l'injection naturelle

$$H^0\big((M_K)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \longhookrightarrow H^0\big(M_K(\wp)_{\tau,E}, \mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big),$$

et posons

$$h_{\tau,\alpha} := \Phi_{u,\wp}(h_\tau) - \alpha h_\tau,\ h_{\tau,\widetilde{\alpha}} := \Phi_{u,\wp}(h_\tau) - \widetilde{\alpha}\, h_\tau, \tag{5.3.3}$$

(voir (3.3.27) pour l'opérateur $\Phi_{u,\wp}$) qui sont aussi des formes modulaires sur $M_K(\wp)_{\tau,E}$.

Lemme 5.3.1. — *Les formes $h_{\tau,\alpha}$ et $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$ sont non nulles.*

Démonstration. — Supposons que $h_{\tau,\alpha}$ soit nulle (le cas de $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$ est analogue), par (3.3.27), on a

$$\phi_C^*\big(h_\tau(A/C, \iota', \theta', \overline{\alpha^\wp})\big) = \alpha h_\tau(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$$

pour tout L-point $(A, \iota, \theta, \overline{\alpha^\wp})$ de $(M_K)_{\tau,E}$ avec C un sous-$(u,\wp)$-groupe d'échelon 1 quelconque de A et pour toute extension finie L de E. On en déduit que l'on a $X_{u,\wp}(h_\tau) = (q+1)\alpha h_\tau$ (*cf.* (3.3.25)) et donc $\widetilde{\alpha} = q\alpha$, une contradiction. ∎

Lemme 5.3.2. — *On a $X'_{u,\wp}(h_{\tau,\alpha}) = \alpha h_{\tau,\alpha}$ et $X'_{u,\wp}(h_{\tau,\widetilde{\alpha}}) = \widetilde{\alpha}\, h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$.*

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}X'_{u,\wp}(h_{\tau,\alpha}) &= X'_{u,\wp}\circ\Phi_{u,\wp}(h_\tau) - \alpha X'_{u,\wp}(h_\tau)\\ &= p^{d_0}\chi_{u,p^{d_0}}\circ Y_{u,\wp}(h_\tau) - \alpha(X_{u,\wp}-\Phi_{u,\wp})(h_\tau)\\ &= \alpha\widetilde{\alpha}\,h_\tau - \alpha(\alpha+\widetilde{\alpha})h_\tau + \alpha\Phi_{u,\wp}(h_\tau)\\ &= \alpha h_{\tau,\alpha}\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient du lemme 3.3.16 et la troisième découle du fait que α, $\widetilde{\alpha}$ sont les deux racines de $L_{u,\wp}(X)$. De la même façon, on a $X'_{u,\wp}(h_{\tau,\widetilde{\alpha}}) = \widetilde{\alpha}\,h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$. ∎

On dit que $h_{\tau,\alpha}$ (resp. $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$) est *la forme p-stabilisée associée à h_τ par rapport à α (resp. $\widetilde{\alpha}$).*

Supposons $\alpha\neq\widetilde{\alpha}$, soient e_τ, $\widetilde{e}_\tau\in D_\tau := D_{\mathrm{dR}}(\rho_\wp)_\tau$ des vecteurs propres de φ^{d_0} avec $\varphi^{d_0}(e_\tau)=\alpha e_\tau$ et $\varphi^{d}(\widetilde{e}_\tau)=\widetilde{\alpha}\,\widetilde{e}_\tau$. Il existe donc $(a_\tau,\widetilde{a}_\tau)\in E\times E\setminus(0,0)$ tels que

$$h_\tau = a_\tau e_\tau + \widetilde{a}_\tau\widetilde{e}_\tau$$

(*cf.* §5.3.1). On voit par définition de h_τ que $\tau\in Z_D(\alpha)$ (resp. $\tau\in Z_D(\widetilde{\alpha})$) si et seulement si $\widetilde{a}_\tau=0$ (resp. $a_\tau=0$). On a comme dans [**17**, th. 4.3.3] :

Théorème 5.3.3. — *Soit $\tau\in\Sigma_\wp$, alors $\tau\in Z_D(\alpha)$ (resp. $\tau\in Z_D(\widetilde{\alpha})$) si et seulement s'il existe une forme modulaire surconvergente g_τ de niveau K et de poids*

$$\big(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2, k_{2,\tau}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}\big)$$

sur (τ,E), vecteur propre pour les opérateurs de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ et les opérateurs $X'_{u,\wp}$, $Y_{u,\wp}$, $\chi_{u,p}$, de mêmes valeurs propres que $h_{\tau,\alpha}$ (resp. $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$), telle que

$$\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}(g_\tau) = h_{\tau,\alpha}\quad\big(\textit{resp. }\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}(g_\tau) = h_{\tau,\widetilde{\alpha}}\big).$$

Démonstration. — On a $\tau\in Z_D(\alpha)$ si et seulement si $\varphi^{d_0}(h_\tau)-\alpha h_\tau=0$ (dans l'espace vectoriel $\mathbb{H}^1((M_K)_{\tau,E},\nabla_\tau))$. Soit $r\in]0,\frac{1}{q+1}[\cap\mathbb{Q}$, par la proposition 5.1.5, ce qui équivaut à la nullité du vecteur

$$\begin{aligned}(5.3.4)\quad \Phi_{u,\wp}(h_\tau)-\alpha h_\tau\in\mathbb{H}^1\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\nabla_\tau\big) &\cong H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)\\ &\quad/\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}\big(H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\big).\end{aligned}$$

Donc $\tau\in Z_D(\alpha)$ si et seulement si

$$\Phi_{u,\wp}(h_\tau)-\alpha h_\tau\in\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}\big(H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathscr{S}_{\tau,E}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)\big).$$

Comme l'application $\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}$ est continue et équivariante sous l'action de $X'_{u,\mathfrak{p}}$, $Y_{u,\wp}$, $\chi_{u,p}$ et de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ (voir la discussion au-dessous de la preuve du lemme 5.1.4), l'image réciproque W du E-espace vectoriel engendré par $\Phi_{u,\wp}(h_\tau)-\alpha h_\tau$ est un sous-E-espace vectoriel fermé du E-espace de Banach (ainsi W est aussi un E-espace de Banach)

$$H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathscr{S}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big)$$

stable sous l'action des opérateurs de Hecke. De plus, $X'_{u,\wp}$ agit sur W par un opérateur compact. Il existe donc une forme (*e.g.* en appliquant la théorie de [**75**] à W et $X'_{u,\wp}$)

$$g_\tau\in H^0\big((M_K)^{\leq r}_{\tau,E},\mathscr{S}^{(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}_{\tau,E}\big)$$

propre de mêmes valeurs propres que h_{τ,α^d} pour $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ et $X'_{u,\wp}$, $Y_{u,\wp}$ et $\chi_{u,p}$ telle que $\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}(g_\tau)=h_{\tau,\alpha}$. Le cas de $Z_D(\widetilde{\alpha})$ est analogue. □

On dit que g_τ est *une forme compagnon surconvergente de $h_{\tau,\alpha}$ (resp. de $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$)*.

Supposons maintenant $\alpha=\widetilde{\alpha}$ (il y ayant alors deux cas : D_0 est φ-semi-simple ou non φ-semi-simple), de la même façon, on a :

Théorème 5.3.4. — *Soit $\tau\in\Sigma_\wp$, alors $\tau\in Z_D$ (cf. §5.3.1) si et seulement s'il existe une forme modulaire surconvergente g_τ de niveau K et de poids*

$$(-k_{2,\tau}-k_{1,\tau}+2,k_{2,\tau};\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$$

sur (τ,E), vecteur propre pour les opérateurs de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ et $X'_{u,\wp}$, $Y_{u,\wp}$ et $\chi_{u,p}$, de mêmes valeurs propres que $h_{\tau,\alpha}=h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$, telle que

$$\theta_\tau^{k_{1,\tau}-1}(g_\tau)=h_{\tau,\alpha}.$$

Remarque 5.3.5. — On notera que D_0 est conjecturalement φ-semi-simple, *cf.* [**43**, §2.4].

En termes des opérateurs $U_\wp$ et $S_\wp$ (*cf.* exemples 3.3.14 et 3.3.15) : notons $a_0:=\gamma(\chi_{u,p})\in\mathscr{O}_E^\times$ (*cf.* lemme 5.2.5) et $\mathrm{unr}_p(a_0):\mathbb{Q}_p^\times\to E^\times$ le caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur a_0. Considérons $\mathrm{unr}_p(a_0)$ comme caractère non ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ via l'isomorphisme $W^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}_p}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}_p^\times$ de la théorie du corps de classes local (normalisé par envoyer un Frobenius arithmétique sur p^{-1}). Posons

$$\rho'_\wp:=\rho_\wp\otimes_E\big(\mathrm{unr}_p(a_0)^{-1}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)}\big)$$

qui est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ cristalline de dimension 2 sur E de mêmes poids de Hodge-Tate que $\rho_\wp$ et notons

$$D'_0:=D_{\mathrm{cris}}(\rho'_\wp),\quad D':=D_{\mathrm{dR}}(\rho'_\wp).$$

On voit que $\alpha':=a_0^{-d_0}\alpha$, $\widetilde{\alpha}':=a_0^{-d_0}\widetilde{\alpha}$ sont les valeurs propres de φ^{d_0} sur D'_τ pour tout $\tau\in\Sigma_\wp$, et sont les deux racines du polynôme

$$X^2-\gamma(T_\wp)X+p^{d_0}\gamma(S_\wp)\in E[X].$$

On a :

- $Z_{D'}(\alpha') = Z_D(\widetilde{\alpha})$, $Z_{D'}(\widetilde{\alpha}') = Z_D(\alpha)$ si $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$;
- $Z_D = Z_{D'}$ si $\alpha = \widetilde{\alpha}$;
- $U_{\wp}(h_{\tau,\alpha}) = \alpha' h_{\tau,\alpha}$ et $U_{\wp}(h_{\tau,\widetilde{\alpha}}) = \widetilde{\alpha}' h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$.

Enfin, signalons que la forme compagnon surconvergente g_τ (si elle existe) de $h_{\tau,\alpha}$ (resp. $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$) dans les théorèmes 5.3.3 et 5.3.4 est propre sous l'action de $U_{\wp}$ et $S_{\wp}$ de mêmes valeurs propres que $h_{\tau,\alpha}$ (resp. $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$).

CHAPITRE 6

REPRÉSENTATIONS LOCALEMENT $\mathbb{Q}_p$-ANALYTIQUES

Au §6.1, on donne des rappels sur les représentations localement analytiques des groupes p-adiques $F_\wp$-analytiques. On généralise (de façon essentiellement triviale) une partie de la théorie de Fourier p-adique à la Schneider-Teitelbaum [**68**]). On rappelle le foncteur de Jacquet-Emerton (pour les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques, *cf.* [**33**]) au §6.2. Dans la section 6.3, on montre certaines lois d'adjonction pour le foncteur de Jacquet-Emerton, que l'on utilisera dans le prochain chapitre.

Dans ce chapitre, G désignera un groupe p-adique $F_\wp$-analytique. On prendra garde à ne pas confondre ce groupe avec le G du groupe unitaire des autres chapitres.

6.1. Représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques

6.1.1. Généralités. — On donne des rappels sur les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques des groupes p-adiques $F_\wp$-analytiques et on introduit des notations

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réductif connexe sur $F_\wp$ avec $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (sur $F_\wp$), notons

$$\mathbb{G}_0 := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^{F_\wp} \mathbb{G}.$$

Alors $G := \mathbb{G}(F_\wp) \cong \mathbb{G}_0(\mathbb{Q}_p)$ est un groupe p-adique $F_\wp$-analytique. On a une décomposition

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \Sigma_\wp} \mathfrak{g}_\sigma \quad \text{où } \mathfrak{g}_\sigma := \mathfrak{g} \otimes_{F_\wp, \sigma} E.$$

Pour $J \subseteq \Sigma_\wp$, on note

$$\mathfrak{g}_J := \prod_{\sigma \in J} \mathfrak{g}_\sigma.$$

Une représentation algébrique V de dimension finie de $\mathbb{G}_0$ sur E est appelée *une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique* de G. On voit que V est munie d'une action naturelle $\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\mathfrak{g}$ (donc d'une action E-linéaire de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$). Soit $J \subseteq \Sigma_\wp$, on dit que la représentation V est *J-algébrique* si l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ sur V se factorise à travers $\mathfrak{g}_J$.

Soit V un espace vectoriel topologique localement convexe et de Hausdorff sur E (*cf.* [**67**, §4]) ; notons

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$$

le E-espace vectoriel des applications localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de G à valeurs dans V (*cf.* [**70**, §2]). Ce dernier est muni d'une topologie localement convexe (*cf. loc. cit.*) et d'une action continue de G donnée par

$$(gf)(g') := f(g'g) \tag{6.1.1}$$

pour tout $g,g'\in G$ et $f\in\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$. On en déduit une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ par

$$(\mathfrak{x}\cdot f)(g) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\big(g\exp(t\mathfrak{x})\big)_{|t=0} \tag{6.1.2}$$

pour tout $\mathfrak{x}\in\mathfrak{g}$, $f\in\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ et $g\in G$.

Soit $J\subseteq\Sigma_\wp$, une application $f\in\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ est appelée *localement J-analytique* si l'action de $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ sur f se factorise à travers $\mathfrak{g}_J$ (*cf.* [**74**, déf. 2.1]).

Notons $\mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,V)$ le sous-E-espace vectoriel (fermé, *e.g.* par [**74**, lemme 2.5]), muni de la topologie induite, de $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ engendré par les applications localement J-analytiques. Il est en fait stable sous l'action de G.

Soit V comme ci-dessus, et supposons V muni d'une action continue E-linéaire de G, on dit que V est *une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique* si l'application orbite $\rho_v : g\mapsto g(v)$ est dans $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ pour tout $v\in V$ (*cf.* [**70**, §3]). De même, soit $J\subseteq\Sigma_\wp$, on dit que V est *une représentation localement J-analytique* si l'application orbite $\rho_v : g\mapsto g(v)$ appartient à $\mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,V)$ pour tout $v\in V$ (*cf.* [**74**, déf. 2.4]). En outre, si V est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de G, V est munie d'une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\mathfrak{x}\cdot v := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(t\mathfrak{x})(v)_{|t=0}$$

pour tout $\mathfrak{x}\in\mathfrak{g}$, $v\in V$. Donc V est localement J-analytique si et seulement si l'action de $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ sur V se factorise à travers $\mathfrak{g}_J$. Enfin, pour une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique V de G sur E, on note $V_{J\text{-an}}$ le sous-E-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs dont les applications orbite sont localement J-analytiques, qui est stable sous l'action de G et est donc une sous-représentation fermée localement J-analytique de V.

On note $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la}}(G)$ la catégorie des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de G sur E, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la}}(G)$ des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de G sur des espaces localement convexes de type compact (*cf.* [**70**, §1]), et $\mathrm{Rep}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{la},c}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$ dont les objets sont les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques $V\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$ vérifiant de plus qu'il existe une suite croissante $\{V_n\}_n$ de sous-BH-espaces (*cf.* [**37**, déf. 1.1.1]) de V stables par le centre Z_G de G telle que $V=\varinjlim_n V_n$ (*cf.* [**33**, §3.1]).

6.1.2. Vecteurs S-classiques. — Soient V une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de G sur E, $S \subseteq \Sigma_\wp$ et $v \in V$. Lorsque $S \neq \varnothing$, on dit que le vecteur v est *quasi-S-classique* s'il existe une représentation W de $\mathfrak{g}_S$ de dimension finie sur E, et une application (non nulle) $\mathfrak{g}_S$-équivariante

$$W \longrightarrow V \tag{6.1.3}$$

telles que v appartienne à l'image de (6.1.3). On dit que v est *S-classique* si la représentation W de $\mathfrak{g}_S$ provient d'une représentation S-algébrique de G. En particulier, si $v \in V_{\Sigma_\wp \setminus S\text{-an}}$, alors v est S-classique (avec W étant la représentation triviale de G). Enfin, tous les vecteurs dans V sont dits *$\varnothing$-classiques* (et *quasi-$\varnothing$-classiques*). Le lemme suivant est évident.

Lemme 6.1.1. — *Un vecteur v de V est quasi-S-classique si et seulement si le sous-$U(\mathfrak{g}_S)$-module de V engendré par v est de dimension finie (où on note $U(\mathfrak{h})$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$).*

Proposition 6.1.2. — *Avec les notations précédentes, alors v est quasi-S-classique si et seulement si v est quasi-σ-classique pour tout $\sigma \in S$.*

Démonstration. — Le sens « seulement si » est clair. Supposons maintenant v quasi-σ-classique pour tout $\sigma \in S$, et notons

$$I_\sigma := \{\mathfrak{x} \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\sigma)\ ;\ \mathfrak{x} \cdot v = 0\}$$

qui est un idéal à gauche de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\sigma)$. Le E-espace vectoriel $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\sigma)/I_\sigma$ est de dimension finie sur E puisque l'image du plongement

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\sigma)/I_\sigma \hookrightarrow V, \quad \mathfrak{x} \longmapsto \mathfrak{x} \cdot v$$

l'est par le lemme 6.1.1. Comme $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\sigma \in S} \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\sigma)$, le morphisme

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S) \longrightarrow V, \quad \mathfrak{x} \longmapsto \mathfrak{x} \cdot v$$

se factorise alors à travers $\otimes_{\sigma \in S} \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\sigma)/I_\sigma \to V$. On en déduit que le sous-$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S)$-module de V engendré par v est de dimension finie sur E, d'où la proposition par le lemme 6.1.1. ∎

Soient maintenant $S \subseteq J$, W une représentation localement S-analytique irréductible de G de dimension finie sur E telle que

$$\mathrm{End}_G(W) \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}(W) \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_S}(W) \cong E, \tag{6.1.4}$$

et supposons V localement J-analytique.

La représentation duale $W^\vee$ est aussi localement S-analytique. Par [**37**, cor. 3.6.16], $V \otimes_E W^\vee$, muni de l'action diagonale de G, est encore une représentation localement J-analytique de G.

Proposition 6.1.3. — *Avec les notations précédentes, alors la composée G-équivariante*

$$(V \otimes_E W^\vee)_{J\setminus S\text{-an}} \otimes_E W \hookrightarrow V \otimes_E W^\vee \otimes_E W \longrightarrow V \tag{6.1.5}$$

est injective, où $(V \otimes_E W^\vee)_{J\backslash S\text{-an}} \otimes_E W$ *et* $V \otimes_E W^\vee \otimes_E W$ *sont munis de l'action diagonale de* G*, et où le deuxième morphisme est donné par*

$$V \otimes_E W^\vee \otimes_E W \longrightarrow V, \quad v \otimes w' \otimes w \longmapsto w'(w)v. \tag{6.1.6}$$

Noter que tous les éléments dans l'image de (6.1.5) sont quasi-S-classiques.

Démonstration. — La preuve est essentiellement la même que celle de [**37**, prop. 4.2.4]. On donne une démonstration pour la commodité du lecteur. Pour une algèbre $\mathfrak{h}$ de Lie et une représentation V' de $\mathfrak{h}$, on note

$$(V')^{\mathfrak{h}} := \{v \in V' \; ; \; x \cdot v = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{h}\}.$$

Le cas $S = \varnothing$ est clair. On suppose $S \neq \varnothing$. On munit $V \otimes_E W^\vee$ d'une action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \times \mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ par

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \cdot (v \otimes w') := (\mathfrak{x}_1 \cdot v) \otimes w' + v \otimes (\mathfrak{x}_2 \cdot w')$$

(avec l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ sur $W^\vee$ donnée par $(\mathfrak{x} \cdot w')(w) = -w'(\mathfrak{x} \cdot w)$). On note

$$\Delta : \mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \times \mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}, \quad x \longmapsto (x, x).$$

On a par définition

$$(V \otimes_E W^\vee)_{J\backslash S\text{-an}} \xrightarrow{\sim} (V \otimes_E W^\vee)^{\Delta(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp \backslash (J \backslash S)})} \xrightarrow{\sim} (V \otimes_E W^\vee)^{\Delta(\mathfrak{g}_S)} \tag{6.1.7}$$

(où le deuxième isomorphisme découle du fait que l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ sur V et $W^\vee$ se factorise à travers $\mathfrak{g}_J$). Comme $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_S}(W) \xrightarrow{\sim} E$, par *le théorème du bicommutant*, le morphisme de E-algèbres

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S) \longrightarrow \mathrm{End}_E(W) \cong W \otimes_E W^\vee, \quad \mathfrak{x} \longmapsto (w \mapsto \mathfrak{x} \cdot w), \tag{6.1.8}$$

est surjectif. On munit $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S)$ (resp. $W \otimes_E W^\vee$) d'une action de $\mathfrak{g}_S \times \mathfrak{g}_S$ par

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \cdot (\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}_1\mathfrak{x} - \mathfrak{x}\mathfrak{x}_2 \quad \big(\text{resp. } (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \cdot (w \otimes w') = (\mathfrak{x}_1 \cdot w) \otimes w + w \otimes (\mathfrak{x}_2 \cdot w')\big).$$

Donc l'application (6.1.8) est $\mathfrak{g}_S \times \mathfrak{g}_S$-équivariante. En prenant les duaux, on en déduit une injection $\mathfrak{g}_S \times \mathfrak{g}_S$-équivariante

$$W^\vee \otimes_E W \hookrightarrow \mathrm{Hom}_E\big(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S), E\big) \tag{6.1.9}$$

(où l'action de $\mathfrak{g}_S \times \mathfrak{g}_S$ sur $\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S), E)$ est $((\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \cdot f)(\mathfrak{x}) = -f(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}) + f(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_2)$). De plus, on vérifie directement que la composition de (6.1.9) avec l'application

$$\mathrm{Hom}_E\big(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S), E\big) \longrightarrow E, \quad f \longmapsto f(1)$$

est égale au morphisme canonique $W^\vee \otimes_E W \to E$, $w' \otimes w \longmapsto w'(w)$. On déduit enfin de (6.1.9) une injection $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \times \mathfrak{g}_S \times \mathfrak{g}_S$-équivariante

$$V \otimes_E W^\vee \otimes_E W \hookrightarrow V \otimes_E \mathrm{Hom}_E\big(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S), E\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_E\big(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S), V\big), \tag{6.1.10}$$

où l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \times \mathfrak{g}_S \times \mathfrak{g}_S$ sur $V \otimes_E W^\vee \otimes_E W$ (resp. $\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S), V)$) est donnée par

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \cdot (v \otimes w' \otimes w) = (\mathfrak{x}_1 \cdot v) \otimes w' \otimes w + v \otimes (\mathfrak{x}_2 \cdot w') \otimes w + v \otimes w' \otimes (\mathfrak{x}_3 \cdot w)$$

(resp. $((\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_3)\cdot f)(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}_1\cdot(f(\mathfrak{x})) - f(\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}) + f(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_3)$). Noter que la composition de (6.1.10) avec l'application

$$\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S),V)\longmapsto V,\quad f\longmapsto f(1) \tag{6.1.11}$$

n'est autre que (6.1.6). On note

$$\Delta_{12}:\mathfrak{g}_S\longleftrightarrow \mathfrak{g}_S\times\mathfrak{g}_S\times\mathfrak{g}_S\hookrightarrow \mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}\times\mathfrak{g}_S\times\mathfrak{g}_S,\quad \mathfrak{x}\longmapsto(\mathfrak{x},\mathfrak{x},0).$$

Par (6.1.7), on a alors $(V\otimes_E W^\vee)_{J\backslash S\text{-an}}\otimes_E W\cong(V\otimes_E W^\vee\otimes_E W)^{\Delta_{12}(\mathfrak{g}_S)}$. On conclut par le lemme suivant. $\square$

Lemme 6.1.4. — *L'application* (6.1.11) *induit un isomorphisme de E-espaces vectoriels*

$$\mathrm{Hom}_E\big(U(\mathfrak{g}_S),V\big)^{\Delta_{12}(\mathfrak{g}_S)}\xrightarrow{\sim} V.$$

Démonstration. — L'application $V\to\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S),V)$, $v\mapsto(\mathfrak{x}\mapsto(\mathfrak{x}\cdot v))$ est un inverse de (6.1.11). Son image est bien contenue dans $\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S),V)^{\Delta_{12}(\mathfrak{g}_S)}$, et l'application induite $V\to\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S),V)^{\Delta_{12}(\mathfrak{g}_S)}$ est bijective. $\square$

Remarque 6.1.5. — Avec les notations de la proposition 6.1.3, il y a un isomorphisme canonique de E-espaces vectoriels topologiques $i: V\otimes_E W^\vee\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_E(W,V)$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V\otimes_E W^\vee\otimes_E W \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(6.1.6)"'] & \mathrm{Hom}_E(W,V)\otimes_E W \arrow[d] \\ V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V \end{tikzcd}$$

où l'application $\mathrm{Hom}_E(W,V)\otimes_E W\to V$ envoie $f\otimes w$ sur $f(w)$ pour $f\in\mathrm{Hom}_E(W,V)$ et $w\in W$. L'isomorphisme i est de plus G-équivariant si l'on munit $V\otimes_E W^\vee$ de l'action diagonale de G et $\mathrm{Hom}_E(W,V)$ de l'action de G par $(g\cdot f)(w)=g(f(g^{-1}w))$ pour tout $g\in G$, $f\in\mathrm{Hom}_E(W,V)$ et $w\in W$. Enfin, on voit facilement en considérant l'action naturelle de $\mathfrak{g}_J\times\mathfrak{g}_J$ sur $\mathrm{Hom}_E(W,V)$ et par (6.1.7), que l'application i induit une bijection de E-espaces vectoriels topologiques équivariante sous l'action de G

$$(V\otimes_E W^\vee)_{J\backslash S\text{-an}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_S}(W,V).$$

Corollaire 6.1.6. — *Soient $V\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{la}}(G)$, $J\subseteq\Sigma_\wp$, W une représentation localement J-analytique irréductible de G de dimension finie sur E vérifiant* (6.1.4), *$V'\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{la}}(G)$ localement $\Sigma_\wp\setminus J$-analytique, alors la composée naturelle*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_G\big(V',(V\otimes_E W)_{\Sigma_\wp\backslash J\text{-an}}\big)\\ &\quad\longrightarrow\mathrm{Hom}_G\big(V'\otimes_E W^\vee,(V\otimes_E W)_{\Sigma_\wp\backslash J\text{-an}}\otimes_E W^\vee\big)\longrightarrow\mathrm{Hom}_G(V'\otimes_E W^\vee,V),\end{aligned}\tag{6.1.12}$$

est bijective, où la première application est donnée par $f\mapsto f\otimes\mathrm{id}$, et la deuxième est induite par (6.1.5).

Démonstration. — Comme (6.1.5) est injectif, (6.1.12) l'est aussi. Pour un morphisme $f : V' \otimes_E W^\vee \to V$, on note $i(f)$ la composée G-équivariante

$$V' \longrightarrow V' \otimes_E W^\vee \otimes_E W \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} V \otimes_E W$$

avec le premier morphisme induit par $E \to \mathrm{Hom}_E(W,W)$, $1 \mapsto \mathrm{id}$. Comme V' est localement $\Sigma_\wp \setminus J$-analytique, $i(f)$ se factorise à travers $i(f) : V' \to (V \otimes_E W)_{\Sigma_\wp \setminus J}$. On vérifie que $f \mapsto i(f)$ est un inverse de (6.1.12) à facteur scalaire non nul près. Ceci permet de conclure. ∎

6.1.3. Algèbres des distributions. — Soit $J \subseteq \Sigma_\wp$, avec $J \neq \varnothing$. Notons

$$\mathscr{D}_J(G,E) := \big(\mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,E)\big)^\vee_b$$

le dual continu du E-espace vectoriel $\mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,E)$ muni de la topologie forte. Notons

$$\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E) := \mathscr{D}_{\Sigma_\wp}(G,E).$$

On dispose d'une projection continue

$$\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E) \twoheadrightarrow \mathscr{D}_J(G,E) \tag{6.1.13}$$

induite par le plongement (G-équivariant) $\mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,E) \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,E)$.

Notons $I_J(G,E)$ le noyau de l'application (6.1.13).

Exemple 6.1.7. — Pour tout $g \in G$, notons $\delta_g \in \mathscr{D}_J(G,E)$ (pour tout $\varnothing \neq J \subseteq \Sigma_\wp$) *la distribution de Dirac pour* g définie par $\delta_g(f) := f(g)$ pour tout $f \in \mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,E)$.

Comme dans [**70**, p. 449], pour $\mathfrak{x} \in \mathfrak{g}$, l'action de $\mathfrak{x}$ sur $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,E)$ (*cf.* (6.1.2)) induit une application E-linéaire

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,E) \longrightarrow E, \quad f \longmapsto \big((-\mathfrak{x})\cdot f\big)(1).$$

Par conséquent, on obtient une injection $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \to \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E)$, qui induit une injection de E-algèbres

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \lhook\joinrel\longrightarrow \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E).$$

Soit $J \subseteq \Sigma_\wp$, on a $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J) \cong \otimes_{\sigma\in J}\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\sigma)$ et la projection d'algèbres de Lie :$\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \to \mathfrak{g}_J$ induit une projection de E-algèbres

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}_J). \tag{6.1.14}$$

Notons $I_J(\mathfrak{g},E)$ le noyau de (6.1.14). On voit facilement que la composée

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E) \longrightarrow \mathscr{D}_J(G,E)$$

se factorise à travers $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J)$, *i.e.* on dispose d'un diagramme commutatif de E-algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) & \longrightarrow & \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{U}(\mathfrak{g}_J) & \longrightarrow & \mathscr{D}_J(G,E). \end{array} \tag{6.1.15}$$

Proposition 6.1.8 (*cf.* [**74**, prop. 2.18]). — *Lorsque G est compact, $I_J(G,E)$ est l'idéal fermé engendré par $I_J(\mathfrak{g},E)$.*

D'après Schneider-Teitelbaum, si G est compact, alors $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E)$ est *une E-algèbre de Fréchet-Stein* (*cf.* [**71**, p. 152]) et $\mathscr{D}_J(G,E)$ l'est aussi par la proposition 6.1.8 et [**71**, prop. 3.7].

Soit V un E-espace vectoriel topologique localement convexe et de Hausdorff, alors il y a une application naturelle (voir [**70**, th. 2.2] et la discussion au-dessous de sa preuve) :

$$I : \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E),V)$$

(où $\mathscr{L}(V_1,V_2)$ désigne le E-espace vectoriel des fonctions E-linéaires continues de V_1 à V_2) telle que $I(f)(\delta_g) = f(g)$ pour tout $f \in \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$, $g \in G$. De même, pour tout $\varnothing \neq J \subseteq \Sigma_P$, il y a une application naturelle

$$I : \mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,V) \longrightarrow \mathscr{L}\big(\mathscr{D}_J(G,E),V\big).$$

Par définition (*e.g.* voir la preuve de [**70**, th. 2.2]), le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,V) & \xrightarrow{\ I\ } & \mathscr{L}(\mathscr{D}_J(G,E),V) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V) & \xrightarrow{\ I\ } & \mathscr{L}(\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E),V). \end{array} \tag{6.1.16}$$

Soit maintenant $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la}}(G)$. Alors V est donc munie d'une action de $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E)$ donnée par

$$\mu \cdot v := I(\rho_v)(\mu)$$

pour tout $\mu \in \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E)$ et $v \in V$, où $\rho_v : G \to V$, $g \mapsto g(v)$ est l'application orbite (*cf.* [**70**, prop. 3.2]). Son dual fort $V_b^\vee$ est donc aussi muni d'une action de $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E)$ donné par

$$(\mu \cdot f)(v) := f(\mu \cdot v)$$

pour tout $f \in V_b^\vee$ et $\mu \in \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E)$. Par le diagramme commutatif (6.1.16), si V est de plus localement J-analytique, alors l'action de $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(G,E)$ sur V, ainsi que sur $V_b^\vee$, se factorise à travers $\mathscr{D}_J(G,E)$.

Définition 6.1.9 (*cf.* [**71**, déf. p. 176]). — Soient G un groupe p-adique et $F_\wp$-analytique, V une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de G. On dit que V est *admissible* si V est un espace de type compact et le dual fort $V_b^\vee$ de V est un $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(H,E)$-module coadmissible (*cf.* [**71**, p. 152]) pour un (ou de manière équivalente tout) sous-groupe ouvert compact H de G.

Par la définition des modules coadmissibles (*cf.* [**71**, p. 152]), la proposition 6.1.8 et la discussion au-dessus de la définition 6.1.9, on a :

Lemme 6.1.10. — *Soient $J \subseteq \Sigma_\wp$, et V une représentation localement J-analytique de G. Alors V est admissible (comme représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de G) si et seulement si son dual fort $V_b^\vee$ est un $\mathscr{D}_J(H, E)$-module coadmissible pour un (ou de manière équivalente tout) sous-groupe ouvert compact H de G.*

6.1.4. Théorie de Fourier p-adique. — Soit $\chi : G \to E^\times$ un caractère continu de G.

On dit que χ est *localement J-analytique* si $\chi \in \mathscr{C}^{J\text{-an}}(G, E)$.

Notons $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}$ l'espace analytique rigide sur E qui paramètre les caractères localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathscr{O}_\wp$. En fait, $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}$ est la boule unité ouverte de dimension d sur E, puisque l'on a $\mathscr{O}_\wp \cong \mathbb{Z}_p^d$ comme groupes p-adiques. D'après [**68**, § 2], on sait que pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, il existe un sous-espace analytique rigide de dimension 1 de $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}$ sur E, noté $(\mathscr{W}_0)_\sigma$, qui paramètre les caractères localement σ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp$. Pour toute extension finie L de E, on a alors

$$(\mathscr{W}_0)_\sigma(L) = \big\{\chi \in (\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}(L) \ ; \ \chi \text{ est localement } \sigma\text{-analytique}\big\}.$$

Par la méthode de Schneider-Teitelbaum [**68**], pour tout $J \subseteq \Sigma_\wp$, on peut obtenir un sous-espace analytique rigide sur E de $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension $|J|$, noté $(\mathscr{W}_0)_J$, qui paramètre les caractères localement J-analytiques de $\mathscr{O}_\wp$ de la manière qui suit.

Notons

$$(\mathscr{W}_0)_J(\overline{E}) := \big\{\chi \in (\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}(\overline{E}) \ ; \ \chi \text{ est localement } J\text{-analytique}\big\}. \tag{6.1.17}$$

Soit $\lambda \in \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(\mathscr{O}_\wp, E)$, on définit *la transformation de Fourier F_λ* de λ (*cf.* [**68**, p. 452]) comme la fonction

$$F_\lambda : (\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}(\overline{E}) \longrightarrow \overline{E}, \quad \chi \longmapsto \lambda(\chi).$$

On en déduit un isomorphisme de E-algèbres de Fréchet-Stein (*cf.* [**68**, th. 2.2])

$$\mathscr{F} : \mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(\mathscr{O}_\wp, E) \xrightarrow{\sim} \Gamma\big((\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}, \mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}}\big), \quad \lambda \longmapsto F_\lambda,$$

où $\Gamma((\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}, \mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}})$ désigne la E-algèbre des fonctions analytiques sur $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}$. De la même façon que dans [**68**, §§ 1–2], on a :

Lemme 6.1.11. — *L'ensemble $(\mathscr{W}_0)_J(\overline{E})$ est un sous-ensemble analytique (cf. [**11**, § 9.5.2]) de $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}(\overline{E})$ défini par $F_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in I_J(\mathscr{O}_\wp, E)$. De plus, $\mathscr{F}(I_J(\mathscr{O}_\wp, E))$ est l'idéal de $\Gamma((\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}, \mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}})$ engendré par les fonctions qui s'annulent sur $(\mathscr{W}_0)_J(\overline{E})$.*

Notons $\mathscr{I}_J$ le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}}$ associé à $(\mathscr{W}_0)_J(\overline{E})$ (*cf.* [**11**, cor. 9.5.2/7]). Il existe alors un sous-espace analytique rigide fermé réduit $(\mathscr{W}_0)_J$ de $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}$ tel que (*cf.* [**11**, prop. 9.5.3/3])

$$\mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_J} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}} / \mathscr{I}_J.$$

On vérifie par définition que

$$(\mathscr{W}_0)_J(L) = \big\{\chi \in (\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}(L) \ ; \ \chi \text{ localement } J\text{-analytique}\big\},$$

pour toute extension finie L de E. De plus, comme $(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}$ est quasi-Stein, on obtient, en prenant les sections globales, un isomorphisme

$$\Gamma\big((\mathscr{W}_0)_J, \mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_J}\big) \xrightarrow{\sim} \Gamma\big((\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}, \mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p}}\big)/\mathscr{F}\left(I_J(\mathscr{O}_\wp, E)\right).$$

On a donc comme dans [**68**, th. 2.3] :

Proposition 6.1.12. — *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ induit un isomorphisme de E-algèbres de Fréchet-Stein :*

$$\mathscr{D}_J(\mathscr{O}_\wp, E) \xrightarrow{\sim} \Gamma\big((\mathscr{W}_0)_J, \mathscr{O}_{(\mathscr{W}_0)_J}\big).$$

On dispose d'un morphisme étale (de degré infini, voir la discussion au-dessous de [**68**, th. 2.3])

$$\mathrm{d} : (\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathbb{A}^d, \quad \chi \longmapsto \underline{k_\chi}$$

où $\underline{k_\chi}$ est le poids de χ défini comme dans la définition 4.4.1. Pour tout $J \subseteq \Sigma_\wp$, $J \neq \varnothing$, il y a alors un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{W}_0)_J & \longrightarrow & (\mathscr{W}_0)_{\mathbb{Q}_p} \\ {\scriptstyle \mathrm{d}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{d}}\downarrow \\ \mathbb{A}^{|J|} & \longrightarrow & \mathbb{A}^d \end{array}$$

où le morphisme en haut est le plongement fermé canonique, et le morphisme en bas (étant aussi un plongement fermé) est donné par $(a_\sigma)_{\sigma\in J} \longmapsto (a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\wp}$ avec $a_\sigma = 0$ lorsque $\sigma \notin J$. On a donc

Proposition 6.1.13. — *Soit $\varnothing \subsetneq J \subseteq \Sigma_\wp$, alors $(\mathscr{W}_0)_J$ est lisse, strictement quasi-Stein (cf.* [**37**, déf. 2.1.17 (iv)]*), et équidimensionnel de dimension $|J|$.*

Soient $\varnothing \subsetneq J \subseteq J' \subseteq \Sigma_\wp$, χ un caractère localement J'-analytique de $\mathscr{O}_\wp$ à valeurs dans $E^\times$, on dispose alors d'un isomorphisme d'espaces analytiques rigides

$$\chi : (\mathscr{W}_0)_{J'} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{W}_0)_{J'}, \quad \chi' \longmapsto \chi'\chi.$$

Notons $(\mathscr{W}_0)_J(\chi^{-1})$ le pull-back de $(\mathscr{W}_0)_J$ (étant un sous-espace rigide fermé de $(\mathscr{W}_0)_{J'}$) via l'isomorphisme ci-dessus, *i.e.* $(\mathscr{W}_0)_J(\chi^{-1})$ s'insère dans le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{W}_0)_J(\chi^{-1}) & \longrightarrow & (\mathscr{W}_0)_J \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathscr{W}_0)_{J'} & \xrightarrow{\chi} & (\mathscr{W}_0)_{J'}. \end{array}$$

Donc $(\mathscr{W}_0)_J(\chi^{-1})$ est aussi un sous-espace rigide fermé de $(\mathscr{W}_0)_{J'}$. De plus, la composée

$$(\mathscr{W}_0)_J \hookrightarrow (\mathscr{W}_0)_{J'} \xrightarrow{\chi} (\mathscr{W}_0)_{J'}$$

se factorise à travers $(\mathscr{W}_0)_J(\chi)$ et induit un isomorphisme d'espaces rigides sur E

$$(\mathscr{W}_0)_J \xrightarrow[\sim]{\chi} (\mathscr{W}_0)_J(\chi).$$

En fait, le sous-espace rigide $(\mathscr{W}_0)_J(\chi)$ de $(\mathscr{W}_0)_{J'}$ ne dépend que du poids de χ : si l'on note $\mathbb{A}^{|J|}(\underline{k_\chi})$ le sous-espace rigide fermé de $\mathbb{A}^{|J'|}$ de sorte que

$$\mathbb{A}^{|J|}(\underline{k_\chi})(L) = \left\{\underline{a}_{J'} \in L^{|J'|}\ ;\ a_\sigma = k_{\chi,\sigma}, \sigma \in J' \setminus J\right\},$$

pour toute extension finie L de E, alors il y a un diagramme cartésien d'espaces analytiques rigides sur E

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{W}_0)_J(\chi) & \longrightarrow & (\mathscr{W}_0)_{J'} \\ {\scriptstyle \mathrm{d}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{d}}\big\downarrow \\ \mathbb{A}^{|J|}(\underline{k_\chi}) & \longrightarrow & \mathbb{A}^{|J'|}. \end{array}$$

Comme dans [**37**, §6.4], on peut généraliser tout cela au cas où $\mathscr{O}_\wp$ est remplacé par un groupe $F_\wp$-analytique abélien topologiquement de type fini (*cf.* [**37**, prop. 6.4.1]). On a en particulier (voir [**37**, prop. 6.4.5–6.4.6]) :

Proposition 6.1.14. — *Soit Z un groupe $F_\wp$-analytique abélien topologiquement de type fini, alors il existe un espace analytique rigide strictement quasi-Stein $\widehat{Z}_J$ sur E qui paramètre les caractères localement J-analytiques de Z. On a un plongement naturel d'algèbres de Fréchet-Stein avec l'image dense*

$$\mathscr{D}_J(Z,E) \hookrightarrow \Gamma(\widehat{Z}_J, \mathscr{O}_{\widehat{Z}_J}). \tag{6.1.18}$$

De plus, lorsque Z est compact, (6.1.18) *est un isomorphisme.*

Soient $\varnothing \neq J \subseteq J' \subseteq \Sigma_\wp$, χ un caractère localement J'-analytique de Z à valeurs dans $E^\times$, on a alors un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur E

$$\chi : \widehat{Z}_{J'} \xrightarrow{\sim} \widehat{Z}_{J'}, \quad \chi' \longmapsto \chi'\chi.$$

La composée $\widehat{Z}_J \hookrightarrow \widehat{Z}_{J'} \overset{\chi}{\underset{\sim}{\rightarrow}} \widehat{Z}_{J'}$ se factorise à travers $\widehat{Z}_J \overset{\chi}{\underset{\sim}{\rightarrow}} \widehat{Z}_J(\chi)$ où $\widehat{Z}_J(\chi)$ est un sous-espace rigide fermé de $\widehat{Z}_{J'}$ défini de façon analogue à $(\mathscr{W}_0)_J(\chi)$ ci-avant. Enfin, par la définition des modules coadmissibles (*cf.* [**71**, p. 152]) et le fait que $\Gamma(\widehat{Z}_J, \mathscr{O}_{\widehat{Z}_J})$ est une algèbre de Fréchet-Stein (puisque $\widehat{Z}_J$ est strictement quasi-Stein, voir [**37**, § 2.1]), on peut déduire :

Proposition 6.1.15. — *Le foncteur $\mathscr{M} \longmapsto \Gamma(\widehat{Z}_J, \mathscr{M})$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux cohérents sur $\widehat{Z}_J$ et la catégorie des modules coadmissibles sur $\Gamma(\widehat{Z}_J, \mathscr{O}_{\widehat{Z}_J})$.*

Lorsque Z est de plus compact, le foncteur $\mathscr{M} \mapsto \Gamma(\widehat{Z}_J, \mathscr{M})_b^\vee$ induit (voir la proposition 6.1.14) une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux cohérents sur $\widehat{Z}_J$ et la catégorie des représentations localement J-analytiques admissibles de Z sur E.

6.1.5. Représentations essentiellement admissibles

Définition 6.1.16 (*cf.* [**37**, déf. 6.4.9]). — Soit G un groupe $F_\wp$-analytique de centre Z_G $F_\wp$-analytique et topologiquement de type fini. Pour une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique V de G sur E, on dit que V est essentiellement admissible si V est un espace de type compact et le dual fort $V_b^\vee$ est un module coadmissible sur l'algèbre de Fréchet-Stein $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}_p}(H,E)\widehat{\otimes}_E\Gamma(\widehat{(Z_G)}_{\Sigma_\wp}, \mathscr{O}_{\widehat{(Z_G)}_{\Sigma_\wp}})$ pour un (ou de manière équivalente tout) sous-groupe ouvert compact H de G.

Par la proposition 6.1.14 et la discussion au-dessus de la définition 6.1.9, on a :

Proposition 6.1.17. — *Soient $J \subseteq \Sigma_\wp$, V une représentation localement J-analytique de G sur E, alors V est essentiellement admissible (comme représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de G) si et seulement si $V_b^\vee$ est un module coadmissible sur l'algèbre de Fréchet-Stein*

$$\mathscr{D}_J(H,E)\widehat{\otimes}_E\Gamma\big(\widehat{(Z_G)}_J, \mathscr{O}_{\widehat{(Z_G)}_J}\big)$$

pour un (ou de manière équivalente tout) sous-groupe ouvert compact H de G.

Soient Z un groupe abélien $F_\wp$-analytique topologiquement de type fini, Z_0 un sous-groupe ouvert compact de Z. Pour une représentation localement J-analytique essentiellement admissible V de Z sur E, l'action de

$$\mathscr{D}_J(Z_0,E)\widehat{\otimes}_E\Gamma(\widehat{Z}_J, E)$$

sur $V_b^\vee$ se factorise donc à travers celle de $\Gamma(\widehat{Z}_J, E)$ (*cf.* (6.1.18)). Dans ce cas, on a par la proposition 6.1.15 une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux cohérents sur $\widehat{Z}_J$ et la catégorie des représentations localement J-analytiques essentiellement admissibles de Z sur E. Notons $\mathscr{M}(V)$ le faisceau cohérent sur $\widehat{Z}_J$ associé à V via cette anti-équivalence de catégories. On a donc

$$V \cong \Gamma\big(\widehat{Z}_J, \mathscr{M}(V)\big)_b^\vee.$$

Soit χ un caractère localement J-analytique de Z à valeurs dans $E^\times$. Pour une représentation localement J-analytique essentiellement admissible V de Z sur E, on note $V(\chi)$ la torsion de V par χ.

Lemme 6.1.18. — *La représenation localement J-analytique $V(\chi)$ de Z est essentiellement admissible, et*

$$\mathscr{M}\big(V(\chi)\big) \xrightarrow{\sim} (\chi^{-1})^*\mathscr{M}(V)$$

où χ^{-1} désigne l'isomorphisme d'espaces rigides sur E : $\widehat{Z}_J \to \widehat{Z}_J$, $\chi' \mapsto \chi'\chi^{-1}$.

Démonstration. — Notons $V' := \Gamma(\widehat{Z}_J, (\chi^{-1})^*\mathscr{M}(V))_b^\vee$, qui est, par l'anti-équivalence de catégories, une représentation localement J-analytique essentiellement admissible de Z sur E. De plus, l'application naturelle

$$\Gamma\big(\widehat{Z}_J, \mathscr{M}(V)\big) \longrightarrow \Gamma\big(\widehat{Z}_J, (\chi^{-1})^*\mathscr{M}(V)\big)$$

induit un isomorphisme d'espaces de type compact $i : V' \xrightarrow{\sim} V$ (puisque l'on a un isomorphisme $\chi^{-1} : \widehat{Z}_J \to \widehat{Z}_J$). On vérifie directement que

$$i\big(g(v')\big) = \chi^{-1}(g)g\big(i(v')\big)$$

pour tout $v' \in V'$ et $g \in Z$, autrement dit, $V' \cong V(\chi)$, ceci permet de conclure. ∎

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert admissible strictement quasi-Stein de $\widehat{Z}_J$ sur $\operatorname{Spec} E$. Notons

$$W := \Gamma\big(\mathscr{U}, \mathscr{M}(V)\big)_b^\vee.$$

Ce dernier est muni d'une représentation de Z induite par l'action naturelle de $\Gamma(\widehat{Z}_J, \mathscr{O}_{\widehat{Z}_J})$ sur $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{M}(V))$.

Lemme 6.1.19. — *La représentation W est une sous-représentation de V.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'application de restriction

$$\Gamma\big(\widehat{Z}_J, \mathscr{M}(V)\big) \longrightarrow \Gamma\big(\mathscr{U}, \mathscr{M}(V)\big)$$

est d'image dense. Comme $\mathscr{U}$ est strictement quasi-Stein, il existe une suite de sous-affinoïdes $\mathscr{U}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{U}_n \subseteq \cdots$ de $\mathscr{U}$ telle que

$$\bigcup_n \mathscr{U}_n = \mathscr{U} \quad \text{et} \quad \Gamma\big(\mathscr{U}, \mathscr{M}(V)\big) \cong \varprojlim_n \Gamma\big(\mathscr{U}_n, \mathscr{M}(V)\big).$$

On se ramène à montrer que $\Gamma(\widehat{Z}_J, \mathscr{M}(V))$ est dense dans $\Gamma(\mathscr{U}_n, \mathscr{M}(V))$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ce qui découle du fait que $\widehat{Z}_J$ est quasi-Stein. ∎

Soit X un espace rigide analytique strictement quasi-Stein sur $\operatorname{Spec} E$ (*cf.* [**37**, déf. 2.1.17 (iv)]),

$$A := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$$

est donc une E-algèbre de Fréchet-Stein. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $M := \Gamma(X, \mathscr{M})$ est un A-module coadmissible (et est aussi un E-espace de Fréchet nucléaire). Considérons le dual continu $U := M_b^\vee$ de M muni de la topologie forte, qui est un espace de type compact sur E muni naturellement d'une action continue de A (avec $(au)(m) = u(am)$ pour tout $a \in A$, $u \in U$ et $m \in M$). Notons :

- ▹ $(U \otimes_E \overline{E})^g$ le sous-espace vectoriel de $U \otimes_E \overline{E}$ engendré par les vecteurs propres généralisés pour A ;
- ▹ $U^g := U \cap (U \otimes_E \overline{E})^g$.

Lemme 6.1.20. — *Le E-espace vectoriel U^g est dense dans U.*

Démonstration. — Pour un idéal maximal fermé $\mathfrak{m}$ de A, et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, la projection naturelle $M \to M/\mathfrak{m}^n$ induit une injection $(M/\mathfrak{m}^n)^\vee \hookrightarrow M_b^\vee$ (noter que $M/\mathfrak{m}^n$ est de dimension finie sur E). Il est clair que

$$U_0^g := \sum_{\mathfrak{m}} \varinjlim_n (M/\mathfrak{m}^n)^\vee \subseteq U$$

(avec $\mathfrak{m}$ parcourant les idéaux maximaux fermés de A) est contenu dans U^g. Il suffit alors de montrer que $\overline{U_0^g} = U$ où $\overline{U_0^g}$ désigne l'adhérence de U_0^g dans U. Noter que si $U_0^g = 0$ alors $U = 0$ par le lemme de Nakayama. En effet, pout tout ouvert affinoïde $Y = \operatorname{Spm} B$ de X,

$$M_B := \Gamma(Y, \mathscr{M}) \cong M \otimes_A B$$

est alors un B-module de type fini. Pour tout idéal maximal fermé $\mathfrak{m}$ de B, on a

$$M_B/\mathfrak{m}^n \cong M/\mathfrak{m}^n$$

(on renvoie à [**71**, §3] pour des propriétés des modules coadmissibles sur une algèbre de Fréchet-Stein ; noter aussi que l'on peut déduire $A/\mathfrak{m}^n \cong B/\mathfrak{m}_B^n$ de [**11**, prop. 7.2.2/1 (ii)]). Si $U_0^g = 0$, par le lemme de Nakayama, on en déduit que $M_B = 0$ pour tout B comme ci-dessus et donc $U = 0$.

Soit $W := U/\overline{U_0^g}$. En prenant le dual strict de la suite exacte

$$0 \to \overline{U_0^g} \longrightarrow U \longrightarrow W \to 0,$$

on obtient une suite exacte de A-modules coadmissibles (correspondant à des faisceaux cohérents sur $\mathscr{U}$)

$$0 \to W_b^\vee \longrightarrow M \longrightarrow (\overline{U_0^g})_b^\vee \to 0.$$

On définit W_0^g de la même façon que U_0^g en remplaçant M par $M' := W_b^\vee$, et on note $\mathscr{M}'$ le faisceau cohérent sur $\mathscr{U}$ associé à M'. Il suffit alors de montrer que l'application induite $U_0^g \to W_0^g$ est surjective (d'où on peut déduire $W_0^g = 0$ puis $W = 0$ par le lemme de Nakayama). On se ramène à montrer que pour tout idéal maximal fermé $\mathfrak{m}$ de A (qui correspond à un point z de X), l'application naturelle

$$\varinjlim_n (M/\mathfrak{m}^n)^\vee \longrightarrow \varinjlim_n (M'/\mathfrak{m}^n)^\vee \tag{6.1.19}$$

est surjective. Soient $Y = \operatorname{Spm} B$ un ouvert affinoïde X contenant z et

$$M_B := \Gamma(Y, \mathscr{M}) \cong M \otimes_A B, \quad M'_B := \Gamma(Y, \mathscr{M}') \cong M' \otimes_A B$$

(voir [**37**, §2.1], [**71**, cor. 3.1]). Soit $\mathfrak{m}_B$ l'idéal maximal de B correspondant à z. Donc M_B et M'_B sont des B-modules de type fini, et pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ on a

$$M/\mathfrak{m}^n \cong M_B/\mathfrak{m}_B^n, \quad M'/\mathfrak{m}^n \cong M'_B/\mathfrak{m}_B^n$$

Par le lemme d'Artin-Rees, il existe $r(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que

$$(\mathfrak{m}_B^{r(n)} M_B) \cap M'_B \subseteq \mathfrak{m}_B^n M'_B.$$

L'application naturelle $(M_B/\mathfrak{m}_B^{r(n)}M_B)^\vee \to (M'_B/((\mathfrak{m}_B^{r(n)}M_B)\cap M'_B))^\vee$ est surjective (comme sa duale est injective), mais $(M'_B/\mathfrak{m}_B^n M'_B)^\vee$ est évidemment contenu dans le dernier, d'où on déduit que (6.1.19) est surjective. Ceci permet de conclure. $\square$

En particulier, on voit que les vecteurs propres généralisés sont denses dans une représentation localement J-analytique essentiellement admissible de Z.

6.2. Modules de Jacquet-Emerton

Reprenons les notations du §6.1.1. Soit $\mathbb{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbb{G}$, notons $\overline{\mathbb{P}}$ le parabolique composé, $\mathbb{M}$ un facteur de Levi de $\mathbb{P}$ et $\overline{\mathbb{P}}$, $\mathbb{N}$ et $\overline{\mathbb{N}}$ leur radical unipotent respectif. Notons

$$P := \mathbb{P}(F_\wp), \quad \overline{P} := \overline{\mathbb{P}}(F_\wp), \quad M := \mathbb{M}(F_\wp), \quad N := \mathbb{N}(F_\wp), \quad \overline{N} := \overline{\mathbb{N}}(F_\wp)$$

d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{p}$, $\overline{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}$.

Dans [**33**], le foncteur de Jacquet-Emerton

$$J_P(-) : \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(P) \longrightarrow \mathrm{Rep}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{la},c}(M)$$

est défini (où on renvoie à *loc. cit.* pour la définition).

On peut vérifier que si V est localement J-analytique, $J_P(V)$ l'est aussi (*e.g.* par le plongement (6.2.1)) ci-dessous). On note encore $J_P(-)$ la composée

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(P) \longrightarrow \mathrm{Rep}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{la},c}(M),\ V \longmapsto V_{|P} \longmapsto J_P(V_{|P}).$$

D'après Emerton, on a

Théorème 6.2.1 (*cf.* [**33**, th. 0.5]). — *Soit V une représentation localement J-analytique essentiellement admissible de G sur E, alors $J_P(V)$ est une représentation localement J-analytique essentiellement admissible de M sur E.*

Remarque 6.2.2. — Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$, comme le foncteur de Jacquet-Emerton est exact à gauche (*cf.* [**33**, lemme 3.4.7 (ii)]), on dispose d'un plongement naturel

$$J_P(V_{J\text{-an}}) \lhook\joinrel\longrightarrow J_P(V)_{J\text{-an}}$$

pour tout $J \subseteq \Sigma_\mathfrak{p}$. Mais ce dernier *n'est pas* un isomorphisme en général. Par exemple, par [**16**, th. 4.3], on montre qu'il existe des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques V telles que

$$V_{J\text{-an}} = 0 \quad \text{et} \quad J_P(V)_{J\text{-an}} \neq 0.$$

Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$, alors $J_P(V)$ est muni d'une action de P induite par la projection

$$P \longrightarrow P/N \cong M.$$

Soit P_0 un sous-groupe ouvert compact de P, notons

$$M_0 := M \cap P_0, \quad N_0 := N \cap P_0.$$

On a une application équivariante sous l'action de M_0N_0 (*cf.* [**33**, (3.4.8)]) :

$$J_P(V) \longrightarrow V \tag{6.2.1}$$

qui *dépend* du choix de P_0.

Lemme 6.2.3. — *L'application* (6.2.1) *est injective.*

Démonstration. — On utilise les notations de [**33**, §3.2]. Il suffit de montrer que l'application, que l'on note ici f, dans [**33**, (3.2.2)] est injective. Démontrons que le sous-espace vectoriel $W := f^{-1}(V_{\mathrm{null}})$ de V_{fs} est Z-stable. En effet, comme f est Z^+-équivariant, W est Z^+-stable. Soient $w \in W$, $z \in Z$, il existe alors $z' \in Z^+$ tel que $z'z \in Z^+$. On a $z'(zw) = (z'z)w \in W$, donc $z'f(zw) = f(z'zw) \in V_{\mathrm{null}}$, d'où on déduit $f(zw) \in V_{\mathrm{null}}$ ainsi que $zw \in W$. Par [**33**, lemme 3.2.17], on a

$$(V_{\mathrm{null}})_{\mathrm{fs}} = 0.$$

Par [**33**, prop. 3.2.4 (ii)] (appliqué à $W = W$ et $V = V_{\mathrm{null}}$), la restriction Z^+-équivariante $f : W \to V_{\mathrm{null}}$ est nulle. Encore par [**33**, prop. 3.2.4 (ii)] (appliqué cette fois à $W = W$ et $V = V$), on montre que l'application $W \hookrightarrow V_{\mathrm{fs}}$ est nulle, et donc $W = 0$. Ceci permet de conclure. $\square$

L'application (6.2.1) est fonctorielle en V. En particulier, pour $J \subseteq \Sigma_\wp$, la composée

$$J_P(V_{J\text{-an}}) \longrightarrow J_P(V) \longrightarrow V$$

se factorise à travers $V_{J\text{-an}}$. On a de plus :

Lemme 6.2.4. — *Soient $U \in \mathrm{Rep}^z_{\mathrm{la},c}(M)$ et $f : U \to J_P(V)$ un morphisme M-équivariant. Si l'image de la composée*

$$U \longrightarrow J_P(V) \longrightarrow V$$

est contenue dans $V_{J\text{-an}}$, alors f se factorise à travers $J_P(V_{J\text{-an}})$.

Démonstration. — On prend les notations de [**33**]. On a

$$J_P(V) \cong (V^{N_0})_{\mathrm{fs}} \quad \text{et} \quad J_P(V_{J\text{-an}}) \cong \big((V_{J\text{-an}})^{N_0}\big)_{\mathrm{fs}}$$

(*cf.* [**33**, déf. 3.4.5]), et l'application en (6.2.1)) est la composée naturelle

$$(V^{N_0})_{\mathrm{fs}} \longrightarrow V^{N_0} \longrightarrow V.$$

Comme l'image de $U \to J_P(V) \to V$ est contenue dans $V_{J\text{-an}}$, on obtient une application équivariante sous l'action de M^+ (*cf.* [**33**, §3.2]) :$U \to (V_{J\text{-an}})^{N_0}$. D'après [**33**, prop. 3.2.4 (ii)], cette dernière se factorise à travers $((V_{J\text{-an}})^{N_0})_{\mathrm{fs}}$, d'où le lemme. $\square$

Soit $U \in \mathrm{Rep}^{z}_{\mathrm{la},c}(M)$, notons $\mathscr{C}^{\infty}_c(N,U)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur N à valeurs dans U. Cet espace est muni d'une action de N donnée par translation à droite sur les fonctions. On munit alors $\mathscr{C}^{\infty}_c(N,U)$ d'une action de P (qui prolonge celle de N) par

$$\big((mn)\cdot f\big)(n') := m\big(f(m^{-1}n'mn)\big) \tag{6.2.2}$$

pour tout $m \in M$, $n,n' \in N$ et $f \in \mathscr{C}^{\infty}_c(N,U)$. On a en fait $\mathscr{C}^{\infty}_c(N,U) \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(P)$ (*cf.* [**35**, §3.5]). On dispose d'un foncteur

$$\mathscr{C}^{\infty}_c(N,-) : \mathrm{Rep}^{z}_{\mathrm{la},c}(M) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(P).$$

Le foncteur de Jacquet-Emerton $J_P(-)$ est « adjoint » de droite à $\mathscr{C}^{\infty}_c(N,-)$ (*cf.* [**33**, th. 0.3]) : pour tout $U \in \mathrm{Rep}^{z}_{\mathrm{la},c}(M)$, $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(P)$, il y une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_P\left(\mathscr{C}^{\infty}_c(N,U),V\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_M\left(U(\delta),J_P(V)\right), \tag{6.2.3}$$

où δ désigne le caractère module de M associé au parabolique P.

Les résultats du reste de cette section ne seront utilisés que dans le prochain chapitre. Supposons $\mathbb{G}$ quasi-déployé avec $\mathbb{P}$ un sous-groupe de Borel de $\mathbb{G}$, $\mathbb{M}$ est donc un tore, *i.e.* $Z_M = M$. Par le théorème 6.2.1 et la discussion au-dessous de la proposition 6.1.17, pour toute représentation V localement J-analytique essentiellement admissible de G sur E, il existe un faisceau cohérent $\mathscr{J}_P(V)^{\vee}$ sur $\widehat{M}_J$ tel que

$$\Gamma\big(\widehat{M}_J,\mathscr{J}_P(V)^{\vee}\big) \cong J_P(V)^{\vee}_b.$$

Proposition 6.2.5. — *Soit V une représentation localement J-analytique essentiellement admissible de G, et supposons qu'il existe un sous-groupe ouvert compact H de G tel que la restriction $V_{|H}$ soit isomorphe à $\mathscr{C}^{J\text{-an}}(H,E)^{\oplus r}$ pour un certain $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Notons*

$$M_0 := H \cap M$$

(qui est donc un sous-groupe ouvert compact de M), pour un ouvert admissible $\mathscr{U}$ de $\widehat{M}_J$, $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{J}_P(V)^{\vee})$ est un $\mathscr{D}_J(M_0,E)$-module sans torsion (*voir* (6.2.4) *ci-dessous pour l'action de $\mathscr{D}_J(M_0,E)$ sur $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{J}_P(V)^{\vee})$).*

L'action de $\mathscr{D}_J(M_0,E)$ sur $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{J}_P(V)^{\vee})$ provient de la composée

$$\mathscr{D}_J(M_0,E) \xrightarrow[\sim]{(6.1.18)} \Gamma(\widehat{(M_0)}_J,\mathscr{O}_{\widehat{(M_0)}_J}) \longrightarrow \Gamma(\widehat{M}_J,\mathscr{O}_{\widehat{M}_J}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{U},\mathscr{O}_{\widehat{M}_J}) \tag{6.2.4}$$

où la deuxième application est induite par le morphisme naturel

$$\widehat{M}_J \longrightarrow \widehat{(M_0)}_J, \quad \chi \longmapsto \chi_{|M_0}.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\Gamma(\mathscr{U},\mathscr{J}_P(V)^{\vee})$ est un $\mathscr{D}_J(M_0,E)$-module sans torsion pour tout affinoïde $\mathscr{U} \cong \mathrm{Spm}\, B$ de $\widehat{M}_J$. Comme l'espace analytique rigide $\widehat{M}_J$ est strictement quasi-Stein (*cf.* [**37**, déf. 2.1.17 (iv)]), il admet un recouvrement admissible

$$\{\mathscr{U}_i \cong \mathrm{Spm}\, B_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

par des affinoïdes tel que $\mathscr{U}_i$ soit un ouvert admissible relativement compact de $\mathscr{U}_j$ lorsque $i < j$. Il existe donc $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\mathscr{U}$ soit un ouvert admissible de $\mathscr{U}_i$, et on a

$$\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{J}_P(V)^\vee) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathscr{U}_i, \mathscr{J}_P(V)^\vee)\widehat{\otimes}_{B_i} B \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathscr{U}_i, \mathscr{J}_P(V)^\vee) \otimes_{B_i} B$$

(où le deuxième isomorphisme découle du fait que $\Gamma(\mathscr{U}_i, \mathscr{J}_P(V)^\vee)$ est un B_i-module de type fini). Comme B est plat sur B_i (*cf.* [**11**, cor. 7.3.2/6]), il suffit de montrer que $\Gamma(\mathscr{U}_i, \mathscr{J}_P(V)^\vee)$ est un $\mathscr{D}_J(M_0, E)$-module sans torsion. Étant donné que $J_P(V)_b^\vee$ est un module coadmissible sur $\mathscr{B} := \Gamma(\widehat{M}_J, \mathscr{O}_{\widehat{M}_J}) \cong \varprojlim B_i$, on a

$$\Gamma\big(\mathscr{U}_i, \mathscr{J}_P(V)^\vee\big) \xrightarrow{\sim} J_P(V)_b^\vee \otimes_{\mathscr{B}} B_i.$$

Comme B_i est plat sur $\mathscr{B}$ (*cf.* [**71**, rem. 3.2]), il suffit de montrer que $J_P(V)_b^\vee$ est un $\mathscr{D}_J(M_0, E)$-module sans torsion. D'après Emerton (*cf.* [**33**, (4.2.43)]), il existe un recouvrement admissible affinoïde $\{\mathscr{V}_n \cong \operatorname{Spm} A_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ de $(\widehat{M_0})_J$ avec $\mathscr{V}_i \subseteq \mathscr{V}_{i+1}$ relativement compact pour tout i, tel que (voir la notation 6.2.6 ci-dessous)

$$J_P(V)_b^\vee \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \big(E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{E[z]}(W_n \widehat{\otimes}_E A_n)\big) \tag{6.2.5}$$

où W_n est un espace de Banach sur E et où z agit sur le A_n-module de Banach orthonormalisable $W_n \widehat{\otimes}_E A_n$ par un opérateur A_n- linéaire et compact. Comme on a

$$\mathscr{D}_J(M_0, E) \cong \varprojlim_n A_n,$$

il suffit de montrer que $E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{E[z]}(W_n \widehat{\otimes}_E A_n)$ est un A_n-module sans torsion, et on conclut par le corollaire 6.4.9 dans l'appendice ci-dessous. ∎

Notation 6.2.6. — Soient W, V deux E-espaces de Fréchet, notons $W\widehat{\otimes}_E V$ le produit tensoriel projectif (ou de manière équivalente le produit tensoriel injectif, voir [**67**, prop. 17.6]) complété. Soit R une E-algèbre, supposons de plus que W et V sont munis d'une action continue de R ; on note

$$W\widehat{\otimes}_R V$$

le quotient de $W\widehat{\otimes}_E V$ par l'adhérence du sous-E-espace vectoriel engendré par

$$\langle rw \otimes v - w \otimes rv \rangle \quad \text{pour tout } r \in R,\ w \in W \text{ et } v \in V.$$

6.3. Loi d'adjonction

6.3.1. Induites paraboliques. — On donne des rappels sur les induites paraboliques localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques suivant [**35**, § 2].

Reprenons les notations du § 6.2. Soient $J \subseteq \Sigma_\wp$, $U \in \operatorname{Rep}_{\mathrm{la},c}(P)$, supposons de plus U localement J-analytique, et posons

$$(\operatorname{Ind}_P^G U)^{J\text{-an}} := \big\{f \in \mathscr{C}^{J\text{-an}}(G, U)\ ;\ f(bg) = b(f(g)) \text{ pour tout } b \in P,\ g \in G\big\}.$$

On munit ce dernier de la topologie induite (en tant que sous-espace fermé de $\mathscr{C}^{J\text{-an}}(G,U)$) et d'une action de G à droite par

$$(gf)(g') := f(g'g)$$

pour tous $g, g' \in G$ et $f \in (\mathrm{Ind}_P^G U)^{J\text{-an}}$. On vérifie que $(\mathrm{Ind}_P^G U)^{J\text{-an}}$ est une représentation localement J-analytique de G. On a par définition

$$(\mathrm{Ind}_P^G U)^{J\text{-an}} \xrightarrow{\sim} \big((\mathrm{Ind}_P^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big)_{J\text{-an}}.$$

D'après [**35**, prop. 2.1.2], on a :

Proposition 6.3.1. — *Si U est une représentation localement J-analytique admissible* (*resp. essentiellement admissible*) *de M, alors $(\mathrm{Ind}_P^G U)^{J\text{-an}}$ est une représentation localement J-analytique admissible* (*resp. essentiellement admissible*) *de G.*

Dans la suite de cette sous-section, on considère l'induite parabolique avec $\overline{P}$ (plutôt que P). Soit $U \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(M)$, qui est donc munie d'une action localement J-analytique de $\overline{P}$ induite par celle de M via la projection $\overline{P} \twoheadrightarrow M$.

Soit $f \in (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}$, notons $\mathrm{supp}(f)$ le support de f dans $P\backslash G$, qui est un sous-ensemble ouvert compact de $P\backslash G$ (*cf.* [**35**, (2.3)]. Soit Ω un ouvert de $\overline{P}\backslash G$ et posons

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega) := \big\{f \in (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}\ ;\ \mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega\big\}.$$

C'est un sous-E-espace vectoriel de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}$ stable sous l'action de $\mathfrak{g}$ (*cf.* [**35**, lemme 2.3.5 (ii)]).

Remarque 6.3.2

(1) On voit facilement que $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega)$ est le sous-E-espace vectoriel de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(\Omega)$ engendré par les vecteurs sur lesquels l'action de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ se factorise à travers $\mathfrak{g}_J$.

(2) Si Ω est un sous-ensemble ouvert compact de $N \hookrightarrow \overline{P}\backslash G$, d'après [**35**, lemme 2.3.3], on a alors un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques

$$\mathscr{C}^{J\text{-an}}(\Omega, U) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega). \tag{6.3.1}$$

Soient $f \in (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}$ et Ω un ouvert de $\overline{P}\backslash G$. On définit *la restriction de f à Ω* (*cf.* [**35**, §2.3]) :

$$f_{|\Omega}(g) := \begin{cases} f(g) & \text{si } \overline{P}g \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $\Omega \subseteq \Omega'$ deux ouverts de $\overline{P}\backslash G$, on dispose donc d'une application

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega') \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega), \quad f \longmapsto f_{|\Omega}. \tag{6.3.2}$$

Soit $x \in \overline{P}\backslash G$ et posons

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{J\text{-an}} := \varinjlim_{x\in\Omega} (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega)$$

où Ω parcourt tous les voisinages de x ouverts compacts dans $\overline{P}\backslash G$, et où l'application de transition est l'application de restriction (6.3.2).

Soit $f \in (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}$ et notons f_x l'image de f dans $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{J\text{-an}}$ via l'application naturelle

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}} \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{J\text{-an}}.$$

L'application (6.3.2) est équivariante sous l'action de $\mathfrak{g}$, ainsi $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{J\text{-an}}$ est muni d'une action naturelle de $\mathfrak{g}$ pour tout $x \in \overline{P}\backslash G$. Soit $g \in G$, alors l'action de g sur $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}$ induit une application

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega) \xrightarrow{\ g\ } (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(\Omega g^{-1}),$$

on en déduit donc une application

$$g : (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{J\text{-an}} \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_{xg^{-1}}^{J\text{-an}}.$$

Enfin, par la remarque 6.3.2, $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{J\text{-an}}$ est le sous-espace vectoriel de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ engendré par les vecteurs sur lesquels l'action de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ se factorise à travers $\mathfrak{g}_J$.

Soit X une sous-représentation fermée de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Pour tout Ω ouvert de $\overline{P}\backslash G$, on pose

$$X(\Omega) := X \cap \big((\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(\Omega)\big),$$

qui est stable par $\mathfrak{g}$.

Définition 6.3.3 (*cf.* [**35**, déf. 2.4.1]). — On dit que X est une *sous-représentation fermée locale* de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ si pour tout $f \in X$ et tout Ω ouvert compact de $\overline{P}\backslash G$, $f_{|\Omega} \in X(\Omega)$ ou, de manière équivalente, $f_{|\Omega}$ est encore dans X.

Exemple 6.3.4. — La représentation $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}$ est une sous-représentation fermée locale de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$.

Soit X une sous-représentation fermée locale de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$, pour $x \in \overline{P}\backslash G$, posons

$$X_x := \varinjlim_{x\in\Omega} X(\Omega)$$

qui est une sous-représentation de $\mathfrak{g}$ de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)_x^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Notons $e \in \overline{P}\backslash G$ le « neutre » point (correspondant à $\overline{P}$). La représentation X est en fait déterminée par X_e :

Proposition 6.3.5 (*cf.* [**35**, prop. 2.4.7 (iii)]). — *Avec les notations précédentes, on a*

$$X = \big\{f \in (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\ ;\ g(f_x) \in X_e \textit{ pour tout } x = \overline{P}g \in \overline{P}\backslash G\big\}.$$

Notons

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E) = \text{l'anneau affine du groupe algébrique } \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^{F_\wp} \mathbb{N} \times_{\mathbb{Q}_p} E.$$

On munit $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E)$ de la topologie convexe la plus fine. Cet espace a donc une action naturelle ($\mathbb{Q}_p$-algébrique) de N et une action $\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\mathfrak{n}$. Notons

$$\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,E)$$

le sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E)$ sur lequel l'action de $\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ se factorise à travers $\mathfrak{n}_J$. On voit que $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,E)$ est stable sous l'action de N. Enfin, on munit $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E)$ d'une action de P (qui prolonge celle de N) par

$$\big((mn)\cdot f\big)(n') := f(m^{-1}n'mn)$$

pour tout $m \in M$ et $n, n' \in N$ et $f \in \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E)$. Noter que $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,E)$ est encore stable sous l'action de P.

Exemple 6.3.6. — Soit $\mathbb{N} = \mathbb{G}_a$ (donc $N = F_\wp$), on a

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(F_\wp,E) \cong E\big[\sigma(z)\big]_{\sigma\in\Sigma_\mathfrak{p}} := \bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\mathfrak{p}} E\big[\sigma(z)\big].$$

Pour tout $\underline{m}_{\Sigma_\wp} = (m_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d$ et $1_\tau := \underline{m}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d$ avec $m_\tau = 1$ et $m_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \neq \tau$, notons

$$z^{\underline{m}_{\Sigma_p}} := \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} \sigma(z)^{m_\sigma}.$$

L'action de $N = F_\wp$ sur $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(F_\wp,E)$ est donc donnée par

$$a\cdot z^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}} = (z+a)^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}}$$

pour tout $a \in F_\wp$ et $\underline{m}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$. L'action de $\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}$ sur $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(F_\wp,E)$ est donnée par

$$X_\sigma\cdot(z^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m_\sigma = 0\,, \\ m_\sigma z^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}-1_\sigma} & \text{sinon,}\end{cases}$$

pour tout $\underline{m}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$, où $X_\sigma = 1 \in \mathfrak{n}_\sigma$. On a alors

$$\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(F_\wp,E) \cong E\big[\sigma(z)\big]_{\sigma\in J} := \bigotimes_{\sigma\in J} E\big[\sigma(z)\big].$$

Soit V un $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp})$-module, notons

$$V^{\mathfrak{n}^\infty} := \varinjlim_k V^{\mathfrak{n}^k}$$

où $V^{\mathfrak{n}^k}$ désigne le sous-$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp})$-module de V annulé par $(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp})^k$, la puissance k-ième de l'idéal d'augmentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp})$.

Lemme 6.3.7 (*cf.* [**35**, lemme 2.5.3]). — *On a un isomorphisme de E-espaces vectoriels équivariant sous l'action de* $\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}$

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}),E)^{\mathfrak{n}^\infty} \quad f \longmapsto \big(X \mapsto (X\cdot f)(1)\big)$$

où $\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}$ *agit sur* $\mathrm{Hom}_E(U(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}),E)^{\mathfrak{n}^\infty}$ *par la translation à droite sur les fonctions.*

Remarque 6.3.8. — La projection $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{n}_J)$ induit une injection

$$\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_J),E)^{\mathfrak{n}^\infty} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}),E)^{\mathfrak{n}^\infty},$$

(où on considère $\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_J),E)$ comme $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp})$-module via la projection $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}) \twoheadrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{n}_J)$) dont l'image est le sous-E-espace de $\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}),E)^{\mathfrak{n}^\infty}$ engendré par les vecteurs sur lesquels l'action de $\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}$ se factorise à travers $\mathfrak{n}_J$. On a donc un diagramme commutatif équivariant sous l'action de $\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,E) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_J),E)^{\mathfrak{n}^\infty} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}),E)^{\mathfrak{n}^\infty}. \end{array}$$

Pour une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique U de M sur E, posons

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U) := U \otimes_E \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,E)$$

qui est muni d'une action localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de P donnée par

$$\big((mn)\cdot f\big)(n') = m\big(f(m^{-1}n'mn)\big) \tag{6.3.3}$$

pour tout $m \in M$, n, $n' \in N$ et $f \in \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)$. Si U est de plus localement J-analytique pour un certain $J \subseteq \Sigma_\wp$, posons

$$\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U) := U \otimes_E \mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,E).$$

On vérifie que $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U) = \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)_{J\text{-an}}$ comme représentations de P.

Par le lemme 6.3.7, on a un isomorphisme de E-espaces vectoriels équivariant sous l'action de $\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}$:

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_E\big(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}),U\big)^{\mathfrak{n}^\infty}.$$

Comme on a $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \cong \mathrm{U}(\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp}) \otimes_E \mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp})$, on obtient un isomorphisme de E-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_E(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}),U)^{\mathfrak{n}^\infty} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp})}\big(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}),U\big)^{\mathfrak{n}^\infty}$$

où U est muni d'une action de $\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp}$ induite par celle de $\mathfrak{m}_{\Sigma_\wp}$ via la projection $\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_{\Sigma_\wp}$. De plus, on peut vérifier que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp})}\big(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}),U\big)^{\mathfrak{n}^\infty} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp})}\big(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}),U\big)$$

est stable sous l'action de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})$ donnée par $(X\cdot f)(Y) = f(YX)$ pour $X, Y \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp})}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}), U)$. Par conséquent, on peut munir $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)$ d'une action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ induite par celle sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp})}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}), U)^{\mathfrak{n}^\infty}$ via l'isomorphisme

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}\left(\overline{\mathfrak{p}}_{\Sigma_\wp}\right)}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}), U)^{\mathfrak{n}^\infty}. \tag{6.3.4}$$

Proposition 6.3.9 (*cf.* [**35**, lemme 2.5.8]). — *L'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ sur $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)$ est continue et compatible avec celle de P, i.e. les actions de $\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp}$ induites par $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ (en restriction) et par P sont les mêmes.*

Remarque 6.3.10. — Supposons de plus U localement J-analytique. Par la remarque 6.3.8, on voit que l'application (6.3.4) induit un isomorphisme

$$\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}\left(\overline{\mathfrak{p}}_J\right)}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J), U)^{\mathfrak{n}^\infty}.$$

On peut donc munir $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U)$ d'une action de $\mathfrak{g}_J$ (ainsi que d'une action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ via la projection $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_J$). Le plongement $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U) \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)$ est équivariant sous l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ et de P.

Proposition 6.3.11 (*cf.* [**35**, (2.5.20)]). — *On a une injection équivariante sous l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$*

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U) \longhookrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)_e^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \tag{6.3.5}$$

dont l'image est dense.

Remarque 6.3.12. — Si U est de plus localement J-analytique, l'application (6.3.5) induit une injection équivariante sous l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$:

$$\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U) \longhookrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)_e^{J\text{-an}}. \tag{6.3.6}$$

De la même façon que dans [**35**, § 2.5], on montre que l'image de (6.3.6) est dense.

En considérant U comme l'ensemble des fonctions constantes de N à valeurs dans U, on obtient un plongement équivariant sous l'action de P (où l'action de P sur U est induite par la projection $P \twoheadrightarrow M$) :

$$U \longhookrightarrow \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U). \tag{6.3.7}$$

Si U est localement J-analytique, alors (6.3.7) se factorise à travers $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U)$. On déduit de (6.3.7) une application équivariante sous l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ et P :

$$U(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})} U \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U). \tag{6.3.8}$$

Remarque 6.3.13. — Supposons de plus U localement J-analytique, comme $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)$ stable sous l'action de P et $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$, et contient l'image de l'application (6.3.7), l'image de (6.3.8) est aussi contenue dans $\mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U)$. Par conséquent, (6.3.8) se factorise en une application

$$U(\mathfrak{g}_J)\otimes_{U(\mathfrak{p}_J)} U \longrightarrow \mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N,U). \tag{6.3.9}$$

Notons $\mathscr{C}_c^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N,U)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N,U)$ engendré par les fonctions à support compact, muni d'une action de P donnée par

$$\big((mn)\cdot f\big)(n') := m\big(f(m^{-1}n'mn)\big)$$

pour tout $m\in M$, $n,n'\in N$ et $f\in\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N,U)$. Par le plongement ouvert $N\hookrightarrow \overline{P}\backslash G$, on déduit de (6.3.1) une application

$$\mathscr{C}_c^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N,U) \longrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N) \tag{6.3.10}$$

qui est un isomorphisme topologique équivariant sous l'action de P, par [**35**, lemme 2.3.6]. On voit par définition que $\mathscr{C}_c^\infty(N,U)$ (muni de l'action de P donnée par (6.2.2)) est une sous-représentation de P de $\mathscr{C}_c^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N,U)$, donc de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N)$. Notons $I_{\overline{P}}^G(U)$ la sous-représentation de G donnée par l'adhérence dans $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ de la sous-représentation de G engendrée par $\mathscr{C}_c^\infty(N,U)$. Si U est de plus localement J-analytique, le plongement

$$\mathscr{C}_c^\infty(N,U) \hookrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N)$$

se factorise à travers $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}(N)$, par conséquent, $I_{\overline{P}}^G(U)$ est une sous-représentation fermée de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{J\text{-an}}$. En particulier, dans ce cas, $I_{\overline{P}}^G(U)$ est aussi localement J-analytique.

Définition 6.3.14 (*cf.* [**35**, déf. 0.11]). — Soit U une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de M sur E, notons $\mathscr{H} := \mathrm{End}_M(U)$. On dit que U est *recevable* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) U est un espace de type compact et est isomorphe à une union d'espaces de BH (*cf.* [**37**, déf. 1.1.1]) stables par Z_M ;

(2) tout élément de $\mathscr{L}_{\mathscr{H}[M]}(U\otimes_E W_1, U\otimes_E W_2)$ est strict (*i.e.* son image est fermée) pour toutes représentations algébriques de dimension finie W_1, W_2 de M (où l'action de $\mathscr{H}[M]$ sur $U\otimes_E W_i$ est donnée par $(hm)\cdot(u\otimes w) = (h(mu))\otimes(mw)$ pour tout $h\in\mathscr{H}$, $m\in M$, $u\in U$ et $w\in W_1$).

Exemple 6.3.15

(1) Toutes les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques essentiellement admissibles de M sont recevables. En effet, soit U une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique essentiellement admissible de M, la condition (1) est satisfaite par définition (voir aussi [**37**, prop. 6.4.7]). Soient W_1, W_2 deux représentations

algébriques de dimension finie, on voit que $\mathscr{L}_{\mathscr{H}[M]}(U \otimes_E W_1, U \otimes_E W_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_M(U \otimes_E W_1, U \otimes_E W_2)$. Mais on sait que les représentations $U_i := U \otimes_E W_i$, $i = 1, 2$, sont aussi essentiellement admissibles, on en déduit que tout élément de $\mathrm{Hom}_M(U \otimes_E W_1, U \otimes_E W_2)$ est strict (*cf.* [**37**, prop. 6.4.11]).

(2) Supposons $M = Z$ abélien, soient $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur $\widehat{Z}_{\Sigma_\wp}$ et $\mathscr{U}$ un ouvert admissible strictement quasi-Stein de $\widehat{Z}_{\Sigma_\wp}$ (*cf.* [**37**, déf. 2.1.17 (iv)]), alors la représentation $U := \Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{F})_b^\vee$ de Z (où l'action de Z provient de la composée $Z \to \Gamma(\widehat{Z}_{\Sigma_\wp}, \mathscr{O}_{\widehat{Z}_{\Sigma_\wp}}) \to \Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathscr{U}}))$ est recevable. En fait, comme $\mathscr{U}$ est strictement quasi-Stein, il admet un recouvrement admissible $\{\mathscr{U}_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ par des affinoïdes tel que $\mathscr{U}_i$ soit un ouvert admissible relativement compact de $\mathscr{U}_j$ lorsque $i < j$. On a $U \cong \varinjlim_i \Gamma(\mathscr{U}_i, \mathscr{F})_b^\vee$, d'où la condition (1). Notons
$$R := \Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathscr{U}})$$
pour simplifier. On a alors un morphisme de E-algèbres $R \to \mathrm{End}_M(U)$ induit par l'application naturelle
$$R \longrightarrow \mathrm{End}_R(U_b^\vee),\ r \longmapsto (u \mapsto ru).$$
Soient W_1, W_2 deux représentations algébriques de dimension r_1, r_2, on voit que
$$\mathscr{L}_{\mathscr{H}[M]}(U \otimes_E W_1, U \otimes_E W_2)$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(U \otimes_E W_1, U \otimes_E W_2)$, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_R(U^{\oplus r_1}, U^{\oplus r_2}) \cong \mathrm{Hom}_R((U^{\oplus r_2})_b^\vee, (U^{\oplus r_1})_b^\vee)$ (où l'isomorphisme découle du fait que U est réflexif). Mais tout élément de
$$\mathrm{Hom}_R\left((U^{\oplus r_2})_b^\vee, (U^{\oplus r_1})_b^\vee\right)$$
est strict puisque $U_b^\vee$ est un R-module coadmissible, d'où la condition (2).

Par [**35**, lemme 2.8.8 et proposition 2.8.10], on a :

Proposition 6.3.16. — *Soit U une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique recevable de M sur E. Alors $I_P^G(U)_e$ est une sous-représentation fermée locale de $(\mathrm{Ind}_P^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. De plus, la fibre $I_P^G(U)_e$ est le sous-E-espace vectoriel fermé de $(\mathrm{Ind}_P^G U)_e^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ engendré par l'image de la composée :*
$$U(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})} U \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N, U) \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_P^G U\right)_e^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.$$

Ceci, combiné avec les remarques 6.3.12 et 6.3.13, permet d'obtenir :

Corollaire 6.3.17. — *Supposons de plus U localement J-analytique, alors la fibre $I_P^G(U)_e$ est le sous-espace fermé de $(\mathrm{Ind}_P^G U)_e^{J\text{-an}}$ engendré par l'image de la composée :*
$$U(\mathfrak{g}_J) \otimes_{U(\mathfrak{p}_J)} U \longrightarrow \mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N, U) \longrightarrow (\mathrm{Ind}_P^G U)_e^{J\text{-an}}.$$

Par (6.2.3), on peut déduire du plongement de P-représentations

$$\mathscr{C}_c^\infty(N, U) \longrightarrow (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$$

une application fermée M-équivariante

$$U(\delta) \longrightarrow J_P\big(\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big). \tag{6.3.11}$$

Soit P_0 un sous-groupe ouvert compact de P avec $M_0 := P_0 \cap M$, par (6.2.1), on obtient une application fermée M_0-équivariante

$$U(\delta) \longrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}. \tag{6.3.12}$$

D'après [**35**, lemme 2.8.3], $I_{\overline{P}}^G(U)$ est la sous-représentation fermée de $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ engendrée par l'image de (6.3.12).

Proposition 6.3.18 (*cf.* [**35**, cor. 5.1.4]). — *Le plongement de représentations de G :*

$$I_{\overline{P}}^G(U) \longhookrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$$

induit un isomorphisme :

$$J_P\big(I_{\overline{P}}^G(U)\big) \xrightarrow{\sim} J_P\big(\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big). \tag{6.3.13}$$

6.3.2. Loi d'adjonction. — On fixe un sous-groupe ouvert compact P_0 de P dans cette sous-section. Par conséquent, on fixe le plongement (6.2.1) pour tout objet V de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$.

Soient V un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$ et U un objet de $\mathrm{Rep}^{\mathrm{z}}_{\mathrm{la},c}(M)$. Étant donné un morphisme de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de G sur E

$$I_{\overline{P}}^G(U) \longrightarrow V,$$

en prenant les modules de Jacquet-Emerton puis la composition avec (6.3.11) et l'inverse de (6.3.13), on obtient un morphisme M-équivariant

$$U(\delta) \longrightarrow J_P(V).$$

On a alors une injection (car la représentation $I_{\overline{P}}^G(U)$ peut être « engendrée » par $U(\delta)$, *cf.* [**35**, (0.4)])

$$\mathrm{Hom}_G(I_{\overline{P}}^G(U), V) \longhookrightarrow \mathrm{Hom}_M\big(U(\delta), J_P(V)\big). \tag{6.3.14}$$

Du plongement $\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp}$-équivariant (6.2.1), on déduit une application $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})$-équivariante

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})} J_P(V) \longrightarrow V, \quad X \otimes w \longmapsto X \cdot w, \tag{6.3.15}$$

pour tout $X \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})$ et $w \in J_P(V)$, où l'on note encore w son image dans V via (6.2.1).

On munit U d'une action de $\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp}$ par la projection $\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_{\Sigma_\wp}$, et on dispose donc d'une application $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})$-équivariante donnée par la composée

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})} U(\delta) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})} J_P\big(I_{\overline{P}}^G(U)\big) \longrightarrow I_{\overline{P}}^G(U). \tag{6.3.16}$$

Signalons que si U est de plus localement J-analytique, alors (6.3.16) se factorise à travers :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)}U(\delta)\longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}_J)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)}J_P\big(I_P^G(U)\big)\longrightarrow I_P^G(U), \tag{6.3.17}$$

car $I_P^G(U)$ est aussi localement J-analytique dans ce cas (voir la discussion au-dessus de la définition 6.3.14).

Définition 6.3.19 (*cf.* [**35**, déf. 0.8]). — Soient V un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(G)$ et U un objet de $\mathrm{Rep}^{z}_{\mathrm{la},c}(M)$.

- ▹ Un morphisme de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de M
$$\iota : U(\delta)\longrightarrow J_P(V)$$
est dit *équilibré* si le noyau de la composée
$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})}U(\delta)\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\iota}\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})}J_P(V)\xrightarrow{(6.3.15)}V \tag{6.3.18}$$
contient celui de (6.3.16).
- ▹ $\mathrm{Hom}_M(U(\delta),J_P(V))^{\mathrm{bal}}$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_M(U(\delta),J_P(V))$ engendré par les morphismes équilibrés.

Remarque 6.3.20

(1) On voit facilement que l'image de l'application (6.3.14) est contenue dans $\mathrm{Hom}_M(U(\delta),J_P(V))^{\mathrm{bal}}$.

(2) Les applications (6.3.16) et (6.3.18) dépendent du choix de P_0, mais la condition pour que ι soit équilibré est en fait indépendante du choix de P_0 (voir [**35**, déf. 0.8]).

Reprenons les notations de la définition 6.3.19, comme δ est un caractère lisse de M, on a un isomorphisme canonique de E-espaces vectoriels topologiques $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$-équivariant

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})}U\xrightarrow{\sim}\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})}U(\delta),\quad a\otimes u\longmapsto a\otimes u. \tag{6.3.19}$$

Lemme 6.3.21. — *L'isomorphisme* (6.3.19) *induit un isomorphisme entre le noyau de* (6.3.8) *et celui de* (6.3.16).

Démonstration. — L'application (6.3.12) est égale à la composée suivante (voir la preuve de [**35**, lemme 2.8.3])

$$U(\delta)\longrightarrow \mathscr{C}_c^\infty(N,U)\lhook\joinrel\longrightarrow (\mathrm{Ind}_P^G U)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$$

où la première application envoie u sur $f_u\in\mathscr{C}_c^\infty(N,U)$ définie par $f_u(x)=u$ pour tout $x\in N_0\,(=P_0\cap N)$ et $f_u(x)=0$ si $x\in N\setminus N_0$ et où on renvoie à la discussion au-dessus de la définition 6.3.14 pour la deuxième application). On en déduit que le noyau de (6.3.16) est égal au noyau de l'application (voir (6.3.10))

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})}U(\delta)\longrightarrow \mathscr{C}_c^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N,U). \tag{6.3.20}$$

Or, la composition de (6.3.20) et (6.3.19) est égale à la composée suivante (*cf.* [**35**, §2.5 et §2.8])

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})}U &\xrightarrow{(6.3.8)} \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)\\ &\hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N,U)\otimes_E \mathscr{C}_c^{\infty}(N,E)\hookrightarrow \mathscr{C}_c^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N,U)\end{aligned}$$

où la deuxième application envoie f sur $f\otimes 1_{N_0}$ ($1_{N_0}\in\mathscr{C}_c^{\infty}(N,E)$ est tel que $1_{N_0}(x)=1$ pour tout $x\in N_0$ et $1_{N_0}(x)=0$ pour tout $x\in N\setminus N_0$), et où on renvoie à [**35**, (2.5.23) et lemme 2.5.24] pour la troisième application. Le lemme en découle. ∎

De même, on a :

Lemme 6.3.22. — *Soit $J\subseteq\Sigma_\wp$ et supposons U localement J-analytique, alors l'isomorphisme de E-espaces vectoriels topologiques $\mathfrak{g}_J$-équivariant*

$$U(\mathfrak{g}_J)\otimes_{U(\mathfrak{p}_J)}U \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g}_J)\otimes_{U(\mathfrak{p}_J)}U(\delta),\quad a\otimes u\longmapsto a\otimes u,$$

induit un isomorphisme entre le noyau de (6.3.9) *et celui de* (6.3.17).

Proposition 6.3.23. — *Soit $J\subseteq\Sigma_\wp$, reprenons les notations de la définition* (6.3.19) *et supposons de plus U localement J-analytique, alors un morphisme $\iota: U(\delta)\to J_P(V)$ est équilibré si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *L'image de ι est contenue dans $J_P(V_{J\text{-an}})$;*

(2) *Le noyau de la composée*

$$U(\mathfrak{g}_J)\otimes_{U(\mathfrak{p}_J)}U(\delta)\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\iota} U(\mathfrak{g}_J)\otimes_{U(\mathfrak{p}_J)}J_P(V)\longrightarrow V$$

contient celui de la composée en (6.3.17).

Démonstration. — Supposons ι équilibré, comme l'application (6.3.16) se factorise à travers $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)}U(\delta)$, l'application (équivariante sous l'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$)

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp})\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{\Sigma_\wp})}\mathrm{Im}(\iota)\longrightarrow V$$

se factorise par $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)}\mathrm{Im}(\iota)\to V_{J\text{-an}}$, d'où on déduit $\mathrm{Im}(\iota)\subseteq J_P(V_{J\text{-an}})$ par le lemme 6.2.4. La condition (2) est satisfaite car ι est équilibré.

Réciproquement, supposons que ι satisfait les conditions (1) et (2). Par (1), on voit que l'application (6.3.18) se factorise par

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)}U(\delta)\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\iota}\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)}J_P(V_{J\text{-an}})\longrightarrow V_{J\text{-an}},$$

(puisque la composée $J_P(V_{J\text{-an}})\to J_P(V)\to V$ se factorise à travers $V_{J\text{-an}}$, voir la discussion au-dessus du lemme 6.2.4). Le fait que ι soit équilibré découle alors de la condition (2). ∎

Définition 6.3.24 (*cf.* [**35**, déf. 0.12]). — Soit V une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique admissible de G sur E, on dit que V est très fortement admissible s'il existe une injection continue de représentations de G sur E :$V \hookrightarrow W$ avec W une représentation de Banach admissible de G (*cf.* [**69**, §3]).

Théorème 6.3.25 (*cf.* [**35**, th. 0.13]). — *Soient U une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique recevable de M sur E, V une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique très fortement admissible de G sur E, alors l'application suivante* (*cf.* (6.3.14)) *est bijective :*

$$\mathrm{Hom}_G\big(I_{\overline{P}}^G(U), V\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_M\big(U(\delta), J_P(V)\big)^{\mathrm{bal}}.$$

6.3.3. Le cas $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$. — On applique les résultats qui précèdent au cas

$$G = \mathrm{GL}_2(F_\wp), \quad P = B(F_\wp) \text{ ou } \overline{B}(F_\wp)$$

(sous-groupes de Borel triangulaire supérieur ou triangulaire inférieur), $M = T(F_\wp)$ et $N = \left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) ; \lambda \in F_\wp\right\}$ (voir [**17**, §2.1] pour le cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). Le caractère module δ de P est donc égal à $\mathrm{unr}(q^{-1}) \otimes \mathrm{unr}(q)$ où $\mathrm{unr}(z)$ désigne le caractère non ramifié de $F_\wp^\times$ envoyant ϖ sur z. Pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, notons

$$h_\sigma := \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{t}_\sigma$$

(où $\mathfrak{t}$ désigne l'algèbre de Lie de $T(F_\wp)$),

$$X_{+,\sigma} := \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{n}_\sigma \quad \text{et} \quad X_{-,\sigma} := \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \in \overline{\mathfrak{n}}_\sigma.$$

Soit U un objet de $\mathrm{Rep}^z_{\mathrm{la},c}(T(F_\wp))$. Puisque (*cf.* l'exemple 6.3.6)

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N, E) \cong E\big[\sigma(z)\big]_{\sigma\in\Sigma_\wp},$$

on a un isomorphisme

$$\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N, U) \xrightarrow{\sim} U\big[\sigma(z)\big]_{\sigma\in\Sigma_\wp} := U \otimes_E E\big[\sigma(z)\big]_{\sigma\in\Sigma_\wp}.$$

Rappelons que $\mathscr{C}^{\mathbb{Q}_p-\mathrm{pol}}(N, U)$ est muni d'une action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ par (6.3.4), le lemme suivant suit directement de la définition de cette action (voir l'exemple 6.3.6 pour les notations).

Lemme 6.3.26. — *L'action de $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}$ sur $[\sigma(z)]_{\sigma\in\Sigma_\wp}$ est donnée comme suit.*

(1) *Pour tout $Z_\sigma = \left(\begin{smallmatrix}a_\sigma & 0\\ 0 & d_\sigma\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{t}_\sigma$ et tout $u \in U$, $\underline{m}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$, on a*

$$Z_\sigma \cdot (uz^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}}) = m_\sigma(d_\sigma - a_\sigma)uz^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}} + (Z_\sigma \cdot u)z^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}}.$$

(2) *Pour tout $u \in U$, $\underline{m}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$, on a*

$$X_{+,\sigma} \cdot (uz^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } m_\sigma = 0, \\ m_\sigma uz^{\underline{m}_{\Sigma_\wp} - 1_\sigma} & \text{sinon}. \end{cases}$$

(3) *Pour tout* $u \in U$, $\underline{m}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$, *on a*

$$X_{-,\sigma} \cdot (uz^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}}) = (h_\sigma \cdot u) z^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}+1_\sigma} - m_\sigma u z^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}+1_\sigma}.$$

Comme $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_J) \cong \mathrm{U}(\overline{\mathfrak{n}}_J) \otimes_E \mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{U}(\overline{\mathfrak{n}}_J) \otimes_E U \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(\mathfrak{g}_J) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p}_J)} U.$$

Par le lemme précédent, on obtient :

Lemme 6.3.27. — *La composée*

$$U(\overline{\mathfrak{n}}_J) \otimes_E U \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g}_J) \otimes_{U(\mathfrak{p}_J)} U \xrightarrow{(6.3.9)} \mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N, U)$$

est donnée par

$$\Big(\bigotimes_{\sigma \in J} X^{m_\sigma}_{-,\sigma}\Big) u \longmapsto \Big(\prod_{\sigma \in J} \prod_{j=0}^{m_\sigma - 1} (h_\sigma - j)\Big) \cdot uz^{\underline{m}_{\Sigma_\wp}}$$

pour tout $\underline{m}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ *et* $u \in U$, *avec la convention met* $\prod_{j=0}^{m_\sigma - 1}(h_\sigma - j) := 1$ *lorsque* $m_\sigma = 0$.

Proposition 6.3.28. — *Soit* U *une représentation localement* J*-analytique recevable de* $T(F_\wp)$ *sur* E *(donc munie d'une action* E*-linéaire de* $\mathfrak{t}_J$*), supposons de plus que* U *est un* $U(\mathfrak{t}_J)$*-module divisible (i.e. pour tout* $u \in U$ *et* $X \in U(\mathfrak{t}_J)$, $X \neq 0$, *il existe* $u' \in U$ *tel que* $X \cdot u' = u$*), alors le plongement de représentations de* $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ *:*

$$I^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}_{\overline{B}(F_\wp)}(U) \longleftrightarrow \big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}_{\overline{B}(F_\wp)} U\big)^{J\text{-an}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme U est divisible comme $\mathrm{U}(\mathfrak{t}_J)$-module, par le lemme 6.3.27, l'application (6.3.9) est surjective. La proposition découle alors du corollaire 6.3.17, de la remarque 6.3.12 et de la proposition 6.3.5. ∎

Remarque 6.3.29. — Soit T_0 un sous-groupe ouvert compact de $T(F_\wp)$, $\mathrm{U}(\mathfrak{t}_J)$ est donc une sous-E-algèbre de $\mathscr{D}_J(T_0, E)$. Par la condition (2) de la définition 6.3.14, on voit que U est un $\mathrm{U}(\mathfrak{t}_J)$-module divisible si $U_b^\vee$ est un $\mathscr{D}_J(T_0, E)$-module sans torsion.

La proposition 6.3.28, combinée avec le théorème 6.3.25, permet d'obtenir le résultat suivant.

Corollaire 6.3.30. — *Soient* U *une représentation localement* J*-analytique recevable de* $T(F_\wp)$ *telle que* U *soit un* $U(\mathfrak{t}_J)$*-module divisible, et* V *une représentation localement* $\mathbb{Q}_p$*-analytique très fortement admissible de* $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$, *alors il y a une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big((\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}_{\overline{B}(F_\wp)} U)^{J\text{-an}}, V\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{T(F_\wp)}\big(U(\delta), J_B(V)\big)^{\mathrm{bal}}.$$

Définition 6.3.31. — Soit $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $E^\times$. On dit que χ est σ-*dominant* pour $\overline{B}(F_\wp)$ si $k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (*cf.* définition 4.4.1). Notons

$$C_{\overline{B}}(\chi) := \{\sigma \in \Sigma_\wp \ ;\ \chi_1 \otimes \chi_2 \text{ est } \sigma\text{-dominant}\}.$$

Pour un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique χ de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $E^\times$, on note

$$E[\chi] = E \cdot e_\chi$$

la représentation de $T(F_\wp)$ correspondante. On vérifie directement que l'action de $\mathfrak{t}_{\Sigma_\wp}$ sur $E[\chi]$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & d_\sigma \end{pmatrix} \cdot e_\chi = (a_\sigma k_{\chi_1,\sigma} + d_\sigma k_{\chi_2,\sigma}) e_\chi$$

pour tout $\begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & d_\sigma \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}_\sigma$ et $\sigma \in \Sigma_\wp$.

Proposition 6.3.32. — *Soit χ un caractère localement J-analytique de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $E^\times$ tel que $J \cap C_{\overline{B}}(\chi) = \varnothing$, alors l'application suivante* (*cf.* (6.3.9)) *est un isomorphisme :*

$$U(\mathfrak{g}_J) \otimes_{U(\mathfrak{p}_J)} E[\chi] \longrightarrow \mathscr{C}^{J-\mathrm{pol}}(N, E[\chi]).$$

Démonstration. — On a $h_\sigma \cdot e_\chi = (k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma}) e_\chi$ avec $k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la proposition découle donc du lemme 6.3.27. ∎

Corollaire 6.3.33. — *Soient $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caractère localement J-analytique de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $E^\times$, et V une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique très fortement admissible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E. Supposons de plus $C_{\overline{B}}(\chi) \cap J = \varnothing$. Alors on a une bijection de E-espaces vectoriels*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\left((\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi_1 \otimes \chi_2)^{J\text{-an}}, V\right) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{T(F_\wp)}\left(E[\chi\delta], J_P(V_{J\text{-an}})\right). \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme $C_{\overline{B}}(\chi) \cap J = \varnothing$, par la proposition 6.3.32 et le lemme 6.3.22, la composée en (6.3.17) est injective (avec $U = E[\chi]$). Par la proposition 6.3.23, on a alors une bijection

$$\mathrm{Hom}_{T(F_\wp)}\left(E[\chi\delta], J_P(V)\right)^{\mathrm{bal}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{T(F_\wp)}\left(E[\chi\delta], J_P(V_{J\text{-an}})\right).$$

De plus, de la même façon que dans la preuve de la proposition 6.3.28 et par la proposition 6.3.32, le plongement de représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$

$$I_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} E[\chi] \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi_1 \otimes \chi_2\right)^{J\text{-an}}$$

est un isomorphisme (cela découle aussi du fait que la représentation localement J-analytique $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi_1 \otimes \chi_2)^{J\text{-an}}$ de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ est topologiquement irréductible selon [**74**, cor. 2.10]). Le corollaire découle donc du théorème 6.3.25. ∎

Remarque 6.3.34. — Signalons que ce corollaire peut aussi se déduire comme cas particulier de [**16**, th. 4.3].

6.4. Appendice

Le but de cet appendice est de montrer le corollaire 6.4.9, qui joue un rôle essentiel dans la preuve de la proposition 6.2.5.

Soit A une algèbre affinoïde intègre sur E munie d'une norme $\|.\|_A$ et notons

$$A\langle X_1,\dots,X_s\rangle := g\Big\{\sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^s_{\geq 0}} a_{\underline{m}}X^{\underline{m}}\ ;\ a_{\underline{m}}\in A \text{ tels que } \|a_{\underline{m}}\|_A\to 0,\ |\underline{m}|\to+\infty\Big\}$$

qui est une algèbre affinoïde munie de la norme de Gauss, où

$$X^{\underline{m}} := \prod_{1\leq i\leq s} X_i^{m_i} \quad \text{et} \quad |\underline{m}| := \sum_{i=1}^{s} m_i.$$

Posons

$$A\{\{X_1,\dots,X_s\}\} := \Big\{\sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^s_{\geq 0}} a_{\underline{m}}X^{\underline{m}}\ ;\ a_{\underline{m}}\in A \text{ tels que } \|a_{\underline{m}}\|_A r^{|\underline{m}|}\to 0,\ |\underline{m}|\to+\infty, \forall r\in\mathbb{R}_+\Big\}.$$

On a donc

$$A\{\{X_1,\dots,X_s\}\} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n A\langle\varpi^n X_1,\dots,\varpi^n X_s\rangle$$

où

$$A\langle\varpi^n X_1,\dots,\varpi^n X_s\rangle = \Big\{\sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^s_{\geq 0}} a_{\underline{m}}\varpi^{n|\underline{m}|}X^{\underline{m}}\ ;\ a_{\underline{m}}\in A \text{ tels que } \|a_{\underline{m}}\|_A\to 0,\ |\underline{m}|\to+\infty\Big\}$$

et où les morphismes de transition sont les injections canoniques.

On munit $A\{\{X_1,\dots,X_s\}\}$ de la topologie limite projective ; donc $A\{\{X_1,\dots,X_s\}\}$ est un E-espace de Fréchet.

Lemme 6.4.1. — *On a un isomorphisme d'espaces de Fréchet sur E*

$$E\{\{X_1,\dots,X_s\}\}\widehat{\otimes}_E A \xrightarrow{\sim} A\{\{X_1,\dots,X_s\}\}$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}(6.4.1)\quad E\{\{X_1,\dots,X_s\}\}\widehat{\otimes}_E A &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_n E\langle\varpi^n X_1,\dots,\varpi^n X_d\rangle)\widehat{\otimes}_E A\\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_n (E\langle\varpi^n X_1,\dots,\varpi^n X_d\rangle\widehat{\otimes}_E A) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n A\langle\varpi^n X_1,\dots,\varpi^n X_d\rangle\\ &\xrightarrow{\sim} A\{\{X_1,\dots,X_s\}\}\end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme suit de [**37**, prop. 1.1.29] et où le troisième isomorphisme découle de [**11**, prop. 6.1.1/11]. ∎

Notons

$$\begin{aligned} A\{\{z, z^{-1}\}\} &:= A\{\{X_1, X_2\}\}/(X_1X_2 - 1)\,, \\ A\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle &:= A\langle \varpi^n X_1, \varpi^n X_2\rangle/(X_1X_2 - 1). \end{aligned}$$

Soient M un module de Banach orthonormalisable sur A, u un opérateur A-linéaire compact sur M (*cf.* [**25**, §A1]). On peut voir M comme un $E[z]$-module (et un $A[z]$-module) avec $z \cdot m = u(m)$ pour tout $m \in M$.

Lemme 6.4.2. — *On a un isomorphisme de $A\{\{z, z^{-1}\}\}$-modules*

$$E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{E[z]}M \xrightarrow{\sim} A\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{A[z]}M.$$

Démonstration. — On sait que $E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{E[z]}M$ est le quotient de l'espace de Fréchet $E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_E M$ par le sous-E-espace vectoriel fermé V engendré par

$$\langle zf \otimes m - f \otimes (z \cdot m)\rangle$$

pour tout $f \in E\{\{z, z^{-1}\}\}$ et $m \in M$ (noter que V est en fait un $A\{\{z, z^{-1}\}\}$-module où l'action de A provient de celle sur M). De même, $A\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{A[z]}M$ est le quotient de $A\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_A M$ par le sous-A-module (sous-$A\{\{z, z^{-1}\}\}$-module) fermé V' engendré par $\langle zf \otimes m - f \otimes (z \cdot m)\rangle$ pour tout $f \in A\{\{z, z^{-1}\}\}$ et $m \in M$. Par le lemme 6.4.1, on a

$$E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_E M \xrightarrow{\sim} E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_E A\widehat{\otimes}_A M \xrightarrow{\sim} A\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_A M.$$

Cet isomorphisme induit un isomorphisme (de $A\{\{z, z^{-1}\}\}$-modules) entre V et V', d'où le lemme. $\square$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, considérons le module

$$M_n := A\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle\widehat{\otimes}_{A[z]}M.$$

Par [**33**, prop. 2.2.6 (ii)], M_n est un

$$\mathscr{A}_n := A\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle\text{-module de type fini.}$$

Notons

$$B_A[q^{-n}, q^n] := \operatorname{Spm}\left(A\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle\right)$$

et $\mathscr{M}_n$ le faisceau cohérent sur $B_A[q^{-n}, q^n]$ associé à M_n. Comme les affinoïdes

$$\{B_A[q^{-n}, q^n]\}_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$$

forment un recouvrement admissible de $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$, on peut recoller les $\{\mathscr{M}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ pour obtenir un faisceau cohérent $\mathscr{M}$ sur $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$. On a

$$\Gamma(\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m, \mathscr{M}) \cong \varprojlim_n (\mathscr{A}_n\widehat{\otimes}_{A[z]}M) \cong A\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{A[z]}M. \tag{6.4.2}$$

En effet, comme dans le lemme 6.4.2, on a

$$\mathscr{A}_n\widehat{\otimes}_{A[z]}M \cong E\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle\widehat{\otimes}_{E[z]}M.$$

Mais d'après [**37**, prop. 1.1.29], l'application

$$E\{\{z,z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_E M \longrightarrow \varprojlim_n \big(E\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \widehat{\otimes}_E M\big)$$

est un isomorphisme. Donc le deuxième isomorphisme en (6.4.2) découle de la même façon que dans la preuve du lemme 6.4.2.

Soit $x \in (\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m)(\overline{E})$ et notons :

$$\mathscr{M}_x := \varinjlim_{\mathscr{U}} \Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{M})$$

(où $\mathscr{U}$ parcourt tous les ouverts admissibles contenant x) la fibre de $\mathscr{M}$ en x. Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $x \in B_A[q^{-n}, q^n]$ et notons :

- ▹ $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathscr{A}_n$ associé à x,
- ▹ k_x le corps résiduel en x (qui est une extension finie de E),
- ▹ $(\mathscr{A}_n)_{\mathfrak{m}_x}$ le localisé de $\mathscr{A}_n$ en $\mathfrak{m}_x$,
- ▹ $(M_n)_{\mathfrak{m}_x}$ le localisé de M_n en $\mathfrak{m}_x$, et
- ▹ $\overline{(M_n)_{\mathfrak{m}_x}} := (M_n)_{\mathfrak{m}_x} \otimes_{(\mathscr{A}_n)_{\mathfrak{m}_x}} k_x \cong M_n \otimes_{\mathscr{A}_n} k_x$.

Comme $(\mathscr{A}_n)_{\mathfrak{m}_x}$ est un anneau local noethérien (*cf.* [**11**, prop. 7.3.2/7]), par le lemme de Nakayama, on sait que

$$(M_n)_{\mathfrak{m}_x} = 0 \iff \overline{(M_n)_{\mathfrak{m}_x}} = 0.$$

Notons

$$\operatorname{supp}(\mathscr{M}) := \big\{x \in (\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m)(\overline{E})\ ;\ \mathscr{M}_x \neq 0\big\} \tag{6.4.3}$$

le support de $\mathscr{M}$ (*cf.* [**11**, §9.5.2]).

Lemme 6.4.3. — *On a*

$$\operatorname{supp}(\mathscr{M}) \cap B_A[q^{-n}, q^n] = \big\{x \in (\operatorname{Spm} \mathscr{A}_n)(\overline{E})\ ;\ \overline{(M_n)_{\mathfrak{m}_x}} \neq 0\big\}.$$

Démonstration. — Par [**11**, prop. 9.4.2/6], on a pour tout $x \in (B_A[q^{-n}, q^n])(\overline{E})$:

$$\mathscr{M}_x = 0 \iff (M_n)_{\mathfrak{m}_x} = 0.$$

Le lemme découle donc du lemme de Nakayama. □

Notons $F(z) \in A\{\{z\}\}$ la série caractéristique de u sur M (*cf.* [**25**, A.2]) et Z le lieu des zéros de $F(z^{-1})$ dans $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$. La proposition qui suit a été mentionnée à la fin de la preuve de [**33**, prop. 4.2.36], on en donne une preuve pour la commodité du lecteur.

Proposition 6.4.4. — *On a* $\operatorname{supp}(\mathscr{M}) = Z$.

Démonstration. — Soient y un point de $\mathrm{Spm}\, A$, $\mathfrak{m}_y$ l'idéal maximal de A associé. Soit $k_y := A/\mathfrak{m}_y$, qui est une extension finie de E. Le point y correspond à un morphisme

$$i_y : \mathrm{Spec}\, k_y \times \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Spm}\, A \times \mathbb{G}_m.$$

Considérons le k_y-espace vectoriel $M_y := M\widehat{\otimes}_A k_y$ qui est muni naturellement d'une action k_y-linéaire de $u \otimes 1$. De plus, $u \otimes 1$ est aussi un opérateur compact. Notons $F_y(T) \in k_y\{\{T\}\}$ la série caractéristique de $u \otimes 1$ sur M_y, par [**25**, lemme A.2.5], $F_y(T)$ est l'image de $F(T)$ via la projection

$$A\{\{T\}\} \longrightarrow A/\mathfrak{m}_y\{\{T\}\}.$$

Donc le lieu des zéros Z_y de $F_y(T^{-1})$ dans $k_y \times \mathbb{G}_m$ est égal à $i_y^{-1}(Z)$. Notons

$$\mathrm{supp}(\mathscr{M})_y := i_y^{-1}\big(\mathrm{supp}(\mathscr{M})\big).$$

Il suffit de montrer $Z_y = \mathrm{supp}(\mathscr{M})_y$ pour tout $y \in \mathrm{Spm}\, A$. Notons

$$\mathscr{M}_y := \mathscr{M}_{\,|k_y \times_E \mathbb{G}_m}.$$

On voit que $\mathscr{M}_{y\,|B_{k_y}[q^{-n},q^n]}$ est le faisceau cohérent associé au $k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle$-module

$$M_{n,y} := M_n \widehat{\otimes}_{\mathscr{A}_n} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \cong M_n \otimes_{\mathscr{A}_n} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle$$

(où l'isomorphisme découle du fait que M_n est un $\mathscr{A}_n$-module de type fini). De plus, on a des isomorphismes de $k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle$-modules :

$$\begin{aligned} M_n \widehat{\otimes}_{\mathscr{A}_n} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle &\xrightarrow{\sim} (M\widehat{\otimes}_{A[z]}\mathscr{A}_n)\widehat{\otimes}_{\mathscr{A}_n} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \\ &\xrightarrow{\sim} M\widehat{\otimes}_{A[z]} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \xrightarrow{\sim} M\widehat{\otimes}_{A[z]} k_y[z]\widehat{\otimes}_{k_y[z]} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \\ &\xrightarrow{\sim} M_y\widehat{\otimes}_{k_y[z]} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{M}_y$ est en fait le faisceau cohérent associé au module $k_y\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{k_y[z]} M_y$. Soit $x \in \mathrm{Im}(i_y(B_{k_y}[q^{-n}, q^n]))$, on voit

$$\begin{aligned} \overline{(M_n)_{\mathfrak{m}_x}} \cong M_n \otimes_{\mathscr{A}_n} k_x &\cong M_n \otimes_{\mathscr{A}_n} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \otimes_{k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle} k_x \\ &\cong M_{n,y} \otimes_{k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle} k_x \cong \overline{(M_{n,y})_{\mathfrak{m}_x}}, \end{aligned}$$

d'où on déduit $\mathrm{supp}(\mathscr{M})_y = \mathrm{supp}(\mathscr{M}_y)$ par le lemme 6.4.3 (où $\mathrm{supp}(\mathscr{M}_y)$ est défini comme dans (6.4.3)) en remplaçant $\mathscr{M}$ et A par $\mathscr{M}_y$ et k_y). On se ramène donc à montrer que $\mathrm{supp}(\mathscr{M}_y) = Z_y$ pour tout $y \in \mathrm{Spm}\, A$.

Comme les affinoïdes

$$\big\{B_{k_y}[q^{-n}, q^n] \cong \mathrm{Spm}\, k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle\big\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$$

forment un recouvrement admissible de $\mathrm{Spm}\, k_y \times \mathbb{G}_m$, il suffit de montrer que pour tout n suffisamment grand, $\mathrm{supp}(\mathscr{M}_y) \cap B_{k_y}[q^{-n}, q^n] = Z_y \cap B_{k_y}[q^{-n}, q^n]$. Quitte à augmenter n s'il faut, on peut supposer que M_y est un module sur $k_y\langle \varpi^n z\rangle$, alors on a

$$k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle\widehat{\otimes}_{k_y[z]} M_y \xrightarrow{\sim} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle\widehat{\otimes}_{k_y\langle \varpi^n z\rangle} M_y.$$

Par [**54**, prop. 4], il existe $p(z) \in k_y[z]$ avec tous ses zéros contenus dans $B_{k_y}[q^{-n}, q^n]$, et $q(z) \in k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle$ inversible tels que $F_y(z) = p(z)q(z)$. Notons

$$p^*(z) := p(z^{-1})z^{\deg(p(z))},$$

on a donc

$$Z_y \cap B_{k_y}[q^{-n}, q^n] = \{z \in B_{k_y}[q^{-n}, q^n] \ ; \ p^*(z) = 0\}.$$

D'après [**75**, prop. 11], pour tout $a \in B_{k_y}[q^{-n}, q^n](\overline{E})$, si $p(a) \neq 0$ (ou de manière équivalente $F_y(a) \neq 0$), alors $1 - au$ est un opérateur inversible sur M_y, d'où on déduit

$$\operatorname{supp}(\mathscr{M}_y) \cap B_{k_y}[q^{-n}, q^n] \subseteq Z_y \cap B_{k_y}[q^{-n}, q^n].$$

Or, le module M_y (*cf.* [**25**, th. A4.3]) admet une décomposition $M_y \xrightarrow{\sim} N \oplus V$ telle que N et V soient invariants sous l'action de u, N est de dimension $\deg(p(z))$ sur k_y et est annulé par $p^*(u)$ ($p^*(z)$ étant le polynôme caractéristique de u, voir [**25**, th. A4.6]) et que $p^*(u)$ agit sur V par un opérateur inversible. On a alors

$$\begin{aligned}(6.4.4)\quad & \big(k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle / p^*(z)\big)\widehat{\otimes}_{k_y\langle \varpi^n z\rangle} M_y \\ &\xrightarrow{\sim} \big((k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle / p^*(z)\big)\widehat{\otimes}_{k_y\langle \varpi^n z\rangle} N) \oplus \big((k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle / p^*(z)\big)\widehat{\otimes}_{k_y\langle \varpi^n z\rangle} V) \\ &\xrightarrow{\sim} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \widehat{\otimes}_{k_y\langle \varpi^n z\rangle} N \xrightarrow{\sim} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle \otimes_{k_y\langle \varpi^n z\rangle} N \xrightarrow{\sim} N.\end{aligned}$$

où $(k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle / p^*(z))\widehat{\otimes}_{k_y\langle \varpi^n z\rangle} V = 0$ puisque $p^*(u)$ est inversible sur V, et où le dernier isomorphisme découle du lemme 6.4.5 ci-dessous appliqué à

$$R \cong k_y\langle \varpi^n z\rangle, \quad S \cong k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle$$

et $I \cong (p^*(z))$, $\Lambda \cong N$ (N est annulé par $p^*(z)$ et on a bien

$$k_y\langle \varpi^n z\rangle / p^*(z) \xrightarrow{\sim} k_y\langle \varpi^n z, \varpi^n z^{-1}\rangle / p^*(z)$$

car les zéros de $p^*(z)$ sont contenus dans $B_{k_y}[q^{-n}, q^n]$). On en déduit

$$Z_y \cap B_{k_y}[q^{-n}, q^n] \subseteq \operatorname{supp}(\mathscr{M}_y) \cap B_{k_y}[q^{-n}, q^n],$$

ceci permet de conclure. ∎

Lemme 6.4.5. — *Soient R un anneau commutatif, S une R-algèbre, I un idéal de R et Λ un R-module annulé par I. Si le morphisme naturel d'anneaux $R/I \to S/IS$ est un isomorphisme, alors Λ est muni canoniquement d'une action de S via la projection $S \twoheadrightarrow S/IS \cong R/I$, de plus, le morphisme*

$$(6.4.5)\qquad S \otimes_R \Lambda \to \Lambda, \quad s \otimes m \longmapsto sm,$$

est un isomorphisme de S-modules.

Démonstration. — La surjectivité de (6.4.5) est claire. Soit $\sum_{i\in J} s_i \otimes m_i$ un élément dans le noyau de (6.4.5) où J est un ensemble fini, par l'isomorphisme $R/I \xrightarrow{\sim} S/IS$, il existe des r_i tels que $r_i - s_i \in IS$ pour tout $i \in J$. Comme Λ est annulé par I, on a

$$\sum_{i\in J} s_i \otimes n_i = \sum_{i\in J} r_i \otimes n_i = 1 \otimes \big(\sum_{i\in J} r_i n_i\big) = 1 \otimes \big(\sum_{i\in J} s_i n_i\big) = 0.$$

Ceci permet de conclure. ∎

Notons $\mathscr{Z}$ le sous-espace analytique rigide fermé de $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$ défini par $F(z^{-1})$ (*i.e.* le sous-espace analytique rigide fermé associé au $\mathscr{O}_{\operatorname{Spm} A\times\mathbb{G}_m}$-idéal cohérent

$$F(z^{-1})\mathscr{O}_{\operatorname{Spm} A\times\mathbb{G}_m}$$

par [**11**, prop. 9.5.3/3]), alors les affinoïdes $\{\operatorname{Spm}(\mathscr{A}_n/F(z^{-1}))\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ forment un recouvrement admissible de $\mathscr{Z}$. Notons

$$i : \mathscr{Z} \longrightarrow \operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$$

le plongement fermé canonique.

Proposition 6.4.6. — *Sur l'espace rigide* $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$*, on a un isomorphisme de faisceaux cohérents*

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} i_* i^* \mathscr{M}.$$

Démonstration. — Comme $\{\operatorname{Spm} \mathscr{A}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ forment un recouvrement admissible de $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$, il suffit de montrer que

$$\mathscr{M}_{|\operatorname{Spm}\mathscr{A}_n} \xrightarrow{\sim} i_* i^* (\mathscr{M}_{|\operatorname{Spm}\mathscr{A}_n})$$

pour tout $\mathscr{A}_n$, où l'on note encore i le plongement fermé

$$\operatorname{Spm}\big(\mathscr{A}_n/F(z^{-1})\big) \longrightarrow \operatorname{Spm}\mathscr{A}_n.$$

On se ramène donc à montrer que

$$\mathscr{A}_n \widehat{\otimes}_{A[z]} M \longrightarrow \big(\mathscr{A}_n/F(z^{-1})\big)\widehat{\otimes}_{A[z]} M. \tag{6.4.6}$$

est un isomorphisme. Par [**11**, prop. 9.5.2/4] et la proposition qui précède, on a alors

$$V\big(\operatorname{Ann}_{\mathscr{A}_n}(M_n)\big) = V\big(F(z^{-1})\big).$$

Donc il existe $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $F(z^{-1})^m \in \operatorname{Ann}_{\mathscr{A}_n}(M_n)$. On a

$$\mathscr{A}_n \widehat{\otimes}_{A[z]} M \xrightarrow{\sim} \big(\mathscr{A}_n/F(z^{-1})^m\big)\widehat{\otimes}_{A[z]} M. \tag{6.4.7}$$

Notons $\mathscr{M}'$ le faisceau cohérent sur $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$ associé au module

$$\big(A\{\{z, z^{-1}\}\}/F(z^{-1})^m\big)\widehat{\otimes}_{A[z]} M.$$

Noter que les sections de $\mathscr{M}'$ sur $B_A[q^{-n}, q^n]$ ne sont autres que M_n par l'isomorphisme (6.4.7). Notons $\mathscr{Z}_m$ le sous-espace analytique rigide fermé de $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$ défini par $F(z^{-1})^m$. D'après [**25**, prop. A5.8] (voir aussi [**19**, th. 3.3 et §4]), il existe un recouvrement affinoïde admissible $\{\mathscr{U}_i\}$ de $\mathscr{Z}$ avec $\mathscr{U}_i \cong \operatorname{Spm} A[z]/P_i^*(z)$ (où $P_i(z) \in A[z]$ avec $P_i^*(z) := P_i(z^{-1})z^{\deg(P_i)}$) tel que :

- ▹ le terme constant de $P_i(z) \in A[z]$ est 1 ;
- ▹ il existe $Q_j(z) \in A\{\{z\}\}$ tel que $(P_i, Q_j) = 1$ et $F(z) = P_i(z)Q_j(z)$;
- ▹ le module M admet une décomposition équivariante sous l'action de $u : M \cong N_i \oplus V_i$, où N_i est un A-module projectif de rang $\deg(P_i)$ avec P_i le polynôme caractéristique de u sur N_i et où $P_i(u)$ agit sur V_i par un opérateur inversible.

On voit facilement que les

$$\left\{\mathscr{U}_i' := \operatorname{Spm}(A[z]/P_i^*(z)^m)\right\}$$

forment un recouvrement admissible de $\mathscr{Z}_m$. De plus, on a

$$\Gamma(\mathscr{U}_i', \mathscr{M}') \cong \left(A[z]/P_i^*(z)^m\right)\widehat{\otimes}_{A[z]}(N_i \oplus V_i) \cong N_i,$$

où le dernier isomorphisme se déduit de manière analogue qu'en (6.4.4). En particulier, $\Gamma(\mathscr{U}_i', \mathscr{M}')$ est annulé par $F(z^{-1})$ pour tout i. On en déduit que $\Gamma(\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m, \mathscr{M}')$, ainsi que M_n, est annulé par $F(z^{-1})$, d'où on déduit que (6.4.6) est un isomorphisme. Ceci permet de conclure. ∎

Corollaire 6.4.7. — *Le $A\{\{z, z^{-1}\}\}$-module $A\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{A[z]}M$ est annulé par $F(z^{-1})$.*

Corollaire 6.4.8. — *Soit U un ouvert admissible de $\operatorname{Spm} A \times \mathbb{G}_m$, alors le module $\Gamma(U, \mathscr{M})$ des sections de $\mathscr{M}$ sur U est un A-module sans torsion.*

Démonstration. — Notons $U_{\mathscr{Z}} := i^{-1}U$, qui est un ouvert admissible de $\mathscr{Z}$. Par la proposition 6.4.6, $\Gamma(U, \mathscr{M}) = \Gamma(U_{\mathscr{Z}}, i^*\mathscr{M})$. De plus, comme dans la démonstration de la proposition 6.4.6, on sait qu'il existe un recouvrement admissible $\{\mathscr{U}_i\}$ de $U_{\mathscr{Z}}$ tel que $\Gamma(\mathscr{U}_i, i^*\mathscr{M})$ soit un A-module sans torsion (même projectif) pour tout $\mathscr{U}_i$, d'où on déduit que $\Gamma(U_{\mathscr{Z}}, i^*\mathscr{M})$ l'est aussi. Ceci permet de conclure. ∎

Corollaire 6.4.9. — *Le A-module $E\{\{z, z^{-1}\}\}\widehat{\otimes}_{E[z]}M$ est sans torsion.*

CHAPITRE 7

COHOMOLOGIE COMPLÉTÉE ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

Dans ce chapitre, on montre divers résultats de compatibilité local-global pour le H^1-complété des courbes de Shimura unitaires. Au § 7.1, on rappelle des résultats préliminaires sur la cohomologie étale complétée des courbes de Shimura unitaires. Au § 7.2.1, suivant Emerton [**34**], on donne la construction des variétés de Hecke à partir du H^1-complété des courbes de Shimura unitaires. Au § 7.2.2, on utilise la théorie des représentations (localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques pour $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$) pour donner une interprétation en termes de représentations de l'existence ou non de *points compagnons* et pour montrer un résultat de classicité. Ensuite, au § 7.2.3, on utilise les résultats de triangulation globale de [**53**], [**55**] pour étudier les familles p-adiques de représentations galoisiennes sur nos variétés de Hecke, en particulier, on donne une interprétation galoisienne de l'existence ou non de points compagnons. Au § 7.2.4, on compare les variétés de Hecke construites au § 7.2.1 avec celles construites dans le chapitre 3 (à partir des faisceaux de formes modulaires). Enfin, au § 7.3, on montre les résultats principaux.

7.1. Cohomologie étale complétée

7.1.1. Généralités. — Soit $K^\wp$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})$ tel que $K^\wp K_\wp^0$ soit net et maximal en $\wp$ (*cf.* Ex. 3.1.3). Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, notons

$$K_n := K_\wp^n K^\wp \quad (cf.\ \S\, 2.2).$$

La courbe M_{K_n} (sur $\mathscr{F}$) est un revêtement galoisien de M_K de groupe $K_\wp^0/K_\wp^n \cong \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n)$ (*cf.* [**20**, § 3.3.2]). Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble (ordonné par l'inclusion) des sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp)$, le sous-ensemble $\{K_\wp^n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est donc cofinal dans $\mathscr{S}$.

Soit W un E-espace vectoriel de dimension finie muni d'une représentation algébrique de G. Comme K_n est net pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on peut associer à W un système local $\mathscr{V}_W$ sur M_{K_n} pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (*cf.* § 3.2.1). Soit W_0 un $\mathscr{O}_E$-réseau de W stable sous l'action de $K_p^{\wp}$, et notons $\mathscr{S}_{W_0}$ l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{\wp})$ qui laissent W_0 invariant. De même, pour tout $K'_{\wp} \in \mathscr{S}_{W_0}$, on peut associer à W_0 (resp. à W_0/ϖ_E^s) un système local de $\mathscr{O}_E$-réseaux $\mathscr{V}_{W_0}$ (resp. de $\mathscr{O}_E/\varpi_E^s$-réseaux $\mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s}$) sur $M_{K'_{\wp}K^{\wp}}$ (*cf. loc. cit.*). L'ensemble ordonné $\mathscr{S}_{W_0}$ est cofinal dans $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_{W_0} \cap \{K_{\wp}^n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est cofinal dans $\mathscr{S}_{W_0}$.

Posons (*cf.* [**34**, (2.1.1)]) :

$$\begin{aligned}
H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0) &:= \varinjlim_{K'_{\wp}\in\mathscr{S}_{W_0}} H^i_{\text{ét}}(M_{K'_{\wp}K^{\wp},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0}) \cong \varinjlim_{K'_{\wp}\in\mathscr{S}_{W_0}} \varprojlim_{s} H^i_{\text{ét}}(M_{K'_{\wp}K^{\wp},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s});\\
\widehat{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0) &:= \varprojlim_{s} H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)/\varpi_E^s H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0);\\
\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0) &:= \varprojlim_{s} \varinjlim_{K'_{\wp}\in\mathscr{S}_{W_0}} H^i_{\text{ét}}(M_{K'_{\wp}K^{\wp},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s});\\
H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E &:= E \otimes_{\mathscr{O}_E} H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0);\\
\widehat{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E &:= E \otimes_{\mathscr{O}_E} \widehat{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0);\\
\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E &:= E \otimes_{\mathscr{O}_E} \widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0).
\end{aligned}$$

Remarque 7.1.1

(1) Notons que dans la définition des groupes, on ne varie que les niveaux par rapport à $\mathrm{GL}_2(F_{\wp})$ plutôt que $G(\mathbb{Q}_p)$.

(2) Tous les groupes ci-dessus sont munis d'une topologie induite par la topologie discrète sur $H^i_{\text{ét}}(M_{K'_{\wp}K^{\wp},\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s})$, et munis d'une action continue de

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times K'_{\wp} \times \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^{\wp}),$$

où $K'_{\wp} \in S_{W_0}$ et $\mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^{\wp})$ désigne la $\mathscr{O}_E$-algèbre des opérateurs de doubles classes de $G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})$ modulo $K^{\wp}$. De plus, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ et celle de $\mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^{\wp})$ vérifient les relations d'Eichler-Shimura (3.2.13) puisque que celles-ci sont vraies modulo ϖ_E^s pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

(3) Le E-espace vectoriel $\widehat{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E$ (resp. $\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E$) est un E-espace de Banach avec la norme définie par le $\mathscr{O}_E$-réseau $\widehat{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)$ (resp. $\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)$).

Considérons l'ensemble $\{W_0\}$ des $\mathscr{O}_E$-réseaux de W stables par $K_p^{\wp}$ ordonné par l'inclusion. Suivant [**34**, déf. 2.2.9], posons

$$\begin{aligned}
H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W) &:= \varinjlim_{W_0} H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E,\\
\widehat{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W) &:= \varinjlim_{W_0} \widehat{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E,\\
\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W) &:= \varinjlim_{W_0} \widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_E,
\end{aligned} \tag{7.1.1}$$

où toutes les applications de transition sont en fait des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques (*cf.* [**34**, lemme 2.2.8]). Un point important est que les E-espaces vectoriels topologiques $H^i_{\text{ét}}(K,W)$, $\widehat{H}^i_{\text{ét}}(K,W)$, $\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K,W)$ ci-dessus sont munis de plus d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ (*cf.* [**34**, lemme 2.2.10]).

Par [**34**, th. 2.2.11 et 2.2.17, cor. 2.2.25 et 2.2.27], on a :

Théorème 7.1.2

(1) *Les E-espaces de Banach $\widehat{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,W)$ et $\widetilde{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,W)$ munis de leur action de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sont des représentations continues admissibles au sens de Schneider-Teitelbaum (cf. [**69**, §3]) pour tout $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. De plus, si l'action de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur W est triviale, alors les représentations de Banach $\widehat{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,W)$ et $\widetilde{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,W)$ de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sont unitaires pour tout $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

(2) *Si W est une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ de dimension finie sur E (que l'on peut voir comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$ via la projection $G(\mathbb{Q}_p)\twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(F_\wp)$), il existe alors un isomorphisme de E-espaces vectoriels topologiques équivariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})\times\mathrm{GL}_2(F_\wp)\times\mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$:*

$$\widetilde{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,W)\xrightarrow{\sim}\widetilde{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,E)\otimes_E W.$$

Plus généralement, supposons que la représentation algébrique W de

$$G(\mathbb{Q}_p)\cong\mathbb{Q}_p^\times\times\mathrm{GL}_2(F_\wp)\times\prod_{\substack{\wp_i\mid p\\ \wp_i\neq\wp}}\mathrm{GL}_2(F_{\wp_i})$$

admet une décomposition

$$W\cong W_\wp\otimes_E W^\wp$$

où $W_\wp$ est une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ de dimension finie sur E et $W^\wp$ une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de

$$\mathbb{Q}_p^\times\times\prod_{\substack{\wp_i\mid p\\ \wp_i\neq\wp}}\mathrm{GL}_2(F_{\wp_i})$$

de dimension finie sur E. Il existe alors un isomorphisme de E-espaces vectoriels topologiques équivariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})\times\mathrm{GL}_2(F_\wp)\times\mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$:

$$\widetilde{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,W)\xrightarrow{\sim}\widetilde{H}^i_{\acute{e}t}(K^\wp,W^\wp)\otimes_E W_\wp.$$

7.1.2. Vecteurs localement algébriques. — On étudie les vecteurs localement algébriques de la cohomologie étale complétée des courbes de Shimura unitaires.

Notation 7.1.3. — Soit V une représentation de Banach de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E.

- ▹ On note V_{an} son sous-E-espace vectoriel engendré par les vecteurs sur lesquels l'action de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ est localement $\mathbb{Q}_p$-analytique (*cf.* §6.1.1).

Si V est admissible, alors V_{an} est en fait une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique admissible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E et est dense dans V (*cf.* [**71**, th. 7.1]).

▹ Pour tout $J \subseteq \Sigma_\wp$, on note alors $V_{J\text{-an}} := (V_{\mathrm{an}})_{J\text{-an}}$ (*cf.* §6.1.1).

Soit W une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $G(\mathbb{Q}_p)$ de dimension finie sur E. Supposons jusqu'à la fin de cette sous-section que W admet une décomposition (ce qui est le cas lorsque W est irréductible)

$$W \xrightarrow{\sim} W_\wp \otimes_E W^\wp \xrightarrow{\sim} \Big(\bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\wp} W_{\wp,\sigma}\Big) \otimes_E W^\wp,$$

où $W_\wp$ est une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ de dimension finie sur E. Dans ce cas, $W^\wp$ est une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $\mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{\wp_i \mid p, \wp_i\neq\wp} \mathrm{GL}_2(F_{\wp_i})$ de dimension finie sur E, *i.e.* une représentation algébrique sur E de

$$\mathbb{G}_m \times \prod_{\wp_i \mid p, \wp_i\neq\wp} \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}^{F_{\wp_i}} \mathrm{GL}_2\,,$$

et $W_{\wp,\sigma}$ est une représentation σ-algébrique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ de dimension finie sur E (*cf.* §6.1.1).

▹ Pour un plongement τ de $F_\wp$ dans E, on note

$$W_\wp^\tau := \bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}} W_{\wp,\sigma} \quad \text{et} \quad W^\tau := W_\wp^\tau \otimes_E W^\wp.$$

▹ Pour $J \subseteq \Sigma_\wp$, on note

$$W_{\wp,J} := \bigotimes_{\sigma\in J} W_{\wp,\sigma}, \quad W_\wp^J := \bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J} W_{\wp,\sigma}, \quad W^J := W^\wp \otimes_E W_\wp^J.$$

Par [**34**, cor. 2.2.18], on a :

Théorème 7.1.4. — *Il existe une application naturelle continue*

$$H^n_{\acute{e}t}(K, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^n_{\acute{e}t}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}), \tag{7.1.2}$$

équivariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$ *qui est en fait l'application de bord de la suite spectrale*

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^j_{\acute{e}t}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big) \Longrightarrow H^{i+j}_{\acute{e}t}(K^\wp, W)$$

équivariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$, *où* $W_\wp^\vee$ *désigne la représentation duale de* $W_\wp$, $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ *et* $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ (*cf.* §6.1.1).

Pour $n = 1$, l'application en (7.1.2) s'insère donc dans la suite exacte suivante (équivariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$)

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^0_{\text{ét}}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big) \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(K^\wp, W) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^0_{\text{ét}}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big). \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

En procédant comme dans [**34**, prop. 4.3.1 et cor. 4.3.2], on montre :

Proposition 7.1.5. — *Les E-espaces vectoriels (cf. (7.1.3))*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^0_{ét}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\quad et \quad \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^0_{ét}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big)$$

sont nuls. Par conséquent, l'application (7.1.2) est un isomorphisme lorsque $n = 1$.

On commence par un lemme comme dans [**34**, §4.2].

Lemme 7.1.6. — *Avec les notations précédentes, il existe $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel qu'il y a un isomorphisme équivariant sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:*

$$\widetilde{H}^0_{ét}(K^\wp, W^\wp) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)^{\oplus r}, \tag{7.1.4}$$

où $\mathscr{C}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$ désigne le E-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathscr{O}_\wp^\times$ à valeurs dans E, où l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$ sur $\widetilde{H}^0_{ét}(K^\wp, W^\wp)$ est induite par celle de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ via le plongement de groupes $\mathscr{O}_\wp^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(F_\wp)$, $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et où l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$ sur $\mathscr{C}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)$ est donnée par la translation à droite sur les fonctions.

Démonstration. — Notons $\varpi_0(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}})$ l'ensemble fini des composantes connexes de $M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}}$. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp)$ sur M_{K_n} induit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp)$ sur $\varpi_0(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}})$, qui se factorise à travers l'application déterminant (*cf.* [**20**, §3.2])

$$\det : \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp) \longrightarrow \mathscr{O}_\wp^\times.$$

Comme M_{K_n} est un revêtement galoisien de M_{K_0} de groupe $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)$, l'ensemble $\varpi_0(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}})$ est un revêtement galoisien de $\varpi_0(M_{K_0,\overline{\mathbb{Q}}})$ de groupe $(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times$ via la projection canonique :

$$\varpi_0(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}}) \twoheadrightarrow \varpi_0(M_{K_0,\overline{\mathbb{Q}}}).$$

Soit $S_0 \subseteq \varpi_0(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}})$ qui relève $\varpi_0(M_{K_0,\overline{\mathbb{Q}}})$ dans $\varpi_0(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}})$. On a une bijection équivariante sous l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$:

$$S_0 \times (\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times \xrightarrow{\sim} \varpi_0(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}}),\ (s,a) \longmapsto a\cdot s$$

où l'action de $\mathscr{O}_\wp^\times$ sur $S_0 \times (\mathscr{O}_\wp/\varpi^n)^\times$ est donnée par $\lambda \cdot (s,a) := (s, \lambda a)$ pour tout $(s,a) \in S_0 \times (\mathscr{O}_\wp/\varpi^n)^\times$ et $\lambda \in \mathscr{O}_\wp^\times$. Soit W_0 un $\mathscr{O}_E$-réseau de $W^\wp$, on a donc une bijection $(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times$-équivariante (puisque l'action de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur W_0 est triviale) :

$$H^0_{\text{ét}}(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s W_0}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}\big((\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times, \mathscr{O}_E/\varpi_E^s\mathscr{O}_E\big)^{\oplus r_0\cdot|S_0|},$$

où r_0 est le rang de W_0 sur $\mathscr{O}_E$ et $\mathscr{C}((\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times, \mathscr{O}_E/\varpi_E^s\mathscr{O}_E)$ désigne l'ensemble des fonctions (continues) de $(\mathscr{O}_\wp/\varpi^n\mathscr{O}_\wp)^\times$ à valeurs dans $\mathscr{O}_E/\varpi_E^s\mathscr{O}_E$. En prenant la limite inductive sur n puis projective sur s, on en déduit un isomorphisme $\mathscr{O}_\wp^\times$-équivariant :

$$\widetilde{H}^0_{\text{ét}}(K, W^\wp) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(\mathscr{O}_\wp^\times, E)^{\oplus r_0\cdot|S_0|}. \tag{7.1.5}$$

Ceci permet de conclure. ∎

Soit Z le centre de GL_2 et notons :

- $\mathfrak{sl}_2(F_\wp)$ et $\mathfrak{z}(F_\wp)$ les algèbres de Lie respectives de $\mathrm{SL}_2(F_\wp)$ et $Z(F_\wp)$;
- $\mathfrak{s}_{\Sigma_\wp} := \mathfrak{sl}_2(F_\wp) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, $\mathfrak{s}_\sigma := \mathfrak{sl}_2(F_\wp) \otimes_{\sigma, F_\wp} E$, $\mathfrak{z}_{\Sigma_\wp} := \mathfrak{z}(F_\wp) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et $\mathfrak{z}_\sigma := \mathfrak{z}(F_\wp) \otimes_{\sigma, F_\wp} E$.

On dispose d'un morphisme de groupes $Z(F_\wp) \times \mathrm{SL}_2(F_\wp) \to \mathrm{GL}_2(F_\wp)$ qui induit un isomorphisme d'algèbres de Lie :

$$\mathfrak{sl}_2(F_\wp) \times \mathfrak{z}(F_\wp) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}_2(F_\wp).$$

De la même façon que dans [**34**, prop. 4.3.1] et par le lemme 7.1.6, on a :

Proposition 7.1.7. — *Supposons que $Z(F_\wp)$ agit sur $W_\wp$ via un caractère continu χ. Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, il existe un isomorphisme équivariant sous l'action de $Z(F_\wp) \times \mathrm{SL}_2(F_\wp)$:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{z}_{\Sigma_\wp}}\big(E(\chi^{-1}), \widetilde{H}^0(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big) \otimes_E H^i(\mathfrak{s}_{\Sigma_\wp}, W_\wp)\\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^0(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big).\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 7.1.5. — Puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_{\Sigma_\wp}$ (resp. $\mathfrak{s}_\sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$) est semi-simple, on a $H^1(\mathfrak{s}_{\Sigma_\wp}, W_\wp) = 0$ (resp. $H^1(\mathfrak{s}_\sigma, W_{\wp,\sigma}) = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$) (*e.g.* voir [**81**, cor. 7.8.10]). Comme $W_\wp \cong \bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\wp} W_{\wp,\sigma}$, par la formule de Künneth, on obtient un isomorphisme

$$\bigoplus_{\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} a_\sigma = 2} \Big(\bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\wp} H^{a_\sigma}(\mathfrak{s}_\sigma, W_{\wp,\sigma})\Big) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{s}_{\Sigma_\wp}, W_\wp). \tag{7.1.6}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_\sigma$ étant de dimension 3, la dualité de Poincaré implique

$$H^2(\mathfrak{s}_\sigma, W_{\wp,\sigma}) = 0$$

pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$. Par l'isomorphisme (7.1.6), on en déduit $H^2(\mathfrak{s}_{\Sigma_\wp}, W_\wp) = 0$. Par la proposition 7.1.7, on a donc

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^0_{\text{ét}}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big) = 0, \quad \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^0_{\text{ét}}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big) = 0.$$

Ceci permet de conclure. ∎

Corollaire 7.1.8. — *Soit $J \subseteq \Sigma_\wp$. Alor il existe un isomorphisme naturel équivariant sous l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$ *:*

$$H^1_{\acute{e}t}(K^\wp, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_J}\big(W_{\wp,J}^\vee, \widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^\wp, W^J)_{J\text{-an}}\big).$$

Démonstration. — On a les isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}&\big(W_\wp^\vee, \widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}}\big) \xrightarrow{\sim} \big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^\wp)_{\mathrm{an}} \otimes_E W_\wp\big)^{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}}\\ &\xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W)_{\mathrm{an}}^{\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp}} \xrightarrow{\sim} \big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W)_{J\text{-an}}\big)^{\mathfrak{g}_J}\\ &\xrightarrow{\sim} \big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^J)_{J\text{-an}} \otimes_E W_{\wp,J}\big)^{\mathfrak{g}_J} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_J}\big(W_{\wp,J}^\vee, \widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^J)_{J\text{-an}}\big),\end{aligned}$$

où les deuxième et quatrième isomorphismes découlent de [**37**, prop. 3.6.15] et le théorème 7.1.2 (2), le troisième découle de la décomposition $\mathfrak{g}_{\Sigma_\wp} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\Sigma_\wp \setminus J} \times \mathfrak{g}_J$. Le corollaire découle donc de la proposition 7.1.5. ∎

7.1.3. Localisé du H^1-complété en un idéal non-Eisenstein. — Fixons un sous-groupe ouvert compact $K^\wp = \prod_{\mathfrak{l} \neq \wp} K_\mathfrak{l}$ de $G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})$. Rappelons (*cf.* notation 3.2.3) que :

- ▹ $\mathscr{H}(S(K^\wp)) \subseteq \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$ désigne la sous-$\mathscr{O}_E$-algèbre (commutative) engendrée par les opérateurs $X_{\lambda,\mathfrak{l}}$, $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}\chi_{\lambda,\ell^d\mathfrak{l},0}$ pour tout $(\lambda, \mathfrak{l}) \mid \ell \in S(K^\wp)$;
- ▹ $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ désigne la sous-$\mathscr{O}_E$-algèbre de $\mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$ engendrée par la sous-$\mathscr{O}_E$-algèbre $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ et l'opérateur $\chi_{u,p}$.

Définition 7.1.9. — Soit ρ une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E. On dit que ρ est *$K^\wp$-modulaire* s'il existe une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique (irréductible) W de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ de dimension finie sur E telle que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})}\big(\rho, H^1_{\text{ét}}(K^\wp, W)\big) \neq 0.$$

Soit ρ une représentation $K^\wp$-modulaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E avec ρ_0 un $\mathscr{O}_E$-réseau $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$-invariant de ρ. Notons

$$\bar{\rho}^{\,\mathrm{ss}} \text{ la semi-simplification de la réduction modulo } \varpi_E \text{ de } \rho_0,$$

ϖ_E étant une uniformisante de $\mathscr{O}_E$. Noter que $\bar{\rho}^{\,\mathrm{ss}}$ ne dépend pas du choix de ρ_0. Comme ρ est $K^\wp$-modulaire, la restriction $\rho_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})}$ (ainsi que $\bar{\rho}^{\,\mathrm{ss}}{}_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})}$) est non ramifiée pour tout $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$.

Soient $\overline{a_{\lambda,\mathfrak{l}}}$, $\overline{b_{\lambda,\mathfrak{l}}} \in \mathbb{F}_E := \mathscr{O}_E/\varpi_E\mathscr{O}_E$ tels que le polynôme caractéristique de $\mathrm{Frob}^{-1}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})$ sur $\bar{\rho}^{\,\mathrm{ss}}$ soit donné par

$$T^2 - \overline{a_{\lambda,\mathfrak{l}}}\,T + \overline{b_{\lambda,\mathfrak{l}}}.$$

Notons $\mathfrak{m}(\bar{\rho}^{\,\mathrm{ss}})$ l'idéal maximal de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ tel que le morphisme

$$\mathscr{H}\big(S(K^\wp)\big) \longrightarrow \mathscr{H}\big(S(K^\wp)\big)/\mathfrak{m}(\bar{\rho}^{\,\mathrm{ss}}) \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$$

envoie $X_{\lambda,\mathfrak{l}}$ et $Y_{\lambda,\mathfrak{l}}\chi_{\lambda,\ell^d\mathfrak{l},0}$ sur $\overline{a_{\lambda,\mathfrak{l}}}$ et $\overline{b_{\lambda,\mathfrak{l}}}$ pour tout $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$.

Notation 7.1.10. — Si N est un $\mathscr{H}(S(K^\wp))$-module et est de type fini sur $\mathscr{O}_E$, on note $N_{\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}}$ le localisé de N en $\mathfrak{m}(\bar{\rho}^{\,\mathrm{ss}})$.

Noter que si N est de plus un $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$-module, $N_{\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}}$ est encore muni d'une action de $\chi_{u,p}$ car $\chi_{u,p}$ commute aux opérateurs de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$.

Soient W une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de G de dimension finie sur E, W_0 un $\mathscr{O}_E$-réseau de W stable par $K_p^\wp$. Pour $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on note

$$H^i_{\text{ét}}(K^\wp, W_0/\varpi_E^s) := \varinjlim_{K'_\wp \in \mathscr{S}_{W_0}} H^i_{\text{ét}}(M_{K'_\wp K^\wp, \overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s}).$$

Posons

$$\begin{aligned} H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^s)_{\bar\rho^{\text{ss}}} &:= \varinjlim_{K'_\wp \in \mathscr{S}_{W_0}} H^i_{\text{ét}}(M_{K'_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s})_{\bar\rho^{\text{ss}}}, \\ \widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^\wp, W_0)_{\bar\rho^{\text{ss}}} &:= \varprojlim_s H^i_{\text{ét}}(K^\wp, W_0/\varpi_E^s)_{\bar\rho^{\text{ss}}}, \\ \widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^\wp, W)_{\bar\rho^{\text{ss}}} &:= \varinjlim_{W_0} (\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^\wp, W_0)_{\bar\rho^{\text{ss}}} \otimes_{\mathscr{O}_E} E) \end{aligned}$$

(voir (7.1.1), et noter que les applications de transition dans la définition de $\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^\wp, W)_{\bar\rho^{\text{ss}}}$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques). On a alors

$$\widetilde{H}^i_{\text{ét}}(K^\wp, W_0)_* \cong \varprojlim_s H^i_{\text{ét}}(K^\wp, W_0/\varpi_E^s)_* \quad \text{où } * \in \{\varnothing, \bar\rho^{\text{ss}}\}.$$

Remarque 7.1.11. — Comme dans [**36**, §5.2], on peut montrer que l'action de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ sur $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W)$ se factorise à travers une $\mathscr{O}_E$-algèbre complétée ϖ_E-adiquement réduite et semi-locale. Par conséquent, le localisé $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W)_{\bar\rho^{\text{ss}}}$ est un facteur direct de $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W)$.

On suppose jusqu'à la fin de cette section ρ absolument irréductible modulo ϖ_E (donc $\bar\rho \cong \bar\rho^{\text{ss}}$).

Lemme 7.1.12. — *Pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, l'application naturelle*

$$\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^\wp, W_0)_{\bar\rho} / \big(\varpi_E^s \widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^\wp, W_0)_{\bar\rho}\big) \longrightarrow H^1_{\acute{e}t}(K^\wp, W_0/\varpi_E^s)_{\bar\rho}$$

est bijective.

Démonstration. — Soit $s' \in \mathbb{Z}$, $s' > s$. Pour tout $K_\wp \in \mathscr{S}_{W_0}$ on dispose d'une suite exacte de faisceaux localement constants sur $M_{K_\wp K^\wp}$:

$$0 \to \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^{s'-s}} \xrightarrow{\varpi_E^s} \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^{s'}} \longrightarrow \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s} \to 0,$$

qui induite une suite exacte longue (de $\mathscr{O}_E$-modules)

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\text{ét}}(M_{K_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^{s'-s}}) &\xrightarrow{\varpi_E^s} H^0_{\text{ét}}(M_{K_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^{s'}}) \\ \longrightarrow H^0_{\text{ét}}(M_{K_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s}) &\to H^1_{\text{ét}}(M_{K_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^{s'-s}}) \\ \xrightarrow{\varpi_E^s} H^1_{\text{ét}}(M_{K_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^{s'}}) &\to H^1_{\text{ét}}(M_{K_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^s}) \\ \to H^2_{\text{ét}}(M_{K_\wp K^\wp,\overline{\mathbb{Q}}}, \mathscr{V}_{W_0/\varpi_E^{s'-s}}). \end{aligned}$$

En prenant la limite inductive sur $K_\wp \in \mathscr{S}_{W_0}$ puis le localisé en $\bar\rho$, on obtient une suite exacte de $\mathscr{O}_E$-modules

$$0 \to H^1_{\text{ét}}(K^\wp, W_0/\varpi_E^{s'-s})_{\bar\rho} \xrightarrow{\varpi_E^s} H^1_{\text{ét}}(K^\wp, W_0/\varpi_E^{s'})_{\bar\rho} \longrightarrow H^1_{\text{ét}}(K^\wp, W_0/\varpi_E^s)_{\bar\rho} \to 0$$

puisque l'on a $H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^{s''})_{\bar{\mathfrak{p}}} = 0$ pour tout $s'' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $i = 0, 2$ (noter que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ sur $H^i_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^{s''})$ est abélienne pour $i = 0, 2$). On a donc

$$H^1_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^{s'})_{\bar{\mathfrak{p}}}/\big(\varpi_E^s H^1_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^{s'})_{\bar{\mathfrak{p}}}\big) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^{s})_{\bar{\mathfrak{p}}} \tag{7.1.7}$$

pour tout $s' \geq s$. Le lemme en découle. ∎

De la même façon que dans [**36**, prop. 5.3.15], on a :

Proposition 7.1.13. — *L'ensemble $\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^s)_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est un objet injectif dans la catégorie des représentations lisses (admissibles) de H sur $\mathscr{O}_E/\varpi_E^s$ pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et H un sous-groupe ouvert compact quelconque dans $\mathscr{S}_{W_0}$.*

Comme dans [**36**, cor. 5.3.19], on a :

Corollaire 7.1.14. — *Avec les notations précédentes, on suppose que*

$$\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^{\wp}, W)_{\bar{\mathfrak{p}}} \neq 0.$$

Soit H un pro-p sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_{\wp})$. Alors il existe n $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ et un isomorphisme de représentations de Banach admissibles de H sur E :

$$\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^{\wp}, W)_{\bar{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(H, E)^{\oplus r},$$

où l'action de H sur $\mathscr{C}(H, E)$ (l'espace des fonctions continues de H à valeurs dans E) est donnée par la translation à droite sur les fonctions.

Démonstration. — Soit W_0 un $\mathscr{O}_E$-réseau de W stable sous l'action de H. Il suffit de montrer qu'il existe un $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ et un isomorphisme H-équivariant

$$\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_{\bar{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(H, \mathscr{O}_E)^{\oplus r}.$$

Soit $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, comme le groupe H est prop-p, la $\mathscr{O}_E/\varpi_E^s$-algèbre $(\mathscr{O}_E/\varpi_E^s)[[H]]$ est locale. On montre comme dans la preuve de [**36**, cor. 5.3.19] qu'il existe un $r_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que

$$H^1_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0/\varpi_E^s)_{\bar{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(H, \mathscr{O}_E/\varpi_E^s)^{\oplus r_s}.$$

Mais par le lemme 7.1.12 (voir aussi (7.1.7)), r_s est indépendant du choix de s ; on pose alors $r := r_s$. En prenant la limite projective sur s, on a

$$\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^{\wp}, W_0)_{\bar{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(H, \mathscr{O}_E)^{\oplus r}.$$

Ceci permet de conclure. ∎

7.2. Variétés de Hecke

7.2.1. Variétés de Hecke. — Suivant Emerton (*cf.* [**34**, §2.3]), on construit des variétés de Hecke.

7.2.1.1. *Généralités.* — Soient R une E-algèbre affinoïde, $\mathscr{H}$ une E-algèbre commutative, et M un R-module fini muni d'une action (R-linéaire) de $\mathscr{H}$, *i.e.* il y a un morphisme de E-algèbres

$$\psi : \mathscr{H} \longrightarrow \mathrm{End}_R(M).$$

Notons $\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H})$ la sous-R-algèbre de $\mathrm{End}_R(M)$ engendrée par l'image de $\mathscr{H}$ via ψ, qui est une R-algèbre finie et ainsi également une E-algèbre affinoïde (*cf.* [**11**, prop. 6.1.1/6]). De plus, $\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H})$ est en fait une $R/\mathrm{Ann}_R(M)$-algèbre finie (où $\mathrm{Ann}_R(M) := \{x \in R\ ;\ xM = 0\}$), et M muni de l'action canonique de $\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H})$, est évidemment un $\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H})$-module fini fidèle.

Lemme 7.2.1. — *Soit L une extension finie de E, un L-point de*

$$\mathrm{Spm}\, \mathscr{A}(R, M, \mathscr{H})$$

correspond donc à un idéal maximal L-rationnel $\mathfrak{m}$ de $\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H}) \otimes_E L$. Notons $\mathfrak{m}_1$ (resp. $\mathfrak{m}_2$) l'image réciproque de $\mathfrak{m}$ dans $R \otimes_E L$ (resp. $\mathscr{H} \otimes_E L$), alors le morphisme canonique de L-espaces vectoriels

$$\big((M \otimes_E L)/\mathfrak{m}_1(M \otimes_E L)\big) \otimes_{\mathscr{H} \otimes_E L} \big((\mathscr{H} \otimes_E L)/\mathfrak{m}_2\big) \longrightarrow (M \otimes_E L)/\mathfrak{m}(M \otimes_E L)$$

est un isomorphisme. Si l'on note $\mathfrak{m}_0$ l'image réciproque de $\mathfrak{m}$ dans $\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H})$ alors le morphisme naturel

$$M/\mathfrak{m}_0 M \longrightarrow (M \otimes_E L)/\mathfrak{m}(M \otimes_E L), \quad \overline{m} \longmapsto \overline{m \otimes 1},$$

est un isomorphisme de L-espaces vectoriels.

Démonstration. — On a une projection canonique (de $R \otimes_E L$-algèbres)

$$\psi_L : (\mathscr{H} \otimes_E L) \otimes_L (R \otimes_E L) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{A}(R, M, \mathscr{H}) \otimes_E L,$$

donc

$$\mathfrak{m} = \psi_L\big((\mathscr{H} \otimes_E L) \otimes \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \otimes (R \otimes_E L)\big).$$

La première partie en découle. La deuxième partie découle de l'isomorphisme de L-espaces vectoriels

$$\big((M/\mathfrak{m}_0 M) \otimes_E L\big) \otimes_{L \otimes_E L} L \xrightarrow{\sim} (M \otimes_E L)/\mathfrak{m}(M \otimes_E L)$$

où la projection $L \otimes_E L \twoheadrightarrow L$ est induite par

$$(\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H})/\mathfrak{m}_0) \otimes_E L \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (\mathscr{A}(R, M, \mathscr{H}) \otimes_E L)/\mathfrak{m}.$$

Ceci permet de conclure. □

Lemme 7.2.2. — *Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R, alors le noyau I du morphisme naturel*

$$\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})/\mathfrak{m}\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \longrightarrow \mathrm{End}_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M),$$

est nilpotent.

Démonstration. — Comme $\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})/\mathfrak{m}\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})$ est une $R/\mathfrak{m}$-algèbre finie (et donc artinienne), il suffit de montrer que l'idéal I est contenu dans tous les idéaux maximaux $\mathfrak{m}'$ de l'anneau $\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})/\mathfrak{m}\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})$. On se ramène alors à montrer que le noyau (encore noté I) du morphisme canonique

$$\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \longrightarrow \mathrm{End}_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M)$$

est contenu dans tous les idéaux maximaux $\mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{m}$ de $\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})$. Soient $x \in I$ (alors $xM \subseteq \mathfrak{m}M$) et $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de $\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})$ contenant $\mathfrak{m}$, si $x \notin \mathfrak{m}'$, donc $(x) + \mathfrak{m}' = \mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})$. On en déduit

$$M = \mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \cdot M = xM + \mathfrak{m}'M \subseteq \mathfrak{m}M + \mathfrak{m}'M = \mathfrak{m}'M,$$

une contradiction, car M est un $\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H})$-module fini fidèle. ∎

Le lemme suivant est évident.

Lemme 7.2.3. — *Avec les notations ci-dessus, soit N un sous-R-module de M stable sous l'action de $\mathscr{H}$. Alors on a une projection canonique de R-algèbres affinoïdes*

$$\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{A}(R,M/N,\mathscr{H}). \tag{7.2.1}$$

Lemme 7.2.4. — *Soient R, R' deux E-algèbres affinoïdes avec R' plate sur R, $\mathscr{H}$ une E-algèbre commutative, M un R-module fini muni d'une action R-linéaire de $\mathscr{H}$. Alors il y a un isomorphisme canonique de R'-algèbres*

$$\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(R',M \otimes_R R',\mathscr{H}),$$

où $\mathscr{H}$ agit sur $M \otimes_R R'$ par $h \cdot (m \otimes r') = (h \cdot m) \otimes r'$ pour tout $h \in \mathscr{H}$, $m \in M$, $r' \in R'$.

Démonstration. — La composée

$$\mathscr{H} \longrightarrow \mathrm{End}_R(M) \longrightarrow \mathrm{End}_R(M) \otimes_R R' \longrightarrow \mathrm{End}_{R'}(M \otimes_R R')$$

induit un morphisme de R'-algèbres :

$$\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \otimes_R R' \longrightarrow \mathscr{A}(R',M \otimes_R R',\mathscr{H}). \tag{7.2.2}$$

Il est clair que le morphisme (7.2.2) est surjectif. Comme R' est plate sur R, l'injection de R-modules $\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \hookrightarrow \mathrm{End}_R(M)$ induit une injection de R'-modules

$$\mathscr{A}(R,M,\mathscr{H}) \otimes_R R' \longhookrightarrow \mathrm{End}_R(M) \otimes_R R'.$$

En outre, comme R' est plate sur R et M est de type fini sur R, le morphisme naturel $\mathrm{End}_R(M) \otimes_R R' \to \mathrm{End}_{R'}(M \otimes_R R')$ est un isomorphisme. Le lemme en découle. ∎

Soient maintenant X un espace rigide sur E, $\mathscr{H}$ une E-algèbre commutative, et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent muni d'une action $\mathscr{O}_X$-linéaire de $\mathscr{H}$. Soit $\{U_i \cong \operatorname{Spm} R_i\}$ un recouvrement admissible de X. Pour tout ouvert R_i, on obtient par l'argument ci-avant une R_i-algèbre affinoïde $\mathscr{A}(R_i, M_i, \mathscr{H})$ où $M_i := \Gamma(U_i, \mathscr{M})$. Par le lemme 7.2.4, les U_i se formant un recouvrement admissible de X, les $\operatorname{Spm} \mathscr{A}(R_i, M_i, \mathscr{H})$ peuvent se recoller en un espace rigide $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})$ fini sur X. De plus, les R_i-modules fidèles M_i peuvent se recoller en un faisceau cohérent, encore noté $\mathscr{M}$, sur $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})$.

Noter que par le lemme 7.2.4, $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})$ ne dépend pas du choix de $\{U_i\}$. On dispose de plus d'un morphisme naturel de E-algèbres

$$\mathscr{H} \to \mathscr{O}\big(\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})\big).$$

Pour un sous-espace rigide fermé Y de X sur E, si l'action de $\mathscr{O}_X$ sur $\mathscr{M}$ se factorise à travers $\mathscr{O}_Y$, on peut construire $\mathscr{E}(Y, \mathscr{M}, \mathscr{H})$ en remplaçant X et Y. On voit facilement que $\mathscr{E}(Y, \mathscr{M}, \mathscr{H}) \cong \mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})$, et le morphisme $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H}) \to X$ se factorise à travers Y.

On note $Z_{\mathscr{M}}$ le sous-espace fermé de X défini par le $\mathscr{O}_X$-idéal cohérent $\operatorname{Ann}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M})$ (*cf.* [**11**, prop. 9.5.3/3]) où $\operatorname{Ann}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M})$ est tel que

$$\operatorname{Ann}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{M})(\operatorname{Spm} R) \cong \operatorname{Ann}_R\big(\mathscr{M}(\operatorname{Spm} R)\big)$$

pour tout ouvert affinoïde $\operatorname{Spm} R$ de X. On voit alors que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_{Z_{\mathscr{M}}}$-module fidèle et $\mathscr{O}_X$ agit sur $\mathscr{M}$ via la projection $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{Z_{\mathscr{M}}}$. Le morphisme $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H}) \to X$ se factorise à travers $Z_{\mathscr{M}}$, et induit (par le lemme 7.2.2) une surjection

$$\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})(\bar{E}) \longrightarrow Z_{\mathscr{M}}(\bar{E}).$$

Pour un point fermé z de $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})$, on note x_z son image dans X et γ_z la composée $\mathscr{H} \to \mathscr{O}(\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})) \xrightarrow{z} \bar{E}$.

On a comme dans [**5**, lemme 7.2.7] :

Lemme 7.2.5. — *Si X possède un recouvrement admissible par une suite croissante d'ouverts affinoïdes, alors pour tous $z, z' \in \mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})(\bar{E})$, $z = z'$ si et seulement si $x_z = x_{z'}$ et $\gamma_z = \gamma_{z'}$. Dans ce cas, le point fermé z sera noté (x_z, γ_z).*

Par le lemme 7.2.3, on a

Lemme 7.2.6. — *Avec les notations ci-dessus, soit $\mathscr{N}$ un sous-$\mathscr{O}_X$-module de $\mathscr{M}$ stable sous l'action de $\mathscr{H}$, alors $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}/\mathscr{N}, \mathscr{H})$ est naturellement un sous-espace rigide fermé de $\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H})$ sur E.*

Enfin, le lemme 7.2.4 entraîne le résultat suivant.

LEMME 7.2.7. — *Soient X, X' deux espaces analytiques rigides sur E, et $f : X' \to X$ un morphisme plat; soient $\mathscr{H}$ une E-algèbre commutative, et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent muni d'une action $\mathscr{O}_X$-linéaire de $\mathscr{H}$. Alors on a un isomorphisme d'espaces rigides sur E*

$$\mathscr{E}(X, \mathscr{M}, \mathscr{H}) \times_X X' \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}(X', f^*\mathscr{M}, \mathscr{H}). \tag{7.2.3}$$

7.2.1.2. *Variétés de Hecke.* — On construit des variétés de Hecke à partir du H^1-complété des courbes de Shimura unitaires.

NOTATION 7.2.8. — Soient J un sous-ensemble non vide de Σ_p, $\underline{k_1}_J \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^{|J|}$ et $\underline{k_2}_J \in \mathbb{Z}^{|J|}$. On pose

$$W^{(\underline{k_1}_J, \underline{k_2}_J)} := \bigotimes_{\sigma \in J} \left(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} E^2 \otimes (\wedge E^2)^{k_{2,\sigma}} \right)^{\sigma},$$

qui est muni d'une action E-linéaire de $\mathrm{GL}_2(F)$ de sorte que l'action de $\mathrm{GL}_2(F)$ sur le facteur

$$W^{(k_{1,\sigma}, k_{2,\sigma})} := \left(\mathrm{Sym}^{k_{1,\sigma}-2} E^2 \otimes (\wedge E^2)^{k_{2,\sigma}} \right)^{\sigma}$$

est induite par l'action standard de $\mathrm{GL}_2(E)$ via le plongement $\sigma : F \hookrightarrow E$. Pour une extension finie L de E, on prend l'abus de notation $W^{(\underline{k_1}_J, \underline{k_2}_J)}$ pour désigner encore $W^{(\underline{k_1}_J, \underline{k_2}_J)} \otimes_E L$.

REMARQUE 7.2.9. — Les $\{W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp})}\}$ parcourent en fait toutes les représentations $\mathbb{Q}_p$-algébriques irréductibles de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$. On a de plus, $(\,.\,)^\vee$ désignant la représentation contragrédiente,

$$\left(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp})}\right)^\vee \cong W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp}, \underline{k'_2}_{\Sigma_\wp})}$$

avec $k'_{2,\sigma} = 2 - k_{1,\sigma} - k_{2,\sigma}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$.

Soient J un sous-ensemble non vide de $\Sigma_\wp$, $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$. Considérons, pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus J$, la représentation localement J-analytique admissible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$:

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \\ &\qquad \xrightarrow{\sim} \Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus \Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus \Sigma_\wp})}\big) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp \setminus J})}\Big)_{J\text{-an}} \end{aligned}$$

où l'isomorphisme découle du théorème 7.1.2 (2). Par le théorème 6.2.1, le module de Jacquet-Emerton

$$J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\Big)$$

est une représentation localement J-analytique essentiellement admissible de $T(F_\wp)$ (*cf.* §6.1.5) et est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathscr{H}(G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})//K^\wp)$ (et donc de la $\mathscr{O}_E$-algèbre commutative $\mathscr{H}^*(S(K^\wp)))$ qui commute à celle de $T(F_\wp)$.

Notons $\widehat{T}_J$ l'espace analytique rigide sur E qui paramètre les caractères localement J-analytiques de $T(F_\wp)$. Par définition (voir la discussion au-dessous de la proposition 6.1.17), le dual fort de

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\big)$$

peut se réaliser en un faisceau cohérent, noté $\mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$, sur $\widehat{T}_J$. En appliquant le formalisme dans la section précédente à

$$\Big\{\widehat{T}_J, \mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J}), \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)\otimes_{\mathscr{O}_E} E\Big\},$$

on obtient un espace analytique, noté

$$\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J}),$$

qui est fini sur $\widehat{T}_J$, ainsi qu'un faisceau cohérent sur l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$, encore noté

$$\mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J}).$$

Comme $\widehat{T}_J$ est strictement quasi-Stein (*cf.* proposition 6.1.14), par le lemme 7.2.5, pour toute extension finie L de E, un L-point de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ sera noté (χ, γ) où χ est un caractère localement J-analytique de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $L^\times$, et $\gamma : \mathscr{H}^*(S(K^\wp)) \to L$ est un morphisme de $\mathscr{O}_E$-algèbres (autrement dit, *un système de valeurs propres de* $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$). De plus, la fibre spéciale de $\mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ en un L-point χ de $\widehat{T}_J$ est naturellement duale à l'espace propre

$$J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\Big)[T(F_\wp) = \chi].$$

Par le lemme 7.2.1, la fibre spéciale de $\mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ en un L-point (χ, γ) de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ est alors naturellement duale à l'espace propre

$$J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\Big)[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma],$$

sur lequel $T(F_\wp)$ agit par le caractère χ et $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ par le morphisme γ. On voit (*e.g.* par le lemme 7.2.2) qu'il existe un L-point (χ, γ) dans l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ si et seulement si

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \neq 0.$$

En résumé, on a :

Théorème 7.2.10

(1) *Il existe un espace rigide* $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ *sur* E *muni d'un morphisme de* E*-algèbres*

$$\psi : \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)\otimes_{\mathscr{O}_E} E \longrightarrow \mathscr{O}\big(\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})\big) \tag{7.2.4}$$

et d'un morphisme fini d'espaces analytiques rigides

$$\varkappa : \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J}) \longrightarrow \widehat{T}_J$$

tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

(a) *pour tout ouvert affinoïde U de $\widehat{T}_J$, le morphisme induit*

$$\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) \otimes_{\mathscr{O}_E} \mathscr{O}(U) \longrightarrow \mathscr{O}\big(\varkappa^{-1}(U)\big)$$

est surjectif;

(b) *pour une extension finie L de E, un L-point (χ, γ) (voir la discussion ci-avant) appartient à $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})(L)$ si et seulement si*

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)\big[T(F_{\wp}) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big] \neq 0.$$

(2) *Il existe un faisceau cohérent $\mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})$ sur l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})$ de sorte que l'image directe $\varkappa_*\mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})$ est le faisceau cohérent sur $\widehat{T}_J$ associé au dual fort de la représentation localement J-analytique essentiellement admissible*

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\big)$$

de $T(F_{\wp})$. La fibre spéciale $\mathscr{M}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{|z}$ en un point fermé $z = (\chi, \gamma)$ est canoniquement duale au sous-espace propre correspondant

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E k_z\big)\big[T(F_{\wp}) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big],$$

où k_z désigne le corps résiduel en z.

Proposition 7.2.11

(1) *L'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})$ est emboîté, et $\mathscr{O}(\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\mathrm{red}})^0$ (cf. (4.4.13)) est alors un sous-ensemble compact de $\mathscr{O}(\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\mathrm{red}})$.*

(2) *L'image de $\mathscr{H}^*(S(K^{\wp}))$ dans $\mathscr{O}(\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\mathrm{red}})$ via (7.2.4) est contenue dans $\mathscr{O}(\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\mathrm{red}})^0$.*

Démonstration. — (1) Comme $\widehat{T}_J$ est emboîté, cela découle de [**5**, lemme 7.2.11].

(2) Il suffit de montrer que pour tout point fermé

$$z = (\chi, \varkappa) \in \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J}),$$

le morphisme $\varkappa : \mathscr{H}^*(S(K^{\wp})) \to \overline{E}$ se factorise à travers $\overline{\mathscr{O}_E}$. Mais c'est clair car $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})})$ admet un $\mathscr{O}_E$-réseau stable sous l'action de $\mathscr{H}^*(S(K^{\wp}))$ (*cf.* §7.1.1). ☐

Reprenons les notations du théorème 7.2.10. Soient $S \subseteq J \subseteq \Sigma_{\wp}$ et $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in J \setminus S$, considérons la composée équivariante sous l'action de $\mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$:

$$\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})}\big)_{S\text{-an}} \hookrightarrow \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})}\big)_{J\text{-an}}$$
$$\xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S})},$$

où le deuxième isomorphisme découle de [**37**, prop. 3.6.15] et du théorème 7.1.2 (2). On en déduit une injection équivariante sous l'action de

$$\mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)$$

via la composée

$$(7.2.5)\quad \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})}\big)_{S\text{-an}} \otimes_E \big(W^{(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S})}\big)^\vee$$
$$\hookrightarrow \big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S})}\big)_{S\text{-an}} \otimes_E \big(W^{(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S})}\big)^\vee$$
$$\hookrightarrow \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}},$$

où la deuxième injection découle de la proposition 6.1.3.

Soit $N_0 := \big\{\big(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \in \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_\wp)\big\}$. L'action de $T(F_\wp)$ sur $((W^{(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S})})^\vee)^{N_0}$ est alors donnée par le caractère

$$\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S}) := \Big(\prod_{\sigma\in J\setminus S} \sigma^{-k_{2,\sigma}}\Big) \otimes \Big(\prod_{\sigma\in J\setminus S} \sigma^{-(k_{1,\sigma}+k_{2,\sigma}-2)}\Big).$$

Comme le foncteur de Jacquet-Emerton est exact à gauche (*cf.* [**33**, th. 4.2.32]), on peut déduire de (7.2.5) un plongement de représentations localement J-analytiques essentiellement admissibles de $T(F_\wp)$ équivariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$

$$(7.2.6)\quad J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})}\big)_{S\text{-an}} \otimes_E \big(W^{(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S})}\big)^\vee\Big)$$
$$\xrightarrow{\sim} J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})}\big)_{S\text{-an}}\Big) \otimes_E \chi(\underline{k_1}_{J\setminus S}, \underline{k_2}_{J\setminus S})$$
$$\hookrightarrow J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\Big)$$

où le fait que le deuxième terme est essentiellement admissible découle du lemme 6.1.18, et où le premier isomorphisme découle du lemme suivant.

Lemme 7.2.12. — *Soient $J \subseteq \Sigma_\wp$, $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(\mathrm{GL}_2(F_\wp))$ localement J-analytique (cf. §6.1.1) et W une représentation $\Sigma_\wp \setminus J$-algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E. Alors il existe un isomorphisme naturel $T(F_\wp)$-équivariant*

$$J_B(V) \otimes_E W^{N_0} \xrightarrow{\sim} J_B(V \otimes_E W),$$

où $V \otimes_E W$ est muni de l'action diagonale de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$.

Démonstration. — Notons $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N_0. On sait que

$$W^{N_0} \cong W^{\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp}} \cong W^{\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp\setminus J}}$$

où le dernier isomorphisme découle du fait que W est $\Sigma_\wp \setminus J$-algébrique (*cf.* §6.1.1). Ceci, combiné avec le fait que l'action de $\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp\setminus J}$ sur V est triviale, entraîne

$$(V\otimes_E W)^{N_0}\subseteq (V\otimes_E W)^{\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp\setminus J}}\cong V\otimes_E W^{\mathfrak{n}_{\Sigma_\wp\setminus J}}\cong V\otimes_E W^{N_0},$$

et donc $(V\otimes_E W)^{N_0}\cong V^{N_0}\otimes_E W^{N_0}$. Le lemme en découle par [**33**, prop. 3.2.9]. ∎

Reprenons les notations introduites avant le lemme 7.2.12, supposons $S\neq\varnothing$ et notons

$$\mathscr{M}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})\big[\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})\big]$$

le faisceau cohérent sur $\widehat{T}_J$ associé au dual fort de

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})}\big)_{S\text{-an}}\big)\otimes_E\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S}),$$

qui, par (7.2.6) et l'anti-équivalence de catégories (*cf.* §6.1.5), est donc un faisceau quotient de $\mathscr{M}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$. En appliquant le formalisme de la section 7.2.1.1 à

$$\big\{\widehat{T}_J,\mathscr{M}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})\big[\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})\big],\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)\otimes_{\mathscr{O}_E}E\big\},$$

on obtient un sous-espace analytique rigide fermé (par le lemme 7.2.6), noté

$$\mathscr{E}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})\big[\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})\big],$$

de $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ sur E. En outre, le caractère $\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})$ induit un isomorphisme d'espaces rigides sur E (*cf.* §6.1.3)

$$\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S}):\widehat{T}_J\xrightarrow{\ \sim\ }\widehat{T}_J,\quad \chi\longmapsto\chi\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S}).$$

Par le lemme 6.1.18, on a alors un isomorphisme de faisceaux cohérents sur $\widehat{T}_J$

$$\begin{aligned}\big(\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})\big)^*\big(\mathscr{M}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})[\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})]\big)&\\ \xrightarrow{\ \sim\ }\mathscr{M}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})&\end{aligned}$$

(où l'action de $\mathscr{O}_{\widehat{T}_J}$ sur $\mathscr{M}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})$ se factorise à travers $\mathscr{O}_{\widehat{T}_S}$). Par le lemme 7.2.7, on obtient un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}\mathscr{E}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})[\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})] \arrow[d] \\ \widehat{T}_J \arrow[r, "\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S})"] & \widehat{T}_J\end{tikzcd}$$

où le morphisme (isomorphisme) en haut envoie (χ,γ) sur $(\chi\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S}),\gamma)$. De tout ce qui précède, on déduit le théorème suivant.

Théorème 7.2.13. — *Soient* $\varnothing\neq S\subseteq J\subseteq\Sigma_\wp$, $k_{1,\sigma}\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ *et* $k_{2,\sigma}\in\mathbb{Z}$. *Alors, pour tout* $\sigma\in\Sigma_p\setminus S$, *on a un plongement fermé d'espaces analytiques rigides sur* E :

$$\mathscr{E}(S;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus S},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus S})\hookrightarrow\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J}),\ \ (\chi,\gamma)\mapsto\big(\chi\chi(\underline{k_1}_{J\setminus S},\underline{k_2}_{J\setminus S}),\gamma\big).\tag{7.2.7}$$

Définition 7.2.14

(1) Soient $\varnothing \neq J \subseteq \Sigma_\wp$, S un sous-ensemble de J, L une extension finie de E, et $(\chi = \chi_1 \otimes \chi_2, \gamma)$ un L-point de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})$.

▷ On dit qu'un vecteur v dans

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \tag{7.2.8}$$

est *S-classique* (resp. *quasi-S-classique*) si son image dans

$$\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L$$

via la composée naturelle

$$\begin{aligned} &J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \\ &\xrightarrow{\sim} \big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)^{N_0}\big[T(F_\wp)^+ = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \\ &\qquad\qquad \hookrightarrow \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L, \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

est *S-classique* (resp. *quasi-S-classique*) pour l'action de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ (*cf.* §6.1.2), où $T(F_\wp)^+$ désigne le monoïde $\big\{\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\big) \in T(F_\wp)\ ;\ v_\wp(a) \geq v_\wp(b)\big\}$ et où le premier isomorphisme découle de [**33**, prop. 3.4.9] (voir la remarque 7.2.15 ci-dessous pour l'action de $T(F_\wp)^+$ sur V^{N_0} pour une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique V de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$).

▷ On dit que v est *classique* (resp. *quasi-classique*) s'il est J-classique (resp. quasi-J-classique). On note

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big]_?$$

avec ? = quasi-S-cl (resp. ? = S-cl) le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs quasi-S-classiques (resp. S-classiques).

(2) Avec les notations ci-dessus, on dit que :

▷ (χ, γ) est *S-classique* (resp. *quasi-S-classique*) si le L-espace vectoriel en (7.2.8) possède des vecteurs S-classiques (resp. quasi-S-classiques) non nuls ;

▷ (χ, γ) est *classique* (resp. *quasi-classique*) s'il est J-classique (resp. quasi-J-classique).

Remarque 7.2.15. — Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(\mathrm{GL}_2(F_\wp))$ (*cf.* §6.1.1), on définit une action de $T(F_\wp)^+$ sur V^{N_0} en posant (*cf.* [**33**, déf. 3.4.1])

$$\pi_t(v) := \#(N_0/tN_0t^{-1})^{-1} \sum_{n \in N_0/tN_0t^{-1}} nt \cdot v \tag{7.2.10}$$

pour $t \in T(F_\wp)^+$ et $v \in V^{N_0}$. Par [**33**, prop. 3.4.9], pour tout caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique χ de $T(F_\wp)$, on a une bijection

$$J_B(V)\big[T(F_\wp) = \chi\big] \xrightarrow{\sim} V^{N_0}\big[T(F_\wp)^+ = \chi\big].$$

Proposition 7.2.16. — *Avec les notations de la définition* 7.2.14, *et on note*

$$V := \widetilde{H}^1_{ét}\big(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L$$

pour simplifier. Soient $S \subseteq J$, *et* $0 \neq v$ *un vecteur dans*

$$V^{N_0}\big[T(F_\wp)^+ = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \cong J_B(V)\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big].$$

(1) *Le vecteur* v *est quasi-*S*-classique si et seulement si* $S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi)$ *et* v *appartient à l'image de l'injection naturelle* $\mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$*-équivariante* (*cf. la proposition* 6.1.3)

$$(7.2.11)\qquad \big(V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_S, \underline{0}_S)} \otimes_L \chi_S \circ \det\big)_{J\setminus S\text{-an}} \otimes_L (W^{(\underline{k_1}_S, \underline{0}_S)})^\vee \otimes_L \chi_S^{-1} \circ \det \lhook\joinrel\longrightarrow V,$$

où $k_{1,\sigma} := k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} + 2$ *pour* $\sigma \in S$ (*cf. la définition* 4.4.1) *et où* χ_S *est un caractère localement* S*-analytique de* $F_\wp^\times$ *à valeurs dans* $L^\times$ *vérifiant* $k_{\chi_S,\sigma} = -k_{\chi_1,\sigma}$ *pour* $\sigma \in S$ (*augmenter* L *s'il faut, cf. le lemme* 4.4.4, *et noter que* χ_S *est unique à torsion par un caractère lisse de* $F_\wp^\times$ *près, et le premier terme de* (7.2.11) *ne dépend pas du choix de* χ_S).

(2) *Le vecteur* v *est* S*-classique si et seulement si* v *est quasi-*S*-classique et* $k_{\chi_1,\sigma} \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in S$.

Démonstration. — (1) Le sens « si » est clair. On suppose maintenant v quasi-J-classique. L'action de $\mathfrak{b}_S$ (où $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie de $B(F_\wp)$ et $\mathfrak{b}_S \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in S} \mathfrak{b} \otimes_{F_\wp,\sigma} L$, voir §6.1.2) sur v est alors induite par le caractère (voir l'argument au-dessus de la proposition 6.3.32)

$$\chi'_S : \mathfrak{t}_S \to L, \quad \sum_{\sigma\in S} \begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & d_\sigma \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{\sigma\in S} (a_\sigma k_{\chi_{1,\sigma}} + d_\sigma k_{\chi_{2,\sigma}})$$

via la projection $\mathfrak{b}_S \twoheadrightarrow \mathfrak{t}_S$. Donc l'application

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S) \longrightarrow V, \quad \mathfrak{x} \longmapsto \mathfrak{x}\cdot v,$$

induit un morphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S)$-modules $\mathrm{Ver}(\chi'_S) \to V$ dont l'image, notée W_v, est de dimension finie (sur L) car v est quasi-S-classique, où

$$\mathrm{Ver}(\chi'_S) \cong \mathrm{U}(\overline{\mathfrak{n}}_S) \otimes_L \chi'_S$$

désigne le module de Verma de χ'_S ($\overline{\mathfrak{n}}$ désignant l'algèbre de Lie du radical nilpotent de $\overline{B}(F_\wp)$). Par la théorie des modules de Verma (*e.g.* voir [**47**, §1.3 et §1.6]), on a $k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pour tout $\sigma \in S$ (*i.e.* $S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi)$), et on a un isomorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_S)$-modules

$$(7.2.12)\qquad (W^{(\underline{k_1}_S, \underline{0}_S)})^\vee \otimes_L \chi_S^{-1} \circ \det \xrightarrow{\sim} W_v.$$

On obtient alors une injection $\mathfrak{g}_S$-équivariante

$$(W^{(\underline{k_1}_S, \underline{0}_S)})^\vee \otimes_L \chi_S^{-1} \circ \det \lhook\joinrel\longrightarrow V$$

dont v appartient à l'image. On en déduit que v se trouve dans l'image de la composée naturelle $\mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$-équivariante (voir la proposition 6.1.3 et la remarque 6.1.5, noter que la dernière application est donnée par $f \otimes w \longmapsto f(w)$)

$$\begin{aligned}(V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_S,\underline{0}_S)} \otimes_L \chi_S \circ \det)_{J\backslash S\text{-an}} \otimes_L (W^{(\underline{k_1}_S,\underline{0}_S)})^\vee \otimes_L \chi_S^{-1} \circ \det \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_S}\big((W^{(\underline{k_1}_S,\underline{0}_S)})^\vee \otimes_L \chi_S^{-1} \circ \det, V\big) \otimes_L \big((W^{(\underline{k_1}_S,\underline{0}_S)})^\vee \otimes_L \chi_S^{-1} \circ \det\big) \\ \longhookrightarrow V,\end{aligned}$$

d'où (1).

(2) Supposons v quasi-S-classique. Par définition (*cf.* §6.1.2), v est S-classique si et seulement si W_v provient d'une représentation S-algébrique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur L. Par l'isomorphisme (7.2.12), ceci est équivalent à $k_{\chi_S,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in S$. □

Remarque 7.2.17. — Avec les notations de la proposition 7.2.16, soit $S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi)$ et notons

$$\chi' := \chi\chi(\underline{k_1}_S, \underline{0}_S)^{-1}(\chi_S \otimes \chi_S).$$

Alors l'injection naturelle obtenue en appliquant le foncteur de Jacquet-Emerton à l'application (7.2.11) (voir aussi (7.2.6))

$$\begin{aligned}J_B\Big((V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_S,\underline{0}_S)} \otimes_L \chi_S \circ \det)_{J\backslash S\text{-an}}\Big)[T(F_\wp) = \chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma] \\ \otimes_L \chi(\underline{k_1}_S, \underline{0}_S)(\chi_S \otimes \chi_S)^{-1} \longhookrightarrow J_B(V)\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big]\end{aligned}$$

induit une bijection

$$\begin{aligned}J_B\Big((V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_S,\underline{0}_S)} \otimes_L \chi_S \circ \det)_{J\backslash S\text{-an}}\Big)\big[T(F_\wp) = \chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \\ \otimes_L \chi(\underline{k_1}_S, \underline{0}_S)(\chi_S \otimes \chi_S)^{-1} \xrightarrow{\sim} J_B(V)_{\mathrm{quasi}-S-\mathrm{cl}}\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big].\end{aligned}$$

En particulier, si l'on a de plus $k_{\chi_1,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in S$, il y a alors une bijection (noter que le membre de droite ne change pas si « S-cl » est remplacé par « quasi-S-cl », par la proposition 7.2.16 (2))

$$\begin{aligned}J_B\Big((V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_S,\underline{k_2}_S)})_{J\backslash S\text{-an}}\Big)\big[T(F_\wp) = \chi\chi(\underline{k_1}_S, \underline{k_2}_S)^{-1}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \\ \xrightarrow{\sim} J_B(V)_{S-\mathrm{cl}}\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big],\end{aligned}$$

où $k_{2,\sigma} = -k_{\chi_1,\sigma}$ pour tout $\sigma \in S$. Par conséquent, le L-point $(\chi = \chi_1 \otimes \chi_2, \gamma)$ est S-classique si et seulement si $k_{1,\sigma} := k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} + 2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} := -k_{\chi_1,\sigma} \in \mathbb{Z}$ et

$$J_B\Big((V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_S,\underline{k_2}_S)})_{J\backslash S\text{-an}}\Big)\big[T(F_\wp) = \chi\chi(\underline{k_1}_S, \underline{k_2}_S)^{-1}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \neq 0.$$

Lorsque $S \neq J$, c'est alors équivalent à

$$(\chi\chi(\underline{k_1}_S, \underline{k_2}_S)^{-1}, \gamma) \in \mathscr{E}(J \setminus S; \underline{k_1}_{(\Sigma_p\backslash J)\cup S}, \underline{k_2}_{(\Sigma_p\backslash J)\cup S}).$$

Question 7.2.18. — Soient σ, $\sigma' \in J$, avec $\sigma \neq \sigma'$, et (χ, γ) un point fermé de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\backslash J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\backslash J})$. Est-ce que (χ, γ) est $\{\sigma, \sigma'\}$-classique quand il est à la fois σ-classique et σ'-classique ?

DÉFINITION 7.2.19

(1) Soit $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caractère continu de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$. On dit que χ est *non ramifié algébrique* si $k_{\chi_1,\sigma}$, $k_{\chi_2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$ et il existe a_1, $a_2 \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ tel que

$$\chi_1 \otimes \chi_2 = \mathrm{unr}(a_1) \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} \sigma^{k_{\chi_1,\sigma}} \otimes \mathrm{unr}(a_2) \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} \sigma^{k_{\chi_2,\sigma}}.$$

(2) Avec les notations de la définition 7.2.14, on dit que (χ, γ) est *semi-stable classique* si (χ, γ) est classique et χ est de plus non ramifié algébrique.

Notons :

- ▹ $C(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ l'ensemble des points semi-stables classiques de l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$;
- ▹ $\mathscr{H}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ l'adhérence de Zariski (qui est donc réduit, voir [**23**, §1.2]) de $C(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$.

7.2.2. Points compagnons et classicités. — On utilise la théorie des représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ pour donner une interprétation en termes de représentations (proposition 7.2.23) de l'existence ou non de *points compagnons* (*cf.* définition 7.2.21) et pour montrer un résultat de classicité (proposition 7.2.27).

On fixe jusqu'à la fin de cette section un sous-ensemble non vide J de $\Sigma_\wp$ et $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus J$.

LEMME 7.2.20. — *Soient L une extension finie de E, $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caractère localement J-analytique de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $L^\times$,*

$$C := C_{\overline{B}}(\chi) \cap J$$

(cf. définition 6.3.31), et γ un morphisme de $\mathscr{O}_E$-algèbres $\mathscr{H}^*(S(K^\wp)) \to L$. Alors on a une bijection de L-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}(7.2.13)\quad & J_B\big(\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})})_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)_{\text{quasi-}C\text{-cl}}\big[T(F_\wp) = \chi, \mathscr{H}^*(S(K^\wp)) = \gamma\big] \\ & \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{B(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \chi_2 \prod_{\sigma\in C} \sigma^{k_{1,\sigma}-2} \chi_C\, \mathrm{unr}(q^{-1}) \otimes \chi_1 \chi_C\, \mathrm{unr}(q)\big)^{J\setminus C\text{-an}} \\ & \qquad \otimes_L (W^{(\underline{k_1}_C, \underline{0}_C)})^\vee \otimes_L \chi_C^{-1} \circ \det \otimes_L (W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J})})^\vee, \\ & \qquad \big(\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}) \otimes_E L\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*(S(K^\wp)) = \gamma\big]\Big),\end{aligned}$$

où $k_{1,\sigma} = k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} + 2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ pour tout $\sigma \in C$, χ_C est un caractère localement C-analytique de $F_\wp^\times$ à valeurs dans $L^\times$ tel que $k_{\chi_C,\sigma} = -k_{\chi_1,\sigma}$ pour tout $\sigma \in C$ (et $q = p^{d_0}$).

Si de plus $k_{\chi_1,\sigma} \in \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in C$, *notant* $k_{2,\sigma} := -k_{\chi_1,\sigma}$ *pour tout* $\sigma \in C$, *on a alors une bijection de* L*-espaces vectoriels :*

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L\big)_{C-\mathrm{cl}}\big[T(F_{\wp}) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big] \xrightarrow{\sim}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_{\wp})}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{B(F_{\wp})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\wp})} \chi_2 \prod_{\sigma\in C} \sigma^{k_{1,\sigma}+k_{2,\sigma}-2}\,\mathrm{unr}(q^{-1}) \otimes \chi_1 \prod_{\sigma\in C} \sigma^{k_{2,\sigma}}\,\mathrm{unr}(q)\big)^{J\setminus C\text{-an}}$$
$$\otimes_L \big(W^{(\underline{k_1}_{C\cup(\Sigma_{\wp}\setminus J)}, \underline{k_2}_{C\cup(\Sigma_{\wp}\setminus J)})}\big)^{\vee},$$
$$\big(\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_{\wp}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_{\wp}})}\big) \otimes_E L\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big]\Big).$$

Démonstration. — Notons

$$V := \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^{\wp}, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}} \otimes_E L \quad \text{et} \quad \chi' := \chi\chi(\underline{k_1}_C, \underline{0}_C)^{-1}(\chi_C \otimes \chi_C)$$

pour simplifier. On a une bijection de L-espaces vectoriels (voir la remarque 7.2.17)

$$J_B\big((V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_C, \underline{0}_C)} \otimes_L \chi_C \circ \det)_{J\setminus C\text{-an}}\big)\big[T(F_{\wp}) = \chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big]$$
$$\xrightarrow{\sim} J_B(V)_{\mathrm{quasi}-C-\mathrm{cl}}\big[T(F_{\wp}) = \chi, \mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big].$$

Comme $C_{\overline{B}}(\chi') \cap (J \setminus C) = \varnothing$, par le corollaire 6.3.33, on obtient une bijection de L-espaces vectoriels

$$(7.2.14)\quad J_B\big((V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_C, \underline{0}_C)} \otimes_L \chi_C \circ \det)_{J\setminus C\text{-an}}\big)\big[T(F_{\wp}) = \chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big]$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_{\wp})}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{B(F_{\wp})}^{\mathrm{GL}_2(F_{\wp})} \chi_2 \prod_{\sigma\in C} \sigma^{k_{1,\sigma}-2}\chi_C\,\mathrm{unr}(q^{-1}) \otimes \chi_1\chi_C\,\mathrm{unr}(q)\big)^{J\setminus C\text{-an}},$$
$$(V \otimes_L W^{(\underline{k_1}_C, \underline{0}_C)} \otimes_L \chi_C \circ \det)_{J\setminus C\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big) = \gamma\big]\Big).$$

Par le corollaire 6.1.6, il y a une bijection entre le dernier terme de (7.2.14) et le dernier terme de (7.2.13), d'où la première partie du lemme. La deuxième partie découle de façon analogue. ∎

Soit $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $T(F_{\wp})$ à valeurs dans $\overline{E}^{\times}$. Pour $S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi)$, on note

$$\chi_S^c := \chi_{1,S}^c \otimes \chi_{2,S}^c := \chi_1 \prod_{\sigma\in S} \sigma^{k_{\chi_2,\sigma}-k_{\chi_1,\sigma}-1} \otimes \chi_2 \prod_{\sigma\in S} \sigma^{k_{\chi_1,\sigma}-k_{\chi_2,\sigma}+1}.$$

On a par définition $C_{\overline{B}}(\chi_S^c) = C_{\overline{B}}(\chi) \setminus S$.

Définition 7.2.21. — Soient $z = (\chi, \gamma)$ un point fermé de l'espace analytique rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ et S un sous-ensemble de $C_{\overline{B}}(\chi) \cap J$.

- ▹ On dit que z admet un point S-compagnon dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ si
$$z_S^c := (\chi_S^c, \gamma) \in \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})(\overline{E}).$$
- ▹ On dit que le point S-compagnon z_S^c est *efficace* si z_S^c est quasi-$C_{\overline{B}}(\chi_S^c) \cap J$-classique.

Remarque 7.2.22. — Avec les notations de la définition 7.2.21, si z admet un point $C_{\overline{B}}(\chi)\cap J$-compagnon $z^c_{C_{\overline{B}}(\chi)\cap J}$ dans $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$, alors $z^c_{C_{\overline{B}}(\chi)\cap J}$ est efficace puisque $C_{\overline{B}}(\chi^c_{C_{\overline{B}}(\chi)\cap J})\cap J=\varnothing$.

Proposition 7.2.23. — *Soient L une extension finie de E, $z=(\chi,\gamma)$ un L-point de $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$, S un sous-ensemble de $C_{\overline{B}}(\chi)\cap J$. Alors z admet un point S-compagnon efficace si et seulement s'il existe un plongement de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$:*

$$\begin{aligned}\Big(\mathrm{Ind}_{B(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\chi^c_{2,S}\prod_{\sigma\in C}\sigma^{k_{\chi_1,\sigma}-k_{\chi_2,\sigma}}\chi_C\,\mathrm{unr}(q^{-1})\otimes\chi^c_{1,S}\chi_C\,\mathrm{unr}(q)\Big)^{J\setminus C\text{-an}}\\ \otimes_L(W^{(\underline{k_1}_C,\underline{0}_C)})^\vee\otimes_L(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus J})})^\vee\otimes_L\chi_C^{-1}\circ\det\\ \longrightarrow\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)\otimes_E L\Big)_{J\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big],\end{aligned}$$

où

$$C:=C_{\overline{B}}(\chi^c_S)\cap J=(C_{\overline{B}}(\chi)\cap J)\setminus S,$$

$k_{1,\sigma}:=k_{\chi_1,\sigma}-k_{\chi_2,\sigma}+2=k_{\chi^c_{1,S},\sigma}-k_{\chi^c_{2,S},\sigma}+2$ pour tout $\sigma\in C$, et où χ_C est un caractère localement C-analytique de $F_\wp^\times$ à valeurs dans $L^\times$ tel que $k_{\chi_C,\sigma}=-k_{\chi_1,\sigma}$ pour tout $\sigma\in C$.

Démonstration. — La proposition découle du lemme 7.2.20 appliqué à $\chi=\chi^c_S$. ∎

Comme la représentation de Banach $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})})$ de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ est unitaire (*cf.* théorème 7.1.2 (1)), par la proposition 7.2.23 et [**15**, prop. 5.1] (voir en particulier [**15**, (13)]), on obtient :

Corollaire 7.2.24. — *Avec les notations de la proposition 7.2.23, si z admet un point S-compagnon efficace, alors on a*

$$v_\wp\big(q\chi_1(\varpi)\big)\geq\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J}k_{2,\sigma}+\sum_{\sigma\in S}(k_{\chi_1,\sigma}-k_{\chi_2,\sigma}+1).$$

Lemme 7.2.25. — *Soient L une extension finie de E, $z=(\chi=\chi_1\otimes\chi_2,\gamma)$ un L point de $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$, $\tau\in C_{\overline{B}}(\chi)\cap J$. S'il existe un vecteur $v\neq 0$ non quasi-τ-classique dans*

$$J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\otimes_E L\Big)\big[T(F_\wp)=\chi,\mathscr{H}^*(S(K^\wp))=\gamma\big],$$

alors z admet un point τ-compagnon. De plus, si c'est le cas, alors il existe un sous-ensemble S de $C_{\overline{B}}(\chi)\cap J$ contenant τ tel que z admette un point S-compagnon efficace.

Démonstration. — On note encore v son image dans

$$V:=\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\otimes_E L$$

via la composée (7.2.9). D'après [**33**, prop. 4.4.4], on a

$$v' := X_{-,\tau}^{k_{\chi_1,\tau}-k_{\chi_2,\tau}+1} v \in V^{N_0}\big[T(F_\wp)^+ = \chi_\tau^c, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \\ \xrightarrow{\sim} J_B(V)\big[T(F_\wp) = \chi_\tau^c, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big].$$

En outre, l'application $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\tau)$-équivariante $f : \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\tau) \to V$, $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{x} \cdot v$ induit un morphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\tau)$-modules $\mathrm{Ver}(\chi_\tau) \to V$ où χ_τ désigne le caractère de $\mathfrak{b}_\tau$:

$$\chi_\tau : \mathfrak{b}_\tau \longrightarrow L, \quad \left(\begin{smallmatrix} a_\tau & b_\tau \\ 0 & d_\sigma \end{smallmatrix}\right) \longmapsto a_\tau k_{\chi_{1,\tau}} + d_\tau k_{\chi_{2,\tau}}.$$

Si $v' = 0$, l'image de f est donc de dimension finie sur L, ce qui contredit le fait que v n'est pas quasi-τ-classique. Donc $v' \neq 0$, d'où la première partie du lemme. S'il existe $\tau' \in C_{\overline{B}}(\chi_\tau^c) \cap J = (C_{\overline{B}}(\chi) \cap J) \setminus \{\tau\}$ tel que v' ne soit pas quasi-τ'-classique, on peut reprendre l'argument précédent en remplaçant v, τ par v', τ',... Cela nous permet d'obtenir enfin un ensemble $S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi) \cap J$ contenant τ et un point S-compagnon efficace de z. ∎

Remarque 7.2.26. — Ce lemme peut aussi se déduire facilement de [**16**, th. 4.3].

Proposition 7.2.27. — *Soient $z = (\chi_1 \otimes \chi_2, \gamma)$ un point fermé de l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})$, et $S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi) \cap J$. Si l'on a*

$$v_\wp\big(q\chi_1(\varpi)\big) < \sum_{\sigma \in \Sigma_\wp \setminus J} k_{2,\sigma} + \inf_{\sigma \in S}\{k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} + 1\},$$

alors le point z est quasi-S-classique.

Démonstration. — On suppose que z ne soit pas quasi-S-classique. Il existe alors $\tau \in S$ tel que z ne soit pas quasi-τ-classique (*cf.* proposition 6.1.2). Par le lemme 7.2.25, il existe $S' \subseteq S$ contenant τ tel que z admette un point S'-compagnon efficace. Selon le corollaire 7.2.24, on a

$$v_\wp\big(q\chi_1(\varpi)\big) \geq \sum_{\sigma \in \Sigma_\wp \setminus J} k_{2,\sigma} + \sum_{\sigma \in S'} (k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} + 1),$$

une contradiction. ∎

Corollaire 7.2.28 (Classicité). — *Avec les notations de la proposition 7.2.27, supposons de plus que $k_{1,\sigma} := k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} + 2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ et $k_{2,\sigma} := -k_{\chi_1,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in J$ (on a ainsi $C_{\overline{B}}(\chi) \cap J = J$), et notons $\psi_1 := \chi_1 \prod_{\sigma \in J} \sigma^{k_{2,\sigma}}$, qui est un caractère lisse de $F_\wp^\times$ à valeurs dans $\overline{E}^\times$. Pour $S \subseteq J$, si l'on a*

$$v_\wp\big(q\psi_1(\varpi)\big) < \sum_{\sigma \in \Sigma_\wp} k_{2,\sigma} + \inf_{\sigma \in S}\big\{k_{1,\sigma} - 1\big\},$$

alors le point z est S-classique.

Remarque 7.2.29. — Avec les notations du corollaire 7.2.28.

(1) Dans le cas où $J=\Sigma_\wp$ et $S=\Sigma_\wp$, on voit que si
$$\upsilon_\wp\big(q\psi_1(\varpi)\big)<\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp}k_{2,\sigma}+\inf_{\sigma\in\Sigma_\wp}\big\{k_{1,\sigma}-1\big\},$$
alors le point z est classique. En particulier, si l'on suppose qu'il existe k_σ (tous ≥ 2) pour $\sigma\in\Sigma_p$ et w des entiers de même parité tels que $k_{1,\sigma}=k_\sigma$, $k_{2,\sigma}=\frac{1}{2}(w-k_\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Sigma_p$ (ce qui est l'hypothèse de parité sur les poids des formes modulaires de Hilbert), si
$$\upsilon_\wp\big(q\psi_1(\varpi)\big)<\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp}\tfrac{1}{2}(w-k_\sigma)+\inf_{\sigma\in\Sigma_\wp}\big\{k_\sigma-1\big\},$$
alors le point z est classique. On invite le lecteur à comparer cela avec les conjectures de Breuil [**13**] et les résultats de Tian-Xiao [**79**].

(2) Dans le cas où $S=J=\{\tau\}$ avec $\tau\in\Sigma_\wp$, si
$$\upsilon_\wp\big(q\psi_1(\varpi)\big)<\sum_{\sigma\in\Sigma_\wp}k_{2,\sigma}+(k_{1,\tau}-1),$$
alors z est classique. On retrouve alors la pente critique pour les formes modulaires surconvergentes de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})$ sur les courbes de Shimura unitaires sur (τ,E) (*cf.* remarque 4.3.2 (2)).

Soit maintenant ρ une représentation $K^\wp$-modulaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur E, et supposons que $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})})_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}}$ (*cf.* §7.1.3) est non nul, qui est aussi une représentation de Banach admissible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E, munie d'une action continue de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))\times\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ qui commute à celle de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$. On note
$$\begin{aligned}\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J-\mathrm{an},\bar\rho^{\mathrm{ss}}}&:=\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}}\big)_{J\text{-an}}\\&\cong\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J\text{-an}}\big)_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}},\end{aligned}$$
(où l'isomorphisme découle du fait que les actions de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ et $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ commutent), et $\mathscr{M}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}}$ le faisceau cohérent sur $\widehat{T}_J$ associé au dual fort de la représentation $J_B(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})})_{J-\mathrm{an},\bar\rho^{\mathrm{ss}}})$ (via l'anti-équivalence de catégories, voir §6.1.5). En appliquant le formalisme dans la section 7.2.1.1 à
$$\big\{\mathscr{M}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}},\ \widehat{T}_J,\ \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)\otimes_{\mathscr{O}_E}E\big\},$$
on obtient un espace rigide analytique, noté
$$\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}},$$
fini sur $\widehat{T}_J$ et également un faisceau cohérent sur $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}}$ encore noté
$$\mathscr{M}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho^{\mathrm{ss}}}.$$

Par la remarque 7.1.11 et le lemme 7.2.6,

$$\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}}$$

est en fait un sous-espace rigide fermé de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$.

- ▷ Pour $S \subseteq J$, un L-point (χ, γ) de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}}$ est dit *quasi-S-classique* (resp. *S-classique, semi-stable classique*) s'il est quasi-S-classique (resp. S-classique, semi-stable classique) comme point de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$.

De plus, pour un point fermé z de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}}$, on voit facilement que z admet un point S-compagnon dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})$ si et seulement si z_S^c se trouve dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}}$.

- ▷ Si c'est le cas, on dit que z *admet un point S-compagnon z_S^c dans* $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}}$.
- ▷ Le point S-compagnon z_S^c est dit *efficace* s'il est quasi-$C_{\overline{B}}(\chi_S^c) \cap J$-classique.

Tous les résultats précédents restent vrais après « localisation en $\bar{\rho}^{\mathrm{ss}}$ ».

On suppose jusqu'à la fin de cette section ρ absolument irréductible modulo ϖ_E (ainsi $\bar{\rho}^{\mathrm{ss}} \cong \bar{\rho}$).

Proposition 7.2.30. — *L'espace analytique rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}}$ est équi-dimensionnel de dimension $2|J|$, et les points semi-stables classiques sont Zariski-denses dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}}$.*

Démonstration. — Notons

$$T_0 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in T(F_\wp)\ ;\ \ a \in \varpi^{\mathbb{Z}} \times (1 + \varpi\mathscr{O}_\wp), d \in 1 + \varpi\mathscr{O}_\wp \right\}.$$

On a alors une decomposition de groupes

$$T_0 \xrightarrow{\sim} \left(\begin{smallmatrix} 1+\varpi\mathscr{O}_\wp & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\varpi\mathscr{O}_\wp \end{smallmatrix}\right) \times \Pi_0^{\mathbb{Z}} \qquad \left(\text{avec } \Pi_0 := \left(\begin{smallmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$

qui induit un isomorphism d'espaces rigides sur E :

$$\widehat{(T_0)}_J \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}_{J,1} \times \mathscr{W}_{J,1} \times \mathbb{G}_m, \tag{7.2.15}$$

où $\widehat{(T_0)}_J$ (resp. $\mathscr{W}_{J,1}$) désigne l'espace rigide sur E qui paramètre les caractères localement J-analytiques de T_0 (resp. de $1 + \varpi\mathscr{O}_\wp$). L'injection naturelle $T_0 \hookrightarrow T(F_\wp)$ induit un morphisme d'espaces rigides

$$p_1 : \widehat{T}_J \twoheadrightarrow \widehat{(T_0)}_J, \quad \chi \mapsto \chi|_{T_0}.$$

Par le corollaire 7.1.14 et [**33**, (4.2.43)], on voit que le $\Gamma(\widehat{T}_J, \mathscr{O}_{\widehat{T}_J})$-module coadmissible

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})}\big)_{J-\mathrm{an},\bar{\rho}}\big)_b^\vee$$

est encore coadmissible comme $\Gamma(\widehat{(T_0)}_J, \mathscr{O}_{\widehat{(T_0)}_J})$-module. On note alors $\mathscr{M}$ le $\mathscr{O}_{\widehat{(T_0)}_J}$-module cohérent associé. On note $\mathscr{H}$ la E-algèbre engendrée par $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et les opérateurs

$$S_\varpi = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_{\lambda_1,\lambda_2} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

pour tous $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mu_{q-1}(F_\wp^\times)$ (l'ensemble des racines de l'unité dans $F_\wp^\times$) (noter que $T(F_\wp)$ est engendré comme groupe par T_0, S_ϖ et les Z_{λ_1,λ_2}). Le faisceau cohérent $\mathscr{M}$ est alors muni d'une action naturelle $\mathscr{O}_{\widehat{(T_0)}_J}$-linéaire de $\mathscr{H}$. On peut donc reconstruire l'espace rigide $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$ en appliquant le formalisme dans la section 7.2.1.1 à $\{\mathscr{M},\widehat{(T_0)}_J,\mathscr{H}\}$.

Soit $\{U_i \cong \operatorname{Spm} A_i\}_{i\in I}$ un recouvrement admissible de $\mathscr{W}_{J,1}\times\mathscr{W}_{J,1}$, les $\{U_i\times\mathbb{G}_m\}_{i\in I}$ forment un recouvrement admissible de $\widehat{(T_0)}_J$ (via l'isomorphisme (7.2.15)). Le corollaire 7.1.14, [**33**, (4.2.43)], la proposition 6.4.6 et sa preuve, appliqués à $A = A_i$, $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{|U_i\times\mathbb{G}_m}$ et $z = \Pi_0$, montrent qu'il existe un sous-espace rigide fermé $\mathscr{Z}$ de $U_i\times\mathbb{G}_m$ défini par une série de Fredholm $G_i(z) \in A_i\{\{z,z^{-1}\}\}$ ($\mathscr{Z}$ est alors appelé *une hypersurface de Fredholm*) tel que :

(1) Il existe un faisceau cohérent $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{Z}$ tel que $i_*\mathscr{N} \cong \mathscr{M}$ où i désigne le plongement fermé $\mathscr{Z} \hookrightarrow U_i\times\mathbb{G}_m$.

(2) Il existe un recouvrement affinoïde admissible $\{V_j \cong \operatorname{Spm} A_i[z]/P_j(z)\}$ de $\mathscr{Z}$ tel que :

   (a) il existe $Q_j(z) \in A_i\{\{z\}\}$ tel que $(P_j,Q_j) = 1$ et $G_i(z) = P_j(z)Q_j(z)$;

   (b) $\Gamma(V_j,\mathscr{N})$ est un A_i-module projectif de rang fini avec P_j le polynôme caractéristique de Π_0 sur $\Gamma(V_j,\mathscr{N})$.

On peut donc reconstruire $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$ en appliquant le formalisme dans la section 7.2.1.1 à $\{\mathscr{Z},\mathscr{N},\mathscr{H}\}$ (voir l'argument au-dessus du lemme 7.2.5). Cette construction coïncide avec celle dans [**19**, §5] (voir aussi [**22**, §6]).

La première partie du théorème découle alors de [**22**, prop. 6.4.2] et la proposition 6.1.13. La densité des points semi-stables classiques découle de la proposition 7.2.27 (voir aussi le corollaire 7.2.28) par le même argument que celui de la preuve de [**22**, prop. 6.4.6] (1). □

Notons $C(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$ l'ensemble des points semi-stables classiques de l'espace rigide $\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$.

La proposition suivante découle de la proposition 7.2.27 (et (1)) par le même argument que dans la preuve de [**22**, prop. 6.2.7].

1. On utilise aussi le fait que l'ensemble des caractères algébriques localement J-analytiques de $1+\varpi\mathscr{O}_\wp$ est d'accumulation dans $\mathscr{W}_{1,J}$ (*cf.* [**5**, §3.3.1]). Lorsque $|J| = 1$, c'est clair. Le cas général alors s'en déduit en considérant le morphisme naturel $\prod_{\sigma\in J}\mathscr{W}_{1,\sigma}\to\mathscr{W}_{1,J}$, qui est en fait surjectif et étale (voir le lemme 4.4.4 et la discussion suivant la proposition 6.1.12).

Proposition 7.2.31. — *Soit $z = (\chi, \gamma)$ un point de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\bar{\rho}}$ avec χ non ramifié algébrique. Alors $C(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\bar{\rho}}$ s'accumule en z, i.e. pour tout ouvert admissible U contenant z, il existe un ouvert admissible V de U contenant z tel que l'ensemble $C(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\bar{\rho}} \cap V(\overline{E})$ soit Zariski-dense dans V.*

7.2.3. Familles de représentations galoisiennes. — Dans cette section, on étudie les familles p-adiques de représentations galoisiennes sur les variétés de Hecke construites au § 7.2.1.

7.2.3.1. *Familles de représentations galoisiennes.* — Fixons dans cette section un sous-ensemble J de $\Sigma_\wp$, des entiers $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus J$ et ρ une représentation $K^\wp$-modulaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F})$ sur E, absolument irréductible modulo ϖ_E telle que $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\bar{\rho}} \neq \varnothing$.

Soit $z = (\chi = \chi_1 \otimes \chi_2, \gamma)$ un point semi-stable classique de l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J})_{\bar{\rho}}$. On a $k_{\chi_1,\sigma}$, $k_{\chi_2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in J$, $C_{\overline{B}}(\chi) = \Sigma_\wp$, et

$$\big(J_B\big(H^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big)_{\bar{\rho}}\big) \otimes_E \overline{E}\big)\big[T(F_\wp) = \psi_1 \otimes \psi_2, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \neq 0$$

où

$$\psi_1 \otimes \psi_2 := \chi\Big(\prod_{\sigma \in J} \sigma^{-k_{\chi_1,\sigma}} \otimes \prod_{\sigma \in J} \sigma^{-k_{\chi_2,\sigma}}\Big)$$

est un caractère lisse non ramifié de $T(F_\wp)$. On note :

$$k_{1,\sigma} := k_{\chi_1,\sigma} - k_{\chi_2,\sigma} + 2 \quad \text{et} \quad k_{2,\sigma} := -k_{\chi_1,\sigma}.$$

Proposition 7.2.32. — *Avec les notations précédentes, il existe alors une représentation ρ_z continue irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur une extension finie de E non ramifiée hors de $S_{K^\wp}$ (cf. remarque 5.2.4) telle que la restriction $\rho_z|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})}$ vérifie*

$$\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-2} - \gamma(X_{\lambda,\mathfrak{l}})\,\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-1} + \gamma(Y_{\lambda,\mathfrak{l}}\chi_{\lambda,\ell^{d_\mathfrak{l}}})\ell^{d_{\mathfrak{l},0}} = 0$$

pour tout $(\lambda, \mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$, où $\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathscr{F}_{(\lambda,\mathfrak{l})})$ désigne le Frobenius arithmétique. De plus, la représentation

$$\rho_{z,\wp} := \rho_z|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{(u,\wp)})}$$

de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ est semi-stable de poids de Hodge-Tate $(-(k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1), -k_{2,\sigma})_{\sigma \in \Sigma_\wp}$ avec les valeurs propres de φ^{d_0} sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho_{z,\wp})_\sigma$ données par

$$q\gamma(\chi_{u,p^{d_0}})\psi_1(\varpi) \quad \textit{et} \quad \gamma(\chi_{u,p^{d_0}})\psi_2(\varpi).$$

De plus, $\rho_{z,\wp}$ est cristalline si $q^2\psi_1(\varpi) \neq \psi_2(\varpi)$.

Démonstration. — Comme

$$\big(J_B\big(H^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})_{\bar{\rho}}\big) \otimes_E \overline{E}\big)\big[T(F_\wp) = \psi_1 \otimes \psi_2, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \neq 0,$$

il existe une représentation automorphe irréductible $\pi \cong \varsigma(\pi^\infty)\otimes\pi_\infty$ sur $\mathbb{C}$ (où π^∞ est une représentation admissible lisse et irréductible de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sur $\overline{E}$) vérifiant (voir (5.2.3))

- ▹ π_∞ est cohomologique pour $\varsigma^{-1}(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})$;
- ▹ $(\pi^\infty)^{K^\wp}\neq 0$ avec le système de valeurs propres de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ associé égal à γ ;
- ▹ $J_B((\pi^\infty)_{u,\wp})^{\psi_1\otimes\psi_2}\neq 0$.

Comme ρ est absolument irréductible modulo ϖ_E, π est cuspidale (voir §5.2.3) et donc $(\pi^\infty)_{u,\wp}$ est de dimension infinie (*cf.* proposition 5.2.2). On pose $\rho_z := \rho(\pi^\infty)$ (*cf.* §5.2.3). Par la loi d'adjonction pour le module de Jacquet classique, on dispose d'une application surjective $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$-équivariante (*e.g.* voir [**33**, (0.2)])

$$\big(\mathrm{Ind}_{B(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\psi_2\,\mathrm{unr}(q^{-1})\otimes\psi_1\,\mathrm{unr}(q)\big)^\infty \twoheadrightarrow (\pi_\infty)_{u,\wp}. \tag{7.2.16}$$

On voit alors que l'on a $(\pi_\infty)_{u,\wp}^{I_\wp}\neq 0$ et que les valeurs propres des opérateurs $U_\wp$, $S_\wp$ sur $(\pi_\infty)_{u,\wp}^{I_\wp}$ sont données par $q\psi_1(\varpi)$ et $\psi_2(\varpi)\psi_1(\varpi)$ respectivement. La proposition découle donc de la discussion au §5.2.3 (*e.g.* voir la discussion au-dessus du lemme 5.2.6). ∎

Remarque 7.2.33. — Reprenons les notations de la proposition 7.2.32 et de sa preuve.

(1) On a $\overline{\rho_z}\cong\bar\rho$ par les relations d'Eichler-Shimura.

(2) Comme $(\pi^\infty)_{u,\wp}$ est de dimension infinie, on a $\psi_2\neq\psi_1$ par (7.2.16) (et donc $\psi_2(\varpi)\neq\psi_1(\varpi)$ puisque les caractères ψ_i, $i=1,2$ sont non ramifiés).

Pour $(\lambda,\mathfrak{l})\in S(K^\wp)$, on note

$$a_{\lambda,\mathfrak{l}} := \psi(X_{\lambda,\mathfrak{l}})\in\mathscr{O}(\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho,\mathrm{red}})^0.$$

D'après la proposition 7.2.32, pour tout $z\in C(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$, il existe une représentation continue ρ_z de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur $\overline{E}$ telle que ρ_z soit non ramifiée hors de $S_{K^\wp}$ et vérifie

$$\mathrm{tr}\big(\rho_z(\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-1})\big) = (a_{\lambda,\mathfrak{l}})_z$$

pour tout $(\lambda,\mathfrak{l})\in S(K^\wp)$ où $(a_{\lambda,\mathfrak{l}})_z\in\overline{E}$ désigne l'image de $a_{\lambda,\mathfrak{l}}$ via le morphisme

$$z:\mathscr{O}(\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho,\mathrm{red}})^0\longrightarrow\overline{E}.$$

On note $\mathscr{F}^{S_{K^\wp}}$ l'extension algébrique maximale de $\mathscr{F}$ non ramifiée hors de $S_{K^\wp}$, et on dispose alors d'un pseudo-caractère continu de $\mathrm{Gal}(\mathscr{F}^{S_{K^\wp}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur $\overline{E}$ pour tout $z\in C(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$:

$$\mathscr{T}_z:\mathrm{Gal}(\mathscr{F}^{S_{K^\wp}}/\mathscr{F})\longrightarrow\overline{E},\quad g\longmapsto\mathrm{tr}\big(\rho_z(g)\big).$$

À partir des données

$$\Big\{\{\mathscr{T}_z\}_{z\in C(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}},\{\alpha_{\lambda,\mathfrak{l}}\in\mathscr{O}(\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho,\mathrm{red}})^0\}_{(\lambda,\mathfrak{l})\in S(K^{\wp})}\Big\},$$

par [**22**, prop. 7.1] (et les propositions 7.2.30, 7.2.32), on a :

Proposition 7.2.34. — *Il existe un unique pseudo-caractère continu de dimension 2 :*

$$\mathscr{T}:\mathrm{Gal}(\mathscr{F}^{S_{K^{\wp}}}/\mathscr{F})\longrightarrow\mathscr{O}\big(\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho,\mathrm{red}}\big)$$

dont l'évaluation en tout point semi-stable classique z coïncide avec $\mathscr{T}_z:=\mathrm{tr}(\rho_z)$. De plus, soit

$$z=(\chi,\gamma)\in\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}(\overline{E}).$$

Alors, pour tout $(\lambda,\mathfrak{l})\in S(K^{\wp})$, on a

$$\mathscr{T}_z(\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-1})=\gamma(X_{\lambda,\mathfrak{l}}),$$

où $\mathscr{T}_z$ désigne l'évaluation de $\mathscr{T}$ en z.

Corollaire 7.2.35. — *Soit*

$$z=(\chi,\gamma)\in\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}(\overline{E}).$$

Alors il existe une unique représentation continue irréductible ρ_z de $\mathrm{Gal}(\mathscr{F}^{S_{K^{\wp}}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur $\overline{E}$ telle que $\mathrm{tr}(\rho_z)=\mathscr{T}_z$ et $\overline{\rho_z}\cong\bar\rho$.

Démonstration. — L'existence de ρ_z (unique à simplification près) découle de [**78**, th. 1 (2)]. Comme $\mathrm{tr}(\rho_z)(\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-1})=\gamma(X_{\lambda,\mathfrak{l}})$ pour tout $(\lambda,\mathfrak{l})\in S(K^{\wp})$, on en déduit $\overline{\rho_z}^{\mathrm{ss}}\cong\bar\rho$. En particulier, ρ_z est absolument irréductible. Ceci permet de conclure. ∎

Remarque 7.2.36. — La représentation ρ_z ci-dessus est réalisable sur une extension finie de k_z, le corps résiduel en z (*e.g.* voir [**78**, lemme 6 (1)]). Quitte à augmenter E s'il le faut, on peut bien supposer que ρ_z est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur k_z.

Par [**5**, lemme 7.8.11], on a :

Proposition 7.2.37. — *Soit U un ouvert affinoïde de l'espace rigide*

$$\mathscr{E}(J;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho,\mathrm{red}}.$$

Il existe alors un espace rigide $\widetilde{U}$ au-dessus de U et un $\mathscr{O}_{\widetilde{U}}$-module $\mathscr{M}$ localement libre de rang 2 muni d'une action continue $\mathscr{O}_{\widetilde{U}}$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ (qui se factorise à travers $\mathrm{Gal}(\mathscr{F}^{S_{K^{\wp}}}/\mathscr{F})$) et vérifiant :

(1) *le morphisme $g:\widetilde{U}\to U$ se factorise à travers un espace rigide U' fini dominant sur U, et $\widetilde{U}$ est un éclatement de U' le long de $U'\setminus U''$ avec U'' un certain ouvert de Zariski, Zariski-dense, de U' ;*

(2) *pour tout $z\in\widetilde{U}(\overline{E})$ la représentation $\mathscr{M}_{|z}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$ (de dimension 2 sur $\overline{E}$) est isomorphe à $\rho_{g(z)}$.*

REMARQUE 7.2.38. — Reprenons les notations de la proposition 7.2.37, soit Z un sous-ensemble de $U(\overline{E})$, Zariski-dense dans U, alors $g^{-1}(Z)$ est Zariski-dense dans $\widetilde{U}$. En effet, si l'on note $g' : U' \to U$ le morphisme comme dans (1), par [**22**, lemme 6.2.8], $(g')^{-1}(Z)$ est Zariski-dense dans U'. Donc $g^{-1}(Z)$ est Zariski-dense dans $\widetilde{U}$.

Considérons la restriction

$$\rho_{z,\wp} := \rho_{z}\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{(u,\wp)})}$$

(qui est une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur une extension finie de E) pour tout $z \in \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$.

DÉFINITION 7.2.39. — Soient L une extension finie de E, V une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension r sur L, $J \subseteq \Sigma_\wp$ et $\{k_{i,\sigma} \in \mathbb{Z}\}_{i=1,\ldots,r}$ une suite décroissante pour tout $\sigma \in J$. On dit que V est de *J-de Rham de poids de Hodge-Tate* $(-k_{r,\sigma}, \ldots, -k_{1,\sigma})_{\sigma\in J}$ si $\dim_L D_{\mathrm{dR}}(V)_\sigma = r$ et les sauts de la filtration de Hodge de $D_{\mathrm{dR}}(V)_\sigma$ sont donnés par $k_{1,\sigma}, \ldots, k_{r,\sigma}$ pour tout $\sigma \in J$.

PROPOSITION 7.2.40. — *Soit $z \in \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}(\overline{E})$, alors la représentation $\rho_{z,\wp}$ est de $\Sigma_\wp \setminus J$-de Rham de poids de Hodge-Tate $(-(k_{2,\sigma} + k_{1,\sigma} - 1), -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J}$.*

Démonstration. — Comme l'espace rigide

$$\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$$

est emboîté et $C(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$ est Zariski-dense dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$, on peut choisir un ouvert affinoïde irréductible U de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho,\mathrm{red}}$ contenant z tel que

$$S := C(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho} \cap U(\overline{E})$$

soit Zariski-dense dans U (*e.g.* voir [**5**, lemme 7.2.9]). Soient $g : \widetilde{U} \to U$ et $\mathscr{M}$ comme dans la proposition 7.2.37, $g^{-1}(S)$ est alors Zariski-dense dans $\widetilde{U}$ (*cf.* la remarque 7.2.38). Comme $\rho_{z',\wp}$ est de $\Sigma_\wp \setminus J$-de Rham de poids de Hodge-Tate $(-k_{2,\sigma} + 1 - k_{1,\sigma}, -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J}$ pour tout $z' \in S$ (*cf.* proposition 7.2.32), la proposition découle alors de [**76**, th. 2.19 ET 2.27]. ∎

Terminons cette section par une conjecture dans le style « Fontaine-Mazur ».

CONJECTURE 7.2.41. — *Soient $z = (\chi_1 \otimes \chi_2, \gamma)$ un point de l'espace rigide*

$$\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$$

et $S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi) \cap \{\sigma \in J \;;\; k_{\chi_1,\sigma} \in \mathbb{Z}\}$. Si la représentation $\rho_{z,\wp}$ est de S-de Rham, alors z est S-classique.

7.2.3.2. *Représentations triangulines de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ *de dimension* 2. — On donne des rappels sur des représentations triangulines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur E selon [**59**] (voir aussi [**26**] et [**53**]).

Notons

$$F_{\wp,\infty} := \bigcup F_\wp(\mu_{p^n})$$

où μ_{p^n} est une racine primitive d'ordre p^n de l'unité, $\Gamma := \mathrm{Gal}(F_{\wp,\infty}/F_\wp)$, et $H_{F_\wp} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\wp,\infty})$.

Nous disposons d'un anneau $B^\dagger_{\mathrm{rig}}$ (*cf.* [**6**, §3.4]) muni d'une action de φ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, tel que $B^\dagger_{\mathrm{rig},F_\wp} := (B^\dagger_{\mathrm{rig}})^{H_{F_\wp}}$ soit isomorphe à l'anneau de Robba $\mathscr{R}_{F'_{\wp,0}}$ sur $F'_{\wp,0}$, où $F'_{\wp,0}$ est l'extension non ramifiée maximale de $F_{\wp,0}$ dans $F_{\wp,\infty}$. Pour une représentation continue ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur E,

$$D_{\mathrm{rig}}(\rho) := (B^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho)^{H_{F_\wp}}$$

(*cf.* [**6**, prop. 3.4]) est un (φ,Γ)-module étale de rang 2 sur $B^\dagger_{\mathrm{rig},F_\wp} \otimes_{\mathbb{Q}_\wp} E$ (*i.e.* un (φ,Γ)-module étale sur $B^\dagger_{\mathrm{rig},F_\wp}$ muni de plus d'une action de E commutant à celle de φ et Γ qui est de rang 2 sur $B^\dagger_{\mathrm{rig},F_\wp} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$). Notons

$$\mathscr{R}_E := B^\dagger_{\mathrm{rig},F_\wp} \otimes_{\mathbb{Q}_\wp} E.$$

Soit $\delta : F_\wp^\times \to E^\times$ un caractère continu de $F_\wp^\times$ à valeurs dans $E^\times$. Comme dans [**59**, §1.4] (voir aussi [**53**, const. 6.2.4]), on peut associer à δ un (φ,Γ)-module libre de rang 1 sur $\mathscr{R}_E$, noté $\mathscr{R}_E(\delta)$. Au fait, d'après [**59**, th. 1.45], pour un (φ,Γ)-module D libre de rang 1 sur $\mathscr{R}_E$, il existe un unique caractère δ de $F_\wp^\times$ à valeurs dans $E^\times$ tel que $D \cong \mathscr{R}_E(\delta)$.

Définition 7.2.42 (*cf.* [**26**, déf. 4.1] et [**59**, déf. 1.15]). — Soit ρ une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur E.

- ▹ On dit que ρ est *trianguline* s'il existe deux caractères δ_1, δ_2 de $F_\wp^\times$ à valeurs dans $E^\times$ tels que $D_{\mathrm{rig}}(\rho)$ s'insère dans une suite exacte de (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}_E$ comme suit :

$$0 \to \mathscr{R}_E(\delta_1) \longrightarrow D_{\mathrm{rig}}(\rho) \longrightarrow \mathscr{R}_E(\delta_2) \to 0.$$

- ▹ Une telle suite exacte est appelée une *triangulation* de $D_{\mathrm{rig}}(\rho)$ (ou de ρ) et notée (ρ,δ_1,δ_2).

Définition 7.2.43 (*cf.* [**55**, déf. 4.3.1]). — Soit ρ une représentation trianguline de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ sur E avec une triangulation donnée par (ρ,δ_1,δ_2), pour $\sigma \in \Sigma_\wp$. On dit que (ρ,δ_1,δ_2) est *non σ-critique* si $k_{\delta_1,\sigma} - k_{\delta_2,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

En général, pour $S \subseteq \Sigma_\wp$, on dit que (ρ,δ_1,δ_2) est *non S-critique* si (ρ,δ_1,δ_2) est non σ-critique pour tout $\sigma \in S$; (ρ,δ_1,δ_2) est dit *non-critique* si (ρ,δ_1,δ_2) est non $\Sigma_\wp$-critique.

Soient $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, ρ une représentation cristalline de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ de dimension 2 sur E de poids de Hodge-Tate

$$(-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1), -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp}$$

telle que les valeurs propres de φ^{d_0}, α et $\widetilde{\alpha}$, sur D_σ (où $D := D_{\mathrm{dR}}(\rho)$) soient différentes pour un (ou de manière équivalente tout) $\sigma \in \Sigma_\wp$. D'après [**59**, §4], si ρ est cristalline, $D_{\mathrm{rig}}(\rho)$ admet alors deux triangulations :

$$0 \to \mathscr{R}_E(\delta_1) \longrightarrow D_{\mathrm{rig}}(\rho) \longrightarrow \mathscr{R}_E(\delta_2) \to 0 \tag{7.2.17}$$

avec

$$\begin{cases} \delta_1 = \mathrm{unr}(\alpha)\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus Z_D(\alpha)} \sigma^{-k_{2,\sigma}} \prod_{\sigma\in Z_D(\alpha)} \sigma^{-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1)}, \\ \delta_2 = \mathrm{unr}(\widetilde{\alpha})\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus Z_D(\alpha)} \sigma^{-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1)} \prod_{\sigma\in Z_D(\alpha)} \sigma^{-k_{2,\sigma}}, \end{cases} \tag{7.2.18}$$

ou

$$\begin{cases} \delta_1 = \mathrm{unr}(\widetilde{\alpha})\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus Z_D(\widetilde{\alpha})} \sigma^{-k_{2,\sigma}} \prod_{\sigma\in Z_D(\widetilde{\alpha})} \sigma^{-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1)}, \\ \delta_2 = \mathrm{unr}(\alpha)\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus Z_D(\widetilde{\alpha})} \sigma^{-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1)} \prod_{\sigma\in Z_D(\widetilde{\alpha})} \sigma^{-k_{2,\sigma}}, \end{cases}$$

et donc $(\rho, \delta_1, \delta_2)$ est non $\Sigma_\wp \setminus Z_D(\alpha)$-critique ou $\Sigma_\wp \setminus Z_D(\widetilde{\alpha})$-critique respectivement (où on renvoie au §5.3.1 pour la définition de $Z_D(\alpha)$ et $Z_D(\widetilde{\alpha})$).

7.2.3.3. *Triangulations globales.* — Reprenons les notations du §7.2.3.1. Soit $z = (\chi_z, \gamma_z)$ un point semi-stable classique de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar{\rho}}$. Il existe alors $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\sigma \in J$ et $\psi_{1,z}$, $\psi_{2,z}$ deux caractères lisses non ramifiés de $F_\wp^\times$ à valeurs dans $k_z^\times$ (k_z désignant le corps résiduel en z, qui est une extension finie sur E) tels que

$$\chi_z = \chi_{1,z} \otimes \chi_{2,z} = \psi_{1,z}\prod_{\sigma\in J}\sigma^{-k_{2,\sigma}} \otimes \psi_{2,z}\prod_{\sigma\in J}\sigma^{-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-2)}. \tag{7.2.19}$$

Notons ρ_z la représentation de $\mathrm{Gal}(\mathscr{F}^{S_{K^\wp}}/\mathscr{F})$ de dimension 2 sur k_z associée (*cf.* proposition 7.2.32), $a_{0,z} := \gamma_z(\chi_{u,q}) \in \mathscr{O}_{k_z}^\times$ (*cf.* lemme 5.2.5), et

$$\alpha_z := q\psi_{1,z}(\varpi)\gamma_z(\chi_{u,q}), \quad \widetilde{\alpha}_z := \psi_{2,z}(\varpi)\gamma_z(\chi_{u,q}),$$

qui sont en fait les valeurs propres de φ^{d_0} sur D_σ (avec $D := D_{\mathrm{dR}}(\rho_{z,\wp})$) pour un (ou de manière équivalente tout) $\sigma \in \Sigma_\wp$ (*cf.* proposition 7.2.32). On suppose $\alpha_z \neq \widetilde{\alpha}_z$.

Par la proposition 7.2.32 et la discussion du §7.2.3.2, on a :

Proposition 7.2.44. — *La représentation $\rho_{z,\wp}$ est trianguline avec une triangulation donnée par*

$$0 \to \mathscr{R}_{k_z}(\delta_{1,z}) \longrightarrow D_{\mathrm{rig}}(\rho_{z,\wp}) \longrightarrow \mathscr{R}_{k_z}(\delta_{2,z}) \to 0$$

où

$$\begin{cases}\delta_{1,z} = \mathrm{unr}(\alpha_z)\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus Z_D(\alpha_z)}\sigma^{-k_{2,\sigma}}\prod_{\sigma\in Z_D(\alpha_z)}\sigma^{-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1)},\\ \delta_{2,z} = \mathrm{unr}(\widetilde{\alpha}_z)\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus Z_D(\alpha_z)}\sigma^{-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1)}\prod_{\sigma\in Z_D(\alpha_z)}\sigma^{-k_{2,\sigma}}.\end{cases}$$

Remarque 7.2.45. — Avec les notations de la proposition 7.2.44, par l'admissibilité de D (*cf.* §5.3.1), on a $Z_D(\alpha_z) = \varnothing$ (autrement dit, $(\rho_{z,\wp}, \delta_{1,z}, \delta_{2,z})$ est non-critique) si

$$\upsilon_\wp(\alpha_z) < \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} k_{2,\sigma} + \inf_{\sigma\in\Sigma_\wp}\{k_{1,\sigma}-1\}.$$

Supposons maintenant $J = \Sigma_\wp$, et notons S_{cl} l'ensemble des points semi-stables classiques $z = (\chi_z = \chi_{1,z}\otimes\chi_{2,z}, \gamma_z)$ de $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})_{\bar\rho}$ qui vérifient

$$\psi_{2,z} \neq q\psi_{1,z} \quad \text{et} \quad \upsilon_\wp\big(q\psi_{1,z}(\varpi)\big) < \sum_{\sigma\in\Sigma_\wp} k_{2,\sigma} + \inf_{\sigma\in\Sigma_\wp}\{k_{1,\sigma}-1\}$$

(où l'on reprend les notations en (7.2.19)). Donc S_{cl} est Zariski-dense dans $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})_{\bar\rho}$.

Par la proposition 7.2.44 et la remarque 7.2.45, on a :

Corollaire 7.2.46. — *Soit $z \in S_{\mathrm{cl}}$. Alors $\rho_{z,\wp} := \rho_{z\,|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{(u,\wp)})}$ admet une triangulation*

$$\begin{aligned}0 \to \mathscr{R}_{k_z}(\mathrm{unr}(a_{0,z})\,\mathrm{unr}(q)\chi_{1,z}) &\longrightarrow D_{\mathrm{rig}}(\rho_{z,\wp})\\ &\longrightarrow \mathscr{R}_{k_z}\Big(\mathrm{unr}(a_{0,z})\chi_{2,z}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp}\sigma^{-1}\Big) \to 0.\end{aligned}$$

Théorème 7.2.47. — *Soit*

$$z = (\chi_{1,z}\otimes\chi_{2,z}, \gamma_z)$$

un point fermé de l'espace rigide $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})_{\bar\rho}$. Alors $\rho_{z,\wp}$ est trianguline avec une triangulation donnée par

$$0 \to \mathscr{R}_{k_z}(\delta_{1,z}) \longrightarrow D_{\mathrm{rig}}(\rho_{z,\wp}) \longrightarrow \mathscr{R}_{k_z}(\delta_{2,z}) \to 0, \tag{7.2.20}$$

où

$$\delta_{1,z} = \mathrm{unr}(a_{0,z})\,\mathrm{unr}(q)\chi_{1,z}\prod_{\sigma\in\Sigma_z}\sigma^{1-k_{z,\sigma}},$$
$$\delta_{2,z} = \mathrm{unr}(a_{0,z})\chi_{2,z}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp}\sigma^{-1}\prod_{\sigma\in\Sigma_z}\sigma^{k_{z,\sigma}-1},$$

avec $a_{0,z} = \gamma_z(\chi_{u,q})$, $k_{z,\sigma} = k_{\chi_{1,z},\sigma} - k_{\chi_{2,z},\sigma} + 2$ et Σ_z un sous-ensemble (éventuellement vide) de $C_{\overline{B}}(\chi_z)$.

Démonstration. — Soit U un ouvert affinoïde irréductible de l'espace rigide

$$\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})_{\bar\rho,\mathrm{red}}$$

contenant z tel que $S := S_{\mathrm{cl}} \cap U(\bar{E})$ soit Zariski-dense dans U (voir la preuve de la proposition 7.2.40). Soient $g : \widetilde{U} \to U$, $\mathscr{M}$ comme dans la proposition 7.2.37, donc $g^{-1}(S)$ est Zariski-dense dans $\widetilde{U}$. Le théorème découle alors de [**53**, th. 6.3.13] (voir [**53**, ex. 6.3.14], voir aussi [**55**, th. 4.4.2]). ☐

REMARQUE 7.2.48. — Si z est semi-stable classique avec $\alpha_z \neq \widetilde{\alpha}_z$ (*cf.* début de cette section), on a alors $\Sigma_z = Z_D(\alpha_z)$.

PROPOSITION 7.2.49. — *Soit U un ouvert affinoïde de $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\backslash\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\backslash\Sigma_\wp})_{\bar{\rho}}$ tel que $S_{\mathrm{cl}} \cap U(\bar{E})$ soit Zariski-dense dans U, et supposons que*

$$\mathrm{unr}(q)\chi_{1,z} \neq \chi_{2,z} \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp} \sigma^{-1} \quad \textit{pour tout } z \in U(\bar{E}). \tag{7.2.21}$$

Alors, pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$, l'ensemble

$$Z_{U,\sigma} := \left\{z \in U(\bar{E})\ ;\ \sigma \in \Sigma_z\right\}$$

est Zariski-fermé dans U. De plus, on a $Z_{U,\sigma} \cap S_{\mathrm{cl}} = \varnothing$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $Z_{U,\sigma}$ est Zariski-fermé dans U_{red}, ce qui découle en fait de la construction de « Z » dans la preuve de [**53**, th. 6.3.9] (et [**11**, prop. 9.6.3/3]). Notons que l'ensemble Z_0' dans la preuve de [**53**, th. 6.3.9] est vide dans notre cas par la condition en (7.2.21) (puisque sous cette condition, le terme $H^0_{\varphi,\Gamma_K}(N_{0,z})$ dans [**53**, (6.3.9.1)] doit être de dimension 1, et donc le dernier terme dans [**53**, (6.3.9.1)] s'annule) [(2)]. ☐

Soit maintenant $J \subseteq \Sigma_\wp$, $J \neq \varnothing$. On considère un point fermé

$$z = (\chi_z = \chi_{1,z} \otimes \chi_{2,z}, \gamma_z)$$

de $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\backslash J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\backslash J})_{\bar{\rho}}$ et on note $\widetilde{z}$ son image dans $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\backslash\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\backslash\Sigma_\wp})_{\bar{\rho}}$ via le plongement (7.2.7) (avec $J = \Sigma_\wp$ et $S = J$). On a donc

$$\rho_z \cong \rho_{\widetilde{z}}$$

puisque $\gamma_z = \gamma_{\widetilde{z}}$. En appliquant le théorème 7.2.47 au point $\widetilde{z}$, on a :

COROLLAIRE 7.2.50. — *Soit*

$$z = (\chi_z = \chi_{1,z} \otimes \chi_{2,z}, \gamma_z)$$

un point fermé de l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\backslash J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\backslash J})_{\bar{\rho}}$. Alors la représentation $\rho_{z,\wp}$ est trianguline, de triangulation donnée par

$$0 \to \mathscr{R}_{k_z}(\delta_{1,z}) \longrightarrow D_{\mathrm{rig}}(\rho_{z,\wp}) \longrightarrow \mathscr{R}_{k_z}(\delta_{2,z}) \to 0,$$

2. Je remercie L.Xiao pour avoir répondu à mes questions à propos de la preuve de [**53**, th. 6.3.9].

où

$$\begin{cases} \delta_{1,z} = \mathrm{unr}(a_{0,z})\,\mathrm{unr}(q)\chi_{1,z}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J}\sigma^{-k_{2,\sigma}}\prod_{\sigma\in\Sigma_z}\sigma^{1-k_{z,\sigma}}, \\ \delta_{2,z} = \mathrm{unr}(a_{0,z})\chi_{2,z}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J}\sigma^{-(k_{1,\sigma}+k_{2,\sigma}-2)}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp}\sigma^{-1}\prod_{\sigma\in\Sigma_z}\sigma^{k_{z,\sigma}-1}, \end{cases} \tag{7.2.22}$$

avec $a_{0,z} = \gamma_z(\chi_{u,q})$, $k_{z,\sigma} = k_{\chi_{1,z},\sigma} - k_{\chi_{2,z},\sigma} + 2$ *pour* $\sigma \in J$, $k_{z,\sigma} = k_{1,\sigma}$ *pour* $\sigma \in \Sigma_\wp \setminus J$, *et* $\Sigma_z := \Sigma_{\widetilde{z}}$ *(qui est un sous-ensemble de* $C_{\overline{B}}(\chi_z) = C_{\overline{B}}(\chi_{\widetilde{z}})$*).*

Remarque 7.2.51. — L'auteur ignore si l'on peut appliquer directement la théorie de [**53**] à l'espace rigide $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$, puisque l'ensemble $S_{\mathrm{cl}} \cap \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}(\overline{E})$ n'est pas Zariski-dense dans ce dernier en général.

Corollaire 7.2.52. — *Reprenons les notations du corollaire* 7.2.50*, et supposons de plus que*

$$\mathrm{unr}(q^{-1})\chi_{1,z}^{-1}\chi_{2,z} \neq \prod_{\sigma\in\Sigma_\wp}\sigma^{n_\sigma} \text{ pour tout } \underline{n}_{\Sigma_\wp} \in \mathbb{Z}^d. \tag{7.2.23}$$

Soit $\tau \in J$. *Si* z *admet un point* τ*-compagnon, alors* $\tau \in \Sigma_z$.

Démonstration. — Supposons que $z = (\chi_{1,z}\otimes\chi_{2,z}, \gamma_z)$ admet un point τ-compagnon

$$z_\tau^c = (\chi_{1,z_\tau^c}\otimes\chi_{2,z_\tau^c}, \gamma_z) = (\chi_{1,z}\tau^{1-k_{\tau,z}}\otimes\chi_{2,z}\tau^{k_{\tau,z}-1}, \gamma_z).$$

On a $z_\tau^c \in \mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}(\overline{E})$ et $\rho_{z_\tau^c} \cong \rho_z$ par les relations d'Eichler-Shimura. En appliquant le corollaire 7.2.50 au point z_τ^c,

$$D_{\mathrm{rig}}(\rho_{z_\tau^c,\wp}) \quad \big(\cong D_{\mathrm{rig}}(\rho_{z,\wp})\big)$$

admet alors une triangulation $(\rho_{z,\wp}, \delta_{1,z_\tau^c}, \delta_{2,z_\tau^c})$. Mais par [**59**, th. 3.7] (et (7.2.23)), on a

$$(\rho_{z,\wp}, \delta_{1,z}, \delta_{2,z}) = (\rho_{z,\wp}, \delta_{1,z_\tau^c}, \delta_{2,z_\tau^c}).$$

Ceci, combiné avec (7.2.22), entraîne $\tau \in \Sigma_z$. ∎

De façon analogue, on montre :

Corollaire 7.2.53. — *Avec les notations du corollaire* 7.2.50*, supposons que* z *satisfait la condition en* (7.2.23)*. Soit*

$$S \subseteq J \cap C_{\overline{B}}(\chi_z).$$

Si z *admet un point* S*-compagnon, alors* $S \subseteq \Sigma_z$.

Ceci combiné avec le lemme 7.2.25 permet d'obtenir

Corollaire 7.2.54. — *Avec les notations du corollaire* 7.2.50*, supposons que* z *satisfait la condition en* (7.2.23)*. Soit* $S \subseteq J \cap C_{\overline{B}}(\chi_z)$*, si* $S \cap \Sigma_z = \varnothing$*, alors le point* z *est quasi-*S*-classique.*

Remarque 7.2.55. — Reprenons les notations, et supposons

$$k_{\chi_{1,z},\sigma} - k_{\chi_{2,z},\sigma} + 2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$$

pour tout $\sigma \in \Sigma_\wp$. Par la définition 7.2.43, $(\rho_{z,\wp}, \delta_{1,z}, \delta_{2,z})$ est non $\Sigma_\wp \setminus \Sigma_z$-critique. Le corollaire 7.2.54, combiné avec la proposition 7.2.40, montre alors que $\rho_{z,\wp}$ est de $\Sigma_\wp \setminus \Sigma_z$-de Rham. C'est un fait local (*cf.* [**32**, app. A]) :pour une représentation trianguline ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)$ sur E, $S \subseteq \Sigma_\wp$, si ρ est non S-critique (pour une certaine triangulation), alors ρ est de S-de Rham, ce qui généralise le fait que si ρ est non critique, alors ρ est de de Rham (*cf.* [**5**, prop. 2.3.4]). Par ailleurs, le corollaire 7.2.54 permet aussi d'obtenir certains cas de la conjecture 7.2.41 : si $\rho_{z,\wp}$ est de S-de Rham et non S-critique, alors z est S-classique.

Corollaire 7.2.56. — *Avec les notations du corollaire* 7.2.50*, supposons que* χ_z *est non ramifié algébrique et satisfait*

$$\psi_{1,z}(p)^{-1}\psi_{2,z}(p)p^{-d} \neq 1 \tag{7.2.24}$$

où $\psi_z := \psi_{1,z} \otimes \psi_{2,z}$ *est le caractère lisse de* $T(\mathbb{Q}_p)$ *tel que* $\chi_z\psi_z^{-1}$ *soit algébrique.*

Soit $S \subseteq J$*. Alors si* $S \cap \Sigma_z = \varnothing$*, il existe un ouvert admissible* U *de* $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$ *contenant* z *tel que pour tout* $z' = (\chi', \gamma') \in U(\overline{E})$*,* z' *n'admette pas de point* S'*-compagnon pour tout* $S' \subseteq S \cap C_{\overline{B}}(\chi')$*,* $S' \neq \varnothing$*.*

Démonstration. — Considérons l'image $\widetilde{z} = (\chi_{\widetilde{z}}, \gamma_z)$ de z dans

$$\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})_{\bar\rho}$$

via (7.2.7). Alors $\chi_{\widetilde{z}}$ est aussi non ramifié algébrique et satisfait la condition (7.2.23). Par le même argument que dans la preuve de [**22**, prop. 6.2.7], on peut montrer que S_{cl} s'accumule en $\widetilde{z}$ (voir aussi la proposition 7.2.31). Il existe alors un ouvert admissible U' de $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})_{\bar\rho}$ contenant $\widetilde{z}$ tel que

- $S_{\mathrm{cl}} \cap U'(\overline{Z})$ soit Zariski-dense dans U',
- z' satisfasse la condition en (7.2.23) pour tout $z' \in U'(\overline{E})$ (par l'hypothèse (7.2.24)), *cf.* [**31**, lemme 3]),
- $Z_{U',\sigma} = \varnothing$ pour tout $\sigma \in S$ (*cf.* proposition 7.2.49).

Soit U l'image réciproque de U' dans $\mathscr{E}(J; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J})_{\bar\rho}$, le corollaire découle alors du corollaire 7.2.53. ∎

7.2.4. Surfaces de Hecke. — Dans cette section, on compare les variétés de Hecke construites à partir du H^1-complété (des courbes de Shimura unitaires) au §7.2.1.2 avec celles construites à partir des faisceaux de formes modulaires (sur les courbes de Shimura unitaires) au §4.4.4. On suppose $F_{\wp_i}$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout $\wp_i \,|\, p$ dans cette section (voir §4.3.2.1). On fixe un plongement $\tau \in \Sigma_\wp$, et des entiers $k_{1,\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma} \in \mathbb{Z}$ pout tout $\sigma \in \Sigma_p \setminus \{\tau\}$. Soit $K^\wp$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^{\infty,\wp})$ tel que $K := K^{\wp}K_{\wp}^{0}$ soit net et maximal en $\wp$. On note $C := C(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ (voir la fin du §7.2.1) pour simplifier.

Soient $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$, $k_+ + k_- \geq 2$, on note

$$\tau(k_+, k_-) := W^{(k_{1,\tau}, k_{2,\tau})}, \tag{7.2.25}$$

avec $k_{1,\tau} = k_+ + k_-$, $k_{2,\tau} = 1 - k_+$. Notons que pour toute représentation irréductible τ-algébrique W_τ de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$, il existe $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$, tels que $W_\tau \cong \tau(k_+, k_-)$. Les notations (7.2.25) sont choisies pour coïncider avec les notations dans le cadre des espaces de formes modulaires.

On note $W^{(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} := \tau(k_+, k_-) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$, qui est alors une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$.

Proposition 7.2.57. — *Soient $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$, $k_+ + k_- \geq 2$, L une extension finie de E, $a_\wp$, $b_\wp \in L^\times$, et $\gamma : \mathscr{H}^*(S(K^\wp)) \to L$ un morphisme de $\mathscr{O}_E$-algèbres. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *le point $z := (\mathrm{unr}(a_\wp/q)\tau^{k_+-1} \otimes \mathrm{unr}((q/a_\wp)b_\wp)\tau^{1-k_-}, \gamma)$ se trouve dans C ;*

(2) *il existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et une forme modulaire classique h_z sur $M_K(\wp^n)_{\tau,L}$ de poids $(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ tels que*

$$U_\wp(h) = a_\wp h, \quad S_\wp(h) = b_\wp h$$

et $T(h) = \gamma(T)h$ pour tout $T \in \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$;

(3) *le point $z' := (k_+, k_-, \tau(\varpi)^{k_+}a_\wp, \tau(\varpi)^{k_+-k_-}b_\wp, \gamma)$ se trouve dans l'ensemble C' des points classiques de $\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ (cf. remarque 4.4.35).*

Démonstration. — Le fait que (2) et (3) sont équivalents est immédiat. Montrons que (1) est équivalent à (2). On note

$$P_0 := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d\end{pmatrix} ; \ a, d \in \mathscr{O}_\wp^\times, b \in \mathscr{O}_\wp\right\}.$$

Par la remarque 7.2.17 appliquée à

$$V := \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)_{\tau\text{-an}} \otimes_E L,$$

la remarque 7.2.15 et l'isomorphisme $\mathrm{GL}_2(F_\wp) \times \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$-équivariant (*cf.* corollaire 7.1.8)

$$\begin{aligned} &H^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big) \\ &\xrightarrow{\sim} \big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)_{\tau\text{-an}} \otimes_E \tau(k_+, k_-) \otimes_E L\big)_{\varnothing\text{-an}} \end{aligned}$$

(où on prend l'abus de notation $W^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ pour désigner la représentation $W^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\otimes_E L$), le point z se trouve dans C si et seulement si

$$H^1_{\text{ét}}\big(K^{\wp},W^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)^{P_0}\\ \big[\pi_{\Pi_0}=\tfrac{a_\wp}{q},\pi_{\Pi_0\Pi_1}=b_\wp,\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big)=\gamma\big]\neq 0,$$

où $\Pi_0=\left(\begin{smallmatrix}\varpi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\Pi_1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\varpi\end{smallmatrix}\right)$. On vérifie par définition que

$$\begin{aligned}H^1_{\text{ét}}&\Big(K^{\wp},W^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\Big)^{P_0}\\ &\cong\varinjlim_n H^1_{\text{ét}}\Big(M_{K_n,\overline{\mathbb{Q}}},\mathscr{V}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\Big)^{P_0}\\ &\cong\varinjlim_n H^1_{\text{ét}}\Big(M_K(\wp^n)_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathscr{V}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\Big),\end{aligned}$$

où $\mathscr{V}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ désigne le système local associé à la représentation algébrique $W^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ (*cf.* § 3.2.1). En fait, si l'on note

$$k_{1,\tau}:=k_++k_-,\quad k_{2,\tau}:=1-k_+,$$

alors $\mathscr{V}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ n'est autre que $\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}$ (*cf.* § 3.2.1). D'après les théorèmes de comparaison p-adique, on dispose d'un isomorphisme équivariant sous l'action de $\mathscr{H}^*(S(K^{\wp}))$ et les opérateurs $U_\wp$, $S_\wp$ (*cf.* § 3.3.3)

$$\begin{aligned}H^1_{\text{ét}}&\Big(M_K(\wp^n)_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\mathscr{V}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})}\Big)\otimes_{\mathbb{Q}_p}B_{\text{dR}}\\ &\xrightarrow{\sim}\Big(\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp}\mathbb{H}^1(M_K(\wp^n)_{\sigma,L},\nabla_\sigma)\Big)\otimes_{F_\wp}B_{\text{dR}}.\end{aligned}$$

En outre, on a par définition $U_\wp=q\pi_{\Pi_0}$ et $S_\wp=\pi_{\Pi_0\Pi_1}$ (*cf.* (7.2.10)). On en déduit alors que le point z se trouve dans C si et seulement s'il existe $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que le L-espace vectoriel

$$\mathbb{H}^1(M_K(\wp^n)_{\sigma,L},\nabla_\sigma)\big[\pi_{\Pi_0}=\frac{a_\wp}{q},\pi_{\Pi_0\Pi_1}=b_\wp,\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big)=\gamma\big]$$

soit non nul pour un (ou de manière équivalente tout) $\sigma\in\Sigma_\wp$, et en particulier pour $\sigma=\tau$. Ceci entraîne que z se trouve dans C si et seulement si le L-espace vectoriel

$$H^0\Big(M_K(\wp^n)_{\tau,L},\mathscr{S}_{\tau,L}^{(k_+,k_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\Big)\big[\pi_{\Pi_0}=\tfrac{a_\wp}{q},\pi_{\Pi_0\Pi_1}=b_\wp,\mathscr{H}^*\big(S(K^{\wp})\big)=\gamma\big]$$

est non nul (*e.g.* en considérant la représentation galoisienne 2-dimensionnelle associée au système de valeurs propres γ de $\mathscr{H}(S(K^{\wp}))$, *cf.* § 5.2.3 et proposition 3.3.9). La proposition en découle. $\square$

Par conséquent, on obtient une bijection entre C et C'. L'isomorphisme de groupes (qui dépend du choix de ϖ)

$$\mathscr{O}_\wp^\times\times\mathscr{O}_\wp^\times\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}T(F_\wp),\quad(\alpha_1,\alpha_2,k_1,k_2)\longmapsto\begin{pmatrix}\alpha_1\varpi^{k_1}&0\\0&\alpha_2\varpi^{k_2}\end{pmatrix}$$

induit un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur E

$$(7.2.26)\quad \widehat{T}_\tau \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}_\tau \times \mathscr{W}_\tau \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m, \quad \chi_1 \otimes \chi_2 \longmapsto \big(\chi_1|_{\mathscr{O}_\wp^\times}, \chi_2|_{\mathscr{O}_\wp^\times}, \chi_1(\varpi), \chi_2(\varpi)\big).$$

Considérons la composée (voir la fin du §7.2.1)

$$(7.2.27)\quad \mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}) \longrightarrow \widehat{T}_\tau \xrightarrow[(7.2.26)]{\sim} \mathscr{W}_\tau \times \mathscr{W}_\tau \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}_\tau \times \mathscr{W}_\tau \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m,$$

où le dernier isomorphisme envoie (χ_1', χ_2', a, b) sur

$$\big(\chi_1'\tau, (\chi_2')^{-1}\tau^{-1}, \tfrac{q}{\tau(\varpi)}a, \tfrac{q}{\tau(\varpi)}ab\big).$$

Via (7.2.27), un point fermé $(\chi_1 \otimes \chi_2, \gamma)$ de $\mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ peut alors s'écrire comme

$$\big((\chi_1\tau)|_{\mathscr{O}_\wp^\times}, (\chi_2\tau^{-1})|_{\mathscr{O}_\wp^\times}, \tfrac{q}{\tau(\varpi)}\chi_1(\varpi), \tfrac{q}{\tau(\varpi)}(\chi_1\chi_2)(\varpi), \gamma\big).$$

En particulier, un point semi-stable classique z comme dans la proposition 7.2.57 peut s'écrire comme

$$\big(\tau^{k_+}, \tau^{k_-}, \tau(\varpi)^{k_+}a_\wp, \tau(\varpi)^{k_+-k_-}b_\wp, \gamma\big).$$

Par le même argument que celui de la preuve de [**5**, prop. 7.2.8], le théorème suivant découle alors de la proposition 7.2.57, la Zariski-densité (par définition) de C dans $\mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$, et la Zariski-densité de C' dans $\mathscr{S}(K)_\tau^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$ (proposition 4.4.39).

Théorème 7.2.58. — *Il existe un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur E*

$$(7.2.28)\qquad \mathscr{S}(K)_{\tau,\mathrm{red}}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$$

qui envoie $(\chi_+, \chi_-, a, b, \gamma)$ sur $(\mathrm{unr}(\frac{a}{q})\chi_{+,\varpi}\tau^{-1} \otimes \mathrm{unr}(\frac{q}{a}b)\chi_{-,\varpi}^{-1}\tau, \gamma)$ où le caractère $\chi_{\pm,\varpi}$ de $F_\wp^\times$ est tel que

$$\chi_{\pm,\varpi}|_{\mathscr{O}_\wp^\times} = \chi_\pm \quad \textit{et} \quad \chi_{\pm,\varpi}(\varpi) = 1.$$

En particulier, pour une extension finie L de E, un L-point

$$\big(\mathrm{unr}\,(\tfrac{a}{q})\chi_{+,\varpi}\tau^{-1} \otimes \mathrm{unr}\,(\tfrac{q}{a}b)\chi_{-,\varpi}^{-1}\tau, \gamma\big)$$

se trouve dans $\mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ si et seulement s'il existe une forme modulaire surconvergente h de poids $(\chi_+, \chi_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ de niveau K sur (τ, L) (définition 4.1.6) telle que

$$\widetilde{U}_\wp(h) = ah, \quad \widetilde{S}_\wp(h) = bh$$

et que $T(h) = \gamma(T)h$ pour $T \in \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$.

Par la proposition 4.4.36, on a :

Corollaire 7.2.59. — *L'espace rigide $\mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ est équidimensionnel de dimension 2.*

COROLLAIRE 7.2.60. — *Soient $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$, h une forme modulaire surconvergente de poids*

$$(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$$

et de niveau K sur (τ, L) telle que

$$U_\wp(h) = a_\wp h, \quad S_\wp(h) = b_\wp h$$

et que $T(h) = \gamma(T)h$ pour $T \in \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ avec $a_\wp \neq 0$, $b_\wp$, $\gamma(T) \in L$. Alors le point

$$z_h := \big(\mathrm{unr}\big(\tfrac{a_\wp}{q}\big)\tau^{k_+-1} \otimes \mathrm{unr}\big(\tfrac{q\,b_\wp}{a_\wp}\big)\tau^{1-k_-}, \gamma\big).$$

se trouve dans $\mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})(L)$.

Démonstration. — Par le théorème 7.2.58, la forme h correspond au point

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{unr}\big(\tfrac{a_\wp}{q}\varpi^{k_+}\big)\varepsilon_{\tau,\varpi}^{k_+}\tau^{-1} \otimes \mathrm{unr}\big(\tfrac{q}{a_\wp}\varpi^{-k_+}b_\wp\varpi^{k_+-k_-}\big)\varepsilon_{\tau,\varpi}^{k_-}\tau, \gamma\big)&\\ = \big(\mathrm{unr}\big(\tfrac{a_\wp}{q}\big)\tau^{k_+-1} \otimes \mathrm{unr}\big(\tfrac{q\,b_\wp}{a_\wp}\big)\tau^{1-k_-}, \gamma\big),&\end{aligned}$$

où $\varepsilon_{\tau,\varpi}$ désigne le caractère de $F_\wp^\times$ vérifiant $\varepsilon_{\tau,\varpi}|_{\mathscr{O}_\wp^\times} = \tau$ et $\varepsilon_{\tau,\varpi}(\varpi) = 1$. ∎

COROLLAIRE 7.2.61. — *Avec les notations du corollaire 7.2.60, et supposons*

$$k_+ + k_- \geq 2.$$

S'il existe une forme modulaire surconvergente h_c de niveau K de poids

$$(1 - k_-, 1 - k_+; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),$$

vecteur propre pour les opérateurs de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et les opérateurs $U_\wp$, $S_\wp$, de mêmes valeurs propres que h, alors z_h admet un point τ-compagnon (efficace) dans $\mathscr{H}(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$.

Démonstration. — Comme h_c est de mêmes valeurs propres que h pour $U_\wp$, $S_\wp$ et $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$, on voit par le corollaire 7.2.60 que la forme h_c correspond au point

$$z_{h_c} := (\mathrm{unr}(\frac{a_\wp}{q})\tau^{-k_-} \otimes \mathrm{unr}(\frac{q\,b_\wp}{a_\wp})\tau^{k_+}, \gamma)$$

qui n'est autre que le point τ-compagnon $(z_h)_\tau^c$ de z_h. De plus, z_{h_c} est efficace par la remarque 7.2.22 (appliquée avec $J = \{\tau\}$). ∎

Par le théorème 7.2.58 et la proposition 7.2.11 (2), le morphisme (*cf.* le théorème 4.4.34)

$$\psi : \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) \longrightarrow \mathscr{O}\big(\mathscr{S}(K)_{\tau,\mathrm{red}}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)$$

se factorise à travers $\mathscr{O}(\mathscr{S}(K)_{\tau,\mathrm{red}}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})})^0$. En outre, on peut montrer (par le corollaire 4.4.38, le lemme 5.2.3 et le même argument que dans [**22**, prop. 6.4.6]) que l'ensemble des points classiques correspondant de plus aux formes modulaires cuspidales est aussi Zariski-dense dans

$$\mathscr{S}(K)_{\tau,\mathrm{red}}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}.$$

Comme au §7.2.3.1, par la proposition 5.2.7 et la théorie de pseudo-caractères, on peut alors associer à tout point fermé z_h de

$$\mathscr{S}(K)_{\tau}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}$$

(donc à toute forme modulaire surconvergente propre h) une unique représentation ρ_h continue et semi-simple de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}^{S_{K^\wp}})$ sur $\overline{E}$ (qui est réalisable sur une extension finie de E) telle que

$$\mathrm{tr}\left(\rho_h(\mathrm{Frob}_{(\lambda,\mathfrak{l})}^{-1})\right) = \gamma(X_{\lambda,\mathfrak{l}})$$

pour tout $(\lambda,\mathfrak{l}) \in S(K^\wp)$, où $\gamma(X_{\lambda,\mathfrak{l}})$ désigne la valeur propre de $X_{\lambda,\mathfrak{l}}$ sur h. Le corollaire suivant découle du théorème 7.2.58, de la proposition 7.2.40 et du corollaire 7.2.50.

Corollaire 7.2.62. — *Soient L une extension finie de E, χ_+, χ_- deux caractères localement τ-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$ à valeurs dans $L^\times$. Soit h une forme modulaire surconvergente de poids $(\chi_+,\chi_-;\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})$ de niveau K sur (τ,L), propre sous l'action des opérateurs dans $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ et de $\widetilde{U}_\wp$, $\widetilde{S}_\wp$ de valeurs propres dans L avec*

$$\widetilde{U}_\wp(h) = a_\wp h \neq 0, \quad \widetilde{S}_\wp(h) = b_\wp h, \quad \chi_{u,p}(h) = a_0 h.$$

Supposons que la représentation associée ρ_h est absolument irréductible modulo ϖ_L et $\overline{\rho_h}$ est isomorphe à la réduction d'une représentation $K^\wp$-modulaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$. Alors la restriction

$$\rho_{h,\wp} := \rho_h|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)}$$

est de $\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}$-de Rham de poids de Hodge-Tate $(-k_{2,\sigma}+1-k_{1,\sigma},-k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}$ et trianguline avec une triangulation donnée par $(\rho_{h,\wp},\delta_{1,h},\delta_{2,h})$ où

$$\delta_{1,h} = \mathrm{unr}(a_0)\,\mathrm{unr}(a_\wp)\chi_{+,\varpi}\tau^{-1}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}\sigma^{-k_{2,\sigma}}\prod_{\sigma\in\Sigma_h}\sigma^{2-k_{1,\sigma}},$$

$$\delta_{2,h} = \mathrm{unr}(a_0)\,\mathrm{unr}\left(\tfrac{q\,b_\wp}{a_\wp}\right)\chi_{-,\varpi}^{-1}\prod_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}\sigma^{1-k_{1,\sigma}-k_{2,\sigma}}\prod_{\sigma\in\Sigma_h}\sigma^{k_{1,\sigma}-2},$$

et où Σ_h un sous-ensemble (éventuellement vide) de $\Sigma_\wp$ (et même de $\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}$ si l'on a $k_{\chi_+,\tau}+k_{\chi_-,\tau}\notin\mathbb{Z}_{\geq 2}$).

Remarque 7.2.63. — Noter que les caractères $\delta_{1,h}$, $\delta_{2,h}$ ci-dessus sont indépendants du choix de ϖ.

On a le résultat suivant en direction de la conjecture de Fontaine-Mazur.

Corollaire 7.2.64. — *Avec les notations du corollaire 7.2.60, et supposons de plus que*

$$k_+ + k_- \geq 2, \quad a_\wp^2 \neq q\,b_\wp,$$

$\overline{\rho}_h$ est absolument irréductible et est isomorphe à la réduction d'une représentation $K^{\wp}$-modulaire. Si la représentation $\rho_{h,\wp}$ est cristalline et $\tau \notin Z_D(\alpha_\wp \gamma(\chi_{u,q}))$ (où $D := D_{\mathrm{dR}}(\rho_{h,\wp})$). Alors il existe une forme modulaire classique h' de niveau K de poids

$$(k_+, k_-; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}),$$

propre de mêmes valeurs propres que h pour $U_\wp$, $S_\wp$, et les opérateurs dans $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ (on a donc un isomorphisme $\rho_{h'} \cong \rho_h$).

Démonstration. — Par le corollaire 7.2.54 appliqué à $z = z_h$ et $J = \{\tau\}$, on voit que le point z_h est classique. Le corollaire en découle par la proposition 7.2.57. ∎

Remarque 7.2.65. — Avec l'hypothèse du corollaire 7.2.64, l'auteur ignore si l'on peut montrer que la forme h est elle-même classique.

7.3. Compatibilité local-global

7.3.1. Une conjecture de compatibilité local-global. — On rappelle une conjecture de compatibilité local-global (due à Breuil) pour les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ dans le cas cristallin.

7.3.1.1. *Constructions de* $\Pi(D)$. — Reprenons les notations du § 5.3.1 et supposons de plus $\alpha\widetilde{\alpha}^{-1} \neq 1, q^{\pm 1}$. Dans [**15**, §4], Breuil a associé au φ-module filtré D une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\Pi(D)$, dont on rappelle maintenant la construction.

Soit $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \Sigma_\wp$, posons :

$$I_D(J_1,J_2) := \Big(\mathrm{Ind}_{B(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \mathrm{unr}\Big(\frac{\alpha}{q}\Big) \prod_{\sigma\in J_1} \sigma^{1-k_{2,\sigma}} \prod_{\sigma\in J_2\setminus J_1} \sigma^{2-k_{1,\sigma}-k_{2,\sigma}} \otimes \mathrm{unr}(\widetilde{\alpha}) \prod_{\sigma\in J_1} \sigma^{1-k_{1,\sigma}-k_{2,\sigma}} \prod_{\sigma\in J_2\setminus J_1} \sigma^{-k_{2,\sigma}}\Big)^{J_2\text{-an}}, \tag{7.3.1}$$

qui est une représentation localement J_2-analytique de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$. Notons

$$\pi_D(J_1,J_2) := \Big(\bigotimes_{\sigma\in\Sigma_\wp\setminus J_2} (\mathrm{Sym}_E^{k_{1,\sigma}-2} E^2 \circ \det{}^{k_{2,\sigma}})^\vee\Big) \otimes_E I_D(J_1,J_2). \tag{7.3.2}$$

On définit $\widetilde{I}_D(J_1,J_2)$ et $\widetilde{\pi}_D(J_1,J_2)$ en remplaçant α et $\widetilde{\alpha}$ dans les définitions de $I_D(J_1,J_2)$ et $\pi_D(J_1,J_2)$. Notons

$$\pi_D := \pi_D(\varnothing,\varnothing) \cong \widetilde{\pi}_D(\varnothing,\varnothing),$$

qui est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ (puisque l'on suppose $\alpha\widetilde{\alpha}^{-1} \neq q^{\pm 1}$, et on renvoie à *loc. cit.* si $\alpha\widetilde{\alpha}^{-1} \in \{q, q^{-1}\}$).

On pose (voir [**15**, §4 (9)]) :

$$\Pi(D) := \Big(\pi_D\big(\varnothing, S\setminus Z_D(\alpha)\big)\bigoplus_{\pi_D}\widetilde{\pi}_D\big(\varnothing, S\setminus Z_D(\widetilde{\alpha})\big)\Big)$$
$$\oplus\Big(\bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\alpha)}\pi_D\big(J, J\amalg(S\setminus Z_D(\alpha))\big)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\widetilde{\alpha})}\widetilde{\pi}_D\big(J, J\amalg(S\setminus Z_D(\widetilde{\alpha}))\big)\Big).$$

D'après [**15**, th. 4.1] (voir aussi [**74**, §2.3]), on a

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D)\xrightarrow{\sim}\pi_D\oplus\Big(\bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\alpha)}\pi_D(J,J)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\varnothing\subsetneq J\subseteq Z_D(\widetilde{\alpha})}\widetilde{\pi}_D(J,J)\Big),$$

où $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}V'$ désigne le socle de V' pour une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique V' de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$. Notons

$$\mathrm{soc}^{(1)}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D) := \Big(\bigoplus_{\tau\in Z_D(\alpha)}\pi_D\big(\{\tau\},\{\tau\}\big)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\tau\in Z_D(\widetilde{\alpha})}\widetilde{\pi}_D\big(\{\tau\},\{\tau\}\big)\Big),$$

qui est donc une sous-$\mathrm{GL}_2(F_\wp)$-représentation de $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D)$.

7.3.1.2. *Compatibilité local-global.* — Soient $k_{1,\sigma}\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $k_{2,\sigma}\in\mathbb{Z}$ pour tout $\sigma\in\Sigma_p$. Soit π^∞ une représentation lisse admissible et irréductible de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sur E telle qu'il existe une représentation admissible π_∞ de $G(\mathbb{R})$ cohomologique pour $\varsigma(W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p},\underline{k_2}_{\Sigma_p})})$ telle que $\varsigma(\pi^\infty)\otimes\pi_\infty$ soit une représentation automorphe et cuspidale de $G(\mathbb{A})$ (*cf.* §5.2.3). Supposons de plus qu'il existe un sous-groupe ouvert compact $K = K_\wp K^\wp$ de $G(\mathbb{A}^\infty)$ maximal en $\wp$ tel que $\pi^K\neq 0$. Notons

$$\rho := \rho(\pi)\quad\text{et}\quad \rho_\wp := \rho_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathscr{F}_{(u,\wp)})}.$$

Comme on a vu au §5.2.3, la représentation $\rho_\wp$ est cristalline de poids de Hodge-Tate $(-(k_{2,\sigma}+k_{1,\sigma}-1), -k_{2,\sigma})_{\sigma\in\Sigma_\wp}$. Notons

$$D := D_{\mathrm{dR}}(\rho_\wp).$$

Soient α, $\widetilde{\alpha}$ les valeurs propres de φ^{d_0} sur D_σ pour un (ou de manière équivalente pour tout) $\sigma\in\Sigma_\wp$: on a $\alpha\widetilde{\alpha}^{-1}\neq q^{\pm 1}$ puisque $\varsigma(\pi^\infty)\otimes\pi_\infty$ est cuspidale et $\pi^K\neq 0$ (voir la discussion au-dessous du lemme 5.2.6). Notons γ le système de valeurs propres de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ associé à π, $a_0 := \gamma(\chi_{u,q})\in\mathscr{O}_E^\times$ (*cf.* lemme 5.2.5), $\rho'_\wp := \rho_\wp\otimes_E \mathrm{unr}_p(a_0)^{-1}{}_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\wp)}$ (où $\mathrm{unr}_p(a_0)$ désigne le caractère non ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ envoyant le Frobenius arithmétique sur a_0^{-1}), $D' := D_{\mathrm{dR}}(\rho'_\wp)$, et $\alpha' := a_0^{-d_0}\alpha$, $\widetilde{\alpha}' := a_0^{-d_0}\widetilde{\alpha}$, qui sont les valeurs propres de φ^{d_0} sur D'_σ pour un (ou de manière équivalente pour tout) $\sigma\in\Sigma_\wp$ (voir la discussion au-dessous du théorème 5.3.4). On a $Z_D(\alpha) = Z_{D'}(\alpha')$ et $Z_D(\alpha) = Z_{D'}(\widetilde{\alpha'})$ si $\alpha\neq\widetilde{\alpha}$; $Z_D = Z_{D'}$ si $\alpha=\widetilde{\alpha}$ (*cf.* §5.3.1). Posons

$$\widehat{\Pi}(\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})}\big(\rho, \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big).$$

qui est une représentation de Banach admissible de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ (car tel est le cas de $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})})$, *cf.* théorème 7.1.2 (1)).

La conjecture suivante est essentiellement due à Breuil (*cf.* [**15**, conj. 8.1]) et adaptée au cas unitaire :

Conjecture 7.3.1. — *Si* $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$, *il existe un entier* $r \geq 1$ *tel qu'il y a une injection de représentations localement* $\mathbb{Q}_p$*-analytiques de* $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$

$$\Pi(D')^{\oplus r} \longleftrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}},$$

qui induit un isomorphisme entre les socles.

Remarque 7.3.2. — Par la compatibilité local-global de la correspondance de Langlands locale classique pour $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ (*e.g.* voir [**4**]), on sait qu'il existe une injection de représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$:

$$\pi_{D'} \longleftrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.$$

En effet, on a une injection de représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ sur E :

$$I_{D'}(\varnothing,\varnothing) \cong \pi_{u,\wp} \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})}\big(\rho, H^1_{\text{ét}}(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})})\big). \tag{7.3.3}$$

En outre, il y a une injection continue de représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ équivariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$:

$$\begin{aligned} H^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) &\longleftrightarrow \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})}\big) \\ &\xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big) \otimes_E W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp})}, \end{aligned}$$

où la première injection découle de la proposition 7.1.5 et le deuxième isomorphisme découle du théorème 7.1.2 (2). On peut alors déduire de (7.3.3) une injection continue de représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$: $\pi_{D'} \hookrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)$.

7.3.2. Les résultats principaux.

— On montre divers résultats (*cf.* théorème 7.3.3 et 7.3.7 ci-dessous) en direction de la conjecture 7.3.1.

Théorème 7.3.3. — *Supposons* $F_{\wp_i}$ *non ramifié sur* $\mathbb{Q}_p$ *pour tout* $\wp_i \mid p$ *et* $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$. *Alors il existe une injection continue* $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$*-équivariante :*

$$\mathrm{soc}^{(1)}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\,\Pi(D') \longleftrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.$$

Comme les constituants de $\mathrm{soc}^{(1)}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\,\Pi(D')$ sont distincts (*cf.* [**15**, th. 4.1 (i)]), il suffit de montrer que pour tout $\tau \in Z_{D'}(\alpha')$ (resp. $\tau \in Z_{D'}(\widetilde{\alpha}')$), il existe une injection de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$

$$\pi_{D'}(\{\tau\},\{\tau\}) \longleftrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \quad \big(\text{resp. } \widetilde{\pi}_{D'}(\{\tau\},\{\tau\}) \longleftrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big).$$

Soient $\tau \in \Sigma_\wp$ et h_τ une forme modulaire classique de poids $(\underline{k_1}_{\Sigma_p}, \underline{k_2}_{\Sigma_p})$ de niveau K sur E, γ-propre pour $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ attachée à ρ (*cf.* §5.3.2). Notons $h_{\tau,\alpha}$ (resp. $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$) la forme p-stabilisée associée par rapport à α (resp. $\widetilde{\alpha}$) (voir (5.3.3)). Par la proposition 7.2.57, on associe à $h_{\tau,\alpha}$ (resp. $h_{\tau,\widetilde{\alpha}}$) un point fermé de

$$\mathscr{H}\big(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}\big) \hookrightarrow \mathscr{E}\big(\{\tau\}; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}\big)$$

donné par

$$z := \big(\mathrm{unr}\big(\tfrac{\alpha'}{q}\big)\tau^{-k_{2,\tau}} \otimes \mathrm{unr}(\widetilde{\alpha}')\tau^{2-k_{1,\tau}-k_{2,\tau}}, \gamma\big) \tag{7.3.4}$$
$$\big(\text{resp. } z := \big(\mathrm{unr}\big(\tfrac{\widetilde{\alpha}'}{q}\big)\tau^{-k_{2,\tau}} \otimes \mathrm{unr}(\alpha)\tau^{2-k_{1,\tau}-k_{2,\tau}}, \gamma\big)\big).$$

On a par définition (*cf.* définition 7.2.21)

$$z_\tau^c = \big(\mathrm{unr}\big(\tfrac{\alpha'}{q}\big)\tau^{1-k_{1,\tau}-k_{2,\tau}} \otimes \mathrm{unr}(\widetilde{\alpha})\tau^{1-k_{2,\tau}}, \gamma\big)$$
$$\big(\text{resp. } z_\tau^c = \big(\mathrm{unr}\big(\tfrac{\widetilde{\alpha}'}{q}\big)\tau^{1-k_{1,\tau}-k_{2,\tau}} \otimes \mathrm{unr}(\alpha)\tau^{1-k_{2,\tau}}, \gamma\big)\big).$$

Par le théorème 5.3.3, le corollaire 7.2.61 et la proposition 7.2.23, on a :

Lemme 7.3.4. — *Pour $\tau \in Z_{D'}(\alpha')$ (resp. $\tau \in Z_{D'}(\widetilde{\alpha}')$), on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(&\pi_{D'}(\{\tau\},\{\tau\}),\\ &\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big]\big) \neq 0\end{aligned} \tag{7.3.5}$$
$$\begin{aligned}\big(\textit{resp. } \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(&\widetilde{\pi}_{D'}(\{\tau\},\{\tau\}),\\ &\widetilde{H}^1_{ét}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big]\big) \neq 0\big).\end{aligned}$$

Démonstration du théorème 7.3.3. — Soit $\tau \in Z_{D'}(\alpha')$ (le cas $\tau \in Z_{D'}(\widetilde{\alpha}')$ étant analogue), notons pour simplifier V le E-espace vectoriel en (7.3.5), qui est muni d'une action naturelle continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F}) \times \mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ vérifiant les relations d'Eichler-Shimura. Notons pour simplifier

$$\chi_{D',\tau} := \mathrm{unr}\big(\tfrac{\alpha'}{q}\big)\tau^{1-k_{1,\tau}-k_{2,\tau}} \otimes \mathrm{unr}(\widetilde{\alpha}')\tau^{1-k_{2,\tau}},$$
$$\widetilde{\chi}_{D',\tau} := \chi_{D',\tau}\chi(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}}).$$

On a $C_{\overline{B}}(\widetilde{\chi}_{D',\tau}) = \Sigma_\wp \setminus \{\tau\}$. Par le lemme 7.2.20 (voir aussi la remarque 7.2.17), on a des bijections de E-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}&V \xrightarrow{\sim} \\ &J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big)_{\Sigma_\wp\setminus\{\tau\}-\mathrm{cl}}\big[T(F_\wp) = \widetilde{\chi}_{D',\tau}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big] \\ &\quad \xrightarrow{\sim} J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}})}\big)_{\tau\text{-an}}\big)\big[T(F_\wp) = \chi_{D',\tau}, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big],\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

d'où on déduit que V est de dimension finie (voir le théorème 7.2.10 (2)). Par le lemme 7.3.4, on a $V \neq 0$. Par le même argument que [**56**, p. 115], on obtient une injection de représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathscr{F})$:

$$\begin{aligned}j : \rho \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(&\pi_{D'}\big(\{\tau\},\{\tau\}\big),\\ &\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma\big]\big)\end{aligned}$$

d'où on déduit une injection continue de représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$:

$$\pi_{D'}\big(\{\tau\},\{\tau\}\big) \hookrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)$$

envoyant v sur $\beta \mapsto j(\beta)(v)$ pour tout $v \in \pi_{D'}(\{\tau\},\{\tau\})$ et pour tout $\beta \in \rho$ (noter que, si $\beta \neq 0$, alors $j(\beta) \neq 0$, et donc $j(\beta)$ est injectif puisque $\pi_{D'}(\{\tau\},\{\tau\})$ est topologiquement irréductible). Le lemme en découle. □

Considérons le cas $\alpha = \widetilde{\alpha}$ (et donc $\alpha' = \widetilde{\alpha}'$), de la même façon et par le théorème sur l'existence de formes compagnons dans ce cas (théorème 5.3.4), on a

Théorème 7.3.5. — *Supposons $F_{\wp_i}$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout $\wp_i \mid p$ et $\alpha = \widetilde{\alpha}$, alors il existe une injection continue $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$-équivariante*

$$\pi_{D'}\big(\{\tau\},\{\tau\}\big) \longhookrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$$

pour tout $\tau \in Z_{D'}$ (cf. §5.3.1).

La raison pour laquelle on suppose $F_{\wp_i}$ non ramifié (pour tout $\wp_i \mid p$) dans les théorèmes précédents est que notre théorie des formes modulaires p-adiques (*i.e.* théorème de classicité, surfaces de Hecke, *etc.*) dans le chapitre 3 sont seulement développée sous cette hypothèse. On enlève l'hypothèse $F_{\wp_i}$ non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ dans la suite de l'article, puisque les formes modulaires n'apparaissent pas dans les arguments suivants.

Supposons jusqu'à la fin

$$(\alpha\widetilde{\alpha}^{-1})^{\frac{d}{d_0}} \neq 1$$

(et donc $(\alpha'(\widetilde{\alpha}')^{-1})^{\frac{d}{d_0}} \neq 1$) (*cf.* (7.2.24)).

Proposition 7.3.6. — *Supposons ρ absolument irréductible modulo ϖ_E et soit $J \subseteq \Sigma_\wp$. S'il existe un plongement de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$*

$$\pi_{D'}(J,J) \longhookrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \quad \big(\textit{resp. } \widetilde{\pi}_{D'}(J,J) \longhookrightarrow \widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big),$$

alors $J \subseteq Z_{D'}(\alpha')$ (resp. $J \subseteq Z_{D'}(\widetilde{\alpha}')$).

Démonstration. — Supposons que $\pi_{D'}(J,J)$ est une sous-représentation de $\widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ (le cas de $\widetilde{\pi}_{D'}(J,J)$ est analogue), et notons encore z (*cf.* (7.3.4)) son image dans $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})$ (et donc $z \in \mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})_{\bar{\rho}}(\overline{E})$) via le plongement fermé (*cf.* théorème 7.2.13)

$$\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\{\tau\}}) \longhookrightarrow \mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}).$$

Par la proposition 7.2.23, z admet un point J-compagnon dans l'espace rigide analytique $\mathscr{E}(\Sigma_\wp; \underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})$. La proposition découle alors du corollaire 7.2.53 (voir aussi la remarque 7.2.48). □

Le reste de cet ouvrage est consacré à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 7.3.7. — *Supposons* ρ *absolument irréductible modulo* ϖ_E*, alors l'application de restriction*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\Pi(D'),\widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Pi(D'),\widehat{\Pi}(\rho)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big)$$

est bijective.

Il suffit alors de montrer que :

Proposition 7.3.8. — *Pour tout* $J \subseteq Z_{D'}(\alpha')$ *(resp.* $J \subseteq Z_{D'}(\widetilde{\alpha}')$*), l'application de restriction*

(7.3.7)

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(&\pi_{D'}(J, J\cup(\Sigma_\wp\setminus Z_{D'}(\alpha'))),\\ &\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big)\\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(&\pi_{D'}(J,J),\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\\ &\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big),\end{aligned}$$

respectivement

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(&\widetilde{\pi}_{D'}(J, J\cup(\Sigma_\wp\setminus Z_{D'}(\widetilde{\alpha}'))),\\ &\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big)\\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(&\widetilde{\pi}_{D'}(J,J),\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\\ &\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big),\end{aligned}$$

est bijective.

On suppose dans la suite $J \subseteq Z_{D'}(\alpha')$ (le cas $J \subseteq Z_{D'}(\widetilde{\alpha}')$ étant analogue). On suppose de plus $\Sigma_\wp\setminus Z_{D'}(\alpha')\neq\varnothing$ puisque le cas $\Sigma_\wp\setminus Z_{D'}(\alpha')=\varnothing$ est trivial.

Lemme 7.3.9. — *L'application* (7.3.7) *est injective.*

Démonstration. — Soit f un élément dans le noyau de (7.3.7). Si f n'est pas nul, d'après le th. 4.1 de [**15**] (appliqué aux constituants irréductibles de $\pi_{D'}(S_1,S_2)$ pour $S_1\subseteq S_2\subseteq\Sigma_\wp$), il existe $J'\supsetneq J$, $J'\subseteq J\cup(\Sigma_\wp\setminus Z_{D'}(\alpha'))$ tel que f induise une injection de représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$:

$$\pi_D(J',J')\lhook\joinrel\longrightarrow \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big],$$

d'où on déduit par la proposition 7.3.6 que $J'\subseteq Z_{D'}(\alpha')$, une contradiction. ∎

Il suffit alors de construire un inverse de (7.3.7). Supposons que le E-espace vectoriel de droite de (7.3.7) est non nul, et notons

- $\chi := \mathrm{unr}\big(\frac{\alpha'}{q}\big)\prod_{\sigma\in J}\sigma^{1-k_{1,\sigma}-k_{2,\sigma}}\otimes\mathrm{unr}(\widetilde{\alpha}')\prod_{\sigma\in J}\sigma^{1-k_{2,\sigma}}$,
- $\chi' := \chi\chi\big(\underline{k_1}_{\Sigma_\wp\setminus Z_{D'}(\alpha')},\underline{k_2}_{\Sigma_\wp\setminus Z_{D'}(\alpha')}\big)$,

▷ $J' := (\Sigma_\wp \setminus Z_{D'}(\alpha')) \cup J$,

▷ $X := \mathscr{E}(J'; \underline{k_1}_{\Sigma_p \setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \setminus J'})_{\bar\rho}$.

Noter que $C_{\overline{B}}(\chi') = \Sigma_\wp \setminus J$. Comme $C_{\overline{B}}(\chi') \cap J = \varnothing$, par le lemme 7.2.20, on a

$$(7.3.8)\quad J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an}}\big)_{J'\setminus J\text{-cl}}\big[T(F_\wp)=\chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\pi_{D'}(J,J), \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big)(\neq 0)$$

d'où on déduit que le point $z := (\chi', \gamma)$ se trouve dans X (noter que l'on a

$$(7.3.9)\quad \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an},\bar\rho}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]$$
$$\xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]$$

puisque l'idéal premier de $\mathscr{H}(S(K^\wp))$ défini par le morphisme γ est bien contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}(\bar\rho)$, *cf.* §7.1.3).

Lemme 7.3.10. — *Le point z n'admet pas de point S-compagnon dans X pour tout*

$$\varnothing \neq S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi') \cap J' = \Sigma_\wp \setminus Z_{D'}(\alpha').$$

Démonstration. — On a $C_{\overline{B}}(\chi') = \Sigma_\wp \setminus Z_{D'}(\alpha')$, en particulier, $C_{\overline{B}}(\chi') \cap Z_{D'}(\alpha') = \varnothing$. Si z admet un point S-compagnon pour $\varnothing \neq S \subset C_{\overline{B}}(\chi')$, par le corollaire 7.2.53, on a $S \subseteq Z_{D'}(\alpha')$ (donc $S \subseteq Z_{D'}(\alpha') \cap C_{\overline{B}}(\chi')$), une contradiction. ∎

Lemme 7.3.11. — *L'injection naturelle*

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an}}\big)_{J'\setminus J\text{-cl}}\big[T(F_\wp)=\chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]$$
$$\hookrightarrow J_B\big(\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an}}\big)\big[T(F_\wp)=\chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]$$

est bijective. Par conséquent, on a un isomorphisme de E-espaces vectoriels

$$(7.3.10)\quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(\pi_{D'}(J,J), \widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big)$$
$$\xrightarrow{\sim} J_B\big(\widetilde{H}^1_{\acute{e}t}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an}}\big)\big[T(F_\wp)=\chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big].$$

Démonstration. — Par les lemmes 7.3.10 et 7.2.25, tous les vecteurs dans

$$J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an}}\big)\big[T(F_\wp)=\chi', \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]$$

sont $\Sigma_\wp \setminus Z_{D'}(\alpha') = J' \setminus J$-classiques, d'où le lemme. ∎

Comme on a vu dans la remarque 7.2.48, $\Sigma_z = Z_{D'}(\alpha')$, et donc $\Sigma_z \cap C_{\overline{B}}(\chi') = \varnothing$. Par le corollaire 7.2.56, il existe alors un ouvert strictement quasi-Stein U de X (*cf.* [**37**, déf. 2.1.17 (iv)]) contenant z tel que pour tout point fermé $z' = (\chi'', \gamma')$ de U, z' n'admette pas de point S-compagnon dans X pour tout $\varnothing \neq S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi'') \cap J'$. En effet, par le corollaire 7.2.56, il existe un affinoïde $\operatorname{Spm} R$ de X contenant z tel que tout point fermé $z' = (\chi'', \gamma')$ de $\operatorname{Spm} R$ n'admette pas de point S-compagnon pour tout $\varnothing \neq S \subseteq C_{\overline{B}}(\chi'') \cap J'$. L'existence de U découle alors du lemme suivant.

Lemme 7.3.12. — *Soient R une algèbre affinoïde sur E, $x \in (\operatorname{Spm} R)(\overline{E})$, alors il existe un ouvert strictement quasi-Stein $\mathscr{U}$ de $\operatorname{Spm} R(\overline{E})$ contenant x.*

Démonstration. — On suppose sans perte de généralités que $x \in (\operatorname{Spm} R)(E)$. Par définition, il existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ et une projection continue et ouverte de E-algèbres de Banach $E\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \twoheadrightarrow R$. On a alors un plongement fermé

$$i : \operatorname{Spm} R \longrightarrow \operatorname{Spm} E\langle T_1, \ldots, T_n\rangle.$$

On peut supposer $i(x) = (0, \ldots, 0)$. Soit $\mathscr{U}'$ la boule unité ouverte (qui est strictement quasi-Stein) de $\operatorname{Spm} E\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$, par définition (*cf.* [**37**, déf. 2.1.17 (iv)]), on voit que l'ouvert admissible $\mathscr{U} := i^{-1}\mathscr{U}'$ de $\operatorname{Spm} R$ est strictement quasi-Stein. Ceci permet de conclure. ∎

Notons pour simplifier (*cf.* théorème 7.2.10 (2))

$$\mathscr{M} := \mathscr{M}^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \backslash J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \backslash J'})}$$

et $W := \mathscr{M}(U)_b^\vee$ le dual fort de $\mathscr{M}(U)$, qui est une représentation localement J'-analytique recevable (*cf.* définition 6.3.14) de $T(F_\wp)$ (par le même argument que dans l'exemple 6.3.15 (2)). Notons $A := \mathscr{O}(\mathscr{W}_{J'} \times \mathscr{W}_{J'})$ (où $\mathscr{W}_{J'}$ désigne l'espace analytique rigide sur E qui paramètre les caractères localement J'-analytiques de $\mathscr{O}_\wp^\times$). On voit que $\mathscr{M}(U)$ est muni d'une action naturelle de A induite par l'action naturelle de $\mathscr{O}(\widehat{T}_{J'})$ via le morphisme

$$\widehat{T}_{J'} \longrightarrow \mathscr{W}_{J'} \times \mathscr{W}_{J'}, \quad \chi_1 \otimes \chi_2 \mapsto \chi_1|_{\mathscr{O}_\wp^\times} \otimes \chi_2|_{\mathscr{O}_\wp^\times}.$$

Lemme 7.3.13. — *Le module $\mathscr{M}(U)$ est un A-module sans torsion.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathscr{M}(U')$ est un A-module sans torsion pour tout U' ouvert admissible affinoïde suffisamment petit contenu dans U. Comme il existe un affinoïde V de $\widehat{T}_{J'}$ tel que $U' \subseteq i^{-1}(V)$ ($\Gamma(U', \mathscr{O}_X)$ est donc plat sur $\Gamma(i^{-1}(V), \mathscr{O}_X)$) (où i désigne le morphisme naturel de X sur $\widehat{T}_{J'}$, *cf.* th. 7.2.10), il suffit alors de montrer que $\mathscr{M}(i^{-1}(V))$ est un A-module sans torsion puisque l'on a

$$\mathscr{M}(U) \cong \mathscr{M}\big(i^{-1}(V)\big) \otimes_{\Gamma(i^{-1}(V), \mathscr{O}_X)} \Gamma(U', \mathscr{O}_X),$$

ce qui découle de la proposition 6.2.5 et du corollaire 7.1.14. ∎

En prenant les duaux, on déduit de la restriction $\mathscr{M}(X) \to \mathscr{M}(U)$ (d'image dense) une injection (voir le lemme 6.1.19) continue de représentations localement J'-analytiques de $T(F_\wp)$ équivariante sous l'action de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$:

$$\mathscr{M}(U)_b^\vee \longhookrightarrow J_B\Big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p \backslash J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p \backslash J'})}\big)_{J'\text{-an}, \bar{\rho}}\Big), \tag{7.3.11}$$

qui induit alors une bijection de E-espaces vectoriels

$$\begin{aligned}(7.3.12)\qquad \mathscr{M}(U)_b^\vee\big[T(F_\wp)=\chi'',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma'\big]\\ \xrightarrow{\sim} J_B\big(\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an},\bar\rho}\big)\\ \big[T(F_\wp)=\chi'',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma'\big]\end{aligned}$$

pour tout E-point $z'=(\chi'',\gamma')$ de U (car ils sont tous isomorphes au dual de la fibre spéciale de $\mathscr{M}$ en z').

On a comme dans [**34**, lemme 4.5.12 (1)] :

Lemme 7.3.14. — *Le morphisme* (7.3.11) *est équilibré* (*cf. définition* 6.3.19).

Démonstration. — Par les lemmes 6.3.22 et 6.3.27 et la proposition 6.3.23, il suffit de montrer que pour tout $v\in\mathscr{M}(U)_b^\vee$, s'il existe $m_\sigma\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ pour tout $\sigma\in J'$ tels que $hv=0$, où

$$h:=\prod_{\sigma\in J'}\prod_{j=1}^{m_\sigma-1}(h_\sigma-j)\quad\text{et}\quad\prod_{j=1}^{m_\sigma-1}(h_\sigma-j):=1\quad\text{si } m_\sigma=0,$$

alors $(\prod_{\sigma\in J'}X_{-,\sigma}^{m_\sigma})\cdot v=0$, où on prend l'abus de notation v pour désigner aussi son image dans $\widetilde{H}^1_{\text{ét}}(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})})^{N_0}_{J'\text{-an},\bar\rho}$ via la composition de (7.3.11) avec (6.2.1).

Notons $\widehat{T}_{J'}(h)$ l'espace rigide fermé de $\widehat{T}_{J'}$ défini par le $\mathscr{O}_{\widehat{T}'_J}$-idéal cohérent $h\mathscr{O}_{\widehat{T}'_J}$ (où h est vu comme élément de $\mathscr{O}(\widehat{T}_{J'})$ via la composée

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{J'})\longrightarrow\mathscr{D}_{J'}(T(F_\wp),E)\xrightarrow{(6.1.18)}\mathscr{O}(\widehat{T}_{J'}),$$

voir §6.1.3 et §6.1.4),

$$U(h):=U\times_{\widehat{T}_{J'}}\widehat{T}_{J'}(h)$$

(qui est aussi strictement quasi-Stein), $\mathscr{M}':=\mathscr{M}_{|U(h)}$. Donc on a

$$M_h:=\mathscr{M}'\big(U(h)\big)_b^\vee\cong\mathscr{M}(U)_b^\vee[h=0]$$

et $v\in M_h$. Considérons la composée (où la dernière application est la composition de (7.3.11) avec (6.2.1))

$$(7.3.13)\qquad M_h\hookrightarrow\mathscr{M}(U)_b^\vee\longrightarrow\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)^{N_0}_{J'\text{-an},\bar\rho}.$$

Et il suffit de montrer que l'image de (7.3.13) est contenue dans le sous-espace E-vectoriel fermé

$$(7.3.14)\qquad \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)^{N_0}_{J'\text{-an},\bar\rho}\big[\prod_{\sigma\in J'}X_{-,\sigma}^{m_\sigma}=0\big].$$

Par le lemme 6.1.20, les vecteurs propres généralisés pour $T(\mathbb{Q}_p)\times\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$ sont denses dans M_h. Combiné avec le fait que la composée en (7.3.13) est continue, on se ramène au cas où $v \neq 0$ est un vecteur $(\chi_v = \chi_{1,v} \otimes \chi_{2,v}, \gamma_v)$-propre généralisé. Comme $hv = 0$, il existe $\sigma \in J'$ tel que

$$m_\sigma \neq 0, \quad j_\sigma := k_{\chi_{1,v},\sigma} - k_{\chi_{2,v},\sigma} \in \{1, \ldots, m_\sigma\} \quad \text{et} \quad (h_\sigma - j_\sigma)v = 0.$$

Mais par le lemme 7.3.15 ci-dessous, on a (où "$\{-\}$" désigne le sous-espace propre généralisé)

$$X_{-,\sigma}^{j_\sigma+1} \cdot v \in \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)^{N_0}_{J'\text{-an},\bar\rho}\big\{T(F_\wp)^+ = (\chi_v)^c_\sigma, \mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big) = \gamma_v\big\},$$

ce qui doit être zéro, puisque (χ_v, γ_v) n'admet pas de point σ-compagnon dans X. Ceci permet de conclure. ∎

Lemme 7.3.15. — *Soient $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{la},c}(\mathrm{GL}_2(F_\wp))$, χ un caractère localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $T(F_\wp)$, $v \in V^{N_0}$ un vecteur propre généralisé pour l'action de $T(F_\wp)^+$. Si $(h_\sigma - j) \cdot v = 0$, alors $v' := X_{-,\sigma}^{j+1} \cdot v$ se trouve dans V^{N_0}, et est un vecteur χ_σ^c-propre généralisé (pour l'action de $T(F_\wp)^+$).*

Démonstration. — Le lemme découle de la preuve de [**33**, prop. 4.4.4]. Soit V' le sous-espace vectoriel de V^{N_0} engendré par $\pi_a(v)$ pour tout $a \in T(F_\wp)^+$. On vérifie facilement que $(h_\sigma - j) \cdot v'' = 0$ pour tout $v'' \in V'$. Soit $v'' \in V'$; l'action de

$$\mathfrak{sl}_{2,\sigma} := \mathfrak{sl}_2(F_\wp) \otimes_{F_\wp,\sigma} E$$

sur v'' (via le caractère $\chi_\sigma : \left(\begin{smallmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & -a_\sigma \end{smallmatrix}\right) \mapsto ja_\sigma$) induit un morphisme de $U(\mathfrak{sl}_{2,\sigma})$-modules $\mathrm{Ver}(\chi_\sigma) \to V$ (où $\mathrm{Ver}(\chi_\sigma)$ ici désigne le module de Verma de χ_σ pour $\mathfrak{sl}_{2,\sigma}$). Comme dans la preuve de [**33**, prop. 4.4.4], on montre alors $v'' \in V^{N_0}$. Par la formule dans la preuve de *loc. cit.* (voir [**33**, p. 837]), on a

$$\pi_a(X_{-,\sigma}^{j+1} \cdot v'') = (\sigma^{-j-1} \otimes \sigma^{j+1})(a) X_{-,\sigma}^{j+1} \cdot \pi_a(v'')$$

et donc

$$\big(\pi_a - \chi_\sigma^c(a)\big)(X_{-,\sigma}^{j+1} \cdot v'') = (\sigma^{-j-1} \otimes \sigma^{j+1})(a) X_{-,\sigma}^{j+1} \cdot \big((\pi_a - \chi(a))(v'')\big)$$

pour tout $a \in T(F_\wp)^+$ et $v'' \in V'$, d'où on déduit

$$\big(\pi_a - \chi_\sigma^c(a)\big)^n(X_{-,\sigma}^{j+1} \cdot v) = (\sigma^{-j-1} \otimes \sigma^{j+1})(a)^n X_{-,\sigma}^{j+1} \cdot \big((\pi_a - \chi(a))^n(v)\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $a \in T(F_\wp)^+$. Le lemme en découle. ∎

Démonstration de la proposition 7.3.8. — Par le corollaire 6.3.30 et les lemme 7.3.13–7.3.14, on déduit de (7.3.11) une application non nulle continue de représentations de $\mathrm{GL}_2(F_\wp)$ équivariante sous l'action de $\mathscr{H}^*(S(K^\wp))$:

$$\big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \mathscr{M}(U)^\vee[\delta^{-1}]\big)^{J'\text{-an}} \longrightarrow \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an},\bar\rho}. \tag{7.3.15}$$

Notons pour simplifier

$$V_1 := \big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)} \mathscr{M}(U)^\vee_b[\delta^{-1}]\big)^{J'\text{-an}}, \quad V_2 := \widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K^\wp, W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus J'}, \underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus J'})}\big)_{J'\text{-an},\bar\rho}.$$

En appliquant le foncteur $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}(-[\delta^{-1}]))^{J'\text{-an}}$, on obtient une application naturelle de E-espaces vectoriels

$$(7.3.16)\quad \mathscr{M}(U)_b^\vee\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\chi'\delta^{-1}\big)^{J'\text{-an}},V_1\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\Big)$$

Noter que l'induite parabolique $(\mathrm{Ind}_{\overline{B}(F_\wp)}^{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\chi'\delta^{-1})^{J'\text{-an}}$ n'est autre que la représentation $I_{D'}(J,J')$ (*cf.* (7.3.1)). Notons pour simplifier

$$I'_{D'}(J,J):=I_{D'}(J,J)\otimes_E\Big(\bigotimes_{\sigma\in J'\setminus J}(\mathrm{Sym}_E^{k_{1,\sigma}-2}E^2\circ\det{}^{k_{2,\sigma}})^\vee\Big).$$

Au fait, on a $I'_{D'}(J,J)\cong\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}I_{D'}(J,J')$ (par [**15**, th. 4.1 (1)]). Considérons la composée

$$(7.3.17)\quad \mathscr{M}(U)_b^\vee\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big] \xrightarrow{(7.3.16)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I_{D'}(J,J'),V_1\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I'_{D'}(J,J),V_1\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big)$$

(où la dernière flèche est l'application de restriction). Comme dans le lemme 7.3.9, on montre que la dernière application en (7.3.17) est injective. Le diagramme suivant est commutatif (noter que pour chacune des applications horizontales, son inverse est bien induit par le foncteur $J_B(\,.\,)$)

(7.3.18)

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}(U)_b^\vee\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big] \arrow[r, "(7.3.17)"] \arrow[d, "(7.3.12)"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I'_{D'}(J,J),V_1[\mathscr{H}^*(S(K^\wp))=\gamma]\big) \arrow[d] \\ J_B(V_2)\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*(S(K^\wp))=\gamma\big] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I'_{D'}(J,J),V_2[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma]\big) \end{tikzcd}$$

où la bijection en dessous se déduit de (7.3.10) et du corollaire 6.1.6, et où la flèche verticale de droite est induite par (7.3.15).

Considérons la composée

$$(7.3.19)\quad J_B(V_2)\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big] \xrightarrow[\sim]{(7.3.12)} \mathscr{M}(U)_b^\vee\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big] \xrightarrow{(7.3.16)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I_{D'}(J,J'),V_1\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I_{D'}(J,J'),V_2\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big)$$

où la dernière application est induite par (7.3.15). Par (7.3.18), le diagramme suivant commute :

(7.3.20)

$$\begin{array}{ccc} J_B(V_2)\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big] & \xrightarrow{(7.3.19)} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I_{D'}(J,J'),V_2\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big) \\ \| & & \downarrow \\ J_B(V_2)\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I'_{D'}(J,J),V_2\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big) \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est l'application de restriction. Considérons

$$(7.3.21)\quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Big(\pi_{D'}(J,J),\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\Big)$$
$$\xrightarrow[\sim]{(7.3.10)} J_B(V_2)\big[T(F_\wp)=\chi',\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]$$
$$\xrightarrow{(7.3.19)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\big(I_{D'}(J,J'),V_2\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\big)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F_\wp)}\Big(\pi_{D'}(J,J'),\widetilde{H}^1_{\text{ét}}\big(K,W^{(\underline{k_1}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp},\underline{k_2}_{\Sigma_p\setminus\Sigma_\wp})}\big)_{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\big[\mathscr{H}^*\big(S(K^\wp)\big)=\gamma\big]\Big).$$

où la dernière application se déduit du théorème 7.1.2 (2) et le corollaire 6.1.6. Par (7.3.20), on vérifie que (7.3.21) est en fait un inverse de l'application (7.3.7). Ceci permet de conclure. □

Remarque 7.3.16. — L'application (7.3.15) sera utile pour trouver plus de compatibilité local-global. L'argument ci-avant est une application de (7.3.15) au niveau des points. Soit z un point fermé de U, on peut aussi considérer l'espace tangent de U en z, *e.g.* un morphisme

$$t : \operatorname{Spec} E[\epsilon]/\epsilon^2 \longrightarrow U.$$

Ainsi $(t^*\mathscr{M})^\vee$ est une représentation de $T(F_\wp)$ sur $E[\epsilon]/\epsilon^2$ (même une somme directe finie de copies d'un caractère de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $(E[\epsilon]/\epsilon^2)^\times$). Un tel caractère est alors une extension entre caractères de $T(F_\wp)$ à valeurs dans $E^\times$. Dans le cas où $\rho_{z,\wp}$ est semi-stable non cristalline, cette extension devrait contenir l'information sur les invariants $\mathscr{L}$ (de Fontaine-Mazur) de $\rho_{z,\wp}$. En effet, dans [**31**], en appliquant (7.3.15) à l'espace tangent (de U en z), on montre certaine compatibilité local-global dans le cas semi-stable non cristallin (concernant les invariants $\mathscr{L}$) pour les courbes de Shimura quaternioniques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Andreatta, A. Iovita & G. Stevens – « Overconvergent modular sheaves and modular forms for GL_2/F », *Israel J. Math.* **201** (2014), no. 1, pp. 299–359.

[2] F. Baldassarri – « Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologiep-adique rigide à coefficients dans un module différentiel I. (Cas des courbes) », *Invent. Math.* **87** (1987), no. 1, pp. 83–99.

[3] F. Baldassarri & B. Chiarellotto – « Algebraic versis rigid cohomology with logarithmic coefficients », *Perspect. Math.* **15** (1994), pp. 11–50.

[4] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty & R. Taylor – « Local-global compatibility for $\ell = p$, II », *Ann. Sci. École Norm. Supér.* **47** (2014), no. 1, pp. 165–179.

[5] J. Bellaïche & G. Chenevier – « Families of Galois representations and Selmer groups », *Astérisque* **324** (2009), pp. 1–314.

[6] L. Berger – « Représentations p-adiques et équations différentielles », *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, pp. 219–284.

[7] P. Berthelot – « Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p », *Mémoires Soc. Math. France* **23** (1986), no. 2, pp. 7–23.

[8] ———, « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres », (1996), prépublication.

[9] A. Borel & N. R. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Math. Surveys Monogr., vol. 67, Amer. Math. Soc., 2013.

[10] S. Bosch & U. Görtz – « Coherent modules and their descent on relative rigid spaces », *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)* **495** (1998), pp. 119–134.

[11] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-Archimedean analysis : a systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 261, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.

[12] R. Brasca – « p-adic modular forms of non-integral weight over Shimura curves », *Compos. Math.* **149** (2013), no. 1, pp. 32–62.

[13] C. Breuil – « Conjectures de classicité sur les formes de Hilbert surconvergentes de pente finie », (2010), unpublished note.

[14] ______, « The emerging p-adic Langlands programme », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* **2** (2010), pp. 203–230.

[15] ______, « Remarks on some locally $\mathbb{Q}_p$-analytic representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ in the crystalline case », *London Math. Soc. Lecture Note Series* **393** (2010), pp. 212–238.

[16] ______, « Vers le socle localement analytique pour GL_n, II », *Math. Annalen* **361** (2015), pp. 741–785.

[17] C. Breuil & M. Emerton – « Représentations p-adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global », *Astérisque* **331** (2010), pp. 255–315.

[18] K. Buzzard – « Analytic continuation of overconvergent eigenforms », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, pp. 29–55.

[19] ______, « Eigenvarieties », *London Math. Soc. Lecture Note Series* **320** (2007), pp. 59–120.

[20] H. Carayol – « Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura », *Compos. Math.* **59** (1986), no. 2, pp. 151–230.

[21] ______, « Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert », *Ann. Sci. École Norm. Supér.* **19** (1986), no. 3, pp. 409–468.

[22] G. Chenevier – « Familles p-adiques de formes automorphes pour GL_n », *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)* **570** (2004), pp. 143–217.

[23] R. Coleman & B. Mazur – « The eigencurve », *London Math. Soc. Lecture Note Series* (1998), pp. 1–114.

[24] R. F. Coleman – « Classical and overconvergent modular forms », *Invent. Math.* **124** (1996), pp. 215–241.

[25] ______, « p-adic Banach spaces and families of modular forms », *Invent. Math.* **127** (1997), pp. 417–479.

[26] P. Colmez – « Représentations triangulines de dimension 2 », *Astérisque* **319** (2008), pp. 213–258.

[27] ———, « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules », *Astérisque* **330** (2010), pp. 281–509.

[28] P. Deligne – « Travaux de Shimura », *Séminaire Bourbaki* **13** (1971), pp. 123–165.

[29] P. Deligne & J.-F. Boutot – « Cohomologie étale : les points de départ », *Lecture Notes in Math.* **569** (1977), pp. 4–75.

[30] F. Diamond & R. Taylor – « Non-optimal levels of modl modular representations », *Invent. Math.* **115** (1994), pp. 435–462.

[31] Y. Ding – « $\mathscr{L}$-invariants and local-global compatibility for GL_2/F », *Forum Math., Sigma* **4** (2016), p. e13.

[32] ———, « $\mathscr{L}$-invariants, partially de Rham families, and local-global compatibility », *Ann. Institut Fourier* **67** (2017), no. 4, pp. 1457–1519.

[33] M. Emerton – « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups I. Construction and first properties », *Ann. Sci. École Norm. Supér.* **39** (2006), no. 5, pp. 775–839.

[34] ———, « On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms », *Invent. Math.* **164** (2006), pp. 1–84.

[35] ———, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction », (2007), to appear in *J. Institut Math. Jussieu.*

[36] ———, « Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$ », (2011), preprint.

[37] ———, « Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups », *Memoirs Amer. Math. Soc.* **248** (2017), no. 1175.

[38] G. Faltings – « Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations », *Algebraic analysis, geometry, and number theory* (1988), pp. 25–80.

[39] ———, « Group schemes with strict $\mathscr{O}$-action », *Moscow Math. J.* **2** (2002), no. 2, pp. 249–279.

[40] L. Fargues – « La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats », *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)* **645** (2010), pp. 1–39.

[41] L. Fargues et al. – « Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification », *Duke Math. J.* **140** (2007), no. 3, pp. 499–590.

[42] J.-M. Fontaine – « Le corps des périodes p-adiques », *Astérisque* **223** (1994), pp. 59–102.

[43] ______, « Représentations ℓ-adiques potentiellement semistables », *Astérisque* (1994), no. 223, pp. 321–348.

[44] J.-M. Fontaine & Y. Ouyang – « Theory of p-adic Galois representations », (2008), preprint.

[45] J. Fresnel & M. Van der Put – *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Math., vol. 218, Birkhäuser Basel, 2012.

[46] M. Harris, R. Taylor & V. G. Berkovich – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies, vol. 151, Princeton Univ. Press, 2001, with an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[47] J. E. Humphreys – *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies Math., vol. 94, Amer. Math. Soc., 2008.

[48] P. L. Kassaei – « $\mathcal{P}$-adic modular forms over Shimura curves over totally real fields », *Compos. Math.* **140** (2004), no. 2, pp. 359–395.

[49] ______, « A gluing lemma and overconvergent modular forms », *Duke Math. J.* **132** (2006), no. 3, pp. 509–529.

[50] ______, « Overconvergence and classicality : the case of curves », *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)* **631** (2009), pp. 109–139.

[51] N. M. Katz & T. Oda – « On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters », *J. Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), no. 2, pp. 199–213.

[52] K. S. Kedlaya – « Finiteness of rigid cohomology with coefficients », *Duke Math. J.* **134** (2006), no. 1, pp. 15–97.

[53] K. S. Kedlaya, J. Pottharst & L. Xiao – « Cohomology of arithmetic families of (φ,Γ)-modules », *J. Amer. Math. Soc.* **27** (2014), no. 4, pp. 1043–1115.

[54] M. Lazard – « Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **14** (1962), no. 1, pp. 47–75.

[55] R. Liu – « Triangulation of refined families », *Comment. Math. Helv.* **90** (2015), no. 4, pp. 831–904.

[56] B. Mazur – « Modular curves and the Eisenstein ideal », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **47** (1977), no. 1, pp. 33–186.

[57] W. Messing – *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math., vol. 264, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

[58] C. Moeglin & J.-L. Waldspurger – « Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$ », *Ann. Sci. École Norm. Supér.* **22** (1989), no. 4, pp. 605–674.

[59] K. Nakamura – « Classification of two-dimensional split trianguline representations of p-adic fields », *Compos. Math.* **145** (2009), no. 4, pp. 865–914.

[60] J. Neukirch – « Algebraic number theory », *Grundlehren Math. Wiss.* **322** (1999).

[61] A. Ogus – « f-isocrystals and de Rham cohomology II - Convergent isocrystals », *Duke Math. J.* **51** (1984), no. 4, pp. 765–850.

[62] M. Ohta – « On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve », *Japanese J. Math. New series* **9** (1983), no. 1, pp. 1–25.

[63] V. Pilloni – « Formes modulaires surconvergentes », *Ann. Institut Fourier* **63** (2013), pp. 219–239.

[64] V. Pilloni & B. Stroh – « Surconvergence et classicité : le cas Hilbert », (2011), prépublication.

[65] M. Raynaud – « Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$ », *Bull. Soc. Math. France* **102** (1974), pp. 241–280.

[66] T. Saito – « Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory », *Compos. Math.* **145** (2009), no. 5, pp. 1081–1113.

[67] P. Schneider – *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[68] P. Schneider & J. Teitelbaum – « p-adic Fourier theory », *Doc. Math.* **6** (2001), pp. 447–481.

[69] ———, « Banach space representations and Iwasawa theory », *Israel J. Math.* **127** (2002), no. 1, pp. 359–380.

[70] ______, « Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2 », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 2, pp. 443–468.

[71] ______, « Algebras of p-adic distributions and admissible representations », *Invent. Math.* **153** (2003), no. 1, pp. 145–196.

[72] ______, « Continuous and locally analytic representation theory », (2004), Lecture notes at Hangzhou.

[73] P. Scholze – « p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties », *Forum Math., Pi* **1** (2013), pp. e1.

[74] B. Schraen – « Représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ et catégories dérivées », *Israel J. Math.* **176** (2010), no. 1, pp. 307–361.

[75] J.-P. Serre – « Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **12** (1962), no. 1, pp. 69–85.

[76] S. Shah – « Interpolating Hodge-Tate and de Rham periods », *Res. Math. Sciences* **5** (2018), no. 2.

[77] J. T. Tate – « p-divisible groups », *Proceedings of a conference on Local Fields* (1967), pp. 158–183.

[78] R. Taylor – « Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight », *Duke Math. J.* **63** (1991), no. 2, pp. 281–332.

[79] Y. Tian & L. Xiao – « p-adic cohomology and classicality of overconvergent Hilbert modular forms », *Astérisque* **382** (2016), pp. 73–162.

[80] N. Tsuzuki – « On the Gysin isomorphism of rigid cohomology », *Hiroshima Math. J.* **29** (1999), no. 3, pp. 479–527.

[81] C. A. Weibel – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Stud. Adv. Math., no. 38, Cambridge Univ. Press, 1995.

INDEX

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Nouvelle série

2017

154. G. MASSUYEAU, V. TURAEV – *Brackets in the Pontryagin algebras of manifolds*
153. M.P. GUALDANI, S. MISCHLER, C. MOUHOT – *Factorization of Non-Symmetric Operators and Exponential H-Theorem*
152. M. MACULAN – *Diophantine applications of geometric invariant theory*
151. T. SCHOENEBERG – *Semisimple Lie Algebras and their classification over $\mathfrak{p}$-adic Fields*
150. P.G. LeFLOCH , YUE MA – *The Mathematical Validity of the $f(R)$ Theory of Modified Gravity*

2016

149. BEUZART-PLESSIS R. – *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires*
148. MOKHTAR-KHARROUBI M. – *Compactness properties of perturbed sub-stochastic C_0-semigroups on $L^1(\mu)$ with applications to discreteness and spectral gaps*
147. CHITOUR Y., KOKKONEN P. – *Rolling of manifolds and controllability in dimension three*
146. KARALIOLIOS, N. – *Global aspects of the reducibility of quasiperiodic cocycles in compact Lie groups*
145. V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, N. – *Ground state energy of the magnetic Laplacian on corner domains*
144. P. AUSCHER, S. STAHLHUT – *A priori estimates for boundary value elliptic problems via first order systems & A priori estimates for boundary value elliptic problems via first order systems*

2015

143. R. DANCHIN, P.B. MUCHA – *Critical functional framework and maximal regularity in action on systems of incompressible flows*
142. Joseph AYOUB – *Motifs des variétés analytiques rigides*

140/141. Yong LU, Benjamin TEXIER – *A Stability Criterion for High-Frequency Oscillations*

2014

138/139. Takuro MOCHIZUKI – *Holonomic D-Modules with Betti Structures*

137. Paul SEIDEL – *Abstract Analogues of Flux as Symplectic Invariants*
136. Johannes SJÖSTRAND – *Weyl law for semi-classical resonances with randomly perturbed potentials*

2013

135. L. PRELLI – *Microlocalization of subanalytic sheaves*
134. P. BERGER – *Persistence of Stratification of Normally Expanded Laminations*
133. L. DESIDERI – *Problème de Plateau, équations fuchsiennes et problème de Riemann Hilbert*
132. X. BRESSAUD, N. FOURNIER – *One Dimensional General Forest Fire Processes*

2012

130-131. Y. NAKKAJIMA – *Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic $p > 0$*

129. W. A STEINMETZ-ZIKESCH – *Algèbres de Lie de dimension infinie et théorie de la descente*
128. D. DOLGOPYAT – *Repulsion from resonances*

2011

127. B. LE STUM – *The overconvergent site*
125/126. J. BERTIN, M. ROMAGNY – *Champs de Hurwitz*
124. G. HENNIART, B. LEMAIRE – *Changement de base et induction automorphe pour* GL_n *en caractéristique non nulle*

2010

123. C.-H. HSIAO – *Projections in several complex variables*
122. H. DE THÉLIN, G. VIGNY – *Entropy of meromorphic maps and dynamics of birational maps*
121. M. REES – *A Fundamental Domain for* V_3
120. H. CHEN – *Convergence des polygones de Harder-Narasimhan*

2009

119. B. DEMANGE – *Uncertainty principles associated to non-degenerate quadratic forms*
118. A. SIEGEL, J. M. THUSWALDNER – *Topological properties of Rauzy fractals*
117. D. HÄFNER – *Creation of fermions by rotating charged black holes*
116. P. BOYER – *Faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Drinfeld et groupes de cohomologie du modèle de Deligne-Carayol*

2008

115. R. ZHAO, K. ZHU – *Theory of Bergman Spaces in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$
114. M. ENOCK – *Measured quantum groupoids in action*
113. J. FASEL – *Groupes de Chow orientés*
112. O. BRINON – *Représentations* p*-adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif*

2007

111. A. DJAMENT – *Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs*
110. S. SZABÓ – *Nahm transform for integrable connections on the Riemann sphere*
109. F. LESIEUR – *Measured quantum groupoids*
108. J. GASQUI, H. GOLDSCHMIDT – *Infinitesimal isospectral deformations of the Grassmannian of 3-planes in* $\mathbb{R}^6$

2006

107. I. GALLAGHER, L. SAINT-RAYMOND – *Mathematical study of the betaplane model : Equatorial waves and convergence results*
106. N. BERGERON – *Propriétés de Lefschetz automorphes pour les groupes unitaires et orthogonaux*
105. B. HELFFER, F. NIER – *Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach: the case with boundary*
104. A. FEDOTOV, F. KLOPP – *Weakly resonant tunneling interactions for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators*

Instructions aux auteurs

Les *Mémoires de la Société Mathématique de France* publient, en français ou en anglais, des articles longs de recherche ou des monographies de la plus grande qualité, qui font au moins 80 pages.

Les *Mémoires* sont le supplément du *Bulletin de la Société Mathématique de France* et couvrent l'ensemble des mathématiques. Son comité de rédaction est commun à celui du *Bulletin*.

Le manuscrit doit être envoyé au format pdf au comité de rédaction, à l'adresse électronique *memoires@smf.emath.fr*.

Les articles acceptés doivent être composés en LaTeX avec la classe *smfbook*, disponible sur le site de la SMF *smf.emath.fr*, ou avec toute classe standard.

Instructions to Authors

In the *Mémoires de la Société Mathématique de France* are published, in French or in English, long research articles or monographs of the highest mathematical quality, that are at least 80 pages.

The *Mémoires* are the supplement of the *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Articles in all areas of mathematics are considered. The *Mémoires* have the same editorial board as that of the *Bulletin de la SMF*.

The manuscript must be sent in pdf format to the editorial board to the email address *memoires@smf.emath.fr*.

The accepted articles must be composed in LaTeX with the *smfbook* class, available on the SMF website *smf.emath.fr*, or with any standard class.

On étudie les formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires et montre l'existence des formes compagnons surconvergentes en utilisant les théorèmes de comparaison p-adique. Ceci, combiné avec des résultats sur les représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(L)$, nous permet d'obtenir des résultats de compatibilité local-global sur le socle localement analytique dans le H^1-complété des courbes de Shimura unitaires. En outre, en utilisant une loi d'adjonction en famille du foncteur de Jacquet-Emerton et la théorie de triangulation globale, on montre également des résultats de compatibilité local-global sur des représentations localement analytiques non semi-simples.

We study p-adic modular forms over unitary Shimura curves and prove the existence of overconvergent companions forms over unitary Shimura curves using p-adic comparison theorems. From which, together with some locally analytic representation theory of $\mathrm{GL}_2(L)$, we deduce some local-global compatibility results on the socle for the completed H^1 of unitary Shimura curves. In addition, using an adjunction formula for Jacquet-Emerton functor in family and global triangulation theory, we also prove some local-global compatibility results for non semi-simple locally analytic representations.