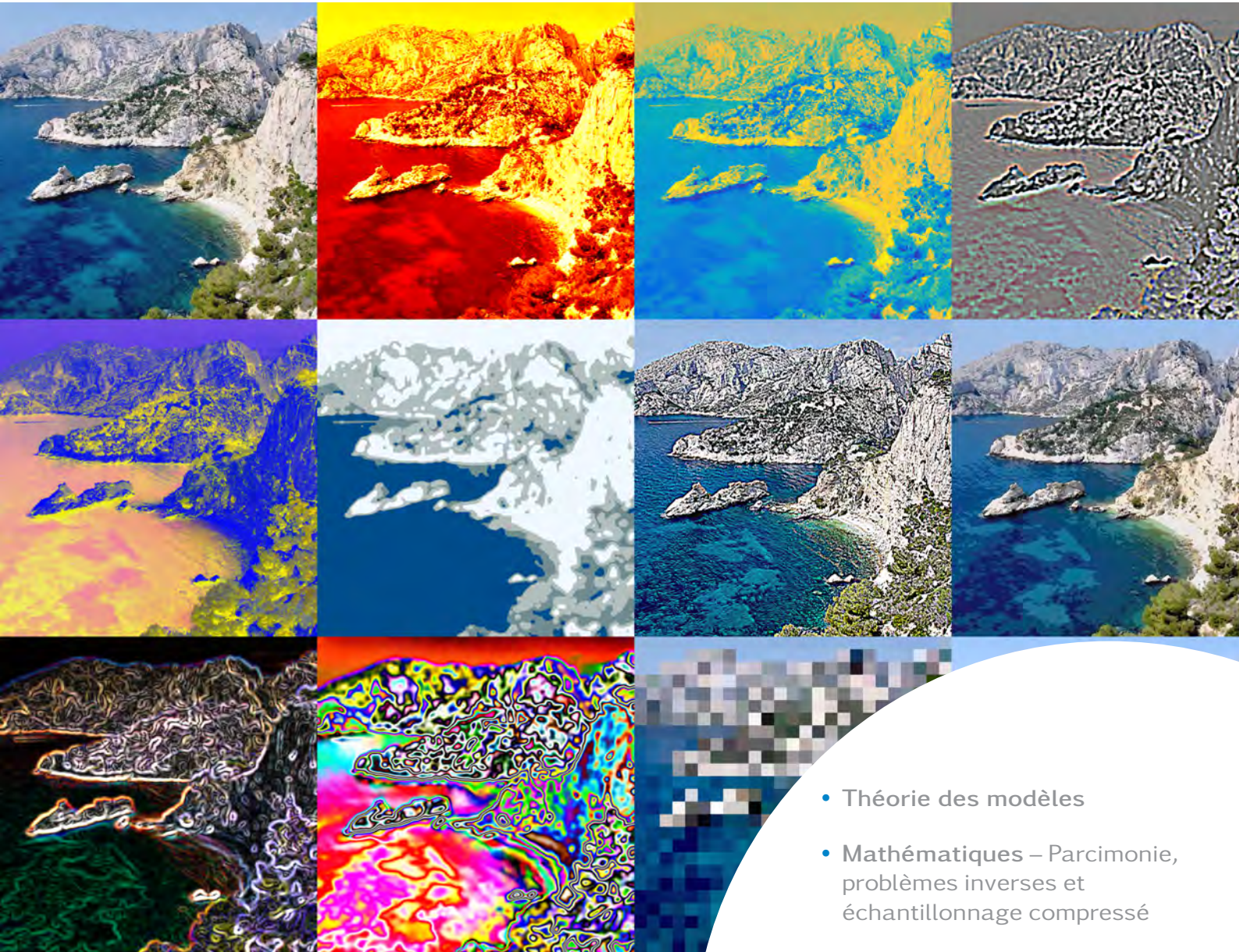


# la Gazette

des Mathématiciens



- Théorie des modèles
- Mathématiques – Parcimonie, problèmes inverses et échantillonnage compressé
- Raconte-moi... K.A.M.
- Tribune libre – Démission du Comité d'Évaluation Scientifique (CES 40) de l'ANR

Société  
Mathématique  
de France



## Comité de rédaction

### Rédacteur en chef

**Boris ADAMCZEWSKI**

Institut Camille Jordan, Lyon

boris.adamczewski@math.cnrs.fr

### Rédacteurs

**Thomas ALAZARD**

ENS, Paris

alazard@dma.ens.fr

**Julie DESERTI**

Université Paris Diderot

deserti@math.univ-paris-diderot.fr

**Caroline EHRHARDT**

Université Vincennes Saint-Denis

caroline.ehrhardt@inrp.fr

**Damien GAYET**

Institut Fourier, Grenoble

damien.gayet@ujf-grenoble.fr

**Sébastien GOUÉZEL**

Université de Nantes

sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

**Sophie GRIVAUX**

Université de Picardie

sophie.grivaux@u-picardie.fr

**Bernard HELFFER**

Université de Nantes

Bernard.Helffer@univ-nantes.fr

**Pierre LOIDREAU**

Université Rennes 1

pierre.loidreau@univ-rennes1.fr

**Martine QUEFFÉLEC**

Université Lille 1

Martine.Queffelec@univ-lille1.fr

### Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ

Institut Henri Poincaré

11 rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris cedex 05

Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96

gazette@dma.ens.fr – <http://smf.emath.fr>

**Directeur de la publication :** Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. La couverture illustre différents traitements pouvant être apportés à une image couleur : filtrage, gradient, laplacien, quantification, pixellisation et fonction non-linéaire des intensités. Elle a été réalisée par Gabriel Peyré à partir d'une photo de la calanque de Sugiton.

N° 149

## Éditorial

Chères lectrices, chers lecteurs,

À l'heure où vous lisez ces lignes, l'Islande s'est repeuplée. Portugais, gallois et allemands ont regagné leurs pénates. Des larmes ont été versées, de tristesse et de joie. Vite séchées. Une coupe brandie. *Sic transit gloria mundi*. À travers ce numéro, la *Gazette* invite à présent passionnés, révoltés et autres indifférents à passer à l'unisson à autre chose.

Pour nombre de mathématiciens, la logique mathématique demeure une discipline étrange dont ils ne maîtrisent pas le langage. Pourtant, la théorie des modèles, branche de la logique mathématique, ne cesse de produire des résultats dont les retombées sur la géométrie arithmétique, l'algèbre ou la combinatoire sont spectaculaires. La *Gazette* consacre un dossier à ce thème en plein essor. Avis aux amateurs de magie blanche.

Compresser puis restaurer des données (images, musique ou vidéos) est devenu aujourd'hui une pratique courante à laquelle on ne prête souvent pas attention. Derrière ces gestes quotidiens, des mathématiques diverses et bien vivantes sont pourtant à l'œuvre. Mathématiques dont les enjeux dépassent le simple loisir lorsqu'il s'agit par exemple d'imagerie médicale. Gabriel Peyré vous propose une petite balade dans le monde de l'échantillonnage compressé. Ce numéro en tire au passage une couverture aux accents Warholiens, déclinant à l'envi un paysage que les habitués du CIRM ne manqueront pas de reconnaître.

Aux victimes d'acronymophobie, je conseillerais de fermer les yeux un instant. K.A.M. d'abord. Trois lettres léguées par leurs auteurs à un théorème devenu célèbre que vous raconte Marie-Claude Arnaud. Ou pourquoi le système solaire a de bonnes chances d'être stable. ANR ensuite. Quand les crédits récurrents alloués à la recherche se muent un instant en pactole pour quelques-uns, avant de disparaître. La tribune libre dénonce quelques dysfonctionnements liés à ce tour de passe-passe. C'est bon, vous pouvez les rouvrir.

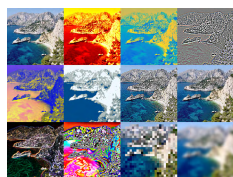
La rubrique information revient sur un prix désormais prestigieux dont les lauréats restent rarement en marge. En mars dernier, Laure Saint-Raymond et Peter Scholze ont reçu le prix Fermat.

Pour finir, un roman dont l'héroïne serait une formule ? Il fallait oser. Michèle Audin vous emmène en voyage avec la formule de Stokes. À découvrir.

En vous souhaitant une agréable lecture,

Boris ADAMCZEWSKI





N° 149

## Sommaire

<b>SMF</b>	4
Mot du président	4
<b>RAPPORT MORAL</b>	7
Rapport Moral	7
<b>THÉORIE DES MODÈLES</b>	17
Introduction à la théorie des modèles – <i>É. BOUSCAREN</i>	18
O-minimality – <i>T. SCANLON</i>	33
<b>MATHÉMATIQUES</b>	40
Parcimonie, problèmes inverses et échantillonnage compressé – <i>G. PEYRÉ</i>	40
<b>PARITÉ</b>	50
À propos du collectif de femmes mathématiciennes du Chili – <i>M. I. CORTEZ</i>	50
<b>RACONTE-MOI</b>	53
... K.A.M. – <i>M.-C. ARNAUD</i>	53
<b>TRIBUNE LIBRE</b>	58
Démission du Comité d'Évaluation Scientifique (CES 40) de l'ANR	58
<b>INFORMATION</b>	61
Nouvelles du CNRS – <i>P. BIANE et R. CARLES</i>	61
Prix Fermat 2015 – <i>L. MICLO</i>	67
<b>CARNET</b>	72
Gennadi M. HENKIN – <i>A. JORDAN</i>	72
Jean-Lin JOURNÉ – <i>G. DAVID</i>	74
<b>LIVRES</b>	75



N° 149

## Mot du président

Chères et chers collègues,

Je suis très heureux de m'adresser à vous grâce à ce « mot du président », après avoir lu attentivement pendant des années ceux rédigés par les présidentes et les présidents qui m'ont précédé.

Mes premiers mots iront naturellement vers Marc Peigné et ses équipes (bureau et conseil d'administration), accompagnés de tous les personnels SMF, qui n'ont pas compté leurs heures ni ménagé leurs efforts pendant les trois dernières années. Je les remercie donc pour tout le travail effectué, afin que notre société savante puisse aujourd'hui envisager l'avenir avec une certaine sérénité.

Certes, la SMF doit rester vigilante.

Tout d'abord en tant que maison d'édition, elle doit se préparer et anticiper les mutations liées aux législations sur la propriété intellectuelle et le numérique qui bouleversent le monde des publications. Cela a des conséquences immédiates sur le modèle économique de la SMF, qui n'est comparable ni en taille, ni en coûts, et surtout pas en marges, aux entreprises internationales d'édition scientifique.

Comme beaucoup d'associations et de sociétés savantes, le nombre de nos adhérents diminue. À nous, collectivement, de convaincre nos collègues d'adhérer, pas simplement grâce au sentiment d'appartenance à une communauté mathématique française, mais en continuant à mener des actions concrètes visant, en accord avec les missions de la SMF, à la diffusion de la connaissance, la promotion de la recherche et des mathématiques. Notre premier congrès témoigne de cette volonté d'être encore plus présents au sein de notre communauté, aux côtés notamment de la SMAI et de la SFDS.

Sur le plan national, les politiques d'enseignement et de financement de la recherche et leurs modalités de mise en œuvre menacent aujourd'hui la pérennité de la recherche (vous consulterez à ce propos l'article dans cette Gazette rédigé par la commission ANR CES 40 en charge de l'évaluation des projets liés aux mathématiques), elles fragilisent également la

qualité de formation des collégiens, lycéens, et à terme (même probablement dès maintenant) toutes nos formations. La SMF se doit de porter les messages de notre communauté pour peser de façon toujours plus significative sur les décisions à venir, concernant par exemple les spécificités du fonctionnement des mathématiques et nos exigences sur les contenus des programmes, ces messages étant d'autant plus écoutés que nos adhérents sont nombreux et mobilisés. J'en profite pour vous inciter à profiter de la tribune libre de la *Gazette* pour diffuser vos messages, constats, inquiétudes ou questions.

Cependant, il existe de nombreuses raisons d'être confiants.

Nos journaux et collections sont forts de leur histoire et de leur réputation, et le nombre croissant de soumissions témoigne de cette qualité de publication. Cela permet d'envisager une réflexion vers la création de nouveaux journaux de la SMF, toujours avec une grande exigence mathématique, qui seraient originaux et adaptés aux mutations dont nous parlions plus haut (de nombreux articles dans la *Gazette* en ont débattu les derniers mois) : open access, on-line, vidéos...

De plus, la SMF s'est engagée dans la voie de la numérisation de ses collections, ce qui assurera une diffusion et une visibilité accrues de nos publications.

Notre congrès SMF 2016 a été un grand succès : plus de 200 inscrits et près de 400 personnes à la journée grand public, des exposés mathématiques de très grande qualité, des sessions thématiques dynamiques, couvrant un large spectre des mathématiques, et des soirées animées ! Concevoir un congrès généraliste équilibré était un grand défi, celui-ci a été relevé avec brio, notamment grâce à la mobilisation de la Fédération Denis Poisson, que je remercie sincèrement au nom de la SMF. Un dossier sera consacré à SMF 2016 dans la *Gazette* d'octobre, et nous nous préparons déjà pour SMF 2018.

Le CIRM, dont la tutelle est assurée par le CNRS et la SMF, est aujourd'hui devenu l'acteur principal des rencontres mathématiques dans le monde, et accueille toujours plus de mathématiciennes et mathématiciens chaque année. Un projet ambitieux, bénéficiant d'importants investissements du CNRS, de la région PACA et de la SMF, vient d'être lancé, il aboutira en 2018 et augmentera significativement la capacité du CIRM. De nouveaux appels d'offre seront proposés, dont certains coordonnés par la SMF : je vous invite à les consulter dès le mois de septembre sur les sites webs concernés.

Enfin, et ce n'est pas un scoop, Internet est aujourd'hui le vecteur principal de communications et d'informations. Aussi, un groupe de réflexion est

au travail pour repenser notre site et nos services aux adhérents, afin de mettre en valeur les actions et les collections de la SMF, et surtout d'assurer une pérennité technique et sécurisée à notre structure informatique. Ceci est le grand projet de l'année qui arrive, nous mobiliserons notre énergie pour qu'il aboutisse en un temps raisonnablement fini.

Ainsi, je souhaite à toutes et tous un été reposant et je l'espère, ensoleillé, qui nous permettra de relever ces nombreux défis qui nous attendent dès la rentrée.

Le 1<sup>er</sup> juillet 2016

Stéphane SEURET, président de la SMF



## 1. Affaires générales

### 1.1 – Situation générale

En 2014, la SMF avait renoué avec un bilan comptable positif, elle le confirme en 2015. Cependant, la période reste tendue, en raison de la crise économique que nous traversons d'une part et des mutations à l'œuvre dans le monde de l'édition scientifique d'autre part.

Le personnel salarié a été cette année encore très sollicité ; nos publications sortent désormais dans les délais et le travail de diffusion s'est notablement amélioré. L'année 2015 a été marquée par le nouveau format de la *Gazette*, fruit d'un travail de longue haleine qui a mobilisé de nombreux collègues et nécessité l'implication forte de membres du personnel. La restructuration du fonctionnement interne de la SMF, amorcée depuis plusieurs années, produit ses résultats, nous nous en réjouissons.

### 1.2 – Adhérents

Le nombre des adhérents baisse régulièrement depuis plusieurs années : 1914 en 2013, 1891 en 2014 et 1872 en 2015. La cotisation 2016 n'a pas été augmentée, comme en 2015 et il en sera de même pour celle de 2017. Un système d'adhésion « Entreprise » a été mis en place et commence à produire ses effets.

La nouvelle version de la *Gazette*, le congrès en 2016 à Tours sont autant de projets qui se veulent fédérateurs pour attirer nos collègues, en particulier les plus jeunes ; il nous faut intensifier nos efforts dans ces directions.

### 1.3 – Prises de position

Les trois sociétés savantes, Société Française de Statistiques (SFDS), Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), SMF travaillent en étroite concertation sur plusieurs sujets ; la réforme des programmes de collèges en cours a souvent été au cœur de nos échanges, en lien étroit avec la Commission Française de l'Enseignement des Mathématiques (CFEM)<sup>1</sup>. Tout au long de l'année, la SMF a participé à plusieurs réunions au MENESR<sup>2</sup> et était en contact étroit avec les membres du CSP<sup>3</sup> ; la commission enseignement de la SMF a été très sollicitée pour analyser les propositions et élaborer des réactions et prises de positions validées ensuite par le Conseil d'Administration.

### 1.4 – Droits de l'homme

Les trois sociétés savantes SMF, SFDS, SMAI ont émis deux communiqués en janvier puis en avril 2016 pour soutenir les universitaires de Turquie suite aux arrestations de certains d'entre eux signataires de la pétition « nous ne serons pas complices de ce crime ! ». De même via un mail aux adhérents la SMF a appelé à signer une pétition pour que la disparition de Boris Weisfeiler en 1985 ne tombe pas sous le régime de la prescription.

### 1.5 – Rencontres et colloques

**Journée des lauréats de l'Académie des sciences.** Le cycle « Des mathématiciens primés par l'Académie des Sciences » existe depuis plusieurs années, en partenariat avec l'Académie des Sciences. Cette année, la journée a été organisée conjointement avec la SMAI et a eu lieu le 23 mars 2016 à l'université de Toulouse P. Sabatier<sup>4</sup>, le lendemain de la remise des Prix Fermat 2016 ; nous

1. Commission Française de l'Enseignement des Mathématiques.

2. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

3. Conseil Supérieur des Programmes.

4. [smf.emath.fr/content/des-mathematiciens-primés-par-lacadémie-des-sciences-2015](http://smf.emath.fr/content/des-mathematiciens-primés-par-lacadémie-des-sciences-2015)

remercions les organisateurs locaux M.-L. Ausset et L. Miclo.

**Congrès SMF 2016.** La traditionnelle « journée annuelle » est remplacée en 2016 par le premier congrès de la SMF, qui a lieu à Tours du 6 au 10 juin. Une soixantaine de conférences est proposée, couvrant un large spectre des mathématiques. Une conférence grand public précède la remise du Prix d'Alembert. Deux tables rondes sont organisées, l'une par AMIES<sup>5</sup> où sont invitées la SFDS et la SMAI avec le titre « Mathématiques à Venir en Entreprises », et l'autre sur le thème « Quelles mathématiques pour le futur scientifique ? ».

**Rencontres scientifiques de la SMF.** La SMF organise de manière régulière les sessions « États de la Recherche »<sup>6</sup>. Le choix des thématiques et des organisateurs est effectué par un Comité Scientifique, qui a été renouvelé en novembre 2015. Le nouveau Comité – composé de F. Boyer (responsable), V. Calvez, X. Caruso, J. Grivaux, F. Pène, M. Zani et B. Rémy, rédacteur en chef de *Panoramas et Synthèses* – a commencé son mandat avec beaucoup de dynamisme.

Deux sessions des « États de la Recherche » se sont déroulées en 2016 :

- « Quêtes d'hyperbolicités pour les groupes », organisée par F. Dahmani à l'Institut Fourier de Grenoble du 25 au 27 mai,
- « Aux frontières de l'analyse harmonique », organisée par P. Auscher, F. Bernicot, E.-M. Ouhabaz, S. Petermichl et E. Russ au Laboratoire Jean Leray de Nantes du 20 au 24 juin.

La SMF tient à remercier le Comité Scientifique précédent « formé par F. Barthe (responsable), A. Ducros, S. Maillot, L. Saint-Raymond et N. Bergeron, en tant que rédacteur en chef de *Panoramas et Synthèses* » pour son travail dévoué effectué depuis 2011.

## 1.6 – Relations avec les autres sociétés savantes et associations

Les échanges avec la SFDS, la SMAI et *femmes & mathématiques* sont nombreux, de façon informelle ou non, et concernent tous les domaines

d'activité de nos sociétés. Les contacts avec la SIF<sup>7</sup> s'intensifient d'année en année ; la nouvelle édition du *Zoom des Métiers*, consacré aux métiers des mathématiques et de l'informatique est parue en mars 2015, fruit d'un travail en étroite collaboration des 4 sociétés savantes et autres partenaires. Par ailleurs, un numéro commun *MATAPLI/Gazette* en hommage à M. Yor a été élaboré et est sorti au printemps 2015 ; un projet de « Prix Marc Yor » est en préparation, avec le parrainage de l'Académie des Sciences.

Les contacts entre les présidences de l'European Mathematical Society (EMS) et de la SMF sont permanents. La réunion annuelle des présidents des sociétés membres de l'EMS s'est tenue en avril 2016 à Budapest.

La SMF travaille toujours en étroite collaboration avec *Cap'Maths* et *Animath* à qui elle a apporté un soutien important au cours de l'épisode difficile qu'ils traversent, notamment dans leurs rapports avec le financeur ANRU<sup>8</sup>.

## 1.7 – Vie interne de la Société

La coordination entre les différents postes s'améliore peu à peu, des ajustements ont encore été apportés cette année et le traitement des dossiers est effectué de façon plus collective. Les liens avec les personnels du Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) (notamment ceux employés par la SMF) se renforcent aussi, que ce soit sur les questions de comptabilité ou celles de l'organisation du travail.

**Sous-traitants, bénévoles.** La SMF fait appel à des sous-traitants, pour la composition et l'impression des revues et des livres, pour les opérations de routage, la gestion du parc informatique et la sauvegarde et le suivi des données de comptabilité. De nombreux bénévoles participent aussi à ces tâches diverses. Les procédures de validation des travaux effectués et de la mise en paiement sont maintenant mieux rodés, le personnel de la SMF est donc moins exposé.

5. Agence pour les mathématiques en interaction avec l'entreprise et la société.

6. [smf.emath.fr/content/etats-de-la-recherche-presentation](http://smf.emath.fr/content/etats-de-la-recherche-presentation)

7. Société Informatique de France.

8. Agence Nationale de Rénovation Urbaine.

## 1.8 – Actions de communication

L'envoi d'une lettre mensuelle d'information aux membres continue. Ces lettres sont largement diffusées dans les laboratoires de mathématiques, via le réseau des correspondants. Le mot du président dans la *Gazette* permet aussi d'évoquer les actions en cours et de les situer dans un contexte plus global.

Le travail sur les plaquettes et dépliants présentant les activités de la SMF s'est poursuivi en 2015 ; ils ont été finalisés pour le congrès de la SMF à Tours.

Le compte twitter SMF, ouvert en 2012, poursuit sa croissance, il compte actuellement près de 1000 abonnés et permet de par sa nature de toucher un public différent.

**Site web, informatique** Le site web a changé de présentation début 2015. Une réflexion de plus grande ampleur est en cours ; elle est coordonnée par V. Berthé et S. Seuret, en lien étroit avec C. Ropartz et G. Grancher. Tous les aspects techniques et éditoriaux sont sur la table, le but étant aussi de pallier la fragilité récurrente du volet « informatique », que ce soit sur la partie informative du site, celle liée aux publications ou encore les aspects de maintenance des logiciels et du matériel. Un grand merci à L. Koelblen et M. Demazure pour leur travail bénévole et très utile pour faire fonctionner la structure « informatique » de la SMF depuis plusieurs années.

## 1.9 – Soutien et parrainage de prix

**Prix AMIES.** L'AMIES<sup>9</sup> a lancé en 2013 un prix destiné à promouvoir les thèses *Mathématiques Entreprises* soutenues en 2012. Ce prix est parrainé par les trois sociétés savantes SFDS, SMAI et SMF. La proclamation des résultats du Prix AMIES 2015 a eu lieu le 16 octobre ; les lauréats sont M. Aussal (École polytechnique) et N. Spillane (UPMC).

**Prix Hamidoune.** Ce prix a été créé en 2011 à l'initiative d'amis et collègues du mathématicien Y. Ould Hamidoune et vise à encourager l'enseignement et la recherche en Mauritanie. Il est soutenu par les autorités académiques mauritaniennes ainsi que par divers partenaires étrangers. Comme les années précédentes, la SMF a donné son parrainage

pour le prix 2015 et soutenu la dotation de ce prix en offrant des livres. Le prix a été décerné à Sidi Mohamed Ely de l'École spéciale polytechnique de Nouakchott.

**Prix Szolem Mandelbrojt.** L'institut français de Pologne et l'Ambassade de France en Pologne, en partenariat avec la SMF, ont décidé de créer à partir de 2015 le Prix Szolem Mandelbrojt, visant à récompenser des recherches polonaises d'excellence dans le domaine des mathématiques. Ce prix s'adresse aux chercheurs polonais de moins de 45 ans conduisant des recherches dans le domaine des mathématiques fondamentales ou appliquées. Le premier lauréat de ce prix a été A. Langer (géométrie algébrique) qui a disposé d'un mois d'invitation au Laboratoire J. Dieudonné à Nice en juin 2015. L'ambassade de France de Pologne a lancé un appel à candidature tardivement en 2016, les candidats n'étaient pas éligibles au prix et il a été décidé de ne pas l'attribuer en 2016.

## 2. Gazette

En janvier 2015, la *Gazette* a connu une profonde évolution avec la mise en place d'un nouveau format, ainsi que de nouvelles rubriques. Ces changements se sont accompagnés d'un renouvellement du comité éditorial, lequel a été considérablement élargi. Cette année a été l'occasion de consolider cette mutation de la *Gazette*.

Sophie Grivaux a rejoint le comité de rédaction en remplacement de Vincent Colin. Les rubriques *Parité* et *Raconte-moi* ont trouvé leur rythme de croisière. La tribune libre a été largement utilisée témoignant de l'intérêt porté par les lecteurs pour cette espace d'expression qui leur est offert. Un effort particulier a été fait pour proposer des articles scientifiques variés et accessibles au plus grand nombre. Leur contenu a concerné à la fois des avancées mathématiques récentes, l'histoire des mathématiques, la philosophie et aussi des aspects plus récréatifs. Deux dossiers ont été respectivement consacrés aux travaux de certains lauréats de l'Académie des sciences et aux enjeux importants liés au devenir de l'édition scientifique. La rubrique *Diffusion des savoirs* a remplacé la rubrique *Enseignement*. Elle traite des questions d'enseignement, mais également de diffusion des mathématiques en un sens plus large. Elle a permis de mettre

9. Agence pour les Mathématiques en Interaction avec les Entreprises et la Société.

en lumière des initiatives originales en France et à l'étranger, comme par exemple le Village Nesin des mathématiques en Turquie ou le séminaire *Mathematic park*. La rubrique *Livre* a également évolué et l'accent est mis désormais sur des ouvrages généralistes pouvant intéresser un large public. Enfin, la rubrique *Carnet* a rendu hommage à plusieurs collègues disparus, dont Jean-Jacques Risler qui fut président de la SMF de 1996 à 1998.

La London Mathematical Society a contacté la SMF pour faire part de son admiration pour ce nouveau format de la *Gazette*, s'informer de la façon dont la SMF a mené sa réflexion et acheté une cinquantaine d'exemplaires pour diffusion auprès de ses institutions adhérentes.

Ce projet a pu aussi voir le jour grâce au travail importants de D. Bitouzé qui a œuvré sur tous les aspects techniques de ce nouveau format ; nous l'en remercions chaleureusement.

### 3. Conseil scientifique

**Composition actuelle.** Le Conseil Scientifique a été renouvelé partiellement. Il a vu l'arrivée de B. Cadre (Statistiques, Rennes), S. Jaffard (Analyse Harmonique, Créteil), C. Lescop (Topologie, Grenoble), L. Mazliak (Histoire des mathématiques, Paris), F. Wagner (Théorie des modèles, Lyon), J.-Y. Welschinger (Géométrie, Lyon).

Le secrétariat du conseil a été assuré par M.-F. Roy jusqu'en mars 2016, elle a été remplacée par S. Jaffard.

**Propositions.** Le Conseil Scientifique a proposé le nouveau comité des *États de la Recherche*. Il a approuvé le nouveau responsable et la composition du comité de *Bulletins et Mémoires*, ainsi que les propositions d'un nouveau responsable de *Panorama et Synthèses* et de nouveaux membres pour le comité de rédaction de la *Revue d'Histoire des mathématiques*. Il a également proposé le nom du Prix « Szolem Mandelbrojt » 2015, fait des propositions pour le comité scientifique du colloque franco-brésilien et pour le Prix Fermat. Deux membres du Conseil font partie du comité scientifique du congrès SMF 2016.

La SMF peut accorder son soutien scientifique à des colloques sur avis de son conseil scientifique. Dans ce cadre, la SMF a donné un avis favorable à la demande de soutien des rencontres suivantes :

- « Sixième journée d'accueil en mathématiques », Institut Henri Poincaré (IHP), Paris ;
- « Journées à la mémoire de Marc Yor », Jus-sieu, Paris ;
- « Grothendieck Conference 2015 », université de Montpellier ;
- « École d'été – Équations d'évolutions : comportement en temps long et contrôle », Le Bourget du Lac ;
- « Fractals and Related Fields III », Porquerolles ;
- « Théorie des nombres, systèmes de numération, théorie ergodique », Le Bourget du lac ;
- « PGMO Days 2015 », ENSTA ParisTech, Palaiseau ;
- « Relativité et Géométrie, en mémoire d'André Lichnerowicz », IHP, Paris.

## 4. Le pôle de Luminy

### 4.1 – La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro...). L'effort pour rattraper les retards de publication et de leur expédition aux clients a été poursuivi cette année encore. La maison de la SMF travaille en étroite collaboration avec les secteurs des publications, des publicités et de la comptabilité.

L'équipe est constituée aujourd'hui de l'équivalent de 1,5 temps plein ; le responsable de l'équipe est C. Munusami et une nouvelle salariée, M.-F. Kousémon, a été engagée en décembre 2014. Cette dernière présente la SMF aux nouveaux congressistes en début de semaine, tient un stand de vente des publications de la SMF chaque mardi et jeudi et contribue enfin à une présentation de qualité de nos ouvrages dans l'enceinte du CIRM. Des améliorations ont été effectuées concernant le stand (situé à la sortie de l'auditorium du CIRM) : espace délimité dédié à la SMF avec affiches, tracts publicitaires et exposition des publications. Avec l'accord de P. Foulon, une présentation plus visible de la SMF dans les locaux du CIRM a aussi été réalisée. Il résulte de toutes ces actions une amélioration substantielle de notre diffusion sur le site du CIRM : en 2015 les ventes ont atteint 20k€ soit 4 fois plus qu'en 2014.

En 2015, la maison de la SMF a réceptionné environ 7500 ouvrages ; c'est moins que les années précédentes et cela résulte de la politique de réduction du nombre d'impressions. Malgré cette baisse, l'espace dédié au stockage est très restreint pour

toutes les collections. Des efforts sont faits pour gérer ce stock de la façon la plus rationnelle possible. On constate une forte activité de production de statistiques ; cette année encore, un travail de réévaluation des frais d'envoi et de manutention a été fait par C. Munusami.

Une politique de dons d'ouvrages a été mise en place ces derniers mois ; les frais d'expédition sont facturés, auxquels s'ajoute un forfait pour la manutention. Ces dons nécessitent une implication importantes de collègues pour leur mise en place. Avec l'aide de M. Martin, 80 exemplaires ont été envoyés au Cameroun et 150 exemplaires confiés à l'APSAIHP. M. Peigné a suivi l'envoi de 539 exemplaires à deux instituts de mathématiques au Vietnam et le don de 15 exemplaires à un institut algérien. D'autres projets sont en cours.

## 4.2 – CIRM 2015

### Fréquentation

Concernant le nombre de visiteurs, le CIRM demeure le plus grand centre d'accueil de conférences avec un total de 3521 participants en 2015 pour l'organisation de 51 semaines de rencontres. Ce chiffre est comparable à celui de l'année passée (3449).

Pour la première fois dans l'histoire du Centre, le nombre total de participants provenant d'institutions étrangères est supérieur au nombre de participants ayant une affiliation en France (52,6%). Après la forte hausse de la pression scientifique en 2014, qui avait abouti malheureusement à devoir refuser de bons dossiers faute de place, la pression scientifique est redevenue plus gérable en 2015. Enfin, il est encourageant de souligner que le nombre de mathématiciennes au CIRM est également en nette progression : 21% de femmes participantes en 2015.

Le CIRM bénéficie du soutien renforcé (depuis 2012) de l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI), d'une dotation du MENESR, de dotations des collectivités locales (Région et Ville) ainsi que de financements des laboratoires d'excellence CARMIN et ARCHIMEDE qui apportent un complément financier important et nécessaire lui permettant de se maintenir au niveau de certains des meilleurs centres d'accueil internationaux (à noter que certains ont des financements bien plus importants).

La Chaire Jean-Morlet (dont on rappelle que le salaire est supporté par Aix-Marseille Université) continue d'attirer des leaders scientifiques du monde entier, proposant des programmes de grande qualité et qui influent directement sur le nombre croissant de chercheurs étrangers visitant le CIRM.

### Bilan des activités scientifiques

Sur un total de 51 semaines de rencontres organisées le centre a accueilli :

- 39 conférences et écoles dont une de 2 semaines ;
- 10 petits groupes ;
- 22 recherches en binôme ;
- 11 semaines de sessions thématiques : CEMRACS (6 semaines) et mois thématique (5 semaines) ;
- 2 semestres de Chaire Jean-Morlet.

### La Chaire Jean-Morlet.<sup>10</sup>

- février à juillet 2015 : Herwig Hauser (université de Vienne) et Guillaume Rond (I2M) Thème : Artin Approximation and Singularity Theory ;
- mai 2015 à octobre 2015 : François Lalonde (université de Montréal) et Andrei Teleman (I2M) Thème : Moduli Spaces in Symplectic Topology and Gauge Theory ;
- la co-édition Springer - SMF « Jean-Morlet Series » qui permet la publication des travaux de recherche menés au CIRM par les différents porteurs de la Chaire a sorti son premier volume consacré aux Probabilités (semestre Kistler-Gayraud). Le volume 2 est prévu pour l'été 2016 et sera consacré à la Théorie ergodique (semestre Hasselblatt-Troubetzkoy).

### LabEx CARMIN. Ont été soutenus cette année :

- 2 écoles CIRM-IHP ;
- 2 événements Chaire Jean-Morlet ;
- 1 session thématique ;
- 7 écoles ;
- 12 rencontres jeunes chercheurs ;
- la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle : 5 conférences filmées chaque semaine.

10. [www.chairejeanmorlet.com](http://www.chairejeanmorlet.com)



**LabEx ARCHIMEDE.**

- 14 rencontres labellisées au total dont 4 pour le mois thématique et 2 pour la Chaire Jean-Morlet.

**Immobilier : projet 2R-CIRM**

Le projet 2R-CIRM a été inscrit dans le CPER<sup>11</sup> en juin 2015. La maîtrise d'ouvrage a été confiée au Centre national de la recherche scientifique (CNRS). Suite à un concours d'architectes lancé en décembre 2015, un projet sera retenu en juin 2016. Une phase transitoire de préparation au démarrage des travaux a débuté en 2015 avec le déplacement de bureaux, une centralisation des services désormais dans la Bastide, et le déplacement des archives à la Maison de la SMF. Le début des travaux est prévu pour l'été 2017 pour une livraison du bâtiment au dernier trimestre 2018. Le bâtiment comprendra :

- une nouvelle salle de conférences de près de 100 places ;
- une salle rénovée d'une trentaine de places ;
- au moins 20 chambres supplémentaires (dont trois chambres pour des familles et deux pour des personnes à mobilité réduite),

pour un coût global de 2100 k€ (construction) et 500 k€ (équipement).

**De la préparation à la valorisation des événements scientifiques : une offre digitale riche et visible**

- Le site web a été entièrement refondu en 2015 : versions anglaise et française<sup>12</sup>.
- Tous les événements scientifiques ont leur propre mini-site dédié en français et en anglais.
- Cinq conférences par semaine sont filmées (dont une indexée). Le fonds ainsi constitué contient des exposés de recherche avec indexation par mots clés, des films et interviews grand public et des films thématiques. Plus de 500 films sont ainsi mis en ligne sur la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle (avec toutes les fonctionnalités d'une recherche documentaire de haut niveau sur une base de films catalogués et enrichis) et sur YouTube

(qui enregistre une fréquentation impressionnante de près de 200 000 vues).

- Le succès des réseaux sociaux permet une diffusion des informations rapide et visible dans le monde entier.

**Réunions, visites et échanges internationaux**

- Participation à ERCOM<sup>13</sup> 2015 en Suisse : l'EMS a nommé Ari Laptev (Mittag-Leffler Stockholm) comme Président d'ERCOM et P. Foulon (CIRM) comme Vice-président d'ERCOM.
- Participation au Heidelberg Laureate Forum en août en Allemagne, à l'anniversaire de l'EMS à Paris, rencontre avec des représentants du CNRS à l'étranger.
- ERCOM a mis en place une politique d'échange de savoir et de savoir-faire avec les autres centres. Notamment, des échanges-visites de personnels ont été mis en place. Le CIRM a été l'un des centres les plus sollicités (accueil de la Responsable du centre ICMS-Edimbourg et de la Chargée Internationale– Renyi Budapest). Déplacement de la Chargée de coopération internationale du CIRM à INI-Cambridge.
- Par ailleurs le CIRM a entamé une politique de réponse à des appels d'offres internationaux.

On peut conclure en soulignant que l'année a été scientifiquement riche avec un développement fort de nouveaux outils pour la préparation des rencontres. D'autre part le projet 2R-CIRM ouvre de nouvelles perspectives très importantes pour l'élargissement de l'offre scientifique du CIRM à l'horizon fin 2018.

**5. Secteur grand public**

La SMF continue à avoir une activité intense dans ce secteur : cycles de conférences, événements, publications, partenariats.

**Un texte, un mathématicien.** Ce cycle de conférences organisé en partenariat avec la BnF<sup>14</sup> et l'association *Animath* rencontre toujours un vif succès avec un suivi fidèle de *France Culture*.

11. Contrat de plan État-Région.

12. [www.cirm-math.fr](http://www.cirm-math.fr)

13. European research center on mathematics.

14. Bibliothèque nationale de France.



**Une question, un chercheur.** Ce cycle de conférences a désormais lieu dans des établissements différents chaque année, à l'Institut d'Astrophysique de Paris en février 2016 et à l'université Paris-Diderot en mai 2016.

**Journée Sciences et Médias, parler de sciences aux jeunes.** La troisième journée « Sciences et médias » a été organisée<sup>15</sup> par les trois sociétés savantes de mathématiques, la SIF, la SFP<sup>16</sup> et la SCF<sup>17</sup>. Elle a rencontré un vif succès avec plus de 150 participant(e)s et des interventions de très grande qualité.

La question se pose de savoir comment prolonger cet intéressant partenariat entre nos six sociétés savantes pour communiquer toujours mieux sur et par la science.

**Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques.** Comme les années précédentes, la SMF participe à ce salon qui se tient place Saint-Sulpice et dont le thème en 2016 est « Mathématiques et société ».

**Prix d'Alembert 2016.** L'édition 2016 du prix d'Alembert a rencontré un large succès avec 26 candidatures de très bonne qualité. Le jury a décidé de décerner le prix à l'association marseillaise *Pi-day* qui organise depuis plusieurs années une journée autour des mathématiques le 14 mars (03/14 avec la convention anglo-saxonne).

## 6. Enseignement

Deux faits marquants sont intervenus en 2015/2016 qui ont entraîné des réactions du Conseil d'Administration de la SMF qui s'est appuyé sur le travail et les propositions de la Commission Enseignement.

- La publication des nouveaux programmes des cycles 2, 3 et 4 de l'enseignement obligatoire : les améliorations apportées à la version de ces programmes proposée en juin 2015 ne permettent pas de répondre à toutes les inquiétudes relevées<sup>18</sup>.

- La publication du décret instituant une option « informatique » pour le concours du CAPES de mathématiques : la SMF reste sceptique sur l'efficacité de ce dispositif pour attirer des candidats au concours. Elle regrette d'autre part qu'un véritable programme ne soit prévu que pour la première épreuve écrite, option mathématiques ou informatique<sup>19</sup>.

Par ailleurs, en collaboration avec ses partenaires, la SMF a proposé une réécriture de l'arrêté « docteur » qui a permis d'obtenir une nouvelle mouture acceptable de cet arrêté.

Des groupes de travail sur les programmes de lycées ont été mis en place à l'initiative en particulier de la SMF en collaboration avec ses partenaires.

- Groupe de travail « Mathématiques en lien avec l'Informatique au lycée » avec la SIF, la SFDS et la SMAI : les travaux de ce groupe ont commencé en juin 2015 et sont sur le point d'aboutir ; un texte provisoire sur les 4 thèmes identifiés (codage – représentation de l'information, logique, graphes, combinatoire) est en cours de finalisation<sup>20</sup>.
- Groupe de travail sur les programmes de mathématiques des lycées (avec l'UPS<sup>21</sup> et la SFP en particulier) : en partant de l'idée que les nouveaux programmes de collège amèneront des modifications des programmes du lycée, ce groupe voudrait proposer une réécriture de ces programmes avec pour objectif la formation de futurs scientifiques.
- Notons qu'un groupe de travail porté entre autres par la SFP se concentre sur les programmes de physique des lycées : la SMF a été invitée à participer à ses travaux pour effectuer le lien entre mathématiques et physique au lycée.

Les travaux de ces groupes de travail irriguent la réflexion de la commission enseignement de la SMF qui propose des textes et des prises de position que le Conseil d'Administration peut valider et diffuser aux tutelles et/ou médias.

La table ronde consacrée à l'enseignement qui aura lieu le mercredi 8 juin lors du congrès de la SMF sera centrée sur le thème préoccupant de la formation des futurs scientifiques en général.

15. avec le soutien du CNRS et INRIA.

16. Société Française de Physique.

17. Société Chimique de France.

18. [smf.emath.fr/files/smfversion150515.pdf](http://smf.emath.fr/files/smfversion150515.pdf)

19. [smf.emath.fr/files/alertecapes-smf.pdf](http://smf.emath.fr/files/alertecapes-smf.pdf)

20. [www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-mars%202016/at\\_download/file](http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-mars%202016/at_download/file)

21. Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques.

**Divers.** La SMF participe au comité de suivi de la « Stratégie Mathématiques ». Elle est toujours active au sein de la CFEM. Elle s'interroge cependant sur ce processus dont les effets à venir sont très en deçà des espérances initiales.

## 7. Publications

Les publications de la SMF se portent mieux ; il est important de veiller à pérenniser ce fait. Il n'y plus aucun retard sur le traitement des textes soumis au *Bulletin* et aux *Mémoires* et l'augmentation du nombre de pages de ces publications et d'*Astérisque* permettra de répondre à une demande toujours soutenue. La SMF remercie les Comités de Rédaction pour leur travail ; selon la tradition elle tient à respecter leur indépendance.

On peut noter cette année l'apparition de la série « Chaire Morlet » en accord avec Springer. D'autre part le contrat de diffusion par l'AMS a été renégocié pour 3 ans en y incluant la série *Panoramas et Synthèses* et une publicité pour les *Annales*. Il est important que la SMF augmente les occasions d'exposer ses ouvrages, c'est déjà le cas au CIRM, lors des séminaires Bourbaki, à la BNF, et durant d'autres manifestations. Les ventes spéciales sont organisées périodiquement à l'usage des acheteurs en ligne.

La SMF a décidé une politique des prix et des tirages adaptée à la communauté des acheteurs et aux réalités économiques. Pour augmenter la diffusion, il convient de préserver la qualité des publications et de modérer les prix de ventes.

Durant l'année 2015 la SMF a honoré des engagements de longue date et publié des ouvrages qui étaient sur le métier depuis longtemps confirmant ainsi son attachement au respect des auteurs. D'autre part elle a prospecté pour élaborer de nouveaux projets.

La SMF possède un fonds d'ouvrages anciens qui ont encore un grand intérêt et sont proposés à des prix modérés. Une campagne de dons à des pays émergents est mise en place. D'autre part un certain nombre d'ouvrages épuisés sont toujours demandés. À titre d'essai la SMF a procédé, en accord avec l'auteur, au retraitage du Cours spécialisé n°10 de Claire Voisin, qui sera proposé à un prix attractif.

En conclusion la SMF souhaite tenir son rôle de maison d'édition de type non commercial au service de la communauté mathématique.

**Aspects numériques.** L'intégration des séries en version numérique de la SMF dans l'archive Num-

dam se poursuit, en collaboration étroite avec la Cellule Mathdoc de Grenoble. La mise en ligne de la collection complète des *Mémoires* sur Numdam sera finalisée prochainement, alors que les abonnés ont déjà accès aux volumes des dix dernières années sur le serveur SMF. De manière analogue, les dix dernières années des *Séminaires Bourbaki* publiés dans la série *Astérisque* sont en cours d'installation.

En prolongement de sa publication en ligne introduite en 2015, le Conseil a décidé la numérisation d'*Astérisque*, série initiée en 1974. Bénéficiant du soutien de la cellule Mathdoc, cet investissement majeur concerne plus de 50 000 pages et près de 1 500 articles : elle mettra à terme à disposition 360 volumes, dont certains sont épuisés. Le modèle économique suivra celui de la diffusion des *Mémoires* : accès libre, sauf les dix dernières années dont l'accès est réservé aux abonnés. La promotion de l'achat des volumes disponibles (et la valorisation de nos stocks) devrait être introduite aux côtés de l'accès libre. Si la préservation de l'équilibre économique de l'activité Publication de la SMF est un souci constant, la Société a été attentive aux débats qui ont entouré l'adoption de la loi *Pour une République numérique* et a écouté les réflexions de la communauté mathématique sur la diffusion et l'accès aux résultats de la recherche.

Par ailleurs, les formats sont en cours de mise à jour, en profitant de la classe Cedram avec production facilitée des différentes versions : article en ligne, volumes imprimés, dépôt en archive, conservation des sources, gestion des doi... Saluons aussi le *Portail Math*, qui donne une voie d'accès supplémentaire aux publications en ligne de la SMF. Ses créateurs et gestionnaires apportent aussi diverses contributions et aides ponctuelles à la SMF : MATHRICE avec notamment l'*Agenda des maths* qui a pris le relais de l'*Officiel des mathématiques*, le RNBM qui gère l'accès collectif national aux revues de la SMF, Mathdoc avec Numdam...

## 8. Rapport financier, année 2015

Pour l'année 2015, l'ensemble SMF-CIRM affiche un résultat net comptable de +240 k€. Le total du chiffre d'affaires est de 1982 k€, incluant 436 k€ de subventions. Pour comparaison, le résultat net était de +473 k€ en 2014 avec 1959 k€ de chiffre d'affaire et 422 k€ de subventions. Dans les paragraphes suivants, nous présentons d'abord les finances des activités de la SMF de manière assez détaillée, puis celles des activités du CIRM.

## 8.1 – La SMF

La vocation de la SMF est de mener à bien des missions que nous répartissons en trois catégories :

- assurer des services aux membres ;
- produire et vendre des livres et des revues ;
- communiquer sur les mathématiques auprès du grand public.

Le total des produits s'élève à 958 k€ (938 k€ en 2014). Le total des produits d'exploitation est de 953 k€, avec un chiffre d'affaires de 724 k€ (contre 641 k€ en 2014) ; ce total inclut 570 k€ de ventes (soit 70 k€ de plus qu'en 2014) et 84 k€ de cotisation. Le montant total des subventions est de 47 k€ (voir le détail plus loin). Le total des charges est de 822 k€ (882 k€ en 2014).

La SMF présente donc un résultat positif de 136 k€ en 2015, contre 56 k€ en 2014. Dans la suite, nous détaillons ces comptes poste par poste.

### Produits d'exploitation et produits financiers

1. *Ventes de revues et de livres.* Le montant global est de 570 k€, contre 502 k€ en 2014. Cette augmentation des ventes est le résultat d'une régularité retrouvée dans la sortie de nos publications et d'un travail de diffusion important, notamment sur Marseille auprès des visiteurs du CIRM.
2. *Cotisations et abonnements.* Le montant global est de 84 k€, contre 85 k€ en 2014. Ce montant reste stationnaire grâce à un effort de relance important ; le besoin de fidéliser les nouveaux adhérents reste une priorité.
3. *Subvention.* Il s'agit d'une subvention INSMI de 47 k€, qui se décline comme suit : 13k€ de subvention récurrente, 17 k€ pour la brochure « Zoom des Métiers » et 15 k€ pour le fonds de dotation de l'IHP.
4. *Recettes diverses.* Le montant global est de 41,5 k€, contre 42,5 k€ en 2014 ; ces recettes proviennent des dons, de la facturation des frais de ports et de refacturations variées pour des actions avec des associations partenaires (sociétés savantes, Animath, ...).
5. *Transfert de charges.* Cela correspond au reversement des salaires des personnels du CIRM détachés à la SMF. Le montant global est de 156 k€, contre 176 k€ en 2014.
6. *Produits financiers.* Ces produits correspondent à la rémunération des fonds placés.

Le montant global est de 5 k€, contre 6 k€ en 2014.

7. *Variation du stock et des encours.* Le montant global est de 3 k€, contre 59 k€ en 2014. Cette baisse de la variation du stock s'explique par un travail important de gestion des stocks, l'augmentation des ventes et la diminution des volumes d'ouvrages produits.

### Charges d'exploitation

1. *Masse salariale.* Le montant des salaires et indemnités – hors charges – de l'ensemble du personnel (SMF +CIRM) est de 310 k€, contre 314 k€ en 2014. Il faut ajouter 130 k€ de charges (comme en 2014). Les salaires du personnel SMF détaché au CIRM sont intégralement remboursés (156 k€). En 2015, la masse salariale a été stabilisée, rappelons qu'en 2014, certains postes avaient été supprimés et d'autres avaient vu leur profil redéfini, avec une économie d'environ 30k€ à la clé.
2. *Frais de fabrication et composition.* Tous ouvrages confondus, les frais de fabrication s'élèvent à 106 k€, contre 97,5 k€ en 2014. Les frais de fabrication intègrent le coût occasionné par la fabrication de la brochure « Zoom des Métiers ». Les frais de composition sont de 28 k€, contre 30 k€ en 2014. Le montant global de cette ligne est donc de 134 k€, contre 127,5 k€ en 2014. Il est important de souligner que le nombre de titres fabriqués est en augmentation, pour un coût global moindre puisque le montant de 134 k€ intègre les frais de fabrication du *Zoom des Métiers*.
3. *Honoraires, assurances, loyers.* Cette ligne comprend les honoraires pour le commissaire aux comptes et l'expert comptable (15,6 k€), les assurances (2 k€), les loyers versés à l'IHP et à Luminy (14 k€), et des « honoraires divers » (7,5 k€).
4. *Affranchissements et routage.* Tous envois confondus, le montant global des affranchissements est de 87,5 k€, contre 76,5 k€ en 2014. Cette augmentation s'explique par celle des tarifs postaux et celle du nombre de volumes expédiés.
5. *Impôts et taxes.* Ce poste est de 14 k€, contre 13 k€ en 2014 dont 10 k€ correspondent à la Taxe sur les salaires.
6. *Frais bancaires et téléphone.* Le montant global est de 5 k€, contre 7 k€ en 2014.

7. *Achat de fournitures*. Le montant global est de 9,5 k€, contre 9,5 k€ en 2014.
8. *Vie de l'Association*. Cette ligne inclut les soutiens aux opérations scientifiques, les frais de déplacement, et divers « frais de mission ». Le montant global est de 20 k€, contre 22 k€ en 2014.
9. *Entretien, réparation, maintenance*. Le montant global est de 17 k€, contre 16,5 k€ en 2014.
10. *Dépenses diverses*. Cette « ligne » inclut entre autres la sous-traitance générale (14 k€), la publicité (1 k€), la formation (2 k€) et diverses manifestations (BnF, Mathématiques dans les classes, ... pour un montant de 5 k€). Le montant global est de 22 k€.
11. *Amortissements sur immobilisations*. Cela correspond essentiellement à l'amortissement du matériel informatique. Le montant global est de 17 k€, contre 20 k€ en 2014.
12. *Provisions diverses*. Le montant total est de 3 k€, contre 81 k€ en 2014 (dont 72 k€ de dépréciation du stock). En 2015, la dépréciation des stocks n'a pas eu d'impact négatif sur le compte de résultat, le montant de 3 k€ correspondant à des factures impayées.

## 8.2 – Le CIRM

Depuis 2000, le CIRM est une Unité Mixte de Service placée sous la responsabilité conjointe du CNRS-INSMI et de la SMF. Une convention signée le 7 décembre 2010 a eu pour objet de fixer la répartition des domaines d'intervention entre l'unité CNRS et la SMF : par l'intermédiaire du CNRS, le CIRM apporte le contenu scientifique des rencontres mathématiques, par ailleurs le CIRM confie à la SMF l'organisation et la gestion des rencontres mathématiques.

L'exercice 2015 du CIRM est excédentaire de 104 k€, contre 417 k€ en 2014. Il faut rappeler qu'en 2014, une reprise de provision importante, due au règlement d'un litige, avait contribué à l'excédent du CIRM.

Traditionnellement, les excédents éventuels sont mobilisés pour autofinancer l'entretien des installations (investissements non couverts entièrement par les subventions). Ces excédents contribuent aussi à alimenter le fonds de roulement du CIRM, encore insuffisant.

L'essentiel des excédents de 2015 va être affecté à deux projets de grande ampleur. D'une part, le CIRM s'est engagé à contribuer à hauteur de 600 k€ au projet 2R-CIRM, qui vise à la restructuration et à la rénovation de l'Annexe (bâtiment CNRS). Ce projet est inscrit au Contrat État Région (le budget total est de 2,6 M€). L'engagement du CIRM dans le projet a été voté au bureau de la SMF le 3 octobre 2014. D'autre part, le CIRM a prévu d'investir 120 k€ pour l'extension du restaurant (livraison prévue en 2018).

Les produits d'exploitation s'élevaient à 1749 k€ en 2015 (contre 1843 k€ en 2014), auxquels il faut rajouter 5,7 k€ de produits financiers et 198 k€ de « produits exceptionnels » (543 k€ en 2014). Ces produits dits exceptionnels, correspondent à l'étalement des subventions d'investissement perçues lors de précédents travaux et investissements au CIRM.

Les produits comprennent des ressources propres – 1354 k€ de chiffre d'affaires – ainsi que des subventions de différents organismes (MENESR, Aix-Marseille Université, Conseil Régional, Ville de Marseille) s'élevant à 390 k€. Le chiffre d'affaires est en légère baisse par rapport à 2014 (1403 k€) ainsi que les subventions (409 k€ en 2014).

Les charges d'exploitation s'élevaient à 1849 k€ contre 1827 k€ en 2014. Cette augmentation est essentiellement liée aux achats de fluides et à des frais de restauration plus importants.

## 8.3 – Conclusion

L'ensemble CIRM-SMF affiche un résultat positif de 240 k€. Hors « produits exceptionnels », le résultat net du CIRM est de +104 k€. La SMF est quant à elle, excédentaire pour +136 k€.

Ce rapport moral se veut le bilan de l'ensemble des activités au sein de la SMF depuis un an. Le personnel de la SMF et de très nombreux bénévoles y ont contribué, nous les remercions tous : membres du Bureau, du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la SMF, directeurs et membres des comités de rédaction, ainsi que tous ceux qui interviennent, ponctuellement ou plus régulièrement, et qui offrent leurs compétences sans compter leur temps avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par B. Adamczewski, G. Bourgeois, P. Foulon, A. Grigis, L. Guillopé, C. Imbert, S. Jaffard, L. Moser-Jauslin, A. Pasquale, M. Peigné, M.-F. Roy, S. Seuret, A. Szpirglas avec l'aide de S. Albin, N. Christiaën, C. Munusami et C. Ropartz. Remercions enfin F. Petit pour sa relecture attentive (de ce rapport mais aussi des épreuves de la Gazette et autres textes tout au long de l'année).

La théorie des modèles est une branche de la logique mathématique relativement récente. Née dans les années 30, elle reste encore mal connue, malgré ses nombreuses applications en algèbre et en géométrie. La *Gazette* a décidé de consacrer un dossier à ce domaine en plein essor...

## THÉORIE DES MODÈLES



La théorie des modèles est consacrée à l'étude, par la famille de leurs ensembles définissables, des structures abstraites, dont les structures mathématiques classiques (groupes, anneaux, corps, ordres...) sont des cas particuliers. Cette branche de la Logique Mathématique a de nombreuses interactions avec d'autres domaines des mathématiques, notamment en algèbre, géométrie et théorie des nombres.

Parmi quelques-unes des applications récentes les plus marquantes, on peut mentionner les applications à la Géométrie Diophantienne : la preuve de la conjecture de Mordell-Lang pour les corps de fonction en toute caractéristique et plus récemment des applications à la conjecture d'André-Oort. Des liens très fructueux se sont noués également récemment avec la combinatoire additive (groupes approximatifs) ou la géométrie non Archimédienne (Espaces de Berkovich).

Nous allons essayer d'en présenter ici quelques aspects. Il ne s'agit ni d'en présenter un historique, ni de rester au niveau des généralités. Dans un premier temps, nous présenterons des définitions et quelques démonstration simples permettant, nous l'espérons, de donner une idée de ce qu'on fait quand on « fait de la théorie des modèles ». Ensuite, par le choix de quelques sujets spécifiques, la théorie des modèles géométrique, ou l'*o-minimalité*,

nous parlerons aussi, mais là avec moins de détails, de résultats plus récents et plus sophistiqués.

Dans le premier article *Introduction à la théorie des modèles* nous avons essayé de faire une introduction aux notions et méthodes basiques de théorie des modèles, en évitant les définitions formelles, au risque de nous contenter parfois d'énoncés un peu approximatifs. Dans la première section, l'introduction informelle aux notions de base, nous ne présenterons que des définitions et des théorèmes vraiment classiques, à travers des exemples d'applications à l'algèbre que nous avons choisis aussi simples que possible. Nous donnerons quelques démonstrations, mais en nous plaçant, pour simplifier, dans un contexte particulier (on ne regardera vraiment que des anneaux). Les trois exemples que nous présenterons datent des années 60.

Pour ne pas s'arrêter à la théorie des modèles datant de plus 50 ans, dans la seconde section nous présenterons des résultats plus récents et ferons un survol accéléré du développements de la théorie des modèles moderne.

Dans le second article, Tom Scanlon, dans la présentation d'une branche particulière de la théorie des modèles, l'*o-minimalité*, exposera à la fois l'histoire du sujet, ses développements et ses applications les plus récentes.



# Introduction à la théorie des modèles

• É. BOUSCAREN

Dans ce texte, notre but est tout d'abord de présenter, en nous plaçant dans un contexte particulier qui nous permet de simplifier beaucoup les définitions, les principales notions de base de la théorie des modèles, ses outils et ses résultats les plus classiques. Cela sera fait dans la première section. Dans cette section, les trois théorèmes que nous allons donner comme exemples d'applications, de même que les théorèmes de théorie des modèles que l'on utilise pour les démontrer, datent des années 60, et utilisent uniquement des outils très basiques de théorie des modèles.

Dans la seconde section, nous changerons un peu de style afin de présenter « en survol » les développements modernes et plus sophistiqués de la théorie des modèles.

## 1. Notions de base à travers quelques exemples classiques

### 1.1 – Exemples d'applications

Nous commençons par énoncer trois exemples d'applications des méthodes basiques de théorie des modèles.

Les démonstrations des Théorèmes 1 et 2 sont à peu près identiques et très simples. Le Théorème 3 est plus compliqué. Il a d'ailleurs fallu attendre plusieurs années pour qu'en soit donnée une démonstration purement géométrique (la preuve « théorie des modèles » date de 1965, il faudra attendre 2011 pour que Jan Denef ([9]) présente une preuve purement géométrique.

Nous verrons un peu plus loin les stratégies et les ingrédients des démonstrations, qui nous serviront de motivation et de fil conducteur pour les définitions de théorie des modèles que nous donnerons. Une fois les outils de théorie des modèles introduits dans la section 1.2, nous pourrons donner (section 1.3) les démonstrations complètes des Théorèmes 1 et 2. En revanche, pour ce qui est du Théorème 3 nous nous contenterons de quelques indications dans cette section et dans l'appendice (section 3).

### Les trois applications

**Théorème 1.** (Ax 1969) *Soit  $f$  une application polynomiale de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 1$ ). Si  $f$  est injective,  $f$  est surjective.*

(L'application  $f$  est polynomiale :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

avec, pour chaque  $i$ ,  $f_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ .)

Le théorème, énoncé ainsi, est seulement un cas particulier du Théorème d'Ax, qui considère les endomorphismes des variétés algébriques (et en fait des schémas de type fini ([1])). Le cas particulier de l'espace affine tout entier, c'est-à-dire  $\mathbb{C}^n$  avait déjà été remarqué dans [5]. À peu près à la même époque il y a eu plusieurs démonstrations dont par exemple Borel ([6]) utilisant la cohomologie, Grothendieck, puis plus tard Rudin ([18]).

Après avoir vu la démonstration via la théorie des modèles, dans le cas de  $\mathbb{C}^n$ , on doit pouvoir refaire sans aucune difficulté le cas où  $f$  est une application polynomiale de  $V$  dans  $V$ , avec  $V \subset \mathbb{C}^n$ , une variété affine,

$$V = \{a \in \mathbb{C}^n : P_1(a) = P_2(a) = \dots = P_m(a) = 0\}$$

pour  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ .

Remarquons que l'hypothèse que  $f$  est polynomiale est essentielle, il y a par exemple des contre-exemples de fonctions holomorphes [7].

On peut exactement de la même manière que pour le théorème d'Ax, démontrer à très peu de frais le résultat classique suivant [4] :

**Théorème 2.** *Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $p^m$ , pour  $p$  premier, et  $\gamma$  une action algébrique de  $G$  sur  $\mathbb{C}^n$ . Alors l'action  $\gamma$  a un point fixe.*

On fixe un groupe  $G$  d'ordre  $p^m$ . On a donc une action  $\gamma$ ,

$$\gamma : G \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$$

et puisque  $\gamma$  est algébrique, pour chaque  $g \in G$ , il



existe  $f_{g_1}, \dots, f_{g_n} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , tels que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\begin{aligned} \gamma(g, (x_1, \dots, x_n)) &= g.(x_1, \dots, x_n) \\ &= (f_{g_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{g_n}(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

On dira que l'action est de degré inférieur ou égal à  $d$  si chacun des polynômes  $f_{g_i}$  est de degré inférieur ou égal à  $d$ .

Pour ces deux théorèmes, on procède par transfert (Théorème 4), à partir de cas où la propriété est très facile à démontrer (en l'occurrence les corps finis).

Enfin, plus compliqué,

**Conjecture d'Artin pour les corps  $p$ -adiques.** *Pour tout  $p$ , pour tout  $d \geq 1$ , tout polynôme homogène de degré  $d$  en  $n > d^2$  variables, à coefficients dans  $\mathbb{Q}_p$ , a un zéro non trivial dans  $\mathbb{Q}_p$ .*

Ce résultat avait été montré (Carlitz, Lang) pour tout  $p$ , pour les corps des séries formelles à coefficients dans  $\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p((t))$ . En 1965, Ax et Kochen dans [3] ont montré une version « asymptotique » de cette conjecture. On a d'ailleurs maintenant des contre-exemples qui montrent que seule la version asymptotique est vraie ([22]).

**Théorème 3 (Conjecture d'Artin asymptotique).** *Soit un entier  $d \geq 1$ . Il existe un nombre premier  $p_0(d)$  tel que pour tout  $p \geq p_0(d)$ , tout polynôme sur  $\mathbb{Q}_p$ , homogène de degré  $d$  en  $n > d^2$  variables, a un zéro non trivial dans  $\mathbb{Q}_p$ .*

Ce théorème se montre aussi par transfert (Théorème 5), à partir du résultat connu pour les corps  $\mathbb{F}_p((t))$ .

Faisons tout de suite une remarque qui permet de simplifier les énoncés que l'on veut transférer de  $\mathbb{F}_p((t))$  à  $\mathbb{Q}_p$ . Pour tout corps  $K$ , s'il est vrai que, pour tout  $d \geq 1$ , tout polynôme homogène en  $d^2 + 1$  variables a un zéro non trivial, alors tout polynôme en plus de  $d^2 + 1$  variables a aussi un zéro non trivial : il suffit de prendre  $n - (d^2 + 1)$  variables égales à zéro.

## Comment montrer les Théorèmes 1 et 2

Il faut évidemment quand même utiliser un petit peu d'algèbre.

**Quelques rappels sur les corps algébriquement clos.**

1. Un corps  $K$  est *algébriquement clos* si tout polynôme de  $K[X]$  de degré  $\geq 1$  a une racine dans  $K$ .

2. Soit  $k$  un corps, il existe une extension de  $k$  qui est algébriquement close et algébrique sur  $k$ , qu'on appellera une *clôture algébrique* de  $k$  et qu'on notera  $\bar{k}$ . Deux clôtures algébriques de  $k$  sont isomorphes au-dessus de  $k$ .

3. Cas de la caractéristique  $p$ . Fixons une clôture algébrique du corps fini  $\mathbb{F}_p, \overline{\mathbb{F}_p}$ . Dans cette clôture algébrique,  $\mathbb{F}_p$  a une seule extension de degré  $n$ ,  $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^n}$ . De plus,  $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m}$  si et seulement si  $n$  divise  $m$ . On obtient donc  $\overline{\mathbb{F}_p}$  comme limite inductive de la famille  $(\mathbb{F}_{p^n})_{n \geq 1}$ . En particulier, *tout sous-corps finiment engendré de  $\overline{\mathbb{F}_p}$  est fini*.

4. Cas de la caractéristique 0. On utilisera ici seulement un seul fait bien connu, tout corps algébriquement clos de caractéristique zéro et de cardinalité identique à celle de  $\mathbb{C}$  (c'est-à-dire de cardinalité le continu, la cardinalité de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ) est isomorphe à  $\mathbb{C}$ . On s'en servira un peu plus tard.

On va traiter ensemble les preuves des deux théorèmes car elles sont très semblables. On commence par regarder les cas évidents.

– Les corps finis. Soit  $K$  un corps fini ( $K = \mathbb{F}_{p^r}$ , pour  $p$  premier et  $r \geq 1$ ).

1. Alors, évidemment, si  $g$  est *n'importe quelle* application injective de  $K^n$  dans  $K^n$ ,  $g$  est surjective, simplement car il s'agit d'une application injective d'un ensemble fini dans lui-même.

2. C'est un simple calcul sur le nombre d'orbites de vérifier que si un groupe  $G$  de cardinalité  $p^m$  agit sur un ensemble fini de cardinalité  $q^r$ , avec  $q$  et  $p$  premiers distincts, alors il doit y avoir un point fixe.

– Passage aux clôtures algébriques des corps finis.

Cela repose sur le fait que tout sous-corps finiment engendré de  $K_p := \overline{\mathbb{F}_p}$  est fini.

1. Si  $f$  est polynomiale injective de  $K_p^n$  dans  $K_p^n$ , soit  $a$  un élément quelconque de  $K_p^n$ . On considère le sous-corps  $K_0$  engendré par  $a$  et par le nombre fini de coefficients des polynômes de  $f$ . Alors  $K_0$  est fini et la restriction de  $f$ , de  $K_0$  dans  $K_0$ , est injective, donc surjective, et  $a$  est donc bien dans l'image de  $f$ .

2. Si  $G$ , groupe d'ordre  $p^m$ , agit sur  $K_q^n$ , pour  $p \neq q$  premiers, soit  $K_0$  le sous-corps engendré par les coefficients des polynômes qui définissent l'action algébrique de  $G$  sur  $K_q^n$ . Alors l'action de  $G$  restreinte aux éléments de  $K_0$  définit une action de  $G$  sur  $K_0$ , qui est un corps fini, et  $a$  a donc un point fixe.

Après ces remarques d'algèbre élémentaires, on invoque la théorie des modèles pour conclure directement car

**Théorème 4.** *Si une propriété qui s'exprime par un énoncé du premier ordre dans le langage des anneaux est vraie dans la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$  pour tout  $p$  premier sauf un nombre fini, elle est vraie dans  $\mathbb{C}$ , le corps des complexes.*

Dans ce texte, nous allons essayer de donner un sens précis à tout cela,

- définir ce qu'est un énoncé du premier ordre et vérifier que les propriétés énoncées dans les deux théorèmes sont bien « du premier ordre » (section 1.2),
- démontrer ce théorème de transfert, en utilisant les ultraproducts (section 1.3).

Ce théorème de transfert est en fait un cas particulier du théorème fondamental de la logique du premier ordre, le *théorème de compacité*, que l'on montrera après, en utilisant également les ultraproducts, dans la section 1.3.

Il existe d'autres théorèmes de transferts classiques que nous n'aurons pas le temps de voir ici, en particulier « La complétude de la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée » : tout énoncé du premier ordre (définition dans la section 1.2) qui est vrai dans un corps algébriquement clos est vrai dans tout corps algébriquement clos de même caractéristique. Ici nous avons choisi une preuve du théorème d'Ax qui n'utilise pas directement ce second principe de transfert.

La propriété de complétude de la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est souvent utilisée de manière un peu informelle en géométrie algébrique sous le nom de *Principe de Lefschetz*, par exemple si on veut montrer « quelque chose » sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, on sait qu'il suffit de le faire pour  $\mathbb{C}$ .

De même, pour le transfert de propriétés vraies en caractéristique  $p$  pour (presque) tout  $p$  à la caractéristique 0. Mais souvent cela est fait au cas par cas, de manière *ad hoc*. Toutefois Serre dans un article assez récent traite de ces questions de manière plus systématique [19].

## Comment montrer le Théorème 3

Le Théorème 3 repose aussi sur un théorème de transfert général dont nous dirons ici juste

quelques mots et un tout petit peu plus dans l'appendice (section 3).

**Théorème 5.** *Une propriété qui s'exprime par un énoncé du premier ordre dans le langage des corps (valués) est vraie dans  $\mathbb{Q}_p$  pour tout  $p$  sauf un nombre fini si et seulement si elle est vraie dans  $\mathbb{F}_p((t))$  pour tout  $p$  sauf un nombre fini.*

Or, on sait que le résultat sur les polynômes homogènes est vrai pour tous les corps  $\mathbb{F}_p((t))$ , donc, une fois vérifié que l'existence de zéros pour les polynômes homogènes s'exprime par des énoncés du premier ordre, le théorème précédent nous donne le Théorème 3.

Ce second théorème de transfert repose sur un autre théorème, théorème emblématique de la théorie des modèles des corps valués, le théorème d'Ax-Kochen-Eršov, montré indépendamment en 1965 par Ax et Kochen d'une part, par Eršov d'autre part ([3], [10]).

Nous en donnons l'énoncé ici et renvoyons à l'appendice (section 3) pour quelques définitions de base concernant les corps valués.

**Théorème 6 (Ax-Kochen-Eršov).** *Deux corps valués henséliens d'équicaractéristique 0 satisfont aux mêmes énoncés du premier ordre dans le langage des corps valués si et seulement si leurs corps résiduels satisfont aux mêmes énoncés dans le langage des corps et leurs groupes de valeur satisfont aux mêmes énoncés dans le langage des groupes ordonnés.*

Le Théorème d'Ax-Kochen-Eršov, a depuis été généralisé, soit en relaxant les hypothèses sur les corps valués (équicaractéristique zéro) soit en élargissant le type d'énoncés que l'on peut transférer<sup>1</sup>.

## 1.2 – Théorie des modèles

La théorie des modèles est l'étude des structures abstraites, dont les structures mathématiques classiques sont des cas particuliers : groupes, anneaux, corps, corps ordonnés, corps différentiels...

### Une première approche intuitive de la notion de structure

Nous commençons par une première approche qui a l'avantage de mettre en lumière les objets

1. Par exemple, dans [8] Cluckers et Loeser montrent que l'on peut aussi transférer des égalités entre intégrales  $p$ -adiques.

qui nous intéressent vraiment, les ensembles définissables. Mais qui a l'inconvénient, comme on le verra juste après, qu'on ne peut pas vraiment travailler avec, et il faudra donc introduire d'autres définitions.

**Définition 1 (Première définition abstraite d'une structure, ensembles basiques).** Une *structure*  $\mathcal{M} = \langle M, (B_i)_{i \in I} \rangle$  est la donnée d'un ensemble (non vide)  $M$  et d'une famille  $(B_i)_{i \in I}$  de sous-ensembles de  $\bigcup_{n \geq 1} M^n$  (la réunion des puissances cartésiennes de  $M$ ), famille contenant la diagonale de  $M^2$ .

Les ensembles  $B_i$  sont appelés les sous-ensembles *basiques* ou *atomiques* de la structure  $\mathcal{M}$ .

Les sous-ensembles basiques sont ceux qui sont obtenus à partir des fonctions et relations de base de la structure à laquelle on s'intéresse. Par exemple, si on prend les réels et qu'on s'intéresse à  $(\mathbb{R}, +)$  en tant que groupe, on prendra pour ensembles basiques les sous-ensembles de la forme  $\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : m_1 a_1 + \dots + m_n a_n = 0 \text{ pour } m_i \in \mathbb{Z}\}$ . Si on s'intéresse à  $\mathbb{R}$  en tant que corps, donc à  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ , ou à n'importe quel corps  $K$ , on prendra pour ensembles basiques les solutions d'une équation polynomiale, c'est-à-dire les ensembles de la forme  $\{(a_1, \dots, a_n) \in K^n ; P(a_1, \dots, a_n) = 0\}$ , pour  $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ . Pour  $\mathbb{R}$ , corps ordonné, on prendra les ensembles de la forme suivante, pour  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ,

$$\{a \in \mathbb{R}^n ; P(a) = 0\} \text{ et } \{a \in \mathbb{R}^n ; P(a) > 0\}.$$

Ensuite la famille des *sous-ensembles définissables* de la structure sera obtenue à partir de la famille des sous-ensembles basiques en composant un nombre fini de fois les opérations auxquelles on peut s'attendre. Plus précisément,

**Définition 2 (La famille des ensembles définissables).** Si  $\mathcal{M} = \langle M, (B_i)_{i \in I} \rangle$  est une structure, on définit la famille des *sous-ensembles définissables* de la structure  $\mathcal{M}$ , notée  $Def(\mathcal{M})$  comme la plus petite famille de sous-ensembles de  $\bigcup_{n \geq 1} M^n$  avec les propriétés de clôture suivantes.

1. Pour tout  $i \in I$ ,  $B_i \in Def(\mathcal{M})$ .
2. (Opérations booléennes finies) Si  $A, B \in Def(\mathcal{M})$ , alors  $A \cup B, A \cap B, M^n \setminus A$  appartiennent à  $Def(\mathcal{M})$ .
3. (Permutation de coordonnées) Si  $A \subset M^n$ ,  $A \in Def(\mathcal{M})$  et  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ , alors  $\sigma(A) = \{(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)} ; (a_1, \dots, a_n) \in A\} \in Def(\mathcal{M})$ .
4. (Projection) Si  $A \subset M^{n+m}$ ,  $A \in Def(\mathcal{M})$ , et  $\pi_n$  est la projection de  $A$  sur  $M^n$ , alors  $\pi_n(A) \in Def(\mathcal{M})$ .
5. (Spécialisation) Si  $A \subset M^{n+m}$ ,  $A \in Def(\mathcal{M})$ , et si  $\bar{c} \in M^n$ , alors  $A(\bar{c}) := \{\bar{b} ; (\bar{c}, \bar{b}) \in A\} \in Def(\mathcal{M})$ .

Reprenons les exemples donnés plus haut.

Pour un corps  $K$ , à partir des ensembles basiques, quand on clôt par intersection finie, on obtient les fermés de Zariski (ou ensembles algébriques de  $K^n$ ). Ensuite si on clôt par combinaisons booléennes finies (complémentaire, intersection, réunion) on obtient exactement les ensembles constructibles de la topologie de Zariski. Pour obtenir les ensembles définissables il faut également clore par projection. Si le corps  $K$  est algébriquement clos alors il est bien connu (c'est un théorème de Chevalley, ou, du point de vue de la théorie des modèles, c'est le théorème d'élimination des quantificateurs de Tarski) que la projection d'un ensemble constructible est encore constructible, et donc les ensembles définissables du corps  $K$  sont exactement les ensembles constructibles. En revanche dès que  $K$  est infini mais non algébriquement clos, cela n'est plus vrai (théorème de Macintyre en 1971 [16]); par exemple, en caractéristique  $p$ , si  $K$  n'est pas parfait, c'est-à-dire s'il existe  $b \in K$  sans racine  $p^{\text{ième}}$ , alors  $K^p := \{a \in K ; \exists b \in K, b^p = a\}$  est la projection d'un constructible mais n'est pas constructible.

Maintenant pour la structure  $\mathbb{R}$  comme corps ordonné, à partir des ensembles basiques, par combinaisons booléennes, on obtient les ensembles *semi-algébriques*. Là aussi il est bien connu (Théorème de Tarski-Seidenberg) que la projection d'un semi-algébrique est semi-algébrique. Cela est vrai car  $\mathbb{R}$  est un corps réel clos (tout polynôme de degré impair a une solution et  $-1$  n'est pas un carré). Pour une exposition de la théorie des modèles des corps réels clos et plus généralement de la géométrie dite « modérée », on pourra regarder l'article de Thomas Scanlon, *o-minimality*, de ce même numéro.

Comme déjà dit plus haut, cette définition des structures, directement à partir d'une famille de sous-ensembles « basiques », est assez naturelle mais n'est pas très utile en général. En effet ce cadre ne permet pas de traiter des questions essentielles, comme celles de l'extension des ensembles définissables. Prenons un exemple simple. On considère les deux extensions de  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q} \subset \bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ , où  $\bar{\mathbb{Q}}$  est la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ . On définit les ensembles basiques de la même manière dans ces trois corps, ce sont les zéros des polynômes. Il est naturel de vouloir étudier les relations entre  $Def(\mathbb{Q})$ ,  $Def(\bar{\mathbb{Q}})$  et  $Def(\mathbb{C})$ . Y-a-t-il une manière canonique d'étendre un ensemble définissable de  $\mathbb{Q}$  à un ensemble définissable de  $\bar{\mathbb{Q}}$  ou de  $\mathbb{C}$ ? Réciproquement, si  $X$  est un sous-ensemble définissable dans  $\mathbb{C}^n$ , qu'en est-il de  $X \cap \bar{\mathbb{Q}}^n$  ou  $X \cap \mathbb{Q}^n$ ? Tout corps dénombrable de

caractéristique 0 se plonge dans  $\mathbb{C}$ , existe-t-il toujours de telles structures « universelles » dans toute classe de structures ? Peut-on définir proprement ce qu'on entend par des structures de *type similaire* (la classe des corps par exemple) ? Comment énoncer et démontrer rigoureusement les théorèmes de transfert utilisés plus haut ?

Pour pouvoir répondre à ce type de questions, il nous faut une manière plus constructive de décrire les ensembles définissables, qui ne dépende pas d'une structure précise donnée ( $\mathbb{R}$  par exemple) mais uniquement du « type » de la structure, les corps dans ce cas, ou bien les corps ordonnés... C'est pourquoi on introduit les « langages », et les *formules*. Les ensembles définissables deviennent alors les ensembles des « solutions » d'une formule dans une structure donnée, de la même manière que l'on considère, en géométrie, les points  $K$ -rationnels d'une variété, quand on fait varier le corps  $K$ .

Comme expliqué dans l'introduction, nous n'allons pas ici donner les définitions dans le cadre général qui est celui de la logique du premier ordre, ni démontrer le théorème de compacité en général. Pour éviter le formalisme et les complications techniques, nous allons nous placer dès le départ dans le cas particulier qui nous intéresse, c'est-à-dire définir ce que nous appellerons une formule du premier ordre pour la classe des anneaux commutatifs. Il s'agit là de définitions et d'un cadre « ad hoc » qui permettent d'admettre sans problèmes toute une série de détails techniques qu'il nous faudrait considérer sérieusement autrement.

### Définition de l'ensemble des formules pour les anneaux commutatifs

Nous allons nous placer tout de suite dans la classe de tous les *anneaux commutatifs unitaires*. Nous avons donc des structures  $R$  munies de l'addition  $+$  :  $R \times R \mapsto R$ , de l'inverse de l'addition,  $-$  :  $R \mapsto R$ , de la multiplication  $\cdot$  :  $R \times R \mapsto R$  et de deux éléments distingués, 0 et 1.

Dans ce cas, le « langage » de la structure  $R$ , ce sont deux fonctions binaires, une fonction unaire et deux constantes.

On va définir, pas à pas, à la fois l'ensemble des formules pour le langage des anneaux commutatifs et pour une formule, ce que cela signifie qu'elle est « vraie » dans un anneau  $R$  donné.

Soyons francs, ces définitions peuvent sembler

naïves ou même « tautologiques » à première vue et surtout dans le cadre particulier que nous avons choisi. Mais c'est un peu normal, puisqu'il s'agit de définir de manière plus formelle des notions que l'on utilise tous les jours en mathématiques. De plus nous passons sous silence ici le versant *syntactique* de la logique du premier ordre : le fait que, quand on formalise la notion de démonstration, on obtient bien qu'une formule est vraie si et seulement si il en existe une démonstration formelle<sup>2</sup>, ce qui fait la force de ces définitions.

On définit tout d'abord l'ensemble des formules *basiques* ou *atomiques*,  $\mathcal{F}_0$  : ce sont toutes les expressions de la forme  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  où  $P$  est un polynôme dans  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ . Les polynômes peuvent être de degré zéro : par exemple «  $p = 0$  » est une formule, pour chaque nombre premier  $p$ .

On dira que la variable  $x_i$  est *libre* dans la formule  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  si  $x_i$  est de degré supérieur ou égal à 1 dans le polynôme  $P$ .

Pour une formule  $\phi$  de  $\mathcal{F}_0$ , on écrira  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  pour indiquer, quand cela sera important, que les variables libres dans  $\phi$  sont parmi  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Si  $R$  est un anneau commutatif, si  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  est une formule de la forme «  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  », et si  $a_1, \dots, a_n$  sont des éléments de  $R$ , on dira que «  $R$  satisfait à la formule  $\phi(a_1, \dots, a_n)$  », ou que la suite  $a_1, \dots, a_n$  satisfait à la formule  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  dans  $R$ , ou que  $\phi$  est vraie pour  $(a_1, \dots, a_n)$ , noté

$$R \models \phi(a_1, \dots, a_n),$$

si, dans  $R$ , on a  $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

Pour les formules sans variables libres, elles sont vraies ou fausses dans un anneau donné. Par exemple la formule «  $p = 0$  » est vraie dans les anneaux de caractéristique égale à  $p$ .

On dira que le sous-ensemble de  $R^k$ ,  $\{(a_1, \dots, a_k) \in R^k : R \models \phi(a_1, \dots, a_k)\}$  est « défini » ou *définissable* par la formule  $\phi$ . Grâce aux formules basiques on récupère ainsi pour chaque anneau  $R$ , et pour chaque  $n$ , la famille d'ensembles basiques que nous avions choisie plus haut.

Il nous faut maintenant, pour obtenir l'ensemble de toutes les formules, clore l'ensemble des formules basiques par les opérations suivantes :

– la *négation* (correspondant au complémentaire). Si  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  est une formule,  $\neg\phi(x_1, \dots, x_n)$ , la négation de  $\phi$ , est une formule (lue « non  $\phi$  »), qui définit le complémentaire de l'ensemble défini par

2. Théorème de complétude de Gödel



$\phi$  : sans surprise, si  $a_1, \dots, a_n$  sont des éléments de  $R$ , on dira que la formule  $\neg\phi(a_1, \dots, a_n)$  est vraie dans  $R$  ( $R \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ ), si la formule  $\phi(a_1, \dots, a_n)$  n'est pas vraie dans  $R$  ( $R \not\models \phi(a_1, \dots, a_n)$ ). Les variables libres de  $\neg\phi$  sont les mêmes que celles de  $\phi$  ;

– la *conjonction* (correspondant à l'intersection). Si  $\phi_1(x_1, \dots, x_n)$  et  $\phi_2(x_1, \dots, x_n)$  sont des formules alors  $\phi_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \phi_2(x_1, \dots, x_n)$  (lu  $\phi_1$  « et »  $\phi_2$  et noté aussi  $\phi_1 \wedge \phi_2(x_1, \dots, x_n)$ ) est une formule, qui définit l'intersection des ensembles définis par  $\phi_1$  et  $\phi_2$  : si  $a_1, \dots, a_n$  sont des éléments de  $R$ , la formule  $\phi_1 \wedge \phi_2(a_1, \dots, a_n)$  est vraie dans  $R$  ( $R \models \phi_1 \wedge \phi_2(a_1, \dots, a_n)$ ) si  $R \models \phi_1(a_1, \dots, a_n)$  et  $R \models \phi_2(a_1, \dots, a_n)$ . Une variable  $x$  est libre dans  $\phi_1 \wedge \phi_2$  si elle est libre dans  $\phi_1$  ou libre dans  $\phi_2$  ;

– la *quantification existentielle* (correspondant à la projection). Si  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  est une formule, alors  $\exists x_1 \phi(x_1, \dots, x_n)$  est une formule (lue « il existe »  $x_1 \phi$ ), qui définit la projection de l'ensemble défini par  $\phi$  : si  $(b_2, \dots, b_n)$  sont des éléments de  $R$ , alors la formule  $\exists x_1 \phi(x_1, b_2, \dots, b_n)$  est vraie dans  $R$  ( $R \models \exists x_1 \phi(x_1, b_2, \dots, b_n)$ ) s'il existe  $a \in R$ , tel que  $R \models \phi(a, b_2, \dots, b_n)$ . La variable  $x$  est libre dans  $\exists y \phi(y, \dots, x)$ , si  $x$  est libre dans  $\phi(y, \dots, x)$ , mais  $x$  n'est plus une variable libre de  $\exists x \phi(x, \dots)$ .

On peut aussi comme d'habitude, définir la disjonction de deux formules  $\phi_1 \vee \phi_2$ , qui correspond à la réunion, et le quantificateur universel  $\forall x \phi$ , pour tout  $x$ . Mais on les obtient grâce aux équivalences habituelles qui expriment la disjonction et le quantificateur universel à partir des trois précédents.

L'ensemble des formules du premier ordre est donc la clôture de l'ensemble des formules atomiques par trois opérations : la conjonction, la négation, la quantification existentielle (et donc aussi la disjonction et la quantification universelle). Au niveau des sous-ensembles définissables cela correspond à clore par intersection finie, complémentaire et projection.

Il est essentiel de remarquer que les formules sont obtenues à partir d'un nombre fini d'opérations, et que pour vérifier la satisfaction d'une formule dans un anneau  $R$ , on remplace les variables par des éléments de  $R$ , jamais par des sous-ensembles. Ce sont ces deux propriétés qui caractérisent la logique du premier ordre.

Il est également important de réaliser que pour que toutes ces définitions marchent bien, il y aurait un certain nombre de lemmes techniques à vérifier, et de conventions d'écriture à définir. Ici, on se permet de ne pas le faire car on utilise l'intuition que nous avons tous de ce qu'est un polynôme dans un

anneau commutatif, des opérations que l'on peut faire avec, et des conventions habituelles de notation sur les indéterminées ou les variables dans ce cas.

Maintenant, si on veut étudier les anneaux commutatifs ordonnés, on s'autorise aussi à utiliser l'ordre et donc les formules atomiques dans ce cas seront les expressions de la forme  $P(X_1, \dots, X_n) = 0$  et aussi celles de la forme  $P(X_1, \dots, X_n) < 0$ .

Dans son article sur l'o-minimalité, Scanlon va parler de langages qui étendent encore plus celui des anneaux commutatifs ordonnés. En gros, il considérera quatre types de structures particulièrement importantes. Tout d'abord, classiquement, les réels comme corps ordonné,  $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ , dans le langage des anneaux commutatifs ordonnés. Ensuite, les réels avec l'exponentielle :  $\mathbb{R}_{exp}$  dans laquelle on autorise aussi les formules atomiques du type  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  et  $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ , où  $f$  n'est plus simplement un polynôme mais est un polynôme exponentiel, c'est-à-dire obtenu par composition des opérations basiques, l'addition, l'opposé, la multiplication et la fonction exponentielle réelle. Une troisième structure,  $\mathbb{R}_{an}$ , dans laquelle on autorise toutes les fonctions analytiques réelles restreintes, c'est-à-dire, toutes les fonctions  $h : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  dont la restriction à  $[-1, 1]^m$  est analytique réelle et qui est nulle en dehors. Enfin, la structure  $\mathbb{R}_{an,exp}$ , dans laquelle on peut composer toutes les fonctions précédentes pour définir les formules atomiques.

Si l'on s'intéresse aux groupes (non nécessairement commutatifs), on prendra juste la loi de groupe, l'inverse et l'élément neutre. Les formules atomiques à  $n$  variables libres seront les identités du type

$$\prod_{1 \leq i \leq n} (x_i)^{e_{1,i}} \dots \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i)^{e_{k,i}} = 1$$

avec  $k \geq 1$ , et  $e_{j,i} \in \mathbb{Z}$ , pour  $1 \leq j \leq k$  et  $1 \leq i \leq n$ .

Si l'on s'intéresse, comme c'est le cas pour le théorème d'Ax-Kochen-Eršov (Théorème 6) aux *corps valués*, on peut rajouter la relation «  $val(x) \leq val(y)$  », comme nous l'expliquons dans l'appendice (section 3).

Les théorèmes de théorie des modèles que nous allons montrer dans la suite (définition des ultra-produits, théorème de Łos, théorème de compacité) sont vrais dans le contexte général avec les mêmes démonstrations.

Quelques premiers exemples :  $\mathbb{R} \not\models \exists x(x^2 = -1)$ , mais  $\mathbb{C} \models \exists x(x^2 = -1)$ . Un anneau  $R$  satisfait à la formule  $\forall x(x = 0) \vee (\exists y xy = 1)$  si et seulement si  $R$

est un corps. Si  $p$  est un nombre premier,

$$R \models "p = 0 \wedge \forall x \forall y (xy \neq 0 \vee x = 0 \vee y = 0)"$$

ssi  $R$  est un anneau intègre de caractéristique égale à  $p$ .

Il est facile de vérifier que les formules sont préservées par isomorphisme (d'anneau) :

**Lemme 1.** Si  $f$  est un isomorphisme (d'anneau) de  $R$  sur  $R'$ , si  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  est une formule, alors pour tous  $a_1, \dots, a_n \in R$ ,

$$R \models \phi(a_1, \dots, a_n) \text{ ssi } R' \models \phi(f(a_1), \dots, f(a_n)).$$

On introduit quelques notations habituelles.

- On écrira  $P(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  à la place de  $\neg(P(x_1, \dots, x_n) = 0)$ ;
- On note  $(\phi \rightarrow \psi)$  la formule  $(\neg\phi \vee \psi)$ ; on note  $(\phi \leftrightarrow \psi)$  la formule  $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$ .

**Définition.** Deux formules,  $\phi_1(x_1, \dots, x_n)$  et  $\phi_2(x_1, \dots, x_n)$  sont équivalentes (pour la classe des anneaux commutatifs) si, pour tout anneau commutatif  $R$ , et toute suite  $a_1, \dots, a_n$  d'éléments de  $R$ ,

$$R \models \phi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ ssi } R \models \phi_2(a_1, \dots, a_n).$$

Les équivalences dont on a l'habitude sont bien sûr vraies, par exemple :  $(\phi_1 \vee \phi_2)$  est équivalente à  $\neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$ ,  $\forall x \phi$  est équivalente à  $\neg\exists x \neg\phi$  ...

## Exemples, théories, modèles

**Définitions et remarques.** Une formule sans variable libre est appelée un *énoncé*. Un énoncé est soit vrai, soit faux dans un anneau donné (et pas les deux en même temps!). Si l'anneau  $R$  satisfait l'énoncé  $\theta$ , on dira que  $R$  est un *modèle* de  $\theta$ . Si  $\Sigma$  est un ensemble d'énoncés et si  $R$  est modèle de chacun des énoncés de  $\Sigma$ , on dira que  $R$  est modèle de  $\Sigma$ , noté  $R \models \Sigma$ .

Un ensemble (éventuellement infini) d'énoncés qui a un modèle sera appelé *une théorie*.

On dit que deux anneaux  $R$  et  $R'$  sont *élémentairement équivalents* s'ils satisfont exactement aux mêmes énoncés du premier ordre, noté  $R \equiv R'$ . Évidemment, si  $R$  et  $R'$  sont isomorphes, ils sont en particulier élémentairement équivalents.

On dira qu'une théorie  $\Sigma$  est *complète* si tous ses modèles sont élémentairement équivalents.

On dit que  $\theta$  est *conséquence* de  $\Sigma$  si tout modèle de  $\Sigma$  est également modèle de  $\theta$ , noté  $\Sigma \vdash \theta$ .

Regardons tout de suite quelques exemples qui vont permettre de comprendre ce que l'on peut exprimer dans la logique du premier ordre et ce que l'on ne peut pas exprimer.

Les modèles de l'énoncé  $\Theta_c := \forall x(x = 0) \vee (\exists y x.y = 1)$  sont exactement les anneaux commutatifs qui sont des corps.

Si  $p$  est un nombre premier, les corps modèles de l'énoncé  $\sigma_p := \langle p = 0 \rangle$  sont exactement les corps de caractéristique  $p$ .

Les anneaux modèles de  $\Sigma := \{\theta_c, \sigma_p\}$  (ou de l'énoncé  $\langle \theta_c \wedge \sigma_p \rangle$ ) sont exactement les corps de caractéristique  $p$ .

Peut-on trouver un énoncé (du premier ordre) dont les modèles soient exactement tous les corps de caractéristique zéro? Si l'on essaye, on voit qu'on ne trouve pas. En revanche on peut trouver un ensemble infini d'énoncés qui fait l'affaire. Soit

$$\Sigma_0 = \{ \neg\sigma_p : p \text{ premier} \}.$$

Alors un corps  $K$  est de caractéristique zéro si et seulement si, pour chaque  $p$ ,  $K \models \langle p \neq 0 \rangle$ , c'est-à-dire,  $K \models \Sigma_0$ .

Pour dire qu'un corps est de caractéristique zéro, on dit donc qu'il n'est de caractéristique  $p$  pour aucun nombre premier  $p$ . Et on va voir bientôt que le théorème de compacité prouve qu'effectivement il ne peut pas exister un énoncé (ou un nombre fini d'énoncés, ce qui est la même chose) pour dire qu'un corps est de caractéristique zéro. D'ailleurs le théorème de transfert que nous allons utiliser (Théorème 4) ne pourrait être vrai s'il existait un énoncé  $F$  disant « être de caractéristique zéro ». En effet alors  $\neg F$  serait vrai dans tous les  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et, par le théorème, devrait être vrai dans  $\mathbb{C}$ .

Le même problème se pose si l'on cherche un énoncé dont les modèles seraient exactement tous les anneaux finis. En revanche on peut facilement dire, pour  $n \geq 2$ , qu'un anneau  $R$  a exactement  $n$  éléments. Soit, pour chaque entier  $n \geq 2$ ,

$$G_n := \exists x_1, \dots, \exists x_n [(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j) \wedge (\forall y \vee_{1 \leq i \leq n} y = x_i)]$$

$$F_n := \exists x_1, \dots, \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j).$$

Un anneau  $R$  est de cardinalité égale à  $n$  si et seulement s'il satisfait à l'énoncé  $G_n$ . Un anneau  $R$  est de cardinalité supérieure ou égale à  $n$  si et seulement s'il satisfait à l'énoncé  $F_n$ .

Un anneau  $R$  sera infini si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $R \models F_n$ . À nouveau, le théorème de compacité nous dira que l'on ne peut pas remplacer cet ensemble infini d'énoncés par un nombre fini.



Intuitivement, pour dire que  $R$  est fini, on aurait envie de dire « il existe un entier  $n$  tel que  $F_n$  », mais ceci n'est pas un énoncé du premier ordre. Dire « il existe un entier  $n$  tel que  $F_n$  » revient à faire une disjonction infinie  $\bigvee_{n \geq 1} F_n$ . Ceci n'est pas un énoncé du premier ordre.

### Théorie des corps algébriquement clos, énoncé du théorème d'Ax

Nous allons vérifier qu'il existe une théorie, c'est-à-dire un ensemble (infini) d'énoncés, dont les modèles sont exactement les corps algébriquement clos et également que le théorème d'Ax s'énonce par une infinité d'énoncés du premier ordre.

Soit  $n \geq 1$  un entier fixé, on peut écrire un énoncé,  $\theta_n$ , dont les modèles sont exactement les anneaux  $R$  tels que tout polynôme unitaire de degré  $n$  à coefficients dans  $R$  a une solution dans  $R$  :

$$\forall y_0 \dots \forall y_{n-1} \exists x (x^n + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot x^i) = 0.$$

Les corps algébriquement clos sont alors exactement les modèles de la théorie

$$T_{CAC} := \{\theta_c\} \cup \{\theta_n; n \geq 1\}.$$

Pour  $p$  premier, on note  $T_{CAC_p}$  la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ , c'est-à-dire  $T_{CAC} \cup \{\sigma_p\}$ . Et  $T_{CAC_0}$  sera la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique zéro, c'est-à-dire  $T_{CAC} \cup \{-\sigma_p : p \text{ premier}\}$ .

Parmi les résultats fondamentaux sur la théorie des corps algébriquement clos, nous avons déjà mentionné que dans un corps algébriquement clos, les sous-ensembles définissables sont les ensembles constructibles, c'est-à-dire ceux définis sans recourir à la projection. Au niveau des formules, cela veut dire que dans la théorie des corps algébriquement clos, toute formule est équivalente à une formule sans quantificateurs. On dit que la théorie  $T_{CAC}$  élimine les quantificateurs. Autre résultat fondamental, deux corps algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents (voir le Principe de Lefschetz mentionné après l'énoncé du théorème 4), c'est-à-dire les théories  $T_{CAC_0}$  et  $T_{CAC_p}$ , pour tout  $p$  premier, sont des théories complètes.

Enfin, il nous faut vérifier que le théorème d'Ax s'énonce par une infinité d'énoncés du premier ordre.

Ce que l'on peut dire, par une formule (sans variable libre)  $J_{n,d}$ , c'est que, pour  $n$  et  $d$  fixés, toute application polynomiale de  $K^n$  dans  $K^n$ , de degré inférieur ou égal à  $d$ , qui est injective, est surjective. Alors il sera vrai, dans  $K$ , que toute application polynomiale injective est surjective si et seulement si, pour chaque  $n$  et chaque  $d$ , l'énoncé  $J_{n,d}$  est vrai dans  $K$ .

Comme au-dessus, il va falloir quantifier sur les coefficients des polynômes, pour dire « pour tout polynôme de degré  $\leq d$  », c'est donc un peu fastidieux à écrire. Je l'écris ici dans un cas simple  $f = (f_1, f_2)$ , application de degré  $\leq 2$  de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}^2$  et je laisse le soin au lecteur de se convaincre que cela marche pareil pour  $n$  et  $d$  plus grands.

On a :

$$f_1(x_1, x_2) = \sum_{i+j \leq 2} y_{ij} x_1^i x_2^j \text{ et } f_2(x_1, x_2) = \sum_{i+j \leq 2} z_{ij} x_1^i x_2^j.$$

Soit  $l(\bar{y}, \bar{z})$  la formule :

$$\begin{aligned} \forall x_1 \forall x_2 \forall x'_1 \forall x'_2 [ & ((\sum_{i+j \leq 2} y_{ij} x_1^i x_2^j \\ & = \sum_{i+j \leq 2} y_{ij} x'_1{}^i x'_2{}^j) \wedge (\sum_{i+j \leq 2} z_{ij} x_1^i x_2^j \\ & = \sum_{i+j \leq 2} z_{ij} x'_1{}^i x'_2{}^j)) \rightarrow (x_1 = x'_1 \wedge x_2 = x'_2)]. \end{aligned}$$

Alors  $R \models l(\bar{y}, \bar{z})$  ssi  $f$  est injective.

Soit  $S(\bar{y}, \bar{z})$  la formule

$$\begin{aligned} \forall v \forall w \exists x_1 \exists x_2 [ & (\sum_{i+j \leq 2} y_{ij} x_1^i x_2^j = v) \\ & \wedge (\sum_{i+j \leq 2} z_{ij} x_1^i x_2^j = w)]. \end{aligned}$$

Alors  $R \models S(\bar{y}, \bar{z})$  ssi  $f$  est surjective.

Maintenant soit

$$J_{2,2} := (\forall \bar{y} \forall \bar{z} (l(\bar{y}, \bar{z}) \rightarrow S(\bar{y}, \bar{z}))).$$

Alors  $R \models J_{2,2}$  si et seulement si toute application polynomiale de degré inférieur ou égal à 2, de  $R^2$  dans  $R^2$ , qui est injective, est surjective.

Nous laisserons aussi le lecteur se convaincre que l'énoncé du Théorème 2 s'exprime également par une infinité de formules du premier ordre, pour chacune on fixe  $m$ ,  $n$  et le degré des polynômes qui définissent l'action.

Pour montrer les Théorèmes 1 et 2, il nous suffit donc maintenant de démontrer le Théorème 4, ce que nous allons faire dans la section 1.3. En effet, nous avons vu (section 1.1) que, pour tout  $p$ , toute application polynomiale injective de  $\overline{\mathbb{F}_p}^n$  dans  $\overline{\mathbb{F}_p}^n$

est surjective. Par ce qui précède, pour tout  $n$  et  $d$ , l'énoncé  $J_{n,d}$  est donc vrai dans  $\overline{\mathbb{F}_p}$ . Le théorème de transfert nous dit alors que chacun de ces énoncés  $J_{n,d}$  est également vrai dans le corps  $\mathbb{C}$ , et donc, que toute application polynomiale injective de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  est surjective. Le raisonnement est identique pour le Théorème 2.

### 1.3 – Ultraproduits et démonstration du théorème de compacité

#### Théorème de compacité et conséquences

Nous allons donner la démonstration du théorème de compacité grâce aux ultraproduits un peu plus loin, mais voyons ce qu'il dit et ses premières conséquences.

**Théorème 7 (Théorème de compacité 1).** *Soit  $\Sigma$  un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de  $\Sigma$  a un modèle. Alors  $\Sigma$  a un modèle.*

Une formulation équivalente :

**Théorème 8 (Théorème de compacité 2).** *Soit  $\Sigma$  un ensemble d'énoncés, et  $\theta$  un énoncé. Si  $\Sigma \vdash \theta$ , il existe un sous-ensemble fini  $F$  de  $\Sigma$  tel que  $F \vdash \theta$ .*

**Corollaire 1.** *Si  $T$  est une théorie qui a des modèles finis de cardinalité arbitrairement grande (c'est-à-dire telle que, pour chaque  $n \geq 1$ ,  $T$  a un modèle fini de cardinalité supérieure à  $n$ ), alors  $T$  a un modèle infini.*

*Preuve.* Considérons l'énoncé  $F_n := \exists x_1, \dots, \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$ . Un modèle de  $F_n$  est de cardinalité au moins  $n$ . Soit  $T' := T \cup \{F_n : n \geq 2\}$ . Un modèle de  $T'$ , s'il en existe, est un modèle de  $T$  de cardinalité supérieure à  $n$  pour chaque  $n$ , donc infini. Si  $F$  est un sous-ensemble fini de  $T'$ , alors il existe  $k$  tel que  $F \subset T \cup \{F_n : 2 \leq n \leq k\}$ . Par hypothèse,  $T$  a un modèle de cardinalité au moins égale à  $k$ ,  $R_k$ . Celui-ci est un modèle de  $T \cup \{F_n : 2 \leq n \leq k\}$  et donc de  $F$ . Le théorème de compacité entraîne bien que  $T'$  a un modèle.  $\square$

**Corollaire 2.** *Si  $\sigma$  est vrai dans tous les corps de caractéristique zéro, alors il existe un nombre premier  $q$  tel que  $\sigma$  est vrai dans tous les corps de caractéristique supérieure ou égale à  $q$ .*

*Preuve.* Soit  $T = \{\theta_c\} \cup \{p \neq 0 : p \text{ premier}\}$ . Les modèles de  $T$  sont tous les corps de caractéristique 0. Si  $\sigma$  est vrai dans tous les corps de caractéristique 0, alors  $T \vdash \sigma$ . Par le théorème de compacité 2, il existe  $F$  fini,  $F \subset T$ , tel que  $F \vdash \sigma$ . Puisque  $F$  est fini, il existe un nombre premier  $q$  tel que

$F \subset \{\theta_c\} \cup \{p \neq 0 : p < q\}$ . Si  $K$  est un corps de caractéristique  $\geq q$ ,  $K$  est modèle de  $F$ , et donc aussi modèle de  $\sigma$ .  $\square$

Le corollaire précédent s'énonce aussi de manière équivalente : *si  $\sigma$  est un énoncé qui est vrai dans des corps de caractéristique  $p$ , pour  $p$  arbitrairement grand, alors il existe un corps de caractéristique zéro dans lequel  $\sigma$  est vrai.*

**Corollaire 3.** *Si un énoncé  $\sigma$  est vrai dans tous les corps algébriquement clos de caractéristique 0, alors il existe  $p_0$  tel que  $\sigma$  est vrai dans tous les corps algébriquement clos de caractéristique  $p > p_0$ .*

*Preuve.* Si  $\sigma$  est vrai dans tous les corps algébriquement clos de caractéristique zéro, alors  $\sigma$  est conséquence de la théorie que nous avons appelée  $T_{CAC_0}$  (section 1.2) donc, par le théorème de compacité, d'une partie finie de cette théorie. Il y a donc  $p_0$  tel que  $\sigma$  est vrai dans tout modèle de  $T_{CAC_0} \cup \{p \neq 0 : p \leq p_0\}$ , donc en particulier dans tout corps algébriquement clos de caractéristique supérieure à  $p_0$ .  $\square$

On pourrait déduire maintenant le Théorème 4, du Corollaire 3 et du fait que tous les corps algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents. Toutefois, la preuve directe du Théorème 4 que nous allons donner, en utilisant les ultraproduits, nous semble particulièrement « parlante ».

En effet, la construction par ultraproduits permet de donner un sens précis à la notion de « limites » de structures, de propriétés vraies « asymptotiquement » et permet aussi de transformer la notion d'équivalence élémentaire en une notion plus algébrique d'isomorphisme.

#### Ultraproduits d'ensembles

**Définitions.** Soit  $I$  un ensemble non vide, un filtre sur  $I$  est une famille  $\mathcal{F}$  de sous-ensembles de  $I$ , avec les propriétés suivantes :  $I \in \mathcal{F}$ ,  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ , si  $X, Y \in \mathcal{F}$ , alors  $X \cap Y \in \mathcal{F}$ , si  $X \in \mathcal{F}$  et  $X \subset Z \subset I$ , alors  $Z \in \mathcal{F}$ . Si  $\emptyset \neq X_0 \subset I$ ,  $\mathcal{F}_{X_0} = \{Y \subset I : X_0 \subset Y\}$  est un filtre, qui est appelé un *filtre principal*. Si  $I$  est infini, l'ensemble des parties cofinies de  $X$ ,  $\mathcal{FR} = \{X \subset I ; I \setminus X \text{ est fini}\}$ , est un filtre, appelé le *filtre de Fréchet*, qui n'est jamais principal. Un ultrafiltre est un filtre maximal

pour l'inclusion<sup>3</sup>. Tout filtre est contenu dans un ultrafiltre, par le lemme de Zorn. On vérifie facilement qu'un ultrafiltre est non principal si et seulement si il contient le filtre de Fréchet. Il suit de la définition que pour tout  $X \subset I$ ,  $X$  est dans  $\mathcal{U}$  ou bien son complémentaire est dans  $\mathcal{U}$  (mais pas les deux)!

Maintenant, soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles non vides,  $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} A_i$ . On considère sur les éléments de  $\mathcal{A}$ , la relation d'équivalence  $\equiv_{\mathcal{U}} : a \equiv_{\mathcal{U}} b$  ssi  $\{i \in I; a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$ . On notera  $a_{\mathcal{U}}$  la classe de  $a$ .

L'ensemble quotient,  $\prod_{i \in I} A_i / \mathcal{U} = \{a_{\mathcal{U}} : a \in \prod_{i \in I} A_i\}$  est appelé l'ultraproduit des  $A_i$  (par  $\mathcal{U}$ ).

Le lemme suivant sur les cardinalités nous sera utile.

**Lemme 2.** Soit  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille d'ensembles non vides, dénombrables infinis. Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre non principal sur  $\mathbb{N}$ . Alors  $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i / \mathcal{U}$  est de cardinalité égale au continu, c'est-à-dire à  $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ .

*Preuve.* Il est clair que  $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i / \mathcal{U}$  est de cardinalité inférieure ou égale au continu. Ce qui nécessite une preuve, c'est qu'on atteint le continu. On commence par construire un ensemble  $E$  d'applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , de cardinalité  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  et tel que si  $f, g \in E$ , et  $f \neq g$ , alors  $\{i \in \mathbb{N} : f(i) = g(i)\}$  est fini. Pour chaque application  $\delta$  de  $2^{\mathbb{N}}$  ( $\delta : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\}$ ), on définit une application  $f_{\delta}$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  en posant

$$f_{\delta}(n) = \sum_{m < n} \delta(m) 2^m.$$

La famille  $E = \{f_{\delta} : \delta \in 2^{\mathbb{N}}\}$  a la propriété requise. Maintenant, pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ , on fixe une énumération de  $A_i = (e_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Ensuite, pour chaque  $f \in E$ , on définit un élément  $a_f$  dans  $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i : a_f(i) := e_{i, f(i)}$ . Alors si  $f \neq g$ ,  $\{i \in \mathbb{N} : a_f(i) = a_g(i)\} = \{i \in \mathbb{N} : f(i) = g(i)\}$  est fini et n'est donc pas dans  $\mathcal{U}$ , ultrafiltre non principal. Donc, si  $f \neq g$ ,  $(a_f)_{\mathcal{U}} \neq (a_g)_{\mathcal{U}}$ .  $\square$

**Remarque.** La famille d'applications  $E$  construite dans la preuve ci-dessus a également la propriété que, pour toute  $f \in E$ , et pour tout  $n$ ,  $f(n) < 2^n$ . On peut en déduire de manière très semblable que, si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille d'ensembles finis, mais de cardinalités non bornées, c'est-à-dire tels que, pour chaque  $n$ ,  $\{i \in \mathbb{N} : |A_i| \leq n\}$  est fini, et si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre non principal sur  $\mathbb{N}$ , alors  $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i / \mathcal{U}$  est de cardinalité égale à  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ .

Maintenant, le but, en théorie des modèles, est de faire des ultraproducts de structures, et

pas seulement d'ensembles. Sans surprise dans le cas de structures algébriques classiques on retrouve des constructions algébriques également classiques, mais il faut se souvenir que l'intérêt des ultraproducts c'est que c'est une construction qui marche pour toutes les structures du premier ordre, même si ici nous nous contenterons de regarder des ultraproducts d'anneaux commutatifs.

## Ultraproduits d'anneaux

Soit  $(R_i)_{i \in I}$  une famille d'anneaux commutatifs. Le produit cartésien de la famille,  $\mathcal{R} := \prod_{i \in I} R_i$ , muni de l'addition et de la multiplication coordonnée par coordonnée, est un anneau commutatif.

En passant au quotient par un ultrafiltre sur  $I$ , on obtient encore un anneau commutatif.

En fait les ultraproducts dans ce cas sont des quotients par un idéal : l'ensemble  $J_{\mathcal{U}}$  des éléments du produit qui sont nuls presque partout, c'est-à-dire  $\{a \in \prod_{i \in I} R_i : \text{tels que } \{i \in I; a_i = 0\} \in \mathcal{U}\}$  est un idéal. Si les  $R_i$  sont tous des corps, alors  $J_{\mathcal{U}}$  est un idéal maximal et donc l'ultraproduit est aussi un corps. Cela découle aussi du théorème général fondamental sur les ultraproducts, le Théorème de Łos, dont la preuve est en fait quasi immédiate à partir de la définition de l'ensemble des formules et des propriétés des ultrafiltres :

**Théorème 9 (Théorème de Łos pour le cas des anneaux commutatifs).** Soit  $(R_i)_{i \in I}$  une famille d'anneaux commutatifs et  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $I$ . Soit  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  une formule, et  $a_1, \dots, a_n \in \prod_{i \in I} R_i = \mathcal{R}$ . Alors  $\mathcal{R} / \mathcal{U} \models \phi(a_{1_{\mathcal{U}}}, \dots, a_{n_{\mathcal{U}}})$  ssi  $\{i \in I : R_i \models \phi(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in \mathcal{U}$ .

**Remarque.** Si  $I$  est infini et si  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre principal sur  $I$ ,  $\mathcal{U}$  est engendré par  $\{i_0\}$ . Alors on peut vérifier que  $\mathcal{R}$  est isomorphe à l'anneau  $R_{i_0}$ , par l'application  $a \in R_{i_0} \mapsto b_{\mathcal{U}}$ , où  $b$  est tel que  $b(i_0) = a$  et  $b(j) = 0$ , pour  $j \neq i_0$ .

On peut maintenant montrer directement le théorème de transfert (section 1.1) qui implique le Théorème d'Ax (Théorème 1) et le Théorème 2.

*Preuve (du Théorème 4).* On considère  $P$  l'ensemble des nombres premiers et  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre non principal sur  $P$ . On a remarqué que  $\mathcal{U}$  doit alors contenir le filtre de Fréchet sur  $P$ , donc tout ensemble de complémentaire fini. Soit  $K_p := \overline{\mathbb{F}_p}$  et  $\mathcal{K} := \prod_{p \in P} K_p / \mathcal{U}$ . Quelles sont les propriétés du corps  $\mathcal{K}$ ?

1.  $\mathcal{K}$  est de caractéristique zéro : en effet, soit

3. Remarque : à tout ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $I$  est associée une mesure finiment additive sur  $\mathcal{P}(I)$ , à valeur dans  $\{0, 1\}$ , telle que  $\mathcal{U}$  est la famille des ensembles de mesure 1.

$p$  un premier, alors  $\{q \in P : K_q \models p \neq 0\}$  est de complémentation fini, donc est un élément du filtre de Fréchet et donc de  $\mathcal{U}$ . Par le Théorème de Łos, il suit que  $\mathcal{K} \models p \neq 0$  aussi, et cela pour chaque  $p$ .

2.  $\mathcal{K}$  est algébriquement clos. En effet, on a vu (section 1.2) qu'un corps est algébriquement clos si et seulement si, pour chaque  $n \geq 1$ , il satisfait à un certain énoncé  $\theta_n$ . Par hypothèse, pour chaque  $p$ ,  $K_p$  est algébriquement clos, donc satisfait à  $\theta_n$ ; l'ensemble  $P$  est un élément de  $\mathcal{U}$ , donc par le Théorème de Łos,  $\mathcal{K}$  est modèle de  $\theta_n$ .

3. Quelle est la cardinalité de  $\mathcal{K}$ ? Par le lemme 2, il est de la puissance du continu, c'est-à-dire a la même cardinalité que  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , qui est aussi la cardinalité de  $\mathbb{C}$ . À isomorphisme près, il y a un unique corps algébriquement clos de caractéristique zéro et ayant la puissance du continu, c'est le corps des complexes  $\mathbb{C}$ .

Maintenant, soit  $\sigma$  un énoncé qui est vrai dans tous les  $K_p$ , alors, par le Théorème de Łos, il est vrai dans  $\mathcal{K}$  qui est isomorphe à  $\mathbb{C}$ , donc il est vrai dans  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Cela nous donne bien le Théorème 4.

### Démonstration du théorème de compacité

Les ultraproducts permettent de donner une démonstration non syntactique du théorème de compacité, à partir de la famille d'anneaux  $R_F$ , où, si  $F$  est un sous-ensemble fini de l'ensemble infini d'énoncés  $\Sigma$ ,  $R_F$  est un modèle de  $F$ . On va faire un ultraproduct des  $R_F$  et obtenir un anneau  $R$  dans lequel tous les énoncés de  $\Sigma$  seront vrais en même temps :

**Théorème 10 (Théorème de compacité pour la classe des anneaux commutatifs).** Soit  $\Sigma$  un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de  $\Sigma$  a un modèle. Alors  $\Sigma$  a un modèle.

*Preuve.* Soit  $\Sigma$  un ensemble infini d'énoncés, tel que tout sous-ensemble fini  $F$  de  $\Sigma$  a un modèle  $R_F$ . Soit  $I$  l'ensemble de toutes les parties finies de  $\Sigma$ . Pour chaque énoncé  $\theta$  de  $\Sigma$ , soit  $V(\theta) := \{F \in I; \theta \in F\}$ . On remarque que si  $F \in V(\theta)$ ,  $R_F \models \theta$ . Dans la famille  $\mathcal{V} := \{V(\theta); \theta \in \Sigma\}$ , toute intersection finie est non vide. Il s'ensuit que l'on peut trouver un ultrafiltre (de l'ensemble des parties finies de  $I$ ) qui la contient. On vérifie facilement que  $(\prod_{F \in I} R_F)/\mathcal{U}$ , l'ultraproduct des  $R_F$ , est, par le Théorème de Łos, un modèle de  $\Sigma$ .  $\square$

## 2. Un survol de théorie des modèles plus récente

### 2.1 – D'autres exemples d'applications des ultraproducts

Nous avons mentionné plus haut le fait que les ultraproducts permettent d'algébriser la notion d'équivalence élémentaire. En effet, on a le théorème suivant (Shelah) :

**Théorème 11.** Soient  $M$  et  $N$  deux structures dans un langage  $L$ . Alors  $M$  et  $N$  sont élémentairement équivalentes si et seulement s'il existe un ensemble  $I$  et un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $I$  tel que  $M^I/\mathcal{U}$  et  $N^I/\mathcal{U}$  sont isomorphes.

L'ultrapuissance de  $M$ ,  $M^I/\mathcal{U}$ , est l'ultraproduct de  $|I|$  copies de  $M$ . Un sens du théorème est immédiat,  $M$  et son ultrapuissance sont, par le Théorème de Łos, élémentairement équivalentes, donc, si  $M$  et  $N$  ont des ultrapuissances isomorphes,  $M$  et  $N$  sont élémentairement équivalentes. L'autre direction est nettement plus compliquée.

Enfin, l'un des principaux intérêts des ultraproducts, c'est qu'ils permettent d'obtenir des résultats d'uniformité.

Les applications sont très nombreuses. Nous citerons ici un seul exemple, simple à énoncer, concernant les groupes algébriques sur les corps finis.

Dans [14], Hrushovski et Pillay montrent plusieurs résultats sur des sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{F}_p)$ , en utilisant la théorie des modèles des ultraproducts de corps finis (les corps dits *pseudo-finis*, étudiés originellement par Ax dans [2]).

En particulier, ils montrent :

**Théorème 12.** Soit  $p$  un nombre premier et  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{F}_p)$  engendré par des éléments d'ordre  $p$ . Alors  $G = \langle x_1 \dots x_k \rangle$  pour des éléments  $x_1, \dots, x_k$  de  $G$  d'ordre  $p$ , où l'entier  $k$  ne dépend que de  $n$  et pas de  $p$ .

Ils donnent également de nouvelles preuves « modèle-théoriques » de plusieurs théorèmes déjà connus, dont, par exemple, le théorème de Nori-Weisfeiler qui montre (en particulier) qu'un sous-groupe de  $SL_n(\mathbb{Z})$  est Zariski-dense si et seulement s'il se surjecte sur  $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  pour tous les nombres premiers  $p$  sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.

Les preuves de ce type de résultats sont bien sûr beaucoup plus sophistiquées que les deux exemples très simples que nous avons donnés au début de ce texte et utilisent des outils et des notions de théo-

rie des modèles développés depuis les années 60. Dans notre dernière section, nous allons tenter de donner une toute petite idée de ce à quoi s'intéresse la théorie des modèles moderne.

## 2.2 – La théorie des modèles géométrique

Pour ce survol nous allons, comme dans le reste de cet article, partir d'un exemple et reprendre la théorie des corps algébriquement clos que nous avons notée  $T_{CAC}$ . Pour simplifier les notations, prenons les corps de caractéristique 0, donc la théorie  $T_{CAC_0}$  (les définitions et les notations ont été introduites dans la section 1.2).

Nous y avons vu quelques propriétés :

- la théorie  $T_{CAC_0}$  est complète, c'est-à-dire, deux corps algébriquement clos de caractéristique zéro sont élémentairement équivalents ;

- la théorie  $T_{CAC_0}$  élimine les quantificateurs : les sous-ensembles définissables sont les ensembles constructibles, définis à partir des ensembles atomiques sans utiliser le quantificateur existentiel (la projection).

Dans le cas de ces deux propriétés, on part de la classe des corps algébriquement clos, et on démontre, pour cette classe, des résultats sur les formules qui sont vraies dans ces corps. Rappelons-nous maintenant le résultat « dans l'autre sens » que nous avons énoncé dans la section 1.2, celui de Macintyre : si un corps infini admet l'élimination des quantificateurs, alors c'est un corps algébriquement clos. Là, on part d'une propriété « abstraite » sur la famille des ensembles définissables et on en déduit des propriétés algébriques. On commence à faire de la théorie des modèles moderne...

En fait, on considère en général que le vrai tournant dans l'histoire de la théorie des modèles, le moment où l'on est passé de la théorie des modèles classique au développement intrinsèque de nouvelles notions et de nouveaux outils, plus sophistiqués, c'est en 1965, avec un célèbre théorème de Morley.

Avant d'énoncer ce théorème, reprenons nos corps algébriquement clos. Ils ont une autre propriété fondamentale : le type d'isomorphisme d'un corps  $K$  algébriquement clos de caractéristique zéro est donné par la cardinalité d'une base de transcendance sur  $\mathbb{Q}$ . Donc, comme le passage à la clôture algébrique ne change pas la cardinalité, il y aura une infinité dénombrable de corps algébriquement clos dénombrables à isomorphisme près :

$$\mathbb{Q}^{alg}, \mathbb{Q}(t_1)^{alg}, \dots, \mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n)^{alg}, \\ \dots, \mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n, \dots)^{alg}$$

où  $t_1, \dots, t_n, \dots$  sont algébriquement indépendants. Mais, pour toute cardinalité  $\lambda$  non dénombrable, il y aura à isomorphisme près un seul corps de cardinalité  $\lambda$ , celui dont une base de transcendance est de cardinalité  $\lambda$ . Quand une théorie a un seul modèle de cardinalité  $\lambda$  à isomorphisme près, pour un cardinal  $\lambda$  infini, on dira que la théorie est  $\lambda$ -catégorique. La théorie  $T_{CAC_0}$  est donc  $\lambda$ -catégorique pour tout cardinal  $\lambda$  non dénombrable, et on voit bien pourquoi, parce qu'il y a une notion d'indépendance (l'indépendance algébrique) qui donne lieu, comme l'indépendance linéaire dans les espaces vectoriels, à l'existence de bases. Le théorème de Morley nous explique que cela n'est pas un hasard.

**Théorème 13 (Théorème de Morley [17]).** *Soit  $T$  une théorie complète dans un langage dénombrable, alors  $T$  est  $\lambda$ -catégorique pour un  $\lambda$  non dénombrable si et seulement si  $T$  est  $\lambda$ -catégorique pour tout cardinal  $\lambda$  non dénombrable.*

Pour arriver à ce résultat, Morley montre que l'hypothèse abstraite, «  $T$  est  $\lambda$ -catégorique pour un  $\lambda$  non dénombrable », entraîne que, dans tout modèle de  $T$ , on peut définir une bonne notion de dimension (le rang de Morley) dans la famille de tous les sous-ensembles définissables et une notion d'indépendance telle que, dans tout modèle, deux ensembles indépendants maximaux ont la même cardinalité (existence de bases). Chaque modèle est en quelque sorte une « clôture » de n'importe laquelle de ses bases ; et donc le type d'isomorphisme d'un modèle est déterminé uniquement par la cardinalité d'une base. Appliquée au cas particulier des fermés de Zariski (qui sont bien des sous-ensembles définissables) dans les corps algébriquement clos, le rang de Morley coïncide avec la dimension algébrique.

La théorie des modèles « pure » (par opposition à l'époque à la théorie des modèles « appliquée ») était née. Shelah, dans une œuvre monumentale ([20]), développe, à partir des années 70, une théorie encore plus générale de l'indépendance et de la dimension, appelée *théorie de la stabilité* ou *théorie de la classification*. L'une des idées maîtresses est de classer les structures et leurs théories en fonction des objets combinatoires infinis qu'on peut y interpréter grâce aux formules : ordres, arbres ... Par exemple, si on ne peut pas définir d'ordre infini, on dit alors que la structure est *stable*, la notion d'indépendance abstraite se comporte particulièrement bien. C'est évidemment le cas des corps algébriquement clos et des espaces vectoriels, mais aussi des corps séparablement clos, des corps différentiellement clos, ou encore de toutes les théories



de modules. On sait que si un corps infini est stable et que tous ses sous-ensembles définissables ont un rang de Morley bien défini (on dit alors que le corps est  $\omega$ -stable), il est algébriquement clos. En revanche la caractérisation des corps infinis qui sont seulement stables est toujours ouverte : on conjecture que les corps stables sont exactement les corps séparablement clos.

Dans la seconde moitié des années 80, sous l'influence de Zilber tout d'abord, puis de Hrushovski, la théorie de la stabilité a commencé à évoluer, en se concentrant sur l'étude locale fine des ensembles définissables de dimension finie. Dans la théorie de la stabilité à la Shelah, les méthodes utilisées étaient souvent celles de la combinatoire infinie. Avec Zilber et Hrushovski, les méthodes et les outils, bien que s'inscrivant dans la suite des travaux de Shelah, sont plutôt inspirés de la géométrie, à la fois dans le sens des géométries combinatoires (matroïdes) et de la géométrie algébrique. C'est la naissance de la *stabilité géométrique* ou *théorie des modèles géométrique* et de ses applications remarquées à la géométrie Diophantienne (qui ont commencé avec la preuve de la conjecture de Mordell-Lang pour les corps de fonctions en toute caractéristique par Hrushovski en 1994 [12]).

Maintenant, on classe les théories en fonction des structures algébriques classiques qu'on peut y définir (groupes, corps...) et on cherche aussi à caractériser ces structures classiques par des propriétés de géométrie abstraites.

On obtient par exemple, mais dans un cadre beaucoup plus général, des résultats (la *configuration de groupe*) qui sont en droite ligne de deux théorèmes classiques bien connus.

1. Le vieux théorème de géométrie : une géométrie projective Desarguésienne de dimension au moins 3 est la géométrie projective sur un corps (on « construit » le corps à partir de la « géométrie combinatoire » donnée).

2. Le théorème de Weil qui construit un groupe algébrique à partir d'une opération générique rationnelle associative sur une variété algébrique.

Pour donner une idée intuitive des questions qui se posent dans ce cadre, reprenons notre exemple-guide. Après la complétude et la catégoricité, la théorie des corps algébriquement clos a en fait une propriété encore plus forte. Pour  $K$  algébriquement clos, regardons les sous-ensembles définissables dans  $K$  lui-même, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux formules à une seule variable. Les ensembles définissables sont les ensembles

constructibles, donc les sous-ensembles de  $K$  sont des combinaisons booléennes finies d'ensembles de solutions d'un polynôme à une variable. Il n'est pas difficile de vérifier qu'un tel sous-ensemble est soit fini, soit de complémentaire fini dans  $K$ .

**Définition 3.** Soit  $T$  une théorie complète (dans un langage dénombrable), on dira que  $T$  est *fortement minimale* si, pour toute formule  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  et pour tout modèle  $M$  de  $T$ , pour tous  $b_1, \dots, b_n \in M$ , l'ensemble  $\{m \in M : M \models \phi(m, b_1, \dots, b_n)\}$  est fini ou de complémentaire fini.

C'est une condition très forte, qui entraîne l'existence d'une dimension pour laquelle tous les ensembles définissables sont de dimension finie, l'existence de bases, et donc en particulier que la théorie est catégorique en tout cardinal non dénombrable. De plus cette dimension est associée à une géométrie (au sens combinatoire) sur chaque modèle.

Il y a trois familles d'exemples classiques de théories fortement minimales et des géométries correspondantes.

1. Les théories dites *triviales*. La géométrie associée est triviale et, en particulier il n'y a pas de groupe infini définissable dans les modèles de  $T$ . Exemple typique : la théorie avec pour seule relation l'égalité dont les modèles sont exactement tous les ensembles infinis (et les isomorphismes sont les bijections entre modèles).

2. Les théories dites *localement modulaires*. La géométrie associée est affine ou projective, on montre qu'on peut définir un groupe infini abélien dans tout modèle de  $T$  et en fait la théorie  $T$  est presque la théorie des espaces vectoriels de dimension infinie sur un corps (non nécessairement commutatif) fixé.

3. La théorie des corps algébriquement clos, ou plus généralement une théorie telle que l'on puisse définir dans ses modèles un corps algébriquement clos.

Ce sont là les seuls exemples *classiques* de théories fortement minimales et la *Conjecture de trichotomie de Zilber* énonçait que, en gros, ce sont les seuls. Cette conjecture est restée ouverte plusieurs années et a été l'un des moteurs du développement du sujet. En 1993, Hrushovski a construit une famille de contre-exemples inattendus : des structures fortement minimales avec une géométrie non triviale mais dans lesquelles on ne peut pas définir de groupe (et donc encore moins de corps).

Le principe de trichotomie de Zilber est donc faux en général, mais en fait, avec quelques hypo-



thèses supplémentaires sur la théorie, plus précisément dans le contexte des *Structures de Zariski*, introduites par Hrushovski et Zilber également à la même époque ([15]), il est vrai. Ce principe de trichotomie, appliqué dans les corps différentiellement clos de caractéristique 0 et dans les corps séparablement clos non parfaits, a joué un rôle essentiel dans les premières applications de la théorie des modèles à la géométrie Diophantienne.

Nous nous arrêterons là pour ce survol du début de la stabilité géométrique. Les lecteurs remarqueront que les résultats que nous avons cités en exemple datent des années 90, bien des choses se sont passées depuis. Le développement de nouveaux outils a entraîné l'élargissement encore des champs d'application des méthodes de théorie des modèles, citons par exemple les travaux de Hrushovski et Loeser sur les espaces de Berkovich ([13]) ou les applications à la combinatoire additive ([11]).

D'autres méthodes de théorie des modèles se sont également mises à jouer un rôle essentiel en Géométrie Diophantienne, avec les travaux de Pila et Wilkie dans le cadre des théories o-minimales. Ces développements plus récents sont exposés dans l'article de Scanlon de ce même numéro.

Enfin, ces dernières années, en cherchant à étendre les méthodes utilisées dans les théories stables à d'autres types de structures, instables elles (ensembles ordonnés, corps valués, graphe aléatoire), on est souvent revenu à des méthodes plus combinatoires que géométriques. Il en est un peu question dans l'article de Scanlon et également dans un exposé récent au séminaire Bourbaki [21] sur les théories dites NIP et leurs applications à la combinatoire.

### 3. Petit appendice sur les corps valués

Quelques définitions sur les corps valués.

- Un *corps valué* est un corps  $K$ , muni d'une application surjective  $v : K^* \mapsto G$ , où  $(G, +, 0_G)$  est un groupe abélien ordonné, appelé le *groupe de valeurs* de  $(K, v)$ , telle que, pour tous  $x, y \in K^*$ ,
  - $v(xy) = v(x) + v(y)$
  - $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$  (l'inégalité ultramétrique).
- L'anneau des entiers de la valuation  $v$ ,  $O_{K,v} := \{x \in K^*; v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ , a un unique idéal maximal,  $M_{K,v} := \{x \in O_{K,v}; v(x) > 0\} \cup \{0\}$ .

- Le corps résiduel de  $(K, v)$ ,  $\overline{K}_v := O_{K,v}/M_{K,v}$ . Un corps valué  $K$  est dit *d'équicaractéristique 0* si  $K$  et son corps résiduel sont tous deux de caractéristique 0.
- Le corps valué  $(K, v)$  est dit *hensélien* si la valuation  $v$  a une seule extension sur toute extension algébrique de  $K$ .
- On considère  $\mathbb{F}_p((t))$ , avec la valuation habituelle :  $v_1 : \mathbb{F}_p((t))^* \mapsto \mathbb{Z}$  où  $v_1(\sum_{i \geq m} a_i t^i) :=$  le plus petit entier  $m$  tel que  $a_m \neq 0$ . Le groupe de valeur de  $v_1$  est  $\mathbb{Z}$ , le corps résiduel est  $\mathbb{F}_p$ , et le corps valué  $(\mathbb{F}_p((t)), v_1)$  est hensélien.
- Pour  $\mathbb{Q}_p$ , on considère  $v_p$  la valuation  $p$ -adique sur  $\mathbb{Q}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}^*$ , on définit  $v_p(n)$  comme le plus grand  $m$  tel que  $p^m$  divise  $n$ ;  $v_p$  s'étend à  $\mathbb{Q} : v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$ . Le corps  $\mathbb{Q}_p$  est le complété de  $\mathbb{Q}$  pour la valuation  $v_p$ . Attention, on a plutôt l'habitude de considérer la *valeur absolue  $p$ -adique* sur  $\mathbb{Q}$ ,  $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ . Le groupe de valeur de  $v_p$  est  $\mathbb{Z}$ , le corps résiduel est  $\mathbb{F}_p$  et le corps valué  $(\mathbb{Q}_p, v_p)$  est hensélien.

Du point de vue de la théorie des modèles, dans un corps valué  $(K, v)$ , on pourra prendre comme ensemble de formules atomiques, les formules de la forme :  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  et  $v(P(x_1, \dots, x_n)) \leq v(Q(x_1, \dots, x_n))$ , pour  $P, Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ .

Dans ce langage, il existe une théorie, un ensemble (infini) d'énoncés, dont les modèles sont exactement les corps valués henséliens. Pour chaque nombre premier  $p$ ,  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mathbb{F}_p((t))$  sont tous deux des corps valués henséliens, ils ont même groupe de valeur et même corps résiduel, mais  $\mathbb{Q}_p$  est de caractéristique 0 et  $\mathbb{F}_p((t))$  est de caractéristique  $p$ .

Revenons brièvement sur les quelques explications que nous avons données dans la section 1.1 sur la démonstration, par Ax et Kochen, des Théorèmes 3 et 5.

Prenons un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des nombres premiers,  $\mathcal{U}$ , et considérons d'une part  $K_1$ , l'ultraproduit des corps  $\mathbb{Q}_p$ , et d'autre part  $K_2$ , l'ultraproduit des corps  $\mathbb{F}_p((t))$ . Par le Théorème de Łos (Théorème 9),  $K_1$  et  $K_2$  sont tous deux des corps valués henséliens. De plus, leurs corps résiduels  $k_1$  et  $k_2$  vont être les mêmes (l'ultraproduit de copies de  $\mathbb{F}_p$ ) et leurs groupes de valeur,  $G_1$  et  $G_2$  aussi (l'ultraproduit de copies de  $\mathbb{Z}$ ). Par le Théorème de Łos également, puisque  $p$  devient de plus en plus grand, les corps  $K_1$  et  $K_2$  seront de caractéristique 0, et les corps résiduels,  $k_1$  et  $k_2$  aussi. Donc

par le théorème d’Ax-Kochen-Ersov (Théorème 6),  $K_1$  et  $K_2$  satisfont aux mêmes énoncés.

En appliquant le Théorème de Łos à nouveau, on en déduit immédiatement le Théorème 5 : soit  $\sigma$  un énoncé du premier ordre dans le langage des corps valués ;  $\sigma$  est vrai dans  $\mathbb{Q}_p$  pour tout  $p$  sauf un nombre fini si et seulement si  $\sigma$  est vrai dans  $K_1$  si et seulement si  $\sigma$  est vrai dans  $K_2$  si et seulement si  $\sigma$  est vrai dans  $\mathbb{F}_p((t))$  pour tout  $p$  sauf un nombre fini.

Ensuite, pour en déduire le Théorème 3, comme nous l’avons indiqué dans la section 1.1, il suffit de vérifier que « tout polynôme homogène de degré  $d$  en  $d^2 + 1$  variables a un zéro non trivial » s’exprime, pour chaque  $d \geq 1$ , par un énoncé du premier ordre,  $\phi_d$ . En effet, dans  $\mathbb{F}_p((t))$ , pour tout  $p$ , pour tout  $d \geq 1$ , l’énoncé  $\phi_d$  est vrai. Par le Théorème 5, pour chaque  $d \geq 1$ , l’énoncé  $\phi_d$  est donc vrai dans  $\mathbb{Q}_p$  pour tout  $p$  sauf un nombre fini.

## Références

- [1] J. Ax. « Injective endomorphisms of varieties and schemes ». *Pacific J. Math.* **31** (1969), p. 1–7.
- [2] J. Ax. « The elementary theory of finite fields ». *Ann. of Math. (2)* **88** (1968), p. 239–271.
- [3] J. Ax et S. KOCHEN. « Diophantine problems over local fields. I ». *Amer. J. Math.* **87** (1965), p. 605–630.
- [4] I. BERTUCCIONI. « Algebraic actions of  $p$ -groups ». *Arch. Math. (Basel)* **58**, n° 4 (1992), p. 329.
- [5] A. BIALYNIKI-BIRULA et M. ROSENLICHT. « Injective morphisms of real algebraic varieties ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), p. 200–203.
- [6] A. BOREL. « Injective endomorphisms of algebraic varieties ». *Arch. Math. (Basel)* **20** (1969), p. 531–537.
- [7] G. T. BUZZARD. « Tame sets, dominating maps, and complex tori ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**, n° 6 (2003), p. 2557–2568.
- [8] R. CLUCKERS et F. LOESER. « Ax-Kochen-Eršov theorems for  $p$ -adic integrals and motivic integration ». In : *Geometric methods in algebra and number theory*. Vol. 235. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005, p. 109–137.
- [9] J. DENEFF. « Proof of a conjecture of Colliot-Thélène ». Preprint, arXiv:1108.6250. 2011.
- [10] J. L. ERŠOV. « On elementary theories of local fields ». *Algebra i Logika Sem.* **4**, n° 2 (1965), p. 5–30.
- [11] E. HRUSHOVSKI. « Stable group theory and approximate subgroups ». *J. Amer. Math. Soc.* **25**, n° 1 (2012), p. 189–243.
- [12] E. HRUSHOVSKI. « The Mordell-Lang conjecture for function fields ». *J. Amer. Math. Soc.* **9**, n° 3 (1996), p. 667–690.
- [13] E. HRUSHOVSKI et F. LOESER. *Non-archimedean tame topology and stably dominated types*. **192**. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016, p. vii+216.
- [14] E. HRUSHOVSKI et A. PILLAY. « Definable subgroups of algebraic groups over finite fields ». *J. Reine Angew. Math.* **462** (1995), p. 69–91.
- [15] E. HRUSHOVSKI et B. ZILBER. « Zariski geometries ». *J. Amer. Math. Soc.* **9**, n° 1 (1996), p. 1–56.
- [16] A. MACINTYRE. « On  $\omega_1$ -categorical theories of fields ». *Fund. Math.* **71**, n° 1 (1971), p. 1–25.
- [17] M. MORLEY. « Categoricity in power ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), p. 514–538.
- [18] W. RUDIN. « Injective polynomial maps are automorphisms ». *Amer. Math. Monthly* **102**, n° 6 (1995), p. 540–543.
- [19] J.-P. SERRE. « How to use finite fields for problems concerning infinite fields ». In : *Arithmetic, geometry, cryptography and coding theory*. Vol. 487. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 183–193.
- [20] S. SHELAH. *Classification theory and the number of nonisomorphic models*. Second. **92**. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [21] S. STARICHENKO. « NIP, Keisler measures and combinatorics [after S. Shelah, H. J. Keisler, E. Hrushovski, Y. Peterzil, A. Pillay, P. Simon, ...] ». Séminaire Bourbaki: Vol. 2015/2016, Exp. No. 1119. 2016.
- [22] G. TERJANIAN. « Un contre-exemple à une conjecture d’Artin ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **262** (1966), A612.



### Élisabeth BOUSCAREN

Laboratoire de Mathématiques d’Orsay, Univ. Paris-Sud, Centre national de la recherche scientifique (CNRS), Université Paris-Saclay, 91405 Orsay.

Élisabeth Bouscaren est Directrice de Recherche au CNRS, au Laboratoire de Mathématiques d’Orsay, dans l’équipe « Arithmétique et Géométrie Algébrique ». Elle est spécialiste de Théorie des Modèles et de ses applications à l’Algèbre et la Géométrie.

Merci à Tom Scanlon pour avoir accepté de m’accompagner dans cette aventure, et à Caroline Gruson, Martin Hils et Silvain Rideau, pour leurs relectures de ce texte et leurs remarques.

# O-minimality

We expose an important successful program in model theory (the third in the Stanford Encyclopedia of Philosophy's entry on first-order model theory [14]), o-minimality. We summarize some of the basic theory and examples of o-minimal structures, and then discuss applications in diophantine geometry and combinatorics.

• T. Scanlon

## 1. Introduction

Over three decades ago, following the insights of van den Dries on real semi-algebraic geometry and its possible generalization to a geometry permitting inequalities involving the real exponential function [7], Pillay and Steinhorn isolated the notion of o-minimality as a model theoretic condition and developed its basic theory [23]. Shortly thereafter, van den Dries proposed o-minimality as Grothendieck's "topologie modérée" in which analysis could proceed following our geometric intuitions free from the pathologies of set theoretic topology [8, 13]. For the most part, van den Dries' vision has been realized and o-minimality has taken its place as a theory of tame geometry.

When first introduced, the only known nontrivial examples of o-minimal structures were real closed ordered fields. Over the years, the range of mathematical structures encompassed by o-minimality has grown to include expansions of the real field by the real exponential function, restricted real analytic functions, and more exotic functions from quasi-analytic classes [25]. Moreover, this analytic-geometric theory of logical origin has found applications in the theory of functional transcendence [21, 17], mathematical economics [24], the theory of neural networks [15] and diophantine geometry [22], amongst other areas. For example, it is now an indispensable tool in the study of the André-Oort conjecture and related number theoretic problems about Shimura varieties. In this note, we review some of the historical precedents for o-minimality, its development and some of its most important applications. The reader may wish to consult the excellent surveys [6, 35, 34] for more details.

## 2. From the theory of real closed fields to o-minimality

In 1931, Gödel published his famous Incompleteness Theorem establishing that arithmetic as formalized as the first-order theory of the ring of integers is undecidable [11]. At about the same time, Tarski demonstrated that to the contrary elementary Euclidean geometry regarded as the theory of the ordered field of real numbers is decidable. (Due to historical accidents, Tarski's work was not published until after the war in [31].) Tarski's proof yields a strong result about sets definable in the real field. The key structural result Tarski proved is *quantifier elimination* for  $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1)$ . For each natural number  $n$ , a subset of  $\mathbb{R}^n$  which is defined by quantifier free first-order formula in the language  $\mathcal{L}(<, +, \cdot, \{r\}_{r \in \mathbb{R}})$  is a finite Boolean combination of sets defined by conditions of the form  $g(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  where  $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  is a polynomial with real coefficients. In principle, to obtain the class of all definable sets it would be necessary to also close under the operation of taking images under projections  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . From the syntactic point of view, this operation is represented by an existential quantifier. Tarski's theorem says that it is not necessary to consider these projections; sets defined with quantifiers may already be presented as finite Boolean combinations of sets defined by polynomial inequalities. Said even another way, the definable subsets of the Cartesian powers of  $\mathbb{R}$  are precisely the semialgebraic sets.

Specializing this quantifier elimination theorem to the case of  $n = 1$ , one sees that the subsets of  $\mathbb{R}$  which are definable in the language of ordered fields are finite boolean combinations of basic sets of the form  $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$  where  $g$  is a polynomial in one variable. Such a basic set is easily

seen to be a finite union of open intervals. Thus, every definable subset of  $\mathbb{R}$  is a union of a finite set together with finitely many open intervals. It is precisely this feature of the definable sets which defines o-minimality.

**Definition 1.** Let  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(<, \dots)$  be a first-order language (possibly) extending the language of ordered sets and let  $\mathcal{R} = (R, <, \dots)$  be an  $\mathcal{L}$ -structure. We say that  $\mathcal{R}$  is o-minimal if  $(R, <)$  is an infinite totally ordered set and every definable (with parameters) subset of  $R$  is the union of a finite set with finitely many open intervals.

**Remark 1.** Here we are presenting the structure  $\mathcal{R}$  by specifying the underlying universe  $R$  and a collection of distinguished relations  $P \subseteq R^n$  and functions  $f : R^m \rightarrow R$  (for various natural numbers  $m$  and  $n$ ). To obtain a structure in the sense of Definition 7 of the companion article by Bouscaren in this volume, one should identify a function  $f : R^m \rightarrow R$  with its graph as a subset of  $R^{m+1}$ .

**Remark 2.** The word “o-minimal” is a shortening of “order-minimal”. The point is that if  $(R, <, \dots)$  is o-minimal, then it possesses the minimal collection of definable subsets of  $R$  given that  $(R, <)$  is a totally ordered set. Somewhat more precisely,  $(R, <, \dots)$  is o-minimal if and only if  $(R, <)$  is an infinite totally ordered set and the definable subsets of  $R$  are exactly the  $\mathcal{L}(<, \{r\}_{r \in R})$ -quantifier-free definable sets.

Restating the single variable consequence of Tarski’s quantifier elimination theorem, the ordered field of real numbers is an o-minimal structure. Other simpler instances of o-minimal structures may be obtained by forgetting some of the structure. For example,  $(\mathbb{R}, <)$ , the set of real numbers considered just as an ordered set, is o-minimal as is  $(\mathbb{R}, <, +, 0)$ , the set of real numbers considered as an ordered abelian group. This latter structure serves as the model theoretic avatar of piecewise linear geometry. It may also be seen as a form of the tropical semiring. Indeed the tropical addition,  $a \oplus b := \min\{a, b\}$ , and multiplication  $a \otimes b := a + b$ , are definable in  $(\mathbb{R}, <, +, 0)$  and conversely the order and ordinary addition are definable using the tropical operations.

There are some degenerate examples of o-minimal structures. For example,  $(\mathbb{N}, <)$ , the set of natural numbers regarded as an ordered set is o-minimal. On the other hand, roughly speaking, Penterzil and Starchenko showed that if an o-minimal structure is not degenerate, then it possesses at least the structure of a divisible ordered abelian

group and if it has any definable sets beyond those appearing in an ordered vector space, then it must have the structure of a real closed field (at least locally). We direct the reader to [19] for a precise formulation and proof of this trichotomy theorem.

**Convention 1.** To simplify the presentation, from now on we shall work with o-minimal structures  $(R, <, +, \cdot, 0, 1, \dots)$  which expand real closed fields. When we refer to “ $R$ ” we mean the universe of some given o-minimal structure expanding a real closed field. That is, the basic functions and relations on  $R$  will include at least  $<$  and  $+$  and  $\cdot$  so that with this structure  $R$  is a real closed field, but there may be additional distinguished relations and functions.

For example, we might wish to consider the set of real numbers given with the usual ordering, the usual ring structure, and a distinguished function symbol to represent the real exponential function. In this case, the universe of the structure is the set of real numbers,  $\mathbb{R}$ , and the basic definable sets are the four sets  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ ,  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x = y\}$ ,  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$ , and  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = z\}$ . In this structure various other sets are definable. For instance, for any polynomial  $p(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]$  with integral coefficients, the set  $\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : p(a_1, \dots, a_n; e^{a_1}, \dots, e^{a_n}) \geq 0\}$  is definable.

The word “definable” means definable in the structure  $R$ . It would be fine for the reader to take  $(R, <, +, \cdot, 0, 1, \dots)$  to be some o-minimal expansion of the ordered field of real numbers.

### 3. Examples of o-minimal structures from real analytic geometry and Pfaffian equations

Real (semi-)algebraic geometry furnishes the first nontrivial example of o-minimal geometry, but the true value of the theory is revealed through its application to ostensibly more complicated geometries coming from analytic geometry.

Before one becomes carried away with the scope of o-minimality, one should note that it is not possible to include all of the elementary functions used even in a basic calculus course as definable functions in an o-minimal structure. For example, the sine function cannot be definable in any o-minimal structure on the real numbers. Indeed, the set

$\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\}$  is an infinite discrete subset of the line and is definable using the function  $\sin(x)$  and the parameter 0. It is easy to see that any set expressible as a finite union of points and intervals has finite boundary. Hence, no structure on  $\mathbb{R}$  in which  $\sin(x)$  is definable can be o-minimal.

Thus, some restriction is necessary on the functions taken to be definable in an o-minimal structure. In practice, the restrictions have come from either brutally restricting the domains of certain analytic (or quasi-analytic) functions or by considering only functions which satisfy differential equations of a very special kind. Remarkably, these procedures produce a robust class of functions definable in a certain o-minimal structure on the real numbers.

The class of restricted analytic functions is obtained by considering real analytic functions restricted to compact boxes. The structure  $\mathbb{R}_{an}$  is obtained by taking the basic definable relations and functions on  $\mathbb{R}$  to consist of the order relation  $<$ , the ring operations of  $+$  and  $\cdot$ , and the restricted analytic functions.

As with Tarski's theorem on semialgebraic geometry, the crucial result establishing the o-minimality of  $\mathbb{R}_{an}$  was obtained well before o-minimality was isolated as a condition in its own right, by Gabrielov with his Theorem of the Complement [10].

While the unrestricted trigonometric functions cannot be added to  $\mathbb{R}$  preserving o-minimality, the structure  $\mathbb{R}_{exp} := (\mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1, \exp)$  is o-minimal, as established by Wilkie in [33]. Wilkie's theorem on the exponential function is a special case of his more general result that if  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies a Pfaffian differential equation, that is, there is some polynomial  $P(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$  for which  $\frac{df}{dx} = P(x, f(x))$ , then the structure  $(\mathbb{R}, <, \cdot, 0, 1, f)$  is o-minimal.

In fact, the structure  $\mathbb{R}_{an,exp}$  obtained from the real field by allowing all restricted analytic functions and the full real exponential function is o-minimal. This result was obtained directly by van den Dries and Miller [9] and also follows from a generalization of Wilkie's theorem on the o-minimality of Pfaffian functions due to Speissegger [29]. Various other expansions of the real field have been shown to be o-minimal, but most of the applications of o-minimality make use of  $\mathbb{R}_{an,exp}$ .

## 4. Regularity: monotonicity, piecewise smoothness, and cell decomposition

On the face of it, o-minimality only describes the sets defined by a formula with a single free variable. Nevertheless, it has strong consequences on the structure of the definable sets in any number of variables and on the regularity properties of definable functions. Here, a function  $f : X \rightarrow R$  is definable if  $X$  is a definable subset of  $R^m$  for some  $m \in \mathbb{N}$  and the graph of  $f$  is a definable subset of  $R^m \times R$ .

While the behavior of general functions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  can be arbitrarily complicated, if  $f : R \rightarrow R$  is definable, then it is necessarily piecewise differentiable and monotone.

**Theorem 1 ([23]).** *If  $f : R \rightarrow R$  is a definable function, then there are finitely many points  $-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = \infty$  with  $a_i \in R$  for  $1 \leq i \leq n$  so that for  $0 \leq i < n$ , the restriction of  $f$  to the open interval  $(a_i, a_{i+1})$  is differentiable and is either constant, strictly decreasing or strictly increasing.*

The proof of Theorem 1 does take some work, but the individual steps are not especially difficult. The key idea is to observe that the properties we wish  $f$  to have are definable and that by o-minimality they hold at all but finitely many points or they fail on an open interval. For example, one checks simply by writing down the natural definition (as a formula!) that the set  $X$  of points at which  $f$  is not locally monotone is definable. By o-minimality, if  $X$  were infinite, then it would contain an interval. That is, there would be an interval on which  $f$  is nowhere locally monotone. Further considerations using o-minimality show that this is impossible.

The Monotonicity Theorem 1 has the very useful corollary that one-sided limits always exist as long as one is willing to accept  $-\infty$  or  $\infty$  as a limit.

**Corollary 1.** *If  $f : (0, 1) \rightarrow R$  is a definable function, then  $\lim_{x \searrow 0^+} f(x)$  exists as an element of  $\bar{R} := R \cup \{-\infty, \infty\}$ .*

*Proof.* Theorem 1 gives some  $a \in (0, 1)$  so that the restriction of  $f$  to  $(0, a)$  is constant or strictly monotone. The image of  $(0, a)$  under  $f$ , being a definable set, is a finite union of points and intervals with endpoints in  $\bar{R}$ . If  $f \upharpoonright (0, a)$  is constant, then that constant value is equal to  $\lim_{x \searrow 0^+} f(x)$ . If  $f \upharpoonright (0, a)$  is increasing, then the leftmost endpoint of  $f((0, a))$  is



our limit and if the restriction is decreasing, then we take the rightmost endpoint.  $\square$

From the Monotonicity Theorem for definable functions of a single variable, one may bootstrap from the simplicity of definable subsets of the line to show that definable subsets of higher dimensional spaces enjoy strong regularity properties. Technically, this is done by showing that every definable set may be decomposed into finitely many cells and that these cells, which are essentially just deformed boxes, have a very simple geometry. The class of cells is defined recursively. The cells in  $R$  are singleton sets  $\{a\}$  and intervals  $(a, b)$  (with  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ). In higher dimensions, the if  $X \subseteq R^n$  is a cell and  $f : X \rightarrow R$  is a definable continuous function, then its graph is a cell, and if  $g : X \rightarrow R$  is another continuous definable function for which  $f(x) < g(x)$  on  $X$ , then the parametrized intervals  $(f, g)_X := \{(x, y) \in R^n \times R : x \in X \text{ \& } f(x) < y < g(x)\}$  is a cell. We should also take parametrized half-infinite intervals  $(-\infty, f)_X$  and  $(f, \infty)_X$ .

By definition,  $R$  is o-minimal if and only if every definable subset of  $R$  is a finite union of cells. The cell decomposition theorem asserts that even in higher dimensions every definable set is a finite union of cells.

**Theorem 2 ([18]).** *If  $X \subseteq R^m$  is a definable set, then there is a finite collection  $\mathcal{C}$  of disjoint cells in  $R^m$  so that if  $\mathcal{D} := \{Y \in \mathcal{C} : X \cap Y \neq \emptyset\}$ , then  $X = \bigcup_{Y \in \mathcal{D}} Y$ .*

It is hard to overstate how important the Cell Decomposition Theorem 2 is to the study of o-minimal structures and their definable sets and functions. For example, it follows easily from the Cell Decomposition Theorem that if  $X \subseteq R^n \times R^m$  is definable, then there are only finitely many homeomorphism types amongst the sets  $X_a = \{y \in R^m : (a, y) \in X\}$  as  $a$  varies over  $R^n$ .

For example, from the Cell Decomposition Theorem and the o-minimality of the theory  $\mathbb{R}_{\text{exp}}$  one recovers some of Khovanski’s theorems on fewnomials [16]. For example, if one fixes two positive integers  $n$  and  $m$ , then as the coefficients  $c_1, \dots, c_m$  vary through the real numbers and the exponents  $\mu_1, \dots, \mu_m$  vary through  $\mathbb{N}^m$ , there are only finitely many homeomorphism types amongst the real algebraic hypersurfaces of the form

$$X_{\vec{c}, \vec{\mu}}(\mathbb{R}) := \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{j=1}^m c_j x_1^{\mu_{j,1}} x_2^{\mu_{j,2}} \dots x_n^{\mu_{j,n}} = 0\}.$$

Indeed, using the logarithm and exponential functions, it is easy to see that these real algebraic

varieties are instances of a more general definable family of sets defined allowing  $\vec{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$ .

**Remark 3.** A variant of the Cell Decomposition Theorem, going under the name of “cylindrical decomposition”, for semialgebraic sets in the real numbers was obtained in 1973 by Collins [5] and used by him to reprove Tarski’s quantifier elimination theorem while giving a feasible algorithm for computing a quantifier free presentation of a general definable set.

## 5. O-minimality in number theory: the Pila-Wilkie counting theorem and the Pila-Zannier method

Since o-minimality is fundamentally a theory of real geometry, it may appear to be a category confusion to ask number theoretic questions about definable sets. However, as with Minkowski’s geometry of numbers, geometric reasoning about definable sets can produce very strong results about rational numbers and how they relate to definable functions and definable sets.

Recall that the usual multiplicative height  $H : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  is defined by  $H(0) := 0$  and  $H(\frac{p}{q}) = \max\{|p|, |q|\}$  if  $p$  and  $q$  are coprime. For any set  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  and number  $t > 0$  we define  $X(\mathbb{Q}, t) := \{(x_1, \dots, x_n) \in X \cap \mathbb{Q}^n : \max H(x_i) \leq t\}$ .

The set  $X(\mathbb{Q}, t)$  is always finite and the Pila-Wilkie counting theorem gives an estimate on its size when  $X$  is a definable set. Of course, if  $X$  is the full ambient space  $\mathbb{R}^n$ , which is itself a definable set, then  $\#X(\mathbb{Q}, t)$  grows on the order of  $t^n$ . More generally, if  $X$  is a real algebraic set or even just a semialgebraic set of dimension  $d$ , then  $X(\mathbb{Q}, t)$  may grow on the order of  $t^d$ .

Thus, in order to give a nontrivial upper bound on the size of  $X(\mathbb{Q}, t)$  for  $X$  a definable set, it is necessary to exclude those sets which are already definable using only the algebraic structure. To this end we say that  $x \in X$  lies on the *algebraic part* of  $X$  if there is a connected, semialgebraic curve  $C \subseteq X$  with  $x \in C$ . We define the transcendental part of  $X$ ,  $X^{\text{tr}}$ , to be the set of points in  $X$  which are not on the algebraic part. For example, if  $X$  is the graph of the exponential function, then  $X = X^{\text{tr}}$ . For a more complicated example, if  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z = x^y\}$ , then the algebraic part of  $X$  is the countable union of the curves  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z = x^q\}$  as  $q$  ranges through  $\mathbb{Q}$ .

With these definitions in place, we may state the Pila-Wilkie counting theorem [20].

**Theorem 3.** *Let  $X \subseteq R^m$  be a definable set and  $\epsilon > 0$  a positive real number. Then there is a constant  $C = C_{X,\epsilon}$  such that for all  $t > 0$  one has  $\#X^{\text{tr}}(\mathbb{Q}, t) \leq Ct^\epsilon$ .*

The proof of Theorem 3 passes through two separate parts. First, a parametrization theorem generalizing one for semialgebraic sets due to Yomdin and Gromov [37, 36, 12] is proven for general definable sets. Then the number of rational points is bounded using a determinantal method pioneered by Bombieri and Pila [3].

In most cases, a direct application of the Counting Theorem 3 gives a much weaker transcendence result than we know to be true. For example, if one takes  $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x = y\}$  to be the graph of the exponential function, then because  $X$  is itself a transcendental curve  $X^{\text{tr}} = X$ . Thus, the Counting Theorem says that for any  $\epsilon$ , there is some constant  $C = C_\epsilon$  so that the number of pairs of rational numbers  $(a, b)$  with  $e^a = b$  and  $\max\{H(a), H(b)\} \leq t$  is at most  $Ct^\epsilon$ . Of course, since  $e$  is transcendental, the only rational point on this curve  $(0, 1)$ . That is, the number  $\#X(\mathbb{Q}, t)$  is uniformly bounded by 1!

By harnessing Galois theoretic arguments, one might convert the qualitative estimates from Theorem 3 to much tighter results on the distribution of rational points on certain analytic sets. This strategy of proof was proposed by Zannier and first implemented by Pila and Zannier in [22] to reprove Raynaud’s theorem (also known as the Manin-Mumford conjecture) for abelian varieties defined over a number field. Subsequently, the technique has been used to prove many other theorems in diophantine geometry including important cases of the Andr e-Oort conjecture and the Zilber-Pink conjectures on unlikely intersections. The reader may consult my account in the Bourbaki Seminar [27] for more details about this development.

## 6. Combinatorial geometry

What appears to be geometric simplicity is often actually a reflection of even more fundamental combinatorial restrictions. O-minimal theories instantiate the combinatorial model theoretic notions of NIP and distal theories and these facts have been used to demonstrate that certain structures (for example, neural networks and semi-algebraic point-line configurations) enjoy very strong regular-

ity properties.

The NIP (“not the independence property”) condition is defined by insisting that there be some finite bipartite graph which cannot be realized as an induced subgraph of some definable graph. It follows that, in fact, if one graph is forbidden, then almost all graphs are forbidden. Let us recall the definition and then explain in detail in what sense “almost all” graphs are forbidden.

**Definition 2.** By a bipartite graph  $(X, Y, E)$  we mean a pair of sets  $X$  and  $Y$  and subset  $E \subseteq X \times Y$ . We regard  $X \cup Y$  as the vertex set and  $E$  as the set of edges, where all edges go between  $X$  and  $Y$ . By an induced subgraph of  $(X, Y, E)$  we mean a bipartite graph  $(X', Y', E')$  with  $X' \subseteq X$ ,  $Y' \subseteq Y$  and  $E' = E \cap (X' \times Y')$ . A bipartite graph  $(X, Y, E)$  is finite if  $X \cup Y$  is finite.

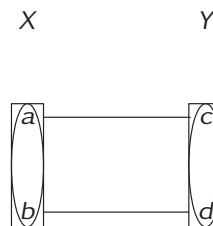
We say that  $(X, Y, E)$  is NIP (“does not have the independence property”) if there is some finite bipartite graph which is not isomorphic to any induced subgraph of  $(X, Y, E)$ .

A structure  $(R, \dots)$  is NIP if every bipartite graph of the form  $(R^n, R^m, E)$  with  $E \subseteq R^n \times R^m$  definable is NIP.

**Remark 4.** What we call the NIP condition appears in the learning theory literature under the name of “finite VC-dimension”. Given a bipartite graph  $(X, Y, E)$ , we may define its shattering function  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  by  $s(n) := \max\{|B| : (A, B, E')$  is an induced subgraph of  $(X, Y, E)$  with  $|A| = n\}$ . It is not hard to see that  $(X, Y, E)$  has the independence property if and only if  $s(n) = 2^n$  for all  $n$ . Vapnik and Chervonenkis showed that if  $(X, Y, E)$  is NIP, then, in fact,  $s(n)$  is bounded by a polynomial in  $n$  [32]. Inspired by problems in pure combinatorics and model theory, respectively, at just about the same time Sauer and Shelah established the same result [26, 28].

**Example 1.** The bipartite graph  $(\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+, E)$  where  $E := \{(a, b) \in \mathbb{Z}_+^2 : a|b\}$  has the independence property.

**Example 2.** Let  $(R, <)$  be a totally ordered set. Then the bipartite graph  $(R, R, E)$  where  $E := \{(x, y) : x < y\}$  is NIP since the bipartite graph



cannot be realized as an induced subgraph.

While Example 2 is elementary, it underlies the reason that every o-minimal structure is NIP. Indeed, on general grounds, one may show that to check whether a structure is NIP it suffices to consider bipartite graphs of the form  $(R^1, R^m, E)$  where  $E \subseteq R^1 \times R^m$  is definable. By o-minimality, testing whether  $(a, b) \in E$  comes down to evaluating one of a bounded number of inequalities relating  $a$  to the values of some functions of  $b$ . Remarkably, that o-minimal theories are NIP was already shown in [23] and applied to the theory of neural networks in [15].

More recently, it has been observed that graphs definable in o-minimal structures enjoy much stronger regularity properties than can be expected in general.

**Definition 3.** Let us say that a class  $\mathcal{G}$  of finite bipartite graphs has the strong Erdős-Hajnal property if there is some number  $\delta > 0$  so that for each graph  $(A, B, E) \in \mathcal{G}$ , there are subsets  $A_0 \subseteq A$  and

$B_0 \subseteq B$  so that  $A_0$  and  $B_0$  are large in the sense that  $|A_0| \geq \delta|A|$  and  $|B_0| \geq \delta|B|$ , and the pair  $(A_0, B_0)$  is homogeneous in the sense that  $(A_0 \times B_0) \subseteq E$  or  $(A_0 \times B_0) \cap E = \emptyset$ .

In [1], it is shown that if  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, E)$  is a semialgebraic bipartite graph, then the class of its induced finite subgraphs has the strong Erdős-Hajnal property. Basu then showed that the result holds when  $E$  is assumed merely to be a closed set definable in an o-minimal expansion of the real field [2]. Chernikov and Starchenko then showed that this version of the strong Erdős-Hajnal property is characteristic of a model theoretic property enjoyed by all o-minimal structures (as well as other mathematically important structures, such as  $\mathbb{Q}_p$  considered as a valued field, for example), distality [4]. For more details on this development, the reader should consult Starchenko's account in the Bourbaki seminar [30].

## References

- [1] N. Alon et al. "Crossing patterns of semi-algebraic sets". *J. Combin. Theory Ser. A* **111**, no.2 (2005), pp. 310–326. ISSN: 0097-3165.
- [2] S. Basu. "Combinatorial complexity in o-minimal geometry". *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **100**, no.2 (2010), pp. 405–428. ISSN: 0024-6115.
- [3] E. Bombieri and J. Pila. "The number of integral points on arcs and ovals". *Duke Math. J.* **59**, no.2 (1989), pp. 337–357. ISSN: 0012-7094.
- [4] A. Chernikov and S. Starchenko. *Regularity lemma for distal structures*. arXiv:1507.01482, to appear in *JEMS*. 2015.
- [5] G. E. Collins. "Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition". In: *Automata theory and formal languages (Second GI Conf., Kaiserslautern, 1975)*. Springer, Berlin, 1975, 134–183. Lecture Notes in Comput. Sci., Vol. 33.
- [6] L. van den Dries. "O-minimal structures". In: *Logic: from foundations to applications (Staffordshire, 1993)*. Oxford Univ. Press, New York, 1996.
- [7] L. van den Dries. "Remarks on Tarski's problem concerning  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$ ". In: *Logic colloquium '82 (Florence, 1982)*. Vol. 112. Stud. Logic Found. Math. North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97–121.
- [8] L. van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*. **248**. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1998, pp. x+180. ISBN: 0521598389.
- [9] L. van den Dries and C. Miller. "On the real exponential field with restricted analytic functions". *Israel J. Math.* **85**, no.1-3 (1994), pp. 19–56. ISSN: 0021-2172.
- [10] A. M. Gabrièlov. "Projections of semianalytic sets". *Funkcional. Anal. i Priložen.* **2**, no.4 (1968), pp. 18–30. ISSN: 0374-1990.
- [11] K. Gödel. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". *Monatsh. Math. Phys.* **38**, no.1 (1931), pp. 173–198. ISSN: 0026-9255.
- [12] M. Gromov. "Entropy, homology and semialgebraic geometry". *Astérisque*, no.145-146 (1987). Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86, pp. 5, 225–240. ISSN: 0303-1179.
- [13] A. Grothendieck. "Esquisse d'un programme". In: *Geometric Galois actions, 1*. Vol. 242. London Math. Soc. Lecture Note Ser. With an English translation on pp. 243–283. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 5–48.
- [14] W. Hodges and T. Scanlon. "First-order Model Theory". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by E. N. Zalta. Fall 2013. 2013.
- [15] M. Karpinski and A. Macintyre. "Bounding VC-dimension for neural networks: progress and prospects". In: *Computational learning theory (Barcelona, 1995)*. Vol. 904. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 1995, pp. 337–341.

- [16] A. G. Khovanskii. *Fewnomials*. **88**. Translations of Mathematical Monographs. Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, pp. viii+139. ISBN: 0821845470.
- [17] B. Klingler, E. Ullmo, and A. Yafaev. “The hyperbolic Ax-Lindemann-Weierstraß conjecture”. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **123** (2016), pp. 333–360. ISSN: 0073-8301.
- [18] J. F. Knight, A. Pillay, and C. Steinhorn. “Definable sets in ordered structures. II”. *Trans. Amer. Math. Soc.* **295**, no.2 (1986), pp. 593–605. ISSN: 0002-9947.
- [19] Y. Peterzil and S. Starchenko. “A trichotomy theorem for o-minimal structures”. *Proc. London Math. Soc. (3)* **77**, no.3 (1998), pp. 481–523. ISSN: 0024-6115.
- [20] J. Pila and A. J. Wilkie. “The rational points of a definable set”. *Duke Math. J.* **133**, no.3 (2006), pp. 591–616. ISSN: 0012-7094.
- [21] J. Pila and J. Tsimerman. “Ax-Lindemann for  $\mathcal{A}_g$ ”. *Ann. of Math. (2)* **179**, no.2 (2014), pp. 659–681. ISSN: 0003-486X.
- [22] J. Pila and U. Zannier. “Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture”. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **19**, no.2 (2008), pp. 149–162. ISSN: 1120-6330.
- [23] A. Pillay and C. Steinhorn. “Definable sets in ordered structures. I”. *Trans. Amer. Math. Soc.* **295**, no.2 (1986), pp. 565–592. ISSN: 0002-9947.
- [24] M. K. Richter and K.-C. Wong. “Definable utility in o-minimal structures”. *J. Math. Econom.* **34**, no.2 (2000), pp. 159–172. ISSN: 0304-4068.
- [25] J.-P. Rolin, P. Speissegger, and A. J. Wilkie. “Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality”. *J. Amer. Math. Soc.* **16**, no.4 (2003), 751–777 (electronic). ISSN: 0894-0347.
- [26] N. Sauer. “On the density of families of sets”. *J. Combinatorial Theory Ser. A* **13** (1972), pp. 145–147.
- [27] T. Scanlon. “A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic [after Pila, Wilkie and Zannier]”. *Astérisque*, no.348 (2012). Séminaire Bourbaki: Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042, Exp. No. 1037, ix, 299–315. ISSN: 0303-1179.
- [28] S. Shelah. “A combinatorial problem; stability and order for models and theories in infinitary languages”. *Pacific J. Math.* **41** (1972), pp. 247–261. ISSN: 0030-8730.
- [29] P. Speissegger. “The Pfaffian closure of an o-minimal structure”. *J. Reine Angew. Math.* **508** (1999), pp. 189–211. ISSN: 0075-4102.
- [30] S. Starchenko. “NIP, Keisler measures and combinatorics [after S. Shelah, H. J. Keisler, E. Hrushovski, Y. Peterzil, A. Pillay, P. Simon, ...]” Séminaire Bourbaki: Vol. 2015/2016, Exp. No. 1119. 2016.
- [31] A. Tarski. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948, pp. iii+60.
- [32] V. N. Vapnik and A. J. Červonenkis. “The uniform convergence of frequencies of the appearance of events to their probabilities”. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **16** (1971), pp. 264–279. ISSN: 0040-361x.
- [33] A. J. Wilkie. “Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function”. *J. Amer. Math. Soc.* **9**, no.4 (1996), pp. 1051–1094. ISSN: 0894-0347.
- [34] A. J. Wilkie. “O-minimality”. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*. Extra Vol. I. 1998, 633–636 (electronic).
- [35] A. J. Wilkie. “o-minimal structures”. *Astérisque*, no.326 (2009). Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008, Exp. No. 985, vii, 131–142 (2010). ISSN: 0303-1179.
- [36] Y. Yomdin. “ $C^k$ -resolution of semialgebraic mappings. Addendum to: “Volume growth and entropy””. *Israel J. Math.* **57**, no.3 (1987), pp. 301–317. ISSN: 0021-2172.
- [37] Y. Yomdin. “Volume growth and entropy”. *Israel J. Math.* **57**, no.3 (1987), pp. 285–300. ISSN: 0021-2172.



### Thomas Scanlon

Department of Mathematics, University of California, Berkeley, Evans Hall, Berkeley, CA 94720-3840, USA.  
[scanlon@math.berkeley.edu](mailto:scanlon@math.berkeley.edu)  
<http://www.math.berkeley.edu/~scanlon>

Thomas Scanlon est Professeur à l'Université de Californie, Berkeley. Spécialiste de logique mathématique, il s'intéresse en particulier à la théorie des modèles et à ses rapports avec les autres branches des mathématiques, dont la géométrie algébrique et la théorie des nombres.

Partially supported by NSF grants DMS-1001550.



## Parcimonie, problèmes inverses et échantillonnage compressé

• G. PEYRÉ

Les standards actuels pour compresser de la musique, de l'image ou de la vidéo (MP3, JPG ou MPEG) utilisent tous des méthodes issues de l'approximation non-linéaire. Ces méthodes calculent une approximation des données initiales à l'aide d'une combinaison linéaire d'un faible nombre de fonctions élémentaires (comme par exemple des sinusoides ou des ondelettes). Ces méthodes, initialement utilisées pour l'approximation, le débruitage ou la compression, ont été appliquées plus récemment à des problèmes plus difficiles, tels que l'augmentation de la résolution ou l'inversion d'opérateurs en imagerie médicale. Ces extensions nécessitent la résolution de problèmes d'optimisation de grande dimension, et sont le sujet d'une intense activité de recherche. Une des dernières avancées dans ce domaine, l'échantillonnage compressé, utilise la théorie des matrices aléatoires afin d'obtenir des garanties théoriques pour la performance de ces techniques. L'échantillonnage compressé permet d'envisager sous un angle nouveau la théorie de l'échantillonnage et de la compression de Claude Shannon. La compressibilité des données autorise en effet d'effectuer simultanément l'échantillonnage et la compression des données.

Cet article présente les concepts mathématiques clés qui ont permis l'évolution depuis l'échantillonnage classique de Shannon vers l'échantillonnage compressé. La notion de décomposition parcimonieuse, qui permet de formaliser l'idée de compressibilité de l'information, en est le fil directeur.

### 1. L'échantillonnage classique

Dans le monde numérique, la plupart des données (son, image, vidéo, etc.) sont discrétisées afin de les stocker, les transmettre et les modifier. À partir d'un signal *analogique*, qui est représenté par

une fonction continue  $s \mapsto \tilde{f}(s)$ , l'appareil de mesure calcule un ensemble de  $Q$  valeurs *discrétisées*  $f = (f_q)_{q=1}^Q \in \mathbb{R}^Q$ . Ainsi,  $Q$  est le nombre d'échantillons temporels pour un morceau audio ou bien le nombre de pixels pour une image. La figure 1 montre des exemples de données discrétisées. Dans le cas d'une image,  $\tilde{f}(s)$  représente la quantité de lumière arrivant en un point  $s \in \mathbb{R}^2$  du plan focal de l'appareil photo, et  $f_q = \int_{c_q} \tilde{f}(s) ds$  est la quantité de lumière totale illuminant la surface  $c_q$  d'un capteur CCD indexé par  $q$ . Pour simplifier, nous faisons ici l'hypothèse de données scalaires (par exemple un son mono, une image ou une vidéo en niveaux de gris), mais les techniques décrites ici peuvent s'étendre au cas de données vectorielles (son stéréo, image couleur).

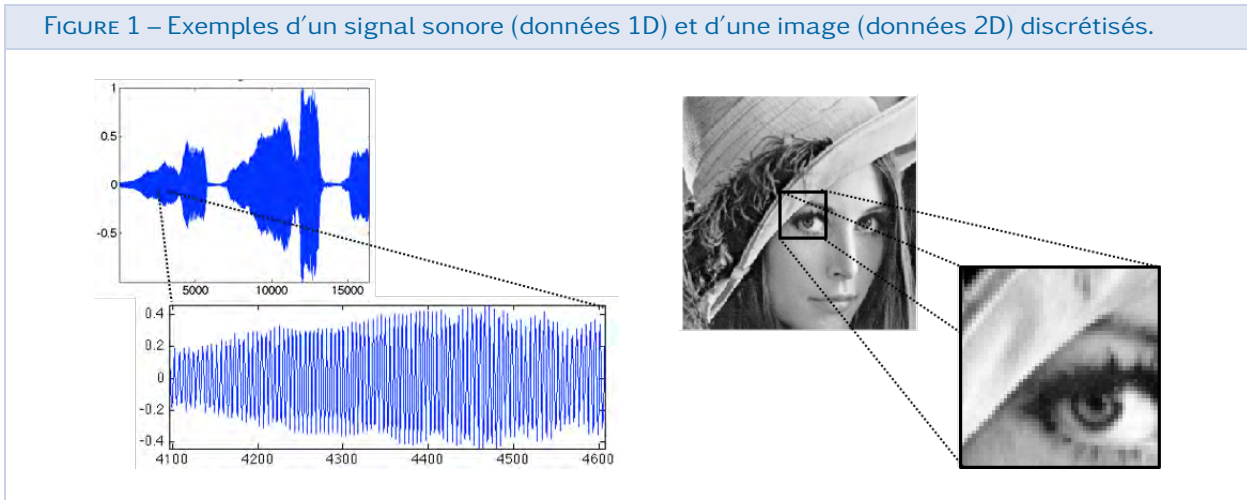
C'est la théorie élaborée par Claude Shannon [17] qui a posé les fondations de l'échantillonnage (l'utilisation d'un vecteur discret  $f$  afin de représenter fidèlement une fonction continue  $\tilde{f}$ ) mais également celles de la compression sans perte. Nous allons voir comment les recherches actuelles ont permis de bâtir sur ces fondations des méthodes de compression avec pertes (i.e. avec une légère dégradation de la qualité), ainsi que de revisiter l'échantillonnage classique pour donner naissance à l'échantillonnage compressé.

### 2. Approximation non-linéaire et compression

**Approximation non-linéaire.** La dimension  $Q$  de ces données est en général très grande (de l'ordre du million pour une image, du milliard pour une vidéo) et il est nécessaire de calculer une représentation plus économe afin de pouvoir stocker  $f$  ou bien le transmettre sur un réseau. Toutes les mé-



FIGURE 1 – Exemples d'un signal sonore (données 1D) et d'une image (données 2D) discrétisés.



thodes de compression avec perte modernes (MP3, JPEG, MPEG, etc.) utilisent pour ce faire des décompositions parcimonieuses (c'est-à-dire composée de peu de coefficients non nuls) dans un dictionnaire  $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^N$  composé d'atomes élémentaires  $\psi_n \in \mathbb{R}^Q$ . On recherche ainsi à approcher  $f$  à l'aide d'une combinaison linéaire

$$f \approx \Psi x \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=1}^N x_n \psi_n \in \mathbb{R}^Q$$

où les  $x = (x_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$  sont les coefficients que l'on va stocker ou transmettre. Afin que cette représentation soit économe, et que le stockage prenne peu de place, il est nécessaire qu'un maximum de coefficients  $x_n$  soient nuls, de sorte que l'on n'ait à stocker que les coefficients non nuls. Étant donné un budget  $M > 0$  de coefficients non nuls, on cherche la meilleure combinaison possible afin d'approcher en norme  $\ell^2$  les données de départ. On cherche ainsi à résoudre le problème d'optimisation

$$x^* \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\text{argmin}} \{ \|f - \Psi x\|_2 ; \|x\|_0 \leq M \}$$

$$\text{où } \|f\|_2^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{q=1}^Q |f_q|^2. \quad (1)$$

Ici, on a noté  $\|x\|_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \#\{n ; x_n \neq 0\}$  le nombre de coefficients non nuls de  $x$ , qui est une mesure de comptage que l'on appelle souvent par abus de langage la « pseudo-norme »  $\ell^0$  (qui n'est pas une norme!). Cet abus de langage sera expliqué à la section 3, voir en particulier la figure 4.

Le problème (1) est en général impossible à résoudre : c'est un problème de nature combinatoire,

qui, sans hypothèse supplémentaire sur  $\Psi$ , nécessite l'exploration de toutes les combinaisons de  $M$  coefficients non nuls. Il a été prouvé que ce problème est en effet NP-difficile [14].

**Approximation dans une base orthonormale.** Il y a cependant un cas de figure simple, qui est très utile pour la compression : c'est le cas où  $\Psi$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^Q$ , c'est-à-dire que  $Q = N$  et

$$\langle \psi_n, \psi_{n'} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = n', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{où } \langle f, g \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{q=1}^Q f_q g_q.$$

Ce cas est celui que l'on rencontre le plus souvent pour la compression de données, et on peut citer par exemple les bases orthogonales de Fourier discrètes, de cosinus locaux (utilisés pour MP3, JPG et MPG) et d'ondelettes (utilisées pour JPEG2000), voir le livre [12]. Dans ce cas, on a l'identité de Parseval qui correspond à la décomposition de  $f$  dans une base orthonormée

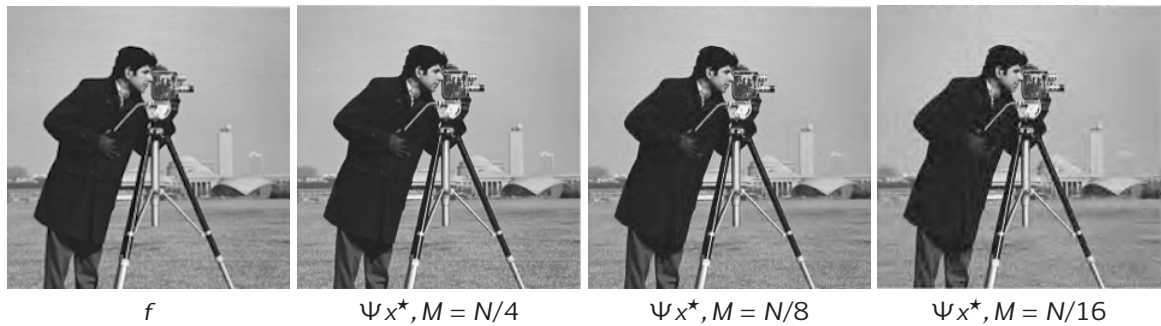
$$f = \sum_{n=1}^N \langle f, \psi_n \rangle \psi_n$$

$$\text{et } \|f - \Psi x\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |\langle f, \psi_n \rangle - x_n|^2. \quad (2)$$

Ces formules montrent que la solution de (1) se calcule très simplement. En effet, pour minimiser  $\|f - \Psi x\|_2$ , pour chaque  $x_n$  non nul, il convient de choisir  $x_n = \langle f, \psi_n \rangle$ . Et comme on se fixe un budget maximum de  $M$  coefficients non nuls, il faut choisir les  $M$  plus grands coefficients  $|\langle f, \psi_n \rangle|$  dans la formule (2). Mathématiquement, si on note

$$|\langle f, \psi_{n_1} \rangle| \geq |\langle f, \psi_{n_2} \rangle| \geq \dots$$

FIGURE 2 – Exemples d’approximation  $f \approx \Psi x^*$  avec  $M = \|x^*\|_0$  qui varie, pour une image  $f \in \mathbb{R}^N$  de  $N = 256^2$  pixels.



un classement des coefficients par ordre décroissant, alors une solution  $x^*$  de (1) est donnée par

$$x_n^* = \begin{cases} \langle f, \psi_n \rangle & \text{si } n \in \{n_1, \dots, n_M\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

La figure 2 montre des approximations  $f \approx \Psi x^*$  ainsi calculées, avec un nombre  $M = \|x^*\|_0$  variable de coefficients. Ces approximations sont réalisées à l’aide d’une base orthogonale d’ondelettes  $\Psi$ , dite base de Daubechies 4, qui sont semblables aux fonctions utilisées dans le standard de compression d’image JPEG2000, et sont populaires car il existe un algorithme rapide pour calculer les produits scalaires  $(\langle f, \psi_n \rangle)_n$  en un temps de calcul proportionnel à  $Q$  (voir le livre [12, Chap. 7] pour une description complète de la théorie et la pratique numérique des ondelettes). On peut voir que la qualité de l’image reconstruite  $\Psi x^*$  se dégrade lorsque  $M$  diminue, mais on peut quand même réduire considérablement la quantité d’information à stocker (le taux de compression  $M/Q$  est petit), tout en gardant une qualité visuelle acceptable. Cette observation fondamentale correspond au fait (observé en pratique) que les images usuelles sont très bien approchées par une combinaison linéaire « parcimonieuse » de la forme  $\Psi x^*$  avec  $\|x^*\|_0 \leq M$ . Il est important de remarquer que, bien que le calcul de  $\Psi x^*$  à partir  $x^*$  est une formule *linéaire*, le calcul de  $x^*$  à partir de  $f$  est *non-linéaire*, comme on peut le voir dans la formule (3). Le passage de  $f$  à son approximation  $\Psi x^*$  est appelé une approximation non-linéaire. La justification théorique de cette observation est l’objet d’étude de la théorie de l’approximation non-linéaire, qui cherche à prouver que  $\|f - \Psi x^*\|$  décroît rapidement lorsque  $M$  augmente sous certaines hypothèses de régularité sur  $f$ , par

exemple si on suppose que l’image est lisse par morceaux, voir [12, Chap. 9].

Afin d’obtenir un réel algorithme de compression, il convient ensuite d’utiliser une technique permettant de convertir les  $M$  coefficients  $(x_{n_1}, \dots, x_{n_M})$  en écriture binaire et également de stocker les indices non nuls  $(n_1, \dots, n_M)$ . Ceci se fait simplement à l’aide de techniques issues de la théorie de l’information, en particulier les méthodes de codage entropique, voir [12, Chap. 10].

### 3. Problèmes inverses et parcimonie

**Problèmes inverses.** Avant de pouvoir stocker des données  $f$ , il est la plupart du temps nécessaire d’effectuer une étape préliminaire de restauration, qui consiste à améliorer la qualité des données à partir d’observations de basse qualité, c’est-à-dire de basse résolution, possiblement floues, entachées d’erreurs et bruitées. Afin de prendre en compte toute la chaîne de formation des données, on modélise mathématiquement le processus d’acquisition sous la forme

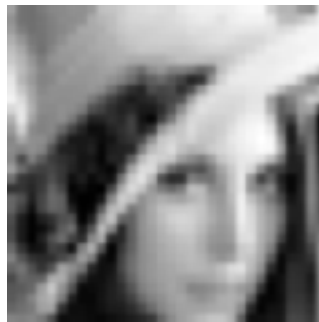
$$y = \Phi f + w \in \mathbb{R}^P \quad (4)$$

où  $y \in \mathbb{R}^P$  sont les  $P$  observations mesurées par l’appareil,  $w \in \mathbb{R}^P$  est un bruit de mesure (inconnu),  $f \in \mathbb{R}^Q$  est l’image (inconnue) que l’on souhaite récupérer, et  $\Phi : \mathbb{R}^Q \rightarrow \mathbb{R}^P$  est un opérateur modélisant l’appareil d’acquisition, et que l’on suppose *linéaire*. Ceci signifie que l’on peut considérer  $\Phi$  comme étant une (gigantesque) matrice  $\Phi \in \mathbb{R}^{P \times Q}$ . Il est important de noter que la plupart du temps, on ne stocke jamais explicitement cette matrice  $\Phi$ ,

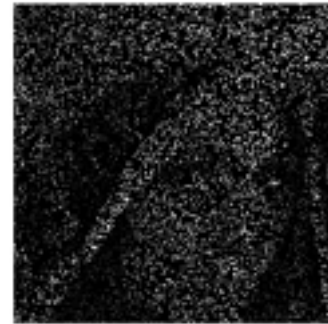
FIGURE 3 – Observations (sans bruit,  $w = 0$ )  $y = \Phi f$  dans le cas de la convolution ( $\Phi f = \phi \star f$  est une convolution par un filtre passe-bas  $\phi$ ) et des données manquantes ( $\Phi = \text{diag}(\mu_q)_{q=1}^Q$  est un opérateur de masquage).



Image originale  $f$



$\Phi f$  (flou)



$\Phi f$  (masquage)

elle est manipulée de façon implicite à l'aide d'opérations rapides (convolution, masquage, etc.).

Ce modèle, qui peut paraître assez restrictif (en particulier l'hypothèse de linéarité) permet de modéliser une quantité surprenante de situations que l'on rencontre en pratique. On peut par exemple citer :

- le débruitage :  $\Phi = \text{Id}_{\mathbb{R}^Q}$ ,  $P = Q$  et on est dans la situation (la plus simple) dans laquelle on ne cherche qu'à enlever le bruit  $w$  ;
- la déconvolution (voir figure (3), milieu) :  $\Phi f = \phi \star f$  est une convolution par un filtre  $\phi$  modélisant par exemple le flou d'un appareil photo (soit un flou de bougé, soit un flou dû à la mise au point) ;
- les données manquantes (voir figure (3), droite) :  $\Phi = \text{diag}(\mu_q)_{q=1}^Q$  est un opérateur de masquage diagonal, tel que  $\mu_q = 1$  si la donnée indexée par  $q$  (par exemple un pixel) est observée, et  $\mu_q = 0$  si la donnée est manquante ;
- l'imagerie tomographique :  $\Phi$  est un opérateur linéaire plus complexe, calculant des intégrales le long de lignes droites (la transformée de Radon), voir [12, Sect. 2.4].

Il existe quantité d'autres exemples (en imagerie médicale, sismique, astrophysique, etc.), et à chaque fois, calculer une bonne approximation de  $f$  à partir de  $y$  est très difficile. En effet, à l'exception du cas « facile » du débruitage (i.e.  $\Phi = \text{Id}_{\mathbb{R}^Q}$ ), on ne peut pas utiliser la formule  $\Phi^{-1}y = f + \Phi^{-1}w$ , soit parce que  $\Phi$  n'est pas inversible (par exemple pour les données manquantes), soit parce que  $\Phi$  a des valeurs propres très petites (pour la déconvolution

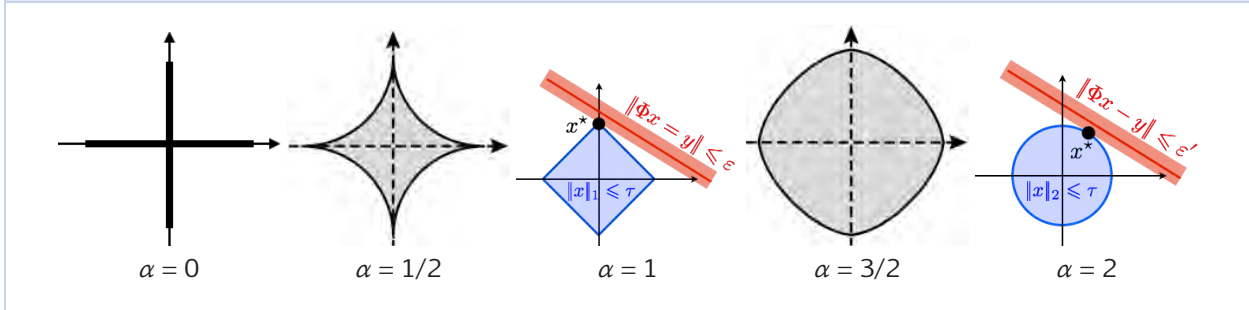
ou la tomographie), de sorte que  $\Phi^{-1}w$  va être très grand, et donc  $\Phi^{-1}y$  est une approximation très mauvaise de  $f$ .

**Régularisation parcimonieuse.** Pour remédier à ce problème, il faut remplacer  $\Phi^{-1}$  par une « inverse » approchée qui prend en compte des hypothèses supplémentaires sur le signal  $f$  que l'on cherche. Les méthodes récentes, qui donnent les meilleurs résultats sur des données complexes, utilisent une inverse approchée qui est non-linéaire. Ceci peut sembler contradictoire car  $\Phi$  est linéaire, mais l'utilisation de méthodes non-linéaires est cruciale pour tirer parti d'hypothèses réalistes sur les données complexes telles que des images. En s'inspirant des techniques d'approximation et de compression discutées dans la section précédente, les méthodes actuelles cherchent à exploiter le fait que l'on peut bien approcher  $f$  à l'aide d'une approximation parcimonieuse  $\Psi x$  avec  $\|x\|_0 \leq M$ . Étant donné un paramètre  $M > 0$ , on va chercher à approcher  $f$  par  $f^* = \Psi x^*$  où  $x^*$  est une solution de

$$x^* \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\text{argmin}} \{ \|y - \Phi \Psi x\|_2 ; \|x\|_0 \leq M \}. \quad (5)$$

On voit que (5) est quasi-identique à (1), sauf que l'on a remplacé  $f \in \mathbb{R}^Q$  (que l'on ne connaît pas) par  $y \in \mathbb{R}^P$ , et que l'on a remplacé la matrice  $\Psi \in \mathbb{R}^{Q \times N}$  par le produit matriciel  $\Phi \Psi \in \mathbb{R}^{P \times N}$ . Dans le cas particulier du débruitage,  $\Phi = \text{Id}_{\mathbb{R}^Q}$ , les problèmes (2) et (5) sont équivalents et ont la même solution, de sorte que l'approximation non-linéaire permet de résoudre le problème de débruitage.

FIGURE 4 – Boules  $B_\alpha$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .



Dans le cas d'un opérateur  $\Phi$  quelconque, le problème (5) est cependant un problème d'optimisation extrêmement difficile à résoudre. En effet, même si  $\Psi$  est une base orthonormée, en général (sauf dans le cas du débruitage  $\Phi = \text{Id}_{\mathbb{R}^Q}$ ), la matrice  $\Phi\Psi$  n'est pas orthogonale, de sorte que la formule (3) n'est pas applicable, et (5) est un problème de recherche combinatoire NP-difficile.

**Régularisation  $\ell^1$ .** L'approximation des solutions du problème (5) à l'aide de méthodes efficaces est un des sujets de recherche les plus actifs en traitement de données (et plus généralement en mathématiques appliquées, imagerie, statistique et apprentissage) de ces vingt dernières années. Il existe de nombreuses méthodes, parmi lesquelles les algorithmes gloutons (voir par exemple [13]) et les méthodes par relaxation convexe. Nous allons nous attarder principalement sur cette deuxième classe de méthodes. Une façon (heuristique) d'introduire ces techniques consiste à remplacer  $\|\cdot\|_0$  dans le problème (5) par la fonction  $\|\cdot\|_\alpha^\alpha$ , qui est définie, pour  $\alpha > 0$ , par

$$\|x\|_\alpha^\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=1}^N |x_n|^\alpha.$$

La figure 4 montre dans le cas (irréaliste, mais bien pratique pour faire un dessin) de  $N = 2$  coefficients, les boules unités  $B_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \{x ; \|x\|_\alpha \leq 1\}$  associées à ces fonctionnelles  $\|\cdot\|_\alpha$ . On peut ainsi voir que  $B_\alpha$  « tend » vers la « boule » unité associée à la mesure de comptage  $\|\cdot\|_0$  à mesure que  $\alpha$  tend vers 0, c'est-à-dire que

$$B_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} B_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in [-1, 1]^N ; \|x\|_0 \leq 1\},$$

la convergence de ces ensembles (que l'on visualise bien sur la figure) étant au sens par exemple de la distance de Hausdorff. La boule limite  $B_0$  est

constituée de vecteurs extrêmement parcimonieux, puisqu'ils sont composés d'une seule composante non nulle.

On est alors amené à prendre en compte deux éléments contradictoires pour choisir une valeur de  $\alpha$  :

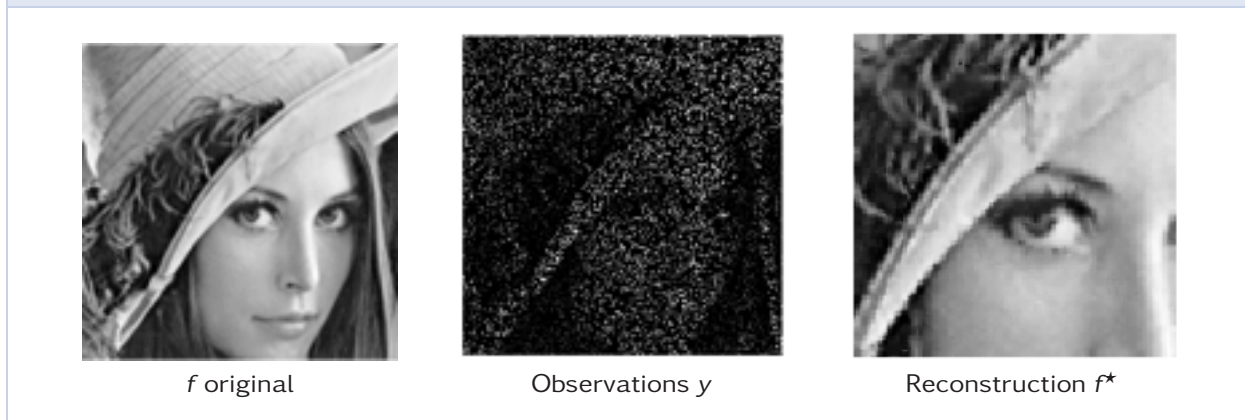
- afin d'avoir une fonctionnelle privilégiant au maximum les vecteurs parcimonieux, on souhaite utiliser une valeur de  $\alpha$  la plus faible possible pour remplacer  $\|\cdot\|_0$  par  $\|\cdot\|_\alpha$  ;
- afin de pouvoir calculer la solution de (5) avec  $\|\cdot\|_\alpha$  à la place de  $\|\cdot\|_0$ , il est important que la fonctionnelle  $\|\cdot\|_\alpha$  soit convexe. La convexité est en effet essentielle afin d'obtenir un problème qui ne soit pas NP-difficile et pouvoir bénéficier d'algorithmes rapides de calcul. Ces algorithmes trouvent une solution exacte  $x^*$  en temps polynomial ou bien convergent rapidement vers cette solution.

La contrainte de convexité de  $\|\cdot\|_\alpha$  impose que l'ensemble  $B_\alpha$  soit convexe, ce qui, de façon équivalente, signifie que  $\|\cdot\|_\alpha$  doit être une *norme*. Ceci impose que  $\alpha \geq 1$ . La prise en compte de ces deux contraintes mène ainsi naturellement au choix « optimal »  $\alpha = 1$ , de sorte que l'on va considérer le problème d'optimisation convexe (c'est-à-dire que l'on cherche à minimiser une fonction convexe sur un ensemble convexe)

$$x^* \in \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\text{argmin}} \left\{ \|y - \Phi\Psi x\|_2 ; \|x\|_1 = \sum_{n=1}^N |x_n| \leq \tau \right\}, \quad (6)$$

de sorte que l'image calculée comme solution est  $f^* = \Psi x^*$ . On peut noter que l'on a utilisé ici un paramètre  $\tau > 0$  qui joue un rôle similaire au paramètre  $M$  qui apparaît dans (5). La question du choix de ce paramètre  $\tau$  est cruciale. Si le bruit  $w$  est petit, alors on souhaite que  $\Phi f^* = \Phi\Psi x^*$  soit proche de  $y$ , et donc on va choisir  $\tau$  grand. Au contraire, si le bruit  $w$  est important, afin d'obtenir un effet de

FIGURE 5 – Exemples de reconstruction avec données manquantes,  $\Phi = \text{diag}(\mu_q)_{q=1}^Q$  avec  $\mu_q \in \{0, 1\}$  et un nombre de données observées  $\#\{q; \mu_q = 1\}/Q = 10\%$ .



débruitage plus important, on va réduire la valeur de  $\tau$ . Le choix d'un  $\tau$  « optimal » est un problème de recherche difficile, et il n'existe pas de réponse « universelle », les stratégies existantes dépendent fortement de l'opérateur  $\Phi$  ainsi que de la famille d'atomes  $\Psi$ .

Le problème (6) a initialement été proposé par des ingénieurs dans les domaines de l'imagerie sismique (voir par exemple [16]), et il a été introduit conjointement en traitement du signal sous le nom « basis pursuit » [6] et en statistique sous le nom « Lasso » [18].

Le problème (6), bien que convexe, reste un problème difficile à résoudre à cause de la non-différentiabilité de la norme  $\|\cdot\|_1$  et de la grande taille des données ( $N$  est très grand). C'est le prix à payer pour obtenir des résultats de bonne qualité. Comme nous allons l'expliquer dans le paragraphe qui suit, c'est en effet la non-différentiabilité de  $\|\cdot\|_1$  qui permet d'obtenir de la parcimonie. Le développement d'algorithmes efficaces pour résoudre (6) est un domaine de recherche très actif, et nous renvoyons à [19, section 6] pour un tour d'horizon de ces méthodes. La figure 5 montre un exemple d'interpolation de données manquantes réalisée en résolvant (6) dans une famille  $\Psi$  d'ondelettes invariantes par translation.

**De l'intuition à l'analyse théorique des performances.** La figure 6 montre intuitivement pourquoi la solution  $x^*$  calculée en remplaçant  $\|\cdot\|_0$  par  $\|\cdot\|_\alpha$  dans (5) est meilleure (au sens qu'elle est plus parcimonieuse) si on choisit  $\alpha = 1$  (c'est-à-dire si on résout (6)) que si on choisit  $\alpha = 2$  (une conclusion si-

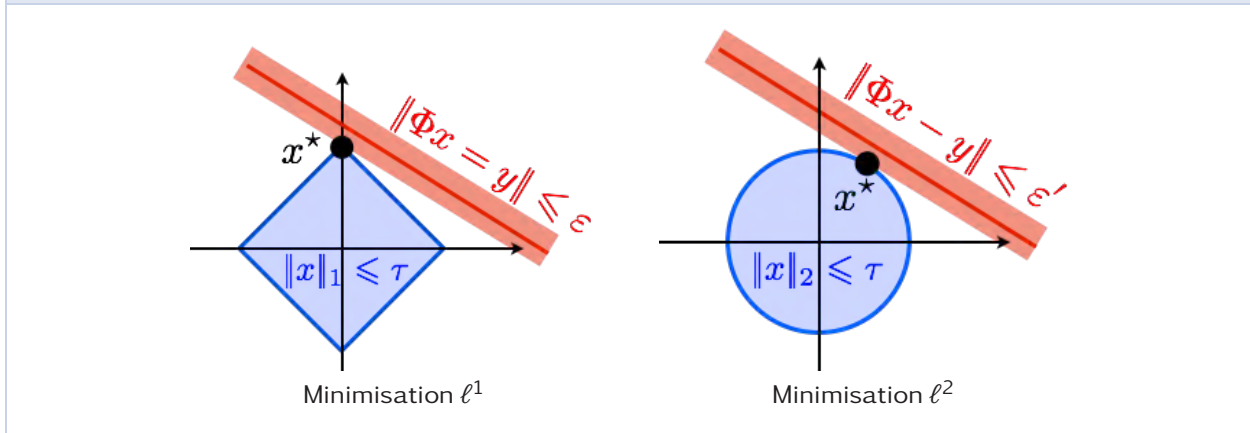
miltaire est obtenue pour d'autres valeurs de  $\alpha > 1$ ). La figure est fait dans le cas (très simple) de  $N = 2$  coefficients et  $P = 1$  observations. Le point crucial, qui rend la solution de (6) parcimonieuse, est que la boule  $B_1$  associée à la norme  $\ell^1$  est « pointue » de sorte que la solution  $x^*$  est située le long des axes. Ceci n'est pas le cas pour la boule  $B_2$  associée à la norme  $\ell^2$ , qui donne une solution  $x^*$  qui n'est pas le long des axes, et n'est donc pas parcimonieuse. Ce phénomène, déjà visible en dimension 2, est en fait accentué lorsque la dimension augmente, de sorte que l'approximation obtenue en remplaçant  $\|\cdot\|_0$  par  $\|\cdot\|_1$  devient meilleure en grande dimension. Ce phénomène est appelé par David Donoho la « bénédiction de la grand dimension » [8] : bien que les données deviennent très coûteuses et complexes à traiter (la « malédiction de la dimension ») on dispose de techniques efficaces pour les analyser si elles sont suffisamment parcimonieuses. Rendre cette intuition rigoureuse est cependant difficile, et c'est l'objet de recherches encore en cours pour des opérateurs  $\Phi$  tels que des convolutions [3, 11]. L'analyse dans le cas des opérateurs que l'on rencontre par exemple en imagerie médicale est un problème mathématique ouvert.

## 4. L'échantillonnage compressé

Il existe une classe particulière d'opérateurs  $\Phi$  pour laquelle il est possible d'analyser très précisément les performances obtenues lorsque l'on résout (6). Il s'agit du cas où  $\Phi$  est tiré aléatoirement selon certaines distributions de matrices aléatoires. Utiliser des matrices aléatoires peut sembler



FIGURE 6 – Comparaison de la minimisation avec des contraintes de type  $\|x\|_\alpha \leq \tau$  pour  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Une solution  $x^*$  est obtenue lorsque l'on trouve un tube  $\{x; \|\Phi x - y\| \leq \epsilon\}$  assez grand (i.e. en faisant croître progressivement  $\epsilon$ ) tel qu'il soit tangent en  $x^*$  à la boule  $\{x; \|x\|_\alpha \leq \tau\}$ .



étrange, car les opérateurs mentionnés plus haut (convolution, tomographie, etc.) ne le sont pas du tout. En fait, ce choix est motivé par une application concrète proposée conjointement par Candès, Tao et Romberg [2] ainsi que Donoho [7], et que l'on appelle communément « échantillonnage compressé » (« compressed sensing » en anglais).

**Appareil photo « pixel unique ».** Afin de rendre l'explication plus parlante, nous allons aborder le prototype d'appareil photo « pixel unique » (« single pixel camera » en anglais) développé à Rice University [10], et qui est illustré par la figure 7 (gauche). Il s'agit de développer une nouvelle classe d'appareils photos permettant de réaliser à la fois l'échantillonnage et la compression d'une image. Au lieu de d'abord échantillonner très finement (i.e. avec  $Q$  très grand) le signal analogique  $\tilde{f}$  pour obtenir une image  $f \in \mathbb{R}^Q$  puis de compresser énormément (i.e. avec  $M$  petit) en utilisant (3), on aimerait disposer directement d'une représentation économique  $y \in \mathbb{R}^P$  de l'image, avec un budget  $P$  aussi proche de  $M$  et tel que l'on soit capable de « décompresser »  $y$  pour obtenir une bonne approximation de l'image  $f$ .

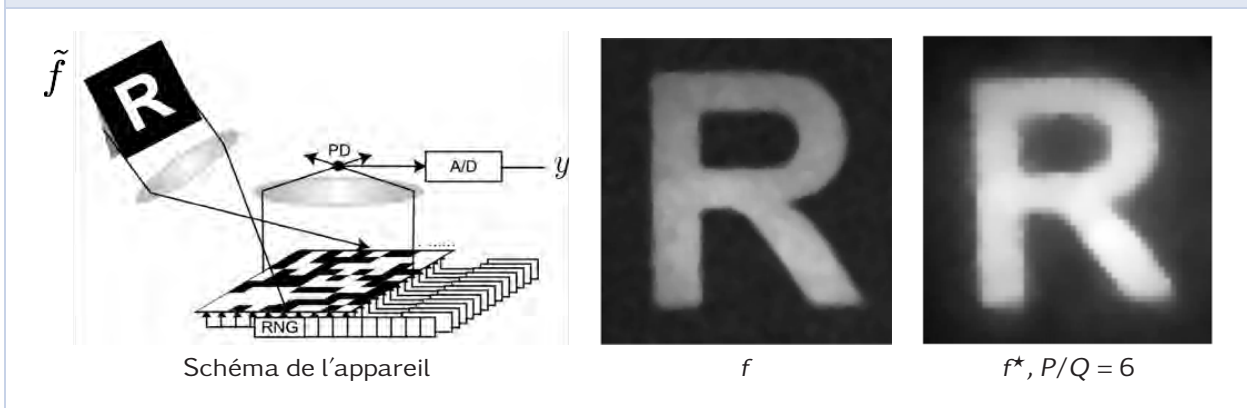
L'appareil « pixel unique » permet de réaliser l'échantillonnage compressé d'une scène observée  $\tilde{f}$  (la lettre « R » sur la figure 7), qui est une fonction continue indiquant la quantité de lumière  $\tilde{f}(s)$  atteignant chaque point  $s \in \mathbb{R}^2$  du plan focal de la caméra. Pour ce faire, la lumière est focalisée contre un jeu de  $Q$  micro-miroirs tapissant le plan focal. Ces micro-miroirs ne sont pas des capteurs. Contrairement à l'échantillonnage classique (décrit à la section 1), ils n'enregistrent aucune informa-

tion, mais ils peuvent chacun être positionnés pour refléter ou absorber la lumière. Pour réaliser l'enregistrement complet, on change très rapidement  $P$  fois les configurations des micro-miroirs. Pour  $p = 1, \dots, P$ , on note ainsi  $\Phi_{p,q} \in \{0, 1\}$  suivant que le micro-miroir à la position  $q$  a été mis en position absorbante (valeur 0) ou réfléchissante (valeur 1) à l'étape  $p$  de l'acquisition. La lumière totale réfléchiée à l'étape  $p$  est ensuite accumulée en un capteur unique (d'où le nom de « pixel unique », en fait il s'agit plutôt d'un « capteur unique »), noté « PD » sur la figure, ce qui réalise une somme linéaire des intensités réfléchies pour obtenir la valeur  $y_p \in \mathbb{R}$  enregistrée. Au final, si l'on note (comme à la section 1)  $f_q = \int_{c_q} \tilde{f}(s) ds$  l'intensité de lumière qui arrive sur la surface  $c_q$  du miroir indexé par  $q$ , l'équation qui relie l'image discrète  $f \in \mathbb{R}^Q$  « vue par les miroirs » aux  $P$  mesures  $y \in \mathbb{R}^P$  est

$$\forall p = 1, \dots, P, \quad y_p = \sum_q \Phi_{p,q} \int_{c_q} \tilde{f}(s) ds = (\Phi f)_p,$$

ce qui correspond exactement à (4). Il est important de noter que les miroirs n'enregistrent rien, donc en particulier, l'image discrète  $f$  n'est jamais calculée ou enregistrée, l'appareil calculant directement la représentation compressée  $y$  depuis le signal analogique  $\tilde{f}$ . Le terme  $w$  modélise ici les imperfections d'acquisition (bruit de mesure). L'échantillonnage compressé correspond donc au passage de la scène observée  $\tilde{f}$  au vecteur directement compressé  $y$ . La « décompression » correspond à la résolution d'un problème inverse, qui a pour but de retrouver une bonne approximation de  $f$  (l'image discrète « idéale » telle que vue par les micro-miroirs) à partir de  $y$ .

FIGURE 7 – Gauche : schéma de la méthode d’acquisition par pixel unique. Centre : image  $f \in \mathbb{R}^Q$  « idéale » observée dans le plan focal des micro-miroirs. Droite : image  $f^* = \Psi x^*$  reconstruite à partir d’observation  $y \in \mathbb{R}^P$  avec un facteur de compression  $P/Q = 6$ . Images tirées de [10].



**Garanties théoriques.** Une particularité importante de ce problème inverse est que l’on peut choisir comme on le souhaite les configurations des micro-miroirs, ce qui revient à dire que l’on peut choisir librement la matrice  $\Phi \in \{0, 1\}^{P \times Q}$ . La question est donc de faire le meilleur choix, de sorte que l’on puisse résoudre efficacement le problème inverse. Si l’on fait l’hypothèse que le signal  $f$  à reconstruire est compressible dans une base orthonormée  $\Psi$  (c’est-à-dire que  $f \approx \Psi x_0$  avec  $M \stackrel{\text{def.}}{=} \|x_0\|_0$  petit), alors de nombreux travaux, à commencer par [2, 7], ont montré que la méthode (6) était efficace si l’on choisit  $\Phi$  comme une réalisation de certaines matrices aléatoires. Pour le cas de l’appareil photo à pixel unique, on peut ainsi tirer chaque  $\Phi_{p,n}$  aléatoirement avec une probabilité de 1/2 pour les valeurs 0 et 1. En pratique, on utilise un générateur pseudo-aléatoire, de sorte qu’à la fois la personne qui compresses les données et la personne qui va les décompresser connaissent parfaitement la matrice  $\Phi$  (car elles peuvent se communiquer la graine du générateur). La figure 7 (droite) montre un exemple de reconstruction obtenue pour le cas de l’appareil à pixel unique avec un tel choix aléatoire de matrice  $\Phi$ , avec pour dictionnaire  $\Psi$  une famille d’ondelettes invariantes par translation (voir [12, Sect. 5.2] pour une description de cette famille).

Il a ainsi été montré par [2, 7] qu’il existe une constante  $C$  telle que si l’on note  $f = \Psi x_0$  où  $x_0$  sont les coefficients de l’image à retrouver, où  $\Psi$  est une base orthogonale (donc en particulier  $Q = N$ ), et si le nombre  $P$  de mesures vérifie

$$\frac{P}{M} \geq C \ln\left(\frac{N}{M}\right) \quad \text{où} \quad M \stackrel{\text{def.}}{=} \|x_0\|_0 \quad (7)$$

alors une solution  $f^* = \Psi x^*$  calculée par (6) tend vers  $f$  lorsque le bruit  $w$  tend vers 0 et  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . Ce résultat est vrai « avec forte probabilité » sur le tirage aléatoire de la matrice  $\Phi$ , c’est-à-dire une probabilité tendant rapidement vers 1 lorsque  $N$  augmente. En particulier, s’il n’y a pas de bruit,  $w = 0$ , en prenant  $\tau \rightarrow +\infty$ , la méthode permet de retrouver exactement  $f$  si  $P$  vérifie (7). Cette théorie permet aussi de prendre en compte des données « compressibles », c’est-à-dire si l’on suppose uniquement que  $f$  est proche de (mais pas nécessairement égal à)  $\Psi x_0$  avec  $M \stackrel{\text{def.}}{=} \|x_0\|_0$  petit.

De façon intuitive, ce résultat théorique signifie que l’échantillonnage compressé arrive à faire quasiment « aussi bien » en calculant  $\Psi x^*$  à partir de  $y$  (en résolvant (6)) qu’une méthode de compression usuelle (MP3, JPEG, JPEG2000, MPEG, etc.) qui connaîtrait exactement le signal  $f$  et calculerait la meilleure approximation  $\Psi x_0$  avec  $M \stackrel{\text{def.}}{=} \|x_0\|_0$  coefficients (en résolvant (1) via la formule (2)). La signification précise du qualificatif « aussi bien » correspond au facteur multiplicatif  $C \ln(N/M)$ , qui borne  $P/M$ . Ce facteur correspond au « surcoût » de la méthode d’échantillonnage compressé (qui calcule  $P$  mesures) par rapport à une méthode de compression usuelle (qui calcule  $M$  coefficients). Malgré ce surcoût, la méthode de l’échantillonnage compressé présente de nombreux avantages : gain de temps et d’énergie (on fait en même temps l’échantillonnage et la compression), codage « démocratique » (tous les coefficients  $y_n$  jouent le même rôle, et donc aucun n’a de rôle prépondérant, contrairement au codage des coefficients de  $x_0$  qui ont une importance proportionnelle à leur amplitude), codage automatiquement crypté (si on ne connaît

pas  $\Phi$ , on ne peut pas retrouver  $f$  à partir de  $y$ ). La valeur de la constante  $C$  dépend du sens que l'on donne au terme « avec forte probabilité ». Si cette probabilité porte uniquement sur  $\Phi$ , mais doit être vraie pour tous les  $x_0$  (analyse au pire cas), alors elle est très grande (voir [9]). Si par contre on veut qu'elle porte à la fois sur  $\Phi$  et sur  $x_0$  (pour que le résultat théorique soit vrai pour presque tous les signaux) alors on peut montrer que par exemple, pour  $N/P = 4$  (compression d'un facteur 4), on a  $C \ln(N/M) \sim 4$  (voir [4]), ce qui reste un surcoût conséquent, mais qui est acceptable pour certaines applications.

L'appareil photo « pixel unique » est une déclinaison particulière de la technique d'échantillonnage compressé. Les applications à la photographie sont limitées, car les capteurs CCD des appareils photos sont performants et peu chers. L'échantillonnage compressé aura probablement un impact pour des applications où les mesures sont difficiles à acquérir ou coûtent cher. Une autre source d'applications potentielles est l'imagerie médicale, par exemple par résonance magnétique. Dans ces domaines, il est cependant impossible d'obtenir des matrices totalement aléatoires, de sorte que l'on ne peut pas appliquer directement la théorie de l'échantillonnage compressé. Des résultats encourageants sur

ces applications ont cependant été obtenus, voir par exemple [1, 5].

## 5. Conclusion

Les avancées récentes de l'analyse de données ont permis d'étendre le champ d'application de la compression afin de traiter des problèmes inverses difficiles en imagerie, mais aussi dans d'autres domaines (système de recommandation, analyse de réseaux, etc.). Ces avancées ont été rendues possibles par l'utilisation d'un spectre très large de techniques en mathématiques appliquées, qui couvre à la fois l'analyse harmonique, l'approximation non-linéaire, l'optimisation non-lisse et les probabilités, mais également l'analyse fonctionnelle et les EDPs (qui n'ont pas été mentionnées dans cet article). Les méthodes parcimonieuses associées à la régularisation  $\ell^1$  ne sont pourtant que la partie émergée de l'iceberg, et des régularisations plus fines permettent d'obtenir de meilleurs résultats en prenant en compte les structures géométriques complexes des données. Pour plus de détails sur ces dernières avancées, nous recommandons la lecture de l'article [19], ainsi que la visite du site web « Numerical Tours of Signal Processing » [15], qui présente de nombreux codes informatiques pour réaliser les expériences numériques présentées ici, ainsi que de nombreuses autres.

## Références

- [1] B. ADCOCK et al. « Breaking the coherence barrier: asymptotic incoherence and asymptotic sparsity in compressed sensing ». *CoRR* abs/1302.0561 (2013).
- [2] E. J. CANDÈS, J. ROMBERG et T. TAO. « Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements ». *Communications on pure and applied mathematics* **59**, n° 8 (2006), p. 1207–1223.
- [3] E. CANDÈS et C. FERNANDEZ-GRANDA. « Towards a Mathematical Theory of Super-resolution ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* **67**, n° 6 (2014), p. 906–956.
- [4] V. CHANDRASEKARAN et al. « The Convex Geometry of Linear Inverse Problems ». *Foundations of Computational Mathematics* **12**, n° 6 (2012), p. 805–849.
- [5] N. CHAUFFERT et al. « Variable Density Sampling with Continuous Trajectories ». *SIAM Journal on Imaging Sciences* **7**, n° 4 (2014), p. 1962–1992.
- [6] S. S. CHEN, D. L. DONOHO et M. A. SAUNDERS. « Atomic decomposition by basis pursuit ». *SIAM journal on scientific computing* **20**, n° 1 (1999), p. 33–61.
- [7] D. L. DONOHO. « Compressed sensing ». *Information Theory, IEEE Transactions on* **52**, n° 4 (2006), p. 1289–1306.
- [8] D. L. DONOHO. « High-Dimensional Data Analysis: The Curses and Blessings of Dimensionality ». *Lecture "Math Challenges of the 21st Century"* (2000).
- [9] C. DOSSAL, G. PEYRÉ et J. FADILI. « A Numerical Exploration of Compressed Sampling Recovery ». *Linear Algebra and Applications* **432**, n° 7 (2010), p. 1663–1679.
- [10] M. F. DUARTE et al. « Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling ». *IEEE Signal Processing Magazine* **25**, n° 2 (mar. 2008), p. 83–91.

- [11] V. DUVAL et G. PEYRÉ. « Exact Support Recovery for Sparse Spikes Deconvolution ». *Foundations of Computational Mathematics* **15**, n° 5 (2015), p. 1315–1355.
- [12] S. G. MALLAT. *A wavelet tour of signal processing*. Third. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2009.
- [13] S. G. MALLAT et Z. ZHANG. « Matching pursuits with time-frequency dictionaries ». *IEEE Transactions on Signal Processing* **41**, n° 12 (1993), p. 3397–3415.
- [14] B. K. NATARAJAN. « Sparse Approximate Solutions to Linear Systems ». *SIAM Journal on Computing* **24**, n° 2 (1995), p. 227–234.
- [15] G. PEYRÉ. « The Numerical Tours of Signal Processing - Advanced Computational Signal and Image Processing, [www.numerical-tours.com](http://www.numerical-tours.com) ». *IEEE Computing in Science and Engineering* **13**, n° 4 (2011), p. 94–97. URL : [www.numerical-tours.com](http://www.numerical-tours.com).
- [16] F. SANTOSA et W. SYMES. « Linear inversion of band-limited reflection seismograms ». *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **7**, n° 4 (1986), p. 1307–1330.
- [17] C. E. SHANNON. « A Mathematical Theory of Communication ». *The Bell System Technical Journal* **27**, n° 3 (1948), p. 379–423.
- [18] R. TIBSHIRANI. « Regression shrinkage and selection via the Lasso ». *Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Methodological* **58**, n° 1 (1996), p. 267–288.
- [19] S. VAITER, G. PEYRÉ et J. FADILI. « Low Complexity Regularization of Linear Inverse Problems ». In : sous la dir. de G. PFANDER. Springer-Birkhäuser, 2015. Chap. Sampling Theory, a Renaissance, p. 103–153.



**Gabriel PEYRÉ**

[gabriel.peyre@ceremade.dauphine.fr](mailto:gabriel.peyre@ceremade.dauphine.fr)

Gabriel Peyré est directeur de recherche au CNRS affilié au CEREMADE, université Paris-Dauphine. Il dirige le projet ERC SIGMA-VISION et travaille sur l'analyse théorique et numérique des problèmes inverses en imagerie. Les outils développés sont issus de l'optimisation convexe non lisse, en particulier les régularisations de faible complexité (parcimonie, variation totale, matrices de faible rang, etc.) et le transport optimal. Il est également le créateur du site web [www.numerical-tours.com](http://www.numerical-tours.com), qui propose de nombreuses ressources en Matlab/Scilab/Python/Julia pour apprendre et enseigner les mathématiques et l'algorithmique de l'imagerie.

Je tiens à remercier Charles Dossal, Jalal Fadili, Samuel Vaiter, Stéphane Seuret et le lecteur anonyme pour leur aide précieuse.

## Cours spécialisés - nouveauté 2016



Vol. 10 (à nouveau disponible)

### **Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe**

C. VOISIN

ISBN 978-2-85629-129-0  
2016 - 595 pages - Hardcover. 17 x 24  
Public: 22 € - Members: 15 €

Ce livre se situe à l'interface de la géométrie différentielle complexe et de la géométrie algébrique complexe. La première partie de l'ouvrage présente les résultats fondamentaux de la théorie de Hodge, incluant quelques chapitres préliminaires sur la géométrie kählérienne et la cohomologie des faisceaux. Elle se conclut sur la notion de structure de Hodge et sur l'étude de sa dépendance vis-à-vis de la structure complexe. La seconde partie, d'un niveau plus avancé, présente les applications de la théorie de Hodge à la géométrie algébrique complexe. Elle débute par une étude de la topologie des familles de variétés algébriques, d'un point de vue à la fois classique et moderne, et se poursuit par des applications de la théorie des variations infinitésimales de structure de Hodge. Elle se conclut enfin par l'exposition des liens entre la théorie de Hodge et celle des cycles algébriques, débouchant sur les fameuses conjectures de Bloch et Beilinson. Ce livre est ainsi destiné aux étudiants doctorants et aux chercheurs, qui y trouveront à la fois un exposé didactique complet et une présentation de l'état de la recherche dans le domaine, initié par Griffiths, des applications de la théorie de Hodge à l'étude des cycles algébriques.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris





## À propos du collectif de femmes mathématiciennes du Chili

• M. I. CORTEZ

En 2014 j'ai eu l'occasion d'assister à l'« International Congress of Women Mathematicians », conférence satellite de l'ICM à Séoul. Une des activités organisées au cours de cette rencontre fut une table ronde autour de laquelle des femmes du monde entier échangeaient des expériences et parlaient de leurs difficultés à évoluer dans une discipline essentiellement masculine comme le sont les mathématiques. À la fin de cette table ronde, nous, celles qui venions du Chili, nous avons comparé notre réalité avec ce que nous venions d'entendre, et nous sommes parvenues à la conclusion que le malaise que nous ressentions était subtil, ce qui le rendait difficile à identifier et à exprimer.

### 1. Origines du collectif

Motivées par les échanges que nous avons eus en Corée, nous avons décidé de créer un groupe sur *Facebook*<sup>1</sup> dans le but d'échanger des articles et des opinions concernant les difficultés que rencontrent les femmes scientifiques. L'internationalité des réseaux sociaux nous a rapidement mises en contact avec d'autres initiatives semblables<sup>2</sup>, et à la fois de plus en plus de membres nous ont rejoints. Ce fut extrêmement libérateur pour nous de constater qu'une grande partie de ce que nous ressentions était documentée, et que ces expériences étaient

communes à d'autres femmes mathématiciennes dans le monde. Comme exemple de cela nous pouvons citer le manque d'assurance qui semble être endémique chez les femmes qui travaillent dans des disciplines fortement compétitives comme la recherche<sup>3</sup>, ainsi que l'absence de modèles auxquels s'identifier.

Pour comprendre le contexte dans lequel nous travaillons, il serait utile d'avoir un certain nombre de données. Près de 140 ans après la signature du décret autorisant les femmes à suivre des études universitaires au Chili<sup>4</sup>, la participation féminine représente plus de la moitié de la totalité des inscrits dans les universités chiliennes. Cependant, moins de 25% des étudiants des cursus d'ingénierie et de sciences exactes sont des femmes. Les statistiques de l'UNESCO montrent que la proportion de femmes travaillant dans la recherche au Chili ne dépasse pas 30%, même dans les disciplines considérées comme féminines. Nous n'avons pas les chiffres exacts pour les mathématiques<sup>5</sup>, mais le pourcentage des projets FONDECYT<sup>6</sup> dans cette discipline attribués entre 2010 et 2014 à des chercheuses, est toujours inférieur à 25%.

Mais il se peut que le plus frappant soit les résultats des épreuves normalisées que passent les élèves au Chili<sup>7</sup>. En mathématiques, les filles obtiennent toujours de moins bons résultats que les

1. Mujeres Matemáticas en Chile.

2. Les premiers que nous avons découverts sont le blog espagnol et la page *Facebook* du même nom, « Mujeres con ciencia », édités par Marta Macho Stadler, et la page et le groupe *Facebook* anglais « Women in Maths », dont se charge Susanne Pumpluen.

3. Phénomène connu comme le Syndrome de l'imposteur.

4. Décret Amunátegui, 1877.

5. Selon l'Académie des Sciences au Chili, il y a plus de 10 ans il y avait moins de 15% de femmes mathématiciennes parmi un univers de 179 mathématiciens. Aujourd'hui le nombre des mathématiciens au Chili a augmenté considérablement.

6. Un FONDECYT est un projet concurrentiel individuel de recherche qui dure entre 3 et 4 ans. Ils sont considérés comme la base de la recherche au Chili, parce qu'ils fournissent l'argent nécessaire pour assister à des conférences, inviter des collaborateurs, acheter des livres, etc.

7. Au Chili, les élèves passent plusieurs épreuves normalisées pendant leur scolarité. L'épreuve d'accès aux universités est nationale, et ses résultats montrent également des écarts en fonction du sexe, ce qui conditionne le type d'université et le cursus auquel accèdent hommes et femmes.



garçons, et cet écart augmente après l'âge de 13 ans. À l'épreuve PISA, le Chili a un des plus grands écarts de tous les pays évalués. Les études qui ont abordé ce phénomène<sup>8</sup> concluent que le problème est dû au manque de confiance que les filles ont en leurs propres capacités, attitude qui est renforcée par le manque d'expectatives que les mères, les pères et les enseignants ont en ce qui les concerne, à cause de la croyance fortement enracinée qu'il est naturel que les femmes ne réussissent pas en mathématiques.

Quand nous avons eu connaissance du panorama précédemment présenté, nous avons décidé que nous devons faire plus qu'échanger des informations sur un groupe Facebook, et que ce que nous ferions aurait bien plus d'impact si nous nous regroupions. C'est ainsi qu'est né ce que nous appelons le « Collectif de femmes mathématiciennes du Chili »<sup>9</sup>, un groupe qui a fonctionné jusque-là sans structure hiérarchique.

## 2. Activités

Mettant à profit le fait que la Commission de science et technologie (CONICYT) du Chili mène une politique de genre destinée à rendre visible le rôle joué par les femmes dans le développement des sciences, nous avons contacté un de ses programmes<sup>10</sup> afin d'avoir accès à des écoles qui seraient intéressées par la visite de chercheuses qui viendraient leur parler des femmes et des mathématiques. N'ayant pas beaucoup d'expérience dans ce type d'activités, nous avons décidé de préparer des présentations dans lesquelles nous parlerions un peu de notre recherche, de femmes mathématiciennes dans l'histoire et de la situation du genre et des mathématiques au Chili. Nous pensions que cela pourrait contribuer à casser les stéréotypes associés aux chercheurs (hommes et génies) et à la fois servir de « role models ». L'accueil a été différent selon le type d'établissement qui nous recevait, ce qui n'est pas étonnant dans notre pays, si l'on tient compte du fait que la ségrégation économique et culturelle au niveau scolaire est énorme. Nous sommes allées par exemple dans un lycée pu-

blic de filles classé sensible dont les perspectives de vie étaient limitées à se marier et avoir des enfants, ainsi que dans un lycée privé payant avec une bonne formation scientifique et un discours fort en matière de diversité. Dans le premier établissement, la plupart des étudiantes ont été indifférentes à tout ce dont nous avons parlé (des mathématiques et des mathématiciennes), peut-être parce qu'elles avaient déjà perdu tout espoir de faire quelque chose après le lycée. En revanche, dans la deuxième école les étudiants, filles et garçons, posaient beaucoup de questions liées aux mathématiques, et faisaient des commentaires qui montraient qu'ils avaient entendu parler des stéréotypes de genre.

Parallèlement à ces présentations, chacun des membres du collectif a mis sur la table le sujet des mathématiques et du genre de son mieux. Soit en écrivant des articles, en donnant des entretiens à la radio, soit en échangeant avec des étudiants de leur propre université. Au fil du temps nous nous sommes aperçues qu'il était urgent de rendre visible le fait qu'au Chili les hommes et les femmes n'ont pas le même rapport avec les mathématiques, et qu'il y a suffisamment de preuves qui démontrent que cette différence est le fait d'un facteur culturel.

L'année dernière, dans le cadre du congrès annuel de la Société Mathématique du Chili, nous avons réalisé une action qui a fait de l'effet sur nos collègues. Nous avons eu un moment pendant le congrès pour réaliser une table ronde sur les mathématiques et le genre. Dans la première partie nous avons exposé les données déjà évoquées sur la situation des femmes et les mathématiques au Chili. La deuxième partie de la table ronde a été plus polémique. Nous avons demandé à une chercheuse en sciences sociales spécialisée en matière de genre et théorie organisationnelle, de montrer les résultats de sa dernière étude traitant du genre et de l'académie<sup>11</sup>. Elle n'a pas pu terminer sa présen-

8. Voir par exemple, PISA in Focus N°49 : What lies behind gender inequality in education ? PISA et Salomé Martínez CMM, Francisco Martínez CMM, Alejandra Mizala CIAE. « Pre-service Elementary School Teachers Expectations about Student Performance : How their Beliefs are affected by their Mathematics Anxiety and Student's Gender ».

9. Page Facebook <https://www.facebook.com/mujeresmaticaschile/>

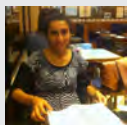
10. *Explora* est le programme de CONICYT destiné à la mise en valeur et à la divulgation de la science, essentiellement auprès du public en âge scolaire.

11. Marcela Mandiola « Género, relaciones laborales y organizaciones académicas. Prácticas y discursos en las universidades chilenas » (Genre, relations de travail, et organisations académiques, Pratiques et discours dans les universités chiliennes).

tation car le public (essentiellement des hommes mathématiciens) ne cessait de poser des questions et de faire des commentaires. Certains étaient très au courant des sujets en matière de genre, d'autres assez agacés par les résultats de l'étude. Le temps attribué a duré le double de ce qui était prévu et les discussions ont même continué au cours du dîner. Personne n'est resté indifférent et je pense que c'est la principale réussite. À partir de cette expérience nous sommes arrivées à la conclusion qu'il est très important d'impliquer toute la communauté mathématique dans la discussion, pas seulement les femmes.

### 3. Perspectives

Au cours de 2016 nous avons été en contact avec des femmes mathématiciennes du Brésil et du Mexique. Dans ce dernier pays, la Commission d'équité et de genre de la Société mathématique mexicaine a réalisé un travail énorme<sup>12</sup>. Avec le conseil d'une psychologue, elle organise régulièrement des ateliers qui s'adressent à des femmes chercheuses. Nous aimerions reproduire cela au Chili cette année. Il reste encore beaucoup de chemin à parcourir, mais au moins dans notre pays la discussion a pris place.



**María Isabel CORTEZ**

Universidad de Santiago de Chile  
[maria.cortez@usach.cl](mailto:maria.cortez@usach.cl)

María Isabel Cortez est professeure au Chili. Elle travaille dans les Systèmes Dynamiques, en particulier sur les actions des groupes sur l'ensemble de Cantor.

12. <http://www.sociedadmatematicamexicana.org.mx/comisionequidad/index.php>



# ... K.A.M.

• M.-C. ARNAUD

## 1. Les systèmes hamiltoniens

Les systèmes hamiltoniens modélisent de très nombreux systèmes physiques, qu'on appelle aussi parfois *conservatifs*, pour lesquels une quantité particulière, l'énergie, est conservée.

On peut les définir sur n'importe quelle variété, mais pour simplifier nous allons les introduire sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , ou sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . On se donne une fonction  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , qu'on appelle *hamiltonien*. Les équations de Hamilton associées sont des équations différentielles dont on note  $t \mapsto (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  les solutions :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p).$$

Ainsi, à un système issu de la mécanique classique décrit par un potentiel  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial q} \tag{1}$$

où  $q$  représente la position d'un point massif de masse  $m$ , on associe le hamiltonien  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} \|p\|^2 - V(q).$$

Les équations de Hamilton sont

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q}(q). \tag{2}$$

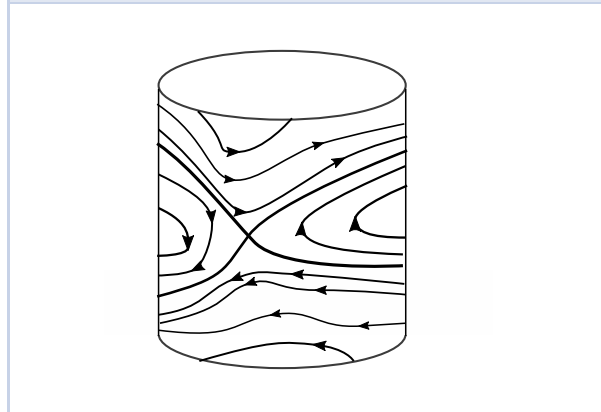
Alors,  $(q, p)$  est solution de (2) si et seulement si  $q$  est solution de (1) et  $p = m \frac{dq}{dt}$  est la quantité de mouvement.

Remarquez que le hamiltonien s'écrit en fonction de  $q$  et  $\frac{dq}{dt}$  comme

$$H = \frac{m}{2} \left\| \frac{dq}{dt} \right\|^2 - V(q)$$

c.-à-d. comme l'énergie totale du système, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

FIGURE 1 – Les courbes de niveau d'un hamiltonien sur  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$



C'est une propriété générale que le hamiltonien est constant le long des orbites hamiltoniennes (on dit que le hamiltonien est une *intégrale*). Ses orbites restent donc dans les niveaux d'énergie  $\{H = \text{constante}\}$ .

## 2. Le problème de la stabilité et les systèmes intégrables

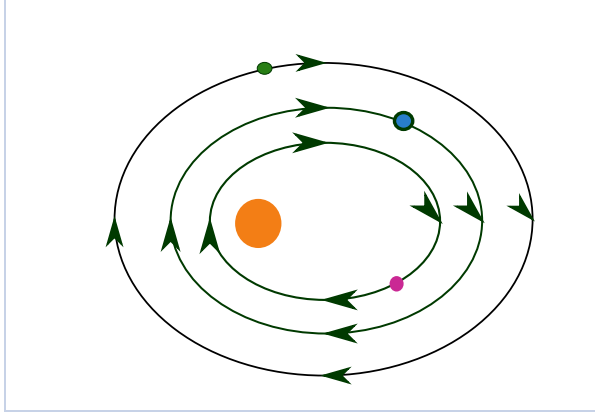
Il y a un système très classique qui est décrit par un potentiel. Il s'agit du *problème des N-corps* :  $N$  corps massifs soumis à la force d'attraction universelle. Le potentiel pour  $N$ -corps en positions  $q_1, \dots, q_N$  de masses  $m_1, \dots, m_N$  est

$$V(q) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

On connaît depuis Newton les équations différentielles qui gouvernent les mouvements des planètes, mais dès qu'il y a au moins trois corps, on ne sait pas calculer explicitement les solutions. On aimerait pourtant répondre à une question qui est

extrêmement naturelle : notre système solaire va-t-il continuer d'exister plus ou moins comme actuellement ou va-t-il connaître des changements dramatiques, comme une planète qui partirait à l'infini ou comme deux planètes qui entreraient en collision ?

FIGURE 2 – Un système de 4 corps : un soleil et 3 planètes



Ce système hamiltonien est en fait compliqué, et avant d'y revenir, décrivons les systèmes hamiltoniens les plus simples qui soient, ceux qu'on appelle complètement intégrables.

L'exemple « bébé » est donné par une fonction  $H : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne dépend que de la deuxième coordonnée  $p \in \mathbb{R}^n$  :  $H(q, p) = h(p)$ . Les équations de Hamilton sont alors

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dh}{dp}(p) \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = 0.$$

L'évolution du système dynamique associé aux équations de Hamilton est décrite par son flot  $(\varphi_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ <sup>1</sup>. Le flot au temps  $t$ ,  $\varphi_t^H : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme défini comme suit : à tout  $x_0 = (q_0, p_0) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ , si  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  désigne la solution telle que  $x(0) = x_0$ , alors  $\varphi_t^H(x_0) = x(t)$ . Dans notre exemple précis, le flot est donné par

$$\varphi_t^H(q, p) = \left( q + t \frac{dh}{dp}(p), p \right).$$

On observe que  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  est feuilleté par les tores  $\mathbb{T}^n \times \{p_0\}$  qui sont tous invariants par le flot hamiltonien, et que la restriction du flot à chacun de ces tores est le flot de rotation  $(q, p_0) \mapsto (q + t\alpha, p_0)$  engendré par  $\alpha = \frac{dh}{dp}(p_0)$ . En particulier, toutes les orbites sont bornées et on peut dire qu'un tel système est stable.

Plus généralement, un hamiltonien  $H$  est dit *complètement intégrable* sur un ouvert  $U \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

invariant par le flot s'il existe  $n$  fonctions de classe  $C^2$   $H_1, \dots, H_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

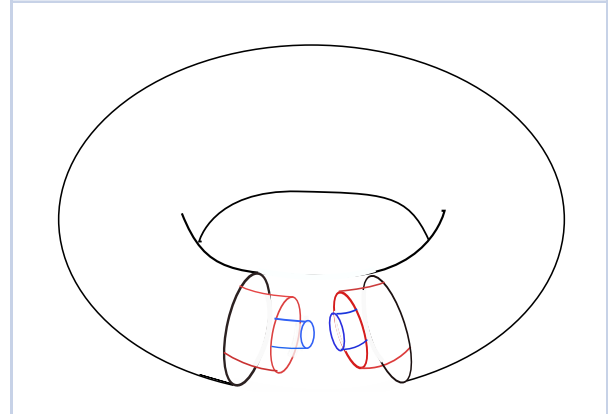
- les fonctions  $H_i$  sont toutes constantes le long des orbites contenues dans  $U$  (on parle alors d'*intégrales premières*);
- les flots hamiltoniens des  $H_i$  commutent deux à deux;
- en chaque  $x \in U$ , les formes linéaires  $dH_1(x), \dots, dH_n(x)$  sont linéairement indépendantes.

Le *théorème d'Arnold-Liouville* (voir [1]) dit que sous ces hypothèses, si une composante connexe  $\mathcal{N}$  d'un  $n$ -niveau  $\{H_1 = c_1, \dots, H_n = c_n\}$  est compacte, alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{N}$  dans  $U$ , un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme  $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{T}^n \times V$  tels que

- $\psi(\mathcal{V}) = \mathbb{T}^n \times V$ ;
- il existe un hamiltonien  $K : \mathbb{T}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne dépend que de  $p \in V$  tel que sur  $\mathcal{V}$ , on a

$$\varphi_t^H = \psi^{-1} \circ \varphi_t^K \circ \psi.$$

FIGURE 3 – Les tores dans un système complètement intégrable



En d'autres termes, quitte à faire un changement de coordonnées sur un voisinage tubulaire  $\mathcal{V}$  du tore  $\mathcal{N}$ , on s'est ramené à l'exemple bébé :  $\mathcal{V}$  est feuilleté par des tores plongés invariants sur lesquels la dynamique est conjuguée à un flot de rotations. En particulier, une condition initiale près de  $\mathcal{N}$  donne une orbite entière près de  $\mathcal{N}$  : on a stabilité. Il existe des exemples classiques de systèmes complètement intégrables, comme le flot géodésique sur un ellipsoïde. Mais a priori le système solaire et le problème des  $N$ -corps ne sont pas complètement intégrables<sup>2</sup>.

1. Pour simplifier, on supposera les solutions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

2. On sait montrer dans certains cas qu'il n'existe pas assez d'intégrales qui soient analytiques réelles pour le problème des  $N$ -corps. Par contre, à ma connaissance, il n'existe pas de tels résultats concernant la non-intégrabilité  $C^\infty$ .

### 3. Retour sur le problème des N-corps : séries de Lindstedt et problème des petits dénominateurs

Dans son ouvrage maintenant classique *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Henri Poincaré s'intéresse au problème des N-corps<sup>3</sup>. On commence par partir d'un système imaginaire où on ne considère que les interactions Soleil-Planète mais pas les interactions mutuelles entre les planètes. On a ainsi huit problèmes de Kepler (problèmes à deux corps où le mouvement s'effectue suivant des ellipses, chaque problème correspondant au soleil et une planète) indépendants, qu'on peut aussi voir comme huit oscillateurs indépendants. Mathématiquement, même si cela peut sembler étrange au lecteur, cela revient à supposer que les planètes sont toutes de masse nulle. Ce système est complètement intégrable mais peu conforme à la réalité.

L'idée de Lindstedt est alors de perturber le système en supposant les masses des planètes « petites » (c.-à-d. toutes proportionnelles à un même petit paramètre  $\mu$ ). On cherche alors des tores invariants qui soient des perturbations des tores invariants qui apparaissaient dans le cas complètement intégrable (quand  $\mu = 0$ ), dont l'équation s'écrit comme une série entière en  $\mu$ . Pour trouver chaque coefficient de ce développement en puissances de  $\mu$ , on utilise l'équation de Hamilton (ou plutôt celle qui s'appelle l'équation de Hamilton-Jacobi mais qui n'est pas l'objet de ce texte) et on obtient chacun de ces coefficients comme une série formelle en fonctions trigonométriques des coordonnées  $y = (y_1, \dots, y_n)$  comme suit

$$\begin{aligned} & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \\ & + \sum \frac{B \sin(k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n)}{k_1 \cdot f_1 + k_2 \cdot f_2 + \dots + k_n \cdot f_n} \\ & + \sum \frac{C \cos(k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n)}{k_1 \cdot f_1 + k_2 \cdot f_2 + \dots + k_n \cdot f_n} \end{aligned}$$

où les  $k_i$  parcourent l'ensemble des entiers non tous nuls et les  $f_i$  sont les fréquences des mouvements découplés : en d'autres termes, sur le tore considéré avant perturbation, le mouvement était conjugué à  $t \mapsto (\theta_1 + t f_1, \dots, \theta_n + t f_n)$ .

On constate de suite un problème pour les  $(f_1, \dots, f_n)$  qui forment une famille liée sur  $\mathbb{Q}$ , car

3. Sur l'aspect historique, voir aussi le texte [7] de Jacques Féjoz.

alors un des dénominateurs s'annule et la méthode ne s'applique pas : on parle alors de *résonance*. Même dans le cas où la famille des fréquences est libre sur  $\mathbb{Q}$ , certains dénominateurs sont très proches de 0 : on parle alors de *petits dénominateurs*. On ne peut donc jamais assurer la convergence de la série... sauf si on sait contrôler les coefficients  $B$  et  $C$ .

Poincaré ne savait pas contrôler ces coefficients, et il a fallu attendre une cinquantaine d'années avant d'avoir une réponse positive (mais dépendant des fréquences considérées) sur la convergence. Comme le dit François Béguin dans l'excellent texte [3] : *Poincaré a montré qu'il y a un risque que le système solaire soit instable, et Kolmogorov, Arnol'd et Moser ont montré qu'il y a de bonnes chances pour qu'il soit stable.*

### 4. La genèse des théorèmes K.A.M.

En 1954, Andreï Kolmogorov annonça que sous certaines hypothèses de non-dégénérescence, beaucoup de tores invariants d'un système analytique complètement intégrable persistent sous une perturbation analytique assez petite. L'article ne comportait pas de preuve complète des résultats. Le jeune Jürgen Moser fut sollicité comme rapporteur par les *Math Reviews*. Il développa une machinerie puissante qui donna la première démonstration du résultat de Kolmogorov, mais dans un cas suffisamment différentiable au lieu d'analytique. Moser publia ses résultats en 1962. Un an après, Vladimir Arnol'd, un brillant élève de Kolmogorov, publia sa preuve du théorème de Kolmogorov dans le cadre original ; la preuve d'Arnol'd s'applique au problème des N-corps ; c'est pourquoi ces résultats sont maintenant connus sous l'acronyme K.A.M (les articles fondateurs étant [8], [10] et [2]).

Les tores qui persistent sont ceux dont les fréquences sont diophantiennes, où un nombre  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est dit *diophantien* s'il existe  $\gamma > 0$  et  $\tau > 0$  tels que pour tout  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ , tout  $q \in \mathbb{Z}$  tels que  $(p, q) \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$ , on a

$$|f \cdot p - q| \geq \frac{\gamma}{\left(q^2 + \sum_{k=1}^n p_k^2\right)^{\frac{\tau}{2}}}.$$

Un tel  $f$  est dit  $(\gamma, \tau)$ -diophantien. L'ensemble des nombres diophantiens est alors un ensemble maigre au sens de Baire mais de mesure de Lebesgue pleine.



Le théorème K.A.M. dans le cas  $C^\infty$  s'énonce comme suit.

Soit  $V$  un voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $H_0 : \mathbb{T}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltonien de classe  $C^\infty$  complètement intégrable :  $H(q, p) = h(p)$ . On note  $\mathcal{F}(p) = (\frac{\partial h}{\partial p_1}(p), \dots, \frac{\partial h}{\partial p_n}(p))$  le vecteur des fréquences. Soit  $p_0 \in V$ . On suppose

- $\mathcal{F}(p_0)$  est  $(\gamma, \tau)$ -diophantien ;
- hypothèse de non dégénérescence :  $D\mathcal{F}(p_0)$  est inversible.

Alors il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $H_0$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^n \times V, \mathbb{R})$  tel que tout  $H$  dans  $\mathcal{U}$  a un tore invariant  $\mathcal{T}_H$  par le flot  $(\varphi_t^H)$  qui est

- le graphe d'une application  $u_H : \mathbb{T}^n \rightarrow V$  ;
- tel que  $(\varphi_t^H)$  restreint à  $\mathcal{T}_H$  est conjugué au flot de rotation engendré par  $\mathcal{F}(p_0)$ .

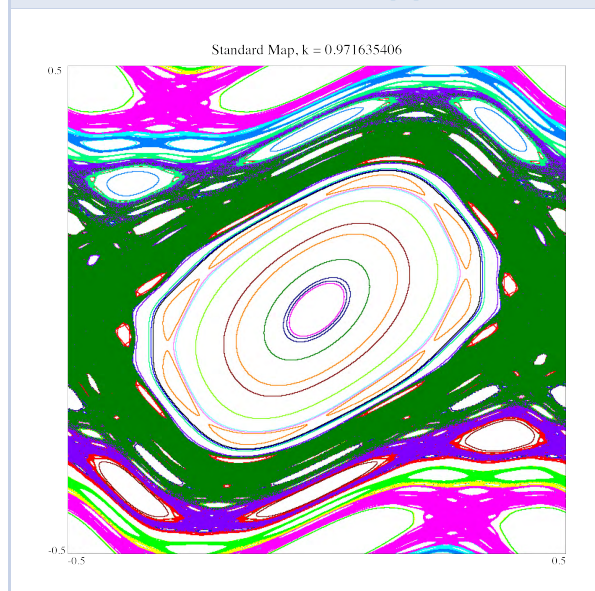
De plus  $u_H$  dépend continûment de  $H$ .

Donnons quelques compléments

- la conjugaison sur le tore dépend aussi continûment de  $H$  ;
- à condition de supposer  $H$  de classe  $C^k$  avec  $k > 2\tau + 2$ , on a aussi un résultat en régularité finie (alors  $u_H$  est de classe  $C^{k-2\tau}$ ) ;
- il est possible d'utiliser le théorème simultanément pour différentes valeurs de  $p_0$ . À  $\gamma$  et  $\tau$  fixés, on trouve pour  $H$  assez proche de  $H_0$  toute une famille de tores invariants, de fréquences  $(\gamma, \tau)$ -diophantiennes et dont la réunion est de mesure de Lebesgue non nulle ;
- en fait les tores K.A.M. n'arrivent jamais seuls : ils sont toujours accumulés par d'autres tores K.A.M.

Un nouveau concept de stabilité est né, qui ne s'applique pas pour toutes les orbites mais pour une majorité d'entre elles. En général, on observe des régions de stabilité remplies de tores K.A.M, et d'autres dites chaotique (mais c'est une autre histoire).

FIGURE 4 – Mélange de courbes invariantes et zones chaotiques. Dessin avec le logiciel Std Map 4.5 de James Meiss [9]



## 5. Prolongements

### 5.1 – Quelques applications des théorèmes K.A.M

Pour le problème des  $N$ -corps, le hamiltonien ne vérifie pas l'hypothèse de non-dégénérescence et c'est pourquoi Arnol'd donna une version du théorème qui s'applique à des cas dégénérés comme le problème des  $N$ -corps. Toutefois, cette démonstration n'était complète que pour 3 corps dans le plan et c'est M. Herman qui donna une démonstration complète de ce qui se passe pour  $N$ -corps (voir [6]).

En résumé, les séries qui apparaissent dans le problème des  $N$ -corps sont convergentes pour certains choix des fréquences et divergentes pour d'autres.

Dans l'article [11], Jürgen Moser explique aussi pourquoi la théorie K.A.M. permet d'apporter une justification théorique au fonctionnement des accélérateurs de particules. Dans l'article [10], Jürgen Moser parle en fait de difféomorphismes symplectiques plutôt que de systèmes hamiltoniens, car il existe des énoncés dans les deux contextes et une façon standard de passer d'un des deux cadres à l'autre (voir aussi [4]). L'application des théorèmes K.A.M. dans le contexte des applications plutôt que des hamiltoniens permet par exemple de montrer

- la stabilité au voisinage des points fixes des difféomorphismes génériques des surfaces qui préservent l'aire ;
- la stabilité au voisinage des bords des billards dits de Birkhoff (billards plans à bord régulier et strictement convexe).

tème hamiltonien a un tore invariant sur lequel la dynamique est conjuguée à un flot de rotation diophantien. Alors, en quelque sorte, on linéarise la dynamique au voisinage de ce tore (on utilise une *forme normale*). Si une certaine condition de non dégénérescence est satisfaite le long du tore, alors

- si on fait une perturbation petite en topologie  $C^\infty$  du hamiltonien, le nouvel hamiltonien a aussi un tore invariant portant la même dynamique ;
- sans perturber, le tore invariant est lui-même accumulé par une infinité de tores invariants sur lesquels la dynamique est conjuguée à un flot de rotation diophantien.

## 5.2 – D'autres résultats K.A.M

En fait, les théorèmes K.A.M. donnent des résultats pour des systèmes dynamiques qui ne sont pas forcément complètement intégrables (voir par exemple [5]).

L'idée est la suivante. On suppose que le sys-

## Références

- [1] V. ARNOL'D. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Traduit du russe par Djilali Embarek. Éditions Mir, Moscow, 1976, p. 470.
- [2] V. I. ARNOL'D. « Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian ». *Uspehi Mat. Nauk* **18**, n° 5 (113) (1963), p. 13–40.
- [3] F. BÉGUIN. « Le mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar: l'harmonie céleste empêtrée dans les intersections homoclines ». *L'héritage scientifique de Poincaré*. Belin, Paris (2006), p. 177–209.
- [4] J.-B. BOST. « Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnol'd, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel,...) » *Astérisque*, n° 133-134 (1986). Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85, p. 113–157.
- [5] L. H. ELIASSON, B. FAYAD et R. KRİKORIAN. « Around the stability of KAM tori ». *Duke Math. J.* **164**, n° 9 (2015), p. 1733–1775.
- [6] J. FÉJOZ. « Démonstration du 'théorème d'Arnold' sur la stabilité du système planétaire (d'après Herman) ». *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **24**, n° 05 (2004), p. 1521–1582.
- [7] J. FÉJOZ. « Le problème de la stabilité du Système solaire, de Lagrange à nos jours ». *Deux cents ans après Lagrange* (2013), p. 1–30. URL : <https://www.ceremade.dauphine.fr/~fejoz/articles.php>.
- [8] A. N. KOLMOGOROV. « On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function ». *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **98** (1954), p. 527–530.
- [9] J. MEISS. *Std Map 4.5*. URL : <https://amath.colorado.edu/faculty/jdm/stdmap.html>.
- [10] J. MOSER. « On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus ». *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1962** (1962), p. 1–20.
- [11] J. MOSER. « Is the solar system stable? » *Math. Intelligencer* **1**, n° 2 (1978/79), p. 65–71.



### Marie-Claude ARNAUD

Université d'Avignon  
marie-claude.arnaud@univ-avignon.fr

Marie-Claude Arnaud est professeur de mathématiques. Elle travaille sur les systèmes dynamiques symplectiques et s'intéresse plus particulièrement aux ensembles invariants qui sont moins réguliers que la dynamique.



## Démission du Comité d'Évaluation Scientifique (CES 40) de l'ANR

Le 1<sup>er</sup> juin 2016, à l'issue de trois jours d'évaluation scientifique, le comité CES 40 qui sélectionne les projets de mathématiques et d'informatique théorique soumis à l'Agence Nationale pour la Recherche (ANR) a décidé unanimement de ne pas transmettre ses conclusions et ses membres déclineront toute sollicitation ultérieure de l'ANR dans les conditions actuelles.

Cette tribune décrit les raisons qui ont mené à cette démission en masse. Les éléments mentionnés ici n'engagent que leurs auteurs, tous membres du comité démissionnaire.

Cette action fait suite à une baisse très conséquente du nombre de projets financés dans les disciplines « fondamentales » ces dernières années. Nous concentrerons ici principalement notre attention sur les mathématiques, mais la situation est très similaire en informatique théorique et dans plusieurs autres domaines. La démission en 2015 de Patrick Petitjean, président du comité en « Physique sub-atomique, Science de l'Univers, Structure et histoire de la Terre » en est une autre illustration.

Le tableau ci-dessous résume l'évolution du nombre de projets collaboratifs (PRC) et jeunes chercheurs/jeunes chercheuses (JCJC) financés depuis 2010, successivement par le comité SIMI1 (mathématiques), puis les CES 25 et 40. Ces deux derniers comités évaluaient des projets en mathématiques et informatique théorique mais seuls ceux en mathématiques ont été recensés dans le tableau.

	2010 SIMI1	2011 SIMI1	2012 SIMI1	2013 SIMI1	2014 CES 25 (en maths)	2015 CES 40 (en maths)
JCJC	13	12	8	10	4	4
PRC	28	21	21	12	8	8
total	41	33	29	22	12	12

Les chiffres fournis ici ont été collectés sur le site internet de l'ANR. Le budget total des projets recensés dans le tableau a lui aussi fortement diminué, même si la taille moyenne des projets a un peu augmenté, que ce soit en budget et en nombre de participants.

Il y a d'autres types de projets (internationaux par exemple) qui ne sont pas présentés mais ont subi le même sort. Quelques rares projets de mathématiques sont acceptés dans d'autres comités mais ils ne sont pas comptabilisés ici. Ils concernent souvent des recherches interdisciplinaires, ou le calcul haute performance et les grandes masses de données qui étaient également traités par un autre comité avant 2014.

Cette année le CES 40 a été informé que moins de 10 projets pourraient être sélectionnés en mathématiques, ce qui représente donc une division par 4 par rapport à 2010. Ces diminutions drastiques ne sont pas seulement la conséquence d'une réduction globale du budget de l'ANR. Elles s'expliquent également par la mise en place d'une nouvelle politique de gestion des projets de recherche en 2014, complètement inadaptée à la recherche fondamentale.

### Un processus opaque

Depuis 2014, la soumission est divisée en deux phases. Lors de la première phase, les porteurs déposent un pré-projet de 5 pages. Une partie d'entre eux (un peu moins de 50% actuellement) est admise à participer à la deuxième phase, qui requiert, elle, un projet plus détaillé d'une trentaine de pages. La première phase de sélection est assez aléatoire : les résultats sont beaucoup trop dépendants des notations des experts, qui sont majoritairement extérieurs au comité et dont les pratiques varient fortement.

La liste des intitulés des comités d'évaluation scientifique (CES) n'est pas publique pendant la phase de sélection (même pour le bureau de notre comité, il est impossible d'obtenir les noms des présidents des autres comités). Les projets doivent donc être soumis à l'un des dix « défis sociétaux » de l'ANR et non à un CES particulier. Chaque comité

reçoit des projets issus de plusieurs défis, mais doit néanmoins fournir un classement unique (par type de projet : PRC, JCJC, etc.). La liste transmise est ensuite scindée par défi, puis interclassée avec les listes des autres comités pour aboutir à une liste unique de projets sélectionnés par défi. Seule cette liste est ensuite publiée par l'ANR.

Le comité souligne l'opacité totale de ce processus. Au moment du classement, les évaluateurs ne connaissent ni le nombre total de projets qui seront finalement sélectionnés, ni le budget total qui sera alloué à leur discipline. Or, loin d'être uniquement des informations financières ou administratives, ce sont des éléments scientifiques essentiels sans lesquels ils ne peuvent élaborer une proposition cohérente. Ils ont très peu d'informations sur la façon dont le classement final est établi à partir des listes des différents comités, et les quelques indications qu'ils reçoivent sont parfois contradictoires. Certains des paramètres sont connus (pression en nombre de projets soumis, pression en budget, place dans le classement original, etc.), mais pas la manière dont ces paramètres sont utilisés pour établir la liste finale.

Les auteurs demandent à l'ANR de clarifier ce processus, en rendant public le détail de l'algorithme utilisé pour le classement final.

## Un processus inadapté

Le paramètre essentiel semble être le taux final de sélection qui se calcule sur la base du nombre de projets soumis à la première étape. Ce taux est actuellement très bas (inférieur à 10%) et c'est son application uniforme à toutes les disciplines, décidée en 2014, qui est la cause principale de la diminution sévère du nombre de projets financés en mathématiques.

En effet, chaque domaine scientifique fonctionne avec des règles qui lui sont propres. Ces dernières années, le nombre de projets soumis a augmenté dans plusieurs disciplines et, avec les baisses budgétaires, ceci a engendré une forte baisse du taux global de réussite. À l'inverse, le nombre de projets soumis en mathématiques et informatique théorique a diminué. Il a ainsi baissé de plus de 20% entre 2015 et 2016. Ceci est un symptôme évident du découragement des chercheurs, qui engendre malheureusement une nouvelle baisse automatique du nombre de projets financés.

Ces différences de comportement entre disciplines sont bien connues. On observe d'autres

grandes variations, par exemple concernant les publications et la gestion des carrières. Ces diversités font la richesse de la recherche française. L'excellence de l'école mathématique française démontre qu'une uniformisation n'est pas souhaitable.

La sacralisation du taux de réussite par rapport au nombre de projets soumis semble extrêmement dangereuse. Ce n'est en effet qu'un indicateur parmi d'autres, qui ne peut être l'unique base d'une politique cohérente. S'il est légitime que les priorités scientifiques soient définies par la nation, leur bonne mise en œuvre nécessite un meilleur dialogue avec les chercheurs.

Une trop grande focalisation sur le nombre de projets plutôt que sur le budget pourrait même engendrer une mauvaise gestion de l'argent public. En mathématiques, la diminution du nombre de projets financés a de fait été accompagnée d'une augmentation parfois exagérée de leur budget (qui reste toutefois très inférieur au budget moyen des autres disciplines). Il est très difficile de contrer cet effet. Les coupes budgétaires ne sont qu'exceptionnellement autorisées et il n'est pas clair qu'elles reviennent au comité qui les réalise, vue l'opacité de l'interclassement.

Notre comité souhaiterait attribuer plus de projets avec un budget plus faible, comme cela était fait avant 2014, afin de garantir un meilleur équilibre thématique et une meilleure répartition sur le territoire national. Malheureusement, le système actuel ne permet pas cette politique.

Finalement, il est de plus en plus difficile de trouver des experts extérieurs (qui sont pourtant essentiels pour étayer l'avis du comité), et leurs refus en cascade nous privent des meilleurs spécialistes de certains sujets. Ceux-ci se lassent de donner des avis positifs sur des projets d'excellente qualité qui ne sont jamais financés. De plus, le format et le contenu de l'évaluation demandée change tous les ans. Le système de notation n'est pas très clair, et certains critères sont très mal adaptés aux sciences « fondamentales ». L'évaluation des impacts sociétaux et économiques à court terme compte pour les 2/9 de la note finale !

## Une réforme nécessaire

Pour toutes ces raisons, les membres du comité demandent la mise en place d'un mode de fonctionnement moins opaque et plus respectueux des variations entre les disciplines. Ils souhaitent un meilleur contrôle du processus de sélection, de ma-

nière à mettre en œuvre une politique scientifique cohérente, au service de la stratégie nationale de la recherche.

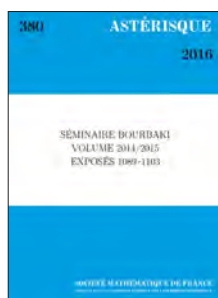
Une délégation a été reçue lundi 6 juin 2016 par la direction générale de l'ANR et elle lui a fait part des difficultés rencontrées. Si les échanges ont été cordiaux, la direction s'est contentée de suggérer une augmentation du nombre de soumissions pour faire mécaniquement augmenter le nombre de projets financés. En plus d'être chronophage, cette solution est juste irréaliste. Financer 40 projets comme en 2010 demanderait d'en soumettre plus de 400, ce qui ne fait aucun sens pour une communauté de moins de 4000 chercheurs et enseignants-chercheurs. La perspective d'une surenchère générale sur le nombre de projets soumis nous semble très dangereuse et, surtout, stérile pour la qualité

de la recherche française.

Les membres du comité demandent donc au ministère d'intervenir pour établir un système plus juste et plus efficace.

Marie-Claude Arnaud (vice-présidente du CES 40), Professeur de Mathématiques, université d'Avignon, Christophe Besse (président du CES 40), Professeur de Mathématiques, université Toulouse 3, Max Dauchet (vice-président du CES 40), Professeur émérite d'Informatique, université Lille 1, Arnaud Durand, Professeur de Mathématiques et d'Informatique, université Paris-Diderot, Mathieu Lewin, Directeur de recherche Centre national de la recherche scientifique (CNRS) en Mathématiques, université Paris-Dauphine.

## Revue Astérisque - Nouveautés

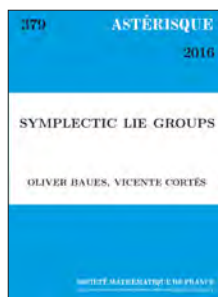


Vol. 380

### Séminaire Bourbaki, volume 2014/2015, exposés 1089-1103

ISBN 978-85629-836-7  
2016 - 507 pages - Softcover. 17 x 24  
Public: 75 € - Members: 53 €

Ce 67e volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2014/2015 : combinatoire, théorie des catégories, théorie des topos supérieurs, théorie de la mesure géométrique, équations aux dérivées partielles, théorie spectrale, géométrie différentielle, théorie ergodique, théorie géométrique des groupes, géométrie algébrique, représentations galoisiennes, et points rationnels.



Vol. 379

### Symplectic Lie groups

O. BAUES, V. CORTÉS

ISBN 978-2-85629-834-3  
2016 - 96 pages - Softcover. 17 x 24  
Public: 35 € - Members: 24 €

Authors develop the structure theory of symplectic Lie groups based on the study of their isotropic normal subgroups. The article consists of three main parts. In the first part they show that every symplectic Lie group admits a sequence of subsequent symplectic reductions to a unique irreducible symplectic Lie group. The second part concerns the symplectic geometry of cotangent symplectic Lie groups and the theory of Lagrangian extensions of flat Lie groups. In the third part of the article they analyze the existence problem for Lagrangian normal subgroups in nilpotent symplectic Lie groups.

Disponibles sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris







## Nouvelles du CNRS

- P. BIANE
- R. CARLES

Dans ce texte, nous abordons la session d'automne 2015 et le concours chercheurs 2016. Ce texte étant le dernier de la mandature 2012-2016, nous rappelons le rôle du comité national et nous présentons des statistiques concernant les concours et les promotions sur l'ensemble de la période.

### 1. Session d'automne 2015

La session d'automne 2015 s'est tenue du 19 au 21 octobre. L'ordre du jour comprenait les évaluations suivantes :

- écoles thématiques ;
- changement de direction d'unités ;
- renouvellement d'unités ;
- titularisation des CR ;
- confirmation d'affectation des CR ;
- évaluations de chercheurs ;
- demandes particulières : changement de section, évaluation par une deuxième section ;
- promotion des chercheurs.

Comme lors de chaque session (automne et printemps), la direction de l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI) est intervenue auprès de la section (l'INSMI n'intervient pas au moment du concours de recrutement).

**Écoles thématiques.** Les écoles thématiques correspondent à des rencontres scientifiques, dont la formule se distingue des colloques : cette distinction est un des critères de l'évaluation. Ces demandes sont examinées lors de la session d'automne uniquement. La section se prononce sur la pertinence scientifique des demandes, pas sur le montant accordé en cas d'avis positif (les financements viennent de la formation, pas directement des instituts du Centre national de la recherche

scientifique (CNRS)). Sont particulièrement examinés, pour de telles demandes : les enjeux et résultats à attendre de l'école, l'adéquation entre le thème et le public visé, le choix du programme et des intervenants. Il convient donc, dans les demandes, d'être aussi précis que possible sur ces éléments.

Cette année, la section a examiné 18 demandes : 16 ont reçu un avis très favorable, 1 un avis favorable, et une demande a reçu un avis réservé, le projet n'ayant pas semblé suffisamment réfléchi.

**Promotions DR.** Cette année, d'après les informations fournies par l'INSMI, la section a travaillé sur la base de 7 promotions DR1, 1 promotion DRCE1, 0 ou 1 promotion DRC2. Le nombre exact de promotions est décidé au niveau du CNRS, la validation finale a eu lieu en février.

*Promotion DRCE2.*

1. Gérard Laumon. 2. Maria Esteban.

*Promotion DRCE1.*

1. Christian Bonatti.

*Promotion DR1.*

1. Anne de Bouard, Charles Favre, Ofer Gabber, Alice Guionnet, Mohammed Lemou, Franck Loray, Frédéric Nataf. 8. Jean-Yves Welschinger.

Tous les collègues proposés à la promotion DRCE ont été promus, les sept premiers ex-aequo ont été promus DR1.

### 2. Concours chercheurs 2016

Cette année, les postes ouverts au concours concernaient :

- 41/01 : 6 directeurs de recherche 2<sup>e</sup> classe ;
- 41/02 : 2 chargés de recherche 1<sup>re</sup> classe ;
- 41/03 : 1 chargé de recherche 1<sup>re</sup> classe sur le thème « analyse et modélisation des dyna-

- miques sociales ; sciences des données, big data sociales », affecté dans une unité relevant de l'Institut national des sciences humaines et sociales (INSHS) à titre principal ;
- 41/04 : 11 chargés de recherche 2<sup>e</sup> classe ;
  - 41/05 : 2 chargés de recherche 2<sup>e</sup> classe sur des projets d'interactions des mathématiques avec d'autres disciplines ;
  - 41/06 : 1 chargé de recherche 2<sup>e</sup> classe affecté dans une unité relevant de l'Institut national de physique (INP) à titre principal ;
  - 41/07 : 1 chargé de recherche 2<sup>e</sup> classe sur le thème « mathématiques appliquées à l'électromagnétisme », affecté dans une unité relevant de l'Institut national des sciences de l'ingénierie et des systèmes (INSIS) à titre principal.

Les supports des postes 41/03, 41/06 et 41/07 proviennent de l'INSHS, l'INP, et l'INSIS, respectivement. En parallèle, les sections 2 (physique théorique) et 8 (électromagnétisme, notamment) ont géré chacune le recrutement d'un CR2 pour affectation dans un laboratoire relevant principalement de l'INSMI (concours 02/04 et 08/04).

Les auditions (concours CR – pas d'audition pour le concours DR) ont eu lieu à l'Institut Henri Poincaré (IHP) le 4 avril, devant quatre sous-jurys représentant chacun plusieurs domaines des mathématiques (sous-jurys non thématiques). La section tient à remercier cet institut et ses personnels pour leur soutien et leur efficacité. Les délibérations ont eu lieu du 5 au 7 avril. La liste des candidats admissibles en 2016 est la suivante :

*Concours 41/01*

1. Alazard Thomas
1. Bacry Emmanuel
1. Déglise Frédéric
1. Deroin Bertrand
1. Guillarmou Colin
1. Loubère Raphaël

*Concours 41/02*

1. Morrow Matthew
2. Seyfardini Sobhan

*Concours 41/03*

Aucun candidat admissible.

*Concours 41/04*

1. Beuzart-Plessis Raphaël
1. Bonthonneau Yannick
1. Fathi Max
1. Kassel Adrien
1. Rizzi Luca

1. Tholozan Nicolas
1. Tristani Isabelle
1. Waldspurger Irène
1. Xie Junyi
1. Yu Tony Yue
1. Ziliotto Bruno
12. Guenancia Henri
13. Zhang Huafeng
14. Scornet Erwan
15. Lê François

*Concours 41/05*

1. Lairez Pierre
1. Spillane Nicole
3. Arguillère Sylvain

*Concours 41/06*

1. Lampart Jonas
2. Budd Timothy

*Concours 41/07*

1. Millien Pierre

Pour information, les sections 02 et 08 ont proposé les classements suivants pour les postes correspondant à une affectation dans un laboratoire de mathématiques :

*Concours 02/04 (1 poste)*

1. Stephan Jean-Marie
2. Mitev Vladimir

*Concours 08/04 (1 poste)*

1. Thierry Bertrand
2. Tang Zuqi

La pression est très forte sur l'ensemble des concours, et le jury souligne la qualité très élevée des dossiers. Le jury souligne que la proportion de femmes candidates sur chaque concours reste faible (voir les statistiques plus loin).

Même si les pratiques peuvent diverger selon le domaine des mathématiques, rappelons que dans notre communauté, le fait pour les directeurs de thèse de cosigner avec un doctorant risque d'avoir un effet négatif sur l'appréciation par le jury de la contribution du doctorant.

De façon générale, même si les recrutements ne se font pas en fonction des souhaits d'affectation (c'est la direction de l'INSMI, et non le comité national, qui gère les affectations des lauréats), l'argumentation fournie par les candidats quant à leurs souhaits d'affectation est un élément permettant de mesurer la cohérence du projet. À la fois pour les candidats CR et pour les candidats DR, le dossier doit mentionner un projet de mobilité.

### 3. Comité national : rôle et fonctionnement

Le rôle le plus connu du comité national est celui de jury de recrutement des chargés de recherche et directeurs de recherche, au printemps. Sa mission comprend plusieurs autres aspects, relevant de l'évaluation scientifique : demandes de chercheurs invités (encore appelés « postes rouges »), demandes de délégations CNRS, participation aux comités de visite HCERES, ainsi que les points examinés lors des sessions d'automne et de printemps, détaillés plus bas.

#### 3.1 – Le concours

Depuis 2012, on peut sélectionner les candidats CR convoqués pour une audition, au cours du jury d'admissibilité sur dossier (JAD). Pour le moment, on ne peut pas faire la même chose pour les concours DR (soit on convoque tous les candidats pour une audition, soit on n'en convoque aucun). Il est question qu'un décret instaure un JAD pour les concours DR.

Le nombre de candidats aux concours CR est d'environ 300 par an. Depuis plusieurs années, l'IHP prête gracieusement des salles pour les auditions. Pour la période 2012-16, chaque audition procédait comme suit :

- cinq minutes de présentation par le candidat, sans support (ni projection, ni tableau) ;
- dix minutes de discussion avec le jury.

Nous tenons à remercier l'IHP et ses personnels pour cet accueil et cette efficacité constante.

#### 3.2 – Sessions d'automne et de printemps

La section se réunit en octobre ou novembre pour la session d'automne, et généralement en mai pour la session de printemps.

#### Évaluation des chercheurs

Les chercheurs CNRS sont évalués à vague et à mi-vague. Le terme de « vague » se réfère à la durée des UMR. Depuis le passage aux plans quinquennaux, on évalue des chercheurs à chacune de ces deux sessions : à vague au cours du printemps qui suit l'évaluation du laboratoire auquel appartiennent les chercheurs, à mi-vague à l'automne. Lors de l'évaluation, la section émet un avis :

- avis favorable : l'activité du chercheur est conforme à ses obligations statutaires ;
- avis différé : l'évaluation est renvoyée à la session suivante en raison de l'insuffisance ou de l'absence d'éléments du dossier ;
- avis réservé : la section a identifié dans l'activité du chercheur un ou plusieurs éléments qui nécessitent un suivi spécifique ;
- avis d'alerte : la section exprime des inquiétudes sur l'évolution de l'activité du chercheur.

Si un chercheur ne reçoit pas un avis favorable, un suivi post-évaluation (SPE) est mis en place, coordonné par la délégation régionale CNRS concernée. Il faut alors recueillir deux avis favorables consécutifs pour que le processus de SPE soit levé. En parallèle, la direction de l'INSMI entretient un dialogue constructif avec les chercheurs en difficulté, pour les aider à trouver des solutions adaptées.

#### Demandes diverses

Certaines demandes peuvent arriver lors de l'une ou l'autre session, typiquement :

- changement de direction d'unité ;
- changement de section ou demande d'évaluation par une deuxième section ;
- expertise d'unités.

Les changements d'affectation des chercheurs ne font pas l'objet d'une consultation du comité national, c'est une décision qui relève de l'institut de rattachement uniquement (l'INSMI, la plupart du temps pour notre section). Il arrive aussi que la section doive se prononcer sur le remplacement de membres élus : le choix se fait par vote, soit lors d'une session, soit « n'importe quand », modulo des règles spécifiques de quorum.

#### Session d'automne

On y examine en outre :

- les demandes d'écoles thématiques (voir les commentaires en début de texte) ;
- les affectations des chercheurs recrutés (adéquation entre projet de recherche et affectation) ;
- la plupart des titularisations des CR (sauf les CR ayant demandé un report d'intégration) ;
- les promotions CR2 vers CR1 ;
- les promotions dans le corps DR (seuls les rangs A y participent).

Rappelons que contrairement au corps des maîtres de conférences, le corps des chargés de recherche est encore divisé entre 2<sup>e</sup> classe et 1<sup>re</sup> classe. Pour des raisons budgétaires, le passage à la 1<sup>re</sup> classe ne se fait pas avant quatre ans en tant que CR2. Par contre, cette promotion est essentiellement automatique, à condition d'en faire la demande.

Une autre différence entre les corps CR et MCF est qu'il n'existe pas de hors classe pour les CR (en dépit de demandes anciennes et répétées), ce qui pose un réel problème dans l'évolution des carrières.

### Session de printemps

On y examine, en plus des chercheurs :

- GDR : création ou renouvellement ;
- unités : création ou renouvellement ;
- éméritat ;
- reconstitution de carrière ;
- mise à disposition/détachement ;
- titularisation de CR (cas de report d'intégration).

Statutairement, pour chaque comité de visite HCERES d'une UMR, le comité national envoie un représentant (ce n'est pas obligatoire pour les fédérations de recherche). En début de mandature, la section a voté la motion suivante :

« La section 41 du comité national, lors de sa première réunion du nouveau mandat, demande par cette motion aux présidents de comités d'AERES d'intégrer systématiquement dans les comités de visite un membre élu C de la section compétente du comité national. La section suggérera le nom de l'élu C. Les Ingénieurs, Techniciens et Administratifs ("ITA") quelles que soient leurs tutelles assurent l'accompagnement de l'activité de recherche et sont donc un maillon clef dans la vie du laboratoire. Les rencontrer ensemble ou par équipes pour les grandes unités, avec la vision d'un élu C de la section, c'est visiter le laboratoire de l'intérieur, c'est comprendre l'organisation et la dynamique de travail. C'est aborder avec les ITA le vécu de leur métier, les rapports de travail, les difficultés, les évolutions, et comment ils les voient, ou peuvent les impulser. C'est une écoute utile qui enrichit l'évaluation du laboratoire. Rencontrer les ITA de tous les laboratoires, c'est aussi assembler une vision globale stratégique des métiers du secteur scientifique, pour accompagner l'exercice de la prospective, et guider l'élaboration de la formation, dans une dy-

namique humaine. Les ITA représentent aujourd'hui la moitié des personnels statutaires du CNRS. Complémentaire à celui des chercheurs, leur rôle est essentiel au fonctionnement des laboratoires et de l'organisme. Il est donc indispensable que leur opinion puisse s'exprimer et être prise en compte dans toutes les instances du CNRS. »

Bien que la section ait par la suite systématiquement proposé le nom d'un élu C pour les comités de visite AERES ou HCERES, cette proposition n'a été suivie d'effet que dans le cas de quelques très gros laboratoires. Nous espérons que les négociations actuelles avec le HCERES aboutiront à une meilleure représentation des personnels ITA dans les comités de visite, indispensable au bon fonctionnement de nos unités.

### 3.3 – Délégations CNRS

Des critères ont été établis conjointement par l'INSMI et la section, et sont disponibles sur la page de la section :

[cn.math.cnrs.fr/#delegations](http://cn.math.cnrs.fr/#delegations)

Deux points sont cruciaux pour les évaluations :

- nombre d'heures enseignées au cours des quatre années précédentes ;
- projet associé à la demande de délégation.

Ces informations apparaissent naturellement si les demandeurs ont rempli la fiche spécifique fournie par l'INSMI (transmise par les directeurs d'unité, et disponible également sur la page de la section). On n'a malheureusement pas toujours ces informations dans les dossiers...

Soulignons que le projet associé à une demande de délégation est un critère très important. La qualité de la recherche effectuée est un aspect pris en compte, mais les délégations sont également là pour aider les collègues à redynamiser leur recherche.

Un nombre marginal de demandes dépendant d'autres instituts que l'INSMI est évalué par la section 41 (enseignants-chercheurs en mathématiques demandant une délégation dans un laboratoire relevant d'un autre institut que l'INSMI).

### 3.4 – Chercheurs invités (postes rouges)

Ces demandes sont faites par les unités lors de la demande de moyens auprès du CNRS. Les critères principaux pour évaluer ces demandes sont la qualité du dossier scientifique du chercheur d'une part,

et la pertinence de l'invitation d'autre part.

L'INSMI ne finance plus ni thèse ni post-doc depuis plusieurs années.

### 3.5 – PEDR

Pour le mandat 2012-16, la section 41 a choisi de ne pas s'occuper de l'attribution des PEDR (ex-PES). La motion suivante a été votée lors de la session d'automne 2012 :

« La section 41 désapprouve la logique des PES, qui est une mauvaise réponse au problème de la revalorisation des carrières et nuit à la cohésion de la communauté scientifique. Elle ne souhaite pas participer à l'attribution de cette prime. »

L'ensemble des motions est consultable sur la page de la section.

## 4. Promotions DR : bilan

Sur l'ensemble des quatre dernières sessions d'automne, le nombre de promotions au sein du corps DR se répartit comme suit :

Grade	Nb promotions	
	H	F
DR1	23	7
DRCE1	3	1
DRCE2	4	2

Plus en détail, les moyennes annuelles sont :

DR1		
	Total	F
Nb candidats	30,25	4 (13%)
Nb promotions	7,5	1,75 (23%)
	H	F
Age des promus	48,9	52,1
Ancienneté grade prec.	9,3	9,4

DRCE1		
	Total	F
Nb candidats	16	4 (25%)
Nb promotions	1	0,25 (25%)
	Total	
Age des promus	58	
Ancienneté grade prec.	8,75	

DRCE2		
	Total	F
Nb candidats	5,25	1 (19%)
Nb promotions	1,5	0,5 (33%)
	H	F
Age des promus	61,75	55,5
Ancienneté grade prec.	5,5	4,5

En DR1, l'âge des promus varie entre 33 et 60 ans, pour des anciennetés DR2 entre 4 et 20 ans. En DRCE1, l'âge des promus varie entre 55 et 63 ans, pour des anciennetés DR1 entre 5 et 12 ans. En DRCE2, l'âge des promus varie entre 52 et 65 ans, pour des anciennetés DRCE1 entre 3 et 9 ans.

## 5. Concours : bilan

Les listes nominatives des lauréats par concours sont archivées sur la page de la section,

[cn.math.cnrs.fr/#concours](http://cn.math.cnrs.fr/#concours)

La section n'ayant géré un concours CR1 pour affectation dans un laboratoire de l'INSMI que la dernière année de mandature, nous ne présentons pas de statistiques sur ce concours ; signalons simplement que pour deux postes ouverts, le jury a examiné 60 candidatures, dont celles de 12 femmes (20%) et de 33 candidats ayant réalisé leur thèse à l'étranger (55%). De même, il y a eu quelques recrutements croisés : outre les postes évoqués au début de ce texte, la section 41 a recruté en 2013, 2014 et 2015 un CR2 pour affectation dans un laboratoire relevant de l'Institut National des Sciences de l'Information et de leurs Interactions (INS2I), et symétriquement, les sections 6<sup>1</sup> et 7<sup>2</sup> – la section concernée a varié selon les années – ont recruté des informaticiens pour affectation dans un laboratoire relevant de l'INSMI.

Chaque année étaient mis au concours entre 8 et 11 postes CR2 sur des concours non fléchés (« concours général »), et 2 ou 3 postes fléchés « sur des projets d'interactions des mathématiques avec d'autres disciplines ». Nous présentons des statistiques sur ces deux types de concours, ainsi que sur le concours DR2.

Sur le concours général, nous avons recruté 35 CR2, dont 7 femmes (20%). Plus en détail, voici la moyenne annuelle sur quatre ans, en distinguant la part des candidatures féminines et celle des candidats ayant effectué leur thèse à l'étranger (critère

1. Sciences de l'information : fondements de l'informatique, calculs, algorithmes, représentations, exploitations.

2. Sciences de l'information : traitements, systèmes intégrés matériel-logiciel, robots, commandes, images, contenus, interactions, signaux et langues.



distinct de la nationalité) :

Nb candidats		
Total	F	Etr
224	44 (19%)	58 (26%)
Auditionnés		
Total	F	Etr
41	7,5 (18%)	8,25 (20%)
Liste principale		
Total	F	Etr
8,75	1,75 (20%)	1,25 (14%)

L'âge des lauréats varie entre 24 et 31 ans, pour une moyenne de 28 ans et demi (moyenne identique pour les hommes et les femmes). Ils sont recrutés en moyenne un an après la thèse (les femmes sont recrutées avec moins d'ancienneté moyenne, plus de la moitié d'entre elles juste après la thèse), jusqu'à thèse+3.

Sur le concours interactions, nous avons recruté 9 CR2, dont 3 femmes (33%). En moyenne annuelle :

Nb candidats		
Total	F	Etr
131	30,25 (23%)	34,5 (26%)
Auditionnés		
Total	F	Etr
19,75	5,25 (26%)	2,25 (11%)
Liste principale		
Total	F	Etr
2,25	0,75 (33%)	0

Concernant les deux premières lignes, il y a des recoupements avec le concours général (pas sur la liste des classés). La moyenne d'âge est légèrement supérieure à 28 ans, elle est de 27 ans et demi pour les femmes. Les lauréats sont recrutés en moyenne un peu plus d'un an après la thèse (exactement un an pour les femmes). Le jury a été attentif à l'existence d'interactions avec des disciplines autres que les mathématiques dans la recherche déjà effectuée, et dans le projet de recherche. La plupart des DR2 recrutés sur la période 2012-16 étaient CR1 au CNRS. Nous n'avons recruté des candidats extérieurs au CNRS qu'en 2013 (2 lauréats). Les concours DR2 sont officiellement ouverts à tous les candidats ayant au moins huit ans d'activité dans la recherche (4 ans en tant que CR1 dans le cas des chercheurs CNRS) ; le coût pour le CNRS est très différent selon qu'on recrute un CR1 (promotion) ou un extérieur au CNRS. Par ailleurs, même si l'habilitation ne fait pas partie des diplômes requis pour la candidature aux postes de DR2, en être titulaire est une indication forte de l'implication dans la formation par la recherche, et la section y est particulièrement sensible.

Comme évoqué plus haut, il n'est pas possible d'effectuer une présélection en vue d'auditions pour les concours DR2. Nous avons préféré ne pas procéder aux auditions, plutôt que convoquer tous les candidats. En 2013, 8 postes étaient proposés au concours, et 6 les trois années suivantes. Les statistiques annuelles sont les suivantes :

Nombre de candidats			
Total		CR1	
Total	F	Total	F
90,5	10,75 (12%)	47,5	5,5 (11,5%)
Liste principale			
Total		CR1	
Total	F	Total	F
6,5	0,75 (11,5%)	6	0,75 (12,5%)

L'âge des CR1 recrutés DR2 varie de 35 à 51 ans, pour une moyenne de 39 ans (37 pour les femmes), avec une ancienneté dans le grade CR1 allant de 5 à 22 ans, pour une moyenne de sept ans et demi (six ans pour les femmes).

## 6. Prochaine mandature

À partir de 2016, les mandats du comité national passent à cinq ans au lieu de quatre, en raison du passage au plan quinquennal pour les universités. Au moment où nous écrivons ce texte, seuls les membres élus pour la mandature 2016-21 sont connus :

Prénom	Nom	Statut
Grégoire	Allaire	PR
Didier	Bresch	DR
Benoît	Claudon	CR
Gilles	Courtois	DR
Mikael	de la Salle	CR
Olivier	Frécon	MCF
Véronique	Gayard	DR
Oana	Ivanovici	CR
Christian	Le Merdy	PR
Sandrine	Péché	PR
Radu	Stoica	MCF

Signalons qu'il est possible de changer de statut en cours de mandat tout en restant au comité national. Le règlement intérieur stipule par ailleurs que la section doit comporter en permanence au moins 4 DR CNRS et 3 CR CNRS. La liste des sept membres nommés et des trois élus de catégorie C sera connue au cours de l'été. La nouvelle section se réunira en septembre.

## Le Prix Fermat et ses lauréats

Le Prix Fermat 2015 a été attribué à Laure Saint-Raymond (École normale supérieure) et à Peter Scholze (Université de Bonn), d'une part pour le développement de théories asymptotiques d'équations aux dérivées partielles dont la limite fluide d'écoulements dilués, l'analyse multi-échelles pour des équations de la physique des plasmas et des modèles d'océans et pour la dérivation de l'équation de Boltzmann à partir de systèmes de particules en interaction, et d'autre part pour l'invention des espaces perfectoides et leurs applications à des problèmes fondamentaux de géométrie algébrique et de la théorie des formes automorphes. Les deux textes qui suivent décrivent plus précisément leurs contributions.

• L. MICLO

Rappelons que le Prix Fermat récompense des mathématiciens de moins de 45 ans ayant apporté des contributions majeures dans l'un des domaines où s'est illustré Pierre de Fermat : le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles, la géométrie analytique, les probabilités et la théorie des nombres. Les récipiendaires du Prix s'engagent à publier un article de synthèse dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, exposant à un public de mathématiciens professionnels, mais pas forcément spécialistes du sujet, ce qu'apportent les résultats de la recherche récompensée. Le Prix Fermat est organisé par l'Institut de Mathématiques de Toulouse et est financé par la Région Languedoc-Roussillon-Midi-Pyrénées, avec le soutien de l'université Paul Sabatier. Cette distinction internationale est accompagnée par le Prix Fermat Junior, qui récompense des étudiants, des classes Terminales aux trois premières années universitaires, pour des contributions mathématiques originales relevant de leurs programmes. Ainsi le Prix Fermat Junior 2015 a été attribué à Gary Bécigneul et à Mehdi Trensé pour leurs travaux concernant respectivement, la fréquence et la régularité d'une valeur d'adhérence et une nouvelle preuve du grand théorème de Poncelet, contributions qui seront publiées dans la revue *Quadrature*.

La cérémonie officielle de remise des Prix Fermat s'est déroulée à l'Hôtel de Région Languedoc-Roussillon-Midi-Pyrénées, le mardi 22 mars 2016.

La Région était représentée par Bertrand Monthu- bert, l'université Paul Sabatier par son président Jean-Pierre Vinel, et l'Institut de mathématiques de Toulouse par son vice-directeur, Philippe Laurençot. La soirée s'est poursuivie par un exposé grand public d'Étienne Ghys, de l'Académie des Sciences, sur « la géométrie du ballon de football », qui a rencontré un grand succès, l'amphithéâtre de la Région ayant fait salle comble.

Rendez-vous a été pris pour le prochain Prix Fermat, décerné fin 2017. Plus d'informations, notamment concernant l'ouverture des candidatures, seront disponibles sur <http://www.math.univ-toulouse.fr/PrixFermat>

### Les contributions de Laure Saint-Raymond

par Benoît Perthame

Élue à l'Académie des Sciences en 2013, Laure Saint-Raymond a obtenu des avancées déjà reconnues parmi les plus importantes depuis un siècle sur l'équation de Boltzmann. Elle a vu son parcours et ses résultats largement décrits, y compris dans la presse quotidienne. Deux aspects marquent particulièrement son œuvre scientifique. Un choix de problèmes toujours motivés par des questions issues de la physique et des sujets nécessitant l'analyse asymptotique de modèles écrits sous la forme

d'équations aux dérivées partielles.

Aux lendemains de la COP21, ses travaux sur les modèles d'océanographie, même s'ils sont plus récents, méritent sans doute d'être mentionnés les premiers puisqu'ils participent à comprendre la structure des courants océaniques, un sujet important pour comprendre l'évolution du climat. Le sujet est introduit dans la communauté mathématique par J.-L. Lions au début des années 1990, lorsqu'il comprend que les sciences du climat vont se développer rapidement. Il propose ainsi d'étudier les "équations primitives" de l'atmosphère [10] puis des océans. Il s'agit de dynamique des fluides avec un caractère particulier puisque la rotation de la terre induit, dans les équations de Navier-Stokes en régime incompressible, un terme de rotation (le terme  $\frac{b(x)}{\varepsilon} e_3 \wedge u$  ci-dessous) qui domine le système

$$\partial_t u + \frac{b(x)}{\varepsilon} e_3 \wedge u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \nu \Delta u,$$

$$\operatorname{div} u = 0, u \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^3,$$

où  $e_3$  désigne la verticale. Pour comprendre la dynamique, les océanographes ont donc proposé des analyses multi-échelles à partir du paramètre de temps  $\varepsilon$  et des échelles d'espace typiques des océans, avec une profondeur faible par rapport à leur taille horizontale. Ces analyses ont suscité de très nombreux travaux mathématiques, développant des outils d'analyse profonds [4] toujours limités au cas où le champ  $b$  est constant. Dans ce contexte, avec A.-L. Dalibard, I. Gallagher, T. Paul et C. Cheverry, L. Saint-Raymond s'est attaquée au problème majeur d'un champ de rotation inhomogène comme c'est le cas à l'échelle géophysique, [11, 5]. Cette inhomogénéité génère des singularités qui mènent à des développements particulièrement subtils dans l'analyse des couches limites et la construction de correcteurs, surtout lorsqu'il s'agit de prendre en compte des géométries et des termes de forçage généraux (pour prendre en compte l'effet du vent). Il s'agit donc des résultats les plus significatifs du domaine tant en terme de réalisme physique des modèles que de profondeur des concepts méthodologiques. Pour donner des exemples de méthodes mathématiques, notons le filtrage à la Schochet [13] qui permet de comprendre l'évolution moyenne, des développements multi-échelles généraux en l'absence d'outil aussi puissant que les développements à deux échelles en homogénéisation, et enfin l'analyse semi-classique qui permet d'analyser les petites échelles générées par la propagation d'ondes de

Poincaré.

L'analyse asymptotique était déjà au cœur des premiers travaux de L. Saint-Raymond sur la théorie cinétique des gaz et de sa contribution historique au 6ème problème de Hilbert concernant la dérivation rigoureuse des équations de Navier-Stokes à partir de la théorie cinétique des gaz. Dans le cadre des solutions renormalisées de R. Di Perna et P.-L. Lions [6] pour l'équation de Boltzmann,

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f),$$

qui sont globales et sans hypothèse de taille hormis l'entropie finie, elle dérive, avec F. Golse, les équations de l'hydrodynamique incompressible dans la limite simultanée d'un faible nombre de Knudsen ( $\varepsilon$  ci-dessus) et d'un faible nombre de Mach [8]. La remarquable théorie qu'ils ont développée s'affranchit de toute hypothèse de taille sur la vitesse, hormis l'énergie finie, tout comme dans la théorie de Leray qui s'applique à la limite. Démontré au tournant des années 2000, le célèbre théorème de F. Golse et L. Saint-Raymond s'inscrit dans un vaste champ, alors très actif, avec des études préliminaires de R. Esposito, J. L. Lebowitz et R. Marra pour les solutions fortes petites et de C. Bardos, D. Levermore et N. Masmoudi pour les solutions faibles globales. Ici l'analyse fonctionnelle joue un rôle important avec une version raffinée des lemmes de compacité en moyenne pour les équations cinétiques dans un cadre  $L^1$ . La subtilité de cet aspect technique a conduit à une nouvelle classe de lemmes de transfert de régularité, de la variable vitesse vers la variable spatiale [1]. En ce qui concerne la limite fluide, l'approche initiale a été largement améliorée, généralisée et se trouve maintenant dans le Lecture Notes [12].

La validité de l'équation de Boltzmann se pose également ; la question est alors de dériver l'équation de Boltzmann à partir de la dynamique de particules suivant les lois de Newton pour des potentiels répulsifs. Le paramètre asymptotique est ici le nombre de particules qui tend vers l'infini en faisant tendre vers zéro le rayon d'interaction des particules pour garder fini le nombre de collisions ou plus précisément la section efficace : c'est la limite de Boltzmann-Grad [3]. La célèbre hiérarchie de BBGKY (initiales du nom des physiciens qui ont contribué) est proposée dans les années 30, mais sans démonstration. Au début des années 70, Lanford [9] démontre un premier résultat en temps très

court et le problème est revisité par plusieurs mathématiciens, dont Illner et Pulvirenti qui précisent la démonstration initiale. Dans une collaboration de longue haleine avec T. Bodineau, I. Gallagher et B. Texier, voir [7] par exemple, L. Saint-Raymond reprend et complète la limite de Landford, obtenant sur ce sujet les résultats les plus importants depuis 40 ans. Elle obtient la première démonstration complète du passage de particules newtoniennes vers d'autres dynamiques passant par l'équation de Boltzmann dans un régime linéarisé. On peut ainsi retrouver le mouvement brownien ou la dynamique de Stokes-Fourier [2]. Les méthodes utilisent encore des estimations fines typiques des équations aux dérivées partielles, mais combinées à celles de la physique statistique avec des estimations précises des collisions successives de particules via de la combinatoire sur des arbres de recollisions.

À travers ces trois résultats spectaculaires d'analyse de problèmes asymptotiques posés en termes d'équations aux dérivées partielles, qui ne couvrent pas tous les travaux de Laure Saint-Raymond, on devine une vision scientifique large et profonde, englobant les sciences de la terre, la physique des plasmas et la mécanique des fluides. Cette double compétence mathématiques/-physique n'est pas récente, Laure a deux masters, en physique et en mathématiques.

## Les contributions de Peter Scholze

par Laurent Clozel

Les travaux de Peter Scholze portent sur la géométrie algébrique, dans sa composante arithmétique, et sur la théorie des formes automorphes.

Dans ses tout premiers articles, et dès son mémoire de *Masterarbeit* pour  $GL(2)$ , il a donné une démonstration nouvelle de la conjecture de Langlands locale liant représentations de degré  $n$  du groupe de Galois d'un corps  $p$ -adique et représentations irréductibles de  $GL(n)$  sur ce corps. Ce théorème avait été démontré par Harris et Taylor en 2000 (une autre démonstration avait ensuite été donnée par Henniart). Comme celle d'Harris et Taylor, la démonstration de Scholze repose sur l'analyse des représentations galoisiennes apparaissant dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura ; mais elle est plus simple, grâce à l'utilisation d'élégants résultats concernant les cycles évanescents. Elle évite le recours, jusqu'ici nécessaire, à la *conjecture de Langlands numérique* démontrée au-

paravant par Henniart et montrant que les deux ensembles en correspondance ont le même cardinal. Elle donne par ailleurs une démonstration directe de la formule donnant (en termes de fonctions L de formes automorphes) la fonction zêta de Hasse-Weil d'une variété de Shimura de type convenable, montrant l'importance de la notion de *fonctions zêta semi-simplifiée* de son directeur de recherche, Michael Rapoport. Dans la démonstration de ce dernier résultat, la conjecture de monodromie-poids de Deligne apparaît naturellement. Cette conjecture est ancienne de plus de trente ans ; elle complète les conjectures de Weil concernant les variétés sur les corps finis ou  $p$ -adiques, en spécifiant les *poids* des valeurs propres de l'opérateur de Frobenius dans le cas de mauvaise réduction. Deligne la démontrait dans le cas d'égale caractéristique. Il est vraisemblable que cela a été une des motivations de Scholze pour le développement suivant.

Ce travail, spectaculaire, concerne les *espaces perfectoides*, inventés par Scholze. Il s'agit de la construction d'une nouvelle catégorie d'espaces similaires aux espaces analytiques rigides de la géométrie analytique  $p$ -adique, mais plus généraux et munis de structures plus riches. En particulier, Scholze démontre une propriété remarquable de *basculement* (*tilting*) qui donne une équivalence de catégories entre de tels espaces sur un corps de caractéristique zéro et un corps de caractéristique  $p$ . C'est une extension extraordinaire d'une construction inaugurée par Fontaine et développée par Fontaine et Wintenberger : Scholze passe du cas d'un corps, i.e. d'un point, au cas d'un espace arbitraire. Dans son premier article sur les perfectoides, cette méthode est utilisée pour démontrer la conjecture de monodromie-poids, en caractéristique nulle, pour des variétés qui sont des intersections complètes dans des espaces projectifs (ou, plus généralement, dans des variétés toriques.) De fait, grâce au *basculement*, de nombreuses propriétés géométriques peuvent être démontrées par passage à la caractéristique  $p$ .

Dans deux articles ultérieurs, Scholze a appliqué sa théorie des espaces perfectoides aux problèmes connexes de la théorie de Hodge  $p$ -adique et des groupes  $p$ -divisibles. La théorie de Hodge  $p$ -adique est un analogue de la théorie de Hodge pour les variétés sur les corps  $p$ -adiques qui joue, dans le cadre des variétés sur des corps de nombres, un rôle crucial pour comprendre les représentations galoisiennes associées du groupe de Galois local en une place  $p$ -adique. On sait que la théorie de

Hodge peut être formulée pour les variétés analytiques complexes kählériennes, même dans le cas non algébrique. Scholze construit une théorie de Hodge  $p$ -adique pour les espaces  $p$ -adiques rigides-analytiques, avec les mêmes propriétés (dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham). Un des aspects remarquables des espaces perfectoïdes est qu'ils donnent une structure naturelle à des espaces obtenus par revêtements infinis, qui n'étaient ni des schémas ni des espaces algébriques dans le cadre classique. Scholze (avec Jared Weinstein) applique ces méthodes à la théorie des groupes  $p$ -divisibles. Ces objets, introduits par Barsotti et Tate il y a cinquante ans, jouent un rôle central dans l'étude des variétés abéliennes, et de leurs espaces de modules, en caractéristique finie ou sur des anneaux locaux de caractéristique mixte ; ils remplacent en quelque sorte la théorie analytique sur le corps complexe. Grâce à la nouvelle théorie, on peut considérer des espaces de Rapoport-Zink (espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles) de niveau infini, et les décrire comme espaces perfectoïdes. Une conséquence d'une grande simplicité est la description des groupes  $p$ -divisibles sur la complétion  $C_p$  de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ , qui les exhibe comme quotients, exactement comme dans la description classique des variétés abéliennes complexes.

Dans son travail sur la théorie de Hodge  $p$ -adique, Scholze avait été amené à introduire (dans le cadre de ses espaces perfectoïdes) une variante du site étale de la théorie classique, le site pro-étale. Ceci l'a amené, dans un travail commun avec Bhargav Bhatt, à définir le site pro-étale pour les schémas ordinaires. Il s'agit d'une construction tout-à-fait nouvelle, même dans le cadre classique des variétés algébriques. Par exemple, elle permet de définir le groupe fondamental de Grothendieck sans utiliser le passage à la limite par les revêtements finis. De façon connexe, elle permet de définir les faisceaux de  $Q_l$ -espaces vectoriels sans passer par les faisceaux à coefficients dans  $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ . Les catégories de faisceaux lisses ou constructibles à coefficients  $l$ -adiques rationnels et leur cohomologie sont alors construites, et toutes leurs propriétés dérivées, de façon directe. On voit apparaître un monde nouveau qui attend d'être exploré plus avant. (Ceci a un prix : les géomètres devront s'habituer à vivre dans un monde non noethérien ...).

Scholze a ensuite utilisé les espaces perfectoïdes pour résoudre d'un coup deux problèmes fondamentaux de la théorie des formes automorphes.

On sait, depuis les travaux d'Eichler, Shimura, Deligne et Serre, associer une représentation  $p$ -adique de degré 2 du groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}$  à une forme modulaire classique, forme propre des opérateurs de Hecke : c'est la clé de la démonstration de la conjecture de Ramanujan. En dimension supérieure, on s'attend à l'existence de représentations galoisiennes de degré  $n$ , associées à des formes automorphes *de type algébrique* pour  $GL(n, \mathbb{Q})$ , analogue des formes modulaires holomorphes pour  $GL(2)$ . Depuis une vingtaine d'années, ceci a été démontré, avec une généralité croissante, pour les formes automorphes *autoduales*, un terme que nous ne définirons pas - ou du moins, celles qui sont liées à la cohomologie rationnelle des sous-groupes arithmétiques de  $GL(n, \mathbb{Q})$ . Deux problèmes importants restaient posés depuis plus de vingt ans : d'une part, obtenir un tel résultat sans hypothèse d'autodualité ; d'autre part, obtenir des représentations galoisiennes (modulaires, i.e. à coefficients dans une extension de  $\mathbb{F}_p$ ) pour des classes de  $(p^n)$ -torsion dans la cohomologie. Le premier problème a été résolu récemment par Harris, Lan, Taylor et Thorne. En utilisant le fait que le revêtement infini d'une variété de Shimura obtenu en passant à la limite pour des niveaux *infinis en  $p$*  est un espace perfectoïde, Scholze démontre d'un coup ce résultat et aussi l'existence de représentations associées aux classes de  $p^n$ -torsion. Ses résultats ne s'appliquent pas qu'au corps des rationnels, mais à tous les corps de multiplication complexe (*corps CM*). En particulier, il démontre ainsi l'existence de représentations galoisiennes pour les classes de cohomologie de torsion des groupes de Bianchi, sous-groupes arithmétiques de  $SL(2, \mathbb{C})$ . (Ceci avait été conjecturé il y a plus de quarante ans par Grönwald, qui avait obtenu de nombreuses vérifications par le calcul ; la conjecture pour  $GL(n)$  est due à Ash.) Un ingrédient de la démonstration est la preuve de la nullité (dans ce cadre des groupes donnant lieu à des variétés de Shimura) de la *cohomologie complétée* introduite par Calegari et Emerton en dehors du degré médian, comme ceux-ci l'avaient conjecturé.

L'étude de la cohomologie complétée est étroitement liée aux progrès actuel du programme de Langlands  $p$ -adique. Rappelons que la correspondance locale de Langlands, mentionnée au début de ce texte, relie représentations de  $GL(n, F)$  où  $F$  est un corps  $p$ -adique et représentations irréductibles lisses de degré  $n$  du groupe de Galois absolu de  $F$ . Il s'agit ici de représentations complexes, ou, ce qui revient au même, de représentations sur la clôture algébrique du corps  $Q_l$  des nombres  $l$ -adiques, avec



$l$  différent de  $p$ . Dans la correspondance (conjecturée ou, parfois, vérifiée : c'est dans le cas le plus simple la conjecture de Taniyama-Weil démontrée par Wiles, Taylor puis d'autres ...) entre représentations automorphes et *motifs* de Grothendieck (c'est-à-dire, sous-espaces de la cohomologie des variétés algébriques sur des corps de nombres découpés par des correspondances algébriques) ceci rend compte de la cohomologie étale  $l$ -adique. Mais on sait désormais qu'il doit exister de même une correspondance entre représentations  $p$ -adiques (dans des espaces de Banach) de  $GL(n, F)$  et représentations  $p$ -adiques de degré  $n$  du groupe de Galois. Ceci est un ingrédient fondamental dans les cas démontrés de la conjecture de Fontaine-Mazur (et Langlands) associant des formes automorphes à des représentations *géométriques* du groupe de Galois absolu d'un corps de nombres, cette condition étant définie précisément par la restriction de la représentation à un groupe de Galois  $p$ -adique, et vérifiée par les réalisations  $p$ -adiques des *motifs*. Cette correspondance de Langlands  $p$ -adique a été obtenue par Colmez pour  $GL(2)$  sur  $Q_p$ ; elle a fait l'objet de travaux importants de Breuil, Emerton et

d'autres mathématiciens. Dans une prépublication récente, Scholze utilise la cohomologie  $p$ -adique de la *tour de Lubin-Tate* (nous ne définirons pas ce terme ...) pour obtenir un foncteur de la catégorie des représentations  $p$ -adiques admissibles de  $GL(n, F)$  vers les représentations du groupe de Galois. (En fait, du produit du groupe de Galois par une algèbre à division sur  $F$  de degré  $d$ , comme dans le cas  $l$ -adique.) Là aussi, la limite de la tour de revêtements devint un espace perfectoïde.

On clora ici ce rapide survol des travaux de Peter Scholze, car ses nouvelles contributions se succèdent à un rythme impressionnant. Il est évident qu'en géométrie algébrique et en théorie arithmétique des formes automorphes, Peter Scholze est actuellement le mathématicien le plus inventif et le plus productif. Une personnalité aussi brillante n'est pas apparue dans ces domaines centraux depuis quarante ans. Des séminaires ont été organisés dans le monde entier sur ses travaux; il attire autour de lui de nombreux jeunes mathématicien(ne)s; plusieurs de ses articles récents sont issus de collaborations.

## Références

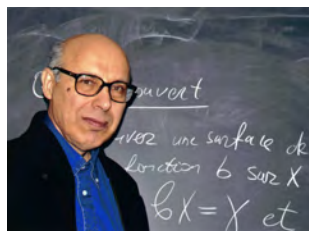
- [1] D. ARSÉNIO et L. SAINT-RAYMOND. « Compactness in kinetic transport equations and hypoellipticity ». *Journal of Functional Analysis* **261**, n° 10 (2011), p. 3044–3098.
- [2] T. BODINEAU, I. GALLAGHER et L. SAINT-RAYMOND. « From hard spheres dynamics to the Stokes–Fourier equations: an  $L^2$  analysis of the Boltzmann–Grad limit ». *Comptes Rendus Mathématique* **353**, n° 7 (2015), p. 623–627.
- [3] C. CERCIGNANI, R. ILLNER et M. PULVIRENTI. *The mathematical theory of dilute gases*. **106**. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] J.-Y. CHEMIN et al. *Mathematical geophysics, volume 32 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. 2006.
- [5] A.-L. DALIBARD et L. SAINT-RAYMOND. « Mathematical study of degenerate boundary layers ». *Hal-00682477*, à paraître dans *Memoirs of the AMS* ().
- [6] R. DI PERNA et P. LIONS. « On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability ». *Ann. of Math.* **2**, n° 130 (1989), p. 321–366.
- [7] I. GALLAGHER, L. SAINT-RAYMOND et B. TEXIER. *From Newton to Boltzmann: the case of hard-spheres and short-range potentials*. ISBN 978-3-03719-129-3. European Mathematical Society, 2014, p. 150.
- [8] F. GOLSE et L. SAINT-RAYMOND. « The Navier–Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels ». *Inventiones mathematicae* **155**, n° 1 (2004), p. 81–161.
- [9] O. E. LANFORD III. « Time evolution of large classical systems ». In : *Lecture Notes in Physics*. Sous la dir. de J. MOSER. Springer, 1975, p. 1–111.
- [10] J.-L. LIONS, R. TEMAM et S. WANG. « New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications ». *Nonlinearity* **5**, n° 2 (1992), p. 237–288.
- [11] L. SAINT-RAYMOND. « The role of boundary layers in the large-scale ocean circulation ». *Mathematical models and methods for planet Earth*, n° 6 (2014), p. 11–24.
- [12] L. SAINT-RAYMOND. *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*. 1971. Springer Science & Business Media, 2009.
- [13] S. SCHOCHET. « Fast singular limits of hyperbolic PDEs ». *Journal of differential equations* **114**, n° 2 (1994), p. 476–512.



## Gennadi M. HENKIN

1942-2016

• A. IORDAN



Gennadi Markovič Henkin, né le 26 octobre 1942 à Moscou, est le fils de Mark Lvovich Henkin, professeur de métallurgie, et d'Eugénie Moiseevna Shvartsstejn, ingénieur. Il a fait ses

études à l'Université de Moscou durant lesquelles il y a rencontré sa future femme, Natacha Novikova, mathématicienne spécialisée en analyse numérique. Leur fils, Roman Novikov, a hérité de leur goût pour les sciences et il est directeur de recherches en mathématiques à l'École polytechnique de France.

Depuis 1967, G. M. Henkin était chercheur à l'Institut Central d'Économie Mathématique de l'Académie des Sciences de Russie. À la suite de la Perestroïka, quand les citoyens russes furent autorisés à s'établir à l'étranger, il fut nommé en 1991 Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie Paris VI, – poste qu'il occupa jusqu'à sa retraite en 2011 et dont il fut ensuite Professeur Émérite – tout en continuant son activité de chercheur en chef à l'Institut Central d'Économie Mathématique de Moscou. Depuis 2013, il était aussi Professeur à l'Institut de Physique et Technologie de Moscou.

En 1973, G. M. Henkin obtint le titre de Docteur ès Sciences à l'Université de Moscou, avec une thèse sous la direction de A. G. Vitouchkine intitulée « Représentations intégrales des fonctions de plusieurs variables complexes ».

Les formules intégrales de Cauchy (1875) et de Cauchy-Pompeiu (1906) sur les domaines du plan complexe sont bien connues comme étant fondamentales dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. En théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, dont le développement

fut plus tardif, la formule de représentation intégrale de Bochner-Martinelli pour les fonctions holomorphes (vers 1940), de même que celle de Koppelman (1967) pour les formes différentielles, sont celles qui ont généralisé préalablement la formule intégrale de Cauchy, à la différence d'avoir un noyau intégral non holomorphe.

L'analyse complexe en plusieurs variables connut une expansion significative dans les années 50-60 avec la solution du problème du  $\bar{\partial}$  obtenue par K. Oka (1953), H. Bremerman (1954) et F. Norguet (1954) et grâce aux méthodes cohomologiques de H. Cartan et H. Grauert et aux méthodes d'équations aux dérivées partielles de J. J. Kohn et L. Hörmander.

Dans les années 70, G. M. Henkin marqua un tournant important dans cette discipline, en obtenant des noyaux intégraux holomorphes pour l'opérateur  $\bar{\partial}$  dans les domaines strictement pseudo-convexes. Ces noyaux sont depuis connus sous le nom de noyaux de Henkin-Ramirez, E. Ramirez les ayant obtenus indépendamment dans sa thèse sous la direction de H. Grauert. Ils sont l'outil principal de la preuve des estimations fines pour l'opérateur  $\bar{\partial}$ , obtenues par G. M. Henkin et ses collaborateurs, et par d'autres mathématiciens. Ces formules intégrales ont permis, entre autres, à G. M. Henkin, de développer en collaboration avec S. Gindinkin les propriétés de la transformée de Radon et d'étudier avec R. Novikov, les problèmes inverses liés, par exemple, à la tomographie.

Les deux volumes écrits par G. M. Henkin et J. Leiterer, « Theory of Functions on Complex Manifolds » et « Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas » sont devenus des références classiques pour ce sujet.

Le nom de G. M. Henkin est associé à beaucoup de problèmes importants de l'analyse complexe de la seconde moitié du xx<sup>e</sup> siècle, tels que l'équation

de H. Lewy, les équations de Yang-Mills (en collaboration avec Y. Manin et R. Novikov), la caractérisation des variétés d'interpolation (en collaboration avec A. Tumanov), de même que le théorème connu sous le nom de théorème de Henkin-Skoda sur les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna.

À l'Université Pierre et Marie Curie, G. M. Henkin dirigea des thèses de doctorat de très haut niveau scientifique comme par exemple celle de T.-C. Dinh sur des chaînes holomorphes à bord rectifiable, qui généralise des résultats classiques de J. Wermer, H. Alexander et G. Stolzenberg; de S. Nivoche dans laquelle sont posées les bases qui lui serviront à prouver la Conjecture de Zahariuta sur l'approximation des fonctions extrémales par des fonctions de Green pluricomplexes; de B. Fabre, qui résolut un problème posé par Hirai dans les années 1970; de L. Piro, dans laquelle est résolu un problème posé par S.S. Chern sur la géométrie des tissus.

Pendant cette période, il obtint d'importants résultats avec ses collaborateurs de l'Université Pierre et Marie Curie, comme ceux sur les chaînes holomorphes de bord donné dans l'espace projectif (en collaboration avec P. Dolbeault), qui représente une généralisation des résultats de R. Harvey et B. Lawson; sur la compacité de l'opérateur de  $\bar{\partial}$ -Neumann sur des domaines pseudo-convexes à bord non-lisse (en collaboration avec A. Iordan), où ils répondent à un problème posé par J.J. Kohn dans les années 80; sur le problème de Plateau complexe feuilleté (en collaboration avec V. Michel).

Parallèlement, il obtint des résultats remarquables sur les plongements des variétés CR (en collaboration avec C. Epstein), sur les formes différentielles holomorphes et méromorphes sur les variétés analytiques non-lisses (en collaboration avec M. Passare), sur l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrable sur des variétés pseudo-convexes munies d'une action de groupe (en collaboration avec M. Gromov et M. Shubin).

G. M. Henkin reçut de nombreuses distinctions telles que le Prix de la Société Mathématique de Moscou en 1970, le prix Kondratiev de l'Académie des Sciences de Russie en 1992 pour ses recherches en économie mathématique en collaboration avec V. M. Polterovich et le prix Bergman en

2011 pour ses recherches en analyse complexe. Il fut également conférencier invité pour un exposé au Congrès International des Mathématiciens de Varsovie en 1983.

Un colloque international en l'honneur de G. M. Henkin à l'occasion de son 65<sup>e</sup> anniversaire a été organisé en 2007 à l'Université Pierre et Marie Curie. Les conférences de ce colloque, dont les sujets portaient sur l'Analyse et la Géométrie Complexe, la Géométrie Intégrale, l'Analyse Fonctionnelle, les Équations aux Dérivées Partielles, les Problèmes Inverses et la Théorie de la Diffusion, la Physique Mathématique et l'Économie Mathématique, présentées par les meilleurs spécialistes de ces domaines, reflètent le large spectre des travaux mathématiques de G. M. Henkin.

L'œuvre mathématique de G. M. Henkin compte plus de 140 articles et fait de lui un des mathématiciens les plus éminents des cinquante dernières années. Tous ceux qui l'ont connu se souviennent de son professionnalisme, de sa disponibilité, sa gentillesse et de la richesse de ses discussions scientifiques. Il avait l'habitude de comparer les mathématiciens avec les sportifs de haut niveau : l'entraînement doit être intensif et quotidien. Jusqu'à ses dernières heures, alors qu'il luttait contre la maladie, il continua à assouvir sa passion pour les mathématiques. Le 19 janvier 2016, les mathématiques et l'analyse complexe en particulier, ont perdu un de leurs plus grands représentants.

FIGURE 1 – G. M. Henkin et P. Lelong, U.P.M.C., 2005.



## Jean-Lin JOURNÉ

1957-2016

• G. DAVID



Jean-Lin Journée est décédé le jeudi 7 avril 2016, dans sa cinquante neuvième année, emporté par une tumeur cérébrale. Il a un fils, Gaspard, de 26 ans. Ancien élève de l'École normale supérieure (promotion 1976), il a effectué une Thèse de 3<sup>e</sup> cycle et une Thèse d'État (1985) sous la direc-

tion d'Yves Meyer. Il a eu une carrière fulgurante comme coopérant à l'université de Washington à St Louis, allocataire à l'École polytechnique, chercheur Centre national de la recherche scientifique (CNRS) à Strasbourg, puis professeur de 1985 à 1989 à l'université de Princeton et, depuis 1989, professeur à l'université Pierre et Marie Curie. Ses recherches ont été ralenties depuis, à cause d'ennuis de santé qui l'ont durablement fatigué et l'ont forcé à se concentrer sur son enseignement, qu'il a assuré avec une grande originalité et sans ménager son temps ni sa peine.

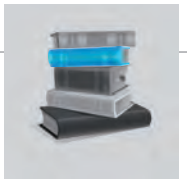
Il est surtout connu pour ses recherches sur les opérateurs d'intégrale singulière, et en particulier les théorèmes  $T(1)$  et  $T(b)$ , démontrés avec G. David et S. Semmes, qui donnaient des critères faci-

lement vérifiables (initialement, l'appartenance de l'image de la fonction 1 à l'espace  $BMO$  de John et Nirenberg) pour qu'un tel opérateur ait une extension continue sur  $L^2$ . Il a aussi obtenu, avec M. Christ et par des manipulations multilinéaires subtiles, des bornes polynomiales surprenantes sur les commutateurs de Calderón.

Sa contribution à l'étude des espaces produits (opérateurs modelés sur une composition de transformée de Hilbert, une dans chaque variable), un peu moins connue, est tout aussi frappante, à la fois pour le lemme de recouvrement qui lui a permis d'améliorer considérablement les résultats de R. Fefferman et A. Chang sur la dualité  $L^1 - BMO$ , et par l'idée nouvelle, beaucoup utilisée par la suite, de voir les opérateurs comme agissant sur un espace d'opérateurs de Calderón-Zygmund.

On doit à Jean-Lin beaucoup d'autres contributions dans des domaines divers, par exemple sur les martingales (avec P.-A. Meyer), ou sur les ondelettes à l'époque héroïque (des ondelettes construites avec I. Daubechies et S. Jaffard ont été utilisées récemment pour mettre en évidence des ondes gravitationnelles!).

Jean-Lin a obtenu le prix Salem en 1987 (avec G. David), et a donné le cours Peccot en 1987-88. Chacun se souviendra avec émotion de sa rapidité d'esprit, de son enthousiasme, de son humour, et de sa générosité.



### La Formule de Stokes, roman

Michèle AUDIN

Cassini, 2015. 298 p. ISBN : 978-84225-206-9

Je ne pense pas causer de tort à *La formule de Stokes, roman*, de Michèle Audin, en affirmant que l'ouvrage est tout autant livre d'histoire et de popularisation des mathématiques, que roman oulipien. L'héroïne en est par ailleurs bien la belle formule de Stokes, au sujet de laquelle j'ai appris qu'« on ne peut rien démontrer d'intéressant sans [l'] utiliser ».

La singulière formulation du titre doit sans doute son origine au simple mais vigoureux refus d'une maison d'édition qu'a subi la mathématicienne (et narré dans le livre), au prétexte que le projet de livre possédait des éléments imaginaires. Ce qui est vrai : l'auteure a choisi de se faire plaisir, et le lecteur est bien heureux de ce choix. Pourtant, ce roman est d'abord un livre d'histoire et d'historienne, entre autres parce que Michèle Audin, depuis plusieurs années, épluche avec systématisme et finesse les comptes rendus des deux siècles passés des séances mathématiques de l'académie des sciences. Bien sûr, comme on le sait ou le suppose<sup>a</sup>, la formule de Stokes n'est pas due à Stokes<sup>b</sup>, et l'un des enjeux du livre est de retracer la généalogie et la descendance de l'héroïne. Cette quête, pas vraiment chronologique pour des raisons liées à la structure romanesque, familiarise le lecteur avec les mathématiciens et physiciens associés à la formule, avec leur histoire, leur sociologie (avérée et sourcée) et plus rarement leur psychologie (les sources sont moins fiables). L'investissement de Michèle Audin dans les archives de l'Institut trouve dans ce livre une application frappante : la description, de 1823 à 1936, de liens mathématiques, diplomatiques, politiques, tissés autour de l'académie entre éminents mathématiciens de toutes nationalités (Paris étant l'épicentre de la discipline). On y découvre (bon, j'y découvre) des affiliations intellectuelles officielles (Ostrogradski et Liouville), des condescendances subtiles (les refus successifs d'accepter comme académicien le héros parallèle un peu loser qu'est Goursat), ou encore de réelles influences de la politique sur la marche de la Science (le boycott calamiteux des mathématiciens et physiciens allemands organisé par le très-puissant, très-nationaliste et très-catholique Émile Picard).

Il fallait, je pense, une double fréquentation longue et assidue, à la fois des mathématiques et des archives, pour produire cette description simple (ce qui signifie ici filtrée et décantée) et fine de ce tout petit monde, pour réussir à capter les implicites sarcastiques d'un éloge officiel, à décrire des rencontres historiques (l'humble professeur de lycée De Rham rendant visite au ponton Élie Cartan), à présenter l'importance des ponts<sup>c</sup> dans les mathématiques du XIX<sup>e</sup>, l'intérêt et le sens de bonnes notations, mais aussi l'évolution des conceptions différentes de l'héroïne, son lien avec la physique, la géométrie, les formes différentielles ou la topologie algébrique.

Ce roman est aussi un livre de popularisation des mathématiques. La lectrice mathématicienne professionnelle lira sans doute avec un intérêt moins prononcé quelques-uns de ces assez courts passages (l'explication de ce qu'est une intégrale ou un champ de vecteurs, mais aussi l'homologie ou la dualité de Poincaré), mais pensera aux nombreux lecteurs hors de notre profession que ces descriptions réjouiront. En soi, avoir un ouvrage qui traite d'un concept phare et récent de l'analyse et de la géométrie, et qui ne traite donc ni de nombres magiques ni de logique paradoxale est rafraîchissant.

Enfin, c'est bien un roman. La structure oulipienne de l'ouvrage, a priori obscure (j'ai appris person-



nellement qu'il y avait une structure à « La vie mode d'emploi » de Pérec dix ans après l'avoir lu), produit un effet d'élégance et de légèreté, même sans avoir connaissance du procédé de narration. Par ailleurs, les nombreuses dérives maîtrisées, par exemple les rencontres de l'auteure avec des chargés de collection (qui auraient préféré que l'auteure eût écrit quelque chose sur le nombre d'or ou la vie sexuelle de notre milieu) forment des pauses amusantes et instructives. L'ensemble des à-côtés, qu'un livre d'histoire classique aurait largement négligés, comme les détails quotidiens a priori non directement liés au thème (que pouvaient jouer les enfants Cartan au piano, du Ravel, du Cartan<sup>d</sup> ? ; la visite d'un sculpteur officiel chez Goursat qui se fera tirer le médaillon ; Hermite se faisant livrer un bol de grog pendant son cours à la Sorbonne ; les lettres de Stokes à sa fiancée où il lui parlait de bobines magnétiques mais la gourmandait quand elle voulait lui parler mathématiques), produisent un liant riche et dépayçant.

À titre de *teaser*, voici quelques questions qui ont leur réponse (plus ou moins objective) dans le roman : pourquoi a-t-on créé le Journal de l'École polytechnique ? Que penser des 800 articles qu'a écrit Cauchy ? Pourquoi Hadamard n'a-t-il reçu, lors de son élection en 1912 comme académicien, que 36 voix contre 21 à Goursat, pâle concurrent à l'époque ? Qui se souvient d'Amédée Manheim, pourtant rude concurrent de Poincaré lors de son élection ? Quels mathématiciens signèrent « Les Intellectuels aux côtés de la Patrie » en 1925 ? Quel lien y a-t-il entre Moogli, Baloo, Julia et Goursat ? Au final, à travers la précision ciblée, sobre et historiquement documentée du propos, ainsi que l'ironie iconoclaste teintée d'affection avec laquelle l'auteure traite son héroïne et ses chevaliers servants, le lecteur passe un excellent moment, tout en se plongeant dans un univers dépayçant (d'autant plus pour un non mathématicien) rendu ainsi familier. Je finirai en notant que l'auteure a péché par pessimisme : il existe vraiment des bouées à deux trous, en voici la réjouissante preuve.



Damien GAYET  
Institut Fourier, Grenoble

- 
- a. - Principe d'Arnold : si une notion porte un nom propre, ce n'est pas celui de son créateur.  
- Principe de Berry : le principe d'Arnold s'applique à lui-même. (V. Arnold, *Sur l'éducation mathématique*)
- b. Sauf si l'intégration par partie passe pour une forme accomplie de la formule de Stokes...
- c. Un article de Stokes s'intitule *Discussion d'une équation différentielle liée à la rupture des ponts de chemins de fer*.
- d. Un enfant Cartan fut musicien.

## Instructions aux auteurs

**Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*.** Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

**Articles scientifiques.** Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

**Soumission d'article.** Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique ([gazette@dma.ens.fr](mailto:gazette@dma.ens.fr)), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier  $\text{\TeX}$  le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe  $\text{\LaTeX}$  *gztarticle* fournie par les distributions  $\text{\TeX}$  courantes ( $\text{\TeX}$  Live et Mac $\text{\TeX}$  – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK $\text{\TeX}$ ), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution  $\text{\TeX}$  à jour.

---

**Classe  $\text{\LaTeX}$  :** Denis BITOUZÉ ([denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr](mailto:denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr))

**Conception graphique :** Nathalie LOZANNE ([n.lozanne@free.fr](mailto:n.lozanne@free.fr))

**Impression :** Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

