Revue d'Histoire des Mathématiques

Quantifier et calculer : usages des nombres à Nippur

Christine Proust

Tome 14 Fascicule 2 2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2008 : prix public Europe : 65 €; prix public hors Europe : 74 €;
prix au numéro : 36 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, B.P. 67, 13274 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
14 (2008), p. 143–209

QUANTIFIER ET CALCULER : USAGES DES NOMBRES À NIPPUR

Christine Proust

Résumé. — Cet article s'appuie sur un lot de plus de 800 tablettes mathématiques provenant de Nippur, capitale culturelle de Mésopotamie, datant de l'époque paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire avant notre ère), exhumé par une mission archéologique américaine à la fin du XIX^{e} siècle. Constitué principalement de tablettes scolaires, ce lot est aujourd'hui réparti en trois collections conservées dans les Musées de Philadelphie, Istanbul et Iéna. Ce n'est que récemment que ces collections ont été étudiées de façon systématique. Leur analyse permet de reconstituer l'ensemble du curriculum de formation mathématique des scribes, depuis les premiers exercices d'apprentissage des mesures et des nombres jusqu'à des problèmes de volume de niveau avancé. Cet article se propose d'observer de façon minutieuse comment les mesures et les nombres sont écrits et disposés sur les tablettes que nous avons à notre disposition. En analysant comment et dans quel ordre ces écritures étaient introduites dans l'enseignement, il tente d'éclairer la fonction spécifique qui était assignée à chaque classe de graphèmes. Un des principaux objectifs est de reconstituer les pratiques de calcul auxquelles les exercices d'apprentissage renvoient. L'enjeu plus large est de saisir les conceptions des nombres, des surfaces et des volumes qui étaient transmises dans le cadre des écoles de Nippur, et de mieux comprendre les soubassements des mathématiques élaborées en Mésopotamie du sud au début du deuxième millénaire.

C. Proust, Unité REHSEIS (CNRS & Université Diderot Paris 7), Case courrier 7064, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
Courrier électronique : `christine.proust@univ-paris-diderot.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A17.

Mots clefs : Mésopotamie, numération positionnelle, métrologie, écriture cunéiforme, école de scribe, cursus, surface, volume, table métrologique, nalbanum, brique.

Key words and phrases. — Mesopotamia, place value notation, metrology, cuneiform writing, scribal school, curriculum, surface, volume, metrological table, nalbanum, brick.

ABSTRACT (Quantifying and calculating: usage of numbers in Nippur)
This paper is based on a set of 800 mathematical tablets from Nippur—the cultural capital of Mesopotamia—dating from the Old Babylonian period (beginning of the second millennium BC) and excavated at the end of the 19^{th} century by an American archaeological team. This set is mainly composed of school tablets and has been divided into three collections now in Philadelphia, Istanbul and Jena. It is only recently that these collections were studied systematically. Their analysis allows us to reconstitute the whole curriculum of scribal mathematical education from beginners' learning exercises in measures and numbers to advanced level volume problems. This paper focuses on the way measures and numbers are written and displayed on the tablets available to us. By analysing how and in which order these writings were introduced in the curriculum, this article tries to enlighten the specific function which was assigned to each class of graphemes. One of the main goals is to reconstitute the computational practices to which the school exercises refer. The broader issue is to grasp the conception of numbers, surfaces and volumes which was transmitted in the school setting of Nippur, and to better understand the background of the mathematical thought elaborated in southern Mesopotamia at the beginning of the second millennium.

INTRODUCTION

Les textes mathématiques de Mésopotamie, aussi bien scolaires que savants, s'appuient sur toute une palette de numérations différentes, de principe positionnel ou additif. Quelle est la fonction de ces différentes numérations et quelles opérations arithmétiques permettent-elles d'effectuer ? Des sources nouvellement étudiées, les tablettes scolaires de Nippur (Mésopotamie centrale) d'époque paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire avant notre ère), permettent de proposer des réponses relativement détaillées à ces questions, dans un contexte bien identifié et abondamment documenté. Grâce à leur caractère didactique, ces exercices témoignent de mécanismes de calcul que les tablettes mathématiques laissent généralement implicites. En effet, si certaines étapes des calculs sont nécessaires dans un premier stade d'apprentissage, elles ne le sont plus pour des scribes expérimentés, et elles ont souvent disparu des textes savants.

Cet article propose une observation minutieuse de la manière dont les nombres sont écrits dans les textes d'apprentissage de Nippur et une analyse de leur utilisation dans les premiers exercices du cursus scolaire. Les systèmes d'écriture des nombres, le détail de leurs graphies, leur disposition sur les tablettes, l'usage des unités de mesure dans certains contextes précis, livrent des indices sur lesquels on peut s'appuyer pour reconstituer des pratiques de calcul enseignées dans les écoles de scribes. Parmi les nombreux textes scolaires découverts à Nippur, mais aussi dans l'ensemble de la Mésopotamie, certains jouent un rôle particulièrement important dans la compréhension de ces processus. Il s'agit notamment de ce qu'on appelle aujourd'hui des « tables métrologiques », vastes énumérations dans lesquelles on trouve rassemblées et organisées toutes les écritures métrologiques et numériques attestées dans la majeure partie des textes cunéiformes d'époque paléo-babylonienne. Les tables métrologiques sont par ailleurs des textes qui n'ont que peu été publiés, et qui n'ont pas fait jusqu'à présent l'objet d'une étude complète et systématique. Plusieurs hypothèses quant à leur fonction ont néanmoins été avancées, la plus communément admise étant que ce sont des tables de conversion des mesures de certaines unités dans d'autres unités. Je présenterai de façon plus détaillée ces hypothèses dans la partie consacrée aux tables métrologiques, ainsi que les raisons qui me conduisent à proposer une interprétation alternative permettant de mieux rendre compte des particularités de la documentation de Nippur. C'est dans les pratiques de calcul effectives telles que les exercices scolaires nous les laissent entrevoir que se révèlent à mon sens la nature et la fonction de ces tables. En particulier, une série d'exercices de Nippur portant sur des calculs de surface, par leur disposition, permet de saisir la fonction et l'usage des tables métrologiques, et donc le rôle, dans le processus de calcul, des différentes numérations que les tables contiennent.

On le voit, la présente enquête se concentre en grande partie sur les modes d'écriture des nombres dans un corpus de textes cunéiformes relativement étendu en regard de ceux dont on dispose habituellement en mathématiques. L'importance accordée aux graphies pose immédiatement le problème de la représentation des écritures anciennes par des notations modernes. Il n'est pas toujours possible d'éviter les distorsions, mais je m'efforcerai de rendre explicite la relation entre les écritures anciennes et la translittération des graphèmes numériques et métrologiques

(§ 1). Ces choix de notation ne sont pas seulement des questions techniques. En préambule, je soulignerai quelques relations entre les codes de translittération et de traduction des nombres cunéiformes et l'interprétation des textes et je donnerai les raisons de mes propres choix [1]. Ensuite, je présenterai la documentation de Nippur et sa place dans le corpus des textes mathématiques cunéiformes (§ 2). Les systèmes numériques et métrologiques, ainsi que les principes de base du calcul, seront présentés en suivant le cheminement pédagogique ancien, c'est-à-dire dans l'ordre où ces notions étaient introduites dans l'enseignement. Le plan de l'article sera ainsi calqué sur la progression du cursus reconstitué de Nippur : listes métrologiques (§ 3), tables métrologiques (§ 4), tables numériques (§ 5), calcul des surfaces (§ 6), calcul des volumes (§ 7).

En conclusion, je tenterai de montrer en quoi la mise au jour des bases du calcul enseignées à Nippur apporte non seulement des indications sur l'éducation des scribes, mais surtout un éclairage indirect sur le soubassement des mathématiques savantes. Des données concernant d'autres écoles de scribes permettront, dans une certaine mesure, d'étendre quelques-unes des conclusions de cette étude à une aire plus vaste.

1. CHOIX DE NOTATION

Un des problèmes abordés dans la présente analyse des tablettes de Nippur concerne l'écriture et l'utilisation de systèmes numériques fonctionnant sur des principes différents, positionnel pour l'un d'entre eux, additif pour les autres, voire hybride dans quelques cas. Rappelons rapidement ce qui distingue le principe additif du principe positionnel. Dans une numération de principe additif, chaque signe a une valeur qui lui est propre ; la valeur des signes est exprimée par leur forme. Par exemple, dans le système hiéroglyphique égyptien, qui est de principe additif, les bâtons valent un, les anses valent dix, les crosses valent cent, etc. En Mésopotamie, le système le plus couramment employé est de principe additif et de structure générale sexagésimale [2]. Dans ce système, un clou horizontal ⤚ vaut un ;

1 Ces problèmes sont plus amplement développés dans [Proust 2009].

2 Voir plus loin (§ 3) les précisions concernant le « système S ».

un chevron 𒌋 vaut dix ; un clou vertical 𒁹 vaut soixante ; un signe constitué d'un clou et d'un chevron ligaturés 𒁹𒌋 vaut six cents, etc. Les différentes valeurs numériques sont exprimées par la répétition des signes autant de fois que nécessaire.

> Par exemple, dans ce système, 𒁹𒌋 𒁹𒌋 𒐈 𒀸 vaut deux fois six cent, plus trois soixantaines, plus une unité (valeur notée 1381 dans notre système actuel).

Dans une notation positionnelle, en revanche, les signes n'ont de signification que relativement à leur position dans le nombre. Chaque position est définie par son rapport à la précédente. Par exemple, dans notre numération décimale ce rapport est dix (dans 11, le chiffre 1 placé à gauche vaut dix fois celui qui est placé à sa droite) ; dans la numération sexagésimale positionnelle cunéiforme, ce rapport est soixante (dans 𒁹𒁹, le clou placé à gauche vaut soixante fois celui qui est placé à sa droite). L'écriture positionnelle cunéiforme possède de plus une particularité qui la distingue de notre système actuel : il n'y a pas de système graphique permettant de repérer la position des unités absolues. Par exemple, les nombres que nous écrivons 1, 60, 1/60 sont représentés de la même façon, par le signe 𒁹. En particulier, il n'existe pas, dans l'écriture cunéiforme, de signe équivalent à ce que sont, dans notre système, les zéros en position finale ou les points et les virgules [3]. Par exemple, si, dans notre système, nous multiplions 3 par dix, nous obtenons un résultat qui s'écrit 30 : la position des unités, vide, est marquée par le signe 0 ; mais dans le système sexagésimal positionnel cunéiforme, si nous multiplions 4 (𒐉) par soixante, nous obtenons un nombre qui s'écrit aussi 4 (𒐉). En conséquence, l'écriture positionnelle cunéiforme ne spécifie pas l'ordre de grandeur des nombres [4].

Comment rendre compte de ces propriétés et de ces distinctions dans les notations modernes ? Comme l'avait souligné O. Neugebauer, les problèmes de notation des signes cunéiformes sont de nature différente selon qu'ils concernent la translittération ou la traduction : la translittération

---

3 A l'époque paléo-babylonienne, il n'existe pas non plus de signe équivalent à un zéro en position médiane, mais un tel signe sera inventé plus tard, à l'époque séleucide (vers 300 av. n. e.) ; le zéro en position finale, en revanche, n'apparaît à aucun moment de l'histoire des mathématiques cunéiformes.

4 Pour fixer les idées, on peut comparer cette écriture à celle que nous appelons aujourd'hui « écriture en virgule flottante ».

doit représenter le plus fidèlement possible les différents graphèmes écrits sur les tablettes, tandis que la traduction, elle, doit rendre le contenu des textes accessible au lecteur moderne et prend une plus grande liberté par rapport au texte original [Neugebauer 1932-1933, p. 221].

En ce qui concerne la translittération, la situation a évolué ces dernières années, aussi bien dans le sens de l'homogénéisation que dans celui de l'explicitation des règles, grâce notamment aux besoins suscités par la numérisation des textes cunéiformes. Les règles de translittération adoptées dans cet article sont, autant que possible, celles qui ont été établies par S. Tinney et R. Englund pour la saisie numérique des textes cunéiformes, dans le cadre des projets *Cuneiform Digital Library Initiative* (CDLI) et *Pennsylvania Sumerian Dictionary* (PSD) [5]. L'effort de normalisation a conduit les auteurs de ces projets à définir de façon précise les différentes classes de graphèmes mis en jeu dans la notation des mesures et des nombres. Ils ont construit un système de translittération homogène, utilisable pour des documentations d'époques et de genres différents, capable de rendre compte de façon non ambiguë des signes écrits sur les tablettes. Ces règles, initialement élaborées pour permettre le développement des bases de données numériques, sont appliquées aujourd'hui plus largement dans le milieu des assyriologues, y compris pour les éditions sur support papier traditionnel. On trouvera ci-dessous, parmi les conventions des projets CDLI et PSD, celles qui sont utiles pour le présent propos.

En ce qui concerne les traductions et les commentaires, les choix sont plus fortement tributaires des buts poursuivis par les différents auteurs et donc moins homogènes. Par ses objectifs, la présente étude exigerait un système de traduction qui préserve les propriétés essentielles des nombres : principe additif ou positionnel, base de numération sexagésimale ou décimale, valeur spécifiée ou écriture en « virgule flottante », écriture chiffrée ou phonétique. Mais il n'existe pas de solution satisfaisante dans les langues de travail actuelles, dans la mesure où elles ne

5 `http://cdli.ucla.edu` ; `http://psd.museum.upenn.edu/` . Plus précisément, je me suis appuyée sur deux notices mises en ligne sur le site du CDLI, à l'adresse `http://cdli.ucla.edu/methods/de/conventions.html` : Englund & Tinney 2004, *Numeric and Metrological Notations Basics (NM)* ; Tinney 2004, *Whitepaper on Numeric and Metrological Notations for Cuneiform Text Transliterations (WNM).*

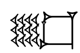
possèdent pas le répertoire lexical et symbolique qui permettrait de rendre compte de toutes les distinctions que manifeste l'écriture cunéiforme. Par exemple, il n'existe pas de noms pour les puissances de soixante qui seraient nécessaires pour rendre compte des nombres sexagésimaux de principe additif (l'équivalent sexagésimal des termes cent, mille, million, milliard de la numération décimale). La fidélité au texte exigerait donc de recourir à des néologismes ou à des notations artificielles qui rendraient la traduction obscure. La solution de compromis entre fidélité et lisibilité que j'ai adoptée est personnelle et liée aux buts de cet article. Elle ne préserve que quelques-unes des propriétés des écritures numériques — celles qui me paraissent les plus importantes.

Dans le paragraphe qui suit, j'exposerai mes choix en ce qui concerne l'écriture des mesures, puis de la numération positionnelle, et, pour chacune d'elles, en abordant d'abord le problème de la translittération, puis celui de la traduction (les termes anglais du CDLI/PSD sont précisés entre parenthèses).

Mesures

Constituants de l'écriture des mesures

Une *mesure* (*value*) s'exprime généralement au moyen d'une *valeur numérique* (*count*) ou d'une fraction suivie d'une *unité de mesure* (*unit*). Donnons deux exemples :

	valeur numérique (arithmogramme)	unité de mesure (métrogramme)
mesure de surface de 2 sar (environ 72 m^2)		
mesure de capacité de 2 gur (environ 600 litres)		

Les graphèmes qui représentent les valeurs numériques sont des arithmogrammes (*count-grapheme*), qui appartiennent à des numérations différentes selon l'unité de mesure concernée. Par exemple, le graphème représentant la valeur 2 n'est pas le même selon qu'il s'agit d'une mesure de surface en sar, ou d'une mesure de capacité en gur (voir les deux exemples ci-dessus).

Les graphèmes qui représentent les unités de mesure sont des métrogrammes (*unit-grapheme*). Il existe cependant deux exceptions : dans le cas de l'écriture des sous-multiples du gur (ban_2 et barig), les deux constituants de la mesure sont fusionnés : le graphème est à la fois un arithmogramme et un métrogramme (voir annexe A).

Les graphèmes qui représentent les fractions usuelles (1/2, 1/3, 2/3, 5/6) sont des idéogrammes spéciaux, ou klasmatogrammes. Les autres fractions (1/4, 1/6, 1/7, etc.) sont représentées par une suite d'idéogrammes (igi-4-gal_2, igi-6-gal_2, etc. — voir annexe A) [6].

Translittération

On vient de voir qu'une même valeur numérique pouvait être écrite de plusieurs façons différentes. Pour distinguer les arithmogrammes dans les translittérations, on précise entre parenthèses le nom du signe utilisé. Par exemple, le clou vertical est le signe diš; le clou horizontal est le signe aš; donc les translittérations des deux mesures citées ci-dessus sont les suivantes :

– 2(diš) sar
– 2(aš) gur

Ces noms de signe n'ont pas de valeur phonétique; ils sont choisis par les assyriologues en raison de leur prononciation supposée dans d'autres contextes. Notons que le nom du graphème diš est souvent omis dans les translittérations (et il le sera parfois ici) car il est omniprésent : par défaut, il est communément admis que c'est de lui qu'il s'agit.

Traduction

Pour les valeurs numériques, généralement écrites en système additif (on reviendra plus loin sur ce point), une traduction fidèle est difficile : la notation devrait distinguer les numérations sexagésimales de celles qui ne le sont pas; elle devrait également désigner des valeurs de signe qui n'ont pas de nom spécifique en français (par exemple le groupe de 6 ou de 18 du « système G », ou bien la soixantaine de soixantaines de soixantaines du

---

6 Ces distinctions entre différents types de graphèmes utilisés pour exprimer des quantités sont en partie inspirées de celles du CDLI, en partie de celles qu'utilisent les mycénologues [Olivier & Godart 1996, p. 13 et n. 25-26]. Je remercie vivement Françoise Rougemont pour ses suggestions et conseils à ce sujet [Proust 2009].

« système S ») [7]. Une solution possible consisterait à faire appel aux chiffres romains pour préserver le caractère additif de ces numérations. Mais ce système a plusieurs défauts : il est incommode pour les très grandes valeurs (par exemple, écrire en chiffres romains la valeur maximum attestée dans le système S, « šar$_2$-gal šu-nu-tag », soit 60^4, donnerait un résultat peu lisible) ; il utilise une notation soustractive et des signes tels que cinq (V) ou cinquante (L), qui, comme le remarquait O. Neugebauer, ne « correspondent pas à l'image cunéiforme » [8] ; enfin, étant décimal, il ne peut pas représenter les signes des écritures cunéiformes (les soixantaines par exemple). Une autre solution consisterait à écrire les nombres en toutes lettres. Mais cela ne permettrait pas de distinguer les écritures phonétiques des arithmogrammes. J'ai finalement choisi d'utiliser simplement la numération moderne usuelle, qui a l'avantage de la lisibilité, et qui permet de distinguer les arithmogrammes des écritures phonétiques.

Les fractions représentées dans les textes cunéiformes par des klasmatogrammes ou des suites d'idéogrammes (igi-N-gal$_2$) seront transcrites et traduites au moyen des notations modernes habituelles (1/4, 1/3, 1/2, 2/3, etc.). Celles qui sont représentées dans les tablettes par une écriture phonétique seront transcrites selon les règles habituelles des textes sumériens ou akkadiens, et traduites en toutes lettres. Les deux formes d'écriture sont par exemple attestées pour un demi :

- 𒈦 translittération : 1/2, traduction : 1/2
- 𒋗𒊑𒀀 translittération : šu-ri-a, traduction : un demi.

Pour les unités de mesure, j'ai gardé, dans la traduction et les commentaires, leur nom sumérien.

Nombres sexagésimaux positionnels

Constituants de l'écriture des nombres

Dans l'écriture cunéiforme, un nombre sexagésimal positionnel se présente comme une suite de « chiffres » de 1 à 59. Ces « chiffres » sont écrits au moyen de dizaines (chevrons) et d'unités (clous verticaux) répétés autant de fois que nécessaire, c'est-à-dire dans un système décimal additif.

7 Voir la description des systèmes S et G au § 3.

8 Par exemple 𒐉 serait noté IV et 𒐊 serait noté V [Neugebauer 1932-1933, p. 221].

Exemples : 𒐏𒐉 (44), 𒎙𒐋 (26), 𒐏 (40).

Dans les nombres à plusieurs positions sexagésimales, les clous et les chevrons placés dans une position donnée représentent une valeur soixante fois plus grande que ceux qui sont placé dans la position précédente (à leur droite).

Translittération

Les règles de translittération des nombres sexagésimaux positionnels ne sont pas absolument uniformes ; elles n'ont pas encore été fixées dans les conventions du CDLI, et les usages en la matière restent divers. Je m'en tiendrai au système adopté par F. Thureau-Dangin (et par O. Neugebauer, qui utilise une virgule là où F. Thureau-Dangin utilise un point) : les « chiffres » sexagésimaux sont transcrits en notation indo-arabe moderne ; ils sont séparés par un point.

Exemples : 𒐏𒐉 𒎙𒐋 𒐏 44.26.40, 𒈫 𒐊 2.5.

Outre son caractère positionnel, l'écriture de ces nombres se distingue par deux autres propriétés essentielles. La première a été soulignée dès les premières publications des textes mathématiques cunéiformes, et elle a été rappelée en introduction de cette partie : les nombres n'ont pas de valeur spécifiée, car la position du chiffre des unités dans le nombre n'est pas indiquée. Pour cette raison, F. Thureau-Dangin parlait de « *nombres abstraits* », au sens où ce sont des « nombres sans ordre de grandeur déterminé » [Thureau-Dangin 1930b, p. 117].

La deuxième propriété sera mise en évidence dans cet article : les nombres sexagésimaux positionnels ne sont jamais suivis d'une unité de mesure. Il s'agit donc de nombres « abstraits » dans un autre sens : celui de nombres indépendants de toute référence à des mesures. C'est à la fois dans ces deux sens, nombres sans valeur spécifiée et nombres autonomes, que j'utiliserai ici l'expression de F. Thureau-Dangin.

Traduction

Pour O. Neugebauer, les nombres sexagésimaux positionnels ne doivent pas, dans les translittérations, porter de marques qui indiquent leur ordre de grandeur, puisque de telles marques n'existent pas dans les textes cunéiformes. Mais il pense que ces marques sont justifiées dans les traductions et les commentaires [9]. Ce point de vue est partagé par la plupart des historiens qui ont travaillé sur les textes mathématiques cunéiformes. C'est ainsi que, dans les traductions et commentaires, il est fait un usage général de zéros écrits en position finale ou initiale, de points ou virgules, qui permettent d'attribuer une valeur aux nombres positionnels [10]. C'est précisément l'affirmation de O. Neugebauer, selon laquelle le repérage de la valeur des positions sexagésimales est justifié dans les traductions, que cet article se propose de discuter dans certains cas. Plus précisément, la question posée est la suivante : en quoi ce repérage correspond-il à des pratiques des scribes ? Pour éviter que les notations ne répondent à priori à la question, je considèrerai les nombres tels que les tablettes les montrent, c'est-à-dire comme des suites de places sexagésimales. J'examinerai ensuite les opérations que, dans l'apprentissage de leur manipulation, les scribes effectuent sur ces suites. Je garderai donc, dans la traduction, le même système de notation que celui qui est adopté dans la translittération. Ce choix a des conséquences sur l'expression des calculs. Par exemple, le produit de 2 par 30 s'écrit 1 : il y a équivalence, dans l'écriture cunéiforme, entre le produit 2×30 et 1. On peut exprimer cette équivalence par une « égalité » : $2 \times 30 = 1$. Mais il faut bien garder à l'esprit qu'il ne s'agit pas d'égalité entre quantités, puisque les nombres concernés n'ont pas d'ordre de grandeur spécifié ; il s'agit seulement d'une équivalence d'écriture, autrement dit d'une sorte

9 « Da Keilschriftzahlen irgendwelche Stellenwertbezeichnung grundsätzlich nicht zukommt, so ist sie auch in der Transkription eines Textes absolut zu vermeiden. Erst in der Übersetzung eines Textes scheinen mir positionelle Angaben gerechtfertigt » [Neugebauer 1932-1933, p. 221] : « Comme aucune indication de la valeur de la position n'est fondamentalement affectée aux nombres cunéiformes, il faut absolument l'éviter dans la translittération. C'est seulement dans la traduction d'un texte que la spécification des valeurs positionnelles me paraît justifiée ».

10 Certains auteurs, comme F. Thureau-Dangin ou, plus récemment, J. Høyrup, préfèrent éviter l'usage des zéros et spécifient les positions sexagésimales en utilisant un système de degrés ($^\circ$), minutes ($'$), secondes ($''$), tierces ($'''$), soixantaines de degrés ($^{`}$), etc. Prenons un exemple : dans le deuxième problème de la tablette BM 13901, on trouve un nombre dont la translittération est 14.30.15 ; dans la traduction, ce nombre est noté 14,30 ;15 par O. Neugebauer, et $14^{`}30^\circ15'$ par F. Thureau-Dangin [Thureau-Dangin 1938, p. 1].

d'égalité formelle. On peut donner d'autres exemples :

$$35.33.20 \times 3.22.30 = 2$$
$$30 \times 30 = 15$$

Translittération du sumérien et de l'akkadien

À l'époque paléo-babylonienne, où la population est probablement déjà devenue complètement akkadophone, le sumérien n'est plus parlé que dans les écoles. Le sumérien est alors devenu une langue d'érudition, dont la place dans les textes savants est restée considérable jusqu'à la disparition des sources cunéiformes au début de notre ère. Mais ce n'est pas seulement en tant que langue, avec sa syntaxe et ses compléments grammaticaux qu'on trouve le sumérien dans les textes. Les textes akkadiens sont émaillés d'idéogrammes sumériens, dans une proportion plus ou moins grande selon les lieux, les genres et les époques. Par exemple, les noms des unités de mesure sont généralement représentés par des idéogrammes sumériens (ce qui ne signifie pas qu'ils étaient prononcés en sumérien). Les textes se présentent souvent comme un mélange d'écriture phonétique akkadienne et d'écriture idéographique sumérienne, qu'il convient de distinguer dans les translittérations.

Les règles usuelles en vigueur sont respectées ici ; elles sont les suivantes :

– le vocabulaire akkadien est transcrit en italique ; le vocabulaire sumérien est transcrit en caractères droits ;

– Les signes sumériens homophones sont distingués les uns des autres dans la translittération par des numéros placés en indices ;

– un même signe peut avoir plusieurs valeurs phonétiques différentes selon le contexte. Dans les cas où la valeur phonétique d'un signe n'est pas identifiée, il est transcrit en lettres capitales ;

– lorsque les termes sumériens sont insérés dans un texte en français, ils sont signalés par un changement de police de caractère (romain maigre interlettré) ;

– lorsqu'un signe écrit sur une tablette est manifestement erroné, il est signalé dans la translittération par un « sic » en exposant.

2. LES SOURCES DE NIPPUR

L'étude de l'écriture des nombres et des pratiques de calcul proposée dans cet article s'appuie principalement sur les textes de Nippur. Quelles sont la portée et les limites de ces témoignages ? Entre 1888 et 1900, la *Babylonian Expedition* de l'université de Philadelphie a exhumé à Nippur plusieurs milliers de tablettes scolaires, dont plus de 800 sont mathématiques [11].

Les sources de Nippur peuvent-elles pour autant être considérées comme représentatives de toutes les écoles de scribes de la même époque ? Les textes mathématiques scolaires trouvés dans d'autres sites (principalement Ur, Larsa, Sippar, Kiš, Mari, ainsi que Suse en Elam) ne se distinguent pas, quant à leur contenu, de ceux de Nippur. Certes, ils sont souvent organisés différemment, ce qui laisse supposer une certaine diversité des méthodes pédagogiques ; mais la comparaison de ces différentes archives montre la remarquable uniformité de leur contenu [12]. En particulier, les systèmes métrologiques attestés dans les textes d'apprentissage sont identiques dans presque tous les sites du Proche Orient, y compris dans les régions septentrionales (Mari) et orientales (Suse en Elam) [13]. Ce fait est à mettre en relation avec un autre phénomène particulièrement important à l'époque paléo-babylonienne : la standardisation des poids et mesures sur une vaste aire géographique. Par ailleurs, Nippur est, à l'époque paléo-babylonienne, une importante capitale culturelle en Mésopotamie, et ses écoles jouissent d'un grand prestige dans tout l'Orient cunéiforme. Il est donc probable que les notions de base de l'écriture des

11 D'autres tablettes scolaires, quoique moins nombreuses, ont par la suite été exhumées à Nippur par des expéditions américaines. E. Robson a publié la partie accessible de ces trouvailles [Robson 2000 ; 2001b ; 2002].

12 Pour une comparaison du contenu et de l'organisation des textes scolaires de Nippur avec des textes d'autres provenances, voir [Proust 2005].

13 Les tablettes scolaires de Mari sont en cours d'étude et seront publiées prochainement par A. Cavigneaux ; quelques listes métrologiques de Suse sont publiées dans [Dossin 1927, n^{os} 5, 9, 11, 16]. Il faut noter néanmoins que les textes d'apprentissage paléo-assyriens (contemporains de ceux de Nippur étudiés ici) semblent présenter des variantes notables par rapport au standard mésopotamien. Il s'agit de textes produits dans le milieu des marchands, tout à fait différent de celui des écoles du sud, et qui présentent des traits caractéristiques de ce milieu [Michel 2008].

nombres, des mesures et du calcul sont à peu près les mêmes à Nippur et dans les autres écoles de Mésopotamie ; cette hypothèse générale reste néanmoins à affiner au cas par cas.

Quel est le lien entre les textes d'apprentissage et ce qu'on peut appeler les textes savants, c'est-à-dire écrits par des maîtres ayant acquis un haut degré d'érudition ? On ne connaît que très peu de textes mathématiques savants provenant de Nippur de façon sûre : seulement trois textes de problèmes. Cela ne signifie pas que de tels textes n'aient pas existé, ni même qu'on ne les ait pas trouvés. En effet, la plupart des textes mathématiques savants ont été acquis par les musées occidentaux sur le marché des antiquités et leur origine est inconnue ; il existe peut-être dans ces collections des textes de Nippur qui n'ont pas été reconnus comme tels. D'autre part, les scribes eux-mêmes réservaient un sort différent aux textes scolaires, mis au rebut, et aux textes savants, qui pouvaient par exemple être emportés dans d'autres écoles, échangés, recopiés. Les relations qu'on peut établir entre des notions acquises dans les apprentissages élémentaires et celles qui se développent dans les textes savants ne s'appuient donc que rarement sur des archives cohérentes et bien documentées sur le plan archéologique. Là où les sources de Nippur se taisent, je ferai ponctuellement appel à des sources d'origine inconnue. Mais les conclusions auront dans ce cas un caractère plus incertain que celles qui sont fondées sur les seules sources de Nippur.

La reconstitution du cursus scolaire de Nippur a fait récemment l'objet d'importants travaux [14]. Ils montrent que l'enseignement se déroule en deux phases, qu'on distingue très nettement par l'aspect matériel et le contenu des tablettes scolaires. Dans un premier niveau, appelé « élémentaire » par les assyriologues, les textes sont caractérisés par leur structure énumérative ; ces listes étaient probablement apprises par cœur. Ces textes témoignent de l'apprentissage de l'écriture, du sumérien et des mathématiques. Dans un deuxième niveau, dit « avancé », l'enseignement s'appuie

14 Voir la thèse de doctorat de N. Veldhuis [Veldhuis 1997]. Elle contient une synthèse des résultats antérieurs ainsi que des apports importants quant à l'ordre dans lequel les scribes apprenaient les différentes catégories de textes élémentaires (syllabaires, vocabulaires, listes de signes, proverbes).

sur la copie et la reproduction de mémoire d'extraits de compositions littéraires, et, dans le domaine des mathématiques, il est consacré à un entraînement au calcul numérique et au calcul des surfaces.

L'aspect matériel des tablettes fournit de précieux renseignements sur les méthodes pédagogiques pratiquées dans les écoles de Nippur. En effet, les tablettes scolaires présentent une typologie très prononcée, caractéristique de certaines étapes du cursus ou de certaines catégories d'exercices. Quatre types de tablettes pour les premiers stades de l'enseignement ont été mis en évidence par M. Civil [15], puis adoptés par les spécialistes des textes scolaires.

– Type I : grande tablette (15 cm sur 20 cm environ) écrite sur plusieurs colonnes ; le texte du revers est la suite du texte de la face.

– Type II : tablette de taille moyenne, écrite sur plusieurs colonnes. Les textes de la face et du revers sont indépendants et appartiennent souvent à des genres différents (par exemple, texte lexical sur la face et mathématique sur le revers).

– Type III : petite tablette, de présentation en général soignée, écrite sur une seule colonne ; le texte du revers est la suite du texte de la face (voir fig. 6 et 8).

– Type IV : petite tablette carrée ou ronde, de profil plan-convexe, de revers en général anépigraphe (voir fig. 7).

Le point important à souligner est que cette typologie, établie dans le cadre des études sur les listes lexicales, s'avère tout aussi pertinente pour l'étude des textes mathématiques. Ainsi, la typologie physique des tablettes scolaires renvoie à différents moments de l'apprentissage scolaire (copie d'un modèle, entraînement de mémoire, examen), et non à différents genres de textes. Cette typologie ne relève pas seulement de systèmes descriptifs mis au point par des historiens modernes. Elle renvoie avant tout à des pratiques d'enseignement développées dans les écoles de scribes. La meilleure preuve en est que certains types de tablette portent un nom sumérien (im-gid$_2$-da ou « tablettes longues » pour les tablettes dites de type III ; im-šu ou « tablettes de main » pour celles de type IV).

15 [Civil et al. 1969], [Veldhuis 1997, p. 28–39].

Indiquons rapidement le contenu des listes destinées à l'enseignement de l'écriture. Ces listes sont constituées de plusieurs séries d'énumérations qui s'enchaînent les unes après les autres tout au long du parcours scolaire élémentaire. Les méthodes d'enseignement reposent sur l'apprentissage par cœur de syllabaires puis de listes lexicales ; il s'agit de vocabulaires sumériens classés selon des critères principalement thématiques, et de listes de signes élaborés, classés selon des combinaisons complexes de critères variés (graphiques, phonétiques, thématiques). L'ensemble contient plusieurs milliers d'items. Le cursus élémentaire se termine par l'initiation à la langue sumérienne au moyen de listes de petites phrases de difficulté grammaticale et lexicale progressive (formules juridiques et proverbes).

Les tablettes mathématiques représentent entre 10 et 20% des tablettes scolaires découvertes dans les différents sites mésopotamiens, ce qui peut laisser penser que, à Nippur comme ailleurs, les mathématiques occupent une part modeste mais non négligeable des activités scolaires. La structure des listes mathématiques est analogue à celle des listes lexicales : séries subdivisées en sections, qui s'enchaînent dans un certain ordre, réparties sur des tablettes qui se raccordent les unes aux autres par un système de lignes d'appel et de colophons. A Nippur, les textes mathématiques élémentaires sont constitués d'un ensemble d'énumérations de mesures et de tables numériques [16]. Les textes mathématiques avancés portent sur la multiplication, l'inversion, le calcul des surfaces. Je présenterai ces textes, dans l'ordre où, selon ma reconstitution [Proust 2007, ch. 5.3, 8.1], ils étaient introduits dans l'enseignement, en dégageant les connaissances essentielles qu'ils devaient apporter aux jeunes scribes. Une documentation complémentaire, provenant de Nippur ou d'origine inconnue, montrera plusieurs exemples d'utilisation de ces connaissances de base.

---

16 Ces textes sont stéréotypés. A partir de tous les fragments trouvés à Nippur, dont de nombreux duplicata, on peut reconstituer un « texte composite », c'est-à-dire un texte composé de tous les items attestés au moins une fois dans une des sources [Proust 2007, p. 311–323].

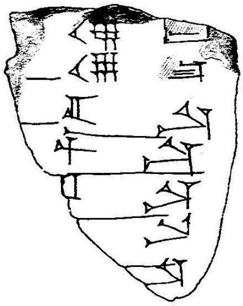
3. LES LISTES MÉTROLOGIQUES : ÉCRIRE LES MESURES

Les listes métrologiques sont les premiers textes mathématiques introduits dans le cursus des scribes ; elles interviennent à un stade où les jeunes scribes ont déjà assimilé un répertoire important de signes élémentaires et quelques principes de base de l'écriture cunéiforme. Les listes métrologiques sont présentes sur environ un quart des tablettes scolaires mathématiques trouvées à Nippur. Elles sont constituées de listes de mesures de capacités, poids, surfaces, longueurs, énumérées dans cet ordre, constituant un ensemble d'environ 620 items. Dans ce qui suit, j'utiliserai respectivement, pour ces quatre catégories, les abréviations suivantes : liste métrologique C (capacité), liste métrologique P (poids), liste métrologique S (surface), liste métrologique L (longueurs). Il existe des tablettes qui rassemblent toutes ces listes (types I ou revers des types II), d'autres ne contiennent qu'une séquence courte extraite d'une des listes (type III ou faces des types II). On peut voir par exemple sur la figure 1 deux petits fragments de tablette de Nippur contenant des extraits de listes métrologiques de longueurs.

Ces petits extraits montrent les connaissances que devaient acquérir les scribes grâce à l'apprentissage des listes métrologiques : l'écriture des valeurs numériques et des unités de mesure. Mais considérées comme des ensembles structurés, ces listes contiennent une information plus riche : elles définissent les rapports des unités de mesure entre elles (voir par exemple, dans la figure 1, la section des capacités où la séquence 18 gin$_2$, 19 gin$_2$, 1/3 sila$_3$ montre que 20 gin$_2$ = 1/3 sila$_3$, donc que le sila$_3$ vaut 60 gin$_2$). Ceci est vrai pour les apprentis scribes tout aussi bien que pour ceux qui déchiffrent ces textes aujourd'hui. Et de fait, les listes métrologiques (et les tables métrologiques, présentées plus loin) ont joué un rôle important au début de l'assyriologie pour l'établissement de la métrologie mésopotamienne [Proust, à paraître]. On trouvera en annexe A une description synthétique sous forme de « diagrammes fléchés » des quatre listes métrologiques (C, P, S, L), dans l'ordre où ces listes apparaissent dans les tablettes de type I [17]. Signalons encore un trait des listes métrologiques, qui montre

17 Cette présentation a été introduite par J. Friberg et elle est généralement adoptée dans les publications actuelles : les unités sont énumérées dans l'ordre où on les

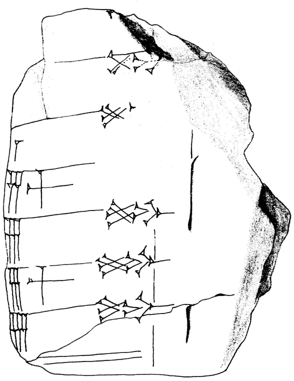
HS 271a, face, fragment de liste métrologique des capacités (un sila$_3$ ≅ 1 litre) [TMH 8, 17]



Translittération

...
18 [gin$_2$]
19 [gin$_2$]
1/3 sila$_3$
1/2 sila$_3$
[2/3] sila$_3$
[5/6] sila$_3$
[1] sila$_3$
...

Ni 3352, type II, face : fragment de liste métrologique des longueurs (un danna ≅ 10 km) [TMN, pl. XI]



Translittération

[...]
[4(diš) 1/2] danna
[5(diš)] danna
5(diš) 1/2 [danna]
6(diš) danna
6(diš) 1/2 danna
7(diš) danna
==========

Figure 1. Listes métrologiques

leur souplesse. La liste des surfaces débute, à Nippur, avec l'item 1/3 sar, soit environ 12 m^2. Mais dans les pratiques scolaires et sans doute administratives, il peut arriver que des surfaces plus petites soient prises en considération (c'est le cas par exemple dans les tablettes scolaires UM 29-15-192 et Ni 18 présentées plus loin, § 6). Dans ces cas, les scribes utilisent des sous-multiples du sar (gin$_2$ et še) qui ont à l'origine été créés pour les capacités et les poids, et qui sont greffés au système des surfaces. Ces sous-multiples

---

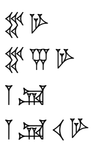
trouve écrites dans les textes (de droite à gauche, on trouve les unités des plus petites aux plus grandes), et reliées par des flèches accompagnées des facteurs multiplicatifs [Friberg 1979].

prennent alors le sens plus général respectivement de « 1/60 » et « 1/180 » (voir annexe B) [18].

Considérons maintenant en détail l'écriture des valeurs numériques. L'existence de plusieurs systèmes différents pour exprimer les valeurs numériques qui accompagnent les unités de mesure devait constituer une réelle difficulté pour les apprentis scribes. Les listes métrologiques, avec leurs longues énumérations de mesures progressant pas à pas, avaient sans doute pour fonction de les familiariser avec ces systèmes. Il est intéressant de comparer les principes d'écriture enseignés au premier niveau de formation, tels qu'ils apparaissent dans les listes métrologiques, avec les pratiques d'écriture dans des textes d'une autre nature ; par exemple la « Liste Royale Sumérienne », avec ses longues énumérations de durées de règne, est une source particulièrement riche [Proust 2009].

Dans les listes métrologiques, les mesures sont données dans l'ordre croissant, donc les unités de mesure apparaissent, pour chaque système métrologique (capacité, poids, surface, longueur), des plus petites aux plus grandes. Les valeurs numériques qui accompagnent les unités n'atteignent généralement pas soixante, les unités de mesure d'ordre supérieur prenant le relais, comme le montre l'extrait ci-dessous [19] :

Exemple extrait de la liste métrologique des longueurs (1 ninda ≅ 6 m) :



50 ninda
55 ninda
1 UŠ
1 UŠ 10 ninda.

Figure 2. Liste métrologique des longueurs.

Pour écrire les valeurs de un à cinquante-neuf, les scribes ont recours au système standard, décimal et additif, basé sur deux signes, celui des unités (𒁹 = signe diš) et celui des dizaines (𒌋 = signe u). Ce système standard est le

18 Notons que, si l'unité gin_2 n'est pas attestée à Nippur dans les listes ou tables métrologiques de surface, elle l'est dans d'autres lieux (voir la liste métrologique de surfaces d'origine inconnue publiée dans [Nissen et al. 1993, p. 148]).

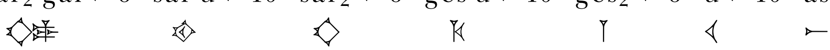
19 Cette séquence est attestée, par exemple, dans la tablette scolaire Ni 5234, provenant de Nippur et conservée au Musée archéologique d'Istanbul [Proust 2007, CD].

même que celui qui est utilisé pour écrire les « chiffres » de un à cinquante-neuf de la numération positionnelle ; ce fait a sans douté été à l'origine de confusions fréquentes, chez les historiens, entre une écriture positionnelle et une écriture qui ne l'est pas [Proust 2009].

Mais pour certaines unités de mesure, il n'existe pas d'unité d'ordre supérieur susceptible de prendre le relais. Pour ces unités, les valeurs numériques doivent pouvoir dépasser cinquante-neuf : ce sont les unités les plus grandes de chaque système métrologique (gur pour les capacités, gu$_2$ pour les poids, GAN$_2$ pour les surfaces). Les valeurs numériques utilisées dans ces cas appartiennent à des numérations particulières, appelées par les assyriologues « système S » pour les gur et gu$_2$, et « système G » pour les GAN$_2$. Ces systèmes permettent d'atteindre des valeurs couvrant les besoins pratiques et les situations de l'entraînement scolaire. Il n'y a pas de système numérique particulier pour les danna, la plus grande des unités de longueur. Un tel système n'est en fait pas nécessaire dans la pratique, car les longueurs usuelles ne dépassent pas soixante danna (environ 630 km), et le système numérique standard semble satisfaire les scribes. Ces systèmes, très largement utilisés en Mésopotamie hors du cadre limité des écoles de Nippur, ont fait l'objet de nombreuses études [Nissen et al. 1993]. On s'intéressera ici spécifiquement à la façon dont ils étaient enseignés à Nippur.

La numération appelée « système S » est une numération de principe additif. Elle est intimement liée aux processus d'invention de l'écriture, puisqu'elle est attestée dans les textes les plus anciens que nous connaissons (fin du quatrième millénaire) : dans les comptabilités archaïques d'Uruk, le système S est utilisé pour les quantités discrètes (personnes, animaux, objets) et dans la métrologie [Friberg 1999, p. 109-111] ; il est donc dès l'origine polyvalent. Les signes du système S et leurs valeurs sont représentés dans le diagramme suivant (également donné en annexe A).

šar$_2$-gal ←6– šar'u ←10– šar$_2$ ←6– geš'u ←10– geš$_2$ ←6– u ←10– aš



216 000 36 000 3 600 600 60 10 1

Certaines listes métrologiques ajoutent un multiple du šar$_2$-gal (« le grand šar$_2$ »). Il s'agit de la soixantaine de šar$_2$-gal, noté šar$_2$-gal šu nu-tag (« le grand šar$_2$ que la main ne touche pas »). Ainsi, le système S permet de couvrir une très large échelle de nombres entiers : de 1(aš) à 12 960 000 (šar$_2$-gal šu nu-tag). Ces multiples du šar$_2$ semblent du reste beaucoup plus théoriques que pratiques : ils ne sont attestés que dans les listes lexicales et métrologiques. Il est important de souligner que cette numération est construite sur une alternance régulière de facteurs dix et six, qui lui confère une structure générale sexagésimale (d'où le nom « S » que les assyriologues lui ont donné). Notons que les unités se distinguent des soixantaines par leur orientation : l'unité est un clou horizontal (𒀸) et la soixantaine est un clou vertical (𒁹). Il n'y a donc pas de confusion possible entre unités et soixantaines [Proust 2009]. La figure 3 ci-dessous montre un extrait de liste métrologique de capacités, où on observe une séquence du système S :

Extrait de la tablette HS 1703 [20]

Translittération	Traduction
1(šar$_2$) gur	3 600 gur
1(šar$_2$) 1(geš'u) gur	4 200 gur
1(šar$_2$) 2(geš'u) gur	4 800 gur
1(šar$_2$) 3(geš'u) gur	5 400 gur
1(šar$_2$) 4(geš'u) gur	6 000 gur
1(šar$_2$) 5(geš'u) gur	6 600 gur
[2](šar$_2$) gur	7 200 gur
[3](šar$_2$) gur	10 800 gur
etc.	

Figure 3. Système S.

Le fait que le système S était conçu comme une numération complète et cohérente par les scribes est attesté par un autre texte de Nippur, relevant probablement d'un stade plus avancé du cursus. Il s'agit d'une tablette lexicale contenant la liste ordonnée de tous les graphèmes du système S [21].

Le champ d'utilisation du système S ou de ses variantes est beaucoup plus large que celui de la métrologie, puisque c'est lui qui apparaît dans les

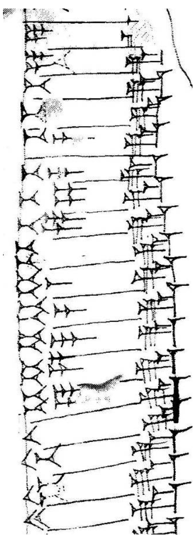
20 Tablette de Nippur conservée à Iéna [Proust 2008b].

21 Tablette CBS 11319 [Proust 2009].

opérations de comptage. On pourrait citer de nombreux exemples comme les comptes de lignes dans les colophons de tablettes, les comptes de tablettes dans les séries numérotées, les nombres d'années [Proust 2009].

La numération affectée à l'unité de surface GAN$_2$, appelée « système G », est également de principe additif (diagramme : voir annexe A). Des multiples du šar$_2$, analogues à ceux du système S, apparaissent parfois dans les listes métrologiques. Le système G couvre ainsi une échelle de 1/2(ubu) à 3 888 000 (šar$_2$-gal šu nu-tag). Les facteurs qui définissent la valeur de chaque signe par rapport au précédent ne présentent pas la régularité observée dans le système S. La figure 4 ci-dessous montre un extrait de liste métrologique de capacités, où on observe une séquence du système G :

Extrait de la tablette HS 249 [22]



Translittération	Traduction
5(iku) GAN$_2$	5 GAN$_2$
5(iku) 1(ubu) GAN$_2$	5 1/2 GAN$_2$
1(eše$_3$) GAN$_2$	6 GAN$_2$
1(eše$_3$) 1(iku) GAN$_2$	7 GAN$_2$
1(eše$_3$) 2(iku) GAN$_2$	8 GAN$_2$
1(eše$_3$) 3(iku) GAN$_2$	9 GAN$_2$
1(eše$_3$) 4(iku) GAN$_2$	10 GAN$_2$
1(eše$_3$) 5(iku) GAN$_2$	11 GAN$_2$
2(eše$_3$) GAN$_2$	12 GAN$_2$
2(eše$_3$) 1(iku) GAN$_2$	13 GAN$_2$
2(eše$_3$) 2(iku) GAN$_2$	14 GAN$_2$
2(eše$_3$) 3(iku) GAN$_2$	15 GAN$_2$
2(eše$_3$) 4(iku) GAN$_2$	16 GAN$_2$
2(eše$_3$) 5(iku) GAN$_2$	17 GAN$_2$
1(bur$_3$) GAN$_2$	18 GAN$_2$
1(bur$_3$) 1(eše$_3$) GAN$_2$	24 GAN$_2$
1(bur$_3$) 2(eše$_3$) GAN$_2$	30 GAN$_2$
2(bur$_3$) GAN$_2$	36 GAN$_2$

Figure 4. Système G

Pour terminer cette présentation des numérations développées dans les listes métrologiques, insistons sur quelques points. Un même signe peut

22 Tablette de Nippur conservée à Iéna [Proust 2008b].

prendre des valeurs numériques différentes selon qu'il appartient au système S ou G. Ce fait montre qu'un arithmogramme n'a de signification que relativement à l'unité de mesure qui l'accompagne et au système auquel il appartient[23].

Les mesures sont notées sous la forme de valeurs appartenant à une numération de principe additif suivies d'une unité de mesure (que j'appellerai, dans ce qui suit, « écriture standard des mesures »). Cette écriture standard est attestée non seulement dans les listes métrologiques de Nippur, mais aussi dans toutes les listes et tables métrologiques de Mésopotamie et d'Elam.

Cette description des listes métrologiques et de quelques contextes d'utilisation des numérations qu'elles contiennent montre la place largement prépondérante de la numération sexagésimale additive. Pour les mesures de capacité en gur et de poids en gu_2, on a vu que c'est le système S qui est utilisé. Les dénombrements font appel à une variante du système S, qui ne s'en distingue que par la forme des unités (verticales au lieu d'être horizontales), et par le fait que les soixantaines sont explicitées en cas d'ambiguïté [Proust 2009, § 5]. En résumé, le système S et ses variantes constituent le principal mode d'expression des quantités dans les mesures et les dénombrements, la seule exception étant le système G pour les unités de surface GAN_2.

Que nous apporte, finalement, l'analyse des listes métrologiques de Nippur ? Tout d'abord, elle éclaire quelques aspects de l'enseignement dans les écoles de scribes. Leur proportion élevée parmi les textes mathématiques de Nippur montre l'importance qui leur était accordée. Il est probable que l'enseignement de l'écriture des mesures était très étroitement associé à celui de l'écriture du sumérien, car on trouve très fréquemment, sur la même tablette (de type II), à la fois des listes métrologiques et des listes lexicales[24]. On peut également remarquer un décalage entre les systèmes développés dans les listes métrologiques et les

23 La découverte de cette propriété importante des arithmogrammes mésopotamiens anciens a ouvert la voie au déchiffrement de plusieurs systèmes archaïques restés obscurs [Englund 1988, p. 135].

24 Les tables métrologiques et les tables numériques, en revanche, ne sont que rarement associées, sur une même tablette, avec des listes lexicales [Proust 2008a].

pratiques d'écriture dans le reste de la documentation. Par exemple dans certaines listes métrologiques, l'échelle des mesures est beaucoup plus large que ne le nécessitent les besoins courants (de grandes valeurs telles que « šar$_2$-gal-šu-nu-tag » ne sont attestées que dans ces listes scolaires) ; dans d'autres listes, en revanche, l'échelle des mesures est limitée et ne couvre pas des ordres de grandeurs usuels (comme les fractions de sar).

Ensuite, et ce point est capital dans le cadre de cet article, cette étude a permis de mettre en évidence une propriété commune à toutes les valeurs numériques utilisées dans les listes métrologiques, et plus généralement dans l'écriture des mesures et des dénombrements : aussi diverses soient-elles, qu'elles appartiennent au système G, au système S ou à ses variantes, les valeurs numériques sont toujours écrites selon un principe additif. De ce fait, dans les textes de Nippur, les quantités (mesures de grandeur ou dénombrements) sont toujours exprimées au moyen de signes numériques dont la valeur est définie sans ambiguïté. La notation positionnelle n'intervient pas en tant que telle dans l'expression des quantités. Ceci est vrai dans les textes d'apprentissage, mais aussi dans d'autres genres de textes (liste royale sumérienne, colophons), ainsi que dans les textes administratifs. On peut également constater cet usage spécifique des systèmes additifs dans l'ensemble des textes mathématiques de Nippur, qu'ils soient scolaires ou savants : les mesures sont exprimées selon le modèle des listes métrologiques [25].

4. LES TABLES MÉTROLOGIQUES : QUELLE FONCTION ?

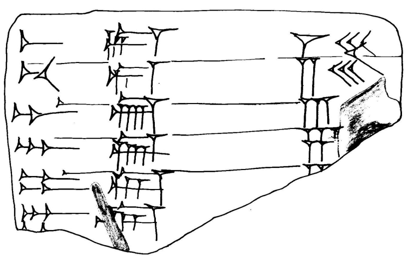
Outre les listes, une autre catégorie de texte métrologique se trouve en abondance dans les archives scolaires de Nippur : ce sont des tables qui, à chaque mesure, font correspondre un nombre sexagésimal positionnel. Quelle est la nature de cette correspondance ? Il s'agit à mon sens d'une question clef, car elle soulève celle de la place spécifique de la numération positionnelle dans l'apprentissage du calcul. Différentes interprétations de la fonction des tables métrologiques ont été proposées par les spécialistes

25 Pour Nippur, voir par exemple les trois tablettes contenant des problèmes : CBS 11681 ; CBS 12648 ; Ni 5175+CBS 19761 [Proust 2007, chapitre 7].

des mathématiques cunéiformes. Je voudrais souligner les questions que ces hypothèses me semblent laisser sans réponse, et proposer une interprétation alternative fondée sur la prise en compte de l'ensemble de la documentation de Nippur.

Avant d'aborder ces problèmes d'interprétation, précisons ce que sont exactement ces tables métrologiques. Les mesures qu'elles contiennent sont exactement les mêmes que celles qu'on trouve énumérées dans les listes métrologiques, dans le même ordre. Cependant, les tables métrologiques contiennent une section de plus que les listes métrologiques : il s'agit d'une table de mesures linéaires supplémentaire, spécifiquement dédiée au calcul des volumes, que j'appellerai table des hauteurs (en abrégé table Lh) pour des raisons précisées plus loin [26]. La figure 5 suivante montre un exemple de table métrologique des surfaces :

Tablette HS 262, type III, face [27]



Translittération	
1(iku) GAN_2	1.40
1(iku) 1(ubu) GAN_2	2.30
2(iku) GAN_2	3.[20]
3(iku) GAN_2	5
4(iku) GAN_2	[6.40]
5(iku) GAN_2	[8.20]

Figure 5. Table métrologique des surfaces

Tout d'abord, considérons la fonction pédagogique de ces tables. Le petit extrait ci-dessus suffit à montrer que les tables métrologiques contiennent l'ensemble des informations contenues dans les listes métrologiques. Pourquoi alors faire apprendre ces deux catégories de texte aux jeunes scribes ? En fait, il n'est pas sûr que tous les élèves aient dû apprendre à la fois les listes et les tables. Plusieurs explications sont possibles : le passage des listes aux tables dans le cursus correspondrait à une sorte de progression didactique ; ou bien les listes seraient en fait

26 Voir § 7 et extraits des tables métrologiques en annexe B.

27 Tablette de Nippur conservée à Iéna [Proust 2008b].

des tables incomplètes : les correspondances en nombres abstraits seraient mémorisées, mais pas toujours écrites. Pour ma part, j'ai émis une autre hypothèse, celle de l'existence d'une sorte de spécialisation dans les écoles de Nippur, où seuls certains scribes auraient eu besoin d'apprendre les tables métrologiques [28]. Quoi qu'il en soit, la reconstitution du cursus mathématique montre que les tables métrologiques sont les premiers textes contenant des nombres abstraits que les jeunes scribes rencontrent dans leur formation [29]. Une des fonctions des tables métrologiques semble donc être l'apprentissage combiné de la métrologie et de l'écriture sexagésimale positionnelle.

Examinons maintenant l'organisation des données dans les tables métrologiques. Ces tables sont constituées de deux colonnes distinctes. Les nombres écrits dans la colonne de gauche sont des valeurs numériques suivies d'unités de mesure ; comme on vient de le voir, ces valeurs numériques sont définies sans ambiguïté du fait qu'elles appartiennent à des numérations de principe additif. En revanche, les nombres écrits dans la colonne de droite sont en notation positionnelle ; ils n'ont donc pas de valeur spécifiée. En conséquence, les mêmes écritures réapparaissent de façon cyclique. Par exemple, le nombre abstrait 1 de la table de longueurs est associé à six šu-si (soit environ 10 cm) et, plus loin, à un ninda (soit environ 6 m), et, plus loin encore, à un UŠ (soit environ 360 m), comme on peut le voir dans l'annexe B. Il s'en suit une certaine dissymétrie dans la correspondance établie par les tables métrologiques. Dans le sens direct (de la colonne de gauche à celle de droite), la correspondance est une simple « lecture » de la table (en fait, les tables étant très probablement mémorisées, il ne s'agit pas d'une lecture effective, mais plutôt d'un automatisme mental acquis au cours de la formation élémentaire). Mais dans le sens inverse, c'est-à-dire du nombre abstrait à la mesure, la correspondance n'est pas unique : le même nombre abstrait est associé à plusieurs mesures, qui diffèrent les unes des autres d'un ou plusieurs facteurs soixante. Un nombre abstrait étant donné, lui faire correspondre

28 Concernant ces diverses hypothèses, voir [Proust 2008a].

29 Cette conclusion s'appuie sur des considérations statistiques développées dans [Proust 2007, p. 144 ss.].

une mesure n'est donc possible que si cette transformation est accompagnée d'une évaluation mentale de l'ordre de grandeur du résultat attendu. Cet exercice était-il à la portée des scribes dans les diverses situations pratiques ou scolaires qu'ils rencontraient ? Les mesures possibles pour un même nombre abstrait diffèrent notablement : le contexte devait certainement permettre de choisir entre des longueurs de 10 cm, 6 m et 360 m, pour prendre l'exemple cité plus haut. Dès lors qu'on associe des images mentales aux différentes mesures, l'exercice n'est pas hors de portée [30]. Et c'est peut-être précisément à cet exercice qu'étaient entraînés les scribes par l'apprentissage de certaines sections de listes lexicales composées d'énumérations de divers récipients, poids, cannes de roseau, cordes d'arpentage, champs, accompagnés de leur mesure [Proust 2007, p. 158 ss.]. Ces séquences, qui étaient étudiées à peu près en même temps que les listes et les tables métrologiques, devaient sans doute contribuer à fixer quelques repères dans l'esprit des futurs calculateurs.

Revenons à la question centrale qui nous préoccupe : quelle est la fonction des tables métrologiques ? Plusieurs hypothèses ont été émises. Pour F. Thureau-Dangin, les scribes utilisaient deux façons de noter des quantités : l'une, largement répandue dans les textes administratifs, était celle qu'il désigne par « notation commune » (qui correspond en fait aux écritures qu'on trouve dans les listes métrologiques). L'autre, réservée aux textes mathématiques, était la notation positionnelle, qu'il désigne par « notation savante ». Pour lui, les tables métrologiques permettaient une conversion des notations communes en notations savantes [Thureau-Dangin 1938, p. xvi]. Ainsi, il relève les exemples suivants :

BM 85200 + VAT 6599, #30, ligne 14 [MKT I, p. 199]

7 *a-na* 5 1 kuš$_3$ *i-ši* 7 par 5 (1 kuš$_3$) multiplie

VAT 6598, revers, ligne 16 [MKT I, p. 279]

[2.30 *a-na*] 5 1 kuš$_3$ bal *i-ši* 2.30 par 5 (1 kuš$_3$, la conversion) multiplie.

Dans ces deux exemples, on constate que le scribe a noté côté à côte le nombre abstrait (5) et la mesure correspondante dans les tables métrologiques de longueurs (1 kuš$_3$). Dans le deuxième exemple, on remarque

30 On trouvera dans l'extrait de table métrologique donné en annexe des indications sur ces possibles images mentales associées à quelques ordres de grandeurs.

la mention du terme sumérien « bal », qui désigne un changement et que, selon l'interprétation de F. Thureau-Dangin, on peut traduire par « conversion ». Pour F. Thureau-Dangin, cette juxtaposition est destinée à prévenir une erreur d'interprétation qui serait induite par l'indétermination des ordres de grandeur de la numération positionnelle.

Une hypothèse un peu différente a été avancée par P. Damerow et R. Englund : les systèmes numériques de principe additif sont d'origine très ancienne (pour certains, ils remontent au début du troisième millénaire), alors que la numération positionnelle est une invention beaucoup plus récente (on n'en connaît pas la date exacte, mais les textes les plus anciens que nous connaissions où la numération positionnelle est attestée datent de l'époque d'Ur III, soit la toute fin du troisième millénaire) [Nissen et al. 1993, p. 142-147]. Les tables métrologiques permettraient de traduire les notations traditionnelles anciennes en notations nouvelles.

> *In order to use the new calculation techniques in the scribal profession, the traditional numerical notations had to be translated into the new notations. Scribes really did perform such exercises, as is evidenced by the fragments of the tablets shown in figures 125-126* (qui montrent les photographies d'une table métrologique des longueurs et d'une table métrologique des poids) [Nissen et al. 1993, p. 143].

Cette hypothèse, comme celle de F. Thureau-Dangin, n'explique pas pourquoi les deux systèmes coexistent dans les exercices d'apprentissage paléo-babyloniens, ainsi d'ailleurs que dans toute la documentation mathématique. Sont-ils équivalents et interchangeables, ou bien ont-ils des fonctions différentes ? P. Damerow et R. Englund insistent sur la persistance de l'ancien système dans les pratiques administratives, pour finalement donner une explication analogue à celle de F. Thureau-Dangin :

> *Despite the obvious efficiency of this new notational system, it could not displace in daily administrative life the traditional way of recording measures. Even in the case of recording normal numbers, the traditional method with its specific signs for noting each new power of 60 was preferred. Although this traditional way of writing numbers was less elegant than place value notation, **it did allow a rapid identification of the relative size of any noted value***[31] [Nissen et al. 1993, p. 146-7].

---

[31] Les caractères gras (ajoutés ici) soulignent le point qui me paraît capital, comme on le verra par la suite.

Mais l'hypothèse la plus largement partagée aujourd'hui parmi les historiens des mathématiques cunéiformes est autre. Les tables métrologiques auraient pour fonction de convertir les mesures exprimées dans diverses unités en mesures exprimées dans une seule unité de base : les mesures de capacité seraient converties en sila3, les mesures de poids en ma-na, les mesures de surface en sar et les mesures de longueur en ninda[32]. Ainsi, dans la colonne de droite des tables métrologiques, seraient inscrites des mesures dans une même unité, le nom de l'unité en question ayant été omis. Mais alors pourquoi les nombres y sont-ils notés de façon différente de ceux de la colonne de gauche ? Pourquoi le nom des unités de mesure n'y est-il jamais mentionné ? Comment les scribes auraient-ils pu utiliser des nombres qui n'ont pas de valeur numérique spécifiée pour exprimer des mesures ?

Pour préciser la nature et la fonction des tables métrologiques, je propose de considérer non pas ces textes pris isolément, mais l'ensemble des textes d'apprentissage, dans l'ordre du cursus, et les relations qui existent entre eux. Je vais donc présenter rapidement le reste de la documentation scolaire, puis analyser de façon plus détaillée les premiers exercices d'apprentissage du calcul des surfaces.

5. LES TABLES NUMÉRIQUES : MULTIPLIER ET INVERSER

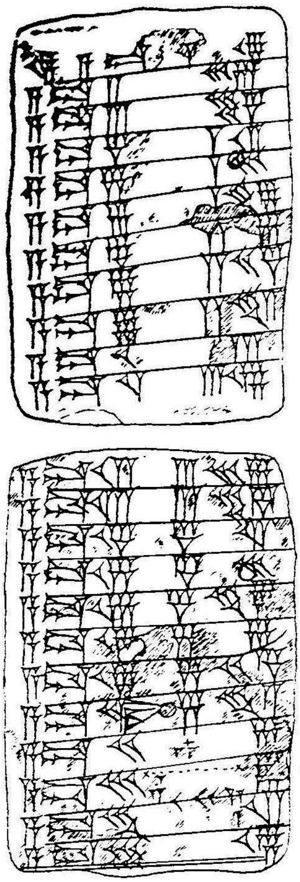
La troisième et dernière catégorie de textes appartenant à l'enseignement de niveau élémentaire est constituée des tables numériques. Elles représentent environ la moitié des tablettes mathématiques découvertes à Nippur. La reconstitution du cursus mathématique montre que les jeunes scribes commencent à étudier les tables numériques nettement plus tard que les listes et tables métrologiques [Proust 2007, § 5.3].

Les tables numériques de Nippur sont constituées essentiellement d'une série de 40 tables : une table d'inverses, 38 tables de multiplication, une table de carrés. On les trouve le plus souvent écrites isolément sur de

32 Voir par exemple [Neugebauer & Sachs 1984, p. 246], [Powell 1987-1990, p. 463 § I.2.h], [Friberg 1993, p. 402], [Nemet-Nejat 1995, p. 256], [Høyrup 2002a, p. 18], [Tanret 2002, p. 100].

33 Tablette de Nippur conservée à Iéna, copie [Hilprecht 1906, pl. 3].

HS 214a, type III[33] table de multiplication par 18 (ou table de « nombre principal » 18).



FACE	
18 a-ra$_2$ 1	18
a-ra$_2$ 2	36
a-ra$_2$ 3	54
a-ra$_2$ 4	1.12
a-ra$_2$ 5	1.30
a-ra$_2$ 6	1.48
a-ra$_2$ 7	2.6
a-ra$_2$ 8	2.24
a-ra$_2$ 9	2.42
a-ra$_2$ 10	3
a-ra$_2$ 11	3.18
REVERS	
a-ra$_2$ 12	3.36
a-ra$_2$ 13	3.54
a-ra$_2$ 14	4.12
a-ra$_2$ 15	4.30
a-ra$_2$ 16	4.48
a-ra$_2$ 17	5.6
a-ra$_2$ 18	5.24
a-ra$_2$ 20-1	5.42
a-ra$_2$ 20	6
a-ra$_2$ 30	9
a-ra$_2$ 40	12
a-ra$_2$ 50	15

NOTE : a-ra$_2$ signifie « fois ».

FIGURE 6. Table de multiplication

petites tablettes rectangulaires (de type III ; voir figure 6), mais il arrive qu'elles soient rassemblées, dans cet ordre, sur de grandes tablettes récapitulatives [34]. Il existe par ailleurs quelques rares exemplaires de tables de racines carrées et de tables de racines cubiques, à l'état fragmentaire.

Sans entrer dans une description détaillée des tables numériques [35], précisons quelques aspects importants dans le cadre du présent article. Une première remarque générale s'impose : dans les tables numériques, tous les nombres sont écrits en notation sexagésimale positionnelle, et il n'y est fait aucune mention d'unité de mesure.

La série des tables numériques ordinaires commence par la table des inverses des nombres abstraits usuels. Rappelons rapidement ce que sont les inverses dans la numération sexagésimale positionnelle cunéiforme. Deux nombres forment une paire d'inverses si leur produit s'écrit 1. Par exemple 2 et 30 forment une paire d'inverses car $2 \times 30 = 1$. Dans les tables d'inverses, cette paire apparaît en deux items : « l'inverse de 2 est 30 » (igi-2-gal$_2$-bi 30) et « l'inverse de 30 est 2 » (igi-30-gal$_2$-bi 2). Un nombre dont l'inverse peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres en base soixante est un « nombre sexagésimal régulier ». Ce sont des nombres dont la décomposition en produit de facteurs premiers est de la forme $2^n \times 3^p \times 5^q$ (en effet, 2, 3 et 5 sont les diviseurs premiers de la base). Les scribes babyloniens ne formulaient bien sûr pas ainsi leur définition des nombres sexagésimaux réguliers, mais ils savaient certainement les reconnaître. Du moins connaissaient-ils le stock usuel des nombres sexagésimaux réguliers (c'est-à-dire, à en juger par la documentation scolaire, tous ceux qui s'écrivent avec une ou deux positions sexagésimales). Notons également qu'une formule sumérienne spécifique, « igi–nu » (l'inverse de – il n'y a pas), désigne les nombres sexagésimaux non réguliers.

Les tables d'inverses sont écrites à peu près de la même façon à Nippur et ailleurs. Le tableau 3 suivant donne le texte des tables d'inverses de Nippur d'époque paléo-babylonienne :

---

34 La tablette Ni 2733, conservée à Istanbul, est une tablette de type I qui contient les 40 tables ; c'est l'ensemble de tables numériques le plus complet connu [Proust 2007, pl. V-VI].

35 On pourra se reporter à l'analyse détaillée, par O. Neugebauer, de toutes les tables numériques attestées en Mésopotamie à son époque [Proust 2007, § 5.2].

1-da 2/3-bi	40-am$_3$	de 1, ses 2/3, c'est	40
šu-ri-a-bi	30-am$_3$	sa moitié, c'est	30
igi-2-gal$_2$-bi	30-am$_3$	2, son inverse, c'est	30
igi-3-gal$_2$-bi	20	3, son inverse	20
igi-4-gal$_2$-bi	15	4, son inverse	15
igi-5-gal$_2$-bi	12	etc.	
igi-6-gal$_2$-bi	10		
igi-8-gal$_2$-bi	7.30		
igi-9-gal$_2$-bi	6.40		
igi-10-gal$_2$-bi	6		
igi-12-gal$_2$-bi	5		
igi-15-gal$_2$-bi	4		
igi-16-gal$_2$-bi	3.45		
igi-18-gal$_2$-bi	3.20		
igi-20-gal$_2$-bi	3		
igi-24-gal$_2$-bi	2.30		
igi-25-gal$_2$-bi	2.24		
igi-27-gal$_2$-bi	2.13.20		
igi-30-gal$_2$-bi	2		
igi-32-gal$_2$-bi	1.52.30		
igi-36-gal$_2$-bi	1.40		
igi-40-gal$_2$-bi	1.30		
igi-45-gal$_2$-bi	1.20		
igi-48-gal$_2$-bi	1.15		
igi-50-gal$_2$-bi	1.12		
igi-54-gal$_2$-bi	1.6.40		
igi-1-gal$_2$-bi	1		
igi-1.4-gal$_2$-bi	56.15		
igi-1.21-gal$_2$-bi	44.26.40		

TABLE 1. Table d'inverses

L'inversion est une opération fondamentale dans le calcul sexagésimal babylonien, car elle permet d'effectuer les divisions : pour diviser par un nombre, on multiplie par son inverse. Cette méthode impose que le diviseur soit un nombre sexagésimal régulier. Il s'agit d'une restriction qui ne gêne guère le pédagogue. Il la contourne en sélectionnant ses données :

dans les exercices de calcul attestés à Nippur la très grande majorité des nombres sexagésimaux sont réguliers.

La liste des 38 tables de multiplication est à comprendre dans ce cadre : à part la table de 7, elle ne contient que des tables dont le nombre principal est régulier. Ce sont, dans l'ordre où elles sont introduites dans le cursus, les tables dont les nombres principaux sont les suivants : 50 ; 45 ; 44.26.40 ; 40 ; 36 ; 30 ; 25 ; 24 ; 22.30 ; 20 ; 18 ; 16.40 ; 16 ; 15 ; 12.30 ; 12 ; 10 ; 9 ; 8.20 ; 8 ; 7.30 ; 7.12 ; 7 ; 6.40 ; 6 ; 5 ; 4.30 ; 4 ; 3.45 ; 3.20 ; 3 ; 2.30 ; 2.24 ; 2 ; 1.40 ; 1.30 ; 1.20 ; 1.15. Le nom sumérien de l'opération de multiplication des nombres positionnels, a-ra$_2$ (fois), est généralement noté dans les tables. Il est significatif que la liste des nombres principaux ne diffère que marginalement de celle que l'on obtient en classant tous les nombres qui interviennent dans la table d'inverses [36]. Ces remarques soulignent le fait que ces tables sont *à la fois* des tables de multiplication et de division.

La série des tables numériques ordinaires se termine par une table de carrés, qui se présentent comme des multiplications particulières :

2 fois 2 4
3 fois 3 9
etc.

Les tables numériques, on le voit, concernent essentiellement la multiplication et l'inversion (qui permet de transformer les divisions en multiplications). Il est important de souligner dès à présent le lien entre le fait que les tables numériques concernent le couple multiplication/inversion, et le fait que seuls des nombres positionnels y sont impliqués. L'explication en est simple : les nombres sexagésimaux positionnels sont écrits sans spécification de valeur pour les différentes positions ; or la multiplication est une opération qui, précisément, ne nécessite pas le repérage des positions. En revanche, aucune table d'addition ou de soustraction n'est attestée à Nippur, ni ailleurs ; plus généralement, ces opérations sont absentes du cursus élémentaire [37]. Les tables numériques montrent donc une étroite

36 Ce fait a souvent été observé [Proust 2007, p. 132].

37 L'absence de trace de l'apprentissage de l'addition et de la soustraction dans la documentation scolaire a été remarquée par K. Nemet-Nejat, qui suggère néanmoins une explication différente de celle que j'avance : *Addition and subtraction are seldom mentioned as part of the mathematical curriculum. The problem texts have words for addition*

association entre la multiplication et les nombres abstraits : le mode d'écriture des nombres est en relation avec les opérations qui leur sont appliquées.

L'apprentissage de l'écriture des valeurs numériques, des unités de mesures, des nombres abstraits, et des relations existant entre tous ces systèmes, occupe la totalité du temps consacré aux mathématiques dans les premières années de la formation dans les écoles de scribes. Il faut donc bien garder à l'esprit que le jeune scribe qui aborde les méthodes du calcul numérique, après avoir terminé le cursus élémentaire, est imprégné de ces listes et tables, et qu'il a mémorisé un stock important de résultats numériques élémentaires (inverses, produits, racines carrées et cubiques). Cela constitue le socle de son bagage mathématique. Comment ces outils sont-ils utilisés concrètement pour effectuer les calculs de surface et de volume ? L'analyse d'exercices scolaires apportera quelques éléments de réponse à la question.

6. SURFACES

Après l'apprentissage des listes et des tables, la formation mathématique des scribes se poursuit par une phase d'entraînement au calcul. Cette phase est attestée à Nippur par une collection d'une quarantaine de tablettes d'exercices à l'aspect typique : il s'agit de petites tablettes en forme de coussinet, dont le revers est fortement bombé, souvent anépigraphe ; elles sont en général carrées, mais parfois aussi de forme lenticulaire (tablettes dites de type IV par les assyriologues ; voir la copie de la figure 7 un peu plus loin). Les 40 tablettes mathématiques de type IV

[...] *and subtraction* [...], *and these operations are both cited and performed in the tablets. To date, however, no evidence has been found for how the fact families of addition and subtraction were learned, a situation due either to the accidents of discovery or to the role of oral education* [Nemet-Nejat 1995, p. 241]. Si l'addition n'est pas l'objet d'un enseignement particulier, elle est largement attestée dans les pratiques de comptabilité : les tablettes administratives sumériennes et paléo-babyloniennes se terminent généralement par la somme (šu-nigin) des diverses denrées enregistrées. Notons que cette addition porte sur des quantités de biens, et pas sur des nombres abstraits.

de Nippur connues [38] se répartissent selon le contenu de la façon suivante (je les ai classées en cinq groupes, auxquels je me réfèrerai par la suite ; j'ai choisi pour les groupes 1 à 5 un ordre qui me paraît logique sur le plan pédagogique, mais on ne trouve pas dans ces tablettes des éléments tels que lignes d'appel, colophons, références à des textes maîtres, qui permettraient d'assurer que cet ordre correspond au cursus des scribes).

1) Carré d'un nombre : 6 tablettes
2) Multiplications : 9 tablettes
3) Inversions : 8 tablettes
4) Surface d'un carré : 6 tablettes
5) Surface d'une figure : 4 tablettes

Ajoutons à cette liste 4 tablettes de contenu non identifié et 3 tablettes atypiques contenant des listes métrologiques.

On le voit sur cette répartition, ces exercices sont consacrés essentiellement à la multiplication, à l'inversion et au calcul des surfaces.

Le point qui nous intéresse maintenant est d'examiner en détail les contextes dans lesquels interviennent les nombres abstraits et les mesures. Dans les trois premiers groupes (carré d'un nombre, multiplications, inversions), on trouve exclusivement des nombres abstraits, et aucune mention d'unités de mesure n'y figure. Les unités de mesure apparaissent en revanche dans les exercices de calcul de surface de carrés (groupe 4). Je présenterai dans ce qui suit un exemplaire de chacun des groupes 1 et 4, pour mettre en évidence la façon dont les maîtres des écoles de Nippur distinguent soigneusement les différentes numérations en traitant séparément le carré d'un nombre abstrait et la surface d'un carré.

Calcul du carré d'un nombre

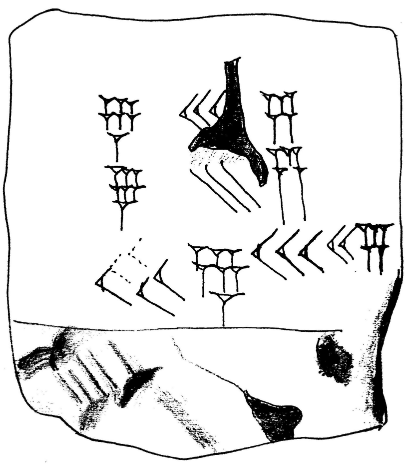
Les six tablettes consacrées au carré d'un nombre (groupe 1) sont tout à fait similaires, tant dans la forme de la tablette, que dans le contenu et la disposition des nombres. Comme on le verra par la suite, ces exercices

38 J'ai pris en compte celles qui ont été exhumées par la *Babylonian Expedition*, soit 30 exemplaires, mais aussi celles qui sont issues des fouilles ultérieures, soit 10 exemplaires.

préparent aux calculs de surface. Dans ces six tablettes, les carrés calculés sont, respectivement, ceux de 4.50 ; 5.15 ; 7.5 ; 7.35 ; 7.36 ; 44.26.40. Considérons par exemple la tablette Ni 10246, conservée à Istanbul, qui contient le carré de 7.35 [Proust 2007, p. 168, pl. XLIX].

Ni 10246, face (revers anépigraphe)

COPIE



TRANSLIT.	RECONSTITUTION DES ÉTAPES POSSIBLES DU CALCUL			
7.35		7	35	
7.35		7	35	
	5 × 5			25
	5 × 30		2	30
	5 × 7		35	
	30 × 5		2	30
	30 × 30		15	
	30 × 7	3	30	
	7 × 5		35	
	7 × 30	3	30	
	7 × 7	49		
57.30.25		57	30	25

FIGURE 7. Carré d'un nombre

On constate que les deux facteurs à multiplier (7.35 et 7.35) sont notés sur la tablette, ainsi que le produit (57.30.25). Mais aucune étape intermédiaire n'a laissé de trace. Cette catégorie d'exercice, rappelons-le, intervient dans le cursus juste après l'apprentissage des tables de multiplication, et on peut penser qu'elle s'appuie sur une bonne connaissance d'un vaste répertoire de produits élémentaires. Cependant, il s'adresse à des novices : peuvent-ils effectuer cette multiplication sans calcul d'appui (par exemple ceux qui sont placés dans la partie de droite de la figure 7 ci-dessus, ou une partie d'entre eux) ? Il est difficile de répondre à cette question. On peut toutefois remarquer que l'absence de calcul intermédiaire dans les multiplications est générale dans la documentation cunéiforme. C'est le principal argument qui a conduit plusieurs historiens à faire l'hypothèse de l'existence d'un instrument de calcul matériel [Høyrup 2002b]. D'autres traces de cet « abaque » antique peuvent être repérées dans les erreurs de calcul, la terminologie des nombres, les listes lexicales [Proust 2000]. Il est même possible que la notation positionnelle elle-même ait pour origine cet abaque, dont les états auraient été transposés sous forme écrite [39].

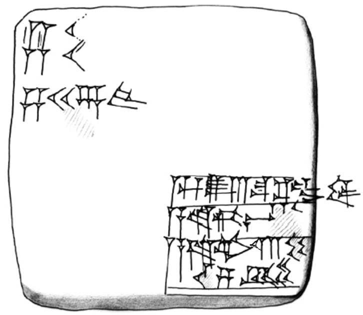
Pour résumer, cet exercice et ceux du même groupe mettent en évidence plusieurs aspects importants de la multiplication, telle qu'elle est enseignée au début du niveau avancé : elle opère sur les nombres abstraits ; on peut penser qu'elle s'appuie sur les produits élémentaires donnés par les tables numériques et mémorisés ; les étapes intermédiaires ne sont pas écrites ; d'autres indices montrent de surcroît que la multiplication était probablement effectuée hors de la tablette, sur un support matériel. Cette multiplication arithmétique (a-ra$_2$) est indissolublement liée à la notation positionnelle. Mais si la multiplication arithmétique n'opère que sur des nombres abstraits, comment les scribes pouvaient-ils « multiplier » des mesures de longueur et de largeur pour obtenir une surface ? C'est à cette question que répondent les exercices de calcul de la surface d'un carré qui sont présentés dans ce qui suit.

Surface d'un carré

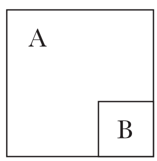
Les six tablettes de Nippur contenant des calculs de surfaces de carrés (groupe 4) ont un aspect tout à fait similaire. Je présenterai ici en détail deux de ces tablettes : l'une est conservée à Philadelphie (UM 29-15-192) ; l'autre est conservée à Istanbul (Ni 18). Pour les quatre autres tablettes de ce groupe, on pourra se reporter aux articles où elles sont publiées et commentées [Neugebauer & Sachs 1984].

39 La date d'apparition de la numération positionnelle est l'objet de débats. Certains auteurs pensent que des prémisses sont attestés dès l'époque sargonique (entre 2350 et 2200) [Foster & Robson 2004], [Powell 1976], [Whiting 1984], d'autres que la numération positionnelle est plus tardive [Friberg 2005].

UM 29-15-192 [40] Ni 18 [41]



La première caractéristique de ces textes est visuelle : ils sont répartis en deux zones diamétralement opposées et séparées par un large espace. L'une est située dans le coin supérieur gauche, l'autre dans le coin inférieur droit. Dans ce qui suit, je désignerai ces zones respectivement par A et par B.



Dans la zone A, le texte est composé uniquement de nombres abstraits ; il est tout à fait analogue aux exercices de calcul du carré d'un nombre présenté dans le paragraphe précédent (par exemple Ni 10246). Dans la zone B, le texte est un petit problème rédigé en sumérien : on y lit les mesures des côtés d'un carré, une question, « quelle est la surface ? », et la réponse. La tablette UM 29-15-192 est cassée, mais le texte peut aisément être reconstitué par comparaison avec les autres exemplaires analogues ; les données de ce texte sont simples et le texte ne comporte pas d'erreur ; il se prête donc bien à une analyse.

40 Tablette de Nippur, conservée à Philadelphie [Neugebauer & Sachs 1984, p. 251].

41 Tablette de Nippur, conservée à Istanbul [Proust 2007, p. 193 ; pl. I].

UM 29-15-192

Translittération	Traduction
[20]	20
20	20
6.40	6.40
2(diš) šu-si ib$_2$-sig$_8$	2 šu-si le côté (du carré)
a-ša$_3$-bi en-nam	Quelle est sa surface ?
a-ša$_3$-bi igi-3-gal$_2$ še-kam	Sa surface est 1/3 še

L'énoncé placé dans la zone B donne la mesure du côté d'un carré : 2 šu-si. L'ordre de grandeur est celui d'un sceau (environ 3 cm). Rappelons que le scribe connaissait par cœur ses tables métrologiques. Or, si on consulte la table métrologique des longueurs (voir annexe B), on lit :

2(diš) šu-si 20

Le petit calcul placé dans la zone A donne précisément le carré de 20 :

$$20 \times 20 = 6.40$$

Consultons maintenant la table métrologique des surfaces, dans la partie qui se rapporte à des mesures de l'ordre de grandeur d'un sceau : 6.40 correspond à une surface de 1/3 še. C'est justement cette réponse qui est donnée dans la dernière ligne du texte B.

Arrêtons-nous un instant sur les relations entre les zones A et B du texte écrit sur cette tablette. Les données du petit problème placé dans la zone B sont transformées en nombres placés dans la zone A ; puis le nombre qui résulte du calcul est transformé de nouveau et fournit la réponse placée dans la zone B à la fin du texte. Ces transformations sont exactement celles qui sont données par les tables métrologiques (table des longueurs, puis table des surfaces). La correspondance entre les deux zones de ce texte et la correspondance entre les deux colonnes des tables métrologiques sont donc de même nature. Notre tablette, ainsi que les autres du même groupe, apporte ainsi des éléments de réponse au problème de la fonction des tables métrologiques, posé un peu plus haut (§ 4). Elle montre que les unités de mesure sont associées à certains types de nombres (ceux de la zone B). La zone A, quant à elle, correspond à un moment du calcul particulier, auquel les scribes ont été initiés par le biais des calculs de carré arithmétique présentés ci-dessus, et dont les outils sont spécifiques : il s'agit de l'outil des tables numériques qui, rappelons-le, ne font jamais mention des unités de mesures ; il s'agit peut-être aussi de manipulations auxiliaires sur abaque. Autrement dit, les nombres de la zone A sont ceux des tables numériques, c'est-à-dire des instruments de calcul pour la multiplication et la division. Ce ne sont pas des mesures dont les unités ont été omises. Il en est de même pour les nombres de la colonne de droite des tables métrologiques puisque, comme cela vient d'être souligné, la correspondance entre les deux zones de notre tablette est de même nature que la correspondance entre les deux colonnes des tables métrologiques. Dans ces conditions, les tables métrologiques ne sont pas des tables de conversion de mesures exprimées dans certaines unités en mesures exprimées dans d'autres unités ; ce sont des tables de correspondance permettant de transformer des mesures en nombres abstraits sur lesquels opère la multiplication arithmétique. Cette analyse explique pourquoi les deux types de notation coexistent dans les textes mathématiques : ils correspondent à deux moments distincts du calcul.

Résumons le procédé de calcul de la tablette UM 29-15-192 tel qu'il vient d'être reconstitué. Il se décompose en trois étapes, doublées d'une évaluation de l'ordre de grandeur, selon le schéma suivant, que l'on retrouvera de façon récurrente (dans ce qui suit, la flèche représente une lecture de table métrologique).

1. transformation de la mesure de longueur 2 šu-si en nombre abstrait :

2 šu-si → 20 (table métrologique des longueurs ; ordre de grandeur : un sceau)

2. multiplication des nombres abstraits :

$20 \times 20 = 6.40$ (table de multiplication par 20)

3. transformation du produit en mesure de surface :

6.40 → 1/3 še (table métrologique des surfaces ; ordre de grandeur : un sceau)

La mesure de la surface est 1/3 še.

La tablette Ni 18 montre le même mécanisme et de surcroît apporte un éclairage intéressant car elle contient des erreurs.

Ni 18

Translittération	Traduction
2.10	2.10
2.10	2.10
4.26$^{\text{sic}}$.40	4.26$^{\text{sic}}$.40
1/3 kuš$_3$ 3 šu-si ib$_2$-si$_8$	1/3 kuš$_3$ 3 šu-si le côté (du carré)
a-ša$_3$-bi [en-nam]	Quelle est sa surface ?
a-ša$_3$-bi 13 še igi-4$^{\text{sic}}$ gal$_2$ še-kam	Sa surface est 1/3 še 1/4$^{\text{sic}}$

Le calcul est analogue au précédent.

1. transformation de la mesure du côté en nombre abstrait :

1/3 kuš$_3$ → 1.40

3 šu-si → 30

1/3 kuš$_3$ 3 šu-si → 2.10 (table métrologique des longueurs ; ordre de grandeur : une brique)

2. multiplication des nombres abstraits :

2.10 × 2.10 = 4.26$^{\text{sic}}$.40 (le scribe a fait une erreur ; il obtient 4.26.40 au lieu de 4.41.40) [42]

3. transformation du produit en mesure de surface :

4.20 → 13 še

6.40 → 1/3 še (le scribe fait une deuxième erreur légère ; il obtient 1/4 au lieu de 1/3)

La mesure de la surface est 13 še 1/4$^{\text{sic}}$ še.

L'erreur sur la multiplication du scribe trahit des opérations de correspondance : c'est bien le produit (4.26.40) qu'il a obtenu qui a été transformé (presque correctement) en mesure de surface (13 še 1/4$^{\text{sic}}$ še).

42 Cette erreur de calcul n'a pas d'explication évidente. Il ne s'agit pas, comme souvent, d'une erreur de positionnement de l'un des produits partiels. Il semble que le scribe ait remplacé, dans un des produits en position centrale, un 20 par un 5, pour une raison obscure. On peut imaginer aussi que, la séquence 4.26.40 étant fréquente dans les tables numériques mémorisées, elle a pu se substituer inconsciemment au bon résultat.

L'aspect remarquable et significatif dans ces six exercices arithmético-métrologiques est leur disposition, qui sépare physiquement ce qui relève du calcul numérique et ce qui relève des mesures de la figure carrée [43]. Cette disposition semble témoigner de l'insistance avec laquelle les maîtres distinguent ces deux moments du calcul de surface.

L'ensemble de tous ces petits exercices de Nippur, particulièrement ceux des groupes 1 et 4 (multiplications et surfaces) met en évidence l'existence de deux sortes de « multiplications ». L'une est une opération arithmétique (a-ra$_2$) qui opère sur les nombres abstraits. L'autre associe une surface à la donnée de deux mesures de longueur : c'est une sorte de « produit métrologique ».

Les exercices scolaires de Nippur éclairent donc la nature des tables métrologiques et la façon dont elles permettent le basculement d'un système numérique à l'autre dans le calcul des surfaces. Mais la documentation devient plus lacunaire en ce qui concerne la suite du cursus. Cependant, la présence d'une deuxième table métrologique de mesures linéaires (table des hauteurs) et l'importance des problèmes de volume dans les textes d'érudition, notamment à Nippur, laissent penser que le calcul des volumes devait, tout comme celui des surfaces, occuper une place spécifique dans le cursus avancé. Pour proposer des hypothèses concernant cet apprentissage, je m'appuierai sur quelques textes de Nippur et sur des documents d'autres provenances. En montrant comment les méthodes mises en œuvre dans le calcul des surfaces peuvent s'étendre au calcul des volumes et des poids, on verra que les tables métrologiques constituent un instrument puissant et polyvalent.

7. VOLUMES ET POIDS

Il n'existe apparemment pas de liste ni de table métrologique pour les volumes. Absentes des textes d'apprentissage élémentaire, comment les unités de volumes sont-elles définies et exprimées ? F. Thureau-Dangin

---

43 Sans exclure qu'il ne s'agisse que d'une coïncidence, on ne peut qu'être frappé par le parallélisme entre le contenu du texte et sa mise en forme, toutes sortes de carrés se faisant écho : le texte décrivant un carré est enclos dans une section de forme carrée (zone B), elle-même inscrite sur une tablette carrée.

remarque dès 1900 que, dans les textes mathématiques, les unités de volume sont identiques aux unités de surface :

> Le SAR [...] correspond donc, comme mesure de volume, à un parallélépipède ayant [...] un SAR superficiaire de base [...] et une coudée de hauteur. [...] On peut en conclure que l'échelle des unités de volume ne diffère pas de celle des unités de surface du même nom [Thureau-Dangin 1900, p. 114] [44].

Il montre que le système des unités de volume est construit comme un décalque de celui des surfaces : chaque unité de volume est égale à l'unité de surface de même nom affectée d'une épaisseur constante d'un kuš$_3$ (50 cm).

un sar (volume) = un sar (surface) d'épaisseur un kuš$_3$
un GAN$_2$ (volume) = un GAN$_2$ (surface) d'épaisseur un kuš$_3$

Les rapports entre unités de volume sont donc les mêmes que les rapports entre unités de surface :

GAN$_2$ ←100– sar ←60– gin$_2$ ←180– še

Qu'en est-il des équivalents en nombres abstraits ?

Comme on l'a vu ci-dessus, les tables métrologiques des longueurs font correspondre, à chaque mesure, un nombre abstrait qui se déduit de la correspondance de base :

1 ninda → 1 (donc 1 kuš$_3$ → 5)

Or, comme indiqué plus haut, on trouve à Nippur et dans d'autres sites [45] une deuxième table métrologique des mesures linéaires, construite sur une autre correspondance :

1 ninda → 12 (donc 1 kuš$_3$ → 1)

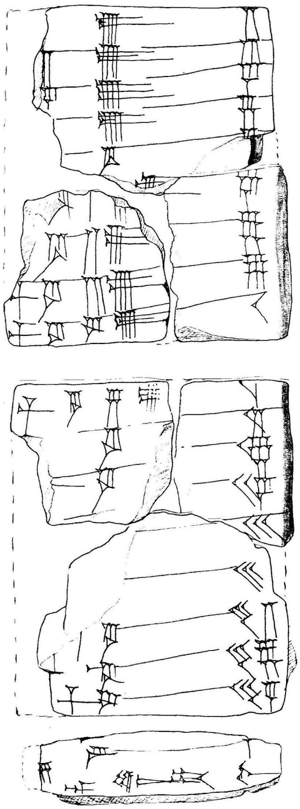
La figure 9 ci-dessous donne un exemple de telle table :

---

44 Ce point est repris et développé dans [Thureau-Dangin 1938, p. xvi-xvii].

45 Les tables de Nippur concernées sont Ni 4908, HS 243, Ni 3703+N 3901 + UM 29-15-483 (voir copie ci-après), UM 29-15-500, 2 N-T 530 ; ce type de table est également attesté à Ur, Kiš et Larsa [Friberg 2000, p. 156], [Friberg 1987–90, p. 543] ; cette table a été identifiée comme table des hauteurs pour la première fois par F. Thureau-Dangin dans la « table de Senkereh » [Thureau-Dangin 1930a].

Ni 3703 + N 3901 + UM 29-15-483, type III [46]



FACE	
[2(diš)] kuš$_3$	2
[3(diš)] kuš$_3$	3
4(diš) kuš$_3$	4
[5(diš)] kuš$_3$	5
[1/2] ninda	6
[1/2] ninda 1(diš) kuš$_3$	7
[1/2] ninda 2(diš) kuš$_3$	8
1/2 ninda 3(diš) kuš$_3$	9
1/2 ninda 4(diš) kuš$_3$	10
REVERS	
1/2 ninda 5(diš) kuš$_3$	11
[1(diš)] ninda	12
[1(diš) 1/2] ninda	18
[2(diš)] ninda	24
[2(diš) 1/2] ninda	30
[3(diš)] ninda	36
[3(diš) 1/2] ninda	42
[4(diš)] ninda	48
[4](diš) 1/2 ninda	54
TRANCHE SUPÉRIEURE	
5(diš) ninda	1
^{d}nisaba za$_3$-mi$_2$ (Gloire à Nisaba)	

FIGURE 8. Table métrologique des hauteurs.

La table de mesures linéaires supplémentaire avait été remarquée par F. Thureau-Dangin sur un grand prisme conservé au Louvre, AO 8865. C'est cette découverte qui lui a fourni la clé du calcul des volumes :

46 Tablette de Nippur, composée de fragments conservés à Istanbul et à Philadelphie, que j'ai pu raccorder grâce aux photos des tablettes de Philadelphie qu'E. Robson m'a généreusement communiquées [Proust 2007, p. 107 ss., pl. XVI]. On remarquera que cette tablette contient un extrait de table métrologique qui n'est pas choisi au hasard : les équivalents numériques parcourent un cycle sexagésimal complet, commençant avec le nombre 2 et se terminant avec le nombre 1.

> *Il s'ensuit que, dans le calcul d'un volume, un* NINDA *est exprimé par 1 et une coudée par 5 dans le sens horizontal, mais un* NINDA *est exprimé par 12 et une coudée par 1 dans le sens vertical. Cette double notation est enregistrée par la table dite de Senkereh, qui se divise en deux parties, dont la première, commençant par « 1 doigt 10 » et se terminant par « 2* danna *1 », était construite comme la table reproduite ci-dessus* [AO 8865]*, sur la relation de base « 1* NINDA *1 », tandis que la seconde partie, commençant par « 1 doigt 2 » et se terminant par « 2 danna 12 », était construite sur la relation de base « 1 coudée 1 »* [Thureau-Dangin 1938, p. xvii].

La table construite sur la correspondance 1 kuš$_3$ → 1 s'applique à des dimensions verticales : cette fonction est explicitement mentionnée dans des tablettes d'Ur. Par exemple, à la fin de la tablette UET 7-115, on trouve la formule suivante : nam-sukud-bur$_3$-še$_3$ (pour les hauteurs et profondeurs) [Friberg 1987–90, p. 543], [Friberg 2000, p. 154-6], d'où le nom adopté ici de « table des hauteurs » (table Lh).

Revenons à présent au problème des équivalents en nombres abstraits des unités de volume. On a vu que, par définition des unités de volumes :

1 sar (volume) = 1 sar (surface) d'épaisseur 1 kuš$_3$.

Or

1 sar (surface) → 1 (dans la table des surfaces)
1 kuš$_3$ → 1 (dans la table des hauteurs)

donc

1 sar (volume) → 1

Le sar (volume) correspond à 1, comme le sar (surface). Donc la table des surfaces peut être utilisée pour la correspondance des volumes en nombres abstraits. La table des surfaces est aussi une table des volumes, et il s'agit en fait d'une table des surfaces/volumes. Ceci explique évidemment l'absence apparente de table métrologique des volumes dans les archives scolaires. Ce point important avait été souligné par J. Friberg.

> *Metrological tables were almost indispensable as tools for the multiplication of measures. In order to compute the volume of a rectangular wall or excavation, the fastest way was a) to use table Ln* [ici, table des longueurs] *for two of the sides and table Lc* [ici, table des hauteurs] *for the remaining side, b) to perform two multiplications of sexagesimal numbers, and c) to return to standard volume measure by use of table A* [ici table des

surfaces]. *Table A can be used for area and volume measures alike, since an OB volume unit is an area unit <multiplied by 1 cubit!>* [Friberg 1987–90, p. 543].

Comment, en pratique, cette table des surfaces est-elle utilisée pour le calcul des volumes ? On n'a pas trouvé à Nippur d'exercice arithmético-métrologique analogue à ceux qui sont attestés pour les surfaces (groupe 4 introduit au début du paragraphe 6). En revanche, deux exercices proches sont attestés ailleurs : une tablette de Girsu [47] d'époque néo-sumérienne (fin du troisième millénaire avant notre ère) pour le calcul des volumes ; une tablette d'origine inconnue d'époque paléo-babylonienne [48] pour le calcul des poids. Grâce à elles, je voudrais montrer que la méthode utilisée à Nippur pour les surfaces est aussi mise en œuvre, dans d'autres écoles, pour les volumes et pour les poids.

Volume standard

La tablette de Girsu AOT 304 est une des rares tablettes scolaires connues d'époque néo-sumérienne. Elle contient une des plus anciennes attestations de la notation positionnelle des nombres sexagésimaux. L'exercice porte sur un calcul de volume exprimé en unités standard et en nombre de briques (on reviendra sur ce point plus loin). Le texte contient vraisemblablement des erreurs mais sa disposition est suffisamment claire pour permettre une interprétation.

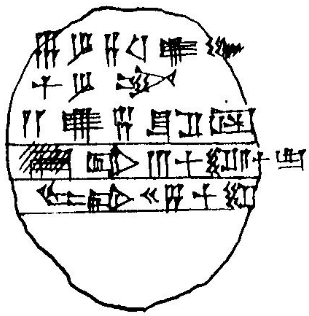
Les nombres du revers sont-ils en relation avec le texte de la face ? Sur la face, le texte donne trois dimensions : longueur (gid$_2$) ; hauteur (sukud) ; largeur (dagal). On imagine, et la suite le confirme, qu'il s'agit d'un prisme droit. La question posée dans l'exercice est omise, et on trouve deux réponses : le volume (sahar) exprimé en unités standard, puis en nombre de briques (sig$_4$). Si on convertit les mesures du prisme en nombres abstraits, on obtient :

---

47 AOT 304 : [Thureau-Dangin 1903, n° 413]. Cette tablette a été souvent commentée ; on pourra notamment se reporter aux analyses développées dans [Robson 1999, p. 66], qui contient une interprétation convaincante des erreurs de calcul du scribe, et [Friberg 2001, p. 92-93].

48 YBC 7284 : [Neugebauer & Sachs 1945, p. 97] et commentaires de [Friberg 2001, p. 118].

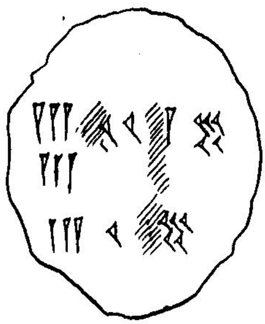
AOT 304 [Thureau-Dangin 1903, n° 413]



FACE
6(diš) ninda 4(diš) 1/3 kuš$_3$ gid$_2$
1/2 ninda sukud
2(diš) kuš$_3$ 5(diš) šu-si dagal

sahar-bi 3 1/2 sar 2(diš) 1/2 gin$_2$

sig$_4$-bi 25(diš) 1/2 sar



REVERS
6.31.50
3 10.50

TRADUCTION FACE
6 ninda 4 1/3 kuš$_3$: la longueur ;
1/2 ninda : la hauteur ;
2 kuš$_3$ cinq šu-si : la largeur ;
son volume est 3 1/2 sar 2 1/2 gin$_2$;
son nombre de briques est 25 1/2 sar.

FIGURE 9. Calcul de volume en nombre de briques

6 ninda 4 1/3 kuš$_3$ → 6.21.40 (lecture de la table L)
1/2 ninda → 6 (lecture de la table Lh)
2 kuš$_3$ 5 šu-si → 10.50 (lecture de la table L)

Ce ne sont pas exactement les nombres qu'on lit sur le revers, où on voit : 6.31.50 (au lieu de 6.21.40) ; 3 (au lieu de 6) ; et 10.50 qui est le résultat attendu. Il semble bien néanmoins que ces nombres du revers correspondent aux mesures de la face, avec des erreurs. La preuve en est que, si on poursuit le calcul avec les données erronées du scribe, on trouve bien les résultats qu'il a inscrits sur la face de la tablette. Les données de la face et du revers sont donc bien liées [Robson 1999, p. 66], [Friberg 2001, p. 92-93].

Intéressons-nous dans un premier temps au calcul de volume (le résultat en nombre de briques sera commenté plus loin). Les ressemblances entre cette tablette et les exercices arithmético-métrologiques de Nippur sont frappantes : sur la face (analogue à la « zone B » des tablettes de Nippur), on trouve un petit texte rédigé en sumérien, où les données sont des mesures, ainsi que la réponse ; sur le revers (analogue à la « zone A »), on trouve les nombres abstraits correspondants (selon le scribe), sans mention d'unité de mesure. Ces ressemblances laissent supposer que la méthode de calcul est la même : les données métrologiques sont transformées en nombres abstraits grâce aux tables métrologiques (table L pour les dimensions horizontales, table Lh pour la dimension verticale) comme indiqué ci-dessus. Le nombre abstrait qui correspond au volume est calculé en multipliant les dimensions horizontales pour obtenir la base, puis le produit obtenu par la hauteur [49]. Le produit final est ensuite transformé en mesure au moyen de la table des surfaces/volumes. Le tableau suivant (table 2) résume ces étapes, telles qu'on pourrait les attendre d'une part, et telles que le scribe semble les avoir effectivement réalisées d'autre part :

Mais une autre façon d'exprimer les unités de volume apparaît dans ce texte, qui fait référence à des briques. Je voudrais mettre en valeur, avec cet exemple, la souplesse et la polyvalence de l'outil des tables métrologiques, qui permet de résoudre simplement une grande variété de problèmes de changements d'unités.

Volume en nombre de briques

La brique intervient souvent dans les mathématiques cunéiformes, notamment dans les problèmes de construction, de planification du travail, de salaires. Les briques jouent aussi un rôle dans la métrologie, et certains modèles de briques standard sont utilisés comme des unités de volume [Neugebauer & Sachs 1945, p. 94], [Powell 1982, annexe II, p. 119]. D'une certaine façon, la brique est considérée comme une représentation du volume élémentaire, et appartient à ce titre au vocabulaire spécialisé

---

49 Le calcul des volumes en deux étapes, d'abord la base puis le produit de la base par la hauteur, est attesté dans de nombreux textes mathématiques. Voir notamment la tablette YBC 4607 [MCT, p. 91-92] qui contient une suite d'exercices simples de calcul de volumes, et un commentaire dans [Proust 2007, p. 211].

Calcul correct	Calcul du scribe (erreurs en gras)
transformation des mesures en nombres abstraits	
6 ninda 4 1/3 kuš$_3$ → 6.21.40 (table L)	6 ninda 4 1/3 kuš$_3$ → **6.31.50**
1/2 ninda → 6 (table Lh)	1/2 ninda → **3**
2 kuš$_3$ 5 šu-si → 10.50 (table L)	2 kuš$_3$ 5 šu-si → 10.50
multiplication des nombres abstraits	
6.21.40 × 10.50 = 1.8.56.31.40	6.31.50 × 10.50 = 1.10.43.3.20
1.8.56.31.40 × 6 = 6.53.28.20	1.10.43.3.20 × 3 = 3.32.9.10
transformation du produit en mesure de volume	
6.53.28.20 → 6 5/6 sar 3 1/3 gin$_2$ (table S)	3.32.9.10 → 3 1/2 sar 2 1/2 gin$_2$

Table 2. Calcul de volume dans AOT 304

des mathématiques [50]. Les briques qui servent d'unité dans le calcul des volumes ont des dimensions normalisées. La tablette « pédagogique » YBC 4607 citée au paragraphe précédent utilise tour à tour, de façon systématique, les cinq types de briques les plus courants dans les textes mathématiques. L'examen des textes de problème fait apparaître que les volumes peuvent être exprimés en nombre de briques d'un type normalisé, et que ces nombres sont exprimés au moyen d'unités de mesure de même nom que les unités de surface. L'équivalence 1 sar de briques = douze soixantaines de briques (720 briques) a été établie par F. Thureau-Dangin [51]. Ce sar de briques (sig$_4$) a des multiples et sous-multiples, qui ne sont autres que ceux du sar dans le système des surfaces :

1 gin$_2$ sig$_4$ = 12 briques
1 sar sig$_4$ = 12 soixantaines de briques = 720 briques
1 GAN$_2$ sig$_4$ = 100 sar de briques = 72000 briques

50 Par exemple, les différents types de briques apparaissent dans une liste lexicale, associée au vocabulaire du calcul (liste Proto-Izi, lignes 254-264). On trouve cette séquence dans la tablette Ni 3913, publiée dans [Proust 2007, p. 286, pl. XXI].

51 A la ligne 11 de cette tablette BM 85194, il apparaît explicitement le nombre « 12 šu-ši » (douze soixantaines) pour désigner un « sar » de briques. [Thureau-Dangin 1937, p. 82-83], [Neugebauer 1935-1937, I, p. 142].

Cette superposition des unités de surface et des nombres de briques est-elle un hasard ? Je vais montrer en quoi elle est en fait liée à l'utilisation des tables métrologiques. Le sar est un nombre de briques constant (720), qui ne dépend pas de leurs dimensions. En revanche, le nombre de briques dans un volume donné dépend de leurs dimensions. A chaque type de brique est associé un coefficient, appelé le *nalbanum*[52] en akkadien. Ce coefficient, exprimé dans les textes cunéiformes par un nombre sexagésimal positionnel, est généralement interprété par les historiens, à la suite de O. Neugebauer, comme le nombre de briques par unité de volume (plus exactement le nombre de sar-briques dans 1 sar-volume) [53].

Mais on peut aussi considérer le *nalbanum* d'une façon un peu différente si on fait appel seulement aux outils à la disposition des scribes, à savoir les tables métrologiques, et aux procédures attestées dans les textes scolaires. Revenons pour cela sur la tablette AOT 304. Comme le montre le tableau 2 ci-dessus, le produit des nombres abstraits (faux) qui correspondent aux trois dimensions est 3.32.9.10. Multiplions ce produit 3.32.9.10 par le *nalbanum* 7.12 (celui des briques ordinaires) : on obtient 25.27.30. Si on cherche à quelle mesure correspond ce nombre dans la table métrologique des surfaces, on trouve 25 1/2 sar (en valeur approchée), qui est précisément la valeur qui est inscrite sur la face de la tablette. Ce texte montre donc que la table des surfaces/volumes était très probablement utilisée pour les volumes en nombre de briques, et ce dès la fin du troisième millénaire. Autrement dit, le *nalbanum* peut être

---

52 Le terme akkadien nalbanum est attesté dans les textes mathématiques paléo-babyloniens ; pour une étude complète du mot et de ses occurrences, voir [Robson 1999, chapitre 4, en particulier p. 58-59]. Les formats de briques usuels apparaissent de façon systématique dans la tablette mathématique YBC 4607 mentionnée ci-dessus à propos du calcul des volumes standard.

53 [Neugebauer & Sachs 1945, p. 138] définit ainsi le *nalbanum* : « ... *the number of SAR (=12,0) of bricks of the different types in 1 volume-SAR* ». Il utilise ensuite cette définition dans une série de relations numériques entre nombres sexagésimaux positionnels. Par exemple, pour les briques de type 6, cette relation s'écrit $\alpha_6 = 0;5/v_6$, où α_6 est le nalbanum de la brique de type 6, et v_6 son volume. En remplaçant par les valeurs numériques correspondantes, il obtient la relation : 4,48 = 0 ;5/0 ;0,1,2,30. Il est important de noter que c'est à cause de la définition du *nalbanum* posée par O. Neugebauer que celui-ci est conduit à fixer un ordre de grandeur aux nombres sexagésimaux positionnels.

compris (au sens des scribes) comme le coefficient qui permet d'utiliser la table métrologique des surfaces/volumes pour déterminer les volumes en nombre de briques.

J. Friberg avait déjà montré que, grâce à l'existence d'une table métrologique des hauteurs (ou à l'utilisation d'un coefficient 12), la table des surfaces pouvait être utilisée comme table des volumes. Mais le point qui apparaît clairement ici est que grâce au *nalbanum* la même table peut aussi être utilisée pour exprimer les volumes en nombres de briques de n'importe quel type. La table des surfaces/volumes constitue ainsi un outil polyvalent dès lors qu'elle est articulée avec un jeu de coefficients convenable. Le même outil (les tables métrologiques) peut être utilisé de façon unifiée, selon la même méthode simple, pour une vaste classe de problèmes. Le calcul des poids fait-il partie de cette classe de problèmes ?

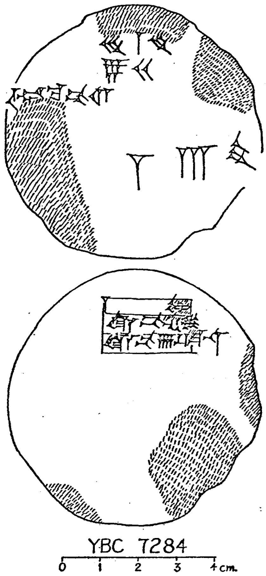
Poids

Pour répondre à cette question, tournons-nous vers une autre tablette scolaire, YBC 7284, dont on ignore malheureusement l'origine. La tablette est de type IV lenticulaire, et contient un exercice arithmético-métrologique analogue à ceux de Nippur (voir fig. 10 ci-dessus).

Sur le revers [54] (analogue à la « zone B »), un petit texte est rédigé en sumérien. Les données sont exprimées de façon brève : « 1 brique » (1 sig$_4$) ; on suppose qu'il s'agit de la brique ordinaire, de dimensions standard, utilisée fréquemment par ailleurs pour évaluer les volumes (voir ci-dessus). Les dimensions d'une telle brique sont données dans plusieurs textes (dont YBC 4607 déjà cité) ; son volume (2 1/12 še) correspond au nombre 41.40, qu'on trouve précisément écrit sur la face (analogue à la « zone A »). Il y a donc ici aussi entre les deux zones une correspondance qui reproduit celle des tables métrologiques. Par ailleurs, toujours sur la face, une indication est écrite en retrait : « son coefficient 12 » (igi-gub-ba-bi 12). Il s'agit du coefficient de la brique, qu'on trouve par ailleurs

54 Par analogie avec le texte précédent, on peut penser que l'indentification de la face et du revers faite par Neugebauer & Sachs [1945, p. 97] est à reconsidérer.

YBC 7284 [MCT, p. 97]



TRANSLITTÉRATION	TRADUCTION
FACE	
41.40	41.40
8.20	8.20
igi-gub-ba-bi 12	(son coefficient 12)
1.3.40 (?)	
REVERS	
1 sig$_4$	1 brique
ki-la$_2$-bi en-nam	son poids combien ?
ki-la$_2$-bi 8 1/3 ma-na	son poids 8 1/3 ma-na

FIGURE 10.

dans des listes de coefficients [55]. Or, si on multiplie le nombre correspondant au volume (41.40) par 12 (le coefficient), on obtient le nombre 8.20 qui, selon la table des poids, correspond à 8 1/3 ma-na. Ce poids (ki-la$_2$) est précisément celui qui est inscrit dans la zone B [56]. Le procédé de calcul est donc en tous points identique à celui qu'on trouve dans les exercices arithmético-métrologiques de surface ou de volume :

> transformation du volume en nombre abstrait
> 1 sig$_4$ (volume 2 1/12 še) → 41.40 (table S)
> multiplication des nombres abstraits
> 41.40 × 12 = 8.20

55 À propos des listes de coefficients, voir [Robson 1999], et en particulier les listes de coefficients pour le poids des briques, p. 62. Un coefficient de 12 représente une masse volumique de 12×60^2 ma-na par sar (volume), soit une densité de 1,2. Cela peut paraître faible pour des briques ; peut-être s'agit-il de briques d'argile mélangée avec de la paille.

56 Le nombre 1.3.40 du revers ne s'explique pas. Peut-être s'agit-il du reste d'un texte antérieur mal effacé.

transformation du produit en mesure de poids
8.20 → 8 1/3 ma-na (table P)

Ainsi, la table des poids peut, grâce à un jeu de coefficients dépendant de la densité des matériaux, être utilisée pour calculer des poids à partir des volumes (et inversement). Pour déterminer le poids d'un objet, il suffit de multiplier le nombre abstrait représentant son volume par un coefficient caractéristique du matériau dont il est constitué, nombre appelé igi-gub et donné dans des listes de coefficients attestés dans plusieurs sites de Mésopotamie ; le poids de l'objet s'en déduit par lecture de la table des poids (doublée d'une évaluation mentale de l'ordre de grandeur). Remarquons que, dans ce mécanisme, le coefficient multiplicatif igi-gub est un nombre abstrait dont le calculateur ancien n'avait pas besoin de spécifier la valeur [57]. Comme pour le calcul des volumes, j'insisterai sur le point qui me paraît important ici : le procédé de calcul est fondamentalement le même que celui qu'on peut mettre en évidence à Nippur pour le calcul des surfaces.

CONCLUSION

Résumons les traits principaux de l'apprentissage des mathématiques tel qu'on peut le reconstituer grâce à la documentation de Nippur. L'enseignement est centré dans un premier niveau sur la mémorisation des systèmes numériques et métrologiques, introduits de façon méthodique par des listes de mesures, puis des tables de correspondance entre ces mesures et les nombres abstraits. Ensuite un vaste répertoire d'opérations élémentaires sur les nombres abstraits (multiplications et inversions), rassemblé dans les tables numériques, est également mémorisé. Dans un deuxième niveau, l'apprentissage est centré sur les techniques de la multiplication et de l'inversion, opérations qui agissent exclusivement sur des nombres abstraits. L'addition est absente de cette phase de l'enseignement, et plus

---

57 Dans ce cas, il me semble que le calculateur moderne devrait pouvoir se passer aussi de la détermination des ordres de grandeur. Cela lui éviterait de laborieuses et inutiles manipulations de zéros (dans les publications concernant les poids et les volumes, le nombre de zéros additionnels peut être très impressionnant).

généralement du cursus mathématique. Les tables métrologiques et numériques sont des outils fondamentaux du calcul des surfaces : les mesures des côtés sont transformées en nombres abstraits au moyen des tables métrologiques de longueur ; les nombres abstraits sont multipliés entre eux grâce aux tables numériques et probablement à un auxiliaire de calcul matériel ; le produit obtenu est transformé en mesure de surface grâce aux tables métrologiques de surface et à un contrôle mental des ordres de grandeur. Les nombres abstraits et les mesures sont soigneusement séparés, notamment par leur disposition sur les tablettes. Bien que la documentation de Nippur soit moins explicite sur ce point, on peut penser que le calcul des volumes suit le même schéma (l'existence de la table des hauteurs en témoigne, ainsi que des sources provenant d'autres sites que Nippur). Enfin, le calcul des volumes en nombre de briques et le calcul des poids devait s'appuyer également sur les tables métrologiques grâce à l'utilisation d'un système de coefficients exprimés en nombres abstraits (*nalbanum*, igi-gub) conçu dans le but de rendre ces tables polyvalentes.

Plusieurs éléments de cette description des méthodes de calcul des surfaces et des volumes étaient connus avant l'étude systématique des archives scolaires : l'existence de la table des hauteurs et son lien avec le calcul des volumes [Thureau-Dangin 1938, p. xvii], le fait que la table métrologique des surfaces est aussi une table des volumes [Friberg 1987–90, p. 543], le fait que des briques normalisées peuvent être des unités de mesure de volume [Neugebauer & Sachs 1945, p. 94], [Powell 1982, annexe II, p. 119]. Le principe du basculement d'un domaine numérique (celui des « nombres concrets ») à l'autre (celui des « nombres abstraits ») avait été d'une certaine façon perçu dès 1930 par F. Thureau-Dangin, mais la documentation alors connue ne lui avait pas permis d'établir un lien avec les tables métrologiques. La citation suivante en témoigne, bien qu'elle se rapporte à un contexte différent de celui dont il est question dans cet article puisqu'il s'agit d'un texte tardif (fin du premier millénaire avant notre ère).

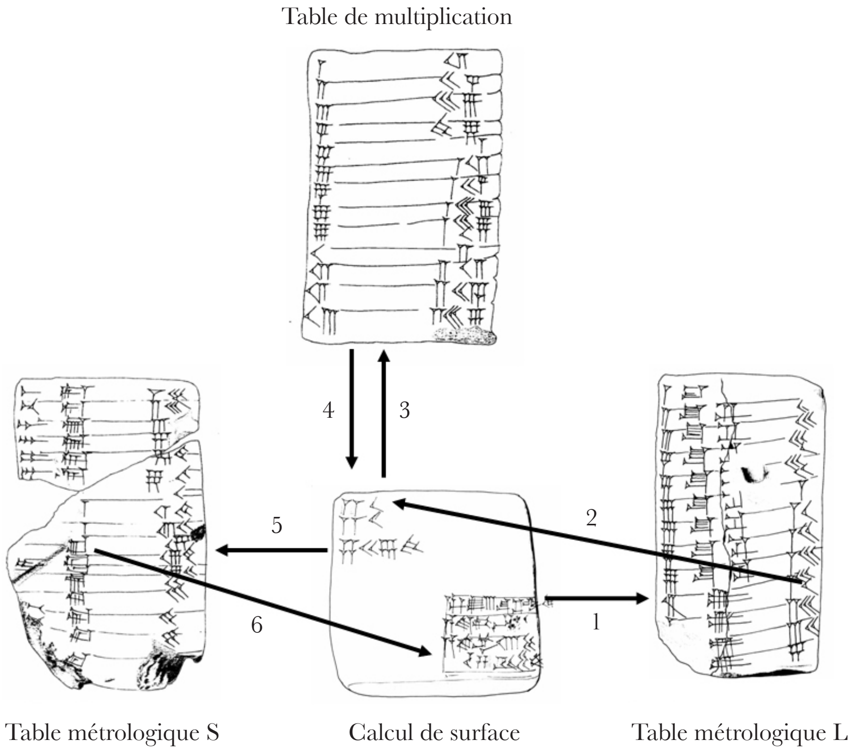
> *Ce système très abstrait, qui ne distinguait pas entre les entiers et les fractions, qui ignorait l'ordre de grandeur des nombres, servait aux opérations arithmétiques, notamment aux « igi-arê », c'est-à-dire aux « divisions et multiplications » qu'il facilitait grandement. La tablette dite de l'Esagil illustre parfaitement la méthode employée par les Babyloniens et*

> *montre comment, dans leurs calculs, ils passaient du concret à l'abstrait, puis revenaient de l'abstrait au concret.* [...]
>
> *Les données concrètes de chaque problème sont traduites en nombres abstraits, sans ordre de grandeur déterminé, et c'est sur ces nombres qu'opère le calculateur. Il commence par multiplier les deux nombres l'un par l'autre.* [...] *La dernière opération consiste à passer de l'abstrait au concret* [Thureau-Dangin 1930b, p. 117].

Quelques points importants restaient pourtant à éclaircir : la fonction exacte des tables métrologiques, la raison pour laquelle plusieurs systèmes numériques coexistent dans les textes mathématiques, le contexte précis d'utilisation des unités de mesure d'une part, et des nombres positionnels d'autre part, les pratiques de calcul au moyen de nombres positionnels sans valeur spécifiée. L'intérêt de la documentation de Nippur est d'apporter des réponses à ces questions en éclairant les relations entre différents éléments (les mesures, les nombres abstraits, la multiplication arithmétique, le calcul des surfaces et des volumes). Elle permet ainsi de mettre au jour un système unique, simple et cohérent. Les tables métrologiques, en établissant une correspondance entre mesures et nombres abstraits, sont un élément clef de ce dispositif. La mise en relation des différents éléments du puzzle identifiés par F. Thureau-Dangin, O. Neugebauer et leurs successeurs, complétés ici par quelques pièces nouvelles, composent une image cohérente des bases des mathématiques à Nippur. La figure 11 représente les principaux textes mathématiques d'apprentissage de Nippur et des relations qui les organisent.

Les textes scolaires de Nippur sont porteurs d'une conception des nombres singulière, où les fonctions de quantification et de calcul sont dissociées. D'une part, des systèmes numériques, de principe additif, servent à quantifier. Les valeurs numériques de ces systèmes sont représentées par des signes suivis d'une unité de mesure ou d'éléments dénombrés (ce sont les « nombres concrets » de F. Thureau-Dangin [58]). Ces notations sont utilisées dans les textes mathématiques pour des usages bien précis, mais aussi dans les textes administratifs (on les trouve par exemple dans les exercices scolaires de comptabilité dits « modèles de contrat »). Elles sont adaptées à l'addition, largement attestée dans les

58 [Thureau-Dangin 1930b].



1-2 : Transformation des mesures de longueur en nombres abstraits
3-4 : Multiplication arithmétique
5-6 : Transformation du produit en mesure de surface

FIGURE 11. Calcul des surfaces à Nippur [Proust 2007, p. 251]

textes administratifs où figurent généralement les sommes partielles ou totales (šu-nigin) des biens enregistrés. D'autre part, le système sexagésimal positionnel est, lui, réservé à certains calculs : c'est un instrument conçu pour la multiplication arithmétique (a-ra$_2$) et l'inversion. C'est la raison pour laquelle l'absence de valeur spécifiée dans l'écriture des nombres positionnels non seulement n'est pas un défaut ou une lacune, mais en est une caractéristique fondamentale, qui leur confère une remarquable puissance de calcul. Les notations modernes (translittération, ou traduction, ou commentaires), lorsqu'elles restituent des marques telles que des zéros en position finale, peuvent masquer ces propriétés. La question des pratiques de calcul auxquelles renvoient les procédures mathématiques faisant intervenir des additions et des soustractions, notamment celles qui sont impliquées dans les problèmes quadratiques, reste néanmoins posée. Cette question s'inscrit dans un programme de recherche auquel je me consacre actuellement.

Finalement, c'est principalement par leur cohérence d'ensemble que les textes mathématiques élémentaires de Nippur apportent un éclairage nouveau sur la conception des nombres et les pratiques de calcul enseignées dans les écoles de scribes. Cet ensemble fortement structuré ne témoigne pas seulement du cursus scolaire de Nippur. Il montre comment l'outil des tables métrologiques est construit sur quelques principes simples, qui sont probablement les mêmes pour les surfaces, les volumes, les nombres de briques, les poids. Cet outil unique est capable de résoudre un large spectre de problèmes : changements de dimension dans le calcul des surfaces et des volumes, conversions entre divers modes d'expression des volumes, articulation des volumes et des poids, problèmes mettant en jeu des coefficients. Par leur organisation même, les textes scolaires de Nippur constituent un système, une forme de théorie du calcul des surfaces et des volumes.

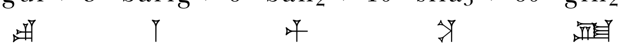
ANNEXE A

SYSTÈMES MÉTROLOGIQUES ET NUMÉRIQUES

Capacités

(1 sila$_3$ $\cong$ 1 litre)

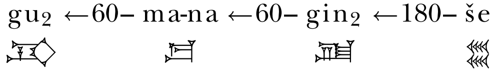
gur ←5– barig ←6– ban$_2$ ←10– sila$_3$ ←60– gin$_2$



Poids

(1 gu$_2$ $\cong$ 30 kg)

gu$_2$ ←60– ma-na ←60– gin$_2$ ←180– še



Surfaces

(1 sar ≅ 36 m^2)

GAN$_2$ ←100– sar

Longueurs

(1 ninda ≅ 6 m)

danna ←30– UŠ ←60– ninda ←12– kuš$_3$ ←30– šu-si

Système numérico-métrologique des *ban$_2$* ***et*** *barig*

1(ban$_2$)	1(barig)
2(ban$_2$)	2(barig)
3(ban$_2$)	3(barig)
4(ban$_2$)	4(barig)
5(ban$_2$)	

Système S

šar$_2$-gal ←6– šar'u ←10– šar$_2$ ←6– geš'u ←10– geš$_2$ ←6– u ←10– aš

216 000	36 000	3 600	600	60	10	1

Système G

šar$_2$-gal ←6– šar'u ←10– šar$_2$ ←6– bur'u ←10– bur$_3$ ←3– eše$_3$ ←6–

64 800	10 800	1 080	180	18	6

iku ←2– ubu

1	1/2

Fractions usuelles

1/3, 1/2, 2/3, 5/6

Autres fractions

𒅆𒐋𒅅 igi-6-gal$_2$ (1/6)

ANNEXE B
EXTRAITS DE TABLES MÉTROLOGIQUES

Cette annexe contient une partie des tables métrologiques de Nippur : le début des tables de poids, de surface, de longueur et de hauteur. On ne trouvera ici que les parties des tables utiles aux calculs développés dans l'article (pour trouver l'intégralité des tables attestées à Nippur, se reporter à [Proust 2007, p. 311 ss.], [Proust 2009, ap. 2]). Il s'agit ici d'un texte composite, reconstitué à partir des différents exemplaires trouvés à Nippur. Les listes métrologiques contiennent les mêmes entrées que les tables métrologiques, sans les transformations en nombres abstraits. Pour obtenir le texte composite des listes métrologiques, il suffit de ne considérer que la colonne de gauche des tables métrologiques.

Par ailleurs, pour faciliter la lecture de la reconstitution des calculs de surface du § 6, j'ai ajouté entre crochets des exemples d'objets familiers qui illustrent quelques ordres de grandeur. J'ai également inséré entre soufflets des items utilisés dans ces exercices, mais non attestés dans les tables de Nippur disponibles.

Poids

(Cette séquence est également utilisée pour les surfaces.)

<1/3 še	6.40>	[surface d'un sceau]
1/2 še	10	
1(diš) še	20	
2(diš) še	40	
3(diš) še	1	[surface d'une tablette]
4(diš) še	1.20	
5(diš) še	1.40	
6(diš) še	2	
7(diš) še	2.20	
8(diš) še	2.40	

9(diš) še	3	
1(u) še	3.20	[surface d'une brique]
1(u) 1(diš) še	3.40	
1(u) 2(diš) še	4	
1(u) 3(diš) še	4.20	
1(u) 4(diš) še	4.40	
1(u) 5(diš) še	5	
1(u) 6(diš) še	5.20	
1(u) 7(diš) še	5.40	
1(u) 8(diš) še	6	
1(u) 9(diš) še	6.20	
2(u) še	6.40	
2(u) 1(diš) še	7	
2(u) 2(diš) še	7.20	
2(u) 3(diš) še	7.40	
2(u) 4(diš) še	8	
2(u) 5(diš) še	8.20	
2(u) 6(diš) še	8.40	
2(u) 7(diš) še	9	
2(u) 8(diš) še	9.20	
2(u) 9(diš) še	9.40	
1/3 gin$_2$	20	
1/2 gin$_2$	30	
2/3 gin$_2$	40	
5/6 gin$_2$	50	
1(diš) gin$_2$	1	[surface d'un bassin]
2(diš) gin$_2$	2	
3(diš) gin$_2$	3	
4(diš) gin$_2$	4	
5(diš) gin$_2$	5	
6(diš) gin$_2$	6	
7(diš) gin$_2$	7	
8(diš) gin$_2$	8	
9(diš) gin$_2$	9	
10(diš) gin$_2$	10	[surface d'une cour]
11(diš) gin$_2$	11	
12(diš) gin$_2$	12	
13(diš) gin$_2$	13	

14(diš) gin_2	14
15(diš) gin_2	15
16(diš) gin_2	16
17(diš) gin_2	17
18(diš) gin_2	18
19(diš) gin_2	19

Surfaces

(Petites surfaces : voir début de la table des poids.)

1/3 sar a-$ša_3$	20	
1/2 sar	30	
2/3 sar	40	
5/6 sar	50	
1(diš) sar	1	[surface d'un jardin]
1(diš) 1/3 sar	1.20	
1(diš) 1/2 sar	1.30	
1(diš) 2/3 sar	1.40	
1(diš) 5/6 sar	1.50	
2(diš) sar	2	
3(diš) sar	3	
4(diš) sar	4	
5(diš) sar	5	
6(diš) sar	6	
7(diš) sar	7	
8(diš) sar	8	
9(diš) sar	9	
1(u) sar	10	
1(u) 1(diš) sar	11	
1(u) 2(diš) sar	12	
1(u) 3(diš) sar	13	
1(u) 4(diš) sar	14	
1(u) 5(diš) sar	15	
1(u) 6(diš) sar	16	
1(u) 7(diš) sar	17	
1(u) 8(diš) sar	18	
1(u) 9(diš) sar	19	
2(u) sar	20	

3(u) sar	30	
4(u) sar	40	
1/2 GAN_2	50	
1(iku) GAN_2	1.40	[surface d'un champ]
etc.		

Longueurs

1(diš) šu-si	10	[sceau]
2(diš) šu-si	20	
3(diš) šu-si	30	
4(diš) šu-si	40	
5(diš) šu-si	50	
6(diš) šu-si	1	[tablette]
7(diš) šu-si	1.10	
8(diš) šu-si	1.20	
9(diš) šu-si	1.30	
1/3 $kuš_3$	1.40	
1/2 $kuš_3$	2.30	[longueur d'une brique]
2/3 $kuš_3$	3.20	
5/6 $kuš_3$	4.10	
1(diš) $kuš_3$	5	
1(diš) 1/3 $kuš_3$	6.40	
1(diš) 1/2 $kuš_3$	7.30	
1(diš) 2/3 $kuš_3$	8.20	
2(diš) $kuš_3$	10	
3(diš) $kuš_3$	15	
4(diš) $kuš_3$	20	
5(diš) $kuš_3$	25	
1/2 ninda	30	
1(diš) ninda	1	[canne d'arpenteur (6m)]
2(diš) ninda	2	
3(diš) ninda	3	
4(diš) ninda	4	
5(diš) ninda	5	
6(diš) ninda	6	
7(diš) ninda	7	
8(diš) ninda	8	
9(diš) ninda	9	

1(u) ninda	10	
2(u) ninda	20	
3(u) ninda	30	
4(u) ninda	40	
5(u) ninda	50	
1(diš) UŠ	1	[rue]
2(diš) UŠ	2	
3(diš) UŠ	3	
4(diš) UŠ	4	
5(diš) UŠ	5	
6(diš) UŠ	6	
7(diš) UŠ	7	
8(diš) UŠ	8	
9(diš) UŠ	9	
1(u) UŠ	10	
etc.		

Hauteurs

1(diš) šu-si	2	
2(diš) šu-si	4	
3(diš) šu-si	6	
4(diš) šu-si	8	
5(diš) šu-si	10	[épaisseur d'une brique]
6(diš) šu-si	12	
7(diš) šu-si	14	
8(diš) šu-si	16	
9(diš) šu-si	18	
1/3 kuš$_3$	20	
1/2 kuš$_3$	30	
2/3 kuš$_3$	40	
5/6 kuš$_3$	50	
1(diš) kuš$_3$	1	
2(diš) kuš$_3$	2	
3(diš) kuš$_3$	3	
4(diš) kuš$_3$	4	
5(diš) kuš$_3$	5	
1/2 ninda	6	
1(diš) ninda	12	
etc.		

SIGLES

CDLI Cuneiform Digital Library Initiative, http://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/digitlib.html.

CDLJ Cuneiform Digital Library Journal, http://static.cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/web/pubs/cdlj.html

ETCSL The Electronic Text Corpus of Sumerian Literature, http://www-etcsl.orient.ox.ac.uk/.

MCT Mathematical Cuneiform texts ([Neugebauer et Sachs 1945]).

MKT Mathematische Keilschrifttexte ([Neugebauer 1935-7]).

MSL Materials for the Sumerian Lexicon ([Civil *et al.* 1969]).

PSD Pennsylvania Sumerian Dictionary, http://psd.museum.upenn.edu/.

TMH8 Texte und Materialen der Frau Professor Hilprecht Collection ([Proust 2008b]).

TMN Textes mathématiques de Nippur ([Proust 2007]).

BIBLIOGRAPHIE

CIVIL (Miguel), BIGGS (Robert), GÜTERBOCK (Hans), NISSEN (Hans) & REINER (Erica)

[1969] The series lú = *ša* and Related Texts, *Materials for the Sumerian Lexicon*, vol. 12, Rome : Pontificium Institutum Biblicum, 1969.

DOSSIN (Georges)

[1927] Autres textes sumériens et accadiens, *Mémoires de la mission archéologique en Perse*, vol. 18, Paris : E. Leroux, 1927.

ENGLUND (Robert)

[1988] Administrative timekeeping in ancient Mesopotamia, *Journal of the Economic and Social History of the Orient*, 31 (1988), p. 121–185.

FOSTER (Benjamin) & ROBSON (Eleanor)

[2004] A new look at Sargonic mathematical corpus, *Zeitschrift für Assyriologie*, 94 (2004), p. 1–15.

FRIBERG (Jöran)

[1979] *The early roots of Babylonian mathematics. II Metrological relations in a group of semi-pictographic tablets of the Jemdet Nasr Type, Probably from Uruk-Warka*, Göteborg : University of Göteborg, 1979.

[1987–90] Mathematik, *Reallexikon der Assyriologie*, 7 (1987–90), p. 531–585.

[1993] On the structure of cuneiform metrological table texts from the first millenium, dans Galter (Hannes T.), éd., *Die Rolle der Astronomie in den Kulturen Mesopotamiens*, 1993, p. 383–405.

[1999] Counting and accounting in the Proto-Literate Middle East : Examples from two new volumes of proto-cuneiform texts, *Journal of Cuneiform Studies*, 51 (1999), p. 107–137.

[2000] Mathematics at Ur in the Old Babylonian period, *Revue d'Assyriologie*, 94 (2000).

[2001] Bricks and mud in metro-mathematical cuneiform texts, dans Høyrup (Jens) & Damerow (Peter), éd., *Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics*, 2001, p. 61–154.

[2005] On the alleged counting with sexagesimal place value numbers in mathematical cuneiform texts from the Third Millennium BC, *CDLJ*, 2 (2005).

HILPRECHT (Herman)

[1906] Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur, *Babylonian Expedition*, vol. 20, Philadelphie : Université de Pennsylvanie, 1906.

HØYRUP (Jens)

[2002a] *Lengths, widths, surfaces. A portrait of old Babylonian algebra and its kin*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York : Springer, 2002.

[2002b] A note on Old Babylonian computational techniques, *Historia Mathematica*, 29(2) (2002), p. 193–198.

MICHEL (Cécile)

[2008] Écrire et compter chez les marchands assyriens du début du IIe millénaire av. J.-C., dans Tarhan (Taner), Tibet (Aksel) & Konyar (Erkan), éd., *Mélanges en l'honneur du professeur Muhibbe Darga* Istanbul : Sadberk Hanım Museum Publications, 2008, p. 345–364.

NEMET-NEJAT (Karen Rhea)

[1995] Systems for learning mathematics in Mesopotamian scribal schools, *Journal of Near Eastern Studies*, 54 (1995), p. 241–260.

NEUGEBAUER (Otto)

[1932-1933] Zur Transkription mathematischer und astronomischer Keilschrifttexte, *Archiv für Orientforschung*, 8 (1932-1933), p. 221–223.

[1935-1937] *Mathematische Keilschrifttexte I-III*, Berlin : Springer, 1935-1937.

NEUGEBAUER (Otto) & SACHS (A. J.)

[1945] *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Series, New Haven : American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945.

[1984] Mathematical and metrological texts, *Journal of Cuneiform Studies*, 36 (2) (1984), p. 243–251.

NISSEN (Hans), DAMEROW (Peter) & ENGLUND (Robert)

[1993] *Archaic Bookkeeping. Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East*, Chicago : University of Chicago Press, 1993.

OLIVIER (Jean-Pierre) & GODART (Louis)

[1996] *Corpus Hieroglyphicarum Inscriptionum Cretae*, Athènes : École Française d'Athènes, 1996.

POWELL (Marvin A. Jr.)

[1976] The antecedents of old Babylonian place notation and the early history of Babylonian mathematics, *Historia Mathematica*, 3 (1976), p. 417–439.

[1982] Metrological Notes on the Esagila Tablet and related Matters ; annexe II : Brick as Evidence for Metrology, *Zeitschrift für Assyriologie*, 72 (1982), p. 116–123.

[1987-1990] Maße und Gewichte, *Reallexicon der Assyriologie*, 7 (1987-1990), p. 457–517.

PROUST (Christine)

[2000] La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 6(2) (2000), p. 293–303.

[2005] À propos d'un prisme du Louvre : aspects de l'enseignement des mathématiques en Mésopotamie, *SCIAMVS*, 6 (2005), p. 3–32.

[2007] Tablettes mathématiques de Nippur, *Varia Anatolica*, vol. 18, Istanbul : IFEA & De Boccard, 2007.

[2008a] Les listes et tables métrologiques, entre mathématiques et lexicographie, dans Biggs (Robert), Myers (Jennie) & Roth (Martha), éd., *Proceedings of the 51st Rencontre Assyriologique Internationale held at the University of Chicago, July 18–22, 2005. Lexicography, Philology, and Textual Studies. Ancient Oriental Civilization*, 62, 2008, p. 137–153.

[2008b] Tablettes mathématiques de la collection Hilprecht, *Texte und Materialen der Frau Professor Hilprecht Collection*, vol. 8, Leipzig : Harrassowitz, 2008.

[2009] Numerical and metrological graphemes : from cuneiform to transliteration, *CDLJ*, 1 (2009).

[à paraître] Mesopotamian metrological lists and tables : Forgotten sources, dans Bretelle-Establet (Florence), éd., *Looking at it from Asia : the processes that shaped the sources of history of science.*

ROBSON (Eleanor)

[1999] *Mesopotamian mathematics, 2100–1600 BC. Technical constants in bureaucracy and education*, Oxford Editions of Cuneiform Texts, XIV, New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1999.

[2000] Mathematical cuneiform tablets in Philadelphia. I. Problems and calculations, *SCIAMVS*, 1 (2000), p. 11–48.

[2001a] Neither Sherlock Holmes nor Babylon : a reassessment of Plimpton 322, *Historia Mathematica*, 28(3) (2001), p. 167–206.

[2001b] The Tablet House : A scribal school in Old Babylonian Nippur, *Revue d'Assyriologie*, 95 (2001), p. 39–66.

[2002] More than metrology : mathematics education in an Old Babylonian scribal school, dans Steel (John M.) & Imhausen (Annette), éd., *Under One Sky. Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East*, Ugarit-Verlag, 2002, p. 325–365.

SACHS (A. J.)

[1947] Babylonian mathematical texts. I. Reciprocals of regular sexagesimal numbers, *J. Cuneiform Studies*, 1 (1947), p. 219–240.

TANRET (Michel)

[2002] Per aspera ad astra. L'apprentissage du cunéiforme à Sippar-Amnanum pendant la période paléo-babylonienne tardive, dans *Mesopotamian History and Environment, Serie III Cuneiform texts (MHET) I/2*, Gand : Université de Gand, 2002.

THUREAU-DANGIN (François)

[1900] GAN, SAR et TU mesures de volume, *Zeitschrift für Assyriologie*, 15 (1900), p. 112–114.

[1903] *Recueil de tablettes chaldéennes*, Paris : E. Leroux, 1903.

[1930a] La table de Senkereh, *Revue d'Assyriologie*, 27 (1930), p. 115–116.

[1930b] Nombres concrets et nombres abstraits dans la numération babylonienne, *Revue d'Assyriologie*, 27 (1930), p. 116–119.

[1937] La mesure du « qa », *Revue d'Assyriologie*, 34 (1937), p. 80–86.

[1938] *Textes mathématiques babyloniens 1*, Leiden : Ex Oriente Lux, 1938.

VELDHUIS (Niek)

[1997] *Elementary Education at Nippur, The Lists of Trees and Wooden Objects*, Thèse, Université de Groningen, 1997.

WHITING (Robert M.)

[1984] More evidence for sexagesimal calculations in the third millennium BC, *Zeitschrift für Assyriologie*, 74 (1984), p. 59–66.