

**GÉOMÉTRIE DES TISSUS.
MOSAÏQUES. ÉCHIQUIERS.
Mathématiques curieuses et utiles**

Anne-Marie DÉCAILLOT (*)

RÉSUMÉ. — Dans la deuxième moitié du XIX^e siècle, une ambition commune anime le groupe de mathématiciens dont les travaux sont présentés ici : contribuer à la diffusion de l'esprit scientifique auprès d'un large public. Le lieu d'expression de ce groupe est l'Association française pour l'avancement des sciences, créée en 1872, après la défaite de la France au cours du conflit franco-prussien. Rendre la science populaire, tel est le but poursuivi. Afin de répondre à cet objectif, les questions mathématiques abordées sont issues de problèmes concrets, où se trouve privilégiée une représentation visuelle simple. Leur résolution met en jeu un instrument commun : l'échiquier. Il permet, autour de la géométrie des tissus d'Édouard Lucas, de traiter la théorie des nombres. La construction des mosaïques de Charles-Ange Laisant rejoint la représentation des groupes finis et la cristallographie. Les échiquiers anallagmatiques de James-Joseph Sylvester apparaissent sous forme de récréations mathématiques, avant de devenir matrices et d'attirer l'attention de Jacques Hadamard. Une analyse de l'impact de ces recherches en leur temps est effectuée, ainsi qu'une étude des développements qu'elles connaissent de nos jours.

ABSTRACT. — **THE GEOMETRY OF FABRICS. MOSAICS. CHESSBOARDS. CURIOUS AND USEFUL MATHEMATICS.** — In the second half of the nineteenth century, the group of mathematicians whose work will be analyzed here was driven by a common ambition : to contribute to the diffusion of science to a wide audience. As their platform, they chose the French Association for the Advancement of Science, a society founded in 1872 after France's defeat in the Franco-Prussian War. They aimed to make science popular. In order to achieve this goal, they treated mathematical questions originating in concrete problems and favored simple visual representations.

(*) Texte reçu le 4 avril 2002, révisé le 24 octobre 2002.

A.-M. DÉCAILLOT, UFR de mathématiques et informatique, Université de Paris V, 45 rue des Saints Pères, 75006 Paris.

Courrier électronique : deca@math-info.univ-paris5.fr.

Mots clés : arithmétique, réciprocité quadratique, entiers de Gauss, résidus quadratiques, réseaux, pavages du plan, groupes finis, AFAS, Édouard Lucas, Thorvald Thiele, Charles-Ange Laisant, James-Joseph Sylvester.

Classification AMS : 01A55, 01A60, 01A74, 06-03, 11-03.

Their solutions employed a common tool : the chessboard. The latter suggested, as in the case of Édouard Lucas's geometry of fabrics, number-theoretic results. The construction of Charles-Ange Laisant's mosaics related to the representation of finite groups and crystallography. James Joseph Sylvester's anallagmatic chessboards represented examples of recreational mathematics before their transformation into the matrices attracted the attention of Jacques Hadamard. This article explores the impact of this research in its day, as it examines contemporaneous developments of this nature.

« Pour que l'esprit acquière de la facilité, il faut l'exercer à travers les choses que d'autres ont déjà découvertes, et à parcourir avec méthode même les arts les plus communs, surtout ceux qui expliquent l'ordre ou le supposent [...]. Comme tous les esprits ne sont pas également aptes à découvrir tout seuls la vérité, cette règle nous apprend qu'il ne faut pas tout à coup s'occuper de choses difficiles et ardues, mais commencer par les arts les moins importants et les plus simples, ceux surtout où l'ordre règne, comme sont les métiers du tisserand, du tapissier, des femmes qui brodent ou font de la dentelle; comme sont encore les combinaisons des nombres, et tout ce qui a rapport à l'arithmétique, tant d'autres arts semblables en un mot, qui exercent merveilleusement l'esprit, pourvu que nous n'en empruntions pas la connaissance aux autres, mais que nous les découvriions nous-mêmes. »

René Descartes, *Regulae ad directionem Ingenii*, Règle 10¹

INTRODUCTION

Les questions que pose la nature des pratiques scientifiques paraissent aussi multiples et anciennes que les productions de la science même. Parmi celles-ci l'interrogation sur les pratiques que l'on peut dans un premier temps qualifier de « marginales », au sein d'une communauté scientifique structurée, n'est pas à dédaigner. Cette notion de marge résiste-t-elle à un examen historique sérieux ? L'étude qui suit tente d'ébaucher quelques éléments de réponses à ce questionnement. Certains des mathématiciens, étrangers ou français, dont nous présentons les travaux, ne sont en rien des personnalités marginales de leur discipline. Leur œuvre fondamentale les conduit à ne négliger ni les mathématiques pratiques, ni les questions récréatives, qu'apprécient les amateurs de sciences et qui, selon René Descartes, « exercent merveilleusement l'esprit ». Ces intérêts convergent avec ceux de mathématiciens de moindre renommée et nous tenterons d'en analyser les fondements communs.

¹ Traduction française de Victor Cousin ; voir [Descartes, *Œuvres* 1, p. 167–169].

Les hommes

Une première caractéristique des hommes, dont l'œuvre est étudiée ici, est d'être liés aux sociétés savantes et associations scientifiques de leur temps, en tout premier lieu l'*Association française pour l'avancement des sciences* (AFAS) et la *Société mathématique de France* (SMF), toutes deux apparues en 1872. Un savant comme James-Joseph Sylvester, membre éminent de la *British Association for the Advancement of Science* (BAAS), participe aux tout premiers congrès de l'AFAS, où l'on remarque également les interventions d'Ole Broch, professeur de mathématiques à l'université de Christiania, et la présentation des travaux de l'astronome danois Thorvald Thiele. Les congrès de l'AFAS attirent les participations actives d'Eugène Catalan, de Charles-Ange Laisant ou d'Édouard Lucas, par ailleurs membres de la SMF ; leurs travaux paraissent dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, de même que ceux du comte de Polignac ou de Jacques Hadamard, aussi bien que dans les *Comptes rendus* annuels de l'association².

Porteuse d'une démarche originale, l'AFAS permet aussi l'expression scientifique de personnalités parfois éloignées du milieu académique. Son ambition est de mêler l'activité de savants confirmés à celle de simples amateurs de science, dans un souci de diffusion et de popularisation de la science, constitutif de son avancement. Quelques éléments d'analyse, permettant d'appréhender le rôle de cette association dans un contexte historique déterminé, sont donnés ci-dessous.

L'influence de ces sociétés savantes, la nécessité de présenter des travaux accessibles à un public diversifié, ou le goût personnel des auteurs pour les mathématiques pratiques, orientent les interventions dont nous faisons ici l'étude vers les applications de la science. Ainsi Henri Sainte-Claire Deville, professeur de chimie à l'École normale supérieure, peut-il écrire à propos de son ancien élève Édouard Lucas : « Il est très ingénieux et son calcul des tissus est chose curieuse et utile »³.

Les mathématiques

La présentation d'une science utile apparaît comme une condition de

² On peut remarquer que la *Société philomatique de Paris* compte Eugène Catalan, depuis 1840, parmi ses membres et Charles-Ange Laisant depuis 1878.

³ Lettre au Ministre de l'instruction publique, juillet 1871, conservée aux Archives nationales, désormais AN, dossier [F/17/22970].

sa diffusion, tandis que sa popularisation est assurée par les résultats « curieux » auxquels elle permet d'accéder. Ce sont les observations curieuses sur les objets mathématiques qui vont en retour éveiller la curiosité du public, son intérêt pour l'avancement de la science.

Pour toucher un public allant au-delà des lecteurs de revues fondamentales, comme l'*American Journal of Pure and Applied Mathematics* créé en 1878 à Baltimore, Sylvester a recours à la publication originale et populaire de « Mathematical Questions » dans l'*Educational Times*. Catalan fonde en Belgique la revue *Nouvelle correspondance mathématique* et les activités de diffusion de la science de Laisant présentent de multiples aspects : fondateur avec Émile Lemoine de *L'Intermédiaire des mathématiciens* en 1894, il dirige les *Nouvelles annales de mathématiques* en 1896 et, avec Henri Fehr, crée en 1899 la revue genevoise *L'Enseignement mathématique*⁴.

Cette frange de mathématiciens préoccupés de populariser leur discipline privilégient une présentation imagée et visuelle de la science. On peut remarquer que Sylvester [1867, p. 461] propose ses pavages anallagmatiques à la réflexion de l'analyste dans son bureau, aussi bien qu'à celle de la femme élégante dans son boudoir. Édouard Gand, professeur de dessin dans l'industrie du tissage, souhaite voir « la femme du monde », exercée au travail à l'aiguille sur canevas, lire ses ouvrages sur la construction des satins ; alors l'élégante brodeuse « sans trop s'effrayer de quelques formules aussi faciles à retenir qu'aisées à comprendre [...] finira par créer une foule de dessins mosaïques, de combinaisons géométriques, de casse-tête, d'agencements chinois, moresques, grecs, égyptiens, etc. » [Gand 1867b, p. 300].

Le souci de diffusion scientifique n'est pas exempt d'une recherche esthétique dans les représentations : les dessins de tissage des satins carrés sont jugés les plus élégants, les mosaïques complexes de Thiele frappent par leur beauté, celles de Laisant par l'enchaînement de leurs symétries. L'harmonie visuelle d'un canevas, d'un satin ou d'une mosaïque est liée à l'existence de régularités, de symétries dans leurs schémas. Le problème de

⁴ C.-A. Laisant deviendra par ailleurs secrétaire de la commission permanente du *Répertoire des sciences mathématiques*, sous la présidence de Henri Poincaré, et sera responsable de la partie mathématique de la *Grande encyclopédie, inventaire raisonné des sciences, des lettres et des arts* (1885-1902, 31 vol.), Larousse, dirigée par Marcelin Berthelot.

la recherche de motifs ornementaux invariants par translations, rotations, symétries paraît très ancien aussi bien en peinture, sculpture, architecture, que dans l'art de la céramique ou du carrelage. Hermann Weyl [1952] souligne la grande variété d'applications du principe de symétrie dans les arts, depuis l'art persan, grec ou arabe, dans la nature organique ou minérale (cristallographie), avant de parvenir à la notion d'invariance d'une figure par un groupe de transformations. De la notion esthétique sensible se dégage l'idée mathématique abstraite. La beauté d'une œuvre est mise en relation avec une théorie, et l'interprétation esthétique peut apparaître comme l'affirmation de la beauté des mathématiques elles-mêmes.

Dans la présentation des problèmes, les différents intervenants ont recours à un instrument commun : l'échiquier. On peut y déceler l'influence des cartons Jacquard⁵ au sein de la géométrie des tissus. Grâce à une géométrie visuelle simple, l'échiquier rend accessibles d'abstraites notions d'algèbre, de combinatoire ou de probabilités⁶.

Un autre trait des travaux mathématiques que nous présentons est d'incorporer beaucoup de résultats théoriques. La maîtrise des structures complexes d'un savoir formalisé n'est pas étrangère à la perception des problèmes, au « sens pratique » du savant qui met en œuvre ce savoir, selon la formulation de Pierre Bourdieu [2001]. Ce savoir renvoie en particulier aux recherches initiées par Joseph-Louis Lagrange et Carl Friedrich Gauss dans le domaine de la théorie des nombres. On peut supposer que la traduction française de 1807 des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss contribue largement à la diffusion de ces thèmes dans le milieu associatif français, de même que la réédition en 1830 de la *Théorie des nombres* d'Adrien-Marie Legendre.

Ainsi la référence à la théorie des congruences et aux recherches de Gauss est-elle explicite dans la géométrie des tissus d'Édouard Lucas et

⁵ Après Bouchon, Falcon et Vaucanson, le mécanicien lyonnais Joseph-Marie Jacquard (1752–1834) perfectionne le métier à tisser en mécanisant l'opération qui conditionne la levée des fils de chaîne, grâce à des cartons perforés appelés depuis « cartons Jacquard ». D'abord hostiles à son invention, les canuts lyonnais brisent plusieurs métiers Jacquard ; mais dès 1812, ces derniers se généralisent en France.

⁶ Ainsi Henri Delannoy, entre 1889 et 1895, présente à l'AFAS plusieurs communications sur l'emploi de l'échiquier dans la résolution de problèmes concernant le calcul des probabilités liés en particulier à la ruine du joueur.

dans la démonstration de la loi de réciprocité quadratique qui en découle. Thorvald Thiele étudie et représente sous forme de mosaïques les résidus quadratiques mettant en jeu les entiers complexes, que nous désignons communément sous le terme d'« entiers de Gauss ». Après les travaux d'Arthur Cayley sur les « *quantics* » entre 1854 et 1859, James-Joseph Sylvester est à la recherche de transformations linéaires arithmétiques laissant invariante, à une constante multiplicative près, une forme quadratique simple, problème présenté sous la forme de l'échiquier anallagmatique. Cette question se rattache à la théorie des formes abordée par Lagrange et développée par Gauss au sein des *Disquisitiones arithmeticae*.

La construction de carrés anallagmatiques ainsi que celle des mosaïques de Charles-Ange Laisant rejoignent le problème des classifications cristallographiques. Entre 1849 et 1850, les travaux d'Auguste Bravais, physicien, astronome et professeur à l'École polytechnique, amorcent une réflexion sur la diversité des systèmes cristallins, caractérisés par le nombre et la nature de leurs axes de symétrie. Ils sont poursuivis par les travaux d'Arthur Schoenflies [1891] qui classe à son tour les cristaux selon leurs propriétés de symétrie⁷.

Les mathématiques mises en jeu dans les travaux que nous présentons frappent enfin par leur modernité. La découverte « pratique » de structures abstraites par le biais d'une géométrie visuelle simple n'entraîne pas de théorisation de la part de leurs auteurs, à l'exception de Jacques Hadamard, mais cette attitude ne nuit en rien à leur utilisation parfaitement maîtrisée. La géométrie des réseaux et les questions liées aux pavages connaissent de nos jours un développement croissant. Cet intérêt m'a poussée à donner délibérément des interprétations de certaines contributions en termes modernes.

Le rôle de l'AFAS

Bien des questions historiques peuvent se poser, ayant trait à ce groupe de mathématiciens confirmés ou moins connus sur le plan scientifique : comment apprécier leur rôle institutionnel et leur influence sociale en leur temps ? Quel accueil fut réservé à leurs travaux dans les cercles académiques et les milieux non académiques ? Ces questions ne peuvent

⁷ On peut se référer de nos jours aux travaux mathématiques et historiques de Marjorie Senechal sur les classifications cristallographiques [Senechal 1996].

trouver de réponse hors du contexte politique et scientifique de la France après la défaite de 1870, contexte marqué par l'apparition de sociétés savantes où s'engagent les personnalités dont nous présentons les travaux.

Selon une idée communément admise depuis la chute du Second Empire, la science française présente un retard par rapport à la science allemande, retard qui a contribué à la défaite militaire lors du conflit franco-prussien. Le redressement du pays après la guerre va se mesurer en particulier à ses possibilités d'avancées scientifiques. La création de l'Association française pour l'avancement des sciences obéit à ces nécessités nouvelles⁸.

Ainsi l'anthropologue Armand de Bréau de Quatrefages peut-il déclarer, lors de la séance d'ouverture du premier congrès de l'AFAS, dont il est membre fondateur : « La lutte n'a pas lieu seulement sur les champs de bataille [...]. Le domaine de l'intelligence, le terrain de la science ont aussi leurs batailles, leurs victoires, leurs lauriers. C'est là qu'il faut d'abord aller chercher la revanche. Le travailleur scientifique est donc aussi un soldat » [Quatrefages 1872, p. 38]. Après les déchirements politiques de la fin de l'Empire et de la Commune de Paris, il s'agit également de restaurer un consensus national autour des « bannières de la science militante » car, selon le chimiste Charles Friedel, autre fondateur de l'AFAS, « c'est elle qui nous divise le moins » [Friedel 1886, p. 20].

Le nombre d'acteurs de la vie scientifique doit s'élargir : c'est une mission que se fixe l'AFAS et qu'elle réalise en une pratique de congrès annuels, ouverts à tous, tenus à Paris ou décentralisés en province et dans les colonies d'Afrique du Nord. Cette ouverture porte ses fruits puisque les congrès peuvent atteindre une affluence exceptionnelle (plus de 1000 participants à Alger en 1881, à Paris en 1878 et 1889). Le succès de l'association se mesure au nombre et à la diversité des intervenants qu'elle promeut : ingénieurs, professeurs de lycées ou d'universités provinciales et militaires constituent, aux côtés de simples amateurs, les principaux intervenants dans le domaine mathématique.

On peut toutefois constater que la fondation de l'AFAS en 1872 a lieu en l'absence de grands mathématiciens français, le seul représentant de quelque importance de cette discipline étant Eugène Catalan, professeur

⁸ On peut consulter à ce sujet l'ouvrage collectif [Gispert dir. 2002].

d'analyse émigré à l'université de Liège. La mise en œuvre d'une politique internationale ambitieuse permet cependant aux grands noms des mathématiques étrangères de participer dès le début, nous l'avons vu, aux congrès de l'association. Cette politique internationale se poursuit jusqu'à la fin du siècle⁹. Son succès contribue à lever la réserve du milieu académique et à attirer à l'AFAS des mathématiciens français de renom, parmi lesquels on remarque en 1875 Charles Hermite et Georges Halphen, suivis de Gaston Darboux et Henri Poincaré.

La diversité des intervenants aux congrès de l'AFAS transparaît dans les thèmes qu'ils abordent, dont la variété élargit la vision académique. Si la recherche de pointe est présente dans les interventions de Hermite ou de Poincaré, l'activité mathématique de l'association se remarque dans des domaines relativement négligés par la science académique, comme l'arithmétique, la théorie des nombres, les récréations mathématiques. Les préférences de l'AFAS vont à une science accessible, utile et privilégiant des représentations visuelles simples : les exemples que nous abordons ci-dessous en sont la preuve.

En France, la réaction du monde académique à ce type d'activité mathématique peut être perçue dans le jugement sans appel qu'émet Joseph Bertrand en matière de théorie des nombres, jugement ayant valeur d'appréciation générale. Il apparaît lors de la discussion d'un amendement déposé à la Chambre, en 1887, par le député Charles-Ange Laisant. Au cours du vote du budget du Ministère de l'instruction publique, Laisant propose de dédoubler la chaire de mathématiques du Collège de France, en créant une chaire consacrée à l'enseignement de la théorie des nombres ; le nom de l'arithméticien Édouard Lucas est avancé pour occuper cette fonction¹⁰. La section de géométrie de l'Académie des sciences, consultée par le Ministre, émet un avis défavorable à cette création et la réponse du secrétaire perpétuel Joseph Bertrand contient l'appréciation suivante :

⁹ Sylvester et Tchebychev sont suivis par Arthur Cayley pour l'Angleterre, Victor Liguine pour la Russie, par Francesco Brioschi, Luigi Cremona, Giovanni Guccia, Ernesto Cesàro, Giuseppe Peano pour l'Italie.

¹⁰ L'amendement de Laisant est adopté à la Chambre le 25 janvier 1887. Repoussé au Sénat, il est à nouveau examiné à la Chambre qui, en contradiction avec sa précédente décision, le repousse le 26 février 1887. Laisant présente à nouveau son amendement à la Chambre le 9 mars 1888, qui le repousse en s'appuyant sur l'avis défavorable de l'Académie des sciences. Cf. [Décaillot 1999, vol. 1, p. 158–165].

« Le partage du vaste champ des études mathématiques en deux portions, dont l'une serait la Théorie des nombres, ne nous semblerait nullement justifié. Ce serait à peu près — la comparaison n'est pas exagérée — comme si, voulant dédoubler la chaire d'histoire, on consacrait l'enseignement nouveau à l'étude, très intéressante assurément, de la République de Venise, en laissant au professeur actuel le soin d'étudier tous les autres peuples anciens et modernes »¹¹. Si Bertrand admet que Lucas « n'est pas sans mérite », ce mérite n'est cependant pas tel qu'il lui permette d'occuper une chaire, récompense exceptionnelle accordée à un savant que les « juges compétents » trouvent digne de leur haute estime.

Dans le domaine international, l'AFAS obtient un succès d'importance. La venue à Caen en 1894 de Georg Cantor, premier Allemand invité à un congrès de l'association, prend l'allure d'un événement. Cette participation peut être imputée aux relations amicales qui lient Cantor à plusieurs mathématiciens français, parmi lesquels Charles-Ange Laisant et Émile Lemoine. Elle a pour but d'obtenir le soutien de l'AFAS au projet de congrès international des mathématiciens dont Cantor est l'initiateur. Avec l'appui de Laisant, internationaliste convaincu, un vœu du congrès est adopté en ce sens. Le soutien de l'association est un élément décisif ouvrant la voie au premier congrès international de Zurich en 1897¹².

Sous l'influence de personnalités comme Laisant, l'évolution du rôle social de l'AFAS dans le domaine mathématique paraît remarquable. De l'énoncé d'une conception « revancharde » de la science en 1872, elle parvient en 1894 à contribuer à la constitution d'une Europe mathématique.

1. LA GÉOMÉTRIE DES TISSUS D'ÉDOUARD LUCAS

Édouard Gand et Édouard Lucas à Amiens

Après des études de mathématiques à l'École normale supérieure, Édouard Lucas occupe les fonctions d'astronome adjoint à l'Observatoire

¹¹ Minute autographe de la réponse de Joseph Bertrand, Académie des sciences, pochette de séance du 24 octobre 1887. Cette réponse, datée du 20 octobre 1887 et signée de Louis Pasteur et Joseph Bertrand, figure également dans le dossier AN, [F/17/13 554].

¹² Ce congrès confiera à Laisant la vice-présidence de la section d'histoire et de bibliographie.

de Paris de 1864 à 1869. Sa ville natale, Amiens, lui offre un refuge lorsque les conflits avec le directeur de cet établissement, Urbain Le Verrier, deviennent trop aigus¹³. C'est à Amiens qu'il découvre les problèmes arithmétiques liés au tissage par l'intermédiaire des travaux d'Édouard Gand¹⁴. Ce dernier est à la recherche de procédures permettant d'élaborer en particulier des modèles de satin : « Il serait utile [...] d'avoir des procédés rationnels, des formules faciles à retenir, qui permettent d'exécuter, sans hésitation ni perte de temps, la mise en carte du satin proposé. La plupart du temps, lorsqu'on a de semblables dispositions de satins à écrire, on procède par de longs tâtonnements » [Gand 1867a, p. 62].

À cet appel répond la première publication de Lucas et l'on peut considérer que le thème des tissus fonde l'intérêt qu'il porte à la théorie des nombres et aux nombres premiers. En effet dès 1867, Lucas publie une brochure intitulée *Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers* [Lucas 1867]. La même année on peut remarquer deux articles d'Édouard Gand, [1867a] et [1867b], dans le *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens* qui font référence à l'utilisation des nombres premiers dans la construction des armures des satins réguliers. Pour sa part Lucas introduit en ces termes la brochure qu'il compose en 1867 : « Le *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens* (janvier 1867) contient sur le pointé de l'armure des satins réguliers, un travail remarquable et entièrement original de M. Édouard Gand, professeur de tissage. Je me propose de traiter la même question au point de vue le plus abstrait et de donner des démonstrations simples et toujours rigoureuses des règles à suivre pour la construction de tous les satins réguliers

¹³ Pour la biographie d'Édouard Lucas (1842–1891), on peut consulter [Décaillot 1998] et [Décaillot 1999].

¹⁴ Édouard Gand (1815–1891) est né à Amiens où il commence, jeune, une carrière dans l'industrie textile; en 1839, il devient dessinateur industriel et liseur de cartons Jacquard. En 1861 il est le principal fondateur de la Société industrielle d'Amiens, société qui le charge d'organiser en 1864 un cours théorique de tissage ainsi qu'un cours de dessin de fabrique. Il devient alors professeur de tissage et de dessin industriel à Amiens, Saint-Quentin, Roubaix. Auteur de nombreux ouvrages, il est l'inventeur d'un « transpositeur ou improvisateur de tissus » permettant l'application au tissage des combinaisons arithmétiques, ainsi que d'un « métier-compositeur automatique » qui permet de créer sans dépense d'imagination une infinité de contextures d'étoffes ou d'armures très variées. Cette dernière invention lui vaut la médaille d'or en 1873 de la *Société industrielle du Nord de la France*. Il est par ailleurs membre correspondant de la *Société d'encouragement pour l'industrie nationale*.

possibles» [Lucas 1867, p. 3].

Y a-t-il eu collaboration entre Lucas et Gand ? Une note manuscrite de Lucas de 1871 le laisse supposer :

« J'ai traité le cas spécial de l'armure des satins réguliers [...]. Cette idée m'a conduit à la découverte d'un compositeur d'armures, d'une construction facile et peu coûteuse, qui permet de former rapidement et successivement des armures en nombre indéfini, et de composer aisément un nombre indéfini d'effets applicables non seulement à la fabrication des étoffes, mais encore à certains genres de décoration ou d'ameublement, à la tapisserie, et même à la parqueterie. Cet ouvrage est à la portée de tous ; il s'adresse aux industriels, aux contremaîtres, aux dessinateurs, etc. La connaissance des quatre règles de l'arithmétique suffit à l'intelligence de ce travail »¹⁵.

On peut cependant constater qu'Édouard Gand publie en 1871, sous son seul nom, l'ouvrage sur « le transpositeur ou l'improvisateur de tissus », appareil non breveté, fondé sur la théorie des nombres premiers et des progressions arithmétiques, et construit seul le métier-compositeur automatique. La guerre franco-prussienne mêle en effet Lucas aux combats de l'armée de la Loire et la nomination qui l'affecte à Moulins comme professeur, à partir d'avril 1872, a pu interrompre la collaboration amorcée.

C'est à l'AFAS, où il intervient pour la première fois en 1876 à Clermont-Ferrand, qu'Édouard Lucas reprend le thème des tissus et de l'arithmétique. Dans une note parue la même année aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences est annoncée la découverte d'un mécanisme assez simple permettant de tester la primalité des nombres de Mersenne, mécanisme qui « repose [...] sur les lois mathématiques du tissage » [Lucas 1876b, p. 1305]¹⁶.

Au congrès de l'AFAS de 1879, le député mathématicien Charles-Ange Laisant recense les différents travaux du groupe de sciences mathématiques de l'association depuis sa fondation en 1872 : « plusieurs questions originales ont pris naissance dans l'Association française et se sont ensuite développées et accrues en passant dans d'autres milieux » [Laisant 1879, p. 63]. Se trouve citée en particulier la géométrie du tissage, dont les

¹⁵ Notice manuscrite rédigée en 1871 par Édouard Lucas sur ses travaux scientifiques (AN, [F/17/22970]).

¹⁶ On peut consulter à ce sujet [Décaillot 1998].

principes fondamentaux valables pour la construction et la classification des tissus à fils rectilignes ont été établis par Édouard Lucas. Des deux interventions sur ce thème, [Lucas 1876a] et [Lucas 1878a], seuls les titres figurent dans les *Comptes rendus* de l'Association. Il faut attendre le congrès de 1911 pour qu'un nouveau mémoire de Lucas sur le tissage [Lucas 1911] paraisse à titre posthume¹⁷. On peut remarquer que ce dernier travail a un caractère beaucoup plus appliqué que la brochure de 1867 contenant les résultats mathématiques.

Née de la rencontre avec les travaux de Gand à Amiens, puis présentée à l'AFAS, la géométrie du tissage est reprise à la SMF, sous la forme plus générale de l'étude des réseaux réguliers de points, et s'y développe en prenant le nom de « géométrie des quinconces ». L'intérêt mathématique des représentations géométriques obtenues prime alors sur leur utilisation pratique¹⁸.

Les satins réguliers

Les tissus à texture rectiligne peuvent être représentés au moyen de dessins quadrillés, où l'on repère les fils de *trame* et les fils de *chaîne* dans un système d'axes orthogonaux. La *duite* est le nom donné aux passages de la trame à travers la chaîne. Le dessin des tissus réguliers se reproduit à l'identique par des translations parallèles aux axes figurant ces deux fils et il suffit de représenter le dessin de base sur un échiquier, en général carré, de taille minimale : ces dessins carrés portent le nom d'*armures*; leur dimension p est le *module* de l'armure. Sur une armure sont figurés les points de liage correspondant aux points du tissu où s'opère la levée successive des fils de chaîne, à chaque insertion de duite¹⁹. L'échiquier carré associé à une armure comporte un certain nombre de cases ombrées correspondant aux points de liage, les fils de chaîne étant représentés par les colonnes, ceux de trame par les lignes de l'échiquier.

Le *satins régulier* constitue le tissu le plus riche du point de vue arithmétique. D'après Lucas, sa construction obéit aux conditions suivantes : « Le problème général de la construction de l'armure du satin

¹⁷ Ce mémoire est la traduction d'un article paru dans l'*Ingegnere civile* (Turin, juillet 1880).

¹⁸ Voir le paragraphe 3 du présent article.

¹⁹ Dans ses articles de 1867, Édouard Gand détaille les quatre armures fondamentales à fils rectilignes que sont la toile (ou drap), le sergé, le batavia et le satin.

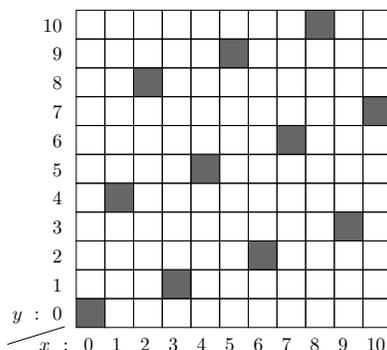


Figure 1. Satin de module 11 et de décochement 4

régulier revient à placer dans les cases de l'échiquier carré de p^2 cases, p pions tels que deux d'entre eux ne se trouvent pas dans la même rangée horizontale ou verticale, et de telle sorte que, par rapport à un quelconque de ces pions (en supposant l'échiquier indéfiniment répété dans tous les sens), les autres pions soient toujours placés de la même façon » [Lucas 1867, p. 3]. Pour faciliter la reproduction mécanique du dessin d'armure et en assurer l'esthétique, les points de liage doivent être ainsi régulièrement disposés selon des réseaux plans, invariants par les translations définies à partir de deux points quelconques du réseau. De plus l'armure du satin ne doit pas présenter de répétitions dans ses lignes ni dans ses colonnes.

Les conditions de réalisation d'un satin régulier se trouvent satisfaites par le choix d'un nombre a appelé le *décochement*, inférieur au module p et premier avec lui, qui permet la construction de deux suites :

- la suite des indices de colonne $x = 0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots, p - 1$;
- la suite des indices de ligne $y = 0, a, 2a, 3a, \dots, ka, \dots, (p - 1)a$, ces derniers nombres étant calculés modulo p , donc dans \mathbb{Z}_p .

Un théorème d'arithmétique [Gauss 1801, p. 10] garantit que les restes (mod. p) des nombres y ainsi obtenus constituent une permutation des nombres $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$. Les points de liage sont figurés à l'intérieur du carré construit sur les entiers modulo p , soit dans $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, à l'intersection de la colonne $x = k$ et de la ligne $y = ka \pmod{p}$. Ainsi la réalisation de l'armure du satin de module 11 et de décochement 4 conduit au schéma de la figure 1, où les points de liage sont ombrés. Le décochement 4 correspond à l'ordonnée du point de liage situé dans la colonne portant le numéro 1.

Les propriétés d'un satin dépendent de la disposition de ses points de liage. Un manuel de tissage décrit en ces termes les qualités des satins selon la longueur de *flottés* (fils lâches) séparant les liages : « L'armure satin donne un tissu plat, uni et brillant [...]. En principe, plus un satin aura de flottés longs, plus il sera brillant, au détriment de la solidité du tissu, et, inversement, plus les liages seront rapprochés et les flottés courts, plus le satin sera mat et solide » [Labriffe 1928, p. 340].

La *toile* (ou *drap*) est un satin régulier particulier de module $p = 2$ et de décochement $a = 1$, correspondant à l'armure représentée dans la partie gauche de la figure 2 ; son dessin régulier est obtenu par translations parallèles aux axes (partie droite de la figure 2).

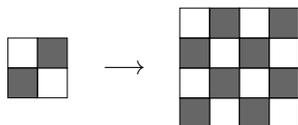


Figure 2. Gauche : armure de la toile. Droite : le dessin régulier est obtenu par translations parallèles aux axes

Le *sergé* constitue l'armure d'un satin régulier (la *serge*) de module $p > 2$ et de décochement $a = \pm 1 \pmod{p}$. Le sergé à trois fils ($p = 3$, $a = 1$) est ainsi figurée par l'échiquier de gauche de la figure 3 tandis que le sergé à trois fils ($p = 3$, $a = 2$) l'est par l'échiquier de droite de la même figure.



Figure 3. Gauche : sergé à trois fils ($p = 3$, $a = 1$). Droite : sergé à trois fils ($p = 3$, $a = 2$)

Les serges qui leur correspondent sont représentées par les dessins symétriques (figure 4).

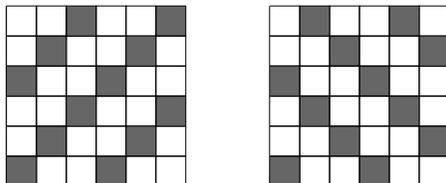


Figure 4. Serges correspondant aux armures de la figure 3

Un 'groupe' de satins de même module

Lucas effectue une classification des satins de module p . Le décochement a premier avec p admet dans \mathbb{Z}_p un opposé $p - a$ et un inverse a' (les nombres a et a' sont qualifiés d'« associés » dans la traduction française de A.-C.-M. Pouillet-Delisle des *Disquisitiones arithmeticae* [Gauss 1801, p. 57])²⁰.

Les décochements a et $p - a$ construisent des satins à effet de symétrie par rapport à la direction horizontale, qui sont désignés sous le nom de satins « complémentaires »; les décochements a et a' conduisent à des satins dont les dessins échangent entre eux les fils de trame et les fils de chaîne, et Lucas les qualifie de satins « associés ». Les quatre satins correspondant aux décochements a , $p - a$, a' et $p - a'$ sont dits de même « groupe » et une même armure les représente, à une symétrie ou une rotation près.

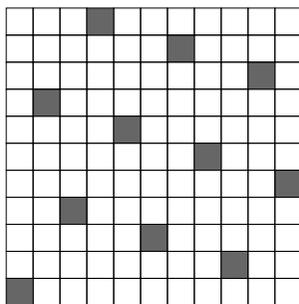


Fig. 5. Satin de module 11,
décochement 7

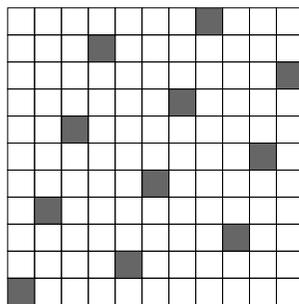


Fig. 6. Satin de module 11,
décochement 3

Ainsi pour le module 11, les satins correspondant aux décochements 4, 7, 3, et 8 font partie du même groupe. Nous représentons les deux satins correspondant aux décochements 7 et 3 (figures 5 et 6). Les satins de décochement 4 et 7 sont complémentaires (leurs dessins sont symétriques par rapport à la direction horizontale), tandis que les satins de décochement 4 et 3 sont associés (leurs dessins échangent fils de trame et fils de chaîne).

²⁰ L'existence de l'inverse de a est la conséquence d'un théorème de Claude-Gaspar Bachet de Méziriac. Ce dernier établit en effet, dans ses *Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres* (Lyon, 1612), le théorème suivant : si les entiers p et a sont premiers entre eux, l'équation $ax + py = 1$ admet un couple (x, y) solution dans \mathbb{Z}^2 , ce qui assure l'existence de l'inverse a' de a dans \mathbb{Z}_p .

Les satins carrés

Dans certains satins, le groupe ci-dessus comporte des éléments de représentation qui se confondent. Le cas où a se confond avec son opposé $p - a$ n'est réalisé que si $p = 2$ et $a = 1$, c'est-à-dire dans la toile.

Un satin est appelé *carré* lorsque l'inverse de a est confondu avec son opposé, ce qui conduit dans \mathbb{Z}_p à l'équation

$$a^2 + 1 = 0.$$

Ainsi le satin de module $p = 5$ et de décochement $a = 2$ est carré, de même que celui de module $p = 13$ et de décochement $a = 5$:

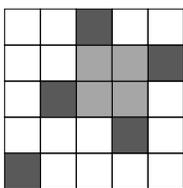


Figure 7. *Satin carré (module 5, décochement 2)*

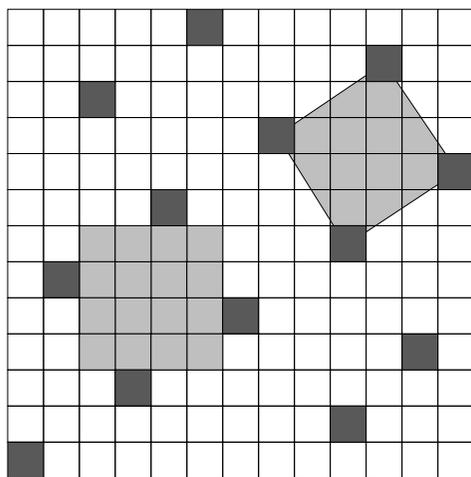


Figure 8. *Satin carré (module 13, décochement 5)*

Édouard Gand vante les satins carrés « que l'on doit de beaucoup préférer aux autres à cause de l'élégance de leur pointé qui s'écarte

complètement de toute tendance à la diagonale [...]. On peut non seulement inscrire un carré entre quatre points voisins pris sur leur carte respective, mais on peut encore obtenir un autre carré parfait en reliant par des lignes obliques ces quatre mêmes points » [Gand 1867a, p. 82].

Dans sa brochure de 1867, Lucas caractérise le module, premier ou composé, d'un satin carré. Si p est un nombre premier, ce dernier doit être de la forme $p = 4n + 1$. Mais un satin carré peut être construit sur un module composé (ainsi il existe un satin carré de module $p = 25$, de décochement $a = 7$, et un satin carré de module $p = 26$, $a = 5$). Dans tous les cas, la détermination des satins carrés met en jeu d'intéressants résultats de théorie des nombres (voir ci-dessous).

Les satins symétriques

Le satin est *symétrique* lorsque le décochement a se confond avec son inverse $a' \pmod{p}$, ce qui conduit dans \mathbb{Z}_p à l'équation

$$a^2 - 1 = 0.$$

Lorsque p est premier, \mathbb{Z}_p est un corps ; ce qui entraîne que les seuls satins symétriques de module premier correspondent à $a = \pm 1$: ce sont des sergés (ou la toile dans le cas d'un module 2).

Si l'on recherche des satins symétriques autres que sergés ou toile, il faut disposer d'une armure de module p non premier. Ainsi le satin de module $p = 8$ et décochement $a = 3$ est symétrique :

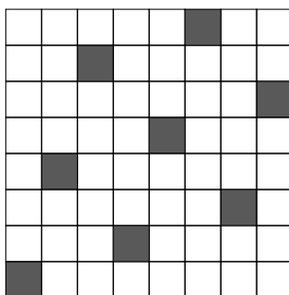


Figure 9. *Satin symétrique (module 8, décochement 3)*

Les points de liage d'un satin symétrique se répartissent symétriquement par rapport à la diagonale principale de l'échiquier et demeurent invariants par l'échange des fils de chaîne et de trame. Les sergés sont tous symétriques et la toile est le seul satin à la fois carré et symétrique.

Théorie des nombres et satins carrés

1. – *Satin carré de module premier*

Le module p est ici supposé premier et supérieur à 2. L'existence d'un satin carré est liée à la résolution dans le corps \mathbb{Z}_p de l'équation $a^2 + 1 = 0$.

Lucas [1911, p. 80] énonce les résultats suivants :

- « Un module premier $p > 2$ soit permet deux satins carrés complémentaires, soit n'en permet aucun. »

- « Pour un module premier impair p , on ne peut avoir de satin carré si p est de la forme $4n + 3$; on a deux satins carrés complémentaires si p est de la forme $4n + 1$. »

Leur démonstration mathématique est effectuée dans la brochure de 1867 en se référant au « petit » théorème de Fermat, l'existence de solutions de l'équation $a^2 + 1 = 0 \pmod{p}$ étant liée au fait que -1 est résidu quadratique de p [Lucas 1867, p. 8–9]²¹. La publication de 1911, issue d'un mémoire destiné à un public d'ingénieurs, présente de manière imagée l'ensemble de ces résultats, en faisant appel à la classification des satins de module premier [Lucas 1911, p. 80].

À un module premier p peuvent être associés $p - 1$ décochements, c'est-à-dire $p - 1$ dessins d'armures. Les satins correspondants peuvent être classés en un groupe de deux sergés ($a = \pm 1$); en satins quelconques qui se groupent par quatre; et éventuellement, en satins carrés qui forment un groupe de deux satins complémentaires. À l'exception des sergés, on peut construire $p - 3$ satins. Si ce nombre est un multiple de 4, aucun satin carré n'est possible. Si ce nombre est un multiple de 4 augmenté de 2, c'est-à-dire si p est de la forme $4n + 1$, il existe deux satins carrés complémentaires de module p .

Ces résultats sont l'expression du théorème selon lequel l'équation $a^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution dans \mathbb{Z}_p si p est un nombre premier de la forme $4n + 3$, et en a deux opposées dans le cas d'un module p premier de la forme $4n + 1$. La représentation des satins carrés fournit par ailleurs graphiquement toutes les solutions entières de l'équation

²¹ Si l'équation $x^2 = m$ a des solutions dans \mathbb{Z}_p , le nombre m est appelé résidu quadratique de p . D'après le « petit » théorème de Fermat, le nombre premier p et le nombre a non nul vérifient $a^{p-1} = -1 \pmod{p}$. La vérification de l'équation $a^2 = -1$ dans \mathbb{Z}_p , jointe à l'hypothèse $p = 4n + 3$, entraîne une contradiction. On peut consulter à ce propos [Gauss 1801, p. 155–157].

$x^2 + y^2 = 0 \pmod{p}$ sous la forme des points de liage des deux satins carrés complémentaires associés au module $p = 4n + 1$.

Ainsi le satin carré de module 5 et décochement 2 fournit toutes les solutions de la forme $y = 2x$ de cette équation, soit : $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$. Pour le même module 5, le satin carré complémentaire de décochement 3 fournit toutes les solutions de la forme $y = 3x$ de cette équation, soit : $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, obtenues par échange des fils de chaîne et de trame, c'est-à-dire de x et y . L'équation $x^2 + y^2 = 0 \pmod{5}$ admet neuf solutions²².

2. – Expression d'un théorème de Fermat dans la géométrie des tissus

Édouard Gand [1867a, p. 83–85] souligne, sans fournir de preuve théorique, que le module, premier ou composé, d'un satin carré est la somme de deux carrés (ainsi en est-il de $5 = 4 + 1$; de $13 = 9 + 4$; de $25 = 16 + 9$; de $26 = 25 + 1$). Il est aisé de vérifier (figure 10) que la surface de l'échiquier associé à un satin carré de module p est constituée de p surfaces identiques à celle du carré construit sur les points $(bcde)$. L'aire de l'échiquier étant p^2 , celle d'un carré $(bcde)$ est p et son côté admet pour longueur \sqrt{p} . Le point de liage h le plus proche de l'origine vérifie $oh = \sqrt{p}$ et si (x, y) désignent les coordonnées de h , le théorème de Pythagore entraîne $p = x^2 + y^2$: le module d'un satin carré est la somme de deux carrés, selon la remarque faite par Gand.

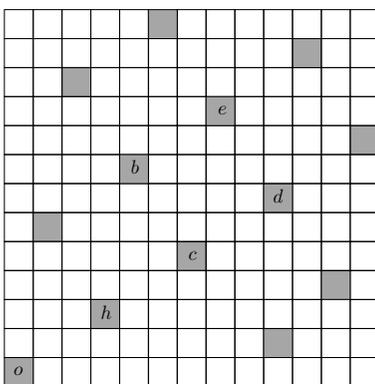


Figure 10.

²² Pour une présentation moderne de ces résultats, voir [Warusfel 1971, p. 220–223].

En particulier *tout nombre premier p de la forme $4n + 1$ est somme de deux carrés* : ce résultat est l'expression, dans la théorie des satins carrés, d'un théorème de Fermat²³.

Lors de la publication du quatrième volume des *Œuvres de Fermat*, Auguste Aubry qualifie ce théorème du « plus beau peut-être de tous les théorèmes de Fermat » et mentionne, parmi d'autres, la démonstration graphique d'Édouard Lucas, qui y emploie la théorie des satins carrés [Fermat 1912, p. 232, note 27].

On peut remarquer toutefois que le « théorème » de Gand-Lucas, selon lequel le module (premier ou composé) d'un satin carré est la somme de deux carrés, a une portée plus générale que celle du théorème de Fermat.

3. – *Satin carré de module composé*

Tous les nombres qui sont sommes de deux carrés ne peuvent prétendre être des modules de satins carrés. Lucas caractérise le module d'un satin carré grâce à sa décomposition en facteurs premiers : le nombre $p = 2^k p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ est le module d'un satin carré si et seulement si l'exposant k est égal à 0 ou à 1 et si tous les facteurs premiers impairs sont de la forme $p_i \equiv 1 \pmod{4}$. Il n'existe ainsi aucun satin carré de module 8, 20 ou 45, bien que chacun de ces nombres soit somme de deux carrés²⁴.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, le nombre de satins carrés de module p , c'est-à-dire le nombre de solutions de l'équation $a^2 + 1 = 0$

²³ Le résultat de Fermat apparaît dans la lettre de Fermat à Mersenne du 25 décembre 1640 et de Fermat à Digby de juin 1658. Cf. [Fermat 1891, p. 293–294], [Fermat 1894, p. 213, 221, 403, 432], [Fermat 1896, p. 243, 315].

Gauss en effectue une démonstration, puis étudie l'unicité de la décomposition de p en somme de deux carrés grâce à la théorie des formes [Gauss 1801, p. 156]. On peut noter que les deux propriétés « p premier est de la forme $4n + 1$ » et « p premier est somme de deux carrés » sont équivalentes [Warusfel 1971, p. 220–223].

²⁴ Les conditions d'existence des satins carrés peuvent être comparées à celles qui expriment la possibilité de décomposition d'un nombre en somme de deux carrés : « un nombre p est la somme de deux carrés si et seulement si tous les facteurs premiers de la forme $p_i \equiv 3 \pmod{4}$, figurant dans sa décomposition, sont affectés d'un exposant pair ». Lucas ne fait aucune référence à ce résultat présent dans les *Disquisitiones arithmeticae* [Gauss 1801, p. 157] (pour une présentation moderne voir [Samuel 1967, p. 86]).

On peut également comparer le résultat de Lucas à l'énoncé de Paul Bachmann donnant les conditions d'existence de solutions de l'équation $x^2 = m$ dans \mathbb{Z}_p [Bachmann 1902, p. 183].

(mod. p), est 2^n . Ces satins, deux à deux complémentaires, correspondent à 2^{n-1} dessins distincts.

Lucas établit les fondements de la construction des satins de module composé. Ainsi les satins carrés de module p^α , où le nombre p est premier de la forme $4q + 1$, sont déterminés à partir des satins carrés de module p , établis de manière empirique. Deux méthodes sont proposées : une récurrence sur l'entier α , ou une utilisation des nombres complexes [Lucas 1911, p. 85].

Une construction des satins carrés de module composé d'au moins deux facteurs premiers figure dans [Lucas 1867, p. 13]. Elle repose sur un résultat de Gauss relatif aux congruences de module composé [Gauss 1801, § 36, p. 18–19] dont l'origine, selon Paul Bachmann, serait très ancienne [Bachmann 1902, p. 83].

Le cas général se traitant de manière analogue, nous supposons que $p = p_1 p_2$, où p_1 et p_2 sont deux nombres premiers vérifiant les conditions de Lucas (l'un d'entre eux peut être le nombre 2). La recherche des solutions a, b, x, y des équations

$$\begin{aligned} a^2 + 1 &= 0 \pmod{p_1} & b^2 + 1 &= 0 \pmod{p_2} \\ xp_2 &= 1 \pmod{p_1} & yp_1 &= 1 \pmod{p_2} \end{aligned}$$

permet le calcul du nombre $A = xp_2 a + yp_1 b$ qui vérifie $A^2 + 1 = 0 \pmod{p_1}$ et $A^2 + 1 = 0 \pmod{p_2}$. Les deux nombres p_1 et p_2 étant premiers entre eux, A est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0 \pmod{p}$ ²⁵.

La détermination des satins symétriques s'effectue de manière similaire, l'équation $x^2 - 1 = 0 \pmod{p}$ remplaçant $x^2 + 1 = 0 \pmod{p}$. On peut aussi dénombrer les satins symétriques selon le type de décomposition en facteurs premiers de leur module, en remarquant en particulier que les modules $p = 4m$ permettent les deux satins symétriques correspondant à $a = 2m + 1$ et $a' = 2m - 1$, tandis que les modules de la forme p^α (p premier impair) n'en ont aucun.

Ces règles permettent à Lucas d'obtenir la classification des dessins d'armures fondamentaux dont le module est compris entre 5 et 95 [Lucas

²⁵ Ainsi pour $p = 65 = 5 \cdot 13$ on peut prévoir quatre satins carrés. Les nombres $a = 2, b = 5, x = 2, y = 8$, solutions des équations ci-dessus, conduisent à $A = 57 \pmod{65}$. Les nombres $a' = 3, b = 5, x = 2, y = 8$ conduisent à $A' = 18$. Les deux autres solutions $A'' = 47$ et $A''' = 8$ correspondent aux satins complémentaires des précédents. L'équation $x^2 + 1 = 0 \pmod{65}$ admet quatre solutions (mod. 65) : 57, 18, 8, 47.

1911, p. 88]. Il apparaît ainsi que le module 24 permet la construction de six satins symétriques correspondant aux décochements 5, 7, 11 et à leurs complémentaires 19, 17, 13; tandis qu'avec le module 65 on peut obtenir quatre satins carrés (de décochements 8, 18, 47, 57) et deux satins symétriques (de décochements 14 et 51). On doit remarquer que ce travail est conduit sans référence aux propriétés algébriques des structures \mathbb{Z}_p , même si certaines d'entre elles sont utilisées implicitement. Ainsi en est-il de la recherche de l'inverse d'un nombre ou de la résolution d'équations dans ces structures lorsque le nombre p est composé, toutes questions qui permettent d'apprécier l'influence des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss.

En insistant sur le rôle de l'arithmétique et des représentations géométriques plus que sur les questions algébriques soulevées, Laisant [1879, p. 84–85] résume en ces termes les travaux de Lucas :

« En se servant des théorèmes de Fermat, d'Euler et de Gauss, sur la décomposition de certains nombres en deux carrés, sur la théorie des nombres associés suivant un module premier ou composé [Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, n° 77]²⁶, on peut obtenir aisément le tableau des armures fondamentales, et par suite la classification des tissus, d'après les lois de l'arithmétique. En particulier, on doit considérer les armures plus régulières désignées par l'auteur sous le nom de satins carrés et de satins symétriques, comme la fidèle représentation géométrique des racines des congruences $x^2 + 1 = 0 \pmod{p}$, $x^2 - 1 = 0 \pmod{p}$ ».

Ainsi l'arithmétique « curieuse » appliquée aux satins permet-elle un progrès technologique : un procédé rationnel de construction systématique et de classification des satins est élaboré, selon le vœu d'Édouard Gand. Les satins offrent en retour une représentation visuelle de résultats mathématiques abstraits et profonds. Ce mouvement a deux conséquences : une science « curieuse » et « pratique » est transposée à un niveau théorique sous la forme de théorèmes ; l'utilisation des satins à des fins didactiques devient un instrument de popularisation de ces théories abstraites. C'est dans ce double mouvement entre tissage et science du tissage d'une part, et théorie arithmétique de l'autre, que nous pouvons apprécier l'apport de la géométrie des tissus.

²⁶ « Nous dirons que deux nombres sont *associés*, comme l'a fait Euler, lorsque leur produit sera congru à l'unité » [Gauss 1801, § 77, p. 57].

Tissus et loi de réciprocité quadratique

Nous avons mentionné le fait que le mouvement pour l'avancement des sciences est propice aux mélanges. Les congrès et banquets de l'AFAS réunissent ingénieurs et savants, français et étrangers, qui trouvent dans ce rassemblement à la fois un écho, une tribune et une source d'inspiration pour leurs recherches. Des liens scientifiques et amicaux se nouent, tels ceux qui s'établissent entre Pafnuti Lvovich Tchebychev et Édouard Lucas. En témoigne l'intervention de Tchebychev [1878] qui développe les éléments d'une nouvelle théorie de la déformation des plans-tissus, dont l'idée lui serait venue à la suite des communications effectuées par Édouard Lucas sur la géométrie du tissage [Laisant 1879, p. 92].

Gaston Darboux émet une réserve sur l'intérêt de l'intervention de Tchebychev, dans une lettre à Jules Hoüel du 3 septembre 1878 : « À propos du congrès de l'Association Française, [...] Tchebychev a fait une communication sur la coupe des habits. C'est très original, mais très ingénieux. Le "mais" vous prouve que je ne prends pas original dans le meilleur sens possible »²⁷. Peut-être faut-il voir là une appréciation du milieu universitaire français sur ce type de recherche mathématique, qui rejoint celle de Joseph Bertrand mentionnée plus haut. Quoique les problèmes abordés demeurent très éloignés de ceux de Lucas, l'influence de la géométrie des tissus est évoquée dans la publication en langue française des œuvres de Tchebychev [*Œuvres* 1907, t. 2, p. 708] :

« Après avoir indiqué que l'idée de cette étude lui est venue lors de la communication faite, il y a deux ans, au Congrès de Clermont-Ferrand, par M. Édouard Lucas, sur la géométrie du tissage des étoffes à fils rectilignes, M. Tchebychev pose les principes généraux pour déterminer les courbes suivant lesquelles on doit couper les différents morceaux d'une étoffe, pour en faire une gaine bien ajustée, servant à envelopper un corps de forme quelconque »²⁸.

Les liens scientifiques entre les deux hommes se poursuivent dans une correspondance où la question de la géométrie du tissage demeure présente. Une lettre de Lucas à Tchebychev en date du 16 mars 1890

²⁷ Archives de l'Académie des sciences de Paris, dossier Gaston Darboux.

²⁸ Le congrès de Clermont de l'AFAS est celui de 1876. On pourra consulter le texte de la communication de Tchebychev, écrit originellement en langue française et non publié en cette langue, dans [Décaillot 1999, vol. 2, p. 128–143].

contient en effet l'information suivante :

« Je vous adresse une petite note que je vous prie de présenter à l'Académie; elle contient une démonstration très simple de la loi de réciprocité. Je l'ai trouvée par hasard, dans le tissage »²⁹.

La démonstration « très simple » que donne Lucas de la loi de réciprocité quadratique est publiée en 1890, dans le *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg* [Lucas 1890].

La classification des démonstrations de la loi de réciprocité quadratique qui se succèdent de 1801 à 1897, depuis celles de Gauss qui en fait paraître sept, est effectuée par Paul Bachmann [1902, p. 203–204]. Les démonstrations se groupent en cinq catégories selon leur référence à la méthode d'induction, à la théorie des congruences, aux formes quadratiques, aux racines primitives de l'unité ou au théorème intitulé « lemme de Gauss ». La démonstration de Lucas de 1890 prend place parmi celles qui utilisent le lemme de Gauss et fournissent une version géométrique de la loi de réciprocité [Bachmann, 1902, p. 240]; en cela elle présente des similitudes avec la démonstration d'Eisenstein [1844b].

Le symbole de Legendre (a/p)

Le symbole de Legendre permet de classer les entiers de \mathbb{Z}_p , où p désigne un nombre premier impair, en résidus quadratiques et non-résidus quadratiques.

Si a est un entier non multiple de p , le théorème de Fermat permet d'écrire $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$ et par conséquent $a^{(p-1)/2} = \pm 1 \pmod{p}$. Si $a^{(p-1)/2} = +1 \pmod{p}$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions dans \mathbb{Z}_p : a est alors résidu quadratique de p . Dans le cas contraire, l'équation $x^2 = a$ n'a aucune solution dans \mathbb{Z}_p et a n'est pas résidu quadratique³⁰ de p .

Le symbole de Legendre (a/p) prend par définition les valeurs $+1$ ou -1 selon que a est ou n'est pas résidu quadratique de p .

²⁹ Archives académiques de Russie (Moscou). Cinq lettres d'Édouard Lucas à P.L. Tchebychev sont répertoriées aux Archives académiques de Moscou, aimablement transmises par Natalia Ermolaeva. Elles sont datées des 7 décembre 1878, 12 avril 1889, 16 mars 1890, 21 mai 1890, 10 juin 1891. Cf. [Décaillot 1999, vol. 1, p. 154–157].

³⁰ On pourra consulter à ce sujet [Hardy et Wright 1938] ou, pour une démonstration moderne de ces résultats, [Samuel 1967] et [Serre 1970].

Le lemme de Gauss

Le lemme de Gauss permet un calcul arithmétique du symbole de Legendre, en faisant appel à la notion de reste « minimal ». Tout entier a est en effet égal à un multiple de p augmenté d'un reste minimal situé dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}p, +\frac{1}{2}p[$. On désigne par $\mu(a, p)$ le nombre d'éléments de la suite $\{a, 2a, 3a, \dots, a\}$ dont le reste minimal, dans la division par p , est négatif. Le lemme de Gauss permet d'exprimer (a/p) sous la forme

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\mu(a,p)}.$$

Ce lemme a une interprétation simple sur un échiquier représentatif d'un satin de module p et de décochement a . Dans la division par p , le reste minimal d'un nombre est négatif si (et seulement si) son reste usuel dans la division par p est situé dans l'intervalle $[+\frac{1}{2}p, p[$. Pour déterminer $\mu(a, p)$ il suffit de compter dans les $\frac{1}{2}(p-1)$ premières colonnes (à partir de la colonne 1) le nombre de cases ombrées dont l'ordonnée est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}p$.

La loi de réciprocité quadratique

Les lettres p et q désignant deux nombres premiers impairs distincts, la loi de réciprocité quadratique relie les symboles de Legendre (q/p) et (p/q) :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}.$$

Lucas utilise l'échiquier associé à un satin de module $2q$ et de décochement p (en supposant $p < 2q$, ce qui est toujours possible), dont il ne conserve que les $q-1$ premières colonnes (à partir de la colonne 1). Ainsi pour $q = 7$ et $p = 11$, sont construits, sur l'armure d'un satin de module 14 et de décochement 11, les points de liage situés dans les colonnes 1 à 6 et associés aux six premiers multiples de 11 (modulo 14) : $1 \cdot 11 = 0 \cdot 14 + 11$; $2 \cdot 11 = 1 \cdot 14 + 8$; $3 \cdot 11 = 2 \cdot 14 + 5$; $4 \cdot 11 = 3 \cdot 14 + 2$; $5 \cdot 11 = 3 \cdot 14 + 13$; $6 \cdot 11 = 4 \cdot 14 + 10$.

Lucas établit tout d'abord que la parité du nombre $\mu(7, 11)$ est celle de la somme des parties entières (mod. 14) de ces six multiples, soit $\mu(7, 11) = 0 + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 = 13 \pmod{2}$; puis que le nombre $2\mu(11, 7)$ est égal au nombre de points de liage dont l'ordonnée est supérieure ou égale à $q = 7$, soit ici $2\mu(11, 7) = 4$ et $\mu(11, 7) = 2$. La loi de réciprocité quadratique est ici vérifiée puisque $\frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{1}{2}(q-1) = 5 \cdot 3 = \mu(7, 11) + \mu(11, 7) \pmod{2}$.

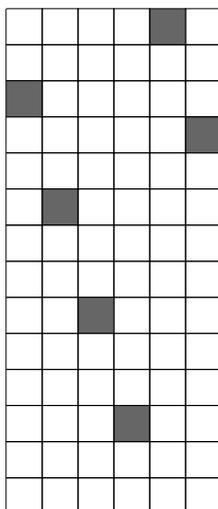


Figure 11. Extrait du satin de module 14, décochement 11

Ces deux résultats ont une interprétation visuelle simple. Le décompte des points de liage dont l'ordonnée est supérieure ou égale à $q = 7$ est immédiat. Les parties entières des multiples de 11 (mod. 14) sont aussi aisément repérables sur le schéma d'armure du satin ci-dessus. L'ordonnée d'un point de liage situé dans la colonne k est en effet $y = kp$, ce dernier nombre étant calculé modulo p . De la colonne k à la colonne $k + 1$, l'ordonnée du point de liage est augmentée de p : si cet ajout fait franchir au point de liage la frontière de l'armure, et donc régresser son ordonnée (mod. p), la partie entière du multiple $(k + 1)p$ est égale à celle de kp augmentée de 1 ; sinon elle demeure égale à celle de kp . La partie entière du premier multiple étant nulle (car $p < 2q$), les parties entières des multiples de p peuvent ainsi être repérées de proche en proche. Ainsi la partie entière de 22 est 1, celle de 33 est 2 (mod. 14), etc.

La démonstration de Lucas

La démonstration de Lucas, dont nous transcrivons ci-dessous les étapes mathématiques, est une formalisation des résultats précédents obtenus sur l'échiquier.

Dans la suite des premiers multiples de q , $S = \{q, 2q, 3q, \dots, \frac{p-1}{2}q\}$, λ_n désigne le nombre de termes qui sont inférieurs à $\frac{1}{2}np$; λ_n est égal à la

partie entière $E(np/2q)$ du nombre $np/2q$. Un dénombrement élémentaire permet d'établir que le nombre d'éléments de S dont le reste minimal est négatif (dans la division par p) est $\mu(q, p) = \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_3 + \dots + \lambda_{q-1} - \lambda_{q-2}$, soit encore

$$\mu(q, p) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{q-2} + \lambda_{q-1} \pmod{2}.$$

Inversement, dans la suite $\Sigma = \{p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p\}$ des premiers multiples de p , on peut rapprocher les deux multiples np et $(q-n)p$ en effectuant leur division par $2q$:

$$np = 2q\lambda_n + r_n, \quad (q-n)p = 2q\lambda_{q-n} + r_{q-n}, \quad (n = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(q-1)).$$

Les deux restes obtenus ci-dessus sont compris dans l'intervalle $]0, 2q[$, car q ne divise ni p premier, ni n , ni $q-n$ inférieurs à q . La somme des deux égalités précédentes permet d'écrire

$$pq = 2q(\lambda_n + \lambda_{n-q}) + r_n + r_{n-q}.$$

La somme des restes est un multiple de q situé dans l'intervalle $]0, 4q[$. Ce multiple ne peut être pair puisque le nombre pq est impair : il ne peut être que q ou $3q$. Donc

$$(*) \quad pq = 2q(\lambda_n + \lambda_{n-q}) + q \text{ ou } 3q,$$

ce qui permet d'écrire

$$(**) \quad p - 1 = 2(\lambda_n + \lambda_{n-q}) + 0 \text{ ou } 2$$

En ajoutant les égalités (**), pour tous les entiers n de 1 à $\frac{1}{2}(q-1)$, on obtient

$$\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} = \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_i + \nu,$$

soit encore

$$\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} = \mu(q, p) + \nu \pmod{2}.$$

Le nombre 2ν représente le nombre de restes égaux à 2 dans les égalités (**). Lucas établit le fait que 2ν représente aussi le nombre

d'éléments de l'ensemble Σ admettant un reste minimal négatif (dans la division par $2q$) et que ν est le nombre d'éléments de l'ensemble $S' = \{p, 2p, 3p, \dots, \frac{1}{2}(q-1)p\}$ admettant un reste minimal négatif (dans la division par q). Donc $\nu = \mu(p, q)$ et l'on peut écrire la congruence

$$\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} = \mu(q, p) + \mu(p, q) \pmod{2},$$

ce qui entraîne la loi de réciprocité quadratique à l'aide du lemme de Gauss³¹.

Née de la rencontre entre le mathématicien Édouard Lucas et les industriels amiénois du tissage, la géométrie des tissus est développée dans le cadre de l'Association pour l'avancement des sciences, dont les statuts stipulent (article 1) :

« L'association se propose de favoriser par tous les moyens en son pouvoir le progrès et la diffusion des sciences au double point de vue du perfectionnement de la théorie pure et du développement des applications pratiques »³².

L'intérêt des industriels pour les travaux de Lucas est encore perceptible en 1904, où E. Arnould, directeur de l'École des hautes études industrielles de Lille, se réfère aux travaux de Lucas dans une lettre à Henri Delannoy :

« Je voudrais précisément lire sa brochure sur la théorie du tissage (génération des tissus), quoique en italien, et je te serais reconnaissant de me l'envoyer si tu le peux, l'éditeur italien m'ayant écrit qu'il n'en avait plus »³³.

³¹ $E(x)$ désigne la partie entière d'un nombre x . À partir des congruences

$$\mu(q, p) = \sum_{h=1}^{(p-1)/2} E\left(\frac{hq}{p}\right) \quad \text{et} \quad \mu(p, q) = \sum_{k=1}^{(q-1)/2} E\left(\frac{kp}{q}\right) \pmod{2},$$

la démonstration d'Eisenstein [1844b] consiste à prouver géométriquement l'égalité

$$\sum_{h=1}^{(p-1)/2} E\left(\frac{hq}{p}\right) + \sum_{k=1}^{(q-1)/2} E\left(\frac{kp}{q}\right) = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} \pmod{2}.$$

³² *Congrès de l'AFAS*, 1872, p. 1.

³³ Lettre de E. Arnould à H. Delannoy, 16 août 1904, Archives Henri Delannoy

Cet intérêt peut avoir entraîné la publication en 1911 de l'intervention de Lucas, traduite de l'italien par A. Gérardin et A. Aubry [Lucas 1911].

La géométrie des tissus connaît un développement que les sphères académiques françaises ignorent, mais qui gagne celles de Saint-Pétersbourg. Le rôle exemplaire de l'AFAS peut être ici souligné : par le tremplin qu'elle assure à une discipline liée dès l'origine à une réalisation industrielle, elle lui permet de parvenir à une forme de reconnaissance académique. L'œuvre d'Édouard Lucas est représentative de ce mouvement d'« avancement » des sciences ; l'originalité de ses travaux les situe en effet au carrefour des sciences appliquées et des « hautes mathématiques ».

2. LES MOSAÏQUES DE THORVALD THIELE

Carl Friedrich Gauss a abordé le problème des résidus biquadratiques dans \mathbb{Z}_p , c'est-à-dire la résolution d'équations du type $x^4 = z \pmod{p}$, où le nombre premier p est de la forme $4n + 1$ et l'entier z n'est pas multiple de p . Ces recherches aboutissent à la publication de deux mémoires sur la *Theoria residuorum biquadraticorum*, [Gauss 1828] et [Gauss 1832], même si la réflexion de Gauss sur ce thème semble bien antérieure à 1828³⁴. L'étude du caractère biquadratique des nombres de \mathbb{Z}_p , en particulier du nombre 2, se heurte à des difficultés que Gauss ne peut surmonter par la théorie des nombres rationnels ; il établit alors les bases d'une toute nouvelle théorie des nombres appelés depuis les « entiers de Gauss » (*komplexe ganze Zahlen*), c'est-à-dire des nombres de la forme $\{m + n\sqrt{-1} ; m \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$. Il apparaît que le caractère biquadratique du nombre 2 est lié à la décomposition de p en somme de carrés, c'est-à-dire à la représentation de p sous la forme de la norme d'un entier de Gauss³⁵. Les notions de nombres premiers, de décomposition en facteurs premiers se

[liasse 20], *Société des sciences naturelles et archéologiques de la Creuse*, Archives départementales de la Creuse (Guéret). Henri Delannoy (1833–1915), polytechnicien, est militaire de carrière. Retiré près de Guéret, lié à Lucas, Laisant et Lemoine, il intervient fréquemment à l'AFAS. À la mort de Lucas, il rédige et met en forme, à partir des notes de l'auteur, les volumes 3 et 4 des *Récréations mathématiques* et l'*Arithmétique amusante* publiés à titre posthume. Cf. [Autebert-Décaillot-Schwer 2003].

³⁴ Sur l'historique de cette question, voir [Bachmann 1922–1923] et la lettre de Gauss à Dirichlet du 30 mai 1828 [Gauss, *Werke* 2, p. 516].

³⁵ On désigne par « norme » d'un entier de Gauss $m + n\sqrt{-1}$ le nombre $m^2 + n^2$.

généralisent aux entiers de Gauss, ainsi que le « petit » théorème de Fermat. Gauss fournit également l'énoncé d'une loi de réciprocité quadratique et celui d'un « lemme de Gauss », tous deux étendus aux entiers complexes. Ces travaux seront poursuivis par Jacobi et, ultérieurement, par Eisenstein et Kummer.

L'utilisation de congruences au sein des entiers complexes est une originalité de ces recherches. Elle se retrouve dans une étude élaborée par l'astronome danois Thorvald Thiele en 1873, concernant la représentation de résidus quadratiques complexes, et diffusée par leur auteur au congrès scientifique des Scandinaves à Copenhague [Thiele 1874]³⁶. Le problème de Thiele est présenté à l'AFAS par Ole J. Broch (1818–1889), professeur de mathématiques à l'université de Christiania et membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris. Au congrès de 1874, ce dernier communique les travaux mathématiques de Thorvald Thiele sur certaine représentation graphique des nombres complexes qui « souvent frappe les yeux par la beauté du dessin en mosaïque qu'elle offre » [Broch 1874, p. 1175].

Par la suite, nous adopterons la notation moderne i au lieu de $\sqrt{-1}$. La lettre A désigne l'ensemble des entiers de Gauss et I le sous-ensemble de A formé des multiples d'un nombre non réel $\pi = a + ib$ de A :

$$A = \{x + iy; x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}, \quad I = \{\lambda\pi; \lambda \in A\}.$$

Le nombre π est supposé premier au sein des entiers de Gauss, ce qui entraîne que son module $h = a^2 + b^2$ est premier dans les entiers naturels³⁷. Le problème de Thiele est celui de la recherche au sein de A des résidus quadratiques de π , c'est-à-dire des entiers de Gauss qui sont des carrés parfaits modulo le nombre complexe π . Il s'agit de rechercher les nombres z

³⁶ Thorvald Thiele (1838–1910) est né à Copenhague; il est professeur d'astronomie à l'université et dirige l'observatoire de cette ville, où il développe de nouvelles méthodes de détermination des orbites des corps célestes. Ses travaux portent sur les erreurs systématiques et accidentelles en astronomie, ainsi que sur la recherche des solutions numériques au problème des trois corps. Par ailleurs il dirige une compagnie d'assurances.

³⁷ Les entiers de Gauss premiers comprennent :

1) les nombres $a + ib$ dont le module $h = a^2 + b^2$ est un nombre premier de \mathbb{N} . Ceci implique que a et b sont non nuls et que h est de la forme $4n + 1$;

2) les entiers naturels premiers de \mathbb{N} qui ne sont pas somme de deux carrés et leur produit par $-1, i, -i$.

de A qui peuvent s'écrire

$$z = (x + iy)^2 + \lambda\pi \text{ avec } \lambda \in A, \quad \text{ou } z = (x + iy)^2 \pmod{\pi}.$$

Parmi les entiers de Gauss qui sont des résidus quadratiques de π , Thiele distingue les éléments congrus à 0, c'est-à-dire les éléments de I^{38} .

Ce problème général peut être résolu dans un ensemble beaucoup moins vaste que A . En désignant par \mathbb{Z}_h l'ensemble des entiers modulo h , qui ici est un corps, on note A' l'ensemble des entiers de Gauss à coefficients dans \mathbb{Z}_h :

$$A' = \{x' + iy' ; x' \in \mathbb{Z}_h, y' \in \mathbb{Z}_h\}.$$

Il suffit d'étudier les résidus quadratiques de π sur l'échiquier carré A' dont la dimension est h , module du nombre π , puis de les déplacer par des translations d'amplitude multiple de h parallèlement aux axes de coordonnées : les résidus quadratiques dans A s'obtiennent à partir de ceux de A' , au moyen des translations complexes λh , où λ est un entier de Gauss³⁹. Au sein de A' le sous-ensemble I' formé des multiples de π , engendre I par les translations complexes du type précédent.

La parenté des travaux de Thiele avec les approches de Lucas apparaît tout d'abord dans l'utilisation de A' , qui figure l'échiquier carré de taille minimale où peuvent être représentées les solutions complexes du problème des résidus quadratiques.

Cette similitude des problèmes abordés par Thiele et Lucas n'échappe pas à leurs contemporains. C.-A. Laisant remarque que les résultats obtenus par Thiele « se rapprochent beaucoup de ceux de M. Lucas » dans l'étude de la géométrie du tissage [Laisant 1879, p. 85]. La ressemblance n'a rien de superficiel ; en effet la caractéristique des éléments $x + iy$ de I' est de satisfaire à l'équation⁴⁰

$$y = ba^{-1}x \pmod{h}.$$

³⁸ En utilisant une terminologie moderne, A est un anneau et I un idéal de A .

³⁹ En effet si $z = (x + iy)^2 \pmod{\pi}$, et si z' et $x' + iy'$ désignent les éléments de A' congrus à z et à $x + iy \pmod{h}$, on a $z' = (x' + iy')^2 \pmod{h}$. En remarquant que h est dans A un multiple de π , car $h = (a - ib)\pi$, on a $z' = (x' + iy')^2 \pmod{\pi}$, donc z' est résidu quadratique de π . Inversement tout nombre z obtenu à partir d'un résidu quadratique z' de A' par translation multiple de h , $z = z' + \lambda h$, est résidu quadratique dans A , puisque h est un multiple de π .

⁴⁰ Tout nombre de I s'écrit $\lambda\pi = (m + in)(a + ib) = x + iy$ avec $y = na + mb$ et

La comparaison s'impose entre les éléments de I' et les points de liage d'un satin de module premier h , dont le décochement est défini par $\alpha = ba^{-1}$; comme $\alpha^2 + 1 = 0 \pmod{h}$, ce satin est carré.

L'ensemble des multiples complexes d'un nombre de Gauss premier $\pi = a + ib$ peut ainsi être représenté par les points de liage d'un satin carré, dont le module premier h est une somme de deux carrés $h = a^2 + b^2$.

Les dessins en mosaïques de Thiele sont une représentation de l'échiquier A' de dimension h où l'on distingue trois types de nombres : les résidus quadratiques congrus à 0 (mod. π), c'est-à-dire les éléments de I' , figurés en noir ; les résidus quadratiques non congrus à 0 représentés en gris ; en blanc, tous les nombres qui ne sont pas des résidus quadratiques de π .

« Dans les dessins suivants, les restes quadratiques complexes sont désignés en noir s'ils sont divisibles par le module, en gris, s'ils ne sont pas divisibles par le module ; les non-restes sont désignés en blanc [...]. Ce sont les restes quadratiques aux modules premiers qui donnent les dessins, souvent fort élégants, qui pourront bien servir dans les arts mosaïques » [Broch 1874, p. 1175].

- *Exemple 1* : $\pi = 1 + i$

Dans ce cas $h = 2$ et \mathbb{Z}_h est ici le corps $\{0, 1\}$. L'ensemble A' comporte alors quatre éléments représentés par les cases de l'échiquier carré de format 2. I' est composé des deux éléments $\{0, 1+i\}$ en noir sur l'échiquier. Tous les nombres de A' sont des résidus quadratiques de π^{41} . En gris figurent les résidus non multiples de π . On peut reconnaître dans la mosaïque correspondante l'armure fondamentale de la toile (ou drap).

1		
0		
	0	1

Figure 12. Illustration de l'exemple 1

$x = ma - nb$. Or $y = na + mb = ba^{-1}(ma - nb) \pmod{h}$. Un élément de I est congru (mod. h) à un élément de I' vérifiant $y = ba^{-1}x$. Inversement si $y = ba^{-1}x \pmod{h}$, le nombre $x + iy = xa^{-1}\pi \pmod{h}$ et par conséquent $x + iy$ est un élément de I , puisque h est un multiple de π dans A .

⁴¹ Ainsi $i = i^2 \pmod{1+i}$.

- *Exemple 2* : $\pi = 2 + i$

Dans ce cas $h = 5$ et \mathbb{Z}_h est le corps $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; l'échiquier A' comporte 25 éléments.

1) La recherche des nombres $z = x + iy$ multiples de π dans A' conduit à l'équation $y = 3x$ dans \mathbb{Z}_h , ce qui permet de déterminer

$$I' = \{0, 1 + 3i, 2 + i, 3 + 4i, 4 + 2i\}.$$

2) Les résidus quadratiques non nuls de $2 + i$, au sein de A' , sont les dix nombres⁴²

$$2i, 3i, 1, 1 + i, 2 + 3i, 2 + 4i, 3 + i, 3 + 2i, 4, 4 + 4i.$$

Selon les conventions de Thiele, les quinze résidus quadratiques sont représentés par les cases ombrées noires ou grises de l'échiquier carré de format 5, les cases blanches étant les non-résidus. On reconnaît dans les éléments de I' (cases noires) les points de liage d'un satin carré de module 5 et de décochement 3.

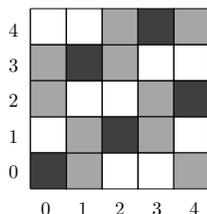


Figure 13. Illustration de l'exemple 2

- *Exemple 3* : $\pi = 17 + 8i$

La norme $h = 17^2 + 8^2 = 353$ étant un nombre premier, π est un entier de Gauss premier et \mathbb{Z}_h est un corps. La recherche des multiples complexes de π conduit aux nombres $x + iy$ vérifiant l'équation $17x + 8y = 0$, ou encore $y = 42x$, dans \mathbb{Z}_h . L'ensemble I' est ici constitué des nombres $x + 42ix$, où x est un entier de \mathbb{Z}_h :

$$I' = \{0, 1 + 42i, 2 + 84i, \dots, 9 + 25i, 17 + 8i, \dots\}.$$

⁴² On peut écrire par exemple $2i = (1 + i)^2 = (2 + 3i)^2 \pmod{\pi}$. Dans A' l'équation $z^2 = 2i \pmod{\pi}$ admet ainsi les solutions $1 + i$ et $2 + 3i$, ainsi que leurs opposés $4 + 4i$ et $3 + 2i$. On peut de même écrire $1 + i = 4 \pmod{\pi}$. Dans A' , l'équation $z^2 = 1 + i \pmod{\pi}$ admet la solution 2 et son opposé 3. Les nombres $2i$ et $1 + i$ sont ainsi résidus quadratiques de π .

Ses éléments sont représentés par les cases noires de la mosaïque de Thiele, points de liage d'un satin carré de module 353 et de décochement 42 (voir schéma joint). Les cases ombrées en gris clair figurent les résidus quadratiques non multiples de π et les cases blanches les non-résidus.

La complexité et l'élégance des mosaïques obtenues se confirment lorsque s'accroît le module du nombre π dont on recherche les résidus quadratiques et nous présentons ci-joint certaines de celles qui figurent dans [Broch 1874]. Thiele poursuit son étude par quelques représentations de nombres complexes dans lesquelles l'ensemble des entiers de Gauss A est remplacé par l'ensemble $B = \{a + jb; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, où j désigne une racine cubique complexe de 1. Les mosaïques obtenues sont alors fondées sur des pavages triangulaires ou hexagonaux du plan.

Issus d'analyses initiales très différentes, les travaux du Danois Thiele et la géométrie des tissus de Lucas mettent à l'honneur la composition de figures régulières dont l'analogie frappe Laisant : satins carrés ou résidus quadratiques d'un entier de Gauss conduisent à des représentations semblables sur l'échiquier. Cette convergence réelle peut s'interpréter grâce à la connaissance des théories de Gauss. La géométrie des tissus, science « curieuse », se constitue autour de problèmes directement liés au tissage. Ses résultats concordent avec ceux de l'arithmétique supérieure et la concordance visuelle mentionnée ci-dessus prend effectivement sens : les points de liage d'un satin carré sont les multiples complexes d'un entier de Gauss premier, dont les caractéristiques sont liées au module et au décochement du satin. Ainsi des propriétés mathématiques théoriques sont incarnées dans des objets, tissus de satins ou toiles, tout en étant représentées par des réseaux réguliers de points du plan. Après celle des cristallographes, l'attention des géomètres est attirée par ces réseaux, qui vont devenir un thème d'étude, en particulier sous l'influence de Laisant.

3. QUINCONCES ET PAVAGES

La géométrie des quinconces

Les travaux de Thiele au même titre que ceux de Lucas impulsent de nouvelles réflexions, qui s'organisent en France autour de la « géométrie des quinconces », aussi bien à la SMF qu'à l'AFAS, principalement dans

les années 1878–1879⁴³.

« Les résultats obtenus dans la géométrie du tissage donnent lieu à une nouvelle géométrie connue déjà sous le nom de Géométrie des quinconces; on trouvera dans le *Bulletin de la Société mathématique des développements curieux* dus à MM. Laisant, de Polignac et Laquière » [Laisant 1879, p. 85].

La géométrie des quinconces a pour objet l'étude de systèmes discontinus de points formant des réseaux réguliers plans ou spatiaux. Dans le plan, la base d'un réseau est constituée de deux vecteurs indépendants u et v , auxquels est associé le réseau des points de la forme $au + bv$ (a et b entiers relatifs). Ces points, situés aux sommets de parallélogrammes, forment un ensemble invariant par les translations de vecteurs multiples entiers de u ou de v ⁴⁴.

L'étude des systèmes réguliers de points dans le plan ou dans l'espace suscite l'intérêt de plusieurs personnalités scientifiques au XIX^e siècle : ainsi en est-il d'Auguste Bravais dont les mémoires ([1849a], [1849b], [1850]) concernent la cristallographie et on peut y rattacher Eugène Catalan, dont le mémoire [1865] est consacré aux polyèdres. Les principales interventions sur le thème des quinconces à la SMF sont liées aux questions d'arithmétique diophantienne, certaines propriétés des nombres pouvant être illustrées par celles d'un motif géométrique. Ainsi E. Laquière considère-t-il que la géométrie des quinconces n'est autre que « la peinture graphique de la théorie des nombres » (cité dans [Laisant 1879, p. 63]).

De l'impossibilité de situer trois cases d'un échiquier aux sommets d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier, résulte par exemple l'impossibilité de résoudre en nombres entiers les équations $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 2(ux + vy)$ [Laquière 1879].

⁴³ Les références à la géométrie des quinconces sont [Lucas 1877a], [Lucas 1878b], [Laisant 1878], [de Polignac 1878], [Laquière 1879] et [Laisant 1887b].

E.M. Laquière, capitaine d'artillerie, ingénieur civil en Algérie, publie de nombreuses contributions au *Bulletin* de la SMF, aux *Comptes rendus* de l'AFAS ainsi qu'aux *Nouvelles annales de mathématiques*; elles concernent la géométrie, les quinconces, les probabilités et les carrés magiques.

⁴⁴ Le terme « quinconce » est dû au naturaliste anglais Thomas Browne (1605–1682). C'est une disposition d'arbres en réseaux rectangulaires comprenant les centres des rectangles que Thomas Browne désigne par le terme *quinconcial*, considérant le quinconce $\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix}$ comme son élément fondamental, même si une telle disposition n'a en fait que peu de relation avec le chiffre 5. On peut consulter à ce propos [Weyl 1952].

L'interaction entre géométrie et nombres peut avoir lieu dans les deux sens; ainsi le prince de Polignac [1878] fournit une représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$. C'est à l'AFAS que Laisant [1887b] répond aux questions posées par Lucas [1877a] dans la *Nouvelle correspondance mathématique* : à quelles conditions les quinconces engendrent-ils des formes géométriques données : losange, rectangle ou carré? Une représentation « assez curieuse » de la suite des décimales de fractions périodiques peut s'en déduire.

Par une voie indépendante des recherches françaises, la géométrie des réseaux réguliers de points trouve un développement de grande portée dans l'ouvrage de Hermann Minkowski [1896], *Geometrie der Zahlen*, et dans celui de D. Hilbert et S. Cohn-Vossen [1932], *Anschauliche Geometrie*. Ces réseaux peuvent contribuer à résoudre de difficiles questions de théorie des nombres, de théorie des fonctions et de cristallographie. Ainsi en est-il du problème gaussien : dans un réseau carré plan, combien trouve-t-on de points à l'intérieur ou sur la frontière d'un cercle de rayon r , centré en un point du réseau⁴⁵? Un problème de Minkowski y trouve également réponse : sur un réseau plan construit par translations d'un parallélogramme initial de surface 1, un carré de côté 2, centré en un point du réseau, contient au moins un point du réseau autre que son centre⁴⁶. L'étude du groupe de transformations laissant invariant l'ensemble des points d'un réseau plan ou spatial revêt une importance particulière en cristallographie et donne lieu à des développements mathématiques, l'établissement des classes cristallographiques faisant appel à la théorie algébrique des groupes.

*Les mosaïques de Charles-Ange Laisant*⁴⁷

La construction de pavages et carrelages réguliers permettant de recou-

⁴⁵ Ce nombre $f(r)$ peut être calculé en dénombrant les décompositions des entiers $n \leq r^2$ en somme de deux carrés; la valeur limite de $f(r)/r^2$, lorsque r tend vers l'infini, permet le calcul de la somme de la série de Leibniz $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$.

⁴⁶ Une approximation des nombres réels par des suites de rationnels à convergence rapide s'en déduit. Il est possible de calculer la distance minimale séparant deux points d'un réseau de ce type, ainsi que la densité de l'ensemble des points du réseau. À propos du théorème de Minkowski, on peut consulter [Hilbert et Cohn-Vossen 1932, p. 41], [Hardy et Wright 1938, p. 411].

⁴⁷ Charles-Ange Laisant (1841–1920) est né à la Basse-Indre (Loire inférieure). Élève de l'École polytechnique en 1859, il en sort officier du génie. Il prend part avec le titre de capitaine à la guerre de 1870, où sa conduite brillante l'amène à être chargé des travaux

vrir une surface plane est un problème géométrique et artistique très ancien. L'étude des réseaux de quinconces, qui constituent un pavage régulier du plan par des parallélogrammes, s'inscrit dans l'étude générale des pavages qui connaît un développement à la fin du XIX^e siècle. Ainsi le polytechnicien A. Badoureau publie une note aux *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* [1878] et un mémoire au *Journal de l'École polytechnique* [1881] concernant les « figures isocèles », en référence aux travaux d'Eugène Catalan et de Joseph Bertrand sur les polyèdres. Le *Bulletin de la Société philomatique de Paris* accueille une étude de Lucien Lévy [1891] sur les pavages du plan à l'aide de polygones réguliers. Ces questions sont reprises dans la publication populaire des « Mathematical Questions » de l'*Educational Times*⁴⁸, ainsi que dans la revue *L'Intermédiaire des mathématiciens*⁴⁹.

En 1881, Charles-Ange Laisant propose une construction originale de pavages plans, dont le fondement théorique est la représentation graphique de structures algébriques désignées de nos jours sous le terme de groupes finis.

C'est un problème proposé en 1880 par Eugène Catalan aux lecteurs de la *Nouvelle correspondance mathématique*⁵⁰ qui inspire à Laisant [1881a, p. 87] une étude donnant lieu « à des dessins mosaïques assez curieux et

de défense du fort d'Issy. En février 1876, Laisant est élu député de Nantes et siège au groupe de l'Union républicaine et à l'extrême gauche. Réélu de 1877 à 1889, il devient en 1885 député de la Seine puis, en 1889, élu du XVIII^e arrondissement de Paris. Lié au général Boulanger, Laisant est membre du comité directeur de la *Ligue des patriotes* et impliqué dans le procès qui lui est intenté. L'échec du mouvement boulangiste le décourage et, après dix-huit années de vie parlementaire, il ne se représente pas aux élections de 1893. À la Chambre, il est chargé de la question du service militaire, dont il propose à plusieurs reprises la réduction à trois ans et intervient également en faveur de l'avancement des sciences [Décaillot 1999]. Laisant mène parallèlement une activité de journaliste : il est directeur du *Petit Parisien* de 1879 à 1881 et fonde en 1881 *La République radicale* qu'il dirige jusqu'en 1886. Au moment de l'affaire Dreyfus, il se prononce pour la révision du procès. À son retour dans la vie civile, Laisant devient répétiteur de mécanique puis examinateur d'admission à l'École polytechnique, professeur à l'École Sainte-Barbe, examinateur à l'Institut d'agronomie. Laisant est neveu d'Ange Guépin, médecin ophtalmologue nantais [Dhombres 1994].

⁴⁸ Voir le problème 6904 de W.A. Whitworth [Miller (éd.) 1884, vol. 40, p. 59].

⁴⁹ Voir la question 262 de L. Lévy dans *L'Intermédiaire des mathématiciens* [1894, 1, p. 147] et [1900, 7, p. 153] et le problème 3224 de A. Aubry dans cette même revue [1907, 14, p. 122–124].

⁵⁰ Voir la *Nouvelle correspondance mathématique*, t. VI, 1880, p. 141. Pour la biographie de E. Catalan, on peut consulter [Jongmans 1996].

symétriques ». Il s'agit de développer le produit $(1-a)(1-b)(1-c)\cdots(1-r)$ selon la règle suivante : tous les termes d'un multiplicande sont multipliés d'abord par 1, en conservant leur ordre, puis par $-x$ dans ce même ordre (x prenant successivement les valeurs b, c, \dots, r). Si le produit initial comporte m facteurs, le nombre de termes ainsi obtenus est 2^m . La question de Catalan porte sur le signe du n -ième terme figurant dans ce développement⁵¹. La solution algébrique de Laisant consiste à écrire le nombre n en numération binaire, à désigner par s la somme de ses chiffres et par z le nombre de zéros qui terminent son écriture binaire (sur la droite). Le n -ième élément du développement admet pour signe $(-1)^{s+z-1}$.

Laisant propose une solution graphique de ce problème dans le cas où m est pair, permettant de lire la succession des signes obtenus sur un échiquier carré⁵². Nous adoptons ici les conventions de représentation dues à Laisant : la suite des signes s'obtient en parcourant chaque ligne d'un échiquier de taille m de gauche à droite, la succession des lignes s'effectuant du haut vers le bas de l'échiquier. Les signes sont figurés par des cases colorées (une case blanche figure le signe $+$ et une case noire le signe $-$) dont la disposition est déterminée de proche en proche, à partir de l'échiquier E_2 de dimension 2, représentant les signes du développement d'un produit de deux facteurs $(1-a)(1-b)$. Ce dernier peut s'interpréter comme la table du groupe multiplicatif $\{+1, -1\}$; on lui associe l'échiquier complémentaire E'_2 résultant d'une épreuve photographique « en négatif » du premier (partie gauche de la figure 14).

⁵¹ Ainsi $(1-a)(1-b) = 1-a-b+ab$ et $(1-a)(1-b)(1-c) = 1-a-b+ab-c+ac+bc-abc$. Laisant présente le problème sous une forme équivalente en formant les mots de deux lettres selon les règles

$$\begin{aligned} A_1 &= AB, & B_1 &= BA, \\ A_2 &= A_1B_1 = ABBA, & B_2 &= B_1A_1 = BAAB, \\ A_3 &= A_2B_2 = ABBABAAB, & B_3 &= B_2A_2 = BAABABBA. \end{aligned}$$

En continuant ainsi « indéfiniment », la question devient alors la suivante : la n -ième lettre écrite dans A_m est-elle A ou B ($1 \leq n \leq 2^m$) ?

⁵² Le cas d'un nombre impair de facteurs n'est pas évoqué par Laisant, bien que sa résolution graphique puisse s'effectuer de manière analogue : en juxtaposant les échiquiers carrés E_m et E'_m définis ci-dessous on obtient en effet l'échiquier rectangulaire E_{m+1} représentant les signes apparus dans le développement d'un produit de $m+1$ facteurs.

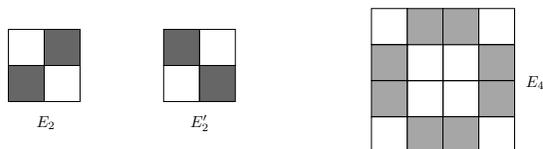


Figure 14. La solution graphique de Laisant : les cas $m = 2$ et $m=4$

L'échiquier E_4 correspondant aux signes du développement d'un produit de quatre facteurs $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ est obtenu en remplaçant, au sein de E_2 , les cases blanches par E_2 et les cases noires par E'_2 (partie droite de la figure 14).

Lorsque m augmente de 2, la dimension de l'échiquier correspondant double. L'échiquier E_{m+2} est obtenu à partir de l'échiquier E_m , correspondant à l'étape m , et de son complémentaire E'_m , selon les règles opératoires du groupe multiplicatif $\{+1, -1\}$:

E_m	E'_m
E'_m	E_m

Il revient au même de remplacer, au sein de E_m , les cases blanches par E_2 et les cases noires par E'_2 : l'identité des résultats résulte de l'associativité du produit de polynômes, propriété que Laisant [1881a] développe devant les congressistes de l'AFAS. Les résultats obtenus peuvent être interprétés de manière moderne comme le produit ensembliste du groupe multiplicatif $\{+1, -1\}$ par lui-même.

Laisant propose une extension du problème de Catalan aux racines cubiques de l'unité : dans le développement de $(1+j+j^2)^m$ comportant 3^m termes, le terme de rang n est-il⁵³ 1, j ou j^2 ?

La solution graphique proposée pour m pair utilise un échiquier E_2 à trois couleurs qui symbolise le développement de $(1+j+j^2)^2$, les cases

⁵³ En formant les mots de trois lettres A, B, C selon les règles

$$\begin{aligned} A_1 &= ABC, & B_1 &= BCA, & C_1 &= CAB, \\ A_2 &= A_1B_1C_1, & B_2 &= B_1C_1A_1, & C_2 &= C_1A_1B_1, \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

la question devient : la n -ième lettre écrite dans A_m est-elle A, B ou C ? La réponse est fournie par l'écriture de n dans le système de numération de base 3 : si s désigne la somme de ses chiffres et z le nombre de zéros qui terminent son écriture ternaire (sur la droite), le n -ième élément est alors j^{s+2z-1} .

blanches figurant le nombre 1, les cases grises le nombre j , les noires le nombre j^2 . On peut remarquer que cet échiquier s'interprète comme la table du groupe multiplicatif $\{1, j, j^2\}$:

Figure 15. Échiquier à trois couleurs

Deux échiquiers analogues peuvent être construits en permutant circulairement les colonnes $\{1, 2, 3\}$ de E_2 en $\{2, 3, 1\}$ pour l'échiquier E'_2 et en $\{3, 1, 2\}$ pour E''_2 . Lorsque l'exposant m augmente de 2 dans le développement de $(1 + j + j^2)^m$, l'échiquier utile triple sa dimension. Ainsi E_{m+2} est construit à partir des échiquiers E_m, E'_m, E''_m selon les règles opératoires du groupe multiplicatif $\{1, j, j^2\}$:

E	E'	E''
E'	E''	E
E''	E	E'

Il revient au même de remplacer, au sein de E_m , les cases blanches par E_2 et les cases grises par E'_2 et les noires par E''_2 . Un échiquier de dimension 9 (81 cases) représentant le développement de $(1 + j + j^2)^4$ est construit par Laisant selon ces principes qui sont ceux du produit ensembliste du groupe multiplicatif $\{1, j, j^2\}$ par lui-même (figure 16).

La méthode est étendue au développement de $(1 + i_1 + i_2 + i_3)^2$ et de $(1 + i_1 + i_2 + i_3)^4$ lorsque les nombres $1, i_1, i_2, i_3$ figurent les racines quatrièmes de l'unité, puis lorsque les règles algébriques liant ces nombres sont celles du groupe commutatif de Klein⁵⁴.

La construction de l'échiquier de dimension 4 construit selon les règles du groupe multiplicatif des racines quatrièmes de l'unité (figure 17, à

⁵⁴ Dans le cas du groupe de Klein, les nombres $1, i_1, i_2, i_3$ obéissent aux règles opératoires $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = +1, i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_3, i_2 i_3 = i_3 i_2 = i_1, i_3 i_1 = i_1 i_3 = i_2$.

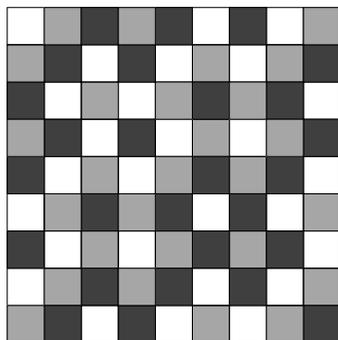


Figure 16.

gauche) et celui du groupe de Klein (figure 17, à droite) permettent à Laisant la construction de mosaïques de dimension 16 correspondant au produit ensembliste de ces groupes par eux-mêmes (cf. illustrations en couleur à la fin de l'article).

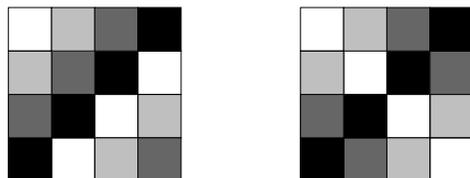


Figure 17.

On peut noter que Laisant est l'auteur en 1877 d'une thèse portant sur les applications mécaniques du calcul des quaternions, calcul issu des travaux de William Rowan Hamilton. « La méthode des quaternions imaginée par le géomètre anglais Hamilton est encore peu connue en France » souligne le rapport de thèse de Briot (AN, [F/17/13113]). Quelques années plus tard, un ouvrage de Laisant popularise l'algèbre non commutative des quaternions [1881b] dont les règles sont également présentées sous forme de mosaïque [Laisant 1881a, p. 99]⁵⁵.

La modernité des thèmes liés aux quinconces, aux pavages du plan ou

⁵⁵ Les règles opératoires du calcul des quaternions sont $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$, $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = -i_3$, $i_2 i_3 = -i_3 i_2 = -i_1$, $i_3 i_1 = -i_1 i_3 = -i_2$.

de l'espace, ne peut être ignorée et on ne peut passer sous silence la multiplicité des travaux contemporains qui s'y rapportent. L'ouvrage fondamental *Tilings and Patterns* de Grünbaum et Shephard [1987] effectue un panorama des questions liées aux pavages, avec une bibliographie historique. On peut remarquer que la construction de pavages quasi-périodiques a des implications logiques [Harpe 1989] tout en étant liée à la géométrie non commutative [Connes 1990]. Les sciences physiques, prenant pour objet de recherche les structures de quasi-cristaux, relancent, elles aussi, les études sur la géométrie des réseaux : ainsi trouve-t-on une «*Introduction to Lattice Geometry*» dans un ouvrage de théorie des nombres appliquée aux sciences physiques [Waldschmidt 1992].

4. LES ÉCHIQUIERS ANALLAGMATIQUES DE JAMES-JOSEPH SYLVESTER

L'échiquier anallagmatique offre des analogies avec les questions précédentes, même si le problème mathématique sous-jacent est de nature différente.

Sylvester attribue le qualificatif d'anallagmatique à des échiquiers carrés dont les cases comportent des signes + et des signes – disposés de telle sorte que, pour deux lignes ou deux colonnes quelconques du carré, le nombre de variations de signes soit toujours égal au nombre des permanences. Ainsi les deux carrés de dimension 2, $\begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix}$, sont anallagmatiques. Il faut remarquer l'invariance de cette propriété par l'échange de deux lignes ou de deux colonnes et donc par toute permutation des lignes ou des colonnes. D'autre part, un carré anallagmatique le demeure si l'on inverse les signes d'une ligne, ou d'une colonne, ou d'un nombre quelconque d'entre elles⁵⁶.

Le problème de la construction de carrés anallagmatiques est lié initialement aux travaux de Sylvester concernant le nombre de racines réelles d'une équation algébrique. Après une première réflexion sur le théorème de Sturm-Liouville, il démontre en effet ([1865a], [1865b], [1865c]) un résultat

⁵⁶ Étymologiquement, le terme grec *an-allagma* signifie « sans changement ». Les carrés anallagmatiques conservent leur propriété si l'on inverse les signes d'une ligne ou d'une colonne quelconque (invariance par inversion de signe), si l'on permute les lignes entre elles ou les colonnes entre elles (invariance par permutation).

d'Isaac Newton donnant une limite supérieure au nombre de racines réelles des équations algébriques

$$a_0x^n + na_1x^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Les variations ou permanences de signes apparues dans la suite $\{a_0, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ sont comparées à celles de la suite $\{A_0 = a_0^2, \dots, A_i = a_i^2 - a_{i-1}a_{i+1}, \dots, A_n = a_n^2\}$; leur décompte permet d'évaluer une limite supérieure au nombre de racines réelles, et par conséquent une limite inférieure au nombre de racines imaginaires de l'équation ci-dessus. Ces variations ou permanences sont matérialisées par des matrices de signes $\begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix}$ que Sylvester qualifie ultérieurement d'« anallagmatiques ».

En 1867, dans le *Philosophical Magazine*, Sylvester propose l'étude des matrices carrées dont tous les éléments sont proportionnels à leurs mineurs : « *A self-reciproqual matrix may be defined as a square array of elements of which each is proportional to its first minor [...]. This conception will be found to present itself naturally in the course of certain investigations connected with the calculus of sign-progressions suggested by the form of Newton's rule; and that calculus in its turn leads to a theory of tessellation highly curious in itself, and fruitful of consequences to the calculus of operations and the theory of numbers, furnishing interesting food for thought, or a substitute for want of it, alike to the analyst at his desk and the fine lady in her boudoir* » [Sylvester 1867, p. 461].

Sylvester construit plusieurs matrices réelles ou complexes de ce type, ainsi $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & i & -1 & -i \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

et remarque que toute matrice de Van der Monde formée grâce aux racines n -ièmes complexes de l'unité est du type recherché. Considérées comme matrices de transformations linéaires, ces matrices ont la propriété de transformer la forme quadratique, représentant la distance euclidienne de l'espace, en elle-même (à une constante multiplicative près).

Ainsi en dimension 2, la forme $F(x, y) = x^2 + y^2$ se transforme par $x = ax' + by'$, $y = bx' - ay'$, en $F'(x', y') = (a^2 + b^2)(x'^2 + y'^2)$. En

dimension 4, la forme $F(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ se transforme, par la substitution représentée par la deuxième matrice ci-dessus, en $F'(x', y', z', t') = 4(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2)$.

Un lien avec les recherches de Gauss sur les formes quadratiques apparaît⁵⁷. Dans la cinquième section de ses *Disquisitiones arithmeticae*, celui-ci aborde la question de la transformation d'une forme quadratique à coefficients entiers $F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, par une substitution linéaire à coefficients entiers $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$. Recherchant toutes les substitutions qui permettent de passer d'une forme à une autre, il consacre de nombreuses études aux formes équivalentes, c'est-à-dire aux formes qui se déduisent l'une de l'autre par une substitution de déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Comment reconnaître deux formes équivalentes ? Comment classer les formes, équivalentes ou non ? Ces questions se trouvent reliées à des questions complexes de théorie des nombres, à l'étude de toutes les représentations possibles d'un nombre par des formes quadratiques de type donné. Ainsi l'étude de formes équivalentes à la forme quadratique $x^2 + y^2$ permet de déterminer à quelles conditions un entier se décompose en somme de deux carrés et si cette décomposition est unique [Gauss 1801, p. 155–157]⁵⁸.

L'analyse des propriétés des formes est reprise par Arthur Cayley sous le nom d'étude des «*quantics*» ; à sa suite, la recherche de covariants et invariants, attachés à une fonction polynôme homogène de plusieurs variables, constitue un domaine longuement exploré par Sylvester et développé principalement à partir de 1878⁵⁹. On peut souligner que, bien avant cette date, la recherche par Sylvester de matrices carrées, dont tous les éléments sont proportionnels à leurs mineurs (*self-reciprocal*

⁵⁷ En utilisant une terminologie moderne, les matrices dont tous les éléments sont proportionnels aux mineurs sont les matrices H vérifiant ${}^tHH = kI$. I désigne la matrice identité de même format que H , k un nombre positif lié au déterminant de H ; tH est la transposée de H ou, dans le cas d'une matrice complexe, la matrice transposée de la conjuguée de H .

⁵⁸ Gauss en déduit une élégante démonstration du théorème de Fermat sur la décomposition d'un nombre premier de la forme $4n + 1$ en somme de deux carrés. Il faut remarquer que les substitutions linéaires à coefficients entiers $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, vérifiant la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, sont inversibles, et que leur inverse est à coefficients entiers.

⁵⁹ On peut consulter à ce propos [Parshall 1989], [Parshall et Rowe 1994], en particulier la bibliographie figurant dans ce dernier ouvrage (p. 107 note 29).

matrix), se rattache à l'étude des transformations laissant invariante (à une constante multiplicative près) une forme quadratique simple : la métrique euclidienne. Parmi ces matrices, certaines ont la particularité de n'être composées que de nombres $+1$ et -1 , mettant en évidence l'importance de la disposition des signes $+$ et $-$ au sein du tableau. C'est à ces dernières que sera réservé le nom de matrices ou carrés anallagmatiques. Sylvester extrait ainsi les dispositions de signes qui vont donner naissance, un an plus tard, au problème de l'« échiquier anallagmatique » :

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & - & + & - & - & - \\ + & + & - & + & - & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & + & - & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & - & + & + & + & - \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que dès 1864 Sylvester contribue aux « *Mathematical Questions* » de l'*Educational Times* ; tout au long de sa vie, il y pose de nombreux problèmes dont il fournit parfois la solution. Ainsi en 1868 et 1869 plusieurs questions posées par Sylvester concernent l'échiquier⁶⁰. On en trouve une première formulation dans la question 2511 :

« *If on an ordinary chessboard we compare any two rows or any two columns, squares opposite one another will be all of unlike or all of like colours according as the number of rows or columns intervening is even (zero included) or odd.*

1) *Show that it is possible to paint the squares in a manner such that, on comparing any two rows or columns, four of the squares opposite one another shall have like and the remaining four unlike colours.*

2) *Extend the construction to the case of a chessboard containing 2^i (instead of eight) squares in each direction.* »

⁶⁰ Les questions concernées portent les numéros 2511 et 2552 [Miller 1868, 10, p. 74–76 et p. 112], 2823 [Miller 1869, 11, p. 49–51], et 2802 [Miller 1869, 12, p. 17–18]. Une solution à la question 2511 est proposée par G.A. Ogilvie.

Un index de toutes les questions posées par l'auteur dans l'*Educational Times* est établi dans [Sylvester 1904–1912, 4, p. 743–747]. On peut aussi consulter à ce propos [Parshall 1998, p. 127].

La réponse de G.A. Ogilvie comporte les deux échiquiers de dimension 4 :

$$U = \begin{pmatrix} B & W & B & W \\ B & B & B & B \\ B & W & W & B \\ B & B & W & W \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} B & W & W & W \\ B & B & W & B \\ B & W & B & B \\ W & W & W & B \end{pmatrix}$$

ainsi que deux échiquiers de dimension 8

$$\begin{pmatrix} V & V \\ V & \bar{V} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} U & U \\ U & \bar{U} \end{pmatrix}$$

dans lesquels \bar{U} et \bar{V} désignent les échiquiers formés en inversant les couleurs B (*black*) et W (*white*) présentes dans U et V .

Sylvester utilise le terme d'« anallagmatique » dans les questions 2823 et 2552 où l'on peut admirer un pavage de dimension 16 (cf. illustrations en couleur à la fin de l'article) :

« In the Anallagmatic Pattern of Pavement here drawn (so called from the relation of the lines or columns to one another remaining unaltered as we pass from one to another) it will be observed that each line or column consists of 6 squares of one colour and 10 of the contrary colour. »

La recherche de carrés de type anallagmatique est présente aux congrès de l'AFAS de 1877, de 1879 et 1880. Il faut noter qu'en 1877 Sylvester préside les travaux du congrès du Havre de l'AFAS, dans la section des sciences mathématiques. L'activité de Sylvester à l'association peut avoir très naturellement orienté la réflexion de mathématiciens comme Édouard Lucas et Charles-Ange Laisant sur ce thème⁶¹.

Après avoir remarqué la conservation du caractère anallagmatique par une permutation des colonnes, des lignes, ou par une inversion des couleurs, Lucas ([1877b], [1883, p. 103–119]) obtient le beau pavage anallagmatique où les couleurs noires et blanches viennent remplacer les signes + et – ; ce n'est autre que l'échiquier V des « *Mathematical Questions* » de 1868 après échange de deux colonnes. Comme la répartition

⁶¹ Cf. [Lucas 1877b], [Laisant 1879, p. 70–71], [Lucas 1880] et [Lucas 1883, p. 103–119].

On peut noter que l'année 1878 voit la naissance à Baltimore de l'*American Journal*, sous la direction de Sylvester; Édouard Lucas y publie trois mémoires essentiels concernant les nombres premiers. Cf. [Décaillot 1998] et [Décaillot 1999].

des couleurs fait apparaître autant de cases noires que blanches, on le qualifie d'isochromatique :

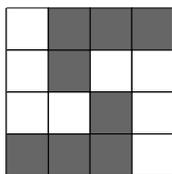


Figure 18.

L'utilisation arithmétique des carrés anallagmatiques, remarquée par Sylvester [1867], est reprise par Lucas ([1877b], [1880]) dans le problème très ancien de la représentation des nombres entiers, qui sont sommes de carrés, en produit de sommes de carrés⁶². Cette question se rattache à la recherche de transformations linéaires laissant invariante la métrique euclidienne usuelle (à une constante multiplicative près).

Ainsi en dimension 2, la matrice $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tHH = (a^2 + b^2)I$. Par la transformation linéaire $x' = ax + by, y' = bx - ay$ qui lui est associée, la distance euclidienne demeure invariante à un coefficient multiplicatif près. La matrice H est ainsi liée à la décomposition en produit de la somme de deux carrés :

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

De même en dimension 4, la matrice

$$H = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ d & c & -b & -a \\ c & -d & -a & b \end{pmatrix}$$

qui vérifie ${}^tHH = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I$ est liée à la décomposition de la somme de quatre carrés en produit de sommes de carrés :

$$\begin{aligned} & (ax + by + cz + dt)^2 + (bx - ay + dz - ct)^2 \\ & + (dx + cy - bz - at)^2 + (cx - dy - az + bt)^2 \\ & = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2). \end{aligned}$$

⁶² On peut consulter à ce sujet [Houzel 1996].

Charles-Ange Laisant [1879, p. 70–71] propose une construction itérative de carrés anallagmatiques, sans référence à la construction ébauchée dès 1868 dans les « *Mathematical Questions* ».

Partant des deux carrés complémentaires de format 2, $A_2 = \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ et $\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix}$, Laisant obtient des carrés anallagmatiques de format 4 en remplaçant les signes + par A_2 et les signes – par \bar{A}_2 :

$$A_4 = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & + & - & + \\ - & - & + & + \\ - & + & + & - \end{pmatrix}.$$

Tout couple de carrés anallagmatiques complémentaires (A, \bar{A}) permet la construction de $A' = \begin{pmatrix} A & \bar{A} \\ \bar{A} & A \end{pmatrix}$ et $\bar{A}' = \begin{pmatrix} \bar{A} & A \\ A & \bar{A} \end{pmatrix}$ de format double des précédents, où le caractère anallagmatique est conservé. On peut remarquer le caractère associatif des opérations de substitution ainsi décrites. La substitution renouvelée n fois permet l'obtention de carrés anallagmatiques de format 2^n .

La fécondité de ces méthodes peut être analysée, de nos jours, à la lumière de la théorie des groupes finis, où leur interprétation demeure particulièrement fructueuse. Nous utilisons ici la terminologie moderne en usage dans cette théorie. Étant donné un groupe (G, \cdot) , tout morphisme de (G, \cdot) dans le groupe multiplicatif (\mathbb{C}^*, \times) est dénommé « caractère » du groupe. L'ensemble des caractères d'un groupe constitue à son tour un groupe, appelé le « dual » de G ⁶³.

La matrice $\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ peut être interprétée comme la table des caractères du groupe additif \mathbb{Z}_2 des entiers modulo 2, et la matrice

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

comme celle des caractères du groupe additif $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (groupe de Klein). La méthode de construction itérative de Laisant n'est autre que celle de la table des caractères du groupe additif $(\mathbb{Z}_2)^n$. Si 1 est remplacé par

⁶³ Si G est un groupe fini, son dual l'est aussi, l'ordre du dual étant le même que celui de G . On peut consulter à ce sujet [Querré 1976].

0, et -1 par 1 dans les matrices ci-dessus, la table $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut être lue comme la table de l'opération multiplicative dans \mathbb{Z}_2 , monoïde ou semi-groupe multiplicatif. La méthode de construction de Laisant devient celle du produit ensembliste de ce monoïde par lui-même.

Les matrices d'Hadamard

En 1893, un an après sa thèse, Jacques Hadamard recherche, parmi les matrices carrées dont les éléments complexes ont un module inférieur à 1, celles dont le déterminant est maximum (en module). Parmi celles-ci figurent les matrices obtenues par Sylvester [1867]⁶⁴. L'obtention d'un déterminant maximum, lorsque la matrice est réelle, exige en effet que ses éléments soient $+1$ ou -1 , « et cela de telle façon que, considérant deux lignes quelconques et comparant les éléments correspondants, il y ait autant de concordances que de discordances de signes » [Hadamard 1893b, p. 244].

Si n désigne la dimension de la matrice (le cas $n = 2$ est considéré comme trivial), Hadamard ajoute [1893b, p. 244] : « On voit aisément que ceci ne peut avoir lieu que pour n multiple de 4 ». La valeur maximale du module du déterminant est alors $n^{n/2}$.

Lorsque n est une puissance de 2, Hadamard propose une construction itérative de matrices de déterminant maximum analogue à celle de Laisant.

« Mais ces dernières valeurs de n ne sont pas les seules pour lesquelles le même fait se présente. J'ai formé des déterminants réels pour $n = 12$ et $n = 20$, sans avoir pu néanmoins reconnaître d'une façon certaine s'il en existe chaque fois que n est divisible par 4 » [Hadamard 1893a, p. 1501].

⁶⁴ Hadamard obtient aussi les matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -a & a \end{pmatrix}$$

où a est un nombre quelconque de module 1. Hadamard cite à ce propos les recherches de Sylvester [1867], mentionne le problème de l'échiquier anallagmatique, mais sans référence à l'*Educational Times*, ni aux contributions de Lucas ou Laisant.

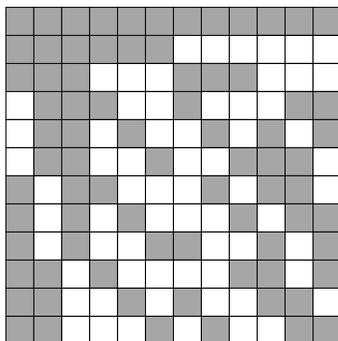


Figure 19.

L'échiquier anallagmatique représenté sur la figure 19 correspond à une matrice de déterminant maximum, en dimension 12, construite selon la méthode préconisée par Jacques Hadamard [1893b].

Cristallographie, génétique, codage

Les carrés anallagmatiques, sous la forme de matrices d'Hadamard, trouvent une interprétation en cristallographie. En 1891, Arthur Schoenflies classe les cristaux selon leurs propriétés de symétrie obtenant ainsi 32 classes dans l'espace à trois dimensions, classes qui peuvent elles-mêmes se comparer par leurs « tables de caractères » [Schoenflies 1891], [Koster 1957].

Une classe à deux éléments est constituée par l'identité et une symétrie (symétrie par rapport à un point origine, ou symétrie orthogonale par rapport à un plan, ou une droite de l'espace), engendrant un groupe d'ordre 2 isomorphe au groupe additif des entiers modulo 2. Deux caractères peuvent lui être associés, dont les valeurs figurent dans la table anallagmatique (ou matrice d'Hadamard) de dimension 2 : $\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$.

Une classe à quatre éléments est constituée par l'identité et trois symétries (trois symétries orthogonales par rapport à trois droites perpendiculaires deux à deux; ou deux symétries orthogonales par rapport à deux plans perpendiculaires et à leur droite d'intersection; ou une symétrie orthogonale par rapport à un plan, à une droite perpendiculaire au plan, et au point d'intersection de la droite et du plan). Ces groupes de transformations sont isomorphes au groupe additif $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (groupe de Klein);

quatre caractères peuvent leur être associés, dont les valeurs figurent dans la matrice d'Hadamard (ou table anallagmatique) de dimension 4 :

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Il en est de même pour le carré de dimension 8 construit par la méthode du produit ensembliste de Laisant, qui représente la table des caractères d'un groupe formé de huit éléments (identité, symétries par rapport à trois plans concourant en un point, à leurs trois droites d'intersection deux à deux, et à leur point d'intersection).

Au-delà de la cristallographie, les carrés anallagmatiques de Sylvester et les matrices d'Hadamard connaissent de nos jours de nombreuses applications : ils sont présents dans les modèles mathématiques utilisés en génétique⁶⁵, dans la théorie du codage, en statistique, en optique⁶⁶. La conjecture d'Hadamard sur la possibilité de construire des carrés anallagmatiques en toute dimension multiple de 4 reste à ce jour non démontrée.

⁶⁵ On peut consulter à ce propos [Edwards 1958]. Nous joignons au chapitre 4 du présent article un carré anallagmatique aimablement transmis par A.W.F. Edwards.

⁶⁶ On peut consulter à ce propos [Wallis-Street-Wallis 1972], [Hedayat-Wallis 1978], [Wallis 1988].

EN GUISE DE CONCLUSION

« Il sera toujours difficile, dans toute branche de nos connaissances, de rendre compte avec quelque fidélité de la méthode suivie par les inventeurs ; il faut même croire que l'auteur d'une découverte pourrait seul apprendre comment, avec les moyens toujours faibles de notre esprit, une vérité nouvelle a été obtenue. Mais c'est peut-être à l'égard des mathématiques que le fait intellectuel de l'invention demeure plus mystérieux, car la série de ces transitions, où l'on reconnaîtrait la voie réellement suivie dans la recherche, le plus souvent n'apparaît pas d'une manière sensible dans la démonstration. Cette facilité d'isoler ainsi la preuve et d'ajouter à la concision du raisonnement, sans rien lui ôter de sa rigueur et de sa clarté, explique toute la difficulté de l'analyse des méthodes en mathématiques. On peut néanmoins, à l'égard des procédés intellectuels propres aux géomètres, faire cette remarque fort simple, que justifiera l'histoire même de la science, c'est que l'observation y tient une place importante et y joue un grand rôle. »

Note de Charles Hermite à Eugène Chevreul
insérée dans [Chevreul 1866, p. 528–529]

La position de Charles Hermite vient en réponse à celle de Richard Dedekind, qui considère les êtres mathématiques comme une libre création de l'esprit humain. On la trouve réaffirmée dans la lettre de Hermite à Gösta Mittag-Leffler du 24 décembre 1880 : l'analyse est en grande partie une science d'observation et les analystes paraissent proches « des naturalistes qui, avec les yeux de l'esprit, regardent des êtres placés en dehors d'eux, qu'ils n'ont nullement créés » [Hermite 1984, t. 5, p. 51].

Pour le travail de l'historien, les questions que pose Hermite restent fondamentales. Beaucoup d'interrogations sur les méthodes du passé demeurent : comment rendre compte du processus de découverte en mathématiques, alors que les contextes d'invention sont le plus souvent gommés des énoncés et publications, et que nous en perdons la trace ? Au sein de ce processus, les méthodes visuelles et l'observation ont joué un rôle significatif et contribué à l'édification de l'abstraction, du moins dans les exemples que nous avons développés.

Les auteurs étudiés ici ont tous utilisé un instrument commun : l'échiquier. La géométrie graphique qu'ils développent sur l'échiquier apparaît comme une science concrète, qui donne sens à des résultats profonds de théorie des nombres, ou à des propriétés abstraites de structures algébriques. Les représentations qui en découlent peuvent incorporer un large éventail de connaissances théoriques qu'ils contribuent

à matérialiser visuellement. Cette science concrète évolue de manière autonome, à la marge de la science académique, sans refuser les passerelles qui s'établissent parfois avec cette dernière. Ainsi les travaux de Lucas, nés de problèmes « pratiques », parviennent à une forme de reconnaissance à l'étranger, sans que leur statut soit tout à fait comparable aux recherches de Sylvester ou de Hadamard, liées à de profondes questions théoriques.

On peut constater que le lieu d'expression naturelle de ces auteurs est l'*Association française pour l'avancement des sciences*. Un des objectifs de cette association est, nous l'avons vu, de contribuer à rendre la science populaire. Il peut être atteint en valorisant toutes les recherches qui, issues d'observations concrètes ou de problèmes « pratiques », permettent de parvenir à une forme d'abstraction. Une question demeure sur la portée de cette démarche : dans quelle mesure contribue-t-elle à l'avancement des sciences, c'est-à-dire au processus d'invention ? La richesse mathématique des développements modernes que ces recherches connaissent peut avoir valeur de réponse.

Les pratiques scientifiques qu'ont générées les « amateurs » de science du siècle dernier sont à prendre très au sérieux. Les initiateurs de ces pratiques ont-ils eu conscience des potentialités de leur développement ? Si l'on apprécie l'engagement militant qu'ils déploient pour diffuser leurs conceptions des mathématiques appliquées, leurs créations mathématiques, la réponse dégagée ne peut être que positive.

BIBLIOGRAPHIE

- AUTEBERT (Jean-Michel), DÉCAILLOT (Anne-Marie), SCHWER (Sylviane)
 [2003] Henri-Auguste Delannoy et la publication des œuvres posthumes d'Édouard Lucas, *Gazette des mathématiciens*, 95 (janvier 2003), p. 51–62.
- BACHMANN (Paul)
 [1902] *Niedere Zahlentheorie* (1. Teil), Leipzig : Teubner, 1902.
 [1922–1923] Ueber Gauss' zahlentheoretische Arbeiten ; dans [Gauss 1863, *Werke* 2, p. 1–74].
- BADOUREAU (Albert)
 [1878] Sur les figures isocèles, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 87 (1878), p. 823–825.
 [1881] Mémoire sur les figures isocèles, *Journal de l'École polytechnique*, 30 (1881), p. 47–172.
- BOURDIEU (Pierre)
 [2001] *Science de la science et réflexivité*, Paris : Raisons d'agir, 2001.

BRAVAIS (Auguste)

- [1849a] Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 14 (1849), p. 141–180.
- [1849b] Rapport sur un Mémoire de M. Bravais relatif à certains systèmes ou assemblages de points matériels, *C. R. Acad. sci. Paris*, 29 (1849), p. 133–137.
- [1850] Mémoire sur les systèmes formés de points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace, *J. École pol.*, 19 (1850), p. 1–128.

BROCH (Ole)

- [1874] Sur la représentation graphique des nombres complexes, *Congrès de l'AFAS*, 3 (1874), p. 1174–1176 et Tableaux III, p. XII–XIII.

BURCKHARDT (Johann Jakob), SCHOLZ (Erhard)

- [1988] *Die Symmetrie der Kristalle*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 1988.

BUTZER (Paul), CARBONE (Luciano), JONGMANS (François), PALLADINO (Franco)

- [1999] Les relations épistolaires entre Eugène Catalan et Ernesto Cesàro, *Bulletin de la classe des sciences*, Académie royale de Belgique, 6^e série, tome X (1999), p. 223–271.

CAHEN (Émile)

- [1900] *Éléments de théorie des nombres*, Paris : Gauthier-Villars, 1900.

CATALAN (Eugène)

- [1865] Mémoire sur la théorie des polyèdres, *J. École pol.*, 24 (1865), p. 1–71.

CHEVREUL (Eugène)

- [1866] Distribution des connaissances humaines du ressort de la Philosophie naturelle, *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut impérial de France*, 2^e série, 35 (1866), p. 519–584.

CONNES (Alain)

- [1990] *Géométrie non commutative*, Paris : Inter-Éditions, 1990.

DÉCAILLOT (Anne-Marie)

- [1998] L'arithméticien Édouard Lucas (1842–1891) : théorie et instrumentation, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 191–236.
- [1999] Édouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIX^e siècle, *Thèse de l'Université Paris V-René Descartes*, 2 vol., décembre 1999.
- [2002] L'AFAS : l'originalité d'une démarche mathématique, dans [Gispert (éd.) 2002, p. 205–214].

DESCARTES (René)

- [Œuvres] *Œuvres de Descartes*, éd. par Samuel S. de Sacy, t. 1, Paris : Club français du livre, 1966.
- [1701] *Regulae ad directionem Ingenii*, dans *Opuscula posthuma physica et mathematica*, Amsterdam, 1701; trad. française Victor Cousin dans [Descartes, Œuvres, I].

DHOMBRES (Jean), dir.

- [1994] *La Bretagne des savants et des ingénieurs 1825–1900*, Centre de culture scientifique, technique et industrielle, Éditions Ouest-France, 1994.

EDWARDS (Anthony William Fairbank)

- [1958] Number of Mating Types required for Balance in Multipoint Linkage Programmes, *Nature*, 181 (February 1958), p. 503–504.

EISENSTEIN (Gotthold)

- [1844a] La loi de réciprocité tirée des formules de Mr. Gauss, sans avoir déterminé préalablement le signe du radical, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 28 (1844), p. 41–43.

- [1844b] Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, *J. reine angew. Math.*, 28 (1844), p. 246–248.
- FERMAT (Pierre de)
 [(Œuvres)] *Œuvres de Fermat*, éd. par Paul Tannery et Charles Henry, t. I–IV, Paris : Gauthier-Villars, 1891–1912.
- FRIEDEL (Charles)
 [1886] Les progrès de la minéralogie, *Congrès de l'AFAS*, (1), 15 (1886), p. 9–20.
- GAND (Édouard)
 [1867a] Nouvelles méthodes de construction des satins réguliers, pairs et impairs. Théorie des nombres premiers appliquée aux pointés de ces armures, *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens*, janvier 1867, p. 57–88.
 [1867b] Nouvelles méthodes de construction des satins réguliers, pairs et impairs. Armures (tissu), armures (dessin), mosaïques, *Bull. Soc. indus. Amiens*, juillet 1867, p. 257–300.
 [1868] *Cours de tissage*, Paris : Eugène Lacroix, 1868.
 [1871] *Le transpositeur ou l'improvisateur de tissus*, Paris : J. Baudry, 1871.
 [1876-1878] *Cours de tissage*, 3 vol., Archives industrielles, Paris : J. Baudry, 1876–1878.
- GAUSS (Carl Friedrich)
 [Werke] *Werke* herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 12 vol., 1863–1874; réimp. Hildesheim : Georg Olms, 1973.
 [1801] *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig : Teubner 1801; trad. fr. A.-C.-M. Poulet-Delisle : *Recherches arithmétiques*, Paris : Courcier, 1807; rééd. Blanchard 1953, Gabay 1989.
 [1828] *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio prima. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores*, 6 (1828), p. 27–56; dans [Gauss, *Werke* 2, 1863, p. 65–92].
 [1832] *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio Secunda. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores*, 7 (1832), cl. math. p. 89–148; dans [Gauss, *Werke* 2, 1863, p. 93–148].
- GISPERT (Hélène), dir.
 [2002] *'Par la science, pour la patrie'. L'Association française pour l'avancement des sciences (1872–1914), un projet politique pour une société savante*, Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2002.
- GRÜNBAUM (Branko), SHEPHARD (Geoffrey C.)
 [1987] *Tilings and Patterns*, New York : Freeman, 1987.
- HADAMARD (Jacques)
 [(Œuvres)] *Œuvres de Jacques Hadamard*, Paris : Éditions du CNRS, 1968.
 [1893a] Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant, *C. R. Acad. sci. Paris*, 116 (1893), p. 1500–1501; [(Œuvres, I, p. 237–238)].
 [1893b] Résolution d'une question relative aux déterminants, *Bulletin des Sciences mathématiques*, (2), 17 (1893), p. 240–246; [(Œuvres, I, p. 239–245)].
- HARDY (Godfrey Harold), WRIGHT (Edward Maitland)
 [1938] *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford : Clarendon Press, 1938.
- HARPE (P. de la)
 [1989] Quelques problèmes non résolus en géométrie plane, *L'Enseignement mathématique*, 35 (1989), p. 227–243.
- HEDAYAT A., WALLIS (Walter D.)
 [1978] Hadamard matrices and their applications, *Annals of Statistics*, 6 (1978), p. 1184–1238.

HERMITE (Charles)

- [1984–1989] Lettres à Gösta Mittag-Leffler, publiées et annotées par Pierre Dugac, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 5 (1984), p. 49–285; 6 (1985), p. 79–217; 10 (1989), p. 1–82.

HILBERT (David), COHN-VOSSEN (Stefan)

- [1932] *Anschauliche Geometrie*, Berlin : Springer, 1932. Éd. anglaise : *Geometry and the Imagination*, New-York : Chelsea, 1952.

HOUZEL (Christian)

- [1996] De Diophante à Fermat, *Pour la Science*, 219 (janvier 1996), p. 88–96.

JONGMANS (François)

- [1996] *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, Republicain sans république*, Mons (Belgique) : Société belge des professeurs de mathématique d'expression française, 1996.

KOSTER (G.F.)

- [1957] *Space Groups and their Representations*, New York-London : Academic Press, 1957.

LABRIFFE (Charles)

- [1928] *Manuel de tissage. Matières textiles – Tissus simples*, 2^e éd., Librairie J.-B. Baillière et fils, 1928.

LAISANT (Charles-Ange)

- [1878] Note sur la géométrie des quinconces, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 6 (1878), p. 156–158.

- [1879] Discours d'ouverture – Notice historique sur les travaux des première et deuxième sections jusqu'en 1878 inclusivement, *Congrès de l'AFAS*, 8 (1879), p. 61–116.

- [1881a] Sur les développements de certains produits algébriques, *Congrès de l'AFAS*, 10 (1881), p. 84–108 et Planche III.

- [1881b] *Introduction à la méthode des quaternions*, Paris : Gauthier-Villars, 1881.

- [1887a] Notice historique sur les travaux des première et deuxième sections de 1879 à 1886 inclusivement, *Congrès de l'AFAS*, (2), 16 (1887), p. 3–83.

- [1887b] Quelques applications arithmétiques de la géométrie des quinconces, *Congrès de l'AFAS*, (2), 16 (1887), p. 218–235.

- [1887c] *Traité et application des équipollences*, Paris : Gauthier-Villars, 1887.

LAQUIERE (Emmanuel)

- [1879] Note sur la géométrie des quinconces, *Bull. Soc. math. France*, 7 (1879), p. 85–92.

LEVY (Lucien)

- [1891] Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers, *Bulletin de la Société philomatique de Paris*, (8), 3 (1891), p. 46–50.

LUCAS (Édouard)

- [1867] *Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers*, Paris : G. Retaux, 1867.

- [1876a] Lois géométriques du tissage, *Congrès de l'AFAS*, 5 (1876), p. 114.

- [1876b] Sur les rapports qui existent entre la théorie des nombres et le calcul intégral, *C. R. Acad. sci. Paris*, 82 (1876), p. 1303–1305.

- [1877a] Problèmes sur la géométrie des quinconces, *Nouvelle correspondance mathématique*, 3 (1877), p. 412–413.

- [1877b] Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester, *Congrès de l'AFAS*, 6 (1877), p. 213–214.

- [1878a] Sur la géométrie du tissage, *Congrès de l'AFAS*, 7 (1878), p. 155.

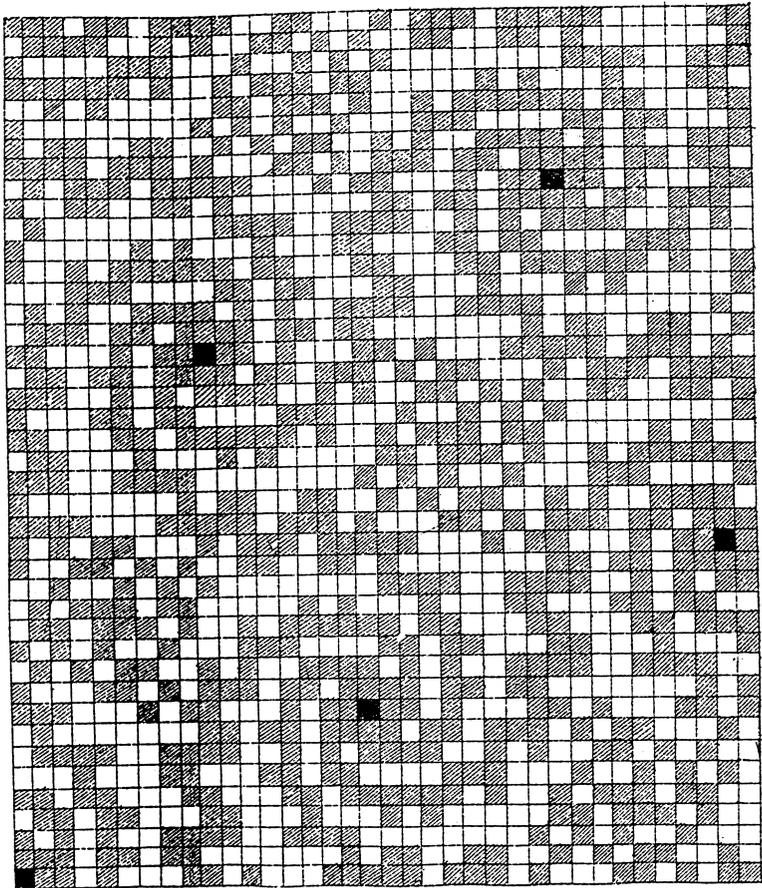
- [1878b] Théorème sur la géométrie des quinconces, *Bull. Soc. math. France*, 6 (1878), p. 9–10.
- [1880] Sur les échiquiers anallagmatiques et les produits de sommes de carrés, *Congrès de l'AFAS*, 9 (1880), p. 98.
- [1883] *Récréations mathématiques*, vol. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1883.
- [1890] Sur la loi de réciprocité des résidus quadratiques, *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg*, 33 (1890), p. 495–496.
- [1891] *Théorie des nombres*, t. I, Paris : Gauthier-Villars, 1891.
- [1911] Les principes fondamentaux de la géométrie des tissus, *Congrès de l'AFAS*, (2), 40 (1911), p. 72–88 (mémoire extrait de l'*Ingenere Civile* (Turin, 1880) et traduit de l'italien par A. Aubry et A. Gérardin).
- MILLER (W.J.), éd.
 [1868–1869] *Mathematical Questions with their Solutions from the 'Educational Times'*, vol. 10–12, London : Hodgson, 1868–1869.
 [1884] *Mathematical Questions with their Solutions from the 'Educational Times'*, vol. 40, London : Hodgson, 1884.
- MINKOWSKI (Hermann)
 [1896] *Geometrie der Zahlen*, Leipzig : Teubner, 1896 ; 2^e éd. 1910.
- PARSHALL (Karen)
 [1989] Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory, dans Rowe (David E.) and Mc Cleary (J.), ed., *The History of Modern Mathematics*, Boston : Academic Press, 1989, p. 157–206.
 [1998] *James Joseph Sylvester – Life and Work in Letters*, Oxford : Clarendon Press, 1998.
- PARSHALL (Karen), ROWE (David)
 [1994] *The Emergence of the American Mathematical Research Community – 1876–1900 : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, Providence : American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1994.
- POLIGNAC (C. de)
 [1878] Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$, *Bull. Soc. math. France*, 6 (1878), p. 158–163.
- QUATREFAGES (Armand de Bréau de)
 [1872] La science et la patrie, *Congrès de l'AFAS*, 1 (1872), p. 36–41.
- QUERRÉ (Julien)
 [1976] *Cours d'algèbre*, Paris : Masson, 1976.
- SAMUEL (Pierre)
 [1967] *Théorie algébrique des nombres*, Paris : Hermann, 1967.
- SCHOENFLIES (Arthur)
 [1891] *Krystallsysteme und Krystallstruktur*, Leipzig : Teubner, 1891. Rééd. Berlin : Springer, 1984.
- SENECHAL (Marjorie)
 [1996] *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1996.
- SERRE (Jean-Pierre)
 [1970] *Cours d'arithmétique*, Paris : Presses Universitaires de France, 1970.
- SPEISER (Andreas)
 [1923] *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Berlin : Springer, 1923.
- SYLVESTER (James Joseph)
 [Papers] *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, 4 vol., H.F. Baker ed., Cambridge : University Press, 1904–1912.

- [1865a] On an elementary proof and generalization of Sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated rule for the discovery of imaginary roots, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1 (1865–1866), p. 1–16.
- [1865b] Sur les limites du nombre des racines réelles des équations algébriques, *C. R. Acad. sci. Paris*, 50 (1865), p. 282–283.
- [1865c] Théorème d'algèbre élémentaire, *C. R. Acad. sci. Paris*, 51 (1865), p. 1261–1263.
- [1867] Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers, *Philosophical Magazine*, 34 (1867), p. 461–475; [*Papers* 2, p. 615–628].
- TCHEBYCHEV (Pafnuti Lvovich)
 [Œuvres] *Œuvres de P.L. Tchebychef*, en français, 2 vol., Saint-Petersbourg : A. Markoff et N. Sonin, 1899–1907.
- [1878] Sur la coupe des vêtements, *Congrès de l'AFAS*, 7 (1878), p. 154.
- [1946–1951] *Œuvres complètes* (1946/1951), en russe, 5 vol., Moscow-Leningrad : Izdatel'stvo Akad. Nauk SSR, 1946–1951.
- THIELE (Thorvald)
 [1874] Om Talmønstre (on number patterns), *Forhandlingerne ved de skandinaviske Naturforskere*s (meeting of the Scandinavian natural scientists), 11, Copenhagen : J.H. Schultz, 1874, p. 192–195.
- WALDSCHMIDT (Michel)
 [1992] *From Number Theory to Physics*, Berlin, New York : Springer-Verlag, 1992.
- WALLIS (Walter D.)
 [1988] *Combinatorial Designs, Pure and Applied Mathematics*, New York-Basel : M. Dekker, 1988.
- WALLIS (Walter D.), STREET (Anne Penfold), WALLIS (Jennifer Seberry)
 [1972] Combinatorics : Room Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices, *Lecture Notes in Mathematics*, 292, Berlin, New York : Springer, 1972.
- WARUSFEL (André)
 [1971] *Structures algébriques finies*, Paris : Hachette, 1971.
- WEYL (Hermann)
 [1952] *Symmetry*, Princeton : Princeton Univ. Press, 1952. Trad. française : *Symétrie et mathématique moderne*, Paris : Flammarion, 1964.

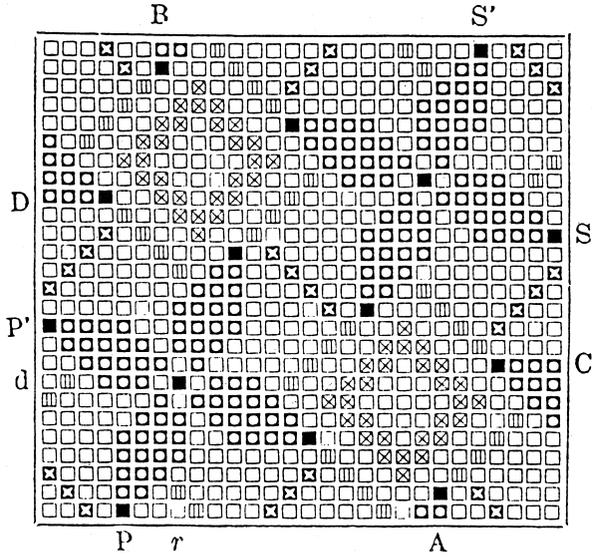
AFAS Congrès de Lille 1874

T. III. P. XII.

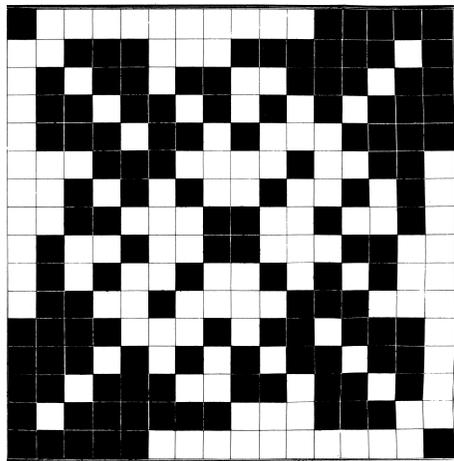
N° 3 Restes quadratiques Module $17 + \delta i$ de M^r Thiele de Copenhague



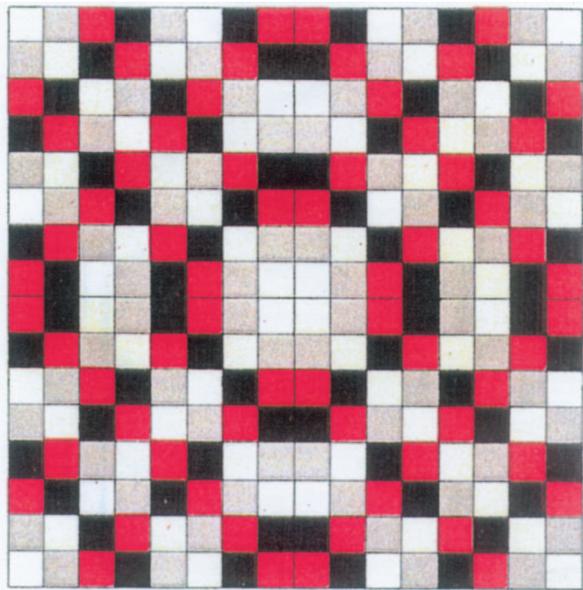
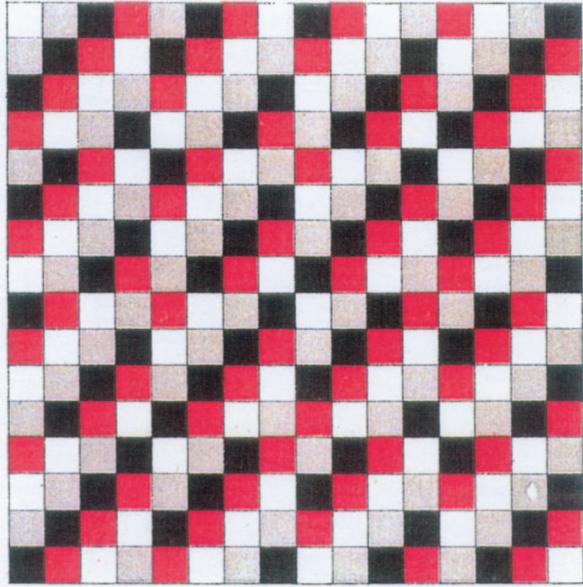
Satin carré de 58.



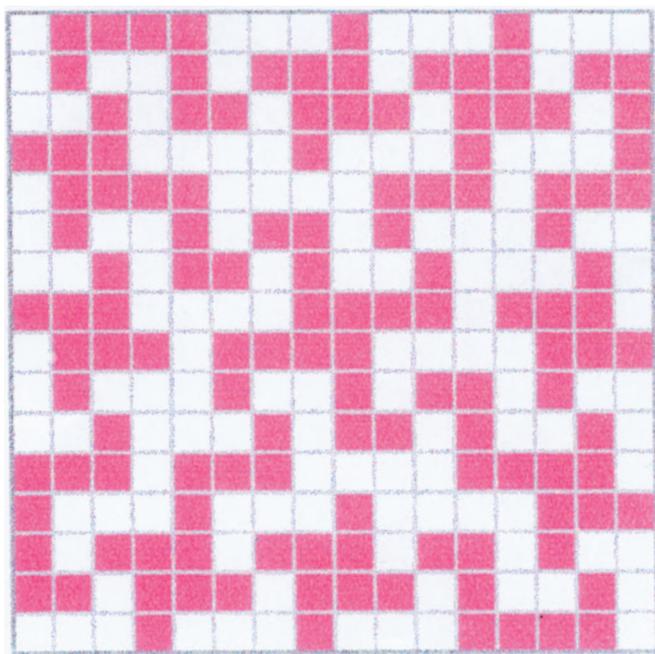
Canevas sur satin carré de 58
Édouard Gand (1867)



Pavage anallagmatique isochromatique
de Sylvester [Mathematical Questions n° 2552 (1868)]



Représentations du développement de $(1 + a + b + c)^4$
C.-A. Laisant (1881)



Pavage anallagmatique isochromatique
A.W.F. Edwards (2000)