

# la Gazette

des **Mathématiciens**



- **Mathématiques** – Modélisation aléatoire de la biodiversité
- **Diffusion des savoirs** – Esthétopies
- **Raconte-moi...** un perfectoïde
- **Carnet** – Maryam Mirzakhani, Jean-Pierre Kahane

Société  
Mathématique  
de France



## Comité de rédaction

### Rédacteur en chef

**Boris ADAMCZEWSKI**

Institut Camille Jordan, Lyon  
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

### Rédacteurs

**Thomas ALAZARD**

ENS, Paris  
alazard@dma.ens.fr

**Caroline EHRHARDT**

Université Vincennes Saint-Denis  
caroline.ehrhardt@inrp.fr

**Damien GAYET**

Institut Fourier, Grenoble  
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

**Sébastien GOUÉZEL**

Université de Nantes  
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

**Sophie GRIVAUX**

Université de Picardie  
sophie.grivaux@u-picardie.fr

**Fanny KASSEL**

IHÉS  
kassel@ihes.fr

**Pierre LOIDREAU**

Université Rennes 1  
pierre.loidreau@univ-rennes1.fr

**Romain TESSERA**

Université Paris-Sud  
romain.tessera@math.u-psud.fr

---

### Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ

Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris cedex 05

Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96

gazette@dma.ens.fr – <http://smf.emath.fr>

**Directeur de la publication :** Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



**À propos de la couverture.** Photographie d'un simple ruban dans l'espace imaginaire  $SOL$ . Il n'y a qu'un ruban et il ne s'enroule pas. Cette image révèle comment la lumière, diffusée par ce ruban, s'enroule une multitude de fois autour de deux directions : une stable et une instable. La géométrie d'un espace est donnée par la distance entre les points qui la composent. La lumière parcourt le chemin le plus court. La géométrie d'un espace est ainsi révélée par la façon dont la lumière circule. (crédit : Pierre BERGER).

N° 154

## Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

Particulièrement répandu en Perse aux XIII<sup>e</sup> et XIV<sup>e</sup> siècles, le gazhel est une forme poétique chantant l'amour, aussi bien charnel que mystique. L'un d'eux commence par ces vers :

« À cette source elle a bu.

Elle est morte – et la source n'a pas tari. »

Nul doute que nombreux seront les mathématiciennes et mathématiciens qui continueront à s'abreuver à la source découverte par Maryam Mirzakhani. Cet été, l'annonce de son décès à tout juste quarante ans des suites d'une longue maladie a endeuillé l'ensemble de la communauté. De nationalité iranienne alors qu'elle travaillait aux États-Unis, première femme à obtenir la médaille Fields, elle était, et restera, un symbole. Anton Zorich lui rend un hommage émouvant dans ces pages. Tristement, la période estivale a également été marquée par le décès d'une figure des mathématiques françaises : Jean-Pierre Kahane. Hervé Queffélec lui consacre ici un *Carnet*, en attendant un numéro spécial à venir.

Au sommaire de cette *Gazette*, les *Mathématiques* ne sont bien sûr pas en reste. Tu apprendras tout d'abord comment l'aléa se met au service du vivant afin de modéliser la diversité biologique, puis tu embarqueras pour une petite promenade à travers la géométrie de contact et poursuivras ta route à la rencontre de la théorie de Littlewood-Paley. La rubrique *Raconte-moi* te propose quant à elle une halte dans l'univers passionnant des espaces perfectoides. Introduits dans sa thèse de doctorat par le jeune mais déjà très remarqué mathématicien allemand Peter Scholze, ces derniers préfigurent l'avènement d'une nouvelle ère pour la géométrie arithmétique. Et pourquoi ne pas s'accorder une minute pour rêver ? La rubrique *Diffusion des savoirs* met à l'honneur l'exposition *Esthétopies*, présentée à l'institut Henri Poincaré au printemps dernier. Les géomètres, comme William Thurston, aiment concevoir et imaginer des espaces. Sensibles et complexes. Pierre Berger t'invite à les écouter, à observer comment la lumière s'y répand. Une immersion dans des géométries nouvelles, située quelque part

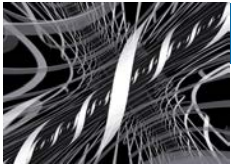
entre esthétique et mathématique. De son côté, la SMF ne ménage pas ses efforts afin de promouvoir les mathématiques auprès de la jeunesse. Nous revenons sur la première édition du concours SMF junior ; une initiative à saluer et un franc succès.

Virginie Bonnot n'est pas mathématicienne, mais enseignante-chercheuse en psychologie sociale. Pour la rubrique *Parité*, elle décrypte de son œil expert les stéréotypes de genre. Comment ils corrompent nos perceptions, nos jugements et nos comportements.

Pour finir, Sébastien Gouëzel part en croisade (amicale) contre le trop répandu mésusage de  $\LaTeX$ , distillant quelques conseils avisés. Un article à l'endroit de ceux pour qui ce terme évoque davantage le rougissant souvenir d'un textile infiniment extensible, que le système de composition de documents créé par Leslie Lamport... et aussi de certains autres!

En te souhaitant une agréable lecture,

Boris ADAMCZEWSKI



N° 154

## Sommaire

<b>SMF</b>	<b>5</b>
Mot du président	5
<b>MATHÉMATIQUES</b>	<b>7</b>
Modélisation aléatoire de la biodiversité – <i>S. MÉLÉARD</i>	7
Structures de contact vrillées, d’après Borman-Eliashberg-Murphy – <i>S. COURTE</i>	21
La théorie de Littlewood-Paley – <i>H. BAHOURI</i>	28
<b>DIFFUSION DES SAVOIRS</b>	<b>40</b>
Esthétopies – <i>P. BERGER</i>	40
Le Concours SMF junior 2017 – <i>P. PANSU</i>	46
<b>PARITÉ</b>	<b>55</b>
Stéréotypes de genre : quelques apports de psychologie sociale – <i>V. BONNOT</i>	55
<b>RACONTE-MOI</b>	<b>60</b>
un perfectoïde – <i>B. LE STUM</i>	60
<b>TRIBUNE LIBRE</b>	<b>65</b>
Un vivier négligé d’étudiants en Sciences – <i>G. COURTADE-COULOMB</i>	65
<b>INFORMATION</b>	<b>67</b>
L’interdisciplinarité en mathématique-biologie : le rôle de la CID 51	67
<b>EN PRATIQUE...</b>	<b>69</b>
Petits conseils $\LaTeX$ entre amis – <i>S. GOUÉZEL</i>	69
<b>CARNET</b>	<b>72</b>
Vie et œuvre scientifique de Jean-Pierre KAHANE – <i>H. QUEFFÉLEC</i>	72
Maryam MIRZAKHANI – <i>A. ZORICH</i>	77
<b>LIVRES</b>	<b>81</b>

## Société Mathématique de France

### PRIX D'ALEMBERT

### PRIX JACQUELINE FERRAND

D'un montant de 2000 euros chacun,  
ces prix visent à encourager  
la diffusion de la connaissance  
des mathématiques vers un large public.



- Le prix d'Alembert récompensera une action destinée à mieux faire connaître et comprendre les mathématiques et leurs développements récents auprès d'un large public ;

- Le prix Jacqueline Ferrand récompensera une opération pédagogique innovante dans le domaine des mathématiques.

candidatures à déposer avant le :  
**15 mars 2018**



SMF - IHP - 11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris cedex 05  
<http://smf.emath.fr/PrixAlembert-Ferrand/Candidature.html>





N° 154

## Mot du président

Chères et chers collègues,

J'espère que votre rentrée s'est bien déroulée, et que vos licences et masters sont suffisamment fréquentés, en attendant la vague démographique de 2018!

L'été n'a pas été de tout repos à la SMF, qui a été très active et sollicitée : doctorat et agrégation, ICM, nouveaux programmes en lycée, situation en Turquie, publications « ouvertes »... Je me focaliserai ici sur le sujet des agrégés-docteurs, qui me semble très symbolique et essentiel pour l'avenir de notre communauté et l'enseignement des mathématiques.

Suite à notre appel mi-juillet, nous avons pris connaissance de la situation délicate dans laquelle se trouvaient plusieurs agrégés, qui ont vu leur prolongement de détachement ou même leur disponibilité refusés par des recteurs d'académie. Ceux-ci appliquaient une note de service de décembre 2016 qui n'autorise pas les agrégé(e)s n'ayant pas validé deux années de titularisation à demander une disponibilité, et de fait empêche les jeunes agrégés-docteurs (ou les jeunes en fin de doctorat) d'occuper un poste d'ATER ou de post-doc. Avec d'autres acteurs de la communauté, nous avons fait remonter notre mécontentement et fait circuler au plus vite l'information sur toutes les situations qu'on nous avait signalées. Presque toutes ont été résolues, malheureusement pas toutes... et certain(e)s ont même dû démissionner du corps des agrégés pour poursuivre leur travail de recherche. Cela envoie un très mauvais signe aux étudiants qui partagent les nouvelles via tous les réseaux sociaux! Quand le nombre de candidats de qualité est cruellement insuffisant pour les concours d'enseignement, ce type de mesure et ces décisions ne font que décourager les jeunes à passer des concours qui, ne l'oublions pas, sont très exigeants. C'est se priver potentiellement de professeurs ayant connaissance du milieu des mathématiques, ayant préparé des cours et des exposés devant des publics variés, bref ayant une expérience importante pour enseigner les mathématiques à nos enfants.

La SMF s'est très vite positionnée sur ce sujet, et a interpellé les responsables sur la menace que représentait cette note de service. Lors de la

réunion des préparateurs d'agrégation organisée par la SMF, la SMAI, et les responsables du concours le vendredi 29 septembre dernier à l'IHP, cette situation a longuement été débattue, et la communauté parle d'une voix unanime. Ce message sera porté par la SMF, ainsi que nos inquiétudes (ou du moins la vigilance à manifester) sur les réformes de la licence qui sont en gestation, les pré-requis qui pourront être demandés, les futurs programmes de lycée.

Quelques informations de la SMF elle-même.

Suite aux suggestions du jury du prix d'Alembert 2016, la SMF a décidé de créer un prix récompensant des actions innovantes en pédagogie des mathématiques : le prix Jacqueline Ferrand. Ce prix rend hommage à cette grande mathématicienne, que beaucoup d'entre nous avons connue grâce aux fameux livres *Arnaudiès - Lelong-Ferrand*. La première édition aura lieu en 2018 et il sera remis avec le prix d'Alembert lors du 2<sup>e</sup> congrès de la SMF, en juin prochain. Je vous invite à déposer ou à susciter des candidatures.

Notre transformation digitale se poursuit. C'est un grand enjeu pour la SMF de mettre ses structures informatiques et son site à niveau, pour pouvoir défendre et représenter les mathématiques, fournir du contenu attrayant, mettre en valeur les actions de ses bénévoles et le beau travail de ses salarié(e)s, et favoriser la lecture des articles et livres que nous publions. La « migration » n'est pas encore effectuée, mais j'espère que vous apprécierez, lorsque le moment sera venu, les avancées que nous vous proposerons.

La SMF est très concernée par le devenir des jeunes entrant dans la recherche. Ainsi, le Conseil d'Administration a décidé que tout étudiant en thèse aura droit, dès 2018, à trois années d'adhésion gratuite à la SMF. Je vous remercie de passer le message à vos étudiantes et étudiants, et vos écoles doctorales, sur cette mesure qui vise à intégrer les jeunes très rapidement dans la communauté.

Enfin, je voudrais remercier tous les bénévoles et vous, adhérents – surtout si vous avez résisté jusqu'ici à mon « Mot du président » ! Votre soutien est fondamental, et passe par votre adhésion : celle-ci nous donne plus d'envie, et plus de crédibilité lors de nos interventions auprès des acteurs de la communauté, des responsables politiques, des médias... Votre soutien peut aussi passer par votre participation active à nos débats, à nos actions : en particulier, les « instances » de la SMF se renouvellent naturellement, et toute bonne volonté sera accueillie avec joie.

Je vous souhaite un bel automne.

Le 2 octobre 2017

Stéphane SEURET, président de la SMF





## Modélisation aléatoire de la biodiversité : de l'importance des paramètres d'échelle

La modélisation de la biodiversité biologique et des fonctionnements évolutifs des écosystèmes est fondamentale, avec des applications qui vont de questions environnementales jusqu'à des problématiques médicales. Les mathématiques aident à comprendre les mécanismes de mutation et de sélection naturelle et elles peuvent apporter un point de vue objectif dans la modélisation de la biodiversité. Notre but dans cet article est de mettre en évidence la richesse des modèles qui dérivent des modèles individuels et l'importance des paramètres d'échelles, en particulier des échelles de temps.

• S. MÉLÉARD

### 1. Une modélisation complexe et l'importance du hasard

*« (...) in after years, I have deeply regretted that I did not proceed far enough at least to understand something of the great leading principles of mathematics, for men thus endowed seem to have an extra-sense. »*

Charles DARWIN, Autobiography.

#### 1.1 – Des phénomènes complexes

Que ce soit pour mieux prédire les effets de l'activité humaine sur l'environnement ou les résistances à certaines thérapies médicales, acquérir une bonne compréhension des mécanismes d'évolution de la biodiversité devient une démarche essentielle. Comprendre le fonctionnement d'un écosystème, les changements engendrés par la disparition ou l'apparition d'une nouvelle espèce génère des questions extrêmement compliquées qui nécessitent non seulement des outils mathématiques sophistiqués, mais également un dialogue constant avec les biologistes. Nous souhaitons modéliser la diversité biologique à tous les niveaux du vivant, du plus microscopique (bactéries) au plus macroscopique (comportement de communautés et métapopulations) en tenant compte des capaci-

tés d'adaptation des individus et des espèces à leur environnement. Une grande difficulté dans la modélisation du vivant vient du fait qu'il n'y a pas de quantités conservées. De ce fait, pour comprendre le fonctionnement d'un écosystème, il est souvent nécessaire de se ramener aux comportements individuels en tenant compte des grandes différences dans les échelles de temps, de taille, de durée de vie et de reproduction des différentes espèces, ainsi que des fortes interactions compétitives et mutualistes entre ces espèces, comme par exemple les relations hôte-parasite, proie-prédateur ou plante-pollinisateur-herbivore, mais qui peuvent être beaucoup plus compliquées. On cherche à identifier des quantités calculables liées aux mécanismes de l'évolution, comme par exemple le temps d'extinction d'une espèce, l'estimation d'une abondance d'espèce, la vitesse d'invasion d'un parasite, la probabilité de mutation d'un gène et la probabilité que le gène mutant se fixe dans la population.

Notre but dans cet article est de mettre en évidence la richesse des modèles qui peuvent dériver des modèles individuels et l'importance de la prise en compte des échelles de paramètres, en particulier des échelles de temps.

## 1.2 – L'importance du hasard

Le hasard intervient à toutes les échelles du vivant. Grâce aux possibilités modernes de mesures, les biologistes constatent de plus en plus la variabilité individuelle des individus, telle que l'avait présentée Darwin. Ils sont maintenant capables d'isoler des bactéries dans des gouttelettes de nutriment et d'étudier le développement de chaque population issue d'une cellule. Ces observations possibles sur de petites populations de cellules ou de bactéries rendent les modèles probabilistes de plus en plus pertinents.

Il y a essentiellement trois sources de hasard agissant à des échelles extrêmement différentes. La première source de hasard provient des erreurs dans la réplication de l'ADN : le filament d'ADN peut être déformé par changement de l'une ou de plusieurs bases, un bout d'ADN peut s'insérer ou disparaître. Cela donne un ADN mutant qui va pouvoir dans certains cas se répliquer. L'impact de ces mutations peut être plus ou moins important suivant que la partie du chromosome où la mutation est apparue correspond à un gène codant pour une protéine ou non. La deuxième source de hasard apparaît dans la démographie des individus et leurs interactions écologiques : les événements de reproduction des individus et leur durée de vie sont aléatoires, de même, par exemple, que leur probabilité d'accouplement pour des individus sexués ou de pollinisation pour une plante. La troisième source d'aléa, beaucoup plus macroscopique, est celle qui provient des variations environnementales, catastrophes écologiques, changement climatique ou toute autre source de perturbations de l'environnement (comme un antibiotique dans le milieu bactérien). Il est important de pouvoir intégrer ces trois niveaux d'aléa dans les modèles. Néanmoins nous n'aborderons pas ici la modélisation de l'environnement aléatoire et nous nous concentrerons sur la dynamique des populations et l'évolution génétique.

Notons que l'importance du hasard a été prise en compte dès les premiers travaux de modélisation de l'évolution au début du xx<sup>e</sup> siècle (Galton, Haldane, Wright, Fisher), ce qui a permis l'émergence de processus stochastiques originaux, tels les processus de Galton-Watson et de Wright-Fisher (cf. [16]). Une nouvelle gamme de modèles est apparue en 1982 avec le processus de coalescence de Kingman (cf. [12, 13]) qui modélise la reconstruction de la généalogie d'un échantillon de gènes dans une grande population, expliquant ainsi l'histoire de ces

gènes et leur plus récent ancêtre commun. Ce processus fourmille de propriétés mathématiques intéressantes qui continuent à être explorées. Néanmoins il opère à l'échelle des gènes et oublie les individus et leurs interactions macroscopiques. Les modèles que nous développons décrivent la dynamique de populations en prenant en compte différentes échelles de variabilité et d'interaction. Le but est de pouvoir ainsi mieux comprendre la structure des écosystèmes et les scénarios d'évolution de la biodiversité et d'estimer ensuite les différents paramètres d'importance grâce aux observations récentes des biologistes.

## 2. Modèle stochastique pour la démographie d'une espèce

### 2.1 – Processus de naissance et mort

Nous allons décrire certaines propriétés du processus de naissance et mort qui modélise la dynamique de la taille d'une population d'individus de même type au cours du temps. Nous allons montrer sur cet exemple très simple que suivant les échelles de paramètres choisies, il pourra nous mener à différents types de modèles et de résultats.

Le processus de naissance et mort est un processus  $(N_t, t \geq 0)$  indexé par le temps continu, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , qui représente la taille d'une population. Ses trajectoires sont des fonctions constantes par morceaux qui à chaque instant de saut croissent ou décroissent de 1, suivant qu'il y a naissance ou mort d'un individu. Les temps de saut sont aléatoires. Si la population est de taille  $i$ , le temps d'attente pour avoir une naissance suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda(i) \geq 0$  et le temps d'attente pour avoir une mort suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu(i) \geq 0$ , ces événements aléatoires étant indépendants. Les paramètres  $\lambda(i)$  et  $\mu(i)$  sont appelés taux de naissance et taux de mort pour une population de  $i$  individus. Ils peuvent dépendre de la taille de la population de différentes façons et peuvent intégrer une contrainte environnementale. On suppose que  $\lambda(0) = \mu(0) = 0$ , modélisant le fait qu'il n'y a pas d'immigration. Remarquons que les paramètres des lois exponentielles ne dépendent que de l'état de la population juste avant le saut (et non pas de toute la trajectoire jusqu'à cet instant). On appelle ce processus un *processus de Markov* : son comportement aléatoire dans le futur ne dépend de son passé que par l'information que donne son état présent.

Le processus  $(N_t, t \geq 0)$  peut être simulé de manière très simple. On se donne une condition aléatoire initiale  $N_0 \in \mathbb{N}$ . On simule le premier temps de saut par une loi exponentielle de paramètre  $\lambda(N_0) + \mu(N_0)$ . En ce temps aléatoire, avec probabilité  $\lambda(N_0)/(\lambda(N_0) + \mu(N_0))$ , on crée une naissance et le processus croît de 1; avec probabilité  $\mu(N_0)/(\lambda(N_0) + \mu(N_0))$ , on crée une mort et le processus décroît de 1. On réitère cet algorithme en remplaçant  $N_0$  par le nouvel état  $N_0 \pm 1$ . On peut montrer que la loi du processus  $(N_t, t \geq 0)$  est caractérisée par l'opérateur (appelé *générateur infinitésimal*) défini pour toute fonction continue bornée  $\phi$  par

$$L\phi(i) = \lambda(i)(\phi(i+1) - \phi(i)) + \mu(i)(\phi(i-1) - \phi(i)). \quad (1)$$

En particulier, l'espérance de  $\phi(N_t)$  satisfait à  $\mathbb{E}(\phi(N_t)) = \mathbb{E}(\phi(N_0)) + \int_0^t \mathbb{E}(L\phi(N_s)) ds$ .

Il est possible de donner une condition très générale sur les coefficients qui assure que le processus n'explose pas en temps fini et est bien défini sur  $\mathbb{R}_+$  (cf. [16]). C'est en particulier le cas si le taux de naissance est borné par un nombre proportionnel à la taille de la population ( $\lambda(i) \leq \bar{\lambda}i$ ).

Nous allons privilégier deux exemples fondamentaux. Considérons des réels strictement positifs  $b$ ,  $d$  et  $c$ .

1) Les individus se reproduisent et meurent indépendamment les uns des autres, aux mêmes taux respectifs  $b$  et  $d$ . Le processus est alors appelé *processus de branchement binaire*, de taux  $\lambda(i) = bi$ ,  $\mu(i) = di$ . Du fait de l'indépendance, il est possible de montrer que la loi du processus issu de  $n$  individus est égale à la loi de la somme de  $n$  processus de branchement indépendants, issus chacun de 1 individu. Cette propriété s'appelle la *propriété de branchement* et permet souvent d'obtenir des calculs explicites.

2) Supposons ici que  $b > d$ . On ajoute aux hypothèses précédentes une hypothèse de compétition entre les individus. Celle-ci est prise en compte à travers un terme additionnel de mort proportionnel au nombre de paires distinctes d'individus. On appelle *processus de naissance et mort logistique* le processus de taux  $\lambda(i) = bi$ ,  $\mu(i) = di + c i(i-1)$ , où  $c > 0$  modélise la pression de compétition entre deux individus. C'est une modélisation simple de l'écologie à travers une lutte des individus pour survivre, par exemple pour partager des ressources limitées ou des territoires. La propriété de branchement est perdue et les calculs deviennent beaucoup

moins explicites dans ce cas.

Une question récurrente dans l'étude de la biodiversité est la possibilité d'extinction de la population en temps long. Cette probabilité se calcule explicitement en fonction des taux et de la condition initiale  $i$ . Introduisons  $u_i = \mathbb{P}(\text{Extinction} | N_0 = i) = \mathbb{P}_i(T_0 < +\infty)$  si  $T_0$  désigne le premier temps d'atteinte de 0 par le processus. En conditionnant par la valeur du premier saut (naissance ou mort), il est facile de montrer que la suite  $(u_i)_i$  est solution de l'équation de récurrence

$$\lambda(i)u_{i+1} - (\lambda(i) + \mu(i))u_i + \mu(i)u_{i-1} = 0.$$

L'on peut en déduire que

**Théorème 1.** (i) Si  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1) \cdots \mu(k)}{\lambda(1) \cdots \lambda(k)} = +\infty$ , il y a extinction presque-sûre de la population.

(ii) Si  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1) \cdots \mu(k)}{\lambda(1) \cdots \lambda(k)} = U_{\infty} < \infty$ , alors pour  $i \geq 1$ , la probabilité d'extinction  $u_i$  de la population initialisée à  $i$  individus vaut

$$u_i = (1 + U_{\infty})^{-1} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\mu(1) \cdots \mu(k)}{\lambda(1) \cdots \lambda(k)} \in ]0, 1[.$$

Remarquons que dans le cas (ii), la population peut survivre avec une probabilité non nulle mais la probabilité de survie ne vaut jamais un. Il y a donc toujours une chance non négligeable que la population s'éteigne, du fait de l'aspect aléatoire de la démographie. Cet effet est connu par les biologistes sous le nom de *dérive génétique*.

Voyons comment ce théorème se traduit sur les exemples que nous avons introduits précédemment. Dans le cas du processus de branchement binaire et quand  $b \leq d$ , la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1) \cdots \mu(k)}{\lambda(1) \cdots \lambda(k)}$  diverge et il y a extinction presque-sûre. En revanche, si  $b > d$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1) \cdots \mu(k)}{\lambda(1) \cdots \lambda(k)} = \frac{d}{b-d}$  et  $u_i = (d/b)^i$ .

Dans le cas du processus de naissance et mort logistique, il est facile de voir (par le critère de d'Alembert par exemple), que la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1) \cdots \mu(k)}{\lambda(1) \cdots \lambda(k)}$  diverge, conduisant à l'extinction presque-sûre de la population. Ainsi, la compétition entre les individus rend l'extinction inévitable. Nous voyons sur cet exemple très simple l'impact d'une contrainte environnementale ( $c > 0$ ) sur l'extinction de la population.

Notons la finesse du résultat général : le quotient  $\frac{\mu(1) \cdots \mu(k)}{\lambda(1) \cdots \lambda(k)}$  traduit une comparaison très subtile entre

les taux de mort et les taux de naissance. La convergence de la série fait que ce quotient tend vers 0. Il est intuitif que si les taux de mort sont petits devant les taux de naissance, la population peut persister. Le critère de convergence ou divergence de la série quantifie cette petitesse.

Nous verrons dans la partie 2.4 que dans certains cas, même si les paramètres de naissance et mort prédisent une extinction presque-sûre, celle-ci peut avoir lieu sur une échelle de temps lointaine et un comportement transitoirement stable peut apparaître avant cette extinction. Cela a par exemple été observé en Arizona par des biologistes pour une population de serpents à sonnettes en voie d'extinction (cf. Renault, Ferrière, Porter, non publié).

Revenons au cas général où la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1)\dots\mu(k)}{\lambda(1)\dots\lambda(k)}$  diverge. Le temps d'extinction  $T_0$  est donc bien défini et, si  $\mathbb{E}_n$  désigne l'espérance sachant que  $N_0 = n$ , on a

**Proposition 1.**  $\mathbb{E}_1(T_0) = \frac{1}{\mu(1)} + \sum_{i \geq 2} \frac{\lambda(1)\dots\lambda(i-1)}{\mu(1)\dots\mu(i)}$  et pour  $n \geq 2$ ,

$$\mathbb{E}_n(T_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{\mu(k+1)} + \sum_{i \geq k+2} \frac{\lambda(k+1)\dots\lambda(i-1)}{\mu(k+1)\dots\mu(i)} \right).$$

Pour chaque entier  $n$ , désignons par  $\tau_n$  une variable aléatoire dont la loi est celle du temps d'atteinte  $T_n$  de  $n$  partant de  $n+1$ . Si le processus part de  $n$ , il peut atteindre  $n-1$  en un saut par un événement de mort ou il atteint  $n+1$  en un saut, mais alors il doit repasser par  $n$  avant d'atteindre  $n-1$ . Une manière probabiliste de décrire cela est de remarquer que  $\tau_{n-1}$  a même loi que

$$\mathbf{1}_{\{Y_n=-1\}}\mathcal{E}_n + \mathbf{1}_{\{Y_n=1\}}(\mathcal{E}_n + \tau_n + \tau'_{n-1})$$

où  $Y_n, \mathcal{E}_n, \tau'_{n-1}$  et  $\tau_n$  sont des variables aléatoires indépendantes,  $\mathcal{E}_n$  de loi exponentielle de paramètre  $\lambda(n) + \mu(n)$ ,  $\tau'_{n-1}$  distribuée comme  $\tau_{n-1}$  et  $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1) = \lambda(n)/(\lambda(n) + \mu(n))$ . En prenant l'espérance nous en déduisons que

$$\mathbb{E}_n(T_{n-1}) = \frac{\lambda(n)}{\mu(n)} \mathbb{E}_{n+1}(T_n) + \frac{1}{\mu(n)}.$$

L'étude de cette équation de récurrence mène au résultat.

## 2.2 – Approximation en grande population : équation (logistique) de Verhulst et régulation de la population

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de populations de grandes tailles, telles les mil-

liards de bactéries qui habitent notre intestin ou les milliards de cellules qui se promènent dans nos vaisseaux. Il est intuitif de remarquer que si la taille d'une population est grande, elle ne sera guère sensible aux fluctuations dues à une seule mort ou à une seule naissance (par exemple une seule division cellulaire). Ainsi, au moins sur un intervalle de temps borné, sa dynamique sera très proche d'une dynamique sans fluctuations aléatoires qui résumera le comportement macroscopique de cette population.

Nous allons quantifier cette approximation en introduisant un paramètre d'échelle  $K$  qui tend vers  $+\infty$ , en supposant que la taille initiale de la population est d'ordre  $K$ . Le processus d'intérêt est alors le processus de Markov  $(Z_t^K = N_t^K/K, t \geq 0)$  dont les sauts ont l'amplitude  $\pm \frac{1}{K}$  avec des taux respectifs donnés par  $\lambda_K(n)$  et  $\mu_K(n)$ , si la taille vaut  $n$ . C'est ce processus qui va nous permettre de comprendre le comportement macroscopique de la population. Du point de vue biologique cela signifie que chaque individu est affecté d'un poids  $1/K$  représentant la ressource qui lui est attribuée sous une hypothèse de ressource totale (pour les  $K$  individus) d'ordre un. La loi de  $Z^K$  est caractérisée par l'opérateur défini pour toute fonction continue bornée  $\phi$  par

$$L_K \phi(z) = \lambda_K(Kz) \left( \phi\left(z + \frac{1}{K}\right) - \phi(z) \right) + \mu_K(Kz) \left( \phi\left(z - \frac{1}{K}\right) - \phi(z) \right). \quad (2)$$

On peut en déduire, par un argument classique de probabilités, que le processus  $(Z_t^K, t \geq 0)$  se décompose sous la forme

$$Z_t^K = Z_0^K + M_t^K + \frac{1}{K} \int_0^t (\lambda_K(KZ_s^K) - \mu_K(KZ_s^K)) ds, \quad (3)$$

où la partie à variation finie décrit la tendance centrale de  $Z^K$  alors que le processus  $(M_t^K, t \geq 0)$  en caractérise les variations aléatoires. Ce processus  $M^K$  est une martingale de carré intégrable, qui vérifie en particulier que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}(M_t^K) = 0; \quad \mathbb{E}((M_t^K)^2) = \frac{1}{K^2} \int_0^t \mathbb{E}(\lambda_K(KZ_s^K) + \mu_K(KZ_s^K)) ds. \quad (4)$$

Commentons cette formule pour les lecteurs peu habitués aux outils probabilistes : une martingale est telle que la moyenne de ses accroissements sachant son état à un instant donné est nulle. En

particulier, son espérance est constante au cours du temps et nulle dès que la martingale est nulle au temps 0. La deuxième partie de la formule (4) décrit la variance de  $M_t^K$  qui dépend donc de la somme des taux de saut. On peut le comprendre en observant que cette somme modélise l'accumulation des variations aléatoires.

Supposons maintenant que les taux de naissance et mort vérifient  $\lambda_K(n) = n\lambda(n/K)$ ;  $\mu_K(n) = n\mu(n/K)$ , où les fonctions positives  $\lambda$  et  $\mu$  sont lipschitziennes sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\lambda(z) \leq \bar{\lambda}$ ;  $\mu(z) \leq \bar{\mu}(1+z)$ . On pourra par exemple garder en tête le cas particulier où  $\lambda_K(n) = nb$  et  $\mu_K(n) = n(d + c/Kn)$  avec  $b, d > 0$  et  $c \geq 0$  ( $c = 0$ , cas linéaire et  $c > 0$ , cas logistique).

Pour tout  $T > 0$ , les processus  $(Z_t^K, t \in [0, T])$  prennent leurs valeurs dans l'ensemble des fonctions de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}_+$  continues à droite et ayant une limite à gauche. Cet ensemble, nommé espace de Skorohod et noté  $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+)$ , est muni d'une topologie qui en fait un espace polonais (voir par exemple [2]). Supposons que l'équation

$$z'(t) = z(t)(\lambda(z(t)) - \mu(z(t))); z(0) = z_0 \quad (5)$$

admette une unique solution. Nous pouvons alors montrer que quand  $K$  tend vers l'infini, les processus  $(Z_t^K)$  convergent en loi vers cette limite déterministe dès lors que c'est le cas pour les conditions initiales.

**Théorème 2.** Si  $(Z_0^K)_K$  converge en loi vers la constante  $z_0 > 0$  et si  $\sup_K \mathbb{E}((Z_0^K)^3) < \infty$ , alors pour tout  $T > 0$ , la suite de processus  $(Z_t^K, t \in [0, T])$  converge en loi dans  $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+)$  vers la fonction déterministe continue  $(z(t), t \in [0, T])$  solution de (5).

Dans le cas linéaire, on retrouve l'équation de Malthus  $z'(t) = z(t)(b - d)$  et dans le cas logistique celle de Verhulst

$$z'(t) = z(t)(b - d - cz(t)). \quad (6)$$

Ces deux équations ont des comportements en temps long différents. Dans le cas malthusien et suivant le signe de  $b - d$ , la solution de l'équation tend vers  $+\infty$  ou 0, modélisant l'explosion ou l'extinction de la population. Dans le cas logistique où  $b - d > 0$ , la solution converge vers l'équilibre  $(b - d)/c > 0$ . La compétition entre les individus entraîne ainsi une régulation de la taille de la population.

La preuve du Théorème 2 est fondée sur un argument de compacité, identification des valeurs d'adhérence et unicité de la limite. Donnons-en les idées principales. On montre que la propriété de

finitude uniforme (en  $K$ ) des moments d'ordre 3 se propage dans le temps (uniformément pour  $t \leq T$ ). En utilisant la structure de martingale (3) du processus, nous pouvons alors en déduire que les lois des processus sont uniformément tendues (elles chargent à  $\varepsilon$  près le même support), et qu'ainsi, par le théorème de Prokhorov (voir [2]), elles sont relativement compactes dans l'ensemble des probabilités sur l'espace de trajectoires  $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+)$ . Les sauts de  $Z_t^K$  ont l'amplitude  $\frac{1}{K}$ . Ainsi quand  $K$  tend vers l'infini, les sauts tendent vers 0 et toute valeur d'adhérence sera continue en temps. Par ailleurs (4) entraîne que  $\mathbb{E}(|M_t^K|) \leq (\mathbb{E}(|M_t^K|^2))^{1/2}$  tend vers 0. Cela justifie le fait que le processus limite est déterministe et solution de  $z(t) = z_0 + \int_0^t z_s(\lambda(z_s) - \mu(z_s)) ds$ . L'unicité de la solution permet de conclure. On pourra trouver plus de détails de la preuve dans Bansaye-Méléard [1, Theorem 3.1].

### 2.3 – Variations autour du cas critique - Diffusions de Feller logistique

Revenons au cas logistique avec l'hypothèse que les taux de naissance et mort hors la compétition sont égaux à des quantités négligeables près (pour  $K$  grand). Plus précisément nous allons supposer que ces taux s'écrivent

$$\lambda_K(n) = n\left(\gamma + \frac{b}{K}\right); \mu_K(n) = n\left(\gamma + \frac{d}{K} + \frac{c}{K}(n-1)\right), \quad (7)$$

où  $\gamma, b, d, c > 0$  et  $b > d$ . Le terme principal du taux de croissance est donc nul et les paramètres  $b, d$  et  $c$  caractérisent maintenant une petite perturbation de ce taux de croissance (quand  $K$  est grand). Même si le processus de naissance et mort a un comportement aléatoire, son approximation quand  $K \rightarrow \infty$  sur un intervalle de temps fini est constante. Si l'on veut voir les effets de la démographie, il faut attendre beaucoup plus longtemps, à savoir un temps d'ordre  $Kt$ .

**Théorème 3.** Supposons que  $Z_0^K$  converge en loi vers la variable aléatoire  $Z_0$  de carré intégrable. Alors, pour  $T > 0$ , la suite  $(Z_{Kt}^K, t \in [0, T])_K$  converge en loi, dans  $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+)$ , vers le processus de diffusion  $(Z_t, t \in [0, T])$  solution de l'équation différentielle stochastique

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \sqrt{2\gamma Z_s} dB_s + \int_0^t Z_s(b - d - cZ_s) ds, \quad (8)$$

où  $B$  est un mouvement brownien réel. La loi de ce processus est caractérisée par l'opérateur de

diffusion  $A$  défini sur les fonctions de  $C_b^2$  par :

$$A\phi(z) = \gamma z \phi''(z) + z(b - d - cz)\phi'(z).$$

Dans ce cas, le processus limite est un processus aléatoire. En effet, il y a tant d'événements de naissances et de morts dans cette échelle de temps que la stochasticité ne peut pas complètement disparaître à la limite. Le terme  $\sqrt{2\gamma Z_t} dB_t$  modélise cette stochasticité démographique. Sa variance  $2\gamma Z_t dt$  est proportionnelle à la taille de population renormalisée. Quand  $c = 0$ , nous obtenons l'équation de diffusion de Feller.

$$dZ_t = \sqrt{2\gamma Z_t} dB_t + (b - d)Z_t dt. \quad (9)$$

La preuve de cette convergence est de nouveau construite sur un argument de compacité-unicité. L'unicité de la solution de (8) est un corollaire des critères classiques sur les équations différentielles stochastiques en dimension 1 (cf. [16]). L'identification de la limite est plus délicate. Donnons-en une idée. Écrivons le générateur infinitésimal de  $(Z_{Kt}^K, t \in [0, T])$ , pour  $\phi$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned} \tilde{L}_K \phi(z) &= Kz^2 \left( \gamma + \frac{b}{K} \right) \left( \phi\left(z + \frac{1}{K}\right) - \phi(z) \right) \\ &+ Kz^2 \left( \gamma + \frac{d}{K} + \frac{c}{K}(Kz - 1) \right) \left( \phi\left(z - \frac{1}{K}\right) - \phi(z) \right) \\ &= \gamma z \phi''(z) + z(b - d - cz)\phi'(z) + O(1/K). \end{aligned}$$

Ce générateur converge (quand  $K$  tend vers l'infini) vers le générateur du processus de diffusion (8). Un théorème de représentation permet de construire un processus de tel générateur sur un espace de probabilité donné. Pour plus de détails, voir [1], preuve du Théorème 3.2.

Il est à noter que si  $c \neq 0$ , le processus  $(Z_t, t \geq 0)$  solution de (8) atteint son point absorbant 0 presque sûrement, quand  $t$  tend vers l'infini. En effet, il existe une formule explicite de  $\mathbb{P}(T_0 < +\infty)$  en fonction des coefficients du processus de diffusion (voir par exemple [11, Chap. VI, Théorème 3.2]) et cette probabilité vaut 1 quand  $c \neq 0$ .

## 2.4 – Comportement en temps long : importance des échelles de temps et de taille.

Nous allons ici nous limiter au cas du processus de naissance et mort logistique  $(N_t^K, t \geq 0)$  avec

$b > d$  et  $c = 1$  pour donner des résultats plus explicites. Nous avons deux schémas en tête : le processus de naissance et mort qui converge presque sûrement vers 0 quand le temps tend vers l'infini et l'approximation déterministe qui converge vers la limite finie non triviale  $z^* = b - d$ . En particulier, les limites en temps et en taille *ne commutent pas*. Les deux images sont cohérentes, mais cela dépend de l'échelle de temps sur laquelle on travaille. En fait, l'approximation déterministe est une approximation transitoire.

Pour le comprendre plus en détail, nous allons mettre en évidence une phase de quasi-stabilité de la taille de la population avant son extinction. La compréhension d'un tel palier de stabilité est obtenue en considérant la limite en temps long de la loi de la taille de la population conditionnellement à sa stricte positivité au temps d'observation. Remarquons tout d'abord que puisque  $T_0$  est fini presque sûrement, les événements aléatoires  $\{T_0 > t\}$  décroissent vers  $\emptyset$  quand  $t$  tend vers l'infini. Il a été montré par Van Doorn dans [20] que pour chaque  $K \in \mathbb{N}^*$  fixé, il existe une unique probabilité  $\nu^K$  sur  $\mathbb{N}^*$  telle que pour tous  $A \subset \mathbb{N}^*$ , et  $z > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_z(N_t^K \in A | T_0 > t) = \nu^K(A).$$

Cette probabilité est appelée *distribution quasi-stationnaire* pour le processus  $(N_t^K, t \geq 0)$  et vérifie pour tous  $A \subset \mathbb{N}^*$  et  $t > 0$

$$\nu^K(A) = \mathbb{P}_{\nu^K}(N_t^K \in A | T_0 > t) \text{ et } \mathbb{P}_{\nu^K}(T_0 > t) = e^{-\rho(K)t}.$$

La loi conditionnelle du processus issu de la distribution quasi-stationnaire est invariante et la loi de son temps d'extinction est alors exponentielle. Ces résultats sont obtenus à partir de l'étude spectrale du semi-groupe  $(Q_t^K)$  du processus tué en 0, défini par  $Q_t^K f(x) = \mathbb{E}_x(f(N_t^K); T_0 > t)$ , dont  $e^{-\rho(K)t}$  est la valeur propre maximale (simple) et  $\nu^K$  est construite à partir du premier vecteur propre à gauche, voir également [8], [17] ou [6] pour une approche plus générale.

Très récemment avec Collet et Chazottes, nous avons montré dans [7] que le processus reste un temps très long près de cet équilibre transitoire avant de s'éteindre. Nous obtenons un schéma presque complet des échelles de temps : l'échelle du temps moyen d'extinction, l'échelle de temps de la convergence vers la distribution quasi-stationnaire et l'échelle de temps durant laquelle le processus reste proche de l'équilibre rééchelonné  $[Kz^*]$  avec grande probabilité. On montre les résultats suivants.

**Théorème 4.** (i) La mesure  $\nu^K$  est proche (à  $O(1/K)$  près) d'une loi gaussienne d'espérance  $[Kz^*]$  et de variance  $Kb$ .

(i) On a  $\mathbb{P}_{\nu^K}(T_0 > t) = e^{-\rho(K)t}$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\nu^K}(T_0) &= \frac{1}{\rho(K)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{d}}{(b-d)^2\sqrt{K}} e^{K(b-d+d\ln(d/b))} \left(1 + O\left(\frac{(\ln K)^3}{\sqrt{K}}\right)\right). \end{aligned}$$

(ii) Considérons  $t$  tel que  $K\ln^2 K \ll t \ll 1/\rho(K)$ .

Au temps  $t$ ,  $N_t^K$  issu de  $n = O(K)$  est nul avec une probabilité proche de  $1 - \alpha_n(K)$  ou suit la loi  $\nu^K$  avec une probabilité proche de  $\alpha_n(K)$  et  $\alpha_n(K) = 1 - (d/b)^n + O(1)/K$ .

L'étude explicite des dépendances en le coefficient  $K$  est très technique. On montre que  $\rho(K) \approx a_1 \sqrt{K} e^{-a_2 K}$  pour des constantes  $a_1, a_2 > 0$  que l'on peut calculer et qu'il y a un trou spectral  $\rho_1(K) - \rho(K) \geq 1/\ln K$  pour le semi-groupe  $Q^K$ ,  $-\rho_1(K)$  étant la deuxième valeur propre du générateur associé à  $Q$ . En particulier on a  $\rho(K) \ll (\rho_1(K) - \rho(K))$ . La vitesse de convergence de la loi conditionnelle au temps  $t$  vers la distribution quasi-stationnaire est donnée par  $e^{-(\rho_1(K) - \rho(K))t}$ . Remarquons que des arguments de grandes déviations peuvent permettre de comprendre que le temps moyen d'extinction est de l'ordre de  $e^{CK}$ , pour  $C > 0$ .

**Remarque 1.** Cette étude des processus de naissance et mort est très instructive. Soulignons les faits suivants qui permettent d'avoir une idée assez claire de la situation.

(1) Le processus de naissance et mort logistique  $(N_t^K, t \geq 0)$  tend presque-sûrement vers 0, pour toute condition initiale finie  $O(K)$ .

(2) Les limites  $t \rightarrow \infty$  et  $K \rightarrow \infty$  ne commutent pas. En effet, si  $t \in [0, T]$ , la loi du processus renormalisé par  $1/K$  est approché par la solution d'une équation logistique possédant un unique équilibre  $z^* > 0$ .

(3) Si  $K\ln^2 K \ll t \ll 1/\rho(K)$ , la loi du processus au temps  $t$  peut être proche de sa distribution quasi-stationnaire, qui est proche d'une gaussienne centrée en  $[Kz^*]$ .

### 3. Évolution : modèles de diversification d'espèces

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié la dynamique d'une unique population où tous les individus sont considérés comme identiques et

montré différents points de vue de modélisation. Il est facilement imaginable de voir comment l'on peut de même modéliser un nombre fini de sous-populations caractérisées par des types d'individus différents, en intégrant potentiellement de l'interaction entre les individus. (Voir par exemple [16] ou [3]). Nous allons ici généraliser notre approche à un continuum de types. Cela est motivé par notre but ultime, à savoir proposer une classe de modèles, fondée sur les comportements individuels, qui permettent de comprendre les mécanismes de l'évolution darwinienne.

Darwin, dans son fameux ouvrage « *De l'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle, ou la Préservation des races favorisées dans la lutte pour la vie* », paru en 1859, révolutionne la biologie par sa théorie de l'évolution et de la sélection naturelle. En voici l'essence, extraite de son livre :

Comme il naît beaucoup plus d'individus de chaque espèce qu'il n'en peut survivre et que par conséquent il se produit souvent une lutte pour la vie, il s'ensuit que tout être qui varie, même légèrement, d'une façon qui lui est profitable, dans les conditions complexes et quelquefois variables de la vie, a une plus grande chance de survivre. Cet être est ainsi l'objet d'une sélection naturelle. En vertu du principe si puissant de l'hérédité, toute variété ainsi choisie aura tendance à se multiplier sous sa nouvelle forme modifiée.

Nous allons modéliser les différents mécanismes décrits par Darwin et faire émerger des phénomènes d'évolution, à travers l'apparition et la fixation successives de mutations favorables. Le fondement de cette approche consiste à intégrer la diversité individuelle dans le modèle de naissance et mort que nous avons présenté dans le paragraphe précédent. Nous supposons que chaque individu est caractérisé par un vecteur  $x \in \mathbb{R}^d$  qui résume de manière quantitative un type génétique ou phénotypique et qui affecte les taux démographique et d'interaction. Cela peut être par exemple la taille à la naissance, le niveau d'agressivité, l'aptitude à la prédation, l'âge de la maturité, ou l'ensemble de ces caractéristiques. Ce vecteur est classiquement appelé un *trait*.

L'espace des traits  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) et la population est décrite à chaque instant  $t$  par le nombre d'individus vivant au temps  $t$  et par les traits de ces individus.

À chaque instant, les traits des individus forment un vecteur de  $\mathbb{R}^{dN}$ , où  $N$  est la taille de la population. Mais cette taille change au rythme des naissances et des morts et le bon espace dans lequel faire vivre nos processus est l'ensemble des mesures positives  $M_F(\mathcal{X})$  sur  $\mathcal{X}$ . Soit  $\mathcal{M}$  le sous-ensemble de  $M_F(\mathcal{X})$  des mesures ponctuelles finies,  $\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, n \geq 0, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X} \right\}$ , où  $\delta_x$  est la masse de Dirac en  $x$ . Rappelons que pour toute fonction borélienne  $f$  sur  $\mathcal{X}$ , nous avons  $\int_{\mathcal{X}} f d\delta_x = f(x)$ .

La dynamique de la population est décrite par le processus de Markov  $(Y_t, t \geq 0)$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$  défini par

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{X_t^i}, \quad (10)$$

où la masse  $N_t$  de la mesure  $Y_t$  est le nombre d'individus vivant au temps  $t$  et les éléments du support  $X_t^1, \dots, X_t^{N_t}$  de  $Y_t$  sont les traits des individus (dans  $\mathcal{X}$ ) au temps  $t$ .

Le processus  $(Y_t, t \geq 0)$  est un processus de naissance et mort avec mutation et compétition, dont nous pouvons décrire les transitions. Un individu de trait  $x$  a un taux de reproduction  $b(x)$  et un taux de mort intrinsèque  $d(x)$ . La pression de compétition qu'un individu de trait  $y$  exerce sur un individu de trait  $x$  est décrite par le noyau de compétition  $C(x - y)$ . Ainsi, le taux de mort d'un individu de trait  $x$  dans la population  $\nu = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$  est donné par  $d(x) + \sum_{i=1}^N C(x - x_i) = d(x) + C * \nu(x)$ . Remarquons que les traits les plus favorables à un instant donné seront ceux qui maximisent le taux de croissance de la sous-population associée. Les traits sont a priori héréditaires par les descendants qui portent le même trait que leur parent. Toutefois, des mutations peuvent se produire dans la transmission génétique qui vont perturber cette hérédibilité. Nous allons supposer qu'une mutation peut se produire à chaque événement de reproduction d'un individu de trait  $x$  avec une probabilité  $p(x) \in ]0, 1[$ . Dans ce cas le descendant hérite d'un trait modifié  $x + h$ , où  $h$  est tiré suivant une loi  $m(x, h)dh$  (par exemple une loi normale centrée en 0).

Par une généralisation naturelle de ce que nous avons vu au chapitre précédent, nous pouvons introduire le générateur infinitésimal  $L$  du processus de Markov  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . Il est défini pour toute fonction  $\phi$

et toute mesure ponctuelle  $\nu \in \mathcal{M}$  par

$$\begin{aligned} L\phi(\nu) &= \sum_{i=1}^N b(x^i)(1 - p(x^i))(\phi(\nu + \delta_{x^i}) - \phi(\nu)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (d(x^i) + C * \nu(x^i))(\phi(\nu - \delta_{x^i}) - \phi(\nu)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N b(x^i)p(x^i) \int_{\mathcal{X}} (\phi(\nu + \delta_{x^i+h}) - \phi(\nu))m(x^i, h)dh. \end{aligned} \quad (11)$$

Le premier terme dans (11) capture l'effet des naissances sans mutation (à la naissance d'un individu de trait  $x^i$ , on ajoute une masse de Dirac  $\delta_{x^i}$ ), le second terme l'effet des morts (on retire une masse de Dirac  $\delta_{x^i}$  à la mort d'un individu de trait  $x^i$ ) et le dernier terme donne l'effet des naissances avec mutation.

Dans la Figure 1, cas (a–d), nous présentons différentes simulations (issues de [5]) d'un exemple introduit par Kisdi [14] : le trait  $x \in [0, 4]$  est un paramètre de taille,  $b(x) = 4 - x$ ,  $d \equiv 0$ ,  $C(x - y) = \frac{2}{K} \left( 1 - \frac{1}{1 + 1,2 \exp(-4(x-y))} \right)$  et  $m(x, h)dh$  est la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Initialement, il y a  $K$  individus de même trait 1, 2. La distribution des traits est représentée dans l'image supérieure et celle de la taille de la population dans l'image inférieure. Nous faisons croître  $K$  dans les figures (a–c). Le cas (d) correspond à  $K$  grand et petite probabilité de mutation. Dans les cas (e–f), nous supposons que les taux de reproduction et de mort dans la population  $\nu$  valent respectivement  $K^\eta + b(x)$  et  $K^\eta + d(x) + C * \nu(x)$ . La loi de reproduction est presque critique avec beaucoup de naissances et de morts quand  $K$  est grand mais nous supposons par ailleurs que la loi de mutation est une loi normale centrée de variance  $O(1/K^\eta)$  qui engendre de petits effets de mutation. Cas (e) :  $\eta = 0,5$  ; cas (f) :  $\eta = 1$ .

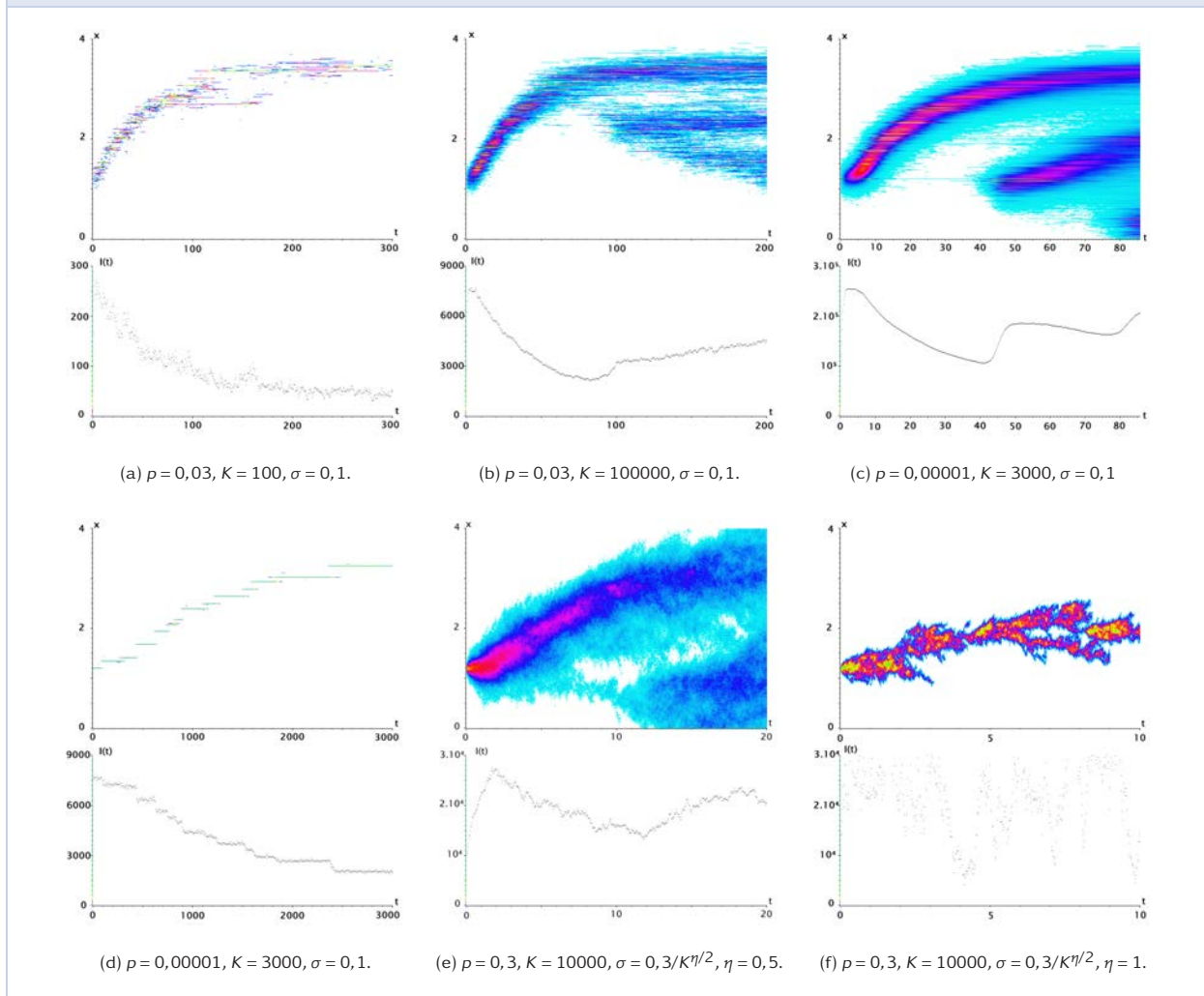
Nous observons des images extrêmement différentes qui sont soit de type déterministe, soit de type stochastique. Ce sont les rapports d'échelles des paramètres qui changent. Les 3 premières simulations illustrent la convergence du processus stochastique renormalisé par  $1/K$  vers l'équation intégral-différentielle avec non linéarité non locale

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= ((1 - p)b(x) - d(x) - C * u(t, x))u(t, x) \\ &\quad + \int b(y)u(t, y)m(y, x)dy, \end{aligned} \quad (12)$$

qui généralise au cas infini-dimensionnel l'équation différentielle ordinaire obtenue au Théorème 2.



FIGURE 1 – Simulations issues de Champagnat-Ferrière-Méléard [5]



Les simulations (e) et (f) (de la Figure 1) étudient un cas proche de la criticité. Elles peuvent être justifiées par la convergence du processus discret soit vers la solution d'une équation de réaction-diffusion (e), soit vers un processus stochastique à valeurs mesurées (f) qui généralise en dimension infinie l'équation différentielle stochastique obtenue au Théorème 3. Les preuves de ces convergences adaptent les preuves des théorèmes 2 et 3 aux processus à valeurs mesurées. Elles consistent en un argument de compacité, identification de la limite et unicité pour des topologies adaptées, qui sont valables sur un intervalle de temps fini  $[0, T]$  (voir [1]).

Sur les simulations, nous remarquons que la population se concentre sur quelques traits ou régions de l'espace des traits qui optimisent le taux de croissance et permettent de prédire l'évolution. Insistons sur le fait que ces objets limites présentent des

propriétés qualitatives très différentes même s'ils sont tous issus du même processus individuel avec une condition initiale concentrée sur un seul trait. Il est donc fondamental de réfléchir aux rapports d'échelle des paramètres dans le choix de modèle que l'on veut considérer.

## 4. Le cas des mutations rares

Nous allons nous concentrer sur la justification mathématique de la Figure 1 cas (d) qui est la plus étonnante. La simulation est obtenue pour une très petite probabilité de mutation et une longue échelle de temps. Le processus de saut qui en découle décrit en ce cas la succession des fixations de mutations favorables et représente l'apparition de paliers évolutifs.

Comme précédemment, nous introduisons un paramètre d'échelle  $K$  qui permet de décrire le rapport d'échelle des paramètres. Le processus de population  $(Y_t^K, t \geq 0)$  est paramétré par  $K$ , à travers sa condition initiale  $Y_0^K$ , la probabilité de mutation  $p_K$  et le noyau de compétition entre deux individus de traits respectifs  $x$  et  $y$ , qui vaut  $C(x-y)/K$ . Les paramètres démographiques  $b$  et  $d$  et le noyau  $C$  sont des fonctions continues sur  $\mathcal{X}$  et de plus,

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} (b(x) - d(x)) > 0; \quad \inf_{x, y \in \mathcal{X}} C(x - y) > 0. \quad (13)$$

Cette hypothèse nous dit que sans compétition, chaque sous-population de trait donné aurait un taux de croissance positif et devrait croître exponentiellement, mais sa taille est régulée par la compétition.

Nous supposons que  $\sup_K \frac{1}{K^3} \mathbb{E}(\langle Y_0^K, 1 \rangle^3) < +\infty$  et que, quand  $K$  tend vers l'infini,  $\frac{1}{K} Y_0^K$  converge en loi vers une mesure  $u_0(dx)$ . Nous supposons également que la probabilité de mutation  $p_K$  tend vers 0. On peut alors montrer en généralisant la preuve du Théorème 2 à la dimension infinie, que le processus  $(\frac{1}{K} Y_t^K, t \geq 0)$  converge en loi dans  $\mathcal{D}([0, T], M_f(\mathcal{X}))$  vers la solution unique de l'équation limite définie sur  $[0, T]$  par

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= (b(x) - d(x) - C * u(t, x))u(t, x); \\ u(0)(dx) &= u_0(dx). \end{aligned} \quad (14)$$

Remarquons que sur cette échelle de temps d'ordre 1, l'effet des mutations disparaît. Ainsi, pour pouvoir observer cet effet, il faut attendre beaucoup plus longtemps. Nous allons considérer le processus de population à l'échelle de temps des mutations, qui est d'ordre  $1/Kp_K$  puisque le taux global de mutations est d'ordre  $Kp_K$ .

Avant d'étudier ce processus, revenons à l'équation (14) dans le cas où la condition initiale  $u_0$  est une mesure de Dirac  $\delta_{x_0}$ . Comme il n'y a pas de mutation, toute solution de (14) aura pour support le seul point  $x_0$ . Ainsi l'équation se réduit à l'équation satisfaite par le nombre d'individus  $n_t(x_0)$ . Celui-ci satisfait à l'équation (6) avec  $b = b(x_0)$ ,  $d = d(x_0)$  et  $c = C(0)$ . Nous avons vu que l'unique équilibre stable de cette équation est  $\bar{n}_{x_0} = (b(x_0) - d(x_0))/C(0)$ .

Dans le cas où la condition initiale a pour support deux traits  $x$  et  $y$ , toute solution de (14) aura pour support les seuls points  $x$  et  $y$ . L'équation (14) se réduit alors aux deux équations satisfaites par les nombres d'individus  $n_t(x)$  et  $n_t(y)$  des sous-

populations de traits respectifs  $x$  et  $y$ . C'est un système de Lotka-Volterra compétitif

$$\begin{cases} \dot{n}_t(x) = n_t(x)(r(x) - C(0)n_t(x) - C(x-y)n_t(y)), \\ \dot{n}_t(y) = n_t(y)(r(y) - C(y-x)n_t(x) - C(0)n_t(y)) \end{cases} \quad (15)$$

où  $r = b - d$  est le taux de croissance. L'étude de ce système est bien connu et son état d'équilibre dépend du signe d'une fonction non symétrique et nulle sur la diagonale, appelée « fitness » d'invasion d'un trait  $y$  dans une population résidente de trait  $x$ , qui vaut

$$\begin{aligned} f(y; x) &= b(y) - d(y) - C(y-x)\bar{n}_x \\ &= b(y) - d(y) - C(y-x) \frac{b(x) - d(x)}{C(0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Remarquons que si  $C$  est constante, c'est la différence des taux de croissance des sous-populations de trait  $y$  et  $x$ . Nous savons que si  $f(x; y) > 0$  et  $f(y; x) < 0$ , le système converge vers l'équilibre monotone  $(\bar{n}_x, 0)$  alors que si  $f(x; y) < 0$  et  $f(y; x) > 0$ , le système converge vers  $(0, \bar{n}_y)$ . Si les deux valeurs de la fonction de fitness sont positives le système converge vers un équilibre non trivial, ce qui modélise la co-existence des deux traits dans la population.

Nous supposons que les paramètres du modèle satisfont à l'hypothèse dite « d'Invasion implique Fixation » (IIF) caractérisée par :

pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , pour presque tout  $y \in \mathcal{X}$ ,

$$f(y; x) < 0 \text{ ou } (f(y; x) > 0 \text{ et } f(x; y) < 0). \quad (17)$$

Sous cette hypothèse, nous ne pouvons pas avoir co-existence des deux traits et si des individus de trait  $y$  existent à la limite, il n'y a plus d'individus de trait  $x$ . On dit que *le trait  $y$  s'est fixé dans la population*.

Nous allons faire de plus une hypothèse de séparation d'échelles de temps. Pour toute constante  $V > 0$ , nous supposons que

$$\ln K \ll \frac{1}{Kp_K} \ll e^{VK}. \quad (18)$$

Cette hypothèse sera expliquée dans les idées de preuve du Théorème 5, dû à Champagnat [4].

**Théorème 5.** *Supposons que  $Y_0^K = N_0^K \delta_{x_0}$  soit tel que  $N_0^K/K$  converge en loi vers  $\bar{n}_{x_0}$  et que  $\sup_K \mathbb{E}((N_0^K/K)^3) < +\infty$ . Sous les hypothèses (13), (17) et (18), le processus  $(\frac{1}{K} Y_{t/Kp_K}^K, t \geq 0)$  converge en loi, au sens des marginales de dimension finie, vers le processus à valeurs mesures  $(V_t =$*

$\bar{n}_{X_t} \delta_{X_t}$ ,  $t \geq 0$ ), où  $(X_t, t \geq 0)$  est un processus à valeurs dans  $\mathcal{X}$ , constant par morceaux, issu de  $x_0$ , qui saute de  $x$  à  $x+h$ , pour  $h$  choisi suivant la distribution  $m(x, h)dh$ , au taux

$$b(x) \bar{n}_x \frac{[f(x+h;x)]_+}{b(x+h)}.$$

(Cette convergence signifie que pour tous temps  $0 < t_1 < \dots < t_p$ , le vecteur des valeurs du processus  $\frac{1}{K} Y_{t/Kp_K}^K$  en ces temps fixés converge vers le vecteur des coordonnées du processus limite pris sur ces même temps).

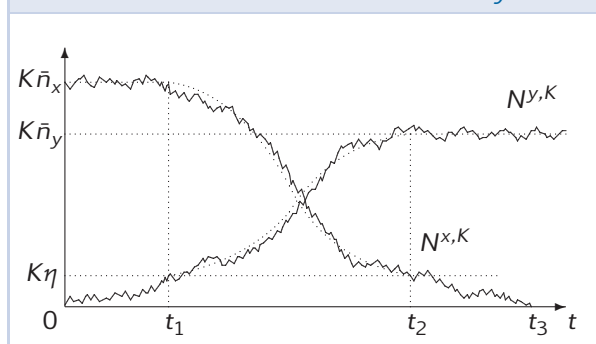
Le processus  $V_t$  a des trajectoires constantes par morceaux qui ne changent à chaque instant  $t$  qu'un seul trait. Il représente les invasions successives de mutations avantageuses au cours de l'évolution. Pour le voir, nous avons dû nous placer sur l'échelle de temps très longue des mutations rares  $t/Kp_K$ . Sa dynamique est résumée par les deux images de la simulation Figure 1 cas (d). La figure du haut montre la succession des valeurs de traits (les mutations avantageuses) et celle du bas les tailles de population correspondantes. Le processus  $(X_t, t \geq 0)$  décrit le support de  $(V_t, t \geq 0)$  à chaque instant  $t$ . Il a été introduit heuristiquement dans Metz et al. [18] et étudié rigoureusement dans [4]. Il est appelé « Trait Substitution Sequence ».

Donnons quelques éléments de preuve.

#### Probabilité et temps d'invasion et de fixation.

Comme étape intermédiaire, nous étudions le sort d'un individu nouvellement muté de trait  $y$  dans une population résidente monotype de trait  $x$ . Nous supposons que le trait  $y$  est avantageux, au sens où la fitness d'invasion  $f(y;x)$  définie dans (16) est strictement positive. La taille  $N^{x,K}$  de la population résidente de trait  $x$  est proche de son équilibre  $K\bar{n}_x$  (cela est justifié au paragraphe précédent). La Figure 2 (due à N. Champagnat) illustre l'invasion et la fixation d'un trait  $y$  dans une population de trait  $x$  proche de son équilibre. Les courbes oscillantes représentent les processus stochastiques et les courbes en pointillé qu'elles suivent sont données par le système dynamique.

FIGURE 2 – Invasion et fixation du trait  $y$



Pour quantifier la probabilité d'invasion et le temps de fixation du mutant, nous allons décomposer l'invasion-fixation du mutant  $y$  en plusieurs étapes, en introduisant de manière arbitraire un seuil  $\eta > 0$  qui va tendre vers 0. Durant la première phase (entre les temps 0 et  $t_1$  de la Figure 2),  $N^{y,K}$  est très petit par rapport à  $N^{x,K}$  et sa dynamique est très stochastique. Il peut être approché par un processus de naissance et mort linéaire issu d'un individu et de taux respectifs  $b(y)$  et  $d(y) + C(y-x)\bar{n}_x$ , au moins jusqu'à ce qu'il atteigne le seuil  $\eta K$  signifiant qu'il a atteint l'ordre  $K$ . Quand  $K$  tend vers l'infini, la probabilité pour  $N^{y,K}$  d'atteindre  $\eta K$  est approximativement égale à la probabilité de survie de ce processus. Nous avons vu précédemment (calcul faisant suite au Théorème 1) que celle-ci est donnée par

$$P(y;x) = \frac{f(y;x)}{b(y)} = \frac{b(y) - d(y) - C(y-x)\bar{n}_x}{b(y)}. \quad (19)$$

Il est par ailleurs connu (cf. par exemple [16, Chap. 5.4.4]) que pendant cette première phase, l'espérance de  $N^{y,K}$  au temps  $t$  vaut  $e^{f(y;x)t}$ . Ainsi le temps nécessaire à atteindre le seuil  $K\eta$  sera de l'ordre  $\ln K/f(y;x)$ . Quand  $N^{y,K}$  atteint le seuil  $K\eta$ , la seconde phase commence, pendant laquelle le processus  $(N^{x,K}, N^{y,K})$  est d'ordre  $K$  et reste proche du système dynamique (15) (à  $K$  près). La trajectoire déterministe atteint son équilibre  $(0, \bar{n}_y)$  en un temps d'ordre 1 puisque par (17),  $f(y;x) > 0$  entraîne  $f(x;y) < 0$ . Au bout d'un temps d'ordre 1, la taille  $N^{x,K}$  de la sous-population de trait  $x$  (qui suit  $n_x(t)$ ) atteint le seuil  $K\eta$  (au temps  $t_2$  de la Figure 2). La troisième phase commence alors et  $N^{x,K}$  peut être approché par un processus de naissance et mort linéaire de taux  $b(x)$  et  $d(x) + C(x-y)\bar{n}_y$ . Comme  $f(x;y) < 0$  par (17), ce processus est sous-critique et il atteint 0 presque-sûrement, après un temps moyen  $\mathbb{E}_{\eta K}[T_0] \simeq_{K \rightarrow \infty} \ln K/|f(x;y)|$  (cf. Proposition 1 ou [16, Chap. 5.5.3]). En sommant, nous

obtenons que le temps de fixation du mutant avantageux  $y$  dans la population résidente de trait  $x$  est d'ordre

$$T_{fix} = \ln K \left( \frac{1}{f(y;x)} + \frac{1}{|f(x;y)|} \right). \quad (20)$$

**Le processus de saut.** L'idée principale est la suivante : si les mutations sont rares, la sélection a le temps d'éliminer les traits délétères ou de fixer les traits avantageux avant qu'un nouveau mutant arrive. On peut alors combiner les résultats précédents. Par le principe de grandes déviations (cf. Freidlin-Wentzell [10]), le temps pour le processus renormalisé de quitter un voisinage de son équilibre déterministe est plus grand que  $\exp(VK)$ , pour tout  $V > 0$ , avec grande probabilité. Ainsi sous l'hypothèse (18) et si la population résidente est monotype de trait  $x$ , le premier mutant apparaîtra avec grande probabilité avant que le processus renormalisé ne quitte le voisinage de  $\bar{n}_x$ . Supposons que ce mutant soit de fitness (16) positive. Son temps de fixation est donné par (20) et du fait de  $\ln K \ll \frac{1}{K\rho_K}$  (hypothèse (18)), la phase de compétition, stabilisation de la population  $y$  et disparition de la population  $x$  aura lieu avant l'apparition d'une nouvelle mutation avec grande probabilité. En utilisant l'aspect markovien du processus, nous pourrions réitérer les arguments et obtenir de proche en proche les sauts successifs d'un mutant avantageux à l'autre. Tant que le processus renormalisé  $N^{x,K}/K$  reste proche de  $\bar{n}_x$ , le taux de mutation d'un individu de trait  $x$  est proche de  $\rho_K b(x) K \bar{n}_x$ . À l'échelle de temps  $\frac{t}{K\rho_K}$ , il vaudra approximativement  $b(x)\bar{n}_x$ . La probabilité de survie de la population mutante est donnée par (19). Nous obtenons ainsi le processus  $(V_t, t \geq 0)$  décrit dans l'énoncé du Théorème 5.

## 5. Généralisations possibles

Le modèle que nous avons présenté est très simple et les généralisations sont multiples, le but étant de se rapprocher de plus en plus de modèles réalistes. Nous allons en mentionner quelques-unes.

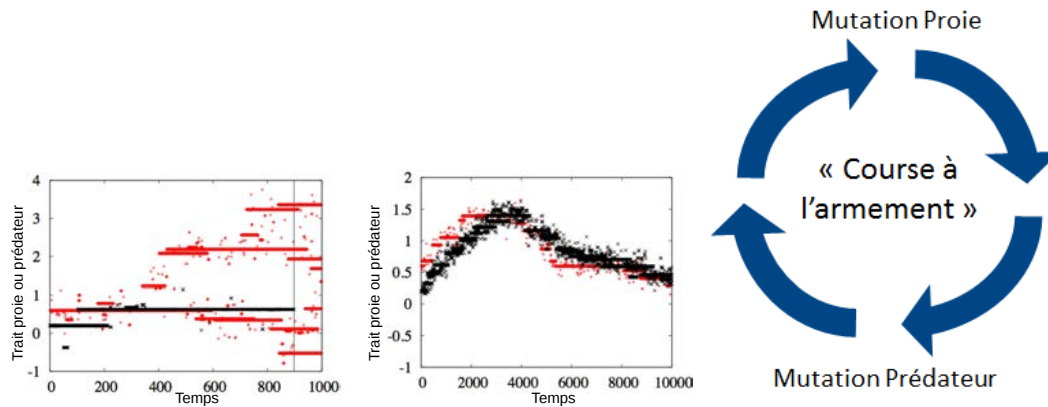
**Structure d'âge.** Nous avons supposé que les paramètres démographiques ne dépendent que du type génétique de l'individu. Mais il est souvent important de prendre en compte l'âge de l'individu et de modéliser l'effet de l'âge sur la dynamique (ralentissement de la reproduction, mort plus probable). Dans ce cas le processus n'est plus mar-

kovien car l'information s'accumule au cours du temps. (cf. Tran [19]).

**Structure spatiale.** Tous les résultats mentionnés précédemment concernent des populations sans structure spatiale. Cependant, à l'échelle d'une espèce entière les individus sont souvent organisés en communautés, reliées entre elles par des migrations. À défaut de sous-populations clairement identifiables, il peut être important de tenir compte du fait que deux individus éloignés ont tendance à interagir beaucoup moins que ne le font deux voisins. Le modèle précédent doit alors être modifié en conséquence et des outils mathématiques plus complexes sont nécessaires pour prendre en compte le caractère local de l'évolution. Dans [15], Leman introduit la structure spatiale et montre la co-adaptation en trait et en espace à travers l'évolution des lieux de vie des espèces considérées en même temps que l'évolution de leurs traits.

**Communautés.** Nous avons vu dans l'introduction que les écosystèmes sont des systèmes d'interactions complexes qui évoluent conjointement. Dans Costa et al. [9], nous étudions la co-évolution de la défense des proies et de la préférence des prédateurs et nous montrons que les prédateurs doivent s'adapter suffisamment vite à l'évolution des proies, faute de quoi ils disparaîtront. Dans la Figure 3, les traits de défense des proies sont en rouge et les traits de préférence des prédateurs sont en noir. Les prédateurs peuvent consommer des proies si leur trait de préférence coïncide avec celui des proies. Les deux images de gauche montrent des simulations dans une asymptotique de grande population et mutations rares (même type de figure que Figure 1 (d)), mais avec possibilité de co-existence de plusieurs espèces. Dans la figure de gauche, les prédateurs ne s'adaptent pas alors que les espèces de proies se diversifient, avec des types de défense que les prédateurs ne reconnaissent pas. La population de prédateurs ne trouvant plus de proies adaptées à sa préférence finit par disparaître. Dans la figure du milieu, l'évolution des prédateurs suit assez rapidement celle des proies et l'on observe une co-évolution de la communauté proie-prédateur. Cette co-évolution est une sorte de course à l'armement entre les espèces, plus connue sous le nom de théorie de la reine rouge, tirant son nom d'un épisode d'Alice au Pays des merveilles où Alice et la reine rouge se lancent dans une course effrénée pour rester à la même place. La figure de droite résume cette co-évolution.

FIGURE 3 – Exemples de co-évolution



Mentionnons pour finir une application dans le domaine de la santé concernant l'évolution phénotypique de certaines cellules tumorales. Sous l'effet de l'attaque de lymphocytes, les cellules s'adaptent en augmentant leur résistance aux attaques par

une diminution de leur visibilité ou une augmentation de la division cellulaire. Une immunothérapie efficace doit prendre en compte l'évolution des phénotypes.

## Références

- [1] V. BANSAYE et S. MÉLÉARD. « Stochastic models for structured populations ». *Mathematical Biosciences Institute Lecture Series. Springer edition* (2015).
- [2] P. BILLINGSLEY. *Convergence of probability measures*. Second. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, p. x+277.
- [3] P. CATTIAUX et S. MÉLÉARD. « Competitive or weak cooperative stochastic Lotka–Volterra systems conditioned on non-extinction ». *Journal of mathematical biology* **60**, n° 6 (2010), p. 797–829.
- [4] N. CHAMPAGNAT. « A microscopic interpretation for adaptive dynamics trait substitution sequence models ». *Stochastic processes and their applications* **116**, n° 8 (2006), p. 1127–1160.
- [5] N. CHAMPAGNAT, R. FERRIÈRE et S. MÉLÉARD. « Unifying evolutionary dynamics: from individual stochastic processes to macroscopic models ». *Theoretical population biology* **69**, n° 3 (2006), p. 297–321.
- [6] N. CHAMPAGNAT et D. VILLEMONTAIS. « Exponential convergence to quasi-stationary distribution and Q-process ». *Probability Theory and Related Fields* **164**, n° 1-2 (2016), p. 243–283.
- [7] J.-R. CHAZOTTES, P. COLLET et S. MÉLÉARD. « Sharp asymptotics for the quasi-stationary distribution of birth-and-death processes ». *Probability Theory and Related Fields* **164**, n° 1-2 (2016), p. 285–332.
- [8] P. COLLET, S. MARTINEZ et J. SAN MARTIN. « Quasi-stationary distributions: Markov chains, diffusions and dynamical systems ». *Probability and its Applications* (2013).
- [9] M. COSTA et al. « Stochastic eco-evolutionary model of a prey-predator community ». *Journal of mathematical biology* **72**, n° 3 (2016), p. 573–622.
- [10] M. I. FREIDLIN et A. D. WENTZELL. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer, 1984.
- [11] N. IKEDA et S. WATANABE. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Second. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989.
- [12] J. F. KINGMAN. « On the genealogy of large populations ». *Journal of Applied Probability* **19**, n° A (1982), p. 27–43.
- [13] J. F. C. KINGMAN. « The coalescent ». *Stochastic processes and their applications* **13**, n° 3 (1982), p. 235–248.
- [14] E. KISDI. « Evolutionary branching under asymmetric competition ». *Journal of Theoretical Biology* **197**, n° 2 (1999), p. 149–162.
- [15] H. LEMAN. « Convergence of an infinite dimensional stochastic process to a spatially structured trait substitution sequence ». *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations* **4**, n° 4 (2016), p. 791–826.

- [16] S. MÉLÉARD. *Modèles aléatoires en Ecologie et Evolution*. Springer, 2016.
- [17] S. MÉLÉARD, D. VILLEMONAIS et al. « Quasi-stationary distributions and population processes ». *Probability Surveys* **9** (2012), p. 340–410.
- [18] J. METZ et al. « Adaptive dynamics, a geometrical study of the consequences of nearly faithful reproduction ». *Stochastic and spatial structures of dynamical systems* (ed. SJ van Strien & SM Verduyn Lunel) (1996), p. 183–231.
- [19] V. C. TRAN. « Large population limit and time behaviour of a stochastic particle model describing an age-structured population ». *ESAIM: Probability and Statistics* **12** (2008), p. 345–386.
- [20] E. A. VAN DOORN. « Quasi-stationary distributions and convergence to quasi-stationarity of birth-death processes ». *Advances in Applied Probability* **23**, n° 4 (1991), p. 683–700.



Sylvie MÉLÉARD

École polytechnique

Sylvie Méléard est professeur de mathématiques appliquées. Son domaine principal de recherche concerne les processus stochastiques et leurs applications, en particulier à l'étude des sciences du vivant. Elle coordonne la chaire de formation et de recherche « Modélisation mathématique de la biodiversité » qui réunit de nombreux chercheurs mathématiciens et biologistes autour des problématiques d'écologie et évolution.

## Panoramas et Synthèses 8 (nouvelle impression)



Vol. 8 (nouvelle impression)

### Dynamique et géométrie complexes

D. CERVEAU, É. GHYS, N. SIBONY et J.-C. YOCOZ

(notes rédigées par M. FLEXOR)

ISBN 978-2-85629-078-1

2017 - 234 pages - Softcover. 17 x 24

Public: 26 € - Members: 18 €

La théorie des systèmes dynamiques holomorphes a connu un regain d'activité en particulier autour de l'étude fine des ensembles de Julia des polynômes ou des fractions rationnelles en une variable complexe. Parallèlement, des théories voisines se sont développées de manière importante pendant la même période, comme par exemple l'étude qualitative des équations différentielles dans le domaine complexe. La session « État de la recherche » qui s'est tenue en 1997 se proposait de faire le point sur ce genre de problèmes. Ce volume contient

la rédaction des conférences présentées lors de cette session, destinées aux étudiants ou aux mathématiciens non spécialistes. L'article de D. Cerveau décrit la structure des équations différentielles polynomiales dans le plan complexe en insistant sur l'analyse locale au voisinage des singularités. Le deuxième article, par É. Ghys, propose un survol de la théorie des laminations par surfaces de Riemann qui interviennent dans de nombreux problèmes de dynamique ou de géométrie. N. Sibony s'attache à décrire la généralisation de la théorie de Fatou et Julia aux applications polynomiales ou rationnelles en dimension complexe au moins 2. Enfin, la conférence de J.-C. Yoccoz, rédigée par M. Flexor, considère les polynômes de degré 2 en une variable complexe et se consacre en particulier aux propriétés hyperboliques de ces polynômes, autour du théorème de Jakobson.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris



# Structures de contact vrillées, d'après Borman-Eliashberg-Murphy

• S. COURTE

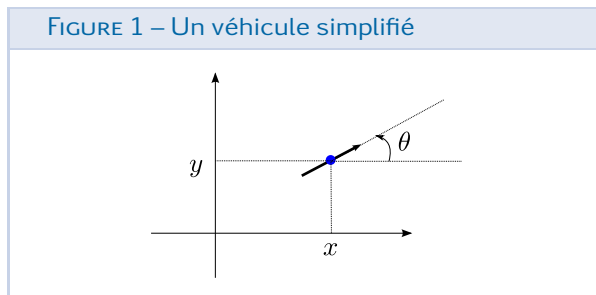
## 1. La géométrie de contact au quotidien

Je vais d'abord tenter de vous convaincre que vous êtes confrontés quotidiennement à la *géométrie de contact*. Considérons une mathématicienne au volant d'une voiture, ou si vous préférez, au guidon d'une bicyclette, qui se déplace. Vous observerez que, à tout instant, son vecteur vitesse est dans la direction de son véhicule. Si ce n'est pas le cas, elle est en train de déraper et l'histoire pourrait mal finir. Son mouvement est ainsi contraint : alors que l'espace des configurations du véhicule est de dimension trois (deux pour la position et un pour la direction), elle n'a que deux degrés de liberté (avancer et tourner les roues) pour se déplacer infinitésimalement (la modélisation serait meilleure avec un monocycle mais cela disqualifierait la plupart d'entre nous). Géométriquement, cela signifie que l'espace des configurations du véhicule est naturellement muni d'un *champ de plans*. L'exemple de champ de plans le plus facile à imaginer est celui constitué par les plans tangents à un feuilletage, c'est-à-dire une partition par des surfaces, localement comme  $\mathbb{R}^3 = \bigsqcup_{z \in \mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \times \{z\}$ . Si vous souhaitez vous déplacer dans  $\mathbb{R}^3$  avec la contrainte infinitésimale de se déplacer de façon tangente à ce champ de plans, vous resterez piégé dans une tranche  $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ . Ce n'est pas le cas de notre véhicule, on se convainc facilement que l'on peut visiter tout l'espace des configurations en se déplaçant depuis n'importe quel point en respectant cette contrainte. Je dirai même plus, n'importe quel chemin dans l'espace des configurations peut-être approché par une vraie trajectoire de véhicule. Autrement dit, on peut faire un créneau dans un espace arbitrairement petit si l'on s'y prend bien. On parle de *non-intégrabilité* pour désigner cette propriété géométrique particulière du champ de plans. Donnons maintenant quelques formules pour exprimer tout cela. Tout d'abord l'espace des configurations peut s'écrire :

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

où un point  $(x, y, \theta)$  représente le véhicule au point  $(x, y)$  et dans la direction faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale (voir figure 1).

FIGURE 1 – Un véhicule simplifié



Ensuite, un déplacement infinitésimal  $(\delta x, \delta y, \delta \theta)$  du véhicule au point  $(x, y, \theta)$  n'est pas un dérapage si et seulement si

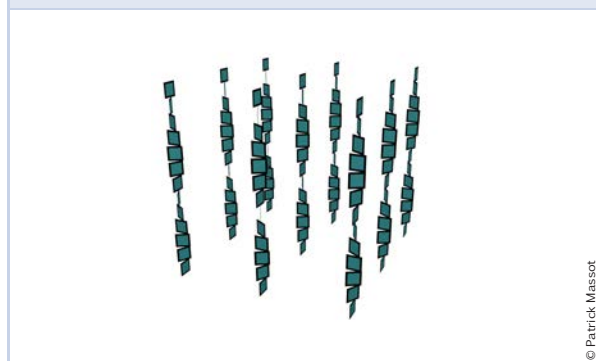
$$\sin(\theta)\delta x - \cos(\theta)\delta y = 0.$$

Avec le langage des formes différentielles, le champ de plans s'écrit donc

$$\xi = \ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy).$$

Observez que les plans tournent lorsqu'on fait varier  $\theta$  (voir figure 2).

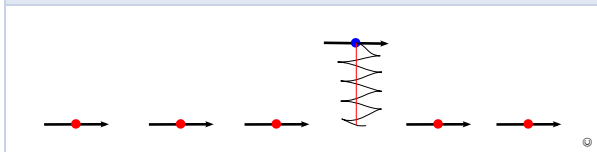
FIGURE 2 – Une structure de contact. Les plans tournent autour des droites verticales lorsque l'on fait varier  $\theta$



© Patrick Massot

Sur une variété de dimension trois quelconque appelons *structure de contact* tout champ de plans localement équivalent à celui ci-dessus. C'est justifié par un théorème de Darboux-Pfaff : un champ de plans *non-intégrable* (qui tourne infinitésimalement en chaque point) est localement isomorphe à ce modèle. À ce titre la *géométrie de contact* est radicalement différente de la géométrie riemannienne : il n'y a pas de notion de courbure (puisque c'est toujours localement la même chose). On ne peut pas non plus mesurer la distance entre deux points, il n'y a pas de notion de géodésique. Par contre, il y a une classe de courbes particulières, celles qui sont tangentes à  $\xi$  en chaque point ; on les appelle courbes *legendriennes*. C'est le cas d'une trajectoire du véhicule dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . En fait, on observe plutôt la projection dans le plan  $(x, y)$ , qui présente en général des points de rebroussement, indispensables pour un créneau réussi (voir figure 3).

FIGURE 3 – La voiture bleue se gare dans la file de voiture rouge. La trajectoire noire approche la trajectoire idéale rouge, c'est le créneau en théorie



La question qui nous occupe ici est une question que les mathématiciens aiment bien, celle de la classification : quelles variétés portent une structure de contact ? Combien à isomorphisme près ? Une avancée majeure sur ces questions a été réalisée par Borman, Eliashberg et Murphy dans l'article [2] publié dans le journal *Acta Mathematica* en 2015. Je vais tenter de vous en donner une idée dans la suite de ce texte.

## 2. En dimension supérieure

On savait déjà beaucoup de choses sur la classification des structures de contact en dimension trois. Malheureusement pour la simplicité de ce texte, le théorème de Borman-Eliashberg-Murphy traite le cas des dimensions supérieures. Un petit saut en abstraction permet de donner des exemples de structures de contact en dimension cinq, sept, ... (ça ne peut exister qu'en dimension impaire) dans le prolongement naturel de l'exemple de la section précédente. Pour cela, considérons une variété  $M$  de dimension  $n$  et l'ensemble  $ST^*M$  des hyperplans coorientés tangents à  $M$ . Un élément de  $ST^*M$

consiste alors en un point  $m \in M$ , un hyperplan  $H$  de l'espace tangent  $T_m M$  et une orientation de la droite quotient  $T_m M/H$ . Par dualité on peut aussi voir  $ST^*M$  comme l'ensemble des covecteurs tangents non nuls (le fibré cotangent privé de sa section nulle) modulo multiplication par un nombre réel strictement positif. L'espace  $ST^*M$  est une variété de dimension  $2n - 1$ , munie d'une projection  $\pi : ST^*M \rightarrow M$  dont les fibres sont des sphères de dimension  $n - 1$ . Par analogie avec l'exemple du paragraphe précédent, pensons à un hyperplan tangent comme un objet qui se déplace sur  $M$  avec la contrainte naturelle selon laquelle son vecteur vitesse appartient à lui-même à tout instant. Le champ d'hyperplans  $\xi$  sur  $ST^*M$  exprimant cette contrainte a donc pour équation

$$\xi = \ker(p \circ d\pi)$$

au point  $p \in ST^*M$ , interprété ici comme un covecteur. Dans le cas où  $M = \mathbb{R}^2$ , on retrouve l'espace des configurations du véhicule. Localement près d'un point de  $ST^*M$ , on peut trouver des coordonnées  $q_1, \dots, q_n, y_1, \dots, y_{n-1}$  telles que

$$\xi = \ker(dq_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i dq_i).$$

Une *structure de contact* sur une variété (de dimension impaire) est un champ d'hyperplans localement isomorphe à celui ci-dessus.

## 3. Le h-principe de Gromov

Le problème de construction et de classification à déformation près des structures de contact rentre dans un cadre très général formulé par Gromov. Voyons comment. Sur une variété  $V$  de dimension  $2n + 1$ , un champ d'hyperplans  $\xi$  donné localement comme le noyau d'une 1-forme différentielle  $\alpha$  est une structure de contact si et seulement si

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$$

en tout point de  $V$ . C'est la condition infinitésimale de non-intégrabilité. Dans des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_{2n+1})$ ,  $\alpha$  s'écrit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i dx_i$$



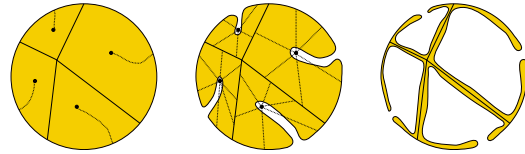
et la condition ci-dessus s'écrit

$$\sum_{k, i_1, j_1, \dots, i_n, j_n} \alpha_k \frac{\partial \alpha_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial \alpha_{i_n}}{\partial x_{j_n}} dx_k \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \wedge dx_{i_n} \neq 0.$$

Retenons simplement que c'est une condition ouverte sur les  $\alpha_i$  et leurs dérivées premières. Trouver une structure de contact  $\xi$  sur  $V$ , c'est donc résoudre un système d'inéquations aux dérivées partielles (non linéaires). Cela semble difficile en général mais dans un certain nombre de situations intéressantes, cela se réduit à un problème homotopique (pas nécessairement facile à résoudre mais que l'on peut confier à un collègue topologue algébriste) : dans ce cas on dit que le *h-principe* s'applique. Gromov ne s'est pas contenté de formuler ce principe, il a donné des méthodes pour en établir la validité dans de nombreuses situations. Les résultats de Gromov impliquent par exemple que le h-principe est valide dans le cas qui nous occupe pour les variétés *ouvertes*, c'est-à-dire dont aucune composante connexe n'est compacte sans bord. Ce n'est pas en observant longuement l'équation ci-dessus que l'on établit ce théorème puisqu'en fait la forme particulière de l'équation importe peu : il suffit que la condition soit ouverte et invariante par difféomorphisme (voir [13, 15]).

Voici une vague idée de démonstration s'appuyant sur le lemme d'approximation holonome dû à Eliashberg-Mishachev (voir le livre [10]). On commence par trianguler la variété  $V$ . La réunion des simplexes de dimension inférieure ou égale à  $2n$  constitue le squelette de codimension 1, notons-le  $\Sigma$ . Du fait que la variété  $V$  est ouverte, elle peut se rétracter continûment (par isotopie) sur un voisinage arbitrairement petit de  $\Sigma$ . Voyons pourquoi. D'une part, un simplexe privé de son centre se rétracte sur son bord simplement en suivant les rayons depuis le centre. D'autre part, on peut tracer dans  $V$  des chemins disjoints depuis les centres des simplexes de dimension  $2n+1$  jusqu'à l'infini (ou jusqu'au bord de  $V$ ) et rétracter  $V$  le long de ceux-ci pour envoyer  $V$  dans le complémentaire des centres de chaque simplexe de dimension  $2n+1$ . La figure 4 illustre ce procédé dans le cas où  $V$  est un disque muni d'une triangulation.

FIGURE 4 – Le procédé de rétraction sur un voisinage du squelette de codimension 1. En pointillés : les arcs disjoints joignant les centres des faces au bord (figure de gauche) et les rayons émanant du centre de chaque face (figure du milieu)



Ensuite, il s'agit de construire une structure de contact sur un voisinage de  $\Sigma$ . Remplaçons ici ce problème par un autre, plus simple à visualiser mais présentant les mêmes caractéristiques : des conditions ouvertes sur une fonction et ses dérivées premières. Pour tout  $\epsilon > 0$ , on cherche une fonction  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| < \epsilon, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < \epsilon \text{ et } |f(x, y) - x| < \epsilon.$$

Le théorème des accroissements finis nous empêche de trouver  $f$  quand  $\epsilon$  est trop petit, et ce même en restriction à  $[0, 1] \times \{0\}$  :

$$|f(1, 0) - f(0, 0)| \leq 1 \times \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \epsilon \text{ et}$$

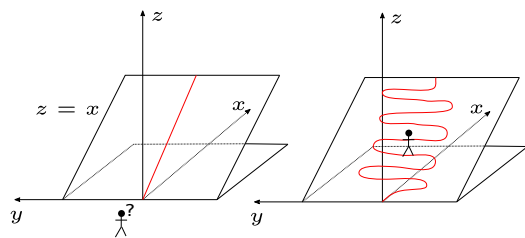
$$|f(1, 0) - f(0, 0)| \geq |1 - 0| - |f(1, 0) - 1| - |f(0, 0) - 0| > 1 - 2\epsilon.$$

Par contre, au voisinage par exemple du graphe de  $h_N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par

$$h_N(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sin(2\pi N x)$$

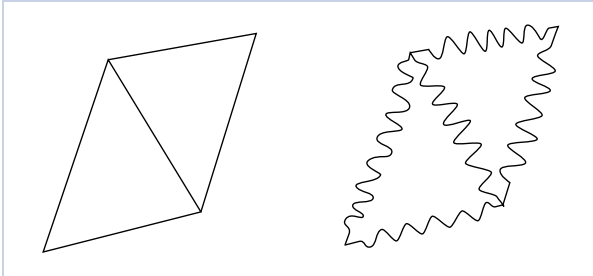
avec  $N$  entier assez grand, cela devient possible. Pour s'en convaincre, on peut penser au graphe  $\{z = x\}$  comme une montagne qu'un randonneur souhaite franchir doucement, c'est-à-dire par un chemin où la pente est toujours  $< \epsilon$  (voir figure 5).

FIGURE 5 – Le randonneur opte pour un chemin sinueux mais moins raide



Bien entendu la démonstration du lemme d'approximation holonome est plus difficile mais l'idée essentielle est là. Si l'on ne peut pas directement construire une structure de contact au voisinage de  $\Sigma$ , on pourra le faire après avoir fait osciller fortement  $\Sigma$  (par isotopie) dans la direction transverse (voir figure 6).

FIGURE 6 – Le squelette  $\Sigma$  avant et après l'oscillation



Enfin, on étend la structure de contact à  $V$  tout entier en tirant en arrière par une rétraction sur un voisinage de ce  $\Sigma$  oscillant; c'est ici qu'intervient l'invariance par difféomorphisme.

Attention, ceci n'implique pas que toute variété ouverte admet une structure de contact. Comme dit plus haut, le h-principe résout le problème à condition de savoir résoudre le problème homotopique sous-jacent. Ici il s'agit d'étudier les champs d'hyperplans munis de formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées ( $da|_{\xi}$  dans le cas d'une structure de contact  $\xi = \ker \alpha$ ). On appelle cela une structure *presque de contact*. Déterminer si une variété admet une structure presque de contact ou si deux structures presque de contact sont homotopes est un problème que l'on peut résoudre de façon systématique moyennant la connaissance du fibré tangent et de certains groupes d'homotopie. On verra un exemple plus loin, mais notons déjà qu'il existe des variétés sans structure presque de contact et nous ne pourrions donc rien faire pour elles.

Le h-principe est valide aussi dans une version à paramètres et donne ainsi l'unicité à déformation près de la structure de contact obtenue, voici un énoncé.

**Théorème 1 (Gromov 69).** *Sur une variété ouverte,*

1. *toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact;*
2. *deux structures de contact homotopes parmi les structures presque de contact sont homotopes parmi les structures de contact.*

## 4. Le théorème de Borman-Eliashberg-Murphy

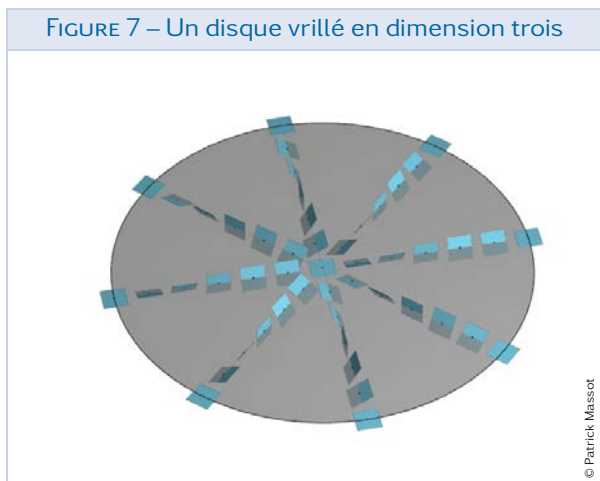
Le théorème de Gromov ci-dessus ne dit rien au sujet des variétés compactes sans bord. En fait, le deuxième point de l'énoncé ci-dessus est faux en général, et ce déjà sur la sphère  $S^5$ . Pour le voir commençons par demander à la collgue de topologie algébrique combien  $S^5$  admet de structures presque de contact à homotopie près. Elle nous répond « une seule, car le fibré tangent de  $S^5$  est stablement trivial et  $\pi_5(SO(6)/U(3)) = 0$  » et nous la remercions. Passons maintenant aux structures de contact authentiques. Il y en a une bien connue : considérons  $S^5$  comme la sphère unité de  $\mathbb{C}^3$ , dans chaque espace tangent à  $S^5$  se trouve un hyperplan canonique  $\xi$  qui est le sous-espace vectoriel complexe maximal. On peut vérifier par le calcul que c'est une structure de contact :  $\xi$  est le noyau de la forme différentielle  $\alpha = \sum x_i dy_i - y_i dx_i$  (en effet,  $\sum x_i dx_i + y_i dy_i = 0$  est une équation de l'espace tangent à  $S^5$  et on obtient  $-\alpha$  en composant cette forme différentielle par l'opérateur de multiplication par  $i$ ) et  $d\alpha = \sum dx_i \wedge dy_i$  vérifie  $d\alpha(v, iv) > 0$  pour tout  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  (en particulier,  $d\alpha|_{\xi}$  est non dégénérée). Cette dernière condition traduit la *pseudoconvexité* de la sphère et fournit au passage un exemple du lien important entre géométrie de contact et convexité holomorphe. Pour obtenir d'autres structures de contact, considérons  $S^5$ , suivant Brieskorn [4], comme l'intersection de la sphère unité avec une hypersurface singulière de  $\mathbb{C}^4$ . Explicitement, pour tout  $p \geq 2$ , l'ensemble

$$\{z_1^p + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0, |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1\} \subset S^7$$

est une sous-variété difféomorphe à  $S^5$ , et comme précédemment, le champ des tangences complexes est une structure de contact. On a ainsi, pour chaque  $p \geq 2$ , une structure de contact  $\xi_p$  sur  $S^5$ . Il se trouve qu'elles sont non isomorphes deux à deux. C'est un résultat hautement non trivial obtenu par Ustilovsky en 1999 (voir [18]) et qui fut l'un des premiers succès de l'*homologie de contact*, un invariant moderne introduit par Eliashberg, Givental et Hofer dans [9]. Le h-principe n'est donc pas valide pour les structures de contact sur les variétés compactes sans bord. Ceci fut établi en fait bien avant en dimension trois : Bennequin donna en 1983 des structures de contact non isomorphes sur  $S^3$  (voir [1]). Ce travail de Bennequin est d'ailleurs souvent considéré comme l'acte de naissance de la topologie de contact. En 1989, Eliashberg a établi

la validité du h-principe pour une classe de structures de contact en dimension trois. Une structure de contact  $\xi$  sur une variété de dimension trois est dite *vrillée* s'il existe un disque plongé  $D$  qui soit tangent à  $\xi$  en son centre et le long de son bord (voir figure 7).

FIGURE 7 – Un disque vrillé en dimension trois



© Patrick Massot

Eliashberg obtient dans [8] le résultat suivant.

**Théorème 2 (Eliashberg 1989).** *Sur une variété de dimension trois,*

1. toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact vrillée;
2. deux structures de contact vrillées et homotopes parmi les structures presque de contact sont homotopes parmi les structures de contact vrillées.

Il est assez remarquable que la simple présence du disque vrillé dans la variété rende la structure de contact flexible. Les structures de contact en dimension trois sont depuis lors classées en deux espèces : les structures vrillées et les autres, dites *tendues*. Ces dernières sont certainement plus mystérieuses du point de vue de la topologie de contact. Leur classification est plus difficile, elle ne se réduit pas à un problème homotopique. On parle de phénomènes de rigidité par opposition au monde flexible des structures vrillées. Comme évoqué précédemment, la classification est tout de même possible sur quelques variétés comme  $S^3$ ,  $T^3$  et les espaces lenticulaires par exemple, par des méthodes spécifiques à la dimension trois, développées par Giroux (voir [12, 14]). On dispose aussi d'une classification grossière permettant notamment de savoir dans certains cas si les structures de contact tendues sont en nombre fini ou infini (voir [7]).

L'étude des phénomènes de rigidité, notamment par la méthode des courbes holomorphes introduite par Gromov et utilisée par exemple dans le théorème d'Ustilovsky évoqué ci-dessus, a occupé la plupart des topologues de contact jusqu'à très récemment. L'éventualité que le théorème d'Eliashberg ci-dessus se généralise en dimension supérieure était bien sûr envisagé mais semblait hors d'atteinte. Une partie de la difficulté est de trouver la bonne définition de structure de contact vrillée en dimension supérieure. Plusieurs propositions avaient été faites auparavant notamment par Giroux et Niederkrüger avec des heuristiques convaincantes (voir [17]) mais sans pouvoir démontrer le théorème. On connaissait peu de choses sur la question même de l'existence des structures de contact. Par exemple, c'est seulement en 2002 que l'existence de structures de contact sur les tores de dimension impaire fut démontrée par Bourgeois (voir [3]).

C'est à partir de 2012 que la flexibilité en géométrie de contact regagne du terrain : Casals, Pancholi et Presas démontrent l'existence d'une structure de contact dans chaque classe d'homotopie de structure presque de contact sur toutes les variétés de dimension cinq (voir [6]). Borman, Eliashberg et Murphy réalisent ainsi une avancée majeure avec le théorème suivant.

**Théorème 3 (Borman-Eliashberg-Murphy 2015).** *Sur une variété,*

1. toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact vrillée;
2. deux structures de contact vrillées et homotopes parmi les structures presque de contact sont homotopes parmi les structures de contact vrillées.

La définition de structure de contact vrillée donnée par Borman, Eliashberg et Murphy est de la forme suivante : une structure de contact en dimension  $2n+1$  est vrillée s'il existe un plongement (lisse par morceaux) d'un disque de dimension  $2n$  au voisinage duquel la structure de contact se conforme à un modèle précis. Contrairement à la dimension trois, ce modèle précis est difficile à expliquer car il dépend de façon cruciale du schéma de la démonstration. Peu de temps après, Casals, Murphy et Presas ont montré dans [5] que cette définition est équivalente aux propositions faites auparavant par Niederkrüger et Giroux. On dispose donc maintenant de critères relativement simples pour assurer qu'une variété est vrillée.

## 5. Conclusion

Le point de départ de la démonstration du théorème est l'application du théorème de Gromov : sur le complémentaire d'une boule de la variété (c'est une variété ouverte!), il existe une structure de contact. Il s'agit ensuite d'étendre à la boule la structure de contact obtenue près de son bord. Je ne vais pas aborder la construction afin de garder le suspense intact (et aussi car cela me semble trop périlleux dans ce texte introductif).

Si vous voulez en savoir plus, je vous conseille la lecture (ou le visionnage) du séminaire Bourbaki de Patrick Massot [16], ou l'article original pour les plus téméraires. Signalons aussi le texte [11] d'Eliaşberg décrivant ce résultat et d'autres découvertes importantes du côté flexible de la géométrie symplectique et de contact.

Pour finir voici quelques perspectives connexes. Tout d'abord, pour compléter le tableau, il faudrait classifier les structures de contact tendues. Une classification complète n'est connue sur aucune variété de dimension  $\geq 5$ . Déjà sur  $S^5$ , cela semble difficile. On a vu plus haut une infinité d'entre elles et la liste n'est certainement pas exhaustive. Les méthodes de classification en dimension trois, re-

posant sur la théorie des surfaces convexes développées par Giroux, s'adaptent mal en grande dimension. Nous sommes donc encore loin d'une classification complète.

La question analogue en dimension paire est tout aussi intéressante : quelles variétés admettent une structure symplectique, c'est-à-dire une 2-forme fermée non dégénérée. Comme dans le cas contact, il y a une condition homotopique nécessaire : une variété symplectique admet en particulier une structure presque complexe. De plus, si  $V$  est une variété symplectique fermée de dimension  $2n$ , il existe une classe de cohomologie  $a \in H^2(V; \mathbb{R})$  (la classe de la forme symplectique) telle que  $a^n \neq 0 \in H^{2n}(V; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ . En dimension quatre, ces conditions ne suffisent pas toujours à l'existence d'une structure symplectique; c'est le cas par exemple pour la somme connexe de trois copies de  $\mathbb{C}P^2$  d'après les travaux de Taubes sur les invariants de Seiberg-Witten. Comme ces phénomènes sont très spécifiques à la dimension quatre on peut légitimement se poser la question suivante.

**Question.** Une variété de dimension  $2n \geq 6$  satisfaisant aux conditions ci-dessus admet-elle une structure symplectique ?

Aucun contre-exemple n'est connu à ce jour.

## Références

- [1] D. BENNEQUIN. « Entrelacements et équations de Pfaff ». In : *Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982)*. Vol. 107. Astérisque. Soc. Math. France, Paris, 1983, p. 87–161.
- [2] M. S. BORMAN, Y. ELIASHBERG et E. MURPHY. « Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions ». *Acta Mathematica* **215**, n° 2 (2015), p. 281–361.
- [3] F. BOURGEOIS. « Odd dimensional tori are contact manifolds ». *International Mathematics Research Notices* **2002**, n° 30 (2002), p. 1571–1574.
- [4] E. BRIESKORN. « Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten ». *Inventiones Mathematicae* **2** (1966), p. 1–14.
- [5] R. CASALS, E. MURPHY et F. PRESAS. « Geometric criteria for overtwistedness ». *arXiv:1503.06221* (2015).
- [6] R. CASALS, D. PANCHOLI et F. PRESAS. « Almost contact 5-folds are contact ». *Annals of Mathematics. Second Series* **182**, n° 2 (2015), p. 429–490.
- [7] V. COLIN, E. GIROUX et K. HONDA. « Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues ». *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques*, n° 109 (2009), p. 245–293.
- [8] Y. ELIASHBERG. « Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds ». *Inventiones Mathematicae* **98**, n° 3 (1989), p. 623–637.
- [9] Y. ELIASHBERG, A. GIVENTAL et H. HOFER. « Introduction to symplectic field theory ». *Geometric and Functional Analysis*, n° Special Volume, Part II (2000). GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), p. 560–673.
- [10] Y. ELIASHBERG et N. MISHACHEV. *Introduction to the h-principle*. **48**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [11] Y. ELIASHBERG. « Recent advances in symplectic flexibility ». *American Mathematical Society. Bulletin. New Series* **52**, n° 1 (2015), p. 1–26.
- [12] E. GIROUX. « Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces ». *Inventiones Mathematicae* **141**, n° 3 (2000), p. 615–689.

- [13] M. GROMOV. *Partial differential relations*. 9. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3). Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [14] K. HONDA. « On the classification of tight contact structures. I ». *Geometry and Topology* 4 (2000), p. 309–368.
- [15] F. LAUDENBACH. « De la transversalité de Thom au h-principe de Gromov ». In : *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui : présentées par Frédéric Bayart et Éric Charpentier*. Cassini. Vol. 4. Le Sel et le Fer. Paris, 2010.
- [16] P. MASSOT. « Flexibilité en géométrie de contact en grande dimension ». *Séminaire Bourbaki* (2017). URL : [http://www.bourbaki.ens.fr/seminaires/2017/Prog\\_mars17.html](http://www.bourbaki.ens.fr/seminaires/2017/Prog_mars17.html).
- [17] K. NIEDERKRÜGER. « The plastikstufe—a generalization of the overtwisted disk to higher dimensions ». *Algebraic & Geometric Topology* 6 (2006), p. 2473–2508.
- [18] I. USTILOVSKY. « Infinitely many contact structures on  $S^{4m+1}$  ». *International Mathematics Research Notices*, n° 14 (1999), p. 781–791.

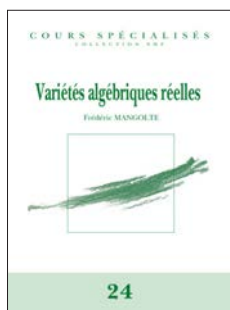


Sylvain COURTE

Sylvain Courte est maître de conférences à l'Institut Fourier de l'université Grenoble Alpes. Ses travaux portent sur la topologie symplectique et de contact.

L'auteur remercie Patrick Massot et Pierre Will pour leur relecture attentive.

## Cours spécialisés - nouveauté 2017



Vol. 24  
**Variétés algébriques réelles**  
 F. MANGOLTE

ISBN 978-2-85629-864-0  
 2017 - 484 pages - Hardcover. 17 x 24  
 Public: 70 € - Members: 49 €

Les variétés algébriques réelles sont omniprésentes. Ce sont les premiers objets rencontrés lors de l'apprentissage des coordonnées puis des équations. Pourtant l'étude systématique de ces objets, si élémentaires soient-ils, est redoutable. Ce livre s'adresse à deux types de publics : il s'agit tout autant d'accompagner le lecteur, muni du seul bagage d'algèbre et géométrie niveau master, dans l'apprentissage des bases de cette riche théorie que d'apporter au lecteur plus avancé de nombreux résultats fondamentaux souvent absents de la littérature disponible, le fameux « folklore ». En particulier, l'introduction pour les non-spécialistes des méthodes topologiques de la théorie constitue l'une des originalités de l'ouvrage. Les trois premiers chapitres présentent les bases et les méthodes classiques de la géométrie algébrique complexe et réelle. Les trois derniers chapitres se concentrent chacun sur un aspect plus spécifique des variétés algébriques réelles. Un panorama des connaissances classiques y est dressé ainsi que des développements majeurs de ces vingt dernières années en matière de topologie et géométrie des variétés de dimension deux et trois, sans oublier les courbes, sujet central du fameux XVI<sup>e</sup> problème de Hilbert. Des exercices de niveaux variés sont proposés et les solutions de bon nombre d'entre eux sont données à la fin de chaque chapitre.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris



# La théorie de Littlewood-Paley : fil conducteur de nombreux travaux en analyse non linéaire

• H. BAHOURI

*Images des Maths* en partenariat avec la *Gazette*, donne la parole à des lauréats des grands prix de l'Académie des Sciences. Deux textes sur le même sujet sont publiés par l'auteur, l'un ci-dessous, l'autre prochainement sur le site d'*Images des Maths*.

Le texte qui suit a pour vocation de présenter la théorie de Littlewood-Paley et d'illustrer l'efficacité de cet outil d'analyse microlocale dans l'étude des équations aux dérivées partielles dans un contexte le moins technique possible. Comme on le verra dans ce texte, la théorie de Littlewood-Paley fournit une approche robuste pour étudier séparément les différents régimes des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires, mais aussi pour étudier de manière fine les inégalités fonctionnelles et de les préciser.

## 1. La théorie de Littlewood-Paley : un outil devenu indispensable

La théorie de Littlewood-Paley est une procédure de localisation en fréquences qui depuis près de trois décennies s'est imposée comme un outil très puissant en analyse harmonique. Le premier objectif de ce texte est de présenter aussi simplement que possible<sup>1</sup> cette théorie dont l'idée de base est contenue dans deux inégalités fondamentales connues sous le nom d'inégalités de Bernstein et qui décrivent quelques propriétés des fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact.

La première inégalité dit que, pour une distribution tempérée<sup>2</sup> sur  $\mathbb{R}^d$  dont la transformée de Fourier est supportée dans une couronne de taille  $\lambda$ , dériver puis prendre la norme  $L^p$  revient à faire agir une homothétie de rapport  $\lambda$  sur la norme  $L^p$ . Cette propriété remarquable découle facilement dans le cadre  $L^2$  de l'action de la transformée de Fourier sur les dérivations et de la formule de Fourier-

Plancherel. La preuve du cas général  $L^p$  fait à la fois appel aux inégalités de Young et au fait que la transformée de Fourier échange le produit de convolution et le produit numérique des fonctions.

La seconde inégalité précise en outre que, pour une telle distribution, le passage de la norme  $L^p$  à la norme  $L^q$ ,  $q \geq p \geq 1$ , coûte  $\lambda^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$ , ce qui doit être compris comme une injection de Sobolev. Elle se démontre comme la première inégalité en invoquant les inégalités de Young et le comportement de la transformée de Fourier vis-à-vis du produit de convolution des fonctions.

L'analyse de Fourier est au cœur de la théorie de Littlewood-Paley qui a inspiré un grand nombre de mes travaux. C'est en conduisant ses expériences sur la propagation de la chaleur que Joseph Fourier à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle a ouvert la voie à cette théorie qui s'est renforcée au cours du XX<sup>e</sup> siècle et qui intervient dans la plupart des branches de la physique.

1. Pour une présentation plus détaillée de cette théorie, on renvoie le lecteur à la monographie [3].

2. Une distribution tempérée est un élément du dual topologique de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Dans cette théorie portant le nom de son inventeur, on effectue l'analyse en fréquences d'une fonction  $f$  de  $L^1(\mathbb{R}^d)$  par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Sous des conditions convenables,  $\widehat{f}$  la transformée de Fourier de  $f$  (notée également  $\mathcal{F}f$  dans ce texte) permet la synthèse de  $f$  par la formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Comme conséquence, on obtient l'identité de Fourier-Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

En effet, pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , on a en vertu du théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\widehat{f}(x)} dx &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \right) \overline{\widehat{f}(x)} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \right)} d\xi. \end{aligned}$$

Cette représentation a créé une véritable révolution dans la manière de penser une fonction. La donnée de  $\widehat{f}$  est exactement équivalente à celle de  $f$  et cette dualité entre analyse en amplitude (dans l'espace physique décrit par  $x$ ) et analyse en fréquence (dans l'espace des fréquences décrit par  $\xi$ ) est d'une grande importance en physique comme en mathématiques.

Un fait fondamental de la théorie des distributions est que la transformée de Fourier peut être prolongée à l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . Le point clef réside dans le fait que  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme bi-continu sur l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  (l'espace des fonctions régulières qui décroissent plus vite que n'importe quel polynôme) et cette extension sur  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  est définie par dualité<sup>3</sup>.

La transformation de Fourier a un grand nombre de propriétés que nous ne souhaitons pas énumérer ici. Rappelons simplement les deux principes de base de cette transformation qu'on ne peut pas

dissocier du produit de convolution. Le premier principe de la transformée de Fourier est que la régularité implique la décroissance, le second étant que la décroissance entraîne la régularité. L'utilité de ces propriétés qui jouent un rôle crucial dans l'étude de la transformée de Fourier sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  apparaîtra vite dans ce qui suit.

L'analyse de Fourier permet la résolution explicite des équations linéaires à coefficients constants<sup>4</sup>. En particulier, en alliant la transformation de Fourier et le produit de convolution, on peut déterminer explicitement les solutions de l'équation de Schrödinger qui est fondamentale en mécanique quantique

$$(S) \begin{cases} i \partial_t v + \Delta v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

En effet, en prenant la transformée de Fourier partielle de l'équation par rapport à la variable  $x$ , on obtient pour tout  $(t, \xi)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  :

$$\begin{cases} i \partial_t \widehat{v}(t, \xi) - |\xi|^2 \widehat{v}(t, \xi) = 0 \\ \widehat{v}(0, \xi) = \widehat{v}_0(\xi), \end{cases}$$

ce qui implique par intégration que

$$\widehat{v}(t, \xi) = e^{-it|\xi|^2} \widehat{v}_0(\xi).$$

En invoquant la formule de Fourier inverse et les propriétés de la transformée de Fourier vis-à-vis du produit de convolution, on déduit que la solution de (S) s'écrit pour  $t \neq 0$  sous la forme :

$$v(t, \cdot) = \frac{e^{i\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{d}{2}}} \star v_0.$$

Par l'inégalité de Young, il en découle la propriété fondamentale suivante dite de dispersion :

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{|4\pi t|^{\frac{d}{2}}} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Cette technique de représentation explicite des solutions s'adapte à toutes les équations d'évolution linéaires à coefficients constants. Cependant, ce n'est pas toujours aussi immédiat d'en déduire des effets de dispersion. En effet, établir par exemple des estimations dispersives pour l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^d$  nécessite des techniques plus élaborées comportant des intégrales oscillantes ce qui exige une hypothèse de localisation

3. Pour une présentation complète de la théorie des distributions, on peut par exemple consulter les références fondamentales [34, 36].

4. Les équations à coefficients variables et surtout les équations non linéaires requièrent d'autres méthodes.

spectrale dans une couronne des données de Cauchy.

L'analyse de la dispersion qui est un phénomène central en mécanique ondulatoire linéaire fournit un cadre redoutablement efficace pour la résolution et l'étude qualitative des équations aux dérivées partielles non linéaires dispersives. C'est grâce au travail remarquable de Robert Strichartz [37] vers la fin des années 1970 qu'on est parvenu à transcrire le phénomène de dispersion qui est une inégalité ponctuelle en inégalités robustes. La philosophie de ces estimations connues sous le nom d'estimations de Strichartz est de passer d'une estimation de décroissance ponctuelle en temps à un gain d'intégrabilité spatiale après moyenne en temps adéquate. Ces estimations de Strichartz qui ont connu un grand essor ces dernières décennies vont de pair avec la théorie de Littlewood-Paley : elles s'expriment aussi bien dans les espaces de Lebesgue que dans les espaces de Besov qu'on définira dans la suite.

La théorie de Littlewood-Paley fut introduite par John Edensor Littlewood et Raymond Paley ([29, 30]) dans les années 1930 pour l'analyse harmonique des espaces  $L^p$ , mais son utilisation systématique dans l'analyse des équations aux dérivées partielles est plutôt récente. En fait, la percée principale de cette théorie a été réalisée après le papier fondateur [12] de Jean-Michel Bony en 1981 sur le calcul paradifférentiel qui relie les fonctions non linéaires et la décomposition de Littlewood-Paley.

L'idée principale de cette théorie consiste à échantillonner les fréquences à l'aide d'un découpage de leur espace en couronnes de taille  $2^j$ , permettant ainsi de décomposer une fonction en une somme dénombrable de fonctions régulières dont la transformée de Fourier est supportée dans une couronne de taille  $2^j$  :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f, \tag{1}$$

où les  $\dot{\Delta}_j f$  appelés blocs dyadiques homogènes de  $f$  sont définis par le filtrage de  $f$  aux fréquences de l'ordre de  $2^j$ . Notons que cette décomposition dite de Littlewood-Paley homogène n'est vérifiée que modulo les polynômes  $P$ . En effet, comme la transformée de Fourier de tout polynôme est supportée à l'origine, l'identité (1) ne peut s'appliquer aux polynômes. Cette restriction sur les basses fré-

quences est levée dans le cas de la décomposition de Littlewood-Paley inhomogène :

$$f = \sum_{j \geq -1} \Delta_j f, \tag{2}$$

où  $\Delta_j f := \dot{\Delta}_j f$  pour  $j$  décrivant  $\mathbb{N}$  et  $\Delta_{-1} f$  est un opérateur filtrant les basses fréquences, c'est-à-dire qu'il ne conserve que les fréquences dans une boule centrée à l'origine.

Les décompositions de Littlewood-Paley (1)-(2) définies ci-dessus s'obtiennent par un échantillonnage de l'espace des fréquences grâce à des partitions de l'unité dyadiques. Plus précisément, étant donnée  $\chi$  une fonction radiale de  $\mathcal{D}(B(0, 4/3))$  identiquement égale à 1 dans  $B(0, 3/4)$ , nous avons les identités suivantes  $\chi + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j} \cdot) = 1$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j} \cdot) = 1$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , où l'on a posé  $\varphi(\xi) = \chi(\xi/2) - \chi(\xi)$ .

Avec cette normalisation, la fonction  $\varphi$  est une fonction radiale de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  où  $\mathcal{C}$  est la couronne centrée à l'origine de petit rayon  $3/4$  et de grand rayon  $8/3$  et l'on définit les blocs dyadiques homogènes  $\dot{\Delta}_j$  par  $\dot{\Delta}_j f := \varphi(2^{-j} D) f := \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j} \cdot) \mathcal{F} f) = 2^{jd} h(2^j \cdot) \star f$ , où  $h = \mathcal{F}^{-1} \varphi$  et les blocs dyadiques inhomogènes  $\Delta_j$  par  $\Delta_j f := \dot{\Delta}_j f = 2^{jd} h(2^j \cdot) \star f$  si  $j \geq 0$  et  $\Delta_{-1} f := \chi(D) f := \mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F} f) = \tilde{h} \star f$ , où  $\tilde{h} = \mathcal{F}^{-1} \chi$ . De la même manière, on introduit les opérateurs de troncature en basse fréquence :

$\dot{S}_j f := \sum_{k \leq j-1} \dot{\Delta}_k f := \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-j} \cdot) \mathcal{F} f) = 2^{jd} \tilde{h}(2^j \cdot) \star f$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $S_j f := \sum_{k \leq j-1} \Delta_k f = 2^{jd} \tilde{h}(2^j \cdot) \star f$  pour  $j \in \mathbb{N}$ .

Il est à noter que les blocs dyadiques qui sont des opérateurs de troncature en fréquences sont des opérateurs de convolution. Cette propriété qui découle trivialement du fait que la transformée de Fourier échange le produit de convolution et le produit numérique des fonctions joue un rôle central dans les techniques issues de la théorie de Littlewood-Paley. En particulier, tous ces opérateurs opèrent sur les espaces  $L^p$  de manière uniforme par rapport à  $p$  et  $j$ .

Il est également important pour la suite de souligner que les propriétés de support des fonctions  $\varphi$  et  $\chi$  entraînent des relations de quasi-orthogonalité pour la décomposition de Littlewood-Paley, notamment

$$\dot{\Delta}_j \dot{\Delta}_k = 0 \text{ et } \Delta_j \Delta_k = 0 \text{ si } |j - k| > 1,$$

5. Ici  $\mathcal{F}^{-1}$  désigne la transformée de Fourier inverse sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{F}(\varphi(2^{-j} D) f)(\xi) = \varphi(2^{-j} \xi) \widehat{f}(\xi)$  ce qui montre que  $\mathcal{F}(\dot{\Delta}_j f)$  est supportée dans la couronne  $2^j \mathcal{C}$ .



ce qui implique aisément que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \frac{1}{2} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{j \geq 0} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq 1 \text{ et} \quad (3)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \frac{1}{2} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi^2(2^{-j}\xi) \leq 1. \quad (4)$$

L'analyse de Littlewood-Paley permet de caractériser avec exactitude la régularité d'une fonction  $f$  en fonction des propriétés de décroissance de ses blocs dyadiques par rapport à l'indice de sommation  $j$ . On retrouve ainsi avec plus de précision l'idée, déjà présente dans l'analyse de Fourier, que la régularité se traduit par de la décroissance.

En particulier, en invoquant la formule de Fourier-Plancherel et les propriétés de quasi-orthogonalité (3)-(4), il est aisé d'observer que l'appartenance d'une fonction  $f$  à  $L^2(\mathbb{R}^d)$  se caractérise par l'appartenance de la suite  $(\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})_{j \in \mathbb{Z}}$  à  $\ell^2(\mathbb{Z})$  ainsi que pour ses blocs dyadiques inhomogènes. Plus précisément, on peut montrer à l'aide d'un lemme élémentaire d'analyse hilbertienne l'existence d'une constante  $C \geq 1$  telle que l'on ait

$$C^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

et

$$C^{-1} \sum_{j \geq -1} \|\Delta_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \sum_{j \geq -1} \|\Delta_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

De même, plusieurs normes classiques peuvent être écrites en fonction de la décomposition de Littlewood-Paley. C'est par exemple le cas des normes Sobolev ou Hölder, l'appartenance aux espaces de Sobolev (resp. Hölder) va se traduire notamment par des propriétés de décroissance en  $j$  de la norme  $L^2$  de  $\dot{\Delta}_j u$  ou  $\Delta_j u$  selon qu'il s'agisse des espaces homogènes ou inhomogènes (resp. de la norme  $L^\infty$ ).

Rappelons que les espaces de Sobolev inhomogènes  $H^s(\mathbb{R}^d)$  qui apparaissent naturellement dans un grand nombre de problèmes liés à la physique mathématique, sont, dans le cas où  $s = m$  est un entier naturel, le sous-espace des fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  dont toutes les dérivées (au sens des

distributions) d'ordre inférieur ou égal à  $m$  appartiennent à  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Il est alors clair, au vu de la quasi-orthogonalité de la décomposition de Littlewood-Paley et de l'action de la transformée de Fourier sur les dérivations, que l'appartenance d'une fonction  $f$  à  $H^m(\mathbb{R}^d)$  se caractérise comme suit :

$$\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} \sim \|(2^{jm} \|\Delta_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})_{j \geq -1}\|_{\ell^2}.$$

Une équivalence similaire a lieu pour les espaces de Sobolev homogènes  $\dot{H}^m(\mathbb{R}^d)$  qui sont plus adéquats dans les problèmes invariants par scaling tels que le système de Navier-Stokes incompressible<sup>6</sup> et diverses variantes de ce système en météorologie et océanographie ou les équations d'ondes non linéaires qu'on a traitées dans [1, 2, 7] et bien sûr diverses autres équations comme celles par exemple étudiées dans [25, 26].

De manière générale, dire qu'une fonction  $f$  appartient à  $H^s(\mathbb{R}^d)$  signifie en gros que  $f$  a  $s$  dérivées (fractionnelles lorsque  $s$  est non entier) dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et comme précédemment on peut montrer l'existence d'une constante  $C \geq 1$  telle que l'on ait

$$C^{-1} \sum_{j \geq -1} 2^{2js} \|\Delta_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \sum_{j \geq -1} 2^{2js} \|\Delta_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Cette heuristique s'applique également aux normes de Sobolev homogènes donnant lieu à la correspondance suivante dans le cadre de la théorie de Littlewood-Paley

$$C^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En examinant ces analyses, on voit qu'il y a trois paramètres qui rentrent en jeu : le paramètre de régularité  $s$ , l'exposant de la norme Lebesgue utilisé pour mesurer les blocs dyadiques  $\dot{\Delta}_j f$  ou  $\Delta_j f$  et le type de sommation effectué sur  $\mathbb{Z}$  ou pour  $j \geq -1$ . Cette observation permet plus généralement de caractériser de manière efficace les normes des espaces Besov homogènes  $\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{R}^d)$  ou inhomogènes  $B_{p,r}^s(\mathbb{R}^d)$ . Les normes de ces espaces qu'on peut définir par différence finie ou à l'aide du noyau de la

6. Rappelons que pour le système de Navier-Stokes homogène incompressible, la question de l'apparition éventuelle de singularités en temps fini fait partie des problèmes du Millenium proposés par le Clay Institute.

7. Notons que les espaces de Besov sont indépendants des blocs dyadiques  $\dot{\Delta}_j$  et  $\Delta_j$ .

chaleur (comme on peut le voir par exemple dans [3, 40]) s'expriment comme suit en fonction des décompositions de Littlewood-Paley<sup>7</sup> :

$$\|f\|_{B_{p,r}^s(\mathbb{R}^d)} \sim \left( \sum_{j \geq -1} 2^{rjs} \|\Delta_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

et

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s(\mathbb{R}^d)} \sim \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{rjs} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Bien qu'invariants par scaling, les espaces de Sobolev homogènes (et plus généralement les espaces de Besov homogènes) sont à manipuler avec précaution, puisque, comme il a été mentionné ci-dessus, la décomposition de Littlewood-Paley homogène (1) n'est vérifiée que modulo les polynômes. Il n'y a pas de consensus autour de la définition de ces espaces. Dans certaines références dont [11], ils sont définis modulo les polynômes de degré arbitraire. Dans d'autres références dont [3], ils sont définis moyennant une condition sur les basses fréquences. Cette condition exige de se restreindre aux distributions tempérées  $f$  vérifiant (au sens des distributions)

$$\|\dot{S}_j f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0.$$

Les décompositions dyadiques fournissent non seulement la possibilité de caractériser l'appartenance d'une fonction à la quasi-totalité des espaces classiques (Hölder, Sobolev, Besov, Lebesgue, Triebel-Lizorkin) par des conditions portant uniquement sur les blocs dyadiques de cette fonction mais aussi permettent de définir une pléthore d'espaces fonctionnels.

Les décompositions de Littlewood-Paley et plus simplement le découpage des fonctions en basses et hautes fréquences sont des techniques qui ont fait leur preuve dans l'étude des inégalités fonctionnelles et dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Les injections de Sobolev sont parmi les inégalités fonctionnelles les plus célèbres. Elles fournissent des outils clefs dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, que ce soit dans le cadre elliptique, parabolique ou hyperbolique. Les inégalités de Sobolev expriment une forte propriété d'intégrabilité ou de régularité pour une fonction  $f$  en termes de propriétés d'intégrabilité pour certaines dérivées de  $f$ .

Parmi ces inégalités, on peut mentionner les inégalités de Sobolev dans les espaces de Lebesgue :

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d), \quad (5)$$

avec  $0 \leq s < d/2$  et  $p = 2d/(d - 2s)$ .

Notons que l'indice  $p = 2d/(d - 2s)$  peut être deviné facilement grâce à un argument d'homogénéité. En effet, en désignant pour toute fonction  $v$  sur  $\mathbb{R}^d$  et tout  $\lambda > 0$ ,  $v_\lambda$  la fonction définie par  $v_\lambda(x) = v(\lambda x)$ , il est facile de vérifier que

$$\|v_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-\frac{d}{p}} \quad \text{et} \quad \|v_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{s-\frac{d}{2}} \|v\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Les deux quantités  $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$  et  $\|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$  ayant donc même homogénéité dans le cas où  $p = 2d/(d - 2s)$  (c'est-à-dire qu'elles se comportent de la même manière par changement d'unité de longueur), il est donc naturel de les comparer et l'on peut supposer dans la suite que  $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 1$ .

On sait que pour tout réel  $p \geq 1$  et toute fonction mesurable  $f$ , on a, en vertu du théorème de Fubini :

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|f| > \lambda/2) d\lambda.$$

Pour établir l'injection de Sobolev (5), on va décomposer  $f$  en basses et hautes fréquences en posant :

$$f = f_{\ell,A} + f_{h,A} \quad \text{avec} \quad f_{\ell,A} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)} \widehat{f}).$$

Comme le support de la transformée de Fourier de  $f_{\ell,A}$  est compact, la fonction  $f_{\ell,A}$  est bornée et plus précisément, on a, en alliant la formule d'inversion et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|f_{\ell,A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq (2\pi)^{-d} \|\widehat{f_{\ell,A}}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^s |\xi|^{-s} |\widehat{f_{\ell,A}}(\xi)| d\xi \\ &\leq C_s A^{\frac{d}{2}-s} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Or, l'inégalité triangulaire implique pour tout  $A > 0$

$$(|f| > \lambda) \subset (|f_{\ell,A}| > \lambda/2) \cup (|f_{h,A}| > \lambda/2).$$

Par conséquent, en choisissant

$$A = A_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \frac{\lambda}{4C_s} \right)^{\frac{2}{d}},$$

on déduit que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|f_{h,A_\lambda}| > \lambda/2) d\lambda.$$

Comme par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mu(|f_{h,A_\lambda}| > \lambda/2) \leq 4 \frac{\|f_{h,A_\lambda}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}{\lambda^2},$$

on obtient

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq 4p \int_0^\infty \lambda^{p-3} \|f_{h,A_\lambda}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\lambda.$$

Or, par l'identité de Fourier-Plancherel

$$\|f_{h,A_\lambda}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = (2\pi)^{-d} \int_{(|\xi| \geq A_\lambda)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

ce qui entraîne, en vertu du théorème de Fubini, que pour tout  $p > 2$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &\leq \frac{4p}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_0^{4C_s|\xi|^{\frac{d}{p}}} \lambda^{p-3} d\lambda \right) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq Cp \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

où  $C_p = (2\pi)^{-d} \frac{4p}{p-2} (4C_s)^{p-2}$ . Comme  $s = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ , ceci achève la preuve de l'injection de Sobolev.

La preuve présentée dans ce texte est empreinte à l'article [16]. On dispose d'autres preuves antérieures de cette estimation, notamment celle s'appuyant sur l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev et qui est par exemple détaillée dans [3]. Notons que les arguments de la preuve ci-dessus ont inspiré plusieurs autres travaux. Entre autres, on peut citer l'article [5] où les auteurs se sont intéressés aux injections de Sobolev dans les espaces de Lorentz  $L^{p,q}$ . Rappelons que les espaces de Lorentz<sup>8</sup> ont été introduits dans les années 1950 par Lorentz, de manière que  $L^{p,\infty}$  soit l'espace faible introduit par Marcinkiewicz dans les années 1930, et que  $L^{p,p}$  soit l'espace de Lebesgue habituel  $L^p$ .

Cette technique de découpage en basses et hautes fréquences a été également pertinente dans l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires, notamment pour établir que certains problèmes de Cauchy sont globalement bien posés. Parmi d'autres travaux, on peut citer l'article de Fujita-Kato [18] sur le système de Navier-Stokes. Dans ce type de démarche, la philosophie est de décomposer la donnée de Cauchy (supposée ici par souci de clarté dans un certain espace de Sobolev  $\dot{H}^s$ ) en basses et hautes fréquences de sorte que la partie relative aux hautes fréquences soit de norme assez petite dans  $\dot{H}^s$ . Si l'on dispose d'un théorème d'existence globale pour données petites, la partie relative aux hautes fréquences va donner lieu à une solution globale du problème et la partie

relative aux basses fréquences (qui va être régulière) va satisfaire à une équation modifiée. Après, tout l'enjeu consiste à montrer qu'on peut résoudre globalement cette équation perturbée.

L'injection de Sobolev (5) est invariante par translation et par scaling. Mais elle n'est pas invariante par oscillation, c'est-à-dire par multiplication par des fonctions oscillantes, notamment par multiplication par des fonctions de type  $u_\varepsilon(x) = e^{i\frac{\langle x, \omega \rangle}{\varepsilon}} \varphi(x)$ , où  $\omega$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^d$  et  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . En revisitant la preuve de l'injection de Sobolev exposée ci-dessus, on peut établir l'inégalité précisée suivante qui est due à Gérard-Meyer-Oru [20] :

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{(p-2)^{\frac{1}{p}}} \|u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{s-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}^{1-\frac{2}{p}} \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^{\frac{2}{p}}. \quad (6)$$

Cette inégalité de Sobolev précisée est optimale comme le montre l'exemple oscillant  $u_\varepsilon(x) = e^{i\frac{\langle x, \omega \rangle}{\varepsilon}} \varphi(x)$ . Plusieurs autres exemples illustrent l'optimalité de l'estimation (6), en particulier un exemple fractal supporté dans un ensemble de type Cantor construit dans [4] et l'exemple du chirp traité dans [5] et défini comme suit :

$$f(x) = x^{-\alpha} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \alpha > 0.$$

L'estimation précisée (6) fait partie des arguments clefs dans l'article [19] où Patrick Gérard a caractérisé le défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique (5) à l'aide des décompositions en profils<sup>9</sup>. Rappelons que l'étude du défaut de compacité des injections de Sobolev entre espaces fonctionnels, qui remonte aux travaux fondateurs de Pierre-Louis Lions ([27, 28]), répond à des problèmes géométriques et permet de comprendre le comportement des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. L'analyse non linéaire a considérablement progressé ces dernières décennies grâce aux décompositions en profils. Notons que ce type de décompositions a été généralisé par des approches différentes à d'autres cadres fonctionnels.

En particulier, on peut citer les récents travaux [8, 9] concernant la description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  où  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , appelé espace d'Orlicz, est l'espace des fonctions mesurables  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  pour

8. Pour plus de détails, on peut consulter [11, 40].

9. Les profils ont apparu dans un travail de Brézis-Coron [15].

lesquelles il existe un nombre réel  $\lambda > 0$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{\frac{|\omega(x)|^2}{\lambda^2}} - 1 \right) dx < \infty,$$

ainsi que leur généralisation aux dimensions supérieures dans [10]. Cette injection de Sobolev qui repose sur les inégalités de Trudinger-Moser<sup>10</sup> concerne le cas limite de l'injection de Sobolev (5) et intervient dans plusieurs problèmes géométriques et physiques, notamment dans la propagation des faisceaux laser dans différents milieux. L'étude de cette injection a été menée dans [10] par des arguments reposant sur l'analyse de Fourier qui mettent en évidence<sup>11</sup> le fait que les éléments responsables du défaut de compacité dans ce cadre, sont contrairement au cas de l'injection de Sobolev (5), étalés en fréquences.

Il est également à noter qu'une approche initiée par Stéphane Jaffard dans [23] a permis d'étendre le résultat de Patrick Gérard dans [19] au cadre des espaces de Triebel-Lizorkin et a inspiré l'analyse abstraite conduite dans [6]. Cette approche repose sur la théorie des ondelettes qui a été inspirée par la théorie de Littlewood-Paley et qu'on évoquera plus tard.

Comme il l'a été mentionné ci-dessus, la seconde inégalité de Bernstein doit être comprise comme une injection de Sobolev. En fait, il est aisé de déduire de cette seconde inégalité que pour tout nombre réel  $s$ , pour tous  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$  et  $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$ ,

$$\dot{B}_{p_1, r_1}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}_{p_2, r_2}^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}(\mathbb{R}^d), \quad (7)$$

et il en est de même dans le cadre inhomogène.

Notons que ces injections de Sobolev sont strictes comme l'illustre dans le cas particulier de l'injection de Sobolev  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}_{2, \infty}^s(\mathbb{R}^d)$ , l'exemple suivant qui repose sur l'idée des séries lacunaires. Étant donné une fonction  $\chi$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dont la transformée de Fourier est supportée dans une petite boule de centre 0 et de rayon  $\epsilon_0$  et un vecteur  $\omega$  de  $\mathbb{R}^d$  de norme euclidienne  $3/2$ , il s'agit de considérer la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$f_n(x) = \sqrt{n} \sum_{j \geq n} 2^{-js} \frac{1}{j+1} e^{i2^j(x|\omega)} \chi(x).$$

10. Pour une introduction aux espaces d'Orlicz, on peut consulter [35, 41].

11. moyennant une hypothèse de compacité.

Il est facile d'observer que

$$\begin{cases} \Delta_j f_n = 0 & \text{pour } j \leq n-1 \text{ et} \\ (\Delta_j f_n)(x) = \frac{\sqrt{n} 2^{-js}}{j+1} e^{i2^j(x|\omega)} \chi(x) & \text{pour } j \geq n. \end{cases}$$

Par un calcul élémentaire, il en découle que

$$\|f_n\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 \sim n \sum_{j \geq n} \frac{1}{(j+1)^2} \sim 1 \text{ et } \|f_n\|_{\dot{B}_{2, \infty}^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ce qui montre bien la stricte inclusion de  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$  dans  $\dot{B}_{2, \infty}^s(\mathbb{R}^d)$ .

Les techniques issues de la théorie de Littlewood-Paley permettent aussi d'analyser le produit (lorsqu'il existe) de deux distributions tempérées au moyen du calcul paradifférentiel de J.-M. Bony. La façon de les utiliser est la suivante. Étant données deux distributions tempérées  $u$  et  $v$ , on écrit

$$u = \sum_p \Delta_p u \text{ et } v = \sum_q \Delta_q v.$$

De manière formelle, le produit, lorsqu'il existe, va s'écrire

$$uv = \sum_{p, q} \Delta_p u \Delta_q v.$$

L'idée consiste à décomposer le produit  $uv$  en trois parties : la première relative aux termes où les fréquences de  $u$  sont grandes devant celles de  $v$ , la deuxième relative aux termes où les fréquences de  $v$  sont grandes devant celles de  $u$  et enfin la troisième relative aux termes où les fréquences de  $u$  et de  $v$  sont de taille comparable. Cela conduit à la définition suivante introduite pour la première fois par Jean-Michel Bony dans [12] : on écrit

$$\begin{aligned} uv &= T_u v + T_v u + R(u, v) \text{ avec} \\ T_u v &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{p \leq q-2} \Delta_p u \Delta_q v = \sum_q S_{q-1} u \Delta_q v \text{ et} \\ R(u, v) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|q-p| \leq 1} \Delta_q u \Delta_p v. \end{aligned}$$

Cette décomposition dite décomposition de Jean-Michel Bony est fondamentale dans l'étude des lois de produit ainsi que dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires. Bien sûr, elle admet une version homogène. Rappelons que l'opérateur bilinéaire  $T_u v$  est appelé paraproduct de  $v$  par  $u$  tandis que l'opérateur bilinéaire symétrique  $R(u, v)$  est appelé reste.

De l'étude précise de la façon dont le paraproduit et le reste opèrent dans les espaces de Sobolev, de Hölder et plus généralement dans les espaces de Besov vont se dégager quelques principes généraux facilement énonçables :

- le paraproduit est toujours défini pour deux distributions à support compact et la régularité de  $T_u v$  est principalement déterminée par celle de  $v$ ;
- le reste par contre n'est pas toujours défini, mais lorsqu'il l'est, les régularités de  $u$  et de  $v$  s'ajoutent pour déterminer la sienne.

Le calcul paradifférentiel de Jean-Michel Bony s'est avéré très efficace dans l'étude des équations d'évolution, lesquelles décrivent le comportement d'un phénomène physique dépendant du temps. On va illustrer la pertinence de ce calcul en présentant une méthode de découpage microlocale qu'on a introduite dans [1, 2] en collaboration avec Jean-Yves Chemin (voir aussi [38, 39]) pour étudier les équations d'ondes quasi-linéaires du type

$$(E) \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u - \partial(G(u)\partial u) & = Q(\nabla u, \nabla u) \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} & = (u_0, u_1) \end{cases}$$

avec

$$\partial(G\partial u) = \sum_{1 \leq j, k \leq d} \partial_j(G^{j,k}\partial_k u),$$

$G$  désignant une fonction  $C^\infty$ , nulle en 0, bornée ainsi que toutes ses dérivées de  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble des matrices symétriques sur  $\mathbb{R}^d$  prenant leurs valeurs dans un compact  $K$  tel que  $Id + K$  soit inclus dans le cône des matrices symétriques définies positives et  $Q$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^{1+d}$ .

La théorie classique des équations strictement hyperboliques<sup>12</sup> dit que l'on peut résoudre une telle équation pour des données initiales telles que  $(u_0, u_1)$  appartienne à l'espace  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d)$  pour  $s$  strictement supérieur à  $\frac{d}{2} + 1$ . Mais, il est important de penser aux invariances d'une telle équation par scaling. Il est immédiat de vérifier que, si  $u$  est solution de l'équation (E), alors la fonction  $u_\lambda$  définie par  $u_\lambda(t, x) = u(\lambda t, \lambda x)$  est aussi solution de (E). Une vaste série de travaux s'est attachée à résoudre des équations d'ondes non linéaires en essayant de descendre l'indice de régularité minimale des données initiales aussi bas que possible vers un espace de données initiales qui soit invariant par le changement de scaling ci-dessus, par exemple dans l'espace  $\dot{H}^{\frac{d}{2}}$ .

12. Consulter par exemple Chapitre 4 dans [3].

Le but ici est de résoudre l'équation (E) pour des données de Cauchy moins régulières que ce qu'imposent les méthodes d'énergie. Cette démarche s'inscrit dans le programme de Christodoulou-Klainerman de la relativité générale, qui comprend également des travaux de Klainerman, Bourgain, Tao et leurs écoles. Pour se rapprocher des espaces invariants par scaling pour la donnée initiale, il est évident qu'il faut utiliser les propriétés particulières de l'équation des ondes, à savoir les effets de dispersion évoqués ci-dessus. Ceci exige de démontrer des estimées de type Strichartz pour cette équation qu'on peut interpréter comme une équation d'ondes à coefficients variables et très peu réguliers. C'est l'alliance de l'optique géométrique et de l'analyse harmonique à travers le calcul paradifférentiel de Jean-Michel Bony qui permet d'établir ces estimées, d'améliorer l'indice de régularité minimale et de donner une réponse à une question restée longtemps ouverte.

Comme mentionné ci-dessus, les estimations de Strichartz s'obtiennent grâce à un phénomène dispersif couplé à un argument abstrait d'analyse fonctionnelle connu sous le nom de  $TT^*$  mis au point par Ginibre et Velo dans [21] et élargi à l'ensemble des indices admissibles par Keel et Tao dans [24]. Comme également souligné ci-dessus, ce phénomène dispersif s'obtient pour l'équation des ondes, dans le cadre de coefficients constants, par un argument de phase stationnaire sur une représentation explicite de la solution qu'on obtient par l'analyse de Fourier. Le cas des coefficients variables nécessite plus d'attention car on ne dispose pas de représentation explicite, et on a recours à des méthodes d'optique géométrique faisant intervenir des équations d'Hamilton-Jacobi et des équations de transport. Quand les coefficients sont peu réguliers, comme dans le cas quasi-linéaire par exemple, une telle approche ne peut fonctionner car l'équation de Hamilton-Jacobi développe des singularités. C'est la théorie de Littlewood-Paley qui permet de surmonter cette difficulté.

En fait, faire fonctionner une telle méthode dans ce cadre nécessite une régularisation des coefficients. Plus précisément, en utilisant le calcul paradifférentiel de Jean-Michel Bony, on se ramène à l'étude de la partie de la solution relative aux fréquences de taille  $2^j$ , qui satisfait à une équation d'ondes à coefficients réguliers. Par une méthode tout à fait classique, on construit une approximation microlocale de la solution de cette équation,

c'est-à-dire valable sur un intervalle de temps dont la taille dépend de la fréquence ce qui permet d'établir une estimation de Strichartz microlocale. En fait, il semble impossible de construire une approximation locale de la solution car l'équation de Hamilton-Jacobi associée développe des singularités à un instant lié à la taille de la fréquence : ceci est dû au fait que ces coefficients réguliers gardent en mémoire la régularité d'origine de la solution. L'estimation de Strichartz locale (avec perte bien sûr) est obtenue en décomposant l'intervalle  $[0, T]$  en intervalles où l'estimation de Strichartz microlocale est vérifiée.

Les applications de la théorie de Littlewood-Paley et plus particulièrement du calcul paradifférentiel sont très nombreuses et nous ne pouvons toutes les énumérer ici. Pour un éventail plus large de champs d'applications, que ce soit dans les inégalités fonctionnelles et leurs formes précisées ou dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires issues de la mécanique des fluides ou en lien avec la théorie des champs ou la relativité générale, on renvoie le lecteur à la monographie [3].

La théorie de Littlewood-Paley a inspiré les ondelettes qui ont été à l'origine de nombreuses avancées dans divers domaines appliqués tels que le traitement du signal et de l'image. On peut illustrer simplement la théorie des ondelettes en rappelant le système de Haar introduit au début du xx<sup>e</sup> siècle par Alfred Haar dans sa thèse. Ce système est défini par les fonctions

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

où l'ondelette génératrice

$$\psi = \chi_{[0, \frac{1}{2}[} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$$

est la fonction constante par morceaux qui vaut 1 sur  $[0, \frac{1}{2}[$  et  $-1$  sur  $[\frac{1}{2}, 1[$ . Ce système constitue une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  et donc il est immédiat que toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  se décompose comme suit :

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (8)$$

où  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  désigne le produit scalaire de  $f$  et  $\psi_{j,k}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Dans la décomposition en ondelettes (8), les blocs dyadiques homogènes  $\Delta_j f$  sont remplacés par les projections

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

13. Pour plus de détails, on peut consulter [17, 32, 33].

l'indice  $k$  apportant ainsi un niveau supplémentaire de discrétisation.

Le défaut principal du système de Haar est son manque de régularité puisque l'ondelette mère  $\psi$  n'est pas continue. D'autres bases d'ondelettes plus régulières ont été construites par la suite, permettant ainsi d'obtenir des décompositions en ondelettes similaires à (8), souvent tenant compte du scaling de l'espace en question.

Comme pour les décompositions de Littlewood-Paley, on peut caractériser l'appartenance d'une fonction à la quasi-totalité des espaces fonctionnels classiques par des conditions portant uniquement sur les modules des coefficients de cette fonction dans une base d'ondelettes inconditionnelle normalisée<sup>13</sup>.

Par exemple, dans l'espace de Besov  $\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)$   $1 \leq p < \infty$  et  $s < \frac{d}{p}$ , la décomposition en ondelettes d'une fonction prend la forme :

$$f = \sum_{\lambda \in \mathbb{V}} d_\lambda \psi_\lambda, \quad (9)$$

où  $\lambda = (j, k)$  contient l'indice d'échelle  $j = j(\lambda)$  et l'indice d'espace  $k = k(\lambda)$  et

$$\psi_\lambda = \psi_{j,k} = 2^{jr} \psi(2^j \cdot -k), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d,$$

où  $\psi$  est l'ondelette mère et  $r = \frac{d}{p} - s$ . L'analyse de la théorie des ondelettes permet de caractériser l'appartenance à l'espace de Besov  $\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)$  en termes des coefficients des fonctions dans la base d'ondelettes ci-dessus comme suit :

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)} \sim \|(d_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{V}}\|_{\ell^p}. \quad (10)$$

La possibilité de caractériser la régularité d'une fonction par la taille de ses coefficients d'ondelettes a permis de multiplier les applications de la théorie des ondelettes. En particulier, on peut traduire l'équivalence (10) par la décroissance des coefficients d'ondelettes à l'exception d'une minorité d'entre eux. Cette propriété de concentration de l'information sur un petit nombre de coefficients - souvent appelée parcimonie ou sparsity - joue un rôle crucial dans le traitement de l'image. Dans ce type de procédure par essence non linéaire, il est clair que l'ensemble des coefficients retenus varie selon la fonction que l'on approche. Une théorie générale connue sous le nom de théorie de l'approximation non linéaire a été initiée par Ronald

DeVore dans les années 1980 pour analyser ce phénomène.

Un premier résultat dans la théorie de l'approximation non linéaire consiste à représenter un élément par ses  $N$  coefficients les plus significatifs. Plus précisément, étant donné un élément  $f$  de  $\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)$  admettant la décomposition donnée par (9) dans la base d'ondelettes  $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{V}}$ , il s'agit de ne conserver que la projection non linéaire  $Q_N f$  définie par :

$$Q_N f = \sum_{\lambda \in E_N} d_\lambda \psi_\lambda,$$

où  $E_N = E_N(f)$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{V}$  de cardinal  $N$  correspondant aux  $N$  plus grands coefficients d'ondelettes  $|d_\lambda|$ .

Parmi les nombreuses applications du projecteur non linéaire  $Q_N f$ , on peut citer l'estimation suivante

$$\sup_{\|f\|_{\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)} \leq 1} \|f - Q_N f\|_{\dot{B}_{q,q}^t(\mathbb{R}^d)} \leq CN^{-\frac{s-t}{d}}, \quad (11)$$

qui a joué un rôle clef dans [6] dans l'étude du défaut de compacité de l'injection de Sobolev critique :

$$\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}_{q,q}^t(\mathbb{R}^d),$$

$$\text{avec } 0 < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{s-t}{d}.$$

En effet, étant donnée une fonction  $f$  dans  $\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)$ , on obtient en vertu de (10) et en utilisant  $(d_m)_{m>0}$  le réarrangement décroissant de  $|d_\lambda|$

$$\begin{aligned} \|f - Q_N f\|_{\dot{B}_{q,q}^t(\mathbb{R}^d)} &\sim \left( \sum_{\lambda \notin E_N} |d_\lambda|^q \right)^{1/q} = \left( \sum_{m>N} |d_m|^q \right)^{1/q} \\ &\leq |d_N|^{1-p/q} \left( \sum_{m>N} |d_m|^p \right)^{1/q} \\ &\leq \left( N^{-1} \sum_{m=1}^N |d_m|^p \right)^{1/p-1/q} \left( \sum_{m>N} |d_m|^p \right)^{1/q} \\ &\leq N^{-(1/p-1/q)} \left( \sum_{m>0} |d_m|^p \right)^{1/p} \\ &\leq N^{-\frac{s-t}{d}} \|(d_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{V}}\|_{\ell^p} \sim N^{-\frac{s-t}{d}} \|f\|_{\dot{B}_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Le succès de la théorie des ondelettes n'est plus à démontrer ni dans le traitement du signal et de l'image, ni dans le domaine de la simulation numérique des équations aux dérivées partielles. Pour un aperçu général des applications de cette théorie, on peut consulter la monographie [31] et les références qui s'y trouvent.

14. Voir par exemple [13, 14, 22].

La théorie de Littlewood-Paley est considérée comme l'outil d'analyse microlocale le plus simple. On peut voir l'analyse microlocale comme l'étude des fonctions par le découpage de l'espace des phases, c'est-à-dire l'espace des  $(x, \xi)$ . De manière générale, cette procédure consiste à localiser dans l'espace physique en  $x$  puis en variable de Fourier  $\xi$ , ce qui revient à localiser dans une boule pour une métrique de  $T^*\mathbb{R}^d$  (l'espace cotangent de  $\mathbb{R}^d$ ) : c'est le calcul de Weyl-Hörmander<sup>14</sup>. L'intérêt de ce type de procédure introduite dans les années 1970 est de permettre d'analyser des propriétés fines de fonctions définies dans l'espace physique en opérant l'analyse dans l'espace des phases où le nombre de variables a doublé. En particulier cela s'est avéré particulièrement utile dans l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires, par exemple pour prendre en compte certaines spécificités géométriques du cadre.

Tout l'enjeu du calcul de Weyl-Hörmander consiste à localiser dans l'espace des phases à l'aide de métriques raisonnables dites de Hörmander. À titre d'exemple, la procédure consistant à localiser en  $x$  sur une boule euclidienne de taille  $\alpha$ , puis en variable de Fourier dans une boule euclidienne de taille  $\alpha(1+|\xi_0|^2)^{\frac{1}{2}}$  revient à localiser dans une boule pour la métrique suivante dite la métrique  $(1,0)$  :

$$g_{(x,\xi)}(dx^2, d\xi^2) = dx^2 + \frac{d\xi^2}{1+|\xi|^2}.$$

Le calcul dit de Weyl-Hörmander qui a trouvé son formalisme actuel à la fin des années 1970 dans les travaux de L. Hörmander généralise cette métrique. Il consiste en fait à décrire les modes de découpage raisonnables de l'espace des phases. Ces découpages sont choisis en fonction de la nature et de la géométrie du problème à étudier. Les découpages admissibles sont ceux construits sur des métriques dites de Hörmander. Ces métriques sont des fonctions  $g$  de  $T^*\mathbb{R}^d$ , muni de sa structure symplectique standard, dans l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur  $T^*\mathbb{R}^d$  qui vérifient :

- une hypothèse dite de lenteur disant que la métrique varie peu sur ses propres boules et ce de manière uniforme ;
- une hypothèse dite du principe d'incertitude qui interdit de trop localiser. En particulier, le principe d'incertitude impose que le volume d'une  $g_x$  boule de rayon 1 soit supérieur ou

- égal au volume de la boule euclidienne de rayon 1 ;
- et enfin une hypothèse dite de tempérance qui exprime le fait que l'on peut estimer le rapport des métriques en des points quelconques par la métrique duale.

## Références

- [1] H. BAHOURI et J.-Y. CHEMIN. « Équations d'ondes quasilineaires et estimations de Strichartz ». *American Journal of Mathematics*, n° 121 (1999), p. 1337–1377.
- [2] H. BAHOURI et J.-Y. CHEMIN. « Microlocal analysis, bilinear estimates and cubic quasilinear wave equation ». *Astérisque, Bulletin de la Société Mathématique de France* (2003), p. 93–142.
- [3] H. BAHOURI, J.-Y. CHEMIN et R. DANCHIN. *Fourier analysis and applications to nonlinear partial differential equations*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 343. Springer Verlag, 2011.
- [4] H. BAHOURI, J.-Y. CHEMIN et I. GALLAGHER. « Refined Hardy inequalities ». *Annali della Scuola Normale di Pisa*, n° 59 (2006), p. 375–391.
- [5] H. BAHOURI et A. COHEN. « Refined Sobolev inequalities in Lorentz spaces ». *Journal of Fourier Analysis and Applications*, n° 17 (2011), p. 662–673.
- [6] H. BAHOURI, A. COHEN et G. KOCH. « A general wavelet-based profile decomposition in critical embedding of function spaces ». *Confluentes Mathematici*, n° 3 (2011), p. 387–411.
- [7] H. BAHOURI et P. GÉRARD. « High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations ». *American Journal of Math*, n° 121 (1999), p. 131–175.
- [8] H. BAHOURI, M. MAJDOUB et N. MASMOUDI. « Lack of compactness in the 2D critical Sobolev embedding ». *Journal of Functional Analysis*, n° 260 (2011), p. 208–252.
- [9] H. BAHOURI, M. MAJDOUB et N. MASMOUDI. « Lack of compactness in the 2D critical Sobolev embedding, the general case ». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, n° 101 (2014), p. 415–457.
- [10] H. BAHOURI et G. PRELMAN. « A Fourier approach to the profile decomposition in Orlicz spaces ». *Mathematical Research Letters*, n° 21 (2014), p. 33–54.
- [11] J. BERGH et J. LÖFSTRÖM. *Interpolation Spaces, an Introduction*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [12] J.-M. BONY. « Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ». *Annales de l'École normale supérieure*, n° 14 (1981), p. 209–246.
- [13] J.-M. BONY et J.-Y. CHEMIN. « Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander ». *Bulletin de la Société Mathématique de France*, n° 122 (1994), p. 77–118.
- [14] J.-M. BONY et N. LERNER. « Quantification asymptotique et microlocalisation d'ordre supérieur ». *Annales de l'École normale supérieure*, n° 22 (1989), p. 377–433.
- [15] H. BRÉZIS et J.-M. CORON. « Convergence of solutions of H-Systems or how to blow bubbles ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, n° 89 (1985), p. 21–86.
- [16] J.-Y. CHEMIN et C.-J. XU. « Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et systèmes sous-elliptiques ». *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure*, n° 30 (1997), p. 719–751.
- [17] A. COHEN. « Sur la route des ondelettes ». *Gazette des Mathématiciens*, n° 130 (2011), p. 19–36.
- [18] H. FUJITA et T. KATO. « On the Navier-Stokes initial value problem ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, n° 16 (1964), p. 269–315.
- [19] P. GÉRARD. « Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev ». *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, n° 3 (1998), p. 213–233.
- [20] P. GÉRARD, Y. MEYER et F. ORU. « Inégalités de Sobolev précisées ». *Séminaire X-EDP, École polytechnique* (1996).
- [21] J. GINIBRE et G. VELO. « Generalized Strichartz inequalities for the wave equations ». *Journal of Functional Analysis*, n° 133 (1995), p. 50–68.
- [22] H. HÖRMANDER. *The analysis of linear partial differential equations*, 3. Springer Verlag, 1985.
- [23] S. JAFFARD. « Analysis of the lack of compactness in the critical Sobolev embeddings ». *Journal of Functional Analysis*, n° 161 (1999), p. 384–396.
- [24] M. KEEL et T. TAO. « Endpoint Strichartz estimates ». *American Journal of Mathematics*, n° 120 (1998), p. 955–980.
- [25] C.-E. KENIG et F. MERLE. « Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy critical focusing non-linear wave equation ». *Acta Mathematica*, n° 201 (2008), p. 147–212.
- [26] S. KLAINERMAN et I. RODNIANSKI. « Rough solutions of the Einstein-vacuum equations ». *Annals of Mathematics*, n° 161 (2005), p. 1143–1193.



- [27] P.-L. LIONS. « The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. » *Revista Matemática Iberoamericana*, n° 1 (1985), p. 145–201.
- [28] P.-L. LIONS. « The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. » *Revista Matemática Iberoamericana*, n° 1 (1985), p. 45–121.
- [29] J. LITTLEWOOD et R. PALEY. « Theorems on Fourier series and power series I ». *Journal of the London Mathematical Society*, n° 6 (1931), p. 230–233.
- [30] J. LITTLEWOOD et R. PALEY. « Theorems on Fourier series and power series II ». *Proceedings of the London Mathematical Society*, n° 42 (1936), p. 52–89.
- [31] S. MALLAT. *A wavelet tour of image processing : the sparse way*. Sous la dir. d'A. PRESS. 2008.
- [32] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs. I*. Hermann, 1980.
- [33] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs. II*. Hermann, 1980.
- [34] W. RUDIN. *Fourier analysis on groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 12. New York–London, 20.
- [35] B. RUF. « A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in  $\mathbb{R}^2$  ». *Journal of Functional Analysis*, n° 219 (2005), p. 340–367.
- [36] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*. Hermann, 1966.
- [37] R. STRICHARTZ. « Restriction Fourier transform of quadratic surfaces and decay of solutions of the wave equations ». *Duke Mathematical Journal*, n° 44 (1977), p. 705–714.
- [38] D. TATARU. « Strichartz estimates for operators with non smooth coefficients and the non-linear wave equation ». *American Journal of Mathematics*, n° 122 (2000), p. 349–376.
- [39] D. TATARU. « Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with non smooth coefficients II ». *American Journal of Mathematics*, n° 123 (2000), p. 385–423.
- [40] H. TRIEBEL. *Theory of function spaces*. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [41] N. TRUDINGER. « On imbedding into Orlicz spaces and some applications ». *Journal of Mathematics and Mechanics*, n° 17 (1967), p. 473–484.



**Hajer BAHOURI**

Université Paris-Est Créteil

Hajer Bahouri est directrice de recherches au CNRS à l'université Paris-Est Créteil. Ses recherches portent sur l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment les équations d'évolution, lesquelles décrivent le comportement d'un phénomène physique dépendant du temps. Pour les étudier, elle a utilisé et développé de nombreuses techniques d'analyse harmonique. Ses travaux ont été plusieurs fois salués par la communauté et en particulier en 2016 avec l'obtention du prix Paul Doistau-Émile Blutet de l'Académie des Sciences.



## Esthétopies

une exposition sur les variétés d'espaces sensibles

• P. BERGER

**Percevoir un espace.** Un mathématicien souhaite définir les espaces qu'il rencontre et décrire leurs propriétés. Un musicien sera sensible aux sonorités d'un espace, au son émis quand on le touche ou quand on y parle. D'autres aimeront le dessiner, photographier la lumière qui y circule, ou encore filmer ses métamorphoses.

**Aimer un espace.** Un espace vit s'il est visité. Il peut l'être pour son utilité; mais aussi pour sa beauté et ses mystères. Il peut être parcouru pour sa fertilité : une entrée vers d'autres espaces, d'autres curiosités. Aimé pour être sauvage et omniprésent, ou classique et bouleversant... La découverte d'un nouvel espace peut être dérangement.

**Avant propos.** Ce texte donne d'abord un aperçu des pièces présentées lors de l'exposition Esthétopies à l'IHP, du 8 mars 2017 au 17 juillet 2017, effectuées dans le cadre de collaborations avec Pierre-Yves Fave, Sergio Krakowski, Vincent Martial et Jimena Royo-Letelier. Le parti-pris est de présenter des espaces séduisants et mystérieux. Enfin nous parlerons brièvement des recherches effectuées pour résoudre certains problèmes ouverts laissés ouverts par l'école de Thurston au Geometry Center (années 1990). Enfin nous discuterons de la réception de cette exposition et de celles qui l'ont précédées.

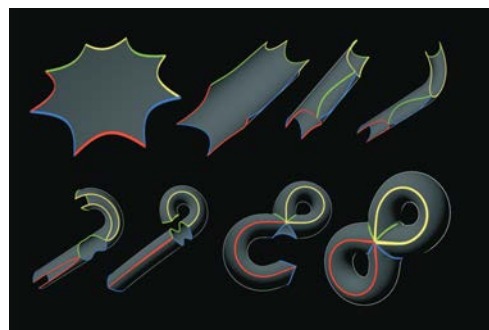
### Pièces exposées

L'exposition Esthétopies propose un parcours immersif, un ensemble d'installations sonores et visuelles offrant des explorations sensibles dans des espaces mathématiques encore incompris.

### Courtes vidéos

Deux courtes vidéos présentent une iconographie du concept de variété.

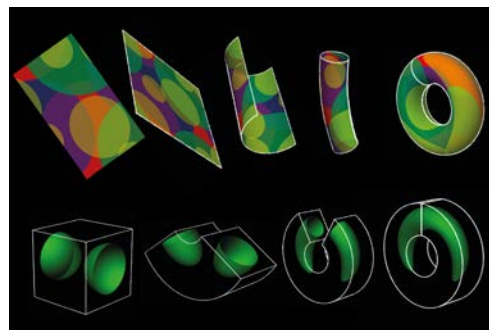
D'abord des exemples de constructions de surfaces obtenues en recollant les côtés d'un polygone, et d'espaces en recollant les faces d'un polyèdre.



Construction d'une surface hyperbolique.

Puis un court film accompagne la définition mathématique de variété (fermée).

Une *surface* est un espace fermé dont les points sont entourés par des disques. Une surface est une *variété de dimension 2*.



Une *variété de dimension 3* est un espace fermé dont les points sont entourés par des boules.

## Sélection de modèles mathématiques

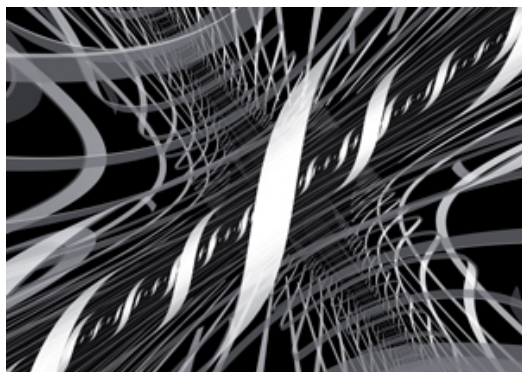
L'exposition à l'IHP a pu profiter de sa collection exceptionnelle de modèles mathématiques du XIX<sup>e</sup> et du XX<sup>e</sup> siècle. Les objets choisis représentent des surfaces pouvant être munies d'une géométrie sphérique (à gauche), plane (au centre), ou hyperbolique (à droite).



## Paysages dans les géométries de Thurston

Thurston proposait de regarder les variétés de dimension 3 en se plaçant à l'intérieur; on peut alors prendre des photographies (voir encadré).

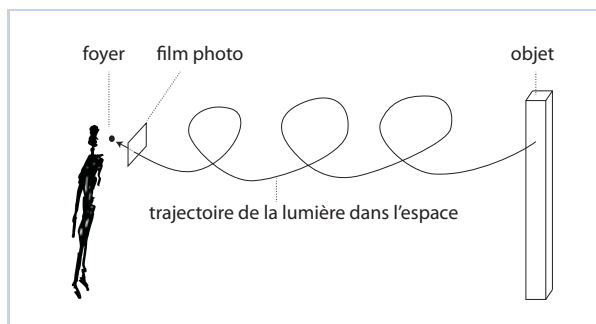
Photographie d'un ruban rectiligne dans une variété de géométrie SOL. Il n'y a qu'un ruban et il ne s'enroule pas. Cette photographie révèle comment les rayons lumineux spiralent dans cet espace.



En général, une variété d'espace n'est pas plate et sa topologie n'est pas triviale. Ses courbures forment de multiples lentilles optiques et sa topologie engendre des motifs. La trajectoire de la lumière est une courbe pouvant s'enrouler une multitude de fois. La géométrie d'une telle trajectoire est souvent inconnue, bien que générée par une EDO relativement simple.

L'exposition présentait les premières photographies dans plusieurs géométries de dimension 3. Cela a nécessité de résoudre un problème de l'école de Thurston au Geometry Center (années 1990), Nous décrivons les techniques de cette solution en dernière partie.

**Mathématiques des Photographies.** Placer un appareil photo revient mathématiquement à définir un carré rempli (le film photographique) et un point (le foyer de la caméra). À chaque point du film, il existe un unique rayon lumineux passant par le foyer. Si ce rayon lumineux provient de l'objet photographié, alors le film est colorié à ce point. Ce principe s'applique aux espaces physiques et imaginaires.



**Géométries.** Un espace est géométrique<sup>a</sup> s'il possède un nombre maximal de symétries, et pour toute paire de points de l'espace, il existe une symétrie de l'espace envoyant l'un sur l'autre. Par exemple une sphère est géométrique, n'importe quelle rotation la laisse invariante. Si on la cabosse à un endroit, les seules rotations symétriques sont celles qui laissent la bosse invariante. Or celle-ci ne peut pas être envoyée par une symétrie en un lieu non cabossé de l'espace. Une sphère cabossée n'est donc pas géométrique. Pour les surfaces, trois géométries existent : la géométrie plane  $\mathbb{E}^2$ , sphérique  $\mathbb{S}^2$ , et hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Pour les variétés d'espaces, il y a huit géométries :  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbb{SL}_2(\mathbb{R})$ , SOL, NIL.

a. Nous donnons ici la saveur de la définition d'un espace homogène pouvant être muni d'une géométrie.

## Conversation dans plusieurs espaces

Entre une paire de canapés confortables est placé un cube. Sur le cube, un microphone panoramique et à chacun de ses côtés, un casque en dessous d'un symbole :  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ ,  $\mathbb{H}^2/\Gamma \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et d'un croquis.

Les plus jeunes aiment s’y poser, s’écouter mutuellement dans l’espace associé au casque choisi.

Jimena préparant l’installation.



Classe de Seconde s’amusant avec l’installation.



On peut comprendre un espace par ses sonorités. Si l’on tape sur un tambour, il émet un son qui dépend de sa forme et de sa matière. Si l’on parle dans un espace, le son s’y propage et s’y réverbère suivant l’acoustique de l’espace. Ces sonorités permettent de ressentir l’espace.

Pour calculer les sonorités d’un espace mathématique, on adapte l’équation du son de notre espace physique. En effet, les opérateurs définissant cette équation (Laplacien, dérivée temporelle) sont définis canoniquement pour les variétés. Il reste cependant à définir la matière de l’espace (vitesse du son, viscosité cinématique, taille) suivant des critères subjectifs.

Dans l’encadré ci-après, nous donnons les solutions de cette équation.

**Mathématiques des Sonorités.**

À tout espace est associée une infinité d’harmoniques  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \dots$  appelées fréquences de résonance. Ces harmoniques dépendent de la géométrie de l’espace et sont proportionnelles à la vitesse du son  $c$ .

★ **Espace percussif.**

Si la matière de l’espace est idéale, quand on tape sèchement dessus, le son suivant apparaît :

$$P(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) + \dots + \cos(\omega_n t) + \dots$$

Si la matière est non idéale, le son diminue avec le temps. La dissipation  $D_n = D \cdot \omega_n^2$  est proportionnelle au carré de la fréquence, suivant une constante  $D$  qui dépend uniquement de la matière. Le son devient :

$$P(t) = e^{-D_1 t} \cdot \cos(\omega'_1 t) + \dots + e^{-D_n t} \cdot \cos(\omega'_n t) + \dots$$

avec  $\omega'_n = \sqrt{\omega_n^2 - D_n^2}$  qui est plus grave que  $\omega_n$ .

(★★) **Espace acoustique.**

Quand on émet un son  $E$  dans un espace, il se propage et se réverbère pour être entendu comme un son  $S$  solution de :

$$\partial_t^2 S - c^2(1 + 2D\partial_t)\Delta S = E. \quad (\star)$$

Cela donne :

$$S(t) = \int_0^t G(t-s) \cdot E(s) ds,$$

$$\text{avec } G(t) = e^{-D_1 t} \cdot \frac{\sin(\omega'_1 t)}{\omega'_1} + \dots + e^{-D_n t} \cdot \frac{\sin(\omega'_n t)}{\omega'_n} + \dots$$

**Un commentaire sur le logiciel sonore construit.**

Dans l’encadré ci-dessus, les harmoniques  $(\omega_i)_i$  sont données par le spectre du Laplacien dans la variété écoutée. Le spectre est connu explicitement pour les variétés plates, les variétés sphériques, et pour les autres géométries, il a été calculé numériquement (nous remercions Raul Aurich pour nous avoir transmis ses estimés numériques pour le spectre de certaines surfaces hyperboliques). La fonction  $G$  dans l’encadré ci-dessus correspond à la fonction de Green de l’équation du son  $(\star)$ . Son expression explicite est donnée par des techniques du XIX<sup>e</sup> siècle. Je profite de l’occasion pour remercier Emmanuel Schenck pour nous avoir redémontré ces techniques. Le son entendu  $S(t)$  est donné par le calcul en temps réel (44kHz pour le son) de la convolution avec le son reçu par le micro. Ce calcul est effectué par de nombreux logiciels de musique.

Les valeurs de la vitesse du son  $c$  et la dissipation  $D$  du son ont été choisies suivant des critères esthétiques et mathématiques (pour exprimer au mieux l’espace). À notre connaissance, il s’agit du premier logiciel donnant rigoureusement l’acoustique d’un espace mathématique.

### Navigation dans les sommes connexes

Les sommes connexes permettent de construire de nouveaux espaces à partir de deux espaces.

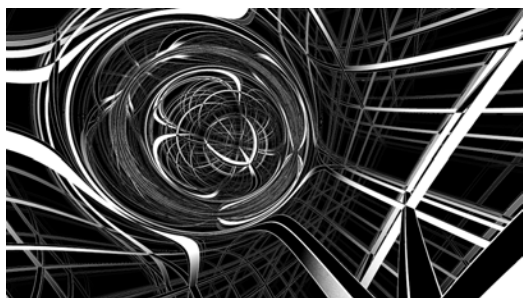
Si  $S$  et  $S'$  sont deux surfaces, on enlève d'abord un disque  $D$  à  $S$  et un disque  $D'$  à  $S'$ . On considère alors la surface  $S\#S'$  obtenue en collant l'intérieur du bord de  $S \setminus D$  à l'extérieur du bord de  $S' \setminus D'$  et vice-versa.

Plus généralement, si  $V$  et  $V'$  sont deux variétés, on enlève une boule  $B$  à  $V$  et une boule  $B'$  à  $V'$ , puis on considère alors l'espace  $V\#V'$  obtenu en collant l'intérieur du bord de  $V \setminus B$  à l'extérieur du bord de  $V' \setminus B'$  et vice-versa.

Une installation propose une navigation dans les espaces mis en jeu durant la construction d'une somme connexe.

Pour la réalisation de cette installation, j'ai programmé un logiciel calculant en temps réel les (premières) vues immersives dans des sommes connexes d'espace de dimension 3.

#### Photographie à l'intérieur de $\mathbb{R}^3\#\mathbb{R}^3$ .

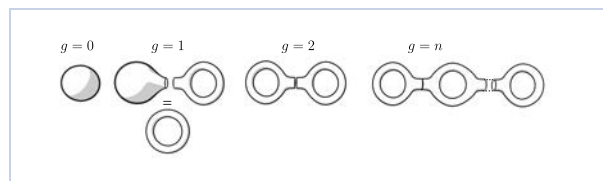


Une variété est dite première si elle n'est pas la somme connexe de deux variétés étant chacune différentes de la sphère.

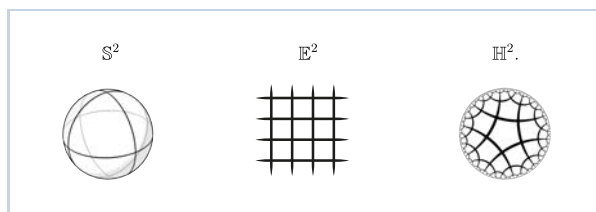
### Théorèmes de classification des espaces

Au milieu de l'exposition est placé un tableau noir, avec écrit dessus les monuments mathématiques suivants :

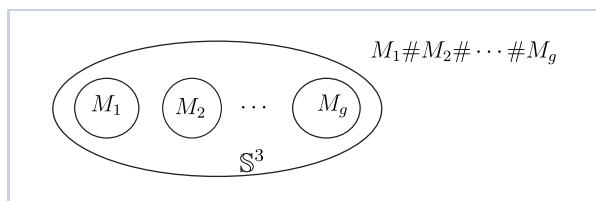
**Théorème (Moebius-Jordan - 1866).** *Toute surface fermée (et orientable) est la somme connexe d'un nombre (fini)  $g$  de tores.*



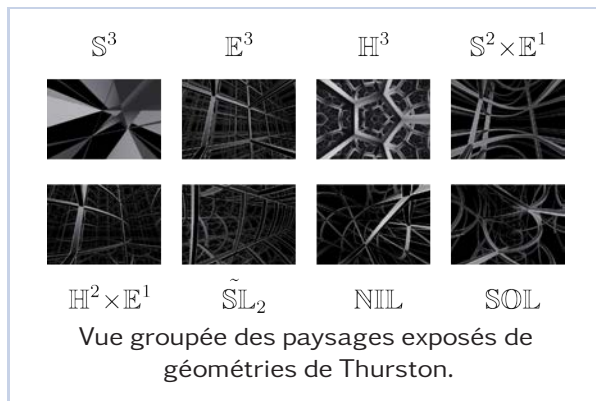
**Théorème (Klein, Poincaré, Koebe - 1907).** *Toute surface fermée peut être munie de l'une des géométries suivantes :*



**Théorème (Kneser - 1929).** *Toute variété fermée de dimension 3 différente de la sphère est la somme connexe de  $g \geq 1$  variétés premières.*



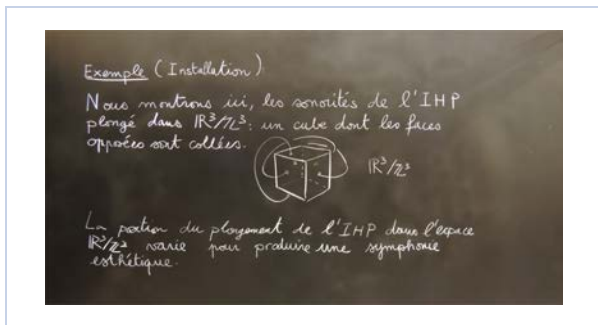
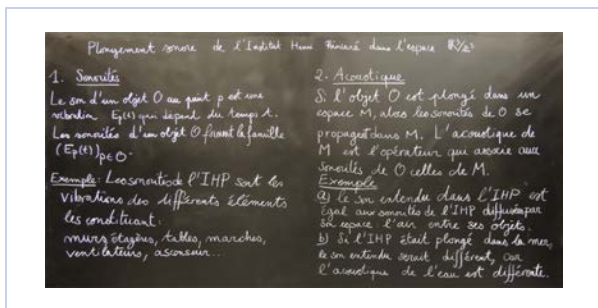
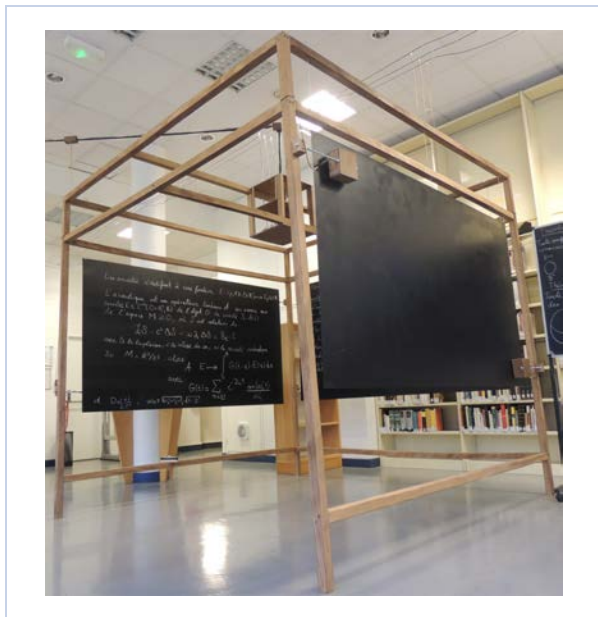
**Théorème (Thurston-Perelman - 2002).** *Toute variété première de dimension 3 peut être découpée selon un nombre fini de 2-tores pour que les parties restantes puissent être munies de l'une de ces géométries :*



### Plongement de l'Institut Henri Poincaré dans l'espace $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$

L'exposition présentait une pièce inédite. Une installation permettant de réaliser un plongement de l'IHP dans le tore  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ . Pour ce faire, pas moins de 60 micros contacts sont posés dans l'IHP pour enregistrer ses vibrations. Les vibrations sont traitées mathématiquement et numériquement pour simuler le son que l'on entendrait si tout le bâtiment était plongé dans un tore. Enfin, le son est envoyé par des transducteurs pour faire vibrer les tableaux noirs et produire ces sonorités. La position

de l'IHP dans l'espace  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$  varie pour produire une symphonie esthétique.



Ces tableaux noirs ont une double fonction : d'une part, expliquer les concepts mis en jeu dans l'installation; d'autre part, servir d'enceintes sonores.

## Recherches effectuées pour la visualisation des variétés de dimension 3

L'un des buts de l'école de Thurston était de produire des vues immersives dans les variétés de dimension 3, en temps réel (i.e. 25 images par seconde).

Ils avaient réussi à le faire pour les variétés dites *isotropes* : de géométrie sphérique, plane ou hyperbolique. Les vues immersives dans les autres géométries restaient un problème ouvert depuis les années 1990.

Aussi, en raison de la croissance exponentielle du groupe fondamental des variétés hyperboliques, la profondeur des images qu'ils obtenaient en temps réel assez était faible. Avec Luiz Velho et Alex Laier, nous avons utilisé<sup>1</sup> un autre algorithme plus récent (années 2000) pour voir dans les variétés hyperboliques avec plus de profondeur et en temps réel, nommé le « ray tracing », calculé en parallèle.

Ensuite, j'ai poussé plus loin ces travaux pour calculer les premières vues immersives dans les variétés de géométries NIL, SOL,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , ainsi que les sommes connexes. Le développement consistait d'une part, à créer un nouveau logiciel permettant de traiter le cas des rayons lumineux qui ne sont pas des droites ou des cercles (comme c'est le cas pour les géométries isotropes), mais plus généralement, des courbes à intégrer suivant l'EDO du flot géodésique de la variété. Et d'autre part, j'ai inclus dans ce nouveau logiciel diverses techniques de rendu 3D par ordinateur (optique, textures, ombres etc.). Je profite de l'occasion pour remercier François Cuvelier pour nos nombreuses conversations, et pour m'avoir initié à la résolution numérique des ODE.

## Arts, mathématiques et pédagogie

Une des mes motivations dans ces expositions est de pouvoir partager ma passion pour les mathématiques. D'un point de vue pédagogique, cela me semble une étape cruciale (et initiale?) d'un apprentissage.

Il y a de multiples façons d'aimer les mathématiques. Je suis particulièrement sensible à la beauté de ses objets, la possibilité de les voir brutalement différemment (d'être dérangé dans mes idées) et

1. P. Berger, A. Laier, L. Velho, An image-space algorithm for immersive views in 3-manifolds and orbifolds, p : 1-12 The Visual Computer, January 18, (2014).

enfin, la liberté des pratiques qu'offre son formalisme. Ces trois thèmes sont aussi propres à l'Art.

Des pièces de cette exposition ont été montrées à de multiples occasions : happening au milieu de l'université Paris 13 en 2013, festival « Savantes Banlieues » en 2014, exposition permanente au Musée des Sciences de Rio de Janeiro depuis 2014 (adaptation supervisée par Luiz Velho), Nuit des sciences à l'ÉNS en 2014, Congrès Européen de Mathématiques en 2016... Une partie partira bientôt pour une exposition permanente au Musée des Sciences de l'UNAM (Mexico).

J'ai choisi comme sujet des variétés de dimension 3 pour leur capacité à déranger. Pour faire rêver aussi : qu'un espace puisse être courbe, que l'on y voie et entende différemment. En général, les lycéens ont réussi à comprendre assez vite des exemples de variétés de dimension 3, et la perception qu'on y a, avec cependant l'aide d'un animateur. En effet, il suffit de présenter le 3-tore comme étant la salle de l'exposition dans laquelle ils sont, avec les murs opposés recollés ainsi que le sol collé au plafond. On continue par la suite en s'y déplaçant, en imaginant ce que l'on y verrait.

Les plus jeunes comprennent souvent mieux les concepts mathématiques que leur professeur (peut-être les adultes sont-ils plus inhibés?). Ils ont beaucoup moins peur de rentrer dans une telle exposition que les adultes, quand bien même ils seraient professeurs ou conservateurs dans un musée scientifique. C'est ce qui différencie l'andragogie de la pédagogie : un adulte préfère comprendre les règles du jeu avant d'y mettre les mains, contrairement aux enfants. Mais si nous devrions nous cantonner à montrer uniquement des mathématiques bien formulées et comprises, ne serait-ce pas alors montrer uniquement des mathématiques finalisées, non vivantes? N'est-ce pas pour cela que les jeunes sont encore surpris d'apprendre que la recherche en mathématiques existe?

Bien sûr, nous pouvons toujours montrer des mathématiques simples mais nouvelles. Il est cependant très dur d'en trouver d'aussi belles que les

monuments des mathématiques contemporaines. Il me semble important de montrer que les mathématiques sont d'abord un art avant d'être un jeu.

## Crédits

- (1) Courtes vidéos sur la définition et la construction de variétés, Pierre Berger et Pierre-Yves Fave, 2013.
- (2) Sélection de modèles mathématiques de l'INP.
- (3) Paysages des huit géométries de Thurston, Pierre Berger, 2015-2016.
- (4) Conversation dans plusieurs espaces, Pierre Berger, Sergio Krakowski, Jimena Royo-Letelier, 2016-2017.
- (5) Navigation dans les sommes connexes, Pierre Berger, 2016-2017.
- (6) Théorèmes de classification des espaces : Moebius-Jordan, 1866; Klein-Poincaré-Koebe, 1907; Kneser, 1929; Thurston-Perelman, 2002.
- (7) Plongement sonore de l'Institut Henri Poincaré dans l'espace  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ , Pierre Berger, Vincent Martial, Jimena Royo-Letelier, 2017.

Pierre-Yves Fave est un artiste effectuant ses recherches entre montages, performances et programmation multimédia.

Sergio Krakowski est musicien et docteur en informatique musicale, il mène des recherches entre rythme et informatique.

Vincent Martial est musicien, il évolue dans l'expérimentation, entre improvisation, composition et dispositifs sonores et visuels.

Jimena Royo-Letelier est artiste et chercheuse en data science, apprentissage automatique et musique.

L'exposition Esthétopies était coordonnée par l'auteur de cet article, grâce au soutien des institutions suivantes :



### Pierre BERGER

LAGA, université Paris 13  
 berger@math.univ-paris13.fr  
<http://math.univ-paris13.fr>

Pierre Berger est chargé de recherche à l'université Paris Nord (13). Ses domaines de recherche portent sur d'une part sur les systèmes dynamiques, et d'autre part sur les mathématiques comme sujet d'exposition.

# Le Concours SMF junior 2017

- P. PANSU

Cette année a eu lieu la première édition du concours SMF junior, une nouveauté pour la SMF. Ce concours, inspiré du concours Miklós Schweitzer, créé en 1949 en Hongrie, est destiné à promouvoir la recherche en mathématiques auprès des étudiants en licence ou en master. Dix problèmes, reliés à la recherche actuelle mais reflétant les 10 thèmes principaux du programme de M1, sont proposés aux étudiants inscrits en licence ou master de mathématiques français. Ils ont 10 jours pour composer. Les copies sont corrigées par les auteurs des sujets.

La SMF a apporté quelques modifications au modèle hongrois : une inscription préalable, un concours par équipes de 1 à 3 étudiants, et une fusion des thèmes combinatoire et cryptographie pour introduire un nouveau thème, modélisation.

De l'avis des candidats et du jury, ces innovations étaient bienvenues.

## 1. La cérémonie

Avant de nous attarder sur les détails du concours, revenons sur son aboutissement.

La SMF avait choisi d'attribuer 3 prix de 750, 500 et 250 euros, et de distinguer au plus 3 copies remarquables. Tous les lauréats ont obtenu une adhésion gratuite à la SMF et des livres.

La remise des prix a eu lieu le 10 juin 2017 à l'Institut Henri Poincaré, à la suite de l'assemblée générale annuelle de la SMF. La cérémonie, qui s'est déroulée dans une très bonne ambiance, a réuni plus de 100 personnes. Elle a permis aux lauréats de rencontrer le jury, d'anciens présidents de la SMF dont Jean-Pierre Kahane et Jean-Pierre Bourguignon ainsi que le président actuel Stéphane Seuret.

C'est Jean-Pierre Kahane qui a ouvert la cérémonie par une courte conférence qui a séduit tout le monde, intitulée « Les mathématiques peuvent-elles se raconter ? ». Sans notes, et sans rien écrire au tableau, Kahane a exposé un problème de géométrie élémentaire mais non trivial, ainsi que sa solution, et des variantes. Pour lui, tous les moyens de transmettre sont bons, les nouvelles technologies ne se substituent pas entièrement aux méthodes plus anciennes.

La conférence de Jean-Pierre Kahane



© J. Le Rousseau

Les jeunes lauréats ont pu s'exprimer librement, soulignant notamment qu'ils avaient particulièrement apprécié le travail en équipe. Deux équipes avaient certains de leur membres qui se rencontreraient pour la première fois lors de la remise des prix! D'autres ont résolu des questions en utilisant *google.docs*, les uns comblant les trous dans les preuves des autres!

Le cocktail, enfin, a vu les jeunes (et pas seulement les lauréats) parler avec J.-P. Kahane, J.-P. Bourguignon, les responsables de la SMF, et des chercheuses et chercheurs.



En bref, un beau succès, et un grand souffle de jeunesse à la SMF.

Outre les photos insérées dans cet article, l'ensemble des photos de la cérémonie se trouve actuellement sur le site de la SMF<sup>1</sup>.

J.-P. Kahane et P. Pansu, président du jury



© J. Le Rousseau

## 2. Le déroulement du concours

Le calendrier du concours 2017 a été assez serré. L'appel à la communauté pour proposer des sujets a été lancé en novembre 2016, avec date limite le 31 janvier 2017. À cette date, 25 propositions ont été reçues, au moins deux par thème.

Le jury souhaite remercier chaleureusement tous les auteurs de sujets, en particulier ceux qui ont été retenus, et l'équipe de la plateforme Sciencesconf.org.

Le jury a choisi de panacher entre sujets d'apparence simple ou difficile, entre énoncés courts ou longs, entre problèmes accessibles aux plus jeunes (certains sujets pouvaient être traités par des lycéens) et questions nécessitant des connaissances de M1. Les sujets retenus, dont aucun n'était facile, tous originaux, ont été peaufinés avec soin, chaque membre du jury étant responsable d'un problème. Un corrigé de chaque problème a été rédigé avant le concours.

Les sujets ont été rendus publics sur le site de la SMF<sup>2</sup> dès le 12 mai 2017. Des corrigés commentés y ont aussi été déposés<sup>3</sup>. Les uns et les autres peuvent être utilisés par tous ceux qui le souhaitent.

Le site d'inscription<sup>4</sup> a ouvert début février. Les inscriptions ont démarré timidement, puis sont montées en flèche fin avril. Des inscriptions ont été validées jusqu'au dernier jour du concours. Seules deux demandes d'inscriptions complètes ont été refusées. Le règlement exigeait une inscription en licence, master ou CPGE : le jury a admis aussi les élèves des grandes écoles. Il y a ainsi eu au total 118 équipes inscrites, dont 60% en Île-de-France (quelques équipes étaient à cheval sur plusieurs régions). 59 équipes ont rendu au moins une copie. Au final, 234 étudiants (27 femmes, 207 hommes) ont participé. Notons que les grandes écoles ont été sur-représentées dans cette première édition.

Le 2 mai vers 0h30, les sujets ont été envoyés par mail aux équipes inscrites. Les équipes devaient déposer une copie par problème, sachant que le site permettait de modifier un dépôt antérieur. Le flux de dépôts est monté en flèche le dernier jour. Seules 2 copies sont parvenues quelques minutes après la fin du concours le 11 mai à 23h59. Un contact par mail permettait aux candidats d'être dépannés et de signaler des dysfonctionnements, mais il semble qu'il y en ait eu très peu.

306 copies ont été déposées, soit entre 19 et 46 par problème. Chaque auteur pouvait se faire aider pour la correction des copies, mais seul l'un d'entre eux a eu besoin d'un assistant. Seules les très bonnes copies, contenant la résolution complète et presque entièrement correcte d'un problème, ont été notées. L'auteur de ces lignes témoigne qu'il fallait bien une journée de travail soutenu pour rendre une telle copie. Il y en a tout de même eu 133, signe de la très grande qualité du travail des participants. Pour chacune de ces copies, les équipes ont reçu un commentaire détaillé de la part des correcteurs.

## 3. Le palmarès

Le jury a effectué un classement « aux points ». Trois équipes se détachaient mais il a été impossible de départager un second et un troisième, d'où les deux seconds prix ex aequo du palmarès. En outre, les auteurs/correcteurs ont signalé des copies qu'il jugeaient remarquables par leur originalité, ce qui a permis de décerner trois prix spéciaux.

1. <http://smf.emath.fr/content/concours-smf-junior-2017-le-reportage-photo>

2. [http://smf.emath.fr/files/smf\\_junior\\_sujets.pdf](http://smf.emath.fr/files/smf_junior_sujets.pdf)

3. [http://smf.emath.fr/files/rapport\\_concours\\_smf\\_junior\\_long.pdf](http://smf.emath.fr/files/rapport_concours_smf_junior_long.pdf)

4. Sciencesconf.org du CNRS

Les lauréats sur le perron de l'IHP



© J. Le Rousseau

**Premier prix.**

- Équipe  $\mathcal{JTM}$  : Malo Jézéquel, Jean Kieffer et Thomas Massoni, ÉNS/M2.

**Deuxième prix ex aequo.**

- Équipe AME : Arnaud Etève, Elie Studnia et Mehdi Trense, ÉNS/M1 et L3.
- Équipe PlouM : Pierre-Louis Blayac, Louise Gasot et Matthieu Piquerez, ÉNS/M2.

**Prix spéciaux du jury.**

- Équipe OTIS : Davide Facchinelli, Archia Ghiasabadi, Bart Michels, M1 UPMC.  
Problème d'algèbre : *la copie est un petit article de 13 pages, qui va bien au-delà de la question posée. Comment les auteurs ont-ils pu l'écrire en si peu de temps ?*
- Équipe Le Geai Audyphe : Colin Davalo, Cécile Gachet et Viviane Ledoux, CPGE et ÉNS/L3.  
Problème de modélisation : *la copie, basée sur des considérations élémentaires, met bien en lumière les hypothèses, qu'il fallait deviner, pour obtenir l'unicité des solutions.*
- Équipe Hot Magma : Vincent Bouis, Maxime Ramzi et Victor Vermès, CPGE Paris et Lyon.  
Problème de topologie : *la solution apportée à cette question de recherche actuelle introduit une idée nouvelle, de l'avis de l'auteur.*

Aline Bonami et les  $\mathcal{JTM}$ , premier prix



© J. Le Rousseau

## 4. Le questionnaire de satisfaction

Afin d'avoir un retour sur cette première édition du concours, un questionnaire de satisfaction a été

adressé aux correspondants d'équipes le 24 mai. Le 7 juin 2017, 75 réponses avaient été déposées.

La première question s'adressait aux équipes qui n'ont rien rendu. Le motif le plus souvent invoqué est le calendrier : la période du 2 au 11 mai était celle des examens dans de nombreuses filières, universitaires ou dans les grandes écoles. Les réponses au questionnaire indiquent qu'une période de petites vacances (Toussaint ou février) serait plus favorable.

Sur 75 réponses, 72 répondent oui à la question : Avez-vous déjà envisagé la recherche scientifique comme votre activité future ? Cela rassure sur l'état du vivier pour les métiers de la recherche : il existe, il s'agit de le cultiver ! De ce point de vue, il semble que le concours y contribue, puisque 69 répondent que ce concours constitue un bon moyen d'initiation à la recherche. De nombreux commentaires soulignent également l'absence d'activités mathématiques hors cursus après le bac, ce qui montre que le concours comble partiellement un vide.

Les trois quarts des candidats ont concouru par équipes, et se disent satisfaits du travail collectif. Les lauréats, en particulier, plébiscitent cette particularité de la version française, qu'il convient donc de conserver.

Les sujets ont été globalement jugés d'un niveau adapté (58 réponses sur 75). Toutefois, deux problèmes ont désarçonné certains candidats : celui de systèmes dynamiques, très concis, et celui de modélisation, jugé trop vague. Ce dernier sujet a pourtant donné lieu à d'excellentes copies. Il nécessitait davantage d'initiative, puisqu'il s'agissait de traduire un problème concret en termes mathématiques et

de choisir des hypothèses permettant de démontrer les propriétés souhaitées. De l'avis du jury, le problème de modélisation 2017 est une réussite et il faut conserver ce thème dans les prochaines éditions, en rappelant que le choix des hypothèses de régularité est laissé au candidat.

Le style des problèmes a donné lieu à des commentaires variés, depuis ceux des plus jeunes qui se réjouissaient que les énoncés leurs aient été accessibles, jusqu'à ceux des candidats plus mûrs qui auraient préféré des questions plus ouvertes, incluant une présentation culturelle du contexte, et éventuellement des pistes de recherche bibliographique.

Un grand nombre de commentaires montre que ce n'est pas la compétition qui constitue l'attrait du concours, mais l'opportunité de réfléchir à fond sur un vaste choix de sujets. Néanmoins, la compétition à grande échelle apporte le grain de sel indispensable. Tout moyen d'élargir et de diversifier le palmarès en attribuant diverses sortes de prix (en tirant parti de la diversité des styles de problèmes, par exemple), serait bienvenu.

En tout cas, la satisfaction est là ! 69 candidats déclarent souhaiter participer à la prochaine édition, les 6 autres regrettent d'être déjà en M2...

Le jury : Marie-Claude Arnaud, Julien Barral, Christine Huyghe, Vilmos Komornik, Jérôme Le Rousseau, Régine Marchand, Jean-François Marckert, Bertrand Maury, Pierre Pansu (président), Emmanuel Peyre.



**Pierre PANSU**

Université Paris-Sud

Pierre Pansu est professeur. Il a été vice-président de la SMF de 2012 à 2015.

## Annexe : les réflexions des correcteurs

Cette partie résume les rapports plus complets, incluant un corrigé type et une analyse des solutions trouvées dans les copies, rassemblées dans un document disponible sur le site de la SMF<sup>5</sup>.

### 4.1 – Algèbre

Auteur : Reinhard Schäfke (université de Strasbourg). Correcteurs : Reinhard Schäfke et Augustin Fruchard (université de Haute Alsace).

« Le sujet tournait autour de l'équation  $h(x^p) - h(x) = f(x)$ , d'inconnue  $h$ , dans l'espace des polynômes en une variable. Deux telles équations (pour des exposants multiplicativement indépendants) peuvent-elles avoir une solution commune ?

35 équipes ont proposé une solution. Pour la correction, l'aide d'Augustin Fruchard m'a été précieuse. Dans 21 de ces propositions, on trouve une solution essentiellement complète. Le sujet n'étant pas trivial, c'est un très bon résultat. Encore plus satisfaisante, presque étonnante, est la diversité et l'originalité des approches utilisées, même si la plupart des solutions suivent avec quelques variations la piste de la solution officielle : établir l'existence d'une solution série formelle et ensuite montrer qu'elle est en fait polynomiale.

Une solution ramène le sujet à une question de cohomologie – malheureusement sans le rendre plus simple.

Une solution traite même en profondeur le cas (non demandé) où les exposants sont multiplicativement dépendants et présente une généralisation du sujet à un certain type de séries formelles. Cette solution pourrait faire l'objet d'un article.

Le problème s'inspire de la prépublication récente : Schäfke, R. and Singer, M.F., *Consistent systems of linear differential and difference equations*, Preprint, arXiv:1605.02616v1, 2016. »

### 4.2 – Analyse

Auteur : Aline Bonami (université d'Orléans).

« Le sujet portait sur les multiplicateurs de Fourier des espaces de Sobolev  $W^{1,1}$ . Il se présentait comme un problème usuel, avec quelques questions élémentaires dans une première partie, puis une accélération dans la seconde dans laquelle on

regroupait les outils nécessaires pour arriver à une question finale dans laquelle on n'était plus guidé.

La question qui y est abordée est celle des opérateurs de convolution qui préservent l'espace de Sobolev  $W^{1,1}$  des fonctions intégrables dont les dérivées partielles sont intégrables. Il est plus simple de le faire dans le cadre périodique, ce qui avait l'avantage supplémentaire qu'il n'y avait pas directement de littérature disponible. Il s'agissait de montrer qu'alors qu'en dimension 1 les seules convolutions qui préservent l'espace sont les convolutions avec des mesures bornées, il n'en est rien en dimension supérieure. Pour obtenir un contre-exemple, on montrait qu'il était suffisant de considérer la dimension 2 pour laquelle l'espace de Sobolev se plonge dans  $L^2$ , ce qui permettait d'avoir toute une famille de telles convolutions. Puis on utilisait les inégalités de Khintchine pour en déduire l'existence du contre-exemple. C'est dans cette dernière partie que les étudiants se trouvaient livrés à eux-mêmes, en particulier pour réaliser qu'il fallait d'une façon ou une autre raisonner par l'absurde pour dire que s'il n'y avait pas de contre-exemple on aurait une borne uniforme pour les normes des mesures. Seule la meilleure copie, qui était excellente, a fait appel aux théorèmes d'analyse fonctionnelle à cet endroit. Les copies qui ont été retenues, au nombre de 6, sont celles qui ont compris l'ensemble de la démarche, les deux meilleures notes étant réservées à celles qui se sont réellement attaquées à cette dernière question.

Le fait qu'il y ait de tels contre-exemples a été trouvé par Poornima dans les années 1980 en utilisant les *non  $L^1$  inequalities* de D. Ornstein, c'est-à-dire des exemples de distributions d'ordre 1 dont toutes les dérivées partielles sont d'ordre 1 (ceci évidemment lorsque la dimension est supérieure à 1). J'ai peu après montré avec elle, toujours en utilisant le théorème d'Ornstein, qu'aucun opérateur d'intégrale singulière ne préserve l'espace  $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ . J'aurais aimé, et j'aimerais toujours, montrer que les convoluteurs des espaces  $W^{k,1}$  diffèrent, non pas uniquement entre  $k = 0$  et  $k > 0$ , mais pour toutes les valeurs de  $k$ . L'espace  $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  est un espace dont on sait bien qu'il réserve des mystères, tout comme l'espace BV. Curieusement, la construction d'Ornstein a attiré récemment l'attention de plusieurs auteurs. Je suis revenue sur le

5. [http://smf.emath.fr/files/rapport\\_concours\\_smf\\_junior\\_long.pdf](http://smf.emath.fr/files/rapport_concours_smf_junior_long.pdf)

sujet ces dernières années grâce à la lecture d'un article récent de deux collègues polonais, Kazaniecki et Wojciechowski, dans lequel ils vont plus loin que nous n'étions allées dans les années quatre-vingts et montrent que les transformées de Fourier des convoluteurs de l'espace homogène  $\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  sont continues. Le texte du problème est issu de réflexions récentes. La construction qui est donnée dans le problème permet de montrer qu'il y a d'autres opérateurs de convolution que ceux qui sont donnés par des distributions d'ordre 1 dont les dérivées partielles sont aussi d'ordre 1, autrement dit que Poornima n'avait pas trouvé tous les opérateurs de convolution de  $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ .

Certaines copies, par ailleurs soignées, ont montré un réel manque de culture sur les séries de Fourier. La démarche de la dernière question est évidemment naturelle si on sait comment démontrer qu'il n'y a pas convergence des séries de Fourier dans  $L^1$ . Plus élémentaires, les manipulations sur les séries doubles n'étaient pas forcément aisées. »

### 4.3 – Combinatoire-Cryptographie

Auteur : Olivier Poisson (Aix-Marseille université).

« Ce problème m'a été proposé il y a une dizaine d'années et à peu près tel quel par un ingénieur d'Intertechnique (actuellement Zodiac ou Safran). Celui-ci a malheureusement perdu la trace de son origine.

19 équipes ont rendu une copie. Il s'agissait de dénombrer les points entiers dans l'intersection d'un hyperplan et d'un parallélépipède de côtés proportionnels à des entiers  $k_j$ . Deux approches ont été utilisées principalement. D'abord, la méthode géométrique, qui compare ce nombre de points entiers avec la mesure (de Hausdorff) de l'intersection de l'hyperplan et du parallélépipède. Il est possible de donner des estimations simples de la mesure de ce genre d'hypersurface en comparant par exemple le parallélépipède avec des boules euclidiennes centrées en 0. Une autre possibilité, moins élémentaire, est fournie dans une copie qui utilise le fait que le  $(n-1)$ -volume de l'intersection d'un hyperplan orthogonal à  $u$  avec un pavé de  $\mathbb{R}^n$  (coupé en son centre) est minimal lorsque l'hyperplan est orthogonal à au  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , où  $i$  est tel que  $k_i = \max_j k_j$ . (La copie se réfère à un résultat dans le livre d'Alexander Koldobsky : "Fourier Analysis in Convex Geometry", AMS, 2014. J'aurais préféré plus de détails, mais la propriété, bien

que simple à formuler, semble compliquée à démontrer). Ensuite, la deuxième méthode, probabiliste, part de la considération de  $n$  v.a.r  $X_i$  indépendantes, de loi uniforme sur  $[0, k_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Cette approche me paraît trop sophistiquée lorsqu'elle se limite à démontrer la croissance du nombre de points entiers. Sinon, à partir de ce point, et en utilisant par exemple l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (ou même de Hoeffding, sans doute plus précise), elle fournit une très bonne estimation. À noter que l'utilisation de l'inégalité de Hoeffding seule, sans la propriété de croissance du nombre de points entiers, donne un résultat insuffisant.

Un bon lot de copies s'est attaqué à la détermination d'un équivalent du nombre de points entiers lorsque  $p$  est grand, soit, comme déjà commenté, en prenant la méthode géométrique, qui me paraît la plus élégante, soit par le théorème du crible. Malgré quelques erreurs mineures ou des preuves un peu rapides, il est assez satisfaisant de voir apparaître un résultat substantiel.

Pour finir, j'ai été agréablement surpris de recevoir de nombreuses copies suffisamment riches, certaines m'ayant permis d'avoir un nouveau regard sur le problème que j'ai soumis. »

### 4.4 – Géométrie

Auteur : Nicolas Juillet (université de Strasbourg).

« Le principe était de proposer un problème inspiré de la géométrie sous-riemannienne qui puisse avoir une formulation suffisamment simple pour se prêter à l'expérimentation. On peut voir ce problème comme un pendant discret d'un exemple classique, celui d'une sphère roulant sans glisser sur un plan (l'espace des configurations est de dimension 5 mais la distribution non-intégrable des déplacements infinitésimaux est de dimension 2). Cette situation évoque elle-même le transport parallèle sur une sphère, encore souvent abordé en master. L'étude des variétés roulant l'une sur l'autre est un sujet contemporain d'étude.

Le problème évoque également la notion de connexion et la théorie de l'holonomie. Certaines des approches proposées dans le concours peuvent d'ailleurs faire songer au théorème d'Ambrose et Singer.

Nous avons reçu 31 propositions pour ce problème. Seulement une dizaine d'entre elles ont été jugées hors-sujet. Les questions 1, 3 et 4 ont globalement été mieux réussies que la question 2, la

plus difficile, qui concernait l'octaèdre basculant sur le plan. Finalement une douzaine de solutions, complètes, ont été jugées satisfaisantes à très satisfaisantes. Toutes ces douzes sont des solutions complètes. Notons finalement que de nombreuses idées originales ou élégantes ont été proposées, y compris dans des copies moyennes. Cependant ces belles idées n'ont pas toujours abouti à des démonstrations solides.

Nous avons apprécié que les candidats accompagnent leurs démonstrations de figures représentant tantôt le plan, tantôt les solides. Cela semblait tout à fait indiqué dans ce problème de géométrie et a été souvent réalisé à l'aide de logiciels permettant un très beau rendu. Toutefois les figures ont parfois eu tendance à se substituer aux démonstrations. Ce fut le cas notamment dans les démonstrations faisant apparaître un coloriage des sommets des triangles pavant le plan. Ici, en toute rigueur il était souhaitable d'indiquer que le coloriage était périodique (permettant une définition du coloriage à partir de la figure) et que des vérifications en nombre fini (on pouvait donner ce nombre) suffisaient à démontrer le résultat voulu. Une autre façon consistait à définir exactement les couleurs à l'aide de formules et d'effectuer les vérifications nécessaires sur les formules. »

#### 4.5 – Modélisation

Auteur : Filippo Santambrogio (université Paris-Sud).

« Le problème portait sur une question très naturelle et issue de la vie réelle : comment traverser une route lorsqu'on doit en même temps se déplacer en direction parallèle à la route elle-même. La plupart des enfants ont envie de traverser tout droit en diagonale pour arriver le plus vite possible, alors que leurs mères, soucieuses de ne pas les laisser trop longtemps au milieu de la chaussée où ils pourraient se faire renverser par une voiture, voudraient qu'ils fassent un chemin en L en restant le plus possible sur le trottoir... où est le juste milieu ?

Ce genre de question, qui revient à chercher les géodésiques pour une longueur pondérée, se rencontre fréquemment en recherche. Souvent l'espace parcouru par la courbe que l'on cherche n'est pas le plan (comme dans cet exercice) mais un espace de fonctions (récemment cela a été utilisé pour résoudre des problèmes d'EDP avec manque de compacité), de mesures (en transport optimal, mécanique des fluides,...) ou alors il s'agit bien

d'une trajectoire dans l'espace euclidien d'un individu, mais le modèle demande ensuite à en faire interagir plusieurs (comme dans les jeux à champ moyen...).

Les réponses à cette question de modélisation ont été très variées, et on y trouve plusieurs bonnes idées ainsi que plusieurs erreurs ou anomalies. La première chose à faire consistait à traduire le problème, décrit exprès de manière très vague dans l'énoncé, en une question mathématique. À quelques exceptions près cela a été bien fait. Presque personne n'a traduit le problème en une minimisation d'énergie avec le carré de la vitesse, qui simplifie beaucoup les arguments d'existence et l'écriture d'une équation d'Euler-Lagrange.

La plupart des copies ont démontré l'existence d'une trajectoire minimisante en évoquant le Théorème d'Hopf-Rinow et d'autres notions de géométrie riemannienne. Ceci est correct, mais un peu décevant, alors qu'une preuve ad hoc pouvait être faite de manière assez élémentaire, et sous des hypothèses de régularité plus faibles.

Au contraire, en ce qui concerne la preuve du fait que la courbe est un graphe ou l'étude de sa convexité, les étudiants ont surtout utilisé des arguments "à la main" (remplacer une portion de courbe par un segment et montrer que le segment a un coût inférieur, ce qui soulevait des difficultés que les étudiants n'ont pas toujours vues), alors qu'il était possible d'utiliser davantage l'équation d'Euler-Lagrange : celle-ci entraîne que  $x' > 0$ . Le fait que la courbe soit aussi un graphe par rapport à l'autre variable  $y$  était plus compliqué.

En effet, il y avait une subtilité, pas forcément voulue, dans l'interprétation du sujet (les hypothèses étaient, exprès, très vagues). Dans le sujet on parlait d'une fonction "risque", nulle sur les trottoirs et régulière : on peut la considérer comme définie partout, et donc sa dérivée doit s'annuler sur le bord du trottoir, ou définie seulement sur la chaussée, ce qui permet une dérivée non nulle sur le bord. La plupart des théorèmes de géométrie riemannienne évoqués par les étudiants concernent des variétés sans bord et lisses. Si on se place dans le premier cas tout marche bien, et on a aussi le résultat d'unicité demandé ainsi que le fait que la courbe soit un graphe par rapport à  $y$ .

Trois groupes d'étudiants ont bien compris la subtilité : un a bien clarifié qu'il utilise une dérivée nulle sur le bord comme conséquence du fait que la fonction est nulle sur le trottoir et lisse; deux autres ne font pas cette hypothèse mais font la

distinction dans les résultats d'unicité d'après la dérivée au bord. Ces deux copies trouvent aussi que, dans le cas de dérivée non nulle au bord, l'unicité est vérifiée si le déplacement vers l'est est suffisamment petit. Une de ces copies, par contre, ne prouve pas l'existence, alors que l'autre le fait par des méthodes directes, ce qui est remarquable. C'est cette copie qui a eu la note la plus élevée, sans pour autant atteindre la note maximum, car certaines constructions géométriques qui sont faites pour améliorer les courbes ne sont pas 100% justifiées. »

## 4.6 – Probabilités

Auteur : Olivier Garet (université de Lorraine).

« Une question fréquemment posée à propos d'une chaîne de Markov, c'est de déterminer avec quelle probabilité un événement va arriver avant un autre, ou s'il va arriver un jour.

Ces problèmes peuvent souvent être résolus à partir de la méthode de l'analyse au premier pas : le point de départ étant considéré comme un paramètre, en conditionnant par la valeur du premier mouvement de la chaîne, on obtient alors un système d'équations linéaires.

Dans le cas où la chaîne de Markov est une marche aléatoire, le système donne une récurrence linéaire à coefficients constants. L'exemple le plus classique est le problème de la ruine du joueur, qui est traité dans tous les cours de M1. Ces systèmes d'équations sont souvent résolus par l'adjonction de conditions "aux limites", qui correspondent à des positions où l'issue est déterministe. Cependant, le succès de la méthode n'est pas assuré car rien n'assure a priori de disposer de suffisamment d'équations pour déterminer le système.

La question ici posée consistait à déterminer la probabilité qu'une marche aléatoire à support fini, biaisée dans le sens positif, ne passe pas dans les négatifs. Ici, les premières conditions au bord sont déterminées par le fait que partant de valeurs négatives, la probabilité est évidemment nulle. Avec un peu de travail, on montre que quand le point de départ s'échappe à l'infini, la probabilité tend vers 1, ce qui nous donne encore une condition.

A-t-on assez de conditions? La démarche que j'avais envisagée, et qui a été suivie par presque toutes les copies est la suivante : on résout une équation de récurrence linéaire, on l'exprime à

l'aide de la théorie générale;  $u_n$  s'écrit

$$u_n = \sum_i P_i(n) \lambda_i^n,$$

où les  $\lambda_i$  sont les racines de l'équation caractéristique de la marche. Reste à déterminer les polynômes qui s'affichent en face des puissances. En face des puissances des racines de module dépassant 1, le polynôme doit être 0, sinon les probabilités explosent. Cette "presque évidence" demande tout de même un petit travail, qui a été parfois ignoré, parfois plus ou moins bien fait. Ceci étant fait, ne reste-t-il pas trop de racines? Ce dernier point est traité avec le lemme de Rouché, que quelques-uns malmènent, et qu'une copie réinvente dans un cas particulier. Le soin donné aux démonstrations des points évoqués ci-dessus départage ainsi l'essentiel des copies.

Cependant, une copie sort du lot, qui utilise un argument assez général, et cette fois très probabiliste, auquel je n'avais pas songé. Je le décris brièvement. Il est facile de voir que la suite des probabilités cherchées constitue une fonction harmonique bornée de l'opérateur associé à la chaîne de Markov, ce qui permet de lui associer une martingale. Mais en réalité, toute solution bornée du système que l'on a obtenu est aussi une fonction harmonique, et peut aussi se voir associer une martingale; ainsi à l'aide d'un théorème de martingale, on peut identifier la solution et la suite cherchée, ce qui montre que le système linéaire est bien déterminé. L'argument est très pur, et visiblement généralisable. La copie n'utilise pas le vocabulaire des fonctions harmoniques. Que ses auteurs soient cultivés ou très malins reste en débat; enfin il est clair qu'ils m'ont fait comprendre quelque chose.

Pour un ouvrage en français qui met clairement en lumière la méthode "first step analysis", je recommande mes notes de cours de master, *Probabilités et processus stochastiques*.<sup>6</sup> »

## 4.7 – Systèmes dynamiques

Auteur : Alexei Glutsyuk (CNRS et École normale supérieure de Lyon).

« La question tenait en une phrase : un champ de vecteurs holomorphe du plan peut-il admettre un cycle limite ?

La solution aussi était très courte. Pourtant, ce problème n'a donné que 20 copies. La plupart

6. <http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/livre-pps/>

sont satisfaisantes. Une copie contient une méthode plus directe que celle que j'avais imaginée, en montrant que les champs  $f$  et  $if$  commutent. Cela contourne la démonstration de l'holomorphie du flot. Une autre copie démontre l'holomorphie en utilisant le fait que la dérivée du flot obéit à l'équation aux variations. »

#### 4.8 – Théorie de la mesure

Auteur : Ai-Hua Fan (université d'Amiens).

« On proposait de démontrer une inégalité valable sur un espace mesuré  $(X, \mu)$  quelconque. Si  $\int_X f d\mu = 0$  et  $\alpha \leq g \leq \beta$ , alors

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \int_X |fg| d\mu.$$

34 candidats ont répondu, la plupart de façon correcte. On a privilégié la rigueur, la clarté et la simplicité, sans accorder d'importance à la concision. Il y a des copies de 7 ou 8 pages, et d'autres de 1 ou 2 pages. Certaines sont faciles à lire, d'autres plus difficiles à suivre. Certaines copies auraient mérité une relecture plus soignée par leurs auteurs, car les coquilles y sont nombreuses.

Une copie mérite une attention particulière, elle donne une preuve reposant sur l'inégalité de Bernstein (la norme sup de la dérivée d'un polynôme trigonométrique est majorée par la norme sup du polynôme multipliée par le degré). C'est une méthode intéressante, à laquelle l'auteur n'avait pas pensé. »

#### 4.9 – Théorie des nombres

Auteur : Bruno Deschamps (université du Maine).

« Il s'agissait, pour tout  $n$  donné, de déterminer le nombre minimal  $\sigma(n)$  tel que tout élément de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  soit somme de  $n$  carrés.

Il y a eu 45 propositions de solutions, justes du point de vue mathématique, et il a été difficile de classer les meilleures. Les critères d'excellence retenus ont été l'originalité et le caractère élémentaire des arguments. Plusieurs solutions proposées utilisaient de gros (voire très gros) théorèmes tels que les théorèmes des deux et trois carrés, le lemme de

Hensel, le théorème de progression arithmétique de Dirichlet. Nous avons donc considéré que "l'utilisation de bulldozers pour écraser une mouche" était un critère discriminant pour le palmarès, car peu en accord avec la tradition de subtilité en théorie des nombres. Comme on pourra le voir sur le rapport complet de correction<sup>7</sup>, il existait plusieurs façons totalement élémentaires d'arriver au résultat, et plusieurs d'entre elles étaient concises et élégantes. Certaines de ces solutions sont même présentables à un niveau L1-L2, ce qui est remarquable.

Pour ce qui est des démonstrations proposées, elles ont toutes, peu ou prou, suivi la même stratégie. Nous avons toutefois été à la fois surpris et ravis de découvrir une grande diversité d'idées avancées pour la résolution du problème. C'est sur les points clé qu'il y a eu des variantes d'arguments. »

#### 4.10 – Topologie

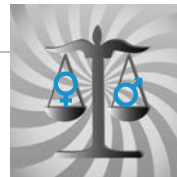
Auteur : Marc Peigné (université de Tours).

« Il s'agissait de minorer le nombre de points d'une orbite d'une action de groupe dans une grande boule. Ce sujet est inspiré de résultats concernant les groupes d'isométries de variétés à courbure négative. L'exposant  $\delta_G$  est appelé aussi exposant de Poincaré, c'est l'exposant critique de la série du même nom (critique au sens où cette série converge pour  $s > \delta_G$  et diverge pour  $s < \delta_G$ ). Une question naturelle est de savoir si cette série diverge en  $s = \delta_G$ , auquel cas le groupe est dit divergent. Cette question semble au premier abord anodine, elle est en fait très profonde et a des conséquences importantes sur la dynamique du flot géodésique. Pour les groupes co-compacts, l'argument de sous-additivité, objet du présent énoncé, est la méthode la plus simple.

Sur les 30 copies rendues, 6 ont donné des solutions complètes. Une copie a développé une approche personnelle de la question 2, en passant par la métrique des mots. Ce passage n'est pas naturel dans le contexte de l'énoncé, même si pour la métrique des mots la réponse est plus rapide; mais je dois avouer que j'ai été surpris qu'on puisse revenir à la distance initiale en introduisant un paramètre supplémentaire, cela m'a beaucoup intrigué et intéressé. »

7. [http://smf.emath.fr/files/rapport\\_concours\\_smf\\_junior\\_long.pdf](http://smf.emath.fr/files/rapport_concours_smf_junior_long.pdf)





## Comment les stéréotypes de genre corrompent nos perceptions, nos jugements et nos comportements : quelques apports de psychologie sociale

• V. BONNOT

Ce n'est pas une nouvelle, le parcours des filles et des femmes dans les domaines scientifiques et techniques est semé d'embûches, et le temps qui passe ne change pas grand-chose à l'affaire. Malgré leur meilleure réussite au baccalauréat, elles restent sous-représentées dans les filières, puis dans les métiers scientifiques, technologiques ou d'ingénierie. Lorsqu'elles y entrent, leur nombre s'amenuise souvent au fur à mesure du cursus (un phénomène baptisé « leaky pipeline » ou tuyau percé) et leur progression de carrière est loin de suivre celle des hommes. Par exemple, alors qu'elles représentent 30% des étudiant-e-s en Sciences Fondamentales et Application à l'université, elles ne représentent plus, pour ce qui concerne les mathématiques, que 18% des MCF et 6% des PR en mathématiques pures (39% MCF et 18% PR en maths appliquées), et seulement 14.6% des Chargé-e-s de Recherche, et 21.3% des Directeurs/Directrices de Recherche au CNRS (section 41).

Il ne s'agira pas dans cet article de traiter la question des préjugés et de la discrimination spécifiquement dirigés contre les femmes mais plutôt des biais auxquels nous sommes toutes et tous soumis du fait des stéréotypes de genre. Quelques illustrations empiriques issues de la psychologie sociale expérimentale permettront d'appuyer mon propos en mettant en évidence la relation causale liant stéréotypes et carrières féminines, et la diversité des effets délétères des stéréotypes depuis l'école et l'orientation scolaire jusqu'au recrutement et au parcours professionnel des femmes, dans les sciences et au-delà.

Les stéréotypes de genre sont les croyances que les gens partagent concernant les traits de personnalité, compétences, émotions, comportements que les personnes appartenant à un même groupe social (e.g., les femmes et les hommes, les blancs et les noirs, les Français et les Italiens...) sont censés posséder du seul fait de cette appartenance. On distingue ces croyances (dimension cognitive) des attitudes (dimension affective) à l'égard de ces groupes qu'on appelle préjugés – sexisme dans le cadre des préjugés à l'égard des femmes. Alors qu'à l'origine des recherches en psychologie sociale des relations intergroupes les préjugés correspondaient à des attitudes négatives, les recherches plus récentes se sont intéressées davantage aux attitudes « positives », dont les conséquences sont aussi voire plus dommageables que leur pendant négatif du fait de la difficulté à en appréhender directement l'aspect pernicieux. On parle alors de sexisme « bienveillant » (par contraste au sexisme « hostile »), dont l'une des dimensions correspond au paternalisme (par exemple à l'idée que les femmes auraient particulièrement besoin d'être aidées et protégées; cf. [9]).

Les stéréotypes de genre ont pour fonction de légitimer les inégalités sociales entre femmes et hommes, en d'autres termes, le système de genre (e.g., [13]; [19]). Pour ce faire, la complémentarité des stéréotypes est très importante : les hommes et les femmes sont censées posséder des qualités et défauts complémentaires les uns des autres. Ainsi, les femmes sont stéréotypées comme plus sociables et bienveillantes (tournées vers autrui, empathiques, amicales...) que les hommes qui sont à

leur tour considérés comme plus compétents et assertifs (tournés vers l'action, indépendants, possédant les qualités de leadership et d'autorité...). Les domaines de compétence sont également perçus comme sexués : les femmes seraient plus douées dans les domaines verbaux, les hommes dans les domaines logico-mathématiques (notez par ailleurs le différentiel de valeur sociale des qualités supposées et domaines dits « féminins » et « masculins »). Des recherches récentes montrent en outre que les élèves ont connaissance d'un stéréotype selon lequel les filles doivent faire plus d'efforts que les garçons pour réussir, que leur intelligence est moins perfectible, moins susceptible de s'améliorer, et qu'elles ont donc moins de potentiel que les garçons qui, à l'inverse, et à condition qu'ils le décident, se révéleront brillants [18]. Ces stéréotypes sont généralement acquis très jeune ; par exemple dès le CM2 pour celui concernant les disciplines scolaires (maths/français ; [15]). Avant de continuer la lecture de cet article, n'hésitez pas à évaluer vous-même vos propres stéréotypes (et vos préjugés) grâce par exemple au Test d'Association Implicite (ici : <https://implicit.harvard.edu/implicit/france/>). Confrontés à des questions directes nous sommes généralement motivés à contrôler nos réponses de façon à paraître exempts de toute pensée stéréotypée ou sexiste. Cet outil permet de mesurer les stéréotypes implicites en contournant les stratégies de présentation de soi.

Voyons maintenant quelles sont les conséquences de ces stéréotypes : d'une part sur la façon dont nous considérons les femmes, d'autre part sur la façon dont les femmes elles-mêmes peuvent être amenées à se considérer.

**Les stéréotypes de genre biaisent notre traitement de l'information, nos attitudes et nos comportements à l'égard des femmes.** Les recherches montrent effectivement que les stéréotypes colorent la façon dont nous traitons et mémorisons les informations. Par exemple, lorsque nous lisons une série de phrases décrivant des comportements produits soit par des femmes soit par des hommes, le sexe des protagonistes influence la façon dont nous nous rappellerons l'événement décrit [7]. Dans cette étude on présente plusieurs phrases, par exemple : « Elisabeth ne fut pas très surprise de sa note au test de mathématiques » (notez qu'aucune information sur la note obtenue n'est délivrée dans cette phrase). Plus tard, lors d'une tâche de

reconnaissance des phrases lues, mais modifiées pour inclure une information qui va dans le sens du stéréotype ou dans le sens contraire, il s'avère que la phrase « Elisabeth ne fut pas très surprise de sa mauvaise note au test de mathématiques » est plus fréquemment reconnue que la phrase « Elisabeth ne fut pas très surprise de sa bonne note au test de mathématiques ». Autrement dit les stéréotypes nous guident (de façon erronée) dans l'interprétation des événements dont nous sommes témoins. J'utilise le « nous » à dessein : en effet, les recherches montrent le plus souvent que les femmes, comme les hommes, sont soumises aux mêmes biais dans la perception et l'évaluation des femmes.

Les stéréotypes influencent également la façon dont nous allons juger et nous comporter à l'égard de leurs cibles. Prenons l'exemple de cette expérience particulièrement illustrative dans laquelle des hommes doivent dans un premier temps visionner des publicités au contenu stéréotypé ou neutre [16]. Leur tâche est, dans un deuxième temps, de faire passer un entretien d'embauche à une femme. On mesure ensuite à l'aide de questionnaires les informations retenues par les participants au sujet de la candidate, et leur évaluation. En comparaison de ceux ayant visionné les publicités neutres, les hommes ayant visionné les publicités stéréotypées préalablement à l'entretien se rappellent ensuite de moins d'informations permettant une évaluation des compétences de la candidate par rapport au poste proposé, mais de plus d'informations concernant son apparence physique. Ils la jugent également moins compétente, mais plus aimable (cf. complémentarité des stéréotypes), sont moins favorables à son recrutement et, lorsqu'ils le sont, lui proposent un salaire plus faible. Enfin, des observateurs indépendants (i.e., n'ayant connaissance ni des conditions expérimentales, ni des hypothèses) jugent que les hommes de la condition « publicités stéréotypées » se sont comportés pendant l'entretien de façon plus sexiste que les hommes de la condition « publicités neutres », interrompant plus souvent la candidate (cf. phénomène qualifié de « *mantrapping* ») ou regardant plus souvent son corps...

Enfin, notons que les femmes qui se comportent d'une façon qui va à l'encontre des stéréotypes de genre (e.g., des femmes affirmant leurs idées, négociant leur salaire, une promotion, prenant l'initiative d'un nouveau projet...) sont généralement jugées plus sévèrement : elles gagnent parfois en com-

pétence perçue mais perdent souvent en sociabilité (e.g., elles sont perçues comme égoïstes, agressives, sournoises, dures...), et on préfère alors ne pas travailler avec elles (e.g., [10]). Suffirait-il donc de se conformer au stéréotype pour espérer être bien traitée, ou en tout cas pas moins bien qu'un collègue masculin? Non bien sûr, cela n'est pas non plus très efficace pour sa carrière. Par exemple, dans une expérience [11] on demandait à des managers (femmes et hommes) d'évaluer un employé (dont on faisait varier le sexe) sur la base d'un dossier contenant des informations le concernant assorties d'un exemple de comportement censé être représentatif des comportements de cet/cette employé-e en général. En l'occurrence, le dossier rapportait le témoignage d'un collègue ayant sollicité l'aide de l'employé-e pour refaire en urgence une présentation perdue à cause d'un problème informatique. Ici aider constitue un comportement de « citoyenneté organisationnelle altruiste » (apporter son aide aux autres, accueillir les nouveaux venus, expliquer le fonctionnement de la structure, contribuer aux tâches collectives...) qui permet un bon fonctionnement de l'organisation. Dans une première condition expérimentale, l'employé-e en question acceptait d'aider le collègue. Dans la deuxième condition expérimentale, l'employé-e refusait d'aider le collègue. Dans une condition contrôle enfin, aucune information sur le comportement de l'employé-e n'était fournie. Les résultats sont très clairs. Lorsque l'employée est une femme elle est sanctionnée si elle n'aide pas son collègue : en comparaison de la condition contrôle, sa performance est évaluée plus négativement et son travail moins gratifié (i.e., augmentation de salaire, promotion, prime, ou nouvelles responsabilités sont moins recommandées). En revanche, elle ne gagne rien à accepter d'aider son collègue, le fait d'aider étant un comportement « naturel » et attendu pour une femme. Lorsque l'employé est un homme, c'est l'exact opposé qui se produit : il est récompensé s'il accepte d'aider, mais n'est pas sanctionné s'il choisit de ne pas le faire... Le sexe du manager-évaluateur ne changeant rien à l'affaire.

**Les stéréotypes de genre conditionnent les perceptions, attitudes et comportements des femmes.** Ces stéréotypes peuvent finir par être intériorisés par leurs cibles. En effet, nombre de recherches montrent que la socialisation des femmes dans une société imprégnée de ces stéréotypes (par le biais des médias – cf. supra publicités stéréotypées, parents, enseignants, collègues...), peut

les amener à penser que, parce qu'elles sont des femmes, elles sont effectivement moins compétentes dans les domaines scientifiques. Ces perceptions de compétence biaisées par les stéréotypes perturbent ensuite la motivation (e.g., « les maths ce n'est pas fait pour moi, ça ne m'intéresse pas, ça m'ennuie, donc je laisse tomber ») et la capacité à se concentrer uniquement sur la tâche à réaliser (i.e., l'attention est divisée entre la résolution de la tâche mathématique et des pensées distractives du type : « je suis nulle en maths, je ne vais pas y arriver, comme d'habitude »), et donc, in fine, la performance (e.g., [1]), et les choix d'orientation (e.g., [8]). Néanmoins, ces effets délétères peuvent ne se manifester que dans certaines situations ou contextes qui réactualisent les stéréotypes (e.g., être confrontée à des jeux stéréotypés, à des publicités stéréotypées, à une personne sexiste, à de l'« humour » sexiste, être seule femme dans un environnement très masculin...), et indépendamment de l'intériorisation du stéréotype (donc même si l'on n'y croit pas). Par exemple lorsqu'on demande à des élèves de 14 ans de s'évaluer et de rappeler leurs notes passées en mathématiques après (vs. avant) s'être prononcé sur les compétences des femmes et des hommes dans ce domaine, les filles se perçoivent moins compétentes et se rappellent de notes en mathématiques moins bonnes qu'elles n'étaient réellement alors qu'on observe l'inverse pour les garçons [6]. Ces biais de perception vont ensuite influencer leurs choix d'orientation : en effet, contrairement à un garçon qui surestime ses notes en mathématiques, une fille qui sous-estime les siennes choisira moins volontiers une orientation dans une filière scientifique. La performance elle-même peut être altérée si la situation évaluative convoque implicitement le stéréotype ou le risque d'être jugé sur cette base (cf. effet de menace du stéréotype, [17]). Ainsi, une tâche présentée à des élèves de 12 ans comme évaluant des capacités en géométrie sera moins bien réussie par les filles que par les garçons, alors que cette même tâche présentée comme un exercice de dessin fait disparaître la différence de performance [12]. De même lorsqu'on rend saillante une norme inégalitaire (i.e., « les étudiants dans cette université pensent que les filles ont un niveau plus faible que les garçons en maths ») les étudiantes approuvent le stéréotype, se perçoivent comme moins compétentes, et réussissent moins bien une évaluation en statistiques que lorsqu'une norme égalitaire est rendue saillante (i.e., « les étudiants dans cette université pensent que filles et garçons ont un niveau équi-

valent en maths »; [2]). Enfin, des recherches plus récentes montrent comment le contexte inégalitaire promeut directement ces perceptions et comportements biaisés par les stéréotypes. En effet, il existe un besoin psychologique fondamental pour les individus à percevoir le système dont ils dépendent comme étant juste et légitime, les stéréotypes fournissant précisément une justification aux inégalités sociales, notamment de genre, en les essentialisant [13]. Ainsi, par exemple, exposées à un article mentionnant les inégalités de genre, les femmes se perçoivent, paradoxalement, de façon plus conformes aux stéréotypes, que lorsqu'elles sont exposées à un article neutre [14]; voir aussi [3, 5, 4]. Autrement dit, plutôt que de contester un système qui les désavantage, elles peuvent être amenées à ration-

naliser ces inégalités en s'alignant précisément sur ces stéréotypes qui légitiment leur position sociale.

Comme vous pouvez le constater, les effets délétères des stéréotypes sont précisément de nature à renforcer ces stéréotypes, à donner l'impression que les stéréotypes ont un « noyau de vérité » et reflètent la « vraie nature » des hommes et des femmes (« mais si, c'est vrai, les filles réussissent moins bien en maths que les garçons!! »). Les stéréotypes servent à légitimer les inégalités sociales, et en biaisant nos perceptions et nos comportements ils créent leur propre réalité (comme une prophétie qui se réalise). Il est donc plus que jamais nécessaire de combattre les inégalités et les stéréotypes – et pour cela aussi la psychologie sociale a quelques idées...

### Quelques ouvrages pour en savoir plus

Bohnet, I. (2016). *What works. Gender equality by design*. Harvard : Belknap.

Croizet, J.C. & Leyens, J.Ph. (2003). Mauvaises réputation – Réalités et enjeux de la stigmatisation sociale. Ed. A. Colin

Faniko, K., Lorenzi-Cioldi, F., Sarrasin, O., & Mayor, E. (Eds). (2015). *Gender and Social Hierarchies : Perspectives from Social Psychology*. London : Routledge.

Mathevon, N. & Viennot, E. (2017). *La différence des sexes : questions scientifiques, pièges idéologiques*. Ed. Belin

Rudman, L. & Glick, P. (2008). *The social psychology of gender – How power and intimacy shape gender relations*. NY : Guilford.

Toczek, M.C. & Martinot, D. (2004). *Le défi éducatif – Des situations pour réussir*. Ed. A. Colin.

### Références

- [1] V. BONNOT et J.-C. CROIZET. « Stereotype internalization and women's math performance: The role of interference in working memory ». *Journal of Experimental Social Psychology* 43, n° 6 (2007), p. 857–866. doi : 10.1016/j.jesp.2006.10.006.
- [2] V. BONNOT et J.-C. CROIZET. « Stereotype threat and stereotype endorsement: their joint influence on women's math performance ». *Revue internationale de psychologie sociale* 24, n° 2 (2011). Retrieved from <http://www.cairn.info/revue-internationale-de-psychologie-sociale-2011-2-page-105.htm>, p. 105–120.
- [3] V. BONNOT et J. T. JOST. « Divergent effects of system justification salience on the academic self-assessments of men and women ». *Group Processes & Intergroup Relations* 17, n° 4 (2014), p. 453–464. doi : 10.1177/1368430213512008.
- [4] V. BONNOT et S. KRAUTH-GRUBER. « Gender Stereotype-Consistent Memories: How System Justification Motivation Distorts the Recollection of Information Related to the Self ». *The Journal of Social Psychology* (2017). doi : 10.1080/00224545.2017.1317232.
- [5] V. BONNOT et S. KRAUTH-GRUBER. « System-justifying behaviors: When feeling dependent on a system triggers gender stereotype-consistent academic performance ». *European Journal of Social Psychology* 46, n° 6 (2016), p. 776–782. doi : 10.1002/ejsp.2201.
- [6] A. CHATARD, S. GUIMOND et L. SELIMBEGOVIC. « "How good are you in math?" The effect of gender stereotypes on students' recollection of their school marks ». *Journal of Experimental Social Psychology* 43, n° 6 (2007), p. 1017–1024. doi : 10.1016/j.jesp.2006.10.024.
- [7] D. DUNNING et D. A. SHERMAN. « Stereotypes and tacit inference. » *Journal of personality and social psychology* 73, n° 3 (1997), p. 459.
- [8] J. S. ECCLES. « Understanding women's educational and occupational choices ». *Psychology of women quarterly* 18, n° 4 (1994), p. 585–609. doi : 10.1111/j.1471-6402.1994.tb01049.x.

- [9] P. GLICK et S. T. FISKE. « An ambivalent alliance: Hostile and benevolent sexism as complementary justifications for gender inequality. » *American Psychologist* **56**, n° 2 (2001), p. 109. doi : 10.1037/0003-066X.56.2.109.
- [10] M. E. HEILMAN, C. J. BLOCK et R. F. MARTELL. « Sex stereotypes: Do they influence perceptions of managers? » *Journal of Social behavior and Personality* **10**, n° 6 (1995), p. 237–252.
- [11] M. E. HEILMAN et J. J. CHEN. « Same behavior, different consequences: reactions to men's and women's altruistic citizenship behavior. » *Journal of Applied Psychology* **90**, n° 3 (2005), p. 431. doi : 10.1037/0021-9010.90.3.431.
- [12] P. HUGUET et I. REGNER. « Stereotype threat among schoolgirls in quasi-ordinary classroom circumstances. » *Journal of Educational Psychology* **99**, n° 3 (2007), p. 545. doi : 10.1037/0022-0663.99.3.545.
- [13] J. T. JOST et M. R. BANAJI. « The role of stereotyping in system-justification and the production of false consciousness ». *British journal of social psychology* **33**, n° 1 (1994), p. 1–27. doi : 10.1111/j.2044-8309.1994.tb01008.x.
- [14] K. LAURIN, A. C. KAY et S. SHEPHERD. « Self-stereotyping as a route to system justification ». *Social Cognition* **29**, n° 3 (2011), p. 360–375. doi : 10.1521/soco.2011.29.3.360.
- [15] D. MARTINOT, C. BAGÈS et M. DÉSSERT. « French children's awareness of gender stereotypes about mathematics and reading: When girls improve their reputation in math ». *Sex Roles* **66**, n° 3-4 (2012), p. 210–219. doi : 10.1007/s11199-011-0032-3.
- [16] L. A. RUDMAN et E. BORGIDA. « The afterglow of construct accessibility: The behavioral consequences of priming men to view women as sexual objects ». *Journal of Experimental Social Psychology* **31**, n° 6 (1995), p. 493–517. doi : 10.1006/jesp.1995.1022.
- [17] C. M. STEELE. « A threat in the air: How stereotypes shape intellectual identity and performance. » *American psychologist* **52**, n° 6 (1997), p. 613. doi : 10.1037/0003-066X.52.6.613.
- [18] C. VERNIERS et D. MARTINOT. « Perception of students' intelligence malleability and potential for future success: Unfavourable beliefs towards girls ». *British Journal of Educational Psychology* **85**, n° 3 (2015), p. 289–299. doi : 10.1111/bjep.12073.
- [19] C. VERNIERS et al. « How gender stereotypes of academic abilities contribute to the maintenance of gender hierarchy in higher education ». *Men and Women in Social Hierarchies*, eds K. Faniko, F. Lorenzi-Cioldi, O. Sarrasin, and E. Mayor (London: Routledge) (2015).



**Virginie BONNOT**

Virginie Bonnot est enseignante-chercheuse en Psychologie sociale au laboratoire de psychologie sociale : Menaces et Société à l'université Paris Descartes, Sorbonne Paris Cité.



## ... un perfectoïde

• B. LE STUM

Avant de commencer, je tiens à préciser que je n'ai jamais apporté aucune contribution à la théorie des perfectoïdes et que je n'ai jamais utilisé ces objets dans le cadre de mon travail. Je vais donc simplement tenter de partager en toute innocence mon enthousiasme pour ces idées.

### 1. Une simple analogie ?

Il y a une analogie troublante entre les entiers naturels et les polynômes. Tout entier naturel s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire finie

$$n = a_d p^d + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = \sum_{i=0}^d a_i p^i$$

où  $p \geq 2$  est un entier naturel fixé et  $0 \leq a_0, \dots, a_d < p$ . C'est l'écriture en base  $p$  ou écriture  $p$ -gésimale si vous préférez. Nous pouvons prendre  $p = 10$  mais nous supposons plutôt que  $p$  est premier. D'un autre côté, tout polynôme s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire finie

$$f(t) = a_d t^d + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = \sum_{i=0}^d a_i t^i$$

avec  $a_0, \dots, a_d \in k$  où  $k$  est un corps donné. Nous pouvons même transformer cette analogie en une bijection en choisissant  $k = \mathbb{F}_p$  (c'est-à-dire le corps à  $p$  éléments  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ) :

$$\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t] \\ \sum_{i=0}^d a_i p^i \longmapsto \sum_{i=0}^d \bar{a}_i t^i$$

Nous disposons d'une addition et d'une multiplication de chaque côté. Malheureusement notre bijection n'est pas compatible avec ces opérations. Comme nous l'avons tous appris à l'école, lorsque

nous ajoutons des entiers, il ne faut pas oublier la retenue. Lorsque nous additionnons des polynômes, ce n'est plus nécessaire. Si nous considérons  $\mathbb{N}$  comme l'objet de base de l'arithmétique (ou plus précisément de la géométrie arithmétique) et  $k[t]$  comme l'objet de base de la géométrie (ou plus précisément de la géométrie algébrique), nous dirons que le versant arithmétique comporte des difficultés qui s'effacent en géométrie. Se pose alors la question suivante : pouvons-nous modifier notre analogie de manière à ce que les opérations algébriques d'un côté et de l'autre se correspondent ? Il sera alors possible de transférer certains résultats connus de la géométrie vers l'arithmétique où les défis sont souvent plus ardues. C'est une réponse positive à cette question que fournit la théorie des perfectoïdes.

### 2. Un corps perfectoïde (ou deux)

Nous revenons à notre bijection entre  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{F}_p[t]$  et allons tâcher de la prolonger de différentes manières.

Avant toute chose, remarquons que nous pouvons autoriser les puissances négatives et que nous obtenons ainsi une bijection

$$\mathbb{N}[1/p] \longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t, t^{-1}] \\ \sum_{i=-e}^d a_i p^i \longmapsto \sum_{i=-e}^d \bar{a}_i t^i$$

entre les  $p$ -gésimaux (décimaux en base  $p$ ) positifs et les polynômes de Laurent (fractions rationnelles ayant au plus un pôle à l'origine).

Alternativement, nous pouvons autoriser les sommes infinies et obtenir une bijection

$$\mathbb{Z}_p \longleftrightarrow \mathbb{F}_p[[t]] \\ \sum_{i \geq 0} a_i p^i \longmapsto \sum_{i \geq 0} \bar{a}_i t^i$$

entre l'anneau des entiers  $p$ -adiques et celui des séries formelles (ce sont deux anneaux de valuation discrète<sup>1</sup> complets). C'est ce que l'on appelle le processus de *complétion*. Afin de préciser cette idée, rappelons que nous disposons d'une valeur absolue sur l'ensemble des entiers naturels, la *valeur absolue  $p$ -adique*, donnée par  $|n| = 1/p^v$  si

$$n = a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} + \dots + a_v p^v \quad \text{avec } a_v \neq 0.$$

Cela mesure la divisibilité de  $n$  par  $p$ . Une valeur absolue va toujours induire une distance en posant tout simplement  $d(m, n) = |n - m|$ . Le processus de complétion provient alors de la théorie des espaces métriques. Les opérations algébriques, tout comme la valeur absolue, se prolongent alors par continuité. Si nous définissons de la même façon la *valeur absolue  $t$ -adique* du côté des polynômes (normalisée par  $|t| = 1/p$ ), notre bijection est alors une isométrie.

Nous pouvons autoriser simultanément les puissances négatives et les sommes infinies, ce qui fournit une bijection

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_p &\longleftrightarrow \mathbb{F}_p((t)) \\ \sum_{i \geq -e} a_i p^i &\longmapsto \sum_{i \geq -e} \bar{a}_i t^i \end{aligned}$$

entre le corps des nombres  $p$ -adiques et celui des séries de Laurent (ce sont les corps des fractions des anneaux précédents). Cette correspondance n'est toujours pas compatible avec les opérations algébriques.

La véritable magie va apparaître quand nous allons admettre les puissances fractionnaires. Il s'agit de l'étape de « perfectisation ». En effet, nous pouvons déjà remarquer que, pour  $n$  fixé, il existe une bijection

$$\begin{aligned} \mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^n}}] &\longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}] \quad , \\ \sum_{i=0}^d a_i p^{\frac{i}{p^n}} &\longmapsto \sum_{i=0}^d \bar{a}_i t^{\frac{i}{p^n}} \end{aligned}$$

et nous pouvons ensuite passer à la limite sur  $n$  pour obtenir une bijection

$$\mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^\infty}}] \longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}],$$

en envoyant une somme finie  $\sum a_r p^r$  avec  $r \in \mathbb{N}[1/p]$  sur la somme  $\sum \bar{a}_r t^r$ . Nous pouvons ensuite compléter et obtenir une bijection

$$\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]} \longleftrightarrow \widehat{\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]}$$

1. Un anneau de valuation discrète est un anneau local intègre principal.  
 2. Un *anneau de valuation* est un anneau intègre  $A$  satisfaisant à  $\forall x, y \in A, x \mid y$  ou  $y \mid x$ .  
 3. Un *corps perfectoïde* est un corps complet  $K$  pour une valuation non discrète de rang un dont le corps résiduel est de caractéristique  $p > 0$  et tel que la puissance  $p$ -ième soit surjective modulo  $p$  sur l'anneau  $K^\circ$  des entiers de  $K$ .

entre deux anneaux (ce sont des anneaux de valuation<sup>2</sup> non discrète, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas noethériens). En autorisant les puissances négatives, nous obtenons une bijection entre leurs corps de fractions

$$\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} \longleftrightarrow \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}.$$

On dit que  $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})}$  est un *corps perfectoïde*<sup>3</sup> et que  $\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]}$  est son anneau d'entiers. De même, le corps  $\widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}$  est aussi un corps perfectoïde appelé le *basculé* de  $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})}$ . Son anneau d'entiers est  $\widehat{\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]}$ .

### 3. Le basculement

Après avoir agrandi nos objets, nous devons aussi modifier la correspondance de manière à pouvoir retrouver les opérations algébriques.

Cela repose sur l'observation fondamentale suivante : nous avons un *isomorphisme d'anneaux*.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) &\xrightarrow{\simeq} \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}]/(t) \\ p^{1/p^n} &\longleftrightarrow t^{1/p^n}. \end{aligned}$$

C'est assez simple à voir si nous construisons en fait l'isomorphisme inverse. Tout d'abord, il existe un unique morphisme d'anneaux

$$\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p)$$

(car ce dernier est un anneau de caractéristique  $p$ ). Nous pouvons le prolonger à  $\mathbb{F}_p[t]$  en envoyant  $t$  sur  $0$ . Si nous fixons  $n$ , ce dernier morphisme se prolonge ensuite de manière unique en

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p[t][X] &\longrightarrow \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) \\ X &\longmapsto p^{1/p^n} \end{aligned}$$

dont le noyau est exactement  $(t, X^{p^n} - t)$ . Nous obtenons ainsi un morphisme injectif

$$\mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}]/(t) \hookrightarrow \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p)$$

et il suffit de passer ensuite à la limite sur  $n$ .

L'étape suivante consiste à extraire des racines  $p$ -ièmes de chaque côté. À cette fin, nous écrirons (si  $G$  est un monoïde)

$$\varprojlim_{x \rightarrow x^p} G = \{(\dots, x_2, x_1, x_0), \quad x_i \in G, x_{i+1}^p = x_i\}.$$

Nous disposons alors de la suite d'isomorphismes (le premier étant seulement *multiplicatif*)

$$\begin{aligned} \varprojlim_{x \rightarrow x^p} \widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]} &\simeq \varprojlim_{x \rightarrow x^p} \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) \\ &\simeq \varprojlim_{x \rightarrow x^p} \mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]/(t) \simeq \widehat{\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]}. \end{aligned}$$

Je ne vais pas entrer dans les détails mais nous pouvons dire que la bijection de gauche s'obtient facilement en utilisant le fait que l'anneau  $\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]}$  est complet pour la topologie  $p$ -adique et que son quotient modulo  $p$  est exactement  $\mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p)$ . C'est un argument analogue qui sert de l'autre côté mais nous utilisons de plus le fait que  $\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]$  est un anneau parfait (la puissance  $p$ -ième est un automorphisme). Finalement, nous obtenons un isomorphisme de corps :

$$\begin{aligned} \varprojlim_{x \rightarrow x^p} \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} &\xrightarrow{\simeq} \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}. \\ (\dots, p^{1/p^2}, p^{1/p}, p) &\longleftrightarrow t \end{aligned}$$

Il faut bien sûr préciser les lois à gauche (car il ne s'agit pas d'une limite au sens des anneaux). La multiplication se fait terme à terme :

$$(\dots, x_2, x_1, x_0)(\dots, y_2, y_1, y_0) = (\dots, x_2y_2, x_1y_1, x_0y_0).$$

L'addition demande cependant un peu plus d'attention. Nous aurons

$$(\dots, x_2, x_1, x_0) + (\dots, y_2, y_1, y_0) = (\dots, z_2, z_1, z_0)$$

avec, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$z_i = \lim_n (x_{i+n} + y_{i+n})^{p^n},$$

la limite étant prise pour la topologie  $p$ -adique.

## 4. Des presque mathématiques

On définit plus généralement la notion de corps perfectoïde  $K$ . Son basculé est un corps perfectoïde

de caractéristique  $p > 0$  donné ensemblistement par la formule

$$\varprojlim_{x \rightarrow x^p} K =: K^b,$$

les lois étant celles décrites ci-dessus. Notons qu'un corps perfectoïde de caractéristique  $p > 0$  est parfait, ce qui signifie exactement que  $K^b = K$ .

Le premier résultat significatif montre que les théories des équations algébriques sur  $K$  et sur  $K^b$  sont les mêmes (on rappelle que le groupe de Galois classe les extensions finies séparables d'un corps) :

**Théorème 1 (Fontaine, Wintenberger).** *On dispose d'un isomorphisme*

$$\text{Gal}(\bar{K}/K) \simeq \text{Gal}(\bar{K}^b/K^b).$$

Par exemple, pour étudier une équation algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ , quitte à remplacer  $p$  par une racine  $p^n$ -ième de  $p$  assez grande, il suffit de considérer l'équation correspondante sur  $\mathbb{F}_p((t))$ .

On définit encore plus généralement la notion d'*algèbre perfectoïde*  $A$ . Son basculé  $A^b$  est alors construit de la même façon que dans le cas d'un corps. La notion qui correspond à celle d'extension finie séparable de corps est celle de morphisme étale d'algèbres.

Le théorème de Fontaine et Wintenberger se généralise alors comme suit :

**Théorème 2 (Scholze).** *Le basculement induit une équivalence entre la catégorie des algèbres perfectoïdes sur  $K$  et celle des algèbres perfectoïdes sur  $K^b$ . De plus, un morphisme est étale si et seulement si son basculé est étale.*

La démonstration repose sur les presque mathématiques de Faltings qui ont été développées par Gabber et Ramero. Désignons par  $K^\circ$  l'anneau des entiers de  $K$  et par  $K^{\circ\circ}$  son idéal maximal. Une *presque algèbre* sur  $K^\circ$  est une algèbre « à  $K^{\circ\circ}$ -torsion près » (une définition précise demande bien plus de soin). On dispose alors de la suite d'équivalences

$$\begin{array}{ccc} \{K\text{-alg. perf.}\} & & \{K^b\text{-alg. perf.}\} \\ \Big| \simeq & & \Big| \simeq \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{presque} \\ K^\circ\text{-alg. perf.} \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} \text{presque} \\ K^{\circ\circ}\text{-alg. perf.} \end{array} \right\} \\ \Big| \simeq & & \Big| \simeq \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{presque} \\ K^\circ/\pi\text{-alg. perf.} \end{array} \right\} & \simeq & \left\{ \begin{array}{c} \text{presque} \\ K^{\circ\circ}/\pi^b\text{-alg. perf.} \end{array} \right\} \end{array}$$



Ici,  $\pi$  est un élément topologiquement nilpotent non nul de  $K$  tel que  $\pi \mid p$  et  $\pi^b$  désigne un système de racines  $p^n$ -ème de  $\pi$ . L'équivalence du bas résulte alors d'un isomorphisme

$$K^\circ/(\pi) \simeq K^{b^\circ}/(\pi^b)$$

qui provient directement des définitions. On remarquera ensuite que la suite d'équivalences de droite est un cas particulier de celle de gauche car  $K^b$  est lui-même un corps perfectoïde. D'autre part, la première de ces équivalences résulte immédiatement des définitions. C'est la seconde qui nécessite une étude fine des relèvements de presque algèbres.

Il faut ensuite vérifier que la propriété d'être étale est préservée, ce qui demande un travail conséquent (théorème de presque pureté généralisé).

## 5. Un peu de géométrie

Comme nous le verrons plus bas, on peut construire des *espaces perfectoïdes* à partir des algèbres perfectoïdes. Nous disposons encore d'un processus de basculement qui va associer un espace perfectoïde  $X^b$  à un espace perfectoïde  $X$ .

Le théorème 2 prend alors la forme compacte suivante :

**Théorème 3 (Scholze).** *Le basculement induit une équivalence entre les gros sites étales de  $K$  et de  $K^b$ .*

Rappelons qu'un *site* est une catégorie munie d'une topologie et qu'un morphisme est dit *étale* s'il satisfait le critère différentiel d'un difféomorphisme local. En particulier, c'est un homéomorphisme local, si bien que  $X^b$  sera toujours homéomorphe à  $X$ .

Voyons comment nous pouvons construire ces espaces perfectoïdes. Les briques de la géométrie algébrique s'identifient aisément à des spectres maximaux d'algèbres de type fini sur un corps (c'est le Nullstellensatz de Hilbert). La même démarche peut fonctionner en géométrie analytique comme l'a montré Tate avec la géométrie analytique rigide. Mais, ainsi que Grothendieck nous l'a appris, en géométrie arithmétique, il est nécessaire de considérer plus généralement les spectres premiers (les idéaux maximaux ne sont pas préservés par image inverse). Nous pouvons aussi utiliser le langage des valuations car un idéal premier correspond à une valuation (additive) de hauteur nulle donnée par

$$v(f) = 0 \Leftrightarrow f \notin \mathfrak{p}.$$

Lorsque les anneaux viennent avec une topologie, il apparaît qu'il vaut mieux tenir aussi compte des valuations de hauteur supérieure, et il faut requérir que celles-ci soient continues. C'est la démarche entreprise indépendamment par Berkovich (hauteur au plus un) et Huber. Les espaces adiques sont donc construits ainsi en prenant comme briques, des spectres adiques, qui sont des ensembles de valuations. C'est le langage que nous utilisons ci-dessous.

En partant des algèbres de type fini, nous obtenons les variétés « algébriques » : par exemple,  $K[X]$  donnera naissance à la droite affine  $\mathbb{A}_K^1$ , puis en passant aux produits, à l'espace affine  $\mathbb{A}_K^n$ , et en recollant, à l'espace projectif  $\mathbb{P}_K^n$ . De même, avec les algèbres  $\pi$ -adiquement de type fini, nous obtenons les variétés « rigides » : le disque fermé  $\mathbb{D}$  à partir de  $\widehat{K[X]}$ , puis le polydisque, et de nouveau l'espace projectif en recollant. En partant des algèbres perfectoïdes, nous trouvons les variétés (ou espaces) perfectoïdes : l'algèbre  $\widehat{K[X^{1/p^\infty}]}$  fournit le disque perfectoïde, puis le polydisque perfectoïde et enfin l'espace projectif perfectoïde que nous noterons  $\varprojlim \mathbb{P}_K^n$ .

Il est aisé de voir que

$$(\varprojlim \mathbb{P}_K^n)^b = \varprojlim \mathbb{P}_{K^b}^n.$$

En utilisant le théorème fondamental, on en déduit un morphisme (lire de droite à gauche)

$$\mathbb{P}_K^{n,\text{et}} \leftarrow (\varprojlim \mathbb{P}_K^n)^{\text{et}} \simeq (\varprojlim \mathbb{P}_{K^b}^n)^{\text{et}} \simeq \mathbb{P}_{K^b}^{n,\text{et}}$$

(nous avons utilisé les petits sites étales mais ce sont aussi des applications continues). Remarquons que la flèche de droite est un isomorphisme car  $K^b$  est de caractéristique  $p > 0$ .

## 6. Et quelques applications

La conjecture monodromie-poids prédit une relation précise entre les actions de l'inertie et du Frobenius sur la cohomologie étale d'une variété algébrique. On peut alors montrer le résultat suivant :

**Théorème 4 (Scholze).** *N'importe quelle hypersurface projective satisfait la conjecture monodromie-poids.*

Ce résultat est plus généralement vrai pour des intersections complètes dans des variétés toriques. En caractéristique nulle, celui-ci n'était connu que pour les courbes et les surfaces. La méthode consiste à se ramener à la caractéristique positive, où la conjecture a été démontrée par Deligne.

On utilise alors le basculement, et plus précisément l'application

$$\mathbb{P}_{K^b}^{n,\text{et}} \rightarrow \mathbb{P}_K^{n,\text{et}}$$

introduite ci-dessus. On tire l'hypersurface en arrière et on l'approche par une hypersurface algébrique.

La théorie des perfectoïdes permet aussi d'obtenir un analogue ultramétrique du théorème de Hodge. Rappelons que celui-ci stipule que si  $X$  est une variété kählérienne compacte, on a un isomorphisme

$$H^n(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega_X^j).$$

La conjecture de Hodge-Tate pour les variétés analytiques rigides est donc maintenant démontrée :

**Théorème 5 (Scholze).** *Si  $X$  est une variété analytique rigide propre et lisse sur une extension finie  $K$*

*de  $\mathbb{Q}_p$ , il existe un isomorphisme équivariant*

$$\varprojlim H_{\text{et}}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega_X^j) \otimes_K \mathbb{C}_p(-j).$$

Afin de prouver ce théorème, on doit introduire la topologie pro-étale et montrer que les variétés affinoïdes perfectoïdes n'ont presque pas de cohomologie supérieure modulo  $p$ .

Dernier exemple : près de 60 ans après avoir été énoncée, la conjecture du facteur direct de Hochster est aussi devenue récemment un théorème :

**Théorème 6 (André).** *Si  $A$  est un anneau régulier, tout morphisme injectif fini  $A \hookrightarrow B$  possède une section  $A$ -linéaire.*

L'idée fondamentale consiste à utiliser la trace. On peut se localiser au dessus d'un certain  $p$  mais il faut alors extraire des racines  $p$ -èmes et c'est là que les perfectoïdes interviennent.

## Références

- [1] J.-M. FONTAINE. « Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze) ». *Astérisque*, n° 352 (2013). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058, Exp. no. 1057, x, 509–534.
- [2] J.-M. FONTAINE et J.-P. WINTENBERGER. « Extensions algébrique et corps des normes des extensions APF des corps locaux ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288**, n° 8 (1979), A441–A444. ISSN : 0151-0509.
- [3] O. GABBER et L. RAMERO. *Almost ring theory*. **1800**. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. vi+307.
- [4] R. HUBER. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996, p. x+450.
- [5] P. SCHOLZE. « Perfectoid spaces ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **116** (2012), p. 245–313.
- [6] P. SCHOLZE. « Perfectoid spaces: a survey ». In : *Current developments in mathematics 2012*. Int. Press, Somerville, MA, 2013, p. 193–227.



### Bernard LE STUM

IRMAR, université Rennes 1  
 bernard.le-stum@univ-rennes1.fr  
<https://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum>

Bernard Le Stum est Maître de Conférences à l'université Rennes 1 et chercheur à l'IRMAR. Ses travaux portent essentiellement sur la cohomologie rigide et les isocristaux surconvergens.

Mille mercis à Alberto Vezzani d'avoir bien voulu lire et commenter une version provisoire de cette note.



## Un vivier négligé d'étudiants en Sciences

• G. COURTADE-COULOMB

La pénurie de professeurs de mathématiques dans le secondaire, ainsi que la diminution du nombre de jeunes chercheurs de cette discipline en France sont inquiétantes pour notre pays. Elle explique les engagements tous azimuts des mathématiciens pour inverser cette tendance, tant en popularisant les mathématiques auprès du grand public qu'en intervenant dans les établissements d'enseignement pour faire découvrir la recherche mathématique. Ancien enseignant-chercheur en mathématiques, je me tiens au courant de leurs actions à travers de multiples contacts ainsi que la lecture de journaux grand public et de revues plus spécialisées (Je suis abonnée à la *Gazette*, à *Tangente* et à *La Recherche*). Je n'ai pourtant eu connaissance d'aucune action entreprise en direction des bacheliers généraux qu'une vocation avait détournés d'un baccalauréat S et qui cherchaient à se réorienter après un ou deux ans d'études post-bac. Je le regrettais : mon expérience personnelle me conduit à penser que, parmi ces jeunes, un nombre non négligeable aimait les mathématiques et seraient prêts à se reconvertir dans cette discipline si on les aidait à se remettre au niveau du bac S.

Au cours d'une fête de famille, j'ai rencontré récemment un petit cousin, actuellement élève dans une École de Commerce. Il m'a fait découvrir l'APILS<sup>1</sup>, qu'il avait suivie l'année précédente à la Faculté des Sciences de Pau. Il en était personnellement satisfait, mais trouvait regrettable que cette formation soit peu connue et ne donne pas lieu à la délivrance d'un diplôme : un de ses amis s'est vu refuser l'entrée en BTS (alors qu'il avait acquis le niveau mathématique demandé); le meilleur de sa promotion, qui souhaitait faire une classe préparatoire aux grandes Écoles, a été obligé de passer le baccalauréat en candidat libre pour y être admis. Je lui ai demandé si d'autres enseignements de ce type

existaient en France. Il avait seulement « entendu parler d'une année préparatoire à Montpellier ».

De retour à la maison j'ai fait quelques recherches, et je me suis aperçue qu'il existait au moins une dizaine d'années de ce genre en France (J'en donne une liste non exhaustive à la fin de ce texte). Les noms diffèrent suivant les universités : à Nantes, elle s'appelle REUSCIT<sup>2</sup>; nom qui me paraît accrocheur, et décrit bien l'objectif de cet enseignement. En effet il s'agit d'une année, à l'université, de mise au niveau d'une Terminale S dans les disciplines scientifiques. Certaines formations n'acceptent que des bacheliers généraux, d'autres également des bacheliers technologiques. À l'exception de la préparation aux cursus scientifiques d'Orsay, les promotions semblent petites (entre 30 et 40 élèves).

Il me paraît important que ces formations soient connues du grand public. Je pense que la SMF, et d'autres sociétés savantes amies, pourraient y contribuer de façon décisive. D'où la rédaction de cette « Tribune Libre ».

Il faudrait d'abord faire circuler l'information, dans la communauté scientifique et en particulier entre les universités concernées.

Il faudrait promouvoir la communication sur ces formations auprès du grand public. Cela ne sera sans doute possible qu'une fois :

- dégagé les points communs à ces formations;
- bâti un réseau regroupant des filières d'un an d'études post bac et trouvé un nom accrocheur pour le réseau;
- créé une association des anciens étudiants, permettant de connaître leur parcours professionnel et de le mettre en valeur;
- mis au point une formule de validation des connaissances, reconnaissant que les étu-

1. Année de Préparation à l'Insertion en Licence Scientifique.

2. Réorientation vers les Études Universitaires Scientifiques et Technologiques.

dians ont acquis le niveau scientifique de la Terminale S, pour leur permettre de poursuivre les études de leur choix dans n'importe quel endroit en France.

Il s'agit là, me semble-t-il, du point le plus important. Une solution devrait pouvoir être trouvée en s'inspirant des formules mises au point pour valider au niveau universitaire des acquis professionnels.

Il me paraît souhaitable également, de multiplier de telles remises à niveau universitaires sur tout le territoire national : pour aider des jeunes, mais également parce que la présence d'un tel enseignement aidera tous les enseignants de la première année d'études universitaires scientifiques ; directement ou indirectement grâce à l'expertise pédagogique acquise.

### Liste d'années universitaires de réorientations vers les études scientifiques et technologiques

Il s'agit naturellement d'une liste non exhaustive. J'en ai exclu les universités d'Angers, Rennes 1, Paris Diderot et Lorraine, qui proposent aux bacheliers n'ayant pas le bac S d'effectuer la première année de licence en deux ans (en Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences de la Vie et de la Terre). Pour chaque formation, j'ai indiqué l'intitulé de cette année de réorientation, ainsi que l'adresse courriel du secrétariat pédagogique.

- Université de Bordeaux (Centre d'Agen).  
*Mise à niveau Études Supérieures Scientifiques*  
*dusa@u-bordeaux.fr*
- Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand).  
*Préparation aux Études Scientifiques*  
*Info-pes@univ-bpclermont.fr*
- Université Le Havre.  
*Diplôme Universitaire de Préparation aux Études Scientifiques*  
*dupres@univ-lehavre.fr*
- Université Lyon 1.  
*Année Universitaire Préparatoire*  
*aup@univ-lyon1.fr*
- Université de Montpellier.  
*Année Préparatoire aux Études Supérieures Scientifiques*  
*fds.apess@umontpellier.fr*
- Université de Nantes.  
*Réorientation vers les Études Scientifiques et Technologiques*  
*reuscit@univ-nantes.fr*
- Université de Paris-Sud (Orsay).  
*Préparation aux cursus scientifiques d'Orsay*  
*pcso.sciences@u-psud.fr*
- Université de Pau et des Pays de l'Adour.  
*Année de Préparation à l'Insertion en Licence Scientifique*  
*ufr-sciences-pau.univ.fr*



## L'interdisciplinarité en mathématique-biologie : le rôle de la cid 51

L'interdisciplinarité est au cœur de la politique scientifique du CNRS, qui y voit une spécificité de la recherche fondamentale, de ses transformations et de ses applications sociétales. L'interdisciplinarité fait partie des processus d'investigation et de création scientifiques, la méthode scientifique étant par nature interdisciplinaire. À quoi ressemblerait la physique sans la mathématique, qui est justement le « langage dans lequel les lois de l'Univers sont écrites » ? Réciproquement la physique a été une source inépuisable de questions pour les mathématiques, à la base de la création de nombreux concepts et théories en analyse, algèbre, géométrie, etc.

Les interconnexions de la biologie et des mathématiques sont anciennes, avec la modélisation des dynamiques de populations, ou le développement des fondements de la génétique, construits sur des modèles probabilistes. Comme dans le cas de la physique, l'échange des questions et des connaissances est totalement réciproque avec des retombées essentielles pour le développement des deux disciplines [2]. À première vue, l'interaction des mathématiques avec la biologie pourrait se résumer à la mise à disposition d'outils techniques et de méthodologies mathématiques : calculs analytiques et numériques, traitement de données, logique, combinatoire, etc. Cela est vrai dans une certaine mesure, et peut être considéré comme banal aujourd'hui. Cependant, cette vision ne correspond pas aux véritables échanges entre les deux disciplines, car l'*objet biologique* est très différent de l'*objet physique* qui continue à inspirer les mathématiques. Certaines caractéristiques du vivant nécessitent en effet de nouvelles approches et de nouvelles techniques mathématiques. Nous pouvons d'ailleurs raisonnablement imaginer l'émergence de paradigmes innovants, qui pourront changer en profondeur la façon de faire de la science. Les exemples sont nombreux et témoignent de processus en cours rapides et parfois révolutionnaires qui touchent aussi à l'organisation interne de la re-

cherche, avec la création de nouvelles figures professionnelles. Cette dynamique de création et de (re)-structuration est naturellement et forcément interdisciplinaire.

Donnons quelques exemples. Big data : le traitement de l'énorme masse de données biologiques, en grande partie produites par les projets de séquençage de génomes, nécessite la conception de nouveaux algorithmes de compression, de filtrage, d'indexation et de codification de l'information. Comme le souligne E. Candès [1] « les statistiques traditionnelles ne sont plus efficaces et doivent donc s'adapter aux grandes dimensions ». Cette adaptation pose des défis théoriques avec l'élaboration de méthodes originales et des concepts qui touchent à différentes branches des mathématiques. « Nous devons mettre en place les outils permettant une analyse intelligente des données récoltées (des "Big Data" aux "Smart Data") et c'est là que se retrouve la nécessité absolue d'une interaction avec des disciplines comme les mathématiques ou l'informatique » [3]. L'optimisation des algorithmes d'apprentissage utilise des techniques d'analyse convexe pour les EDP en régime aléatoire permettant ainsi des rapprochements inattendus et féconds. L'univers biologique est souvent structuré en réseaux qui, par leur nature, ont un caractère évolutif et aléatoire. Pour approcher et appréhender ces systèmes complexes, les mathématiques doivent repenser en profondeur la théorie des graphes sous leurs aspects probabilistes, topologiques et combinatoires. Les questions d'inférence et de *deep learning* (apprentissage profond) touchent aux fondements de la théorie de l'information avec en ligne de mire le fonctionnement du cerveau et sa formalisation dans l'intelligence artificielle. Des méthodes d'analyse fonctionnelle et d'algèbre d'opérateurs sont de plus en plus utilisées pour décrire l'évolution des systèmes biologiques ouverts et loin de l'équilibre avec à l'appui des techniques d'homogénéisation, de calcul stochastique, de régularisation et d'approximation non-linéaire.

L'utilisation des bases d'ondelettes pour la compression et le débruitage a permis des avancées spectaculaires en traitement d'images médicales. Il n'est pas inutile de rappeler que les systèmes dynamiques ont trouvé dans la dynamique des populations une de leurs sources primordiales. Des phénomènes typiques des êtres vivants, comme l'émergence, l'auto-organisation, l'auto-régulation, la stabilité, continuent d'inspirer et d'interroger la mécanique statistique rigoureuse et la théorie ergodique, ainsi que l'analyse des processus stochastiques et des équations différentielles. À cela s'ajoute le caractère multi-échelle, qui traduit l'enchevêtrement de phénomènes couplés à différents niveaux de description du vivant (de la cellule à l'organisme, de l'individu à l'écosystème, du développement d'un organisme à l'évolution d'une espèce). Les modèles mathématiques sous-jacents nécessitent de nouvelles méthodes, de nouvelles idées, de nouvelles interactions entre scientifiques de formations différentes afin d'apporter des réponses quantitatives aux questions posées.

On voit donc comment les questions que la biologie pose aux mathématiques et à l'inverse les cadres formels et heuristiques que les mathématiques adressent à la biologie, ont d'un côté des référents immédiats et tangibles dans l'*objet vivant*, et de l'autre se configurent comme des défis intellectuels de grande qualité. Ces défis sont de nature à interpeller les mathématiciens de tous horizons, celles et ceux dévoués aux structures conceptuelles aussi bien que désirant des appli-

cations plus directes de leurs recherches. Cette synergie des mathématiques avec la biologie, a poussé le CNRS avec ses Instituts INSB (biologie), INS2I (sciences de l'information), INSMI (mathématique) et INP (physique), à pourvoir des postes de chercheur dont le recrutement est géré par la commission interdisciplinaire CID 51 : modélisation, et analyse des données et des systèmes biologiques : approches informatiques, mathématiques et physiques. L'INSMI attribue régulièrement des postes à cette CID, à niveau de CR et de DR 2<sup>e</sup> classe. Nous invitons la communauté mathématique dans les universités et dans les laboratoires à susciter des candidatures auprès de jeunes chercheurs intéressés par cette interface mathématique-biologie qui constitue sans doute une des plus fascinantes directions de la recherche dans les années à venir. Comme l'écrit C. Jessus [3], directrice de l'institut des sciences biologiques (INSB) : « Nous ne sommes qu'au début de cette quête dont le succès dépend d'une rupture avec les approches du passé : elle requiert des modèles mathématiques prédictifs alimentés par les outils de la physique et les données de la cartographie du vivant ».

Pour la CID 51 : Vincent Calvez (Institut Camille Jordan, CNRS et UCB Lyon 1), Franck Picard (LBBE, Laboratoire de Biométrie et Biologie Evolutive, UCB Lyon 1), Sandro Vaienti (université de Toulon et CPT Marseille).

Contact : S Vaienti (Président de la CID 51), vaienti@cpt.univ-mrs.fr

## Références

- [1] G. CARIU. « Avec l'acquisition massive de données, la science a changé ». *La Recherche*, n° 513 (2016).
- [2] J. E. COHEN. « Mathematics is biology's next microscope, only better; biology is mathematics' next physics, only better ». *PLoS biology* 2, n° 12 (2004).
- [3] C. JESSUS. *Étonnant vivant*. CNRS Éditions, 2017, p. 328. ISBN : 978-2-271-09403-2.



## Petits conseils L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X entre amis

• S. GOUËZEL

En ces temps d'économies généralisées, de plus en plus de revues laissent aux auteurs l'entière responsabilité de la mise en forme de leurs manuscrits, parfois pour d'excellentes raisons (journaux gratuits à la fois pour les auteurs et les lecteurs), mais pas toujours. Parallèlement, notre formation à L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X est souvent un peu approximative, pour ne pas dire inexistante. Il nous a donc semblé utile de rassembler quelques conseils sur ce thème, sous la forme d'un dialogue imaginaire. Les premières questions sont les plus importantes.

**J'ai compilé un fichier tex. Tout s'est bien passé, mais le fichier pdf produit est tronqué ou a des formules bizarres.**

Êtes-vous sûr que tout s'est vraiment bien passé à la compilation? Ces symptômes sont souvent le signe d'une erreur dans le fichier source, dont L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X n'a pas bien réussi à se sortir. Certains éditeurs lancent par défaut une compilation non interactive du fichier .tex, et informent ensuite des erreurs ou des avertissements qui se sont produits. *Il faut absolument tenir compte de ces erreurs et les éliminer*, sans quoi le fichier produit peut avoir toutes sortes de bizarreries! Les avertissements (warnings) sont souvent moins problématiques; ils indiquent tout de même que quelque chose ne va pas, il vaut mieux les prendre en compte si possible. Ceci dit, un `overflow hbox` de 0.3pt (un mot qui dépasse imperceptiblement dans la marge de droite) ne dérange – presque – personne.

**À quel moment faut-il utiliser des commandes de mise en forme manuelle comme `\textit` ou `\bf` ou `\vspace`?**

Jamais, malheureux! Cette réponse est un peu excessive mais essentiellement juste. Un des principes fondamentaux de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X est la séparation du fond et de la forme : l'auteur doit s'occuper du contenu de son texte sans se soucier de la mise en forme, qui sera prise en charge par la classe utilisée. Idéalement, toutes les instructions de forme doivent venir de la classe ou du préambule, ce qui permet

de modifier la mise en forme (les titres de section doivent-ils être en gras? en petites capitales? centrés? etc.) sans toucher au corps du texte.

Il existe des commandes *sémantiques* qu'on peut utiliser dans le corps du texte, charge à la classe de choisir la mise en forme qui correspond. Par exemple, dans la phrase précédente, j'ai tapé `\emph{sémantiques}` où `\emph` signifie que je veux insister sur le terme qui suit. La classe de la gazette le met en italique, d'autres classes pourraient choisir du gras ou du souligné à la place.

Comme toutes les règles, celle-ci peut bien sûr être ignorée du moment que c'est en connaissance de cause et après mûre réflexion!

**J'ai entendu dire que l'environnement `\eqnarray` était à éviter. Qu'en est-il vraiment?**

Effectivement, `eqnarray` se contente de créer un tableau en mode mathématique, sans faire attention aux espacements ou à la typographie, ce qui donne un résultat incohérent par rapport au reste du document. Le paquetage `amsmath` fournit des environnements beaucoup plus satisfaisants pour écrire des équations sur plusieurs lignes. En particulier, contrairement à `eqnarray`, son environnement `align` produit des espacements corrects et place correctement les numéros des équations dans les cas délicats. Il remplace avantageusement `eqnarray` à tous points de vue. Par exemple :

Avec `eqnarray*` :

$$\begin{array}{l} a = b, \\ c = d. \end{array}$$

Avec `align*` :

$$\begin{array}{l} a = b, \\ c = d. \end{array}$$

Avec `align`, l'espacement autour du signe égal est le même que dans l'équation en ligne  $a = b$ .

Au sujet des équations, on déconseille aussi l'usage de `$$` et `\begin{displaymath}` : il vaut mieux les remplacer par des blocs `\[...\]`, qui gèrent mieux les espacements dans les cas difficiles.

[J'ai toujours fait les bibliographies à la main. Est-ce que cela vaut le coup de changer ?](#)

On peut faire ses bibliographies à la main, c'est tout à fait acceptable. Mais on peut aussi utiliser `bibtex`, qui fait gagner un temps considérable une fois qu'il est mis en place (`biblatex`, plus récent et plus puissant, fonctionne sur le même principe mais il est encore peu accepté par les revues, à part la *Gazette*!). Le principe est d'avoir un fichier texte auxiliaire, disons `biblio.bib`, qui contient les informations sur les articles à citer (on peut les copier-coller depuis `mathscinet` ou `zentralblatt`). En fin de fichier `tex`, on met

```
\bibliography{biblio}
\bibliographystyle{alpha}
```

Après avoir ajouté des références (avec la commande `\cite` habituelle), il faut compiler en ligne de commande le fichier source (sans son extension) successivement avec `pdflatex` puis `bibtex` puis à nouveau `pdflatex`, ou utiliser les outils correspondants de votre éditeur de texte. La bibliographie est alors créée automatiquement, avec les options de formatage et de tri précisées par le fichier de style (`alpha` dans l'exemple précédent).

L'intérêt de cette approche est double. D'une part, si l'on réutilise les mêmes entrées d'un article à l'autre, pas besoin de les recopier. D'autre part, si un journal impose une autre mise en forme de la bibliographie, il suffit de changer le fichier de style.

[Dans un texte en français, les césures en fin de ligne se font correctement, sauf sur les mots accentués qui ne sont jamais coupés. Que faire ?](#)

Réponse courte : il manque dans le préambule la ligne `\usepackage[T1]{fontenc}`.

Réponse un peu plus longue : la version initiale de  $\TeX$  ne prévoyait pas les lettres accentuées, qui ont été ajoutées ensuite en superposant la lettre initiale et l'accent. Ainsi, une lettre accentuée n'est

pas un seul caractère, ce qui pose de multiples problèmes (césure impossible, mais aussi recherche dans le texte du pdf déficiente). L'encodage T1 fait en sorte que les lettres accentuées soient des vrais caractères, et résout donc tous ces problèmes.

[Quand je tape un intervalle comme  \$l = \]-1, 1\[\$ , je trouve les espaces bizarres.](#)

Quel joli euphémisme, bizarre... Oui, ces espaces sont vraiment laids (ou laides puisque l'espace du typographe est normalement féminine). La version correcte serait  $l = ]-1, 1[$ , obtenue en indiquant à  $\TeX$  que `]` est ici un délimiteur *ouvrant*, et non fermant comme il le présuppose. Ceci peut se faire à la main avec `\mathopen{]}`.

Ce problème apparaît souvent de manière moins évidente. Par exemple, `\sin x` donne  $|\sin x|$  tandis que `\mathopen{|\}\sin x \mathclose{|\}` donne  $|\sin x|$ , avec un espace plus adapté à gauche du sinus.

Pour séparer fond et forme, il vaut mieux introduire dans le préambule des macros qui s'occuperont de bien gérer les espacements. Le paquetage `mathtools` (très utile pour tout ce qui est typographie mathématique) introduit à cet effet une commande merveilleuse, qui s'utilise comme suit : `\DeclarePairedDelimiters{\IOuv}{\Iouv}` définit une macro `\IOuv` qui encadre son argument avec les délimiteurs `]` et `[`, le premier étant ouvrant et le second fermant. De plus, sont automatiquement définies des variantes comme `\IOuv[\big]{...}` (dont les délimiteurs sont de taille `\big`) ou `\IOuv*{...}` (dont les délimiteurs s'ajustent automatiquement à la taille du contenu, comme avec `\left` et `\right`). L'intervalle  $]-1, 1[$  s'obtient alors avec `\IOuv{-1,1}`.

[Y a-t-il d'autres pièges avec les espaces ?](#)

Dans les textes en anglais (mais pas en français), l'espace entre les phrases est traditionnellement plus grand que l'espace entre les mots.  $\TeX$  insère ainsi un espace plus grand après un point (sauf cas très particulier). Cela pose problème après des abréviations comme e.g. ou i.e. ou i.i.d. Il faut alors préciser à  $\TeX$  de mettre un espace de taille normale en tapant par exemple `i.i.d.\ random variables` ou `i.i.d.~ random variables`.



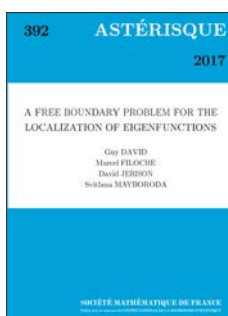
Pour aller plus loin, on trouve en ligne des documentations très recommandables, comme par exemple le paquetage `l2tabu` qui explique tout ce qu'il ne faut pas faire, ou le wikibook sur  $\text{\LaTeX}$ <sup>1</sup>. Les forums informatiques comme `tex.stackexchange`.

com sont également une source précieuse d'informations. Ceux qui sont attachés au papier pourront consulter par exemple [1]. Ceci dit, le plus efficace est certainement d'user et d'abuser d'un collègue expert, si vous en avez un sous la main!

## Références

- [1] D. BITOUZÉ et J.-C. CHARPENTIER.  *$\text{\LaTeX}$ , l'essentiel. Pour une prise en main rapide et efficace*. 1<sup>re</sup> éd. Pearson Education France, oct. 2010. 384 p. ISBN : 978-2-7440-7451-6. URL : <http://www.latex-pearson.org>.

## Revue Astérisque - Nouveautés



Vol. 392

### A Free Boundary Problem for the Localization of Eigenfunctions

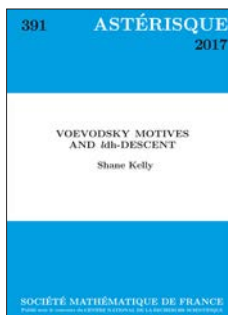
G. DAVID, M. FILOCHE, D. JERISON, S. MAYBORODA

ISBN 978-85629-863-3

2017 - 203 pages - Softcover. 17 x 24

Public: 45 € - Members: 32 €

We study a variant of the Alt, Caffarelli, and Friedman free boundary problem, with many phases and a slightly different volume term, which we originally designed to guess the localization of eigenfunctions of a Schrödinger operator in a domain. We prove Lipschitz bounds for the functions and some nondegeneracy and regularity properties for the domains.



Vol. 391

### Voevodsky motives and $l_dh$ -descent

S. KELLY

ISBN 978-2-85629-861-9

2017 - 125 pages - Softcover. 17 x 24

Public: 35 € - Members: 24 €

This work applies Gabber's theorem on alterations to Voevodsky's work on mixed motives. We extend many fundamental theorems to  $DM(k, \mathbb{Z}[1/p])$  where  $p$  is the exponential characteristic of the perfect field  $k$ . Two applications are an isomorphism of Suslin that compares higher Chow groups and étale cohomology, and calculation of the motivic Steenrod algebra.

Disponibles sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>



\*frais de port non compris

1. [en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Mathematics](http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Mathematics)



## Vie et œuvre scientifique de Jean-Pierre KAHANE

1926-2017

• H. QUEFFÉLEC

Jean-Pierre Kahane, Institut Henri Poincaré,  
juin 2017



© J. Le Rousseau

### 1. Biographie

Jean-Pierre Kahane est décédé à l'âge de 90 ans, le 21 juin 2017.

C'est bien tristement que, comme l'un de ses (nombreux) anciens élèves, j'écris ces quelques pages de témoignage sur le mathématicien et sur la personne.

Jean-Pierre Kahane est né le 11 décembre 1926 dans une famille de rationalistes (son père Ernest a été président de l'union rationaliste de France). Il a eu une vie de famille riche, avec son épouse Agnès, qu'il avait eu la douleur de perdre en 2015, et avec ses trois filles Geneviève, Françoise et Catherine, et ses nombreux petits-enfants et arrière-petits-enfants, avec qui il a pu jouer au Père Noël jusqu'à tout récemment. Après la disparition d'Agnès, il a eu la chance d'être très entouré par ses filles et leur famille.

Voici son parcours professionnel : après des classes préparatoires au lycée Henri IV, il entre en 1946 à l'École normale supérieure. Il entre ensuite au CNRS en 1950, et prépare sa Thèse d'État (maintenant Habilitation) sous la direction de Szolem Mandelbrojt, dont il vantait la gentillesse et la « rondeur », en dehors de ses qualités scientifiques. Après sa thèse, il est nommé Professeur à la faculté de Montpellier, puis à la toute récente université d'Orsay en 1961. Il y fera preuve d'une activité et d'un rayonnement considérables, dont voici quelques aspects.

### 2. Enseignement

Dans son exposé au Colloque Kahane de juillet 2016, Michèle Artigue a donné une description très précise et complète de ses activités liées à l'enseignement. Nous en disons juste quelques mots ici.

Jean-Pierre Kahane ne séparait pas vraiment Enseignement et Recherche, ce qui pouvait donner à ses cours de Maîtrise, notamment son cours de probabilités, un aspect « sportif » : il était célèbre auprès des Cachanais pour avoir une année démontré la loi forte des grands nombres à son troisième essai. Il était également célèbre pour s'être pas-

sionné, une autre année, pour le Loto : des bulletins de Loto lui sortaient des poches comme chez un parieur compulsif, et il avait pondu un problème autour de ce Loto (l'énoncé faisait environ six pages), dont il avait écrit lui-même le corrigé (20 pages environ), tout le monde autour de lui ayant déclaré forfait. Dans ce corrigé apparaissaient des formes fines du théorème de séparation de Hahn-Banach pour des convexes de matrices à coefficients positifs... Mais l'aspect très positif (sans jeu de mots) de cette attitude était que ses cours étaient toujours vivants, passionnants, créatifs, même sur les sujets les plus arides, comme les premières questions de cardinalité.

Par ailleurs, J.-P. Kahane a été directeur de la collection « Le mathématicien » aux Presses Universitaires de France, collection d'ouvrages de format modeste et peu onéreux, mais qui verra des publications remarquables comme par exemple le « Cours d'Arithmétique » de J. P. Serre, ou encore le « Analyse Combinatoire » de L. Comtet, et dont les succès nécessiteront des tirages avoisinant les 10 000 exemplaires, là où au départ les tirages étaient de l'ordre de 1000! (Il évoquait souvent cela avec amusement).

### 3. Administration et rôle à Orsay

J.-P. Kahane sera Président de l'université d'Orsay de 1976 à 1978 avant d'interrompre cette Présidence pour cause de problèmes cardiaques, qui le handicaperont jusqu'à la fin. Il restera à Orsay jusqu'à sa retraite en 1993 (il est également nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences en 1986), retraite qui a donné lieu à un très grand Colloque International, dont les Actes sont parus en 1995 au *Journal of Fourier Analysis and Applications*. Ensuite, il gardera dans cette université (et pas seulement, il devient membre de l'Académie des sciences en 1998) une présence et une activité scientifiques très importantes jusqu'à ces derniers jours. Il y donne en effet, au fameux séminaire d'Analyse Harmonique qu'il avait créé, un exposé sur les nombres premiers généralisés de Beurling, en avril 2017!

### 4. Travaux

J.-P. Kahane se qualifiait volontiers « d'amateurl », ce qui est à prendre au sens le plus élogieux du terme, mais décrit assez bien la variété de ses

centres d'intérêt en mathématiques (sans parler de son intérêt pour l'histoire des mathématiques au bon sens du terme, histoire des individus mais aussi des idées, nous y revenons plus loin). Il me semble plus précisément qu'il a eu trois grands centres d'intérêt mathématiques :

- Analyse Harmonique et Séries de Fourier, et lien avec l'Analyse Fonctionnelle (algèbres de Banach)
- Méthodes Probabilistes en Analyse et production de phénomènes bizarres (points lents du mouvement brownien, séries de Taylor pathologiques)
- Théorie Analytique des Nombres et emploi des méthodes d'Analyse Harmonique.

Je citerai quatre exemples des travaux correspondants, qui ont eu beaucoup d'influence et ont connu beaucoup d'extensions.

#### 4.1 – Le théorème de Kahane-Katznelson-de Leeuw

Ce théorème (1985) énonce qu'en gros, du point de vue de la taille, on ne peut rien dire de plus sur les coefficients de Fourier d'une fonction continue que sur ceux d'une fonction de carré sommable. Plus précisément : si la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est de carré sommable, il existe une fonction continue et  $2\pi$ -périodique  $f$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$|\widehat{f}(n)| \geq |c_n|.$$

Beaucoup de résultats partiels traînaient dans la littérature, on a ici une réponse « définitive » par des méthodes qu'il affectionnait : mélange de probabilités et de combinatoire. Les probabilités (inégalités de Khintchine) permettent d'avoir  $|\widehat{f}(n)| \geq |c_n|$  et  $f \in \bigcap_{p < \infty} L^p$ , le difficile étant de passer à  $f \in L^\infty$ , et c'est là qu'intervient la combinatoire. Après quoi la continuité d'une autre fonction majorante  $f$  nous est donnée par surcroît. Ce théorème a attiré l'attention de nombreux chercheurs : par exemple, Kisliakov a montré que le résultat vaut encore pour l'algèbre du disque et du bidisque, le cas de l'algèbre du polydisque de dimension  $\geq 3$  semble toujours ouvert. Par la suite (en 1997), le résultat analogue pour les matrices infinies a été démontré par F. Piquard, et justifie heuristiquement le fait de se concentrer, en théorie des opérateurs, sur des classes d'exemples, comme les opérateurs de Hankel, les opérateurs de composition, etc.

## 4.2 – Les inégalités de Khintchine-Kahane

Il s'agit d'une extension de celles de Khintchine à des variables aléatoires à valeurs vectorielles, l'extension étant tout sauf triviale, et la clé étant exprimée à sa manière ramassée dans son livre « Some random series of functions » « Si la probabilité qu'une somme de type Rademacher soit grande est petite, la probabilité qu'elle soit très grande est très petite. » De façon plus précise, si  $M$  est le sup des normes des sommes partielles d'une série  $S = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n$  où les  $r_n$  sont les fonctions de Rademacher et les  $x_n$  des vecteurs d'un espace de Banach absolument arbitraire, Kahane montre essentiellement que pour  $t > 0$  grand :

$$P(M > 2t) \leq (P(M > t))^2.$$

Autrement dit, quand on passe de  $t$  (grand) à  $2t$  (très grand), « l'erreur » est élevée au carré, comme dans la méthode de Newton quand on passe d'une itération à la suivante. On en déduit l'appartenance de  $S$  à l'espace d'Orlicz  $L^{\psi_1}$  où  $\psi_1$  est la fonction d'Orlicz  $\psi_1(x) = e^x - 1$ . C'est a priori moins bien que dans le cas scalaire avec la fonction d'Orlicz  $\psi_2(x) = e^{x^2} - 1$ , mais cela s'auto-améliore comme l'a ensuite montré Kwapien, et l'on retrouve la fonction optimale  $\psi_2$ .

## 4.3 – Existence de points lents pour le mouvement brownien linéaire

Cette existence de points lents a toute une histoire. Il est connu que le mouvement brownien unidimensionnel  $B(t)$  a (presque sûrement) des trajectoires continues et même tout près d'être uniformément höldériennes d'ordre  $1/2$ , mais quand même pas d'ordre  $1/2$  (loi du logarithme itéré). Il était également connu (Paley-Wiener-Zygmund) que le mouvement brownien est (presque sûrement) partout non dérivable, et même partout non höldérien d'ordre  $\alpha > 1/2$ . Kahane avait posé à Dvoretzky la question du cas  $\alpha = 1/2$ . Et ce dernier a démontré en 1963 le résultat suivant ; posons

$$L(t) := \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{|h|^{1/2}}.$$

Alors, on a presque sûrement  $L(t) > 0$  pour tout  $t$ . Mais cela n'exclut pas la possibilité  $L(t) = \infty$ , et Dvoretzky s'avoue incapable de décider en 1963. D'ailleurs, Orey et Taylor montrent en 1974 qu'on

peut avoir  $L(t) = \infty$  et un peu plus (« points rapides »). Peu de temps après, par une méthode étonnamment inventive, Kahane montre l'existence de « points lents » pour  $B(t)$ , des points (aléatoires) en lesquels « le mouvement brownien reprend son souffle » selon la jolie image d'Yves Meyer, c'est-à-dire des points  $t_0$  en lesquels l'exposant de Hölder local est  $1/2$  :

$$L(t_0) < \infty.$$

La preuve est exposée en détail dans la seconde édition de son livre « Some random series of functions ». On assiste à un renversement de perspective analogue à celui des masses de Dirac ( $f(a) = \delta_a(f)$ , et ce n'est plus la fonction  $f$  qui agit sur le point  $a$ , mais le point  $a$  qui agit sur la fonction  $f$ ). En effet, chez Paley-Wiener-Zygmund ou Dvoretzky, le point  $t$  est donné et l'intervalle dyadique  $I$  de  $n$ -ième génération « porteur de  $t$  » s'adapte,  $I = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$  avec  $k$  la partie entière de  $t2^n$ , tandis que chez Kahane les intervalles dyadiques  $I$  sont donnés, chacun ayant un poisson-pilote sous forme d'une gaussienne standard  $g_I$  (avec les  $g_I$  indépendantes), et l'on décrète que  $I$  est noir ou blanc selon que  $g_I$  dépasse ou non un certain seuil  $\lambda > 0$ . Dans le cas du résultat de Dvoretzky, que Kahane redémontre, le seuil est petit, les intervalles  $I$  d'une génération  $n$  assez grande sont tous noirs, et c'est le point  $t$  qui s'adapte,  $t \in I$  avec donc  $I$  noir. Pour l'existence de points lents, Kahane prend un seuil grand, puis sophistique cette notion blanc-noir, et prouve cette fois l'existence de points « plus blancs que blanc » (c'est assez délicat) puis que la super-blancher implique la lenteur (c'est plus facile, avec le modèle Franklin-Wiener du brownien, une fois cette bonne notion de super-blancher dérogée). Perkins montrera ensuite qu'il y a beaucoup de points lents (leur dimension de Hausdorff est  $> 0$ ).

## 4.4 – Réfutation de la conjecture de Bateman-Diamond

J.-P. Kahane m'a toujours semblé fasciné par cette difficulté du métier de mathématicien : dans quelle direction chercher la réponse à une question ? *Non*, et l'on cherche un contre-exemple. *Oui*, et l'on cherche une preuve générale... À cet égard, il citait souvent le théorème de Carleson de 1966, de convergence presque partout des sommes partielles des fonctions de carré sommable sur le cercle (réponse affirmative à la conjecture de Lusin), et m'avait dit que Carleson croyait plutôt à un

contre-exemple (et à une réponse en termes de capacité, pas de mesure de Lebesgue) : mais chaque tentative dans ce sens avait vu s'élever un mur. Et, concluait Kahane en 2011 : « À la fin, les murs devant les contre-exemples avaient presque construit la preuve d'une réponse POSITIVE ! » C'est tout à fait dans cet esprit qu'il a obtenu, et à plus de 70 ans comme il se plaisait à le souligner, la réponse *positive* à une conjecture de Bateman et Diamond qui concernait les nombres premiers généralisés de Beurling. C'est l'un des résultats dont il était le plus fier, et nous détaillons un peu. On se donne une partie discrète et multiplicativement libre  $P$  de la demi-droite  $]1, \infty[$  (les nombres premiers généralisés de Beurling), on considère le semi-groupe multiplicatif  $N$  engendré par  $P$  (les nombres entiers généralisés) ainsi que les fonctions de comptage respectives

$$P(x) = \left| P \cap [1, x] \right|, \quad N(x) = \left| N \cap [1, x] \right|.$$

Beurling avait montré que, si on pose  $N(x) = Dx + x\varepsilon(x)$  avec  $D$  constante  $> 0$ , l'hypothèse (naturellement vérifiée pour les entiers naturels avec  $D = 1$  et  $\varepsilon(x) = O(1/x)$ ),

$$\varepsilon(x) = O\left(\frac{1}{(\ln x)^\alpha}\right), \quad \alpha > 3/2$$

suffit à impliquer le théorème des nombres premiers (TNP)

$$P(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Dans ce contexte, la condition (moins exigeante que celle de Beurling)

$$\int_1^\infty (\varepsilon(x) \ln x)^2 \frac{dx}{x} < \infty \quad (1)$$

s'introduit assez naturellement et Bateman et Diamond avaient posé la question de savoir si (1) implique le TNP. Après avoir cherché sans succès à bâtir un contre-exemple et avoir analysé les raisons de son échec, Kahane a été conduit, à la manière de Carleson, à une réponse au contraire affirmative à cette conjecture. La méthode (très élégante) utilise de l'Analyse de Fourier, et notamment le fait que la fonction zeta naturellement associée à  $N$  ne s'annule pas sur la droite  $\Re s = 1$ , grâce à l'interprétation de l'hypothèse comme l'appartenance de  $t \mapsto \zeta(1+it)$  à l'espace de Sobolev  $H^1$  et aux propriétés locales des fonctions de cet espace. Notamment (nous voici en un sens de retour aux points lents du

mouvement brownien!) le fait que, si  $f$  est dans cet espace, alors

$$|f(t_0 + h) - f(t_0)| = o(|h|^{1/2}).$$

## 5. Influence et Rayonnement

Cette influence et ce rayonnement ont été considérables. D'abord, il me semble qu'il ne refusait jamais rien. Je revois J. P. Serre lui demandant : « Et on se demandait si on pourrait t'arracher un exposé sur le mouvement brownien la semaine prochaine ? » Il avait instantanément répondu Oui. Et il a fait de nombreux exposés au séminaire Bourbaki, notamment (anecdote qu'il m'a racontée) sur les travaux de Beurling, à qui il avait d'ailleurs demandé l'autorisation. Devant l'absence de réaction de ce dernier, il lui a envoyé un message : « dans trois jours, j'expose vos travaux au séminaire Bourbaki » sans plus lui demander d'autorisation, et a reçu celle-ci sous forme laconique, à la manière du « I » de Voltaire : « D'accord ». Beaucoup plus récemment (2014), J.-P. Kahane avait donné à la BNF un exposé sur le mouvement brownien, le bruit blanc, et l'équation de Langevin, devant un large public dont une bonne partie de lycéens. Et son aptitude à la fois « à faire des mathématiques » et écrire des équations au tableau, et à rester suffisamment général pour ne pas égarer les lycéens, était impressionnante. J.-P. Kahane a par ailleurs écrit quatre livres de recherche :

« **Ensembles parfaits et Séries Trigonométriques** » avec R. Salem (1963), réédité et actualisé en 1994. Ouvrage étonnamment actuel avec un exposé clair des notions de capacité, de dimension de Hausdorff notamment.

« **Séries de Fourier absolument convergentes** » (1970). Avec notamment des applications magnifiques des algèbres de Banach (théorème des idempotents de Shilov) aux ensembles de zéros des fonctions analytiques dans la classe de Wiener.

« **Some random series of functions** » (1968, réédité en 1985), livre qui reste une référence incontournable pour bien des chercheurs actuels, jeunes ou moins jeunes.

« **Séries de Fourier et Ondelettes** » avec P.-G. Lemarié (1998, réédité en 2016). Ce dernier ouvrage met aussi en lumière le goût et l'aptitude qu'avait J.-P. Kahane pour l'histoire des mathématiques et aussi bien celle des idées que celle des mathématiciens. Avant la partie « **Ondelettes** » écrite par P.-G. Lemarié, Kahane disserte longuement sur les grands précurseurs et leur apport : Euler, Fourier, Dirichlet, Weierstrass, Cantor, Riemann, Lebesgue, et son analyse de leurs idées et résultats est passionnante. J.-P. Kahane a également eu de nombreux élèves (même s'il m'avait dit une fois ne pas en avoir voulu trop, pour ne pas faire comme certains de ses prédécesseurs dans l'université française), dont le récent prix Abel 2017, Y. Meyer. Quant à son rayonnement international, en quelques mots seulement, il s'est vu dans les visiteurs étrangers (sans parler des visiteurs français comme Gilles Pisier, et des étudiants étrangers comme L. Rodriguez-Piazza, Quan Hua Xu, Fan Ai Hua) qui ont défilé à son fameux Séminaire d'Analyse Harmonique du Lundi : Bourgain, Wermer, Garnett, Jones, Carleson, Rudin, Helson, Körner, Drury, Konyagin, Kwapien, Pichorides, Nestoridis, etc. Il est impossible de les citer

tous. Cette période des années 70-80 a vu la solution de plusieurs problèmes fondamentaux : le problème de l'union des ensembles de Sidon (Drury), de l'existence d'ensembles de Helson qui ne sont pas de synthèse (Körner), de la sidonicité des ensembles  $\Lambda(p)$  pour tout  $p$  avec constante  $\sqrt{p}$ , nous dirions aujourd'hui sous-gaussiens (Pisier), la solution de la conjecture de Littlewood sur la norme  $L^1$  des polynômes trigonométriques (partiellement par Pichorides, puis définitivement par Konyagin, et indépendamment par Smith, puis Mc Gehee-Pigno-Smith), etc. Ce rayonnement s'est vu aussi dans les deux grandes conférences qui ont eu lieu en son honneur en 1993 et 2016, où des visiteurs prestigieux se sont presque bousculés et où Bourgain en 2016 (absent pour raisons de de santé) lui a rendu hommage par skype, et dit son étonnement admiratif devant le fait qu'il publiait encore à près de 90 ans, âge qu'il a atteint en décembre dernier.

Jean-Pierre Kahane restera un exemple pour beaucoup de mathématiciens de tous âges, par son enthousiasme intact même à 90 ans, et par son goût d'inventer, de transmettre et d'expliquer.



**Hervé QUEFFÉLEC**

Université de Lille

Hervé Queffélec est professeur émérite. Ses recherches portent sur l'Analyse harmonique commutative, la théorie analytique des séries de Dirichlet, et les espaces de Banach de fonctions holomorphes et leurs opérateurs.

# Maryam MIRZAKHANI

1977-2017

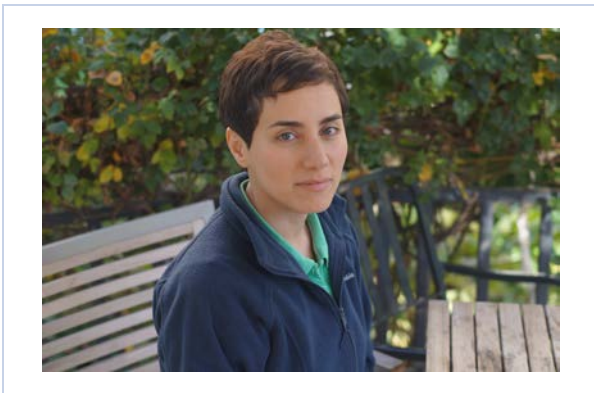
• A. ZORICH

« (...), je dirai quelques mots sur toi, mais je ne te gênerai point en insistant avec lourdeur sur ton courage ou sur ta valeur professionnelle. C'est autre chose que je voudrais décrire... Il est une qualité qui n'a point de nom. Peut-être est-ce la "gravité", mais le mot ne satisfait pas. Car cette qualité peut s'accompagner de la gaieté la plus souriante.... »

Antoine DE SAINT-EXUPÉRY

« You have to ignore lowhanging fruit, which is a little tricky. I am not sure if it is the best way of doing things, actually – you are torturing yourself along the way. But life is not supposed to be easy. »

Maryam MIRZAKHANI



Maryam Mirzakhani est décédée le 14 juillet 2017. Moins de trois ans plus tôt, elle recevait la médaille Fields « pour ses contributions remarquables à la dynamique et à la géométrie des surfaces de Riemann et de leurs espaces de modules », devenant ainsi la première femme à obtenir cette récompense. Elle était souvent la première. Par exemple, avec son amie Roya Beheshti, elle fut la première fille iranienne à participer aux olympiades internationales de mathématiques. Elle y gagna deux médailles d'or, en 1994 et 1995. Ses hauts faits n'empêchèrent jamais Maryam de rester extrêmement gentille, amicale, modeste, sans jamais se mettre en avant. Si vous la rencontriez à une conférence, vous la preniez à première vue pour une jeune post-doc

plutôt que pour une mathématicienne de renommée internationale. Elle travaillait dur, « en gardant profil bas » selon ses propres mots.

Maryam est née et a grandi à Téhéran, dans une famille de quatre enfants. Dans l'une de ses rares interviews (donnée à la demande du Clay Mathematics Institute à la fin de sa bourse de recherche Clay), elle expliquait :

*Mes parents nous ont toujours soutenus et encouragés. Ce qui comptait pour eux, c'était que nous ayons des professions enrichissantes et satisfaisantes, ils attachaient peu d'importance aux succès, aux distinctions.*

Après avoir passé un concours très sélectif, Maryam est entrée à l'école de jeunes filles Farzane-ga à Téhéran. En 1999, une fois ses études prédoctorales terminées à l'université Shariff à Téhéran, elle est partie à l'université d'Harvard, où elle a soutenu sa thèse en 2004. Les résultats qu'elle y démontrait étaient époustouffants aux yeux de tous, y compris de son directeur de thèse C. McMullen : Maryam avait découvert des liens insoupçonnés entre différents problèmes de comptage à première vue complètement différents. En particulier, elle a montré que le comptage des géodésiques fermées simples sur les surfaces hyperboliques est relié au volume de Weil-Petersson des espaces de modules de surfaces hyperboliques à bord. Elle en a déduit une nouvelle preuve de la célèbre conjecture de Witten, initialement démontrée par M. Kontsevich.

La thèse de Maryam Mirzakhani est véritablement remarquable. Les preuves ne sont ni très longues ni particulièrement compliquées. Cependant, Maryam y entremêle ingénieusement différentes idées et techniques récentes provenant de directions variées en dynamique et en géométrie. Lire les trois articles relativement courts issus de sa thèse donne un sentiment euphorique, celui qu'on peut avoir en écoutant son œuvre musicale favorite, en lisant son poète préféré ou en admirant une peinture chère à son cœur. Relire ces articles peut entrer en résonance avec des réflexions que vous entrete-

niez depuis longtemps, et faire surgir des réponses simples et inattendues. Pour mes collaborateurs et moi-même, cela s'est déjà produit plusieurs fois : les articles de Maryam sont remplis d'idées superbes qui sont encore en train d'être assimilées par la communauté mathématique.

Après avoir soutenu sa thèse de doctorat, Maryam Mirzakhani a reçu une bourse de recherche prestigieuse du Clay Mathematics Institute.<sup>1</sup> Dans l'interview que j'ai déjà mentionnée plus haut, elle commente cette période de sa vie :

*C'était une belle opportunité pour moi ; j'ai passé la plupart de mon temps à Princeton, ce fut une expérience riche. La bourse Clay me laissait la liberté de réfléchir à des problèmes plus difficiles, de voyager librement, de discuter avec d'autres mathématicien(ne)s. Je pense lentement, il me faut beaucoup de temps avant de pouvoir éclaircir mes idées et avancer. J'ai donc vraiment apprécié de ne pas être pressée pour écrire mes travaux.*

Ce que Maryam appelle « lenteur » est plutôt de la « profondeur », ou une sorte de qualité que Saint-Exupéry ne réussit pas à décrire en un mot. En 2008, alors qu'elle avait 31 ans, Maryam Mirzakhani est devenue professeur à l'université de Stanford, où elle a travaillé depuis lors.

Je voudrais parler d'un des nombreux résultats de Mirzakhani durant cette période, sur le flot des tremblements de terre introduit par Thurston. Étant donnée une géodésique fermée simple sur une surface hyperbolique, on peut couper la surface le long de la géodésique, tordre les deux côtés de la coupure l'un par rapport à l'autre, puis les recoller afin d'obtenir une nouvelle surface hyperbolique. Si l'on a l'imagination de Bill Thurston, on peut même considérer simultanément l'ensemble de toutes les surfaces hyperboliques, de toutes les géodésiques simples (généralisées) sur ces surfaces, et définir un twist global. Pendant de nombreuses années, les propriétés du flot correspondant, appelé flot des tremblements de terre, sont restées mystérieuses. En particulier, on ignorait s'il avait des orbites denses.

Maryam Mirzakhani a découvert à son sujet un lien encore insoupçonné. Elle a réussi à construire un isomorphisme mesuré entre le flot des tremblements de terre de Thurston et un flot beaucoup mieux compris, le flot horocyclique sur l'espace des

modules des différentielles quadratiques. Ce théorème a tout de suite eu d'importantes applications ; d'autres n'ont été établies que très récemment, une dizaine d'années plus tard. Je suis sûr que d'autres apparaîtront dans le futur. Les mathématiques sont lentes (dans le même sens que Maryam se traitait de lente).

Si vous avez vu Maryam assister à un exposé dans un grand auditorium, comme au MSRI, vous aurez remarqué qu'elle se tenait toujours debout derrière la dernière rangée de sièges. Ce n'était ni de l'impatience ni de l'extravagance. Je n'ai jamais vu chez Maryam la moindre trace de caprices : elle avait juste de sérieux problèmes de dos, qu'elle ne montrait jamais autrement. Elle dirait plus tard avec ironie que « sérieux » pouvait devenir très relatif.

En plus d'avoir des idées brillantes, Maryam était capable de travailler très dur, comme lorsqu'elle a travaillé sur le théorème de la baguette magique. Du point de vue des systèmes dynamiques, l'espace des modules des différentielles holomorphes peut être considéré comme un « espace homogène avec des complications ». Je cite Alex Eskin, qui connaît très bien les deux aspects : comment la dynamique sur les espaces de modules ressemble à la dynamique homogène, mais aussi comment les difficultés supplémentaires peuvent être très profondes.

Les théorèmes de rigidité, qui incluent et généralisent les théorèmes démontrés par Marina Ratner au début des années 90, expliquent pourquoi la dynamique homogène est si spéciale. (Tristement, Marina Ratner est décédée à peine une semaine avant Maryam). En général, les systèmes dynamiques admettent une multitude de trajectoires curieuses, qui restent dans des parties fractales de l'espace. Elles ne sont pas majoritaires, mais elles sont quand même en très grand nombre. En particulier, cela n'a pas de sens de chercher à classer toutes les adhérences d'orbites, ou toutes les mesures invariantes, pour la plupart des systèmes dynamiques : il y a toute une jungle de trajectoires exotiques. Dans certains cas, cela engendre une difficulté majeure : même si l'on connaît les propriétés fines des trajectoires issues de presque tout point, il n'y a pas d'algorithme qui permet de vérifier qu'une condition initiale particulière, qui vous intéresse, est générique ou non. Le but de la théorie ergodique est plutôt de répondre à des questions statistiques, mais elle devient impuissante si l'on veut utiliser une condition initiale spécifique.

1. On peut remarquer que trois des quatre récipiendaires de la médaille Fields en 2014 sont des anciens lauréats de cette bourse.



La situation est complètement différente dans le cas de la dynamique homogène. Dans certaines situations favorables, on réussit à démontrer que *n'importe quelle* adhérence d'orbite est un sous-espace homogène sympathique, que *n'importe quelle* mesure invariante est la mesure de Haar correspondante, etc. Ce genre de rigidité permet de fantastiques applications par exemple en théorie des nombres, développées entre autres par J. Bourgain, E. Lindenstrauss, G. Margulis, and T. Tao (pour ne citer que les médaillés Fields dans une liste beaucoup plus longue de mathématiciens remarquables qui travaillent dans ce domaine).

L'action de  $SL(2, \mathbb{R})$  sur les espaces de modules de différentielles abéliennes et quadratiques ressemble par certains côtés à une dynamique homogène, mais savoir jusqu'à quel point est resté une question ouverte pendant des décennies. Pour Alex Eskin, qui s'est intéressé à la dynamique dans les espaces de modules après avoir étudié la dynamique homogène, cette question était probablement la plus importante depuis plus de 15 ans. Maryam Mirzakhani a commencé à travailler avec lui sur cette question en 2006, aiguillonnée par les travaux de son directeur de thèse, C. McMullen, qui avait résolu la question dans le cas particulier du genre 2. Après plusieurs années de collaboration, Eskin et Mirzakhani ont obtenu une première grande avancée sur cette question : ils ont classifié les mesures invariantes par  $SL(2, \mathbb{R})$ . Nous avons insisté pour qu'Alex Eskin annonce ce résultat à la conférence à Bonn durant l'été 2010.

Pour illustrer l'importance de ce théorème, je cite ce qu'Artur Avila en a dit à S. Roberts du *New Yorker* dans un article en mémoire de Maryam :

*Lorsque j'ai entendu ce résultat, et connaissant ses travaux précédents, j'étais sûr qu'elle serait parmi les favoris pour la médaille Fields en 2014, et je ne pensais pas avoir beaucoup de chances de la recevoir.*

Je ne crois pas que Maryam pensait beaucoup à la médaille Fields à l'époque (quelques années plus tard, lorsqu'elle a reçu le message d'I. Daubechies annonçant que la médaille Fields lui était attribuée, elle a cru que c'était une plaisanterie et l'a ignoré), mais elle savait assurément à quel point ce théorème était important. Ces dernières années, quasiment tous les articles dans mon domaine utilisent le théorème de la baguette magique d'une manière ou d'une autre.

Cependant, Eskin et Mirzakhani ont eu encore besoin de plusieurs années de travail acharné pour étendre leur résultat en démontrant les résultats de rigidité pas seulement pour le groupe entier  $SL(2, \mathbb{R})$  de toutes les matrices  $2 \times 2$  de déterminant 1, mais aussi pour son sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures (qui a la propriété cruciale d'être *moyennable*). La différence peut sembler mineure. Cependant, cette petite modification est décisive pour la version la plus puissante du théorème de la baguette magique. La partie de l'énoncé traitant des adhérences d'orbites a été prouvée vers la fin du projet avec la collaboration d'A. Mohammadi. Un complément important est dû à S. Filip.

Supposons par exemple que l'on étudie un billard dans un polygone rationnel (un polygone dont les angles sont tous des multiples rationnels de  $\pi$ ). Quel objet mathématique pourrait être plus simple et concret qu'un triangle rationnel? Cependant, la seule approche efficace connue pour étudier les billards dans les polygones rationnels se décrit comme suit. En appliquant les symétries par rapport aux côtés du polygone, on le déplie jusqu'à obtenir une surface fermée. Les trajectoires du billard se déplient et forment des lignes droites sans auto-intersection sur cette *surface de translation*. Cette astuce est très simple et classique. On peut ensuite toucher la surface de translation ainsi formée avec la baguette magique du théorème, pour décrire l'adhérence de son orbite sous l'action de  $SL(2, \mathbb{R})$  dans l'espace des modules de toutes les surfaces de translation qui partagent les mêmes caractéristiques combinatoires que notre surface de départ. D'après le théorème de la baguette magique, cette adhérence d'orbite est un orbifold très spécial. Sa géométrie donne énormément d'informations sur le billard initial. Aussi fort que le carrosse-citrouille de Cendrillon, non?

Un des derniers travaux de Maryam Mirzakhani, en collaboration avec Alex Wright, montre que, tandis que la surface obtenue en dépliant un triangle rationnel a beaucoup de symétries, l'adhérence d'orbite qu'on obtient ci-dessus est souvent aussi grande qu'elle peut l'être : c'est tout l'espace des modules ambiant.

La démonstration du théorème de la baguette magique est un travail titanesque, qui repose sur beaucoup de progrès récents fondamentaux en systèmes dynamiques. La plupart de ces résultats sont sans rapport direct avec les espaces de modules. Je ne comprends toujours pas comment Eskin et Mirzakhani ont réussi à mener cette preuve à bout.

Des difficultés techniques très importantes ont fait surface à chaque étape du projet. Sans parler du fait que, dans les quatre ans entre 2010 et 2014, Maryam a donné le jour à une petite fille, et a réussi à surmonter une première attaque du cancer. Depuis lors, je pensais que Maryam pouvait tout faire.

Je ne peux m'empêcher de raconter une histoire, symbolique à mes yeux. Alors que M. Mirzakhani avait reçu la médaille Fields, la *Gazette* m'avait demandé d'écrire un article sur le théorème de la baguette magique, et de contacter Maryam pour qu'elle me procure une photo d'elle pour illustrer l'article. La photo que j'ai reçue était inattendue pour un article scientifique : une petite fille de trois ans tenait deux ballons aux formes compliquées (des surfaces de Riemann) presque aussi grands que la fillette.

L'image m'a semblé parfaite. Elle représentait exactement la vision que j'avais moi-même de Maryam, j'étais juste surpris qu'elle la propose elle-

même. Maryam avait parcouru toute sa vie avec la curiosité et l'imagination naturelles aux enfants, mais malheureusement perdues par la plupart des adultes.

Puis l'email suivant est arrivé : « *Oups, désolée, Anton, je t'ai envoyé une photo de ma fille :)* ». J'avais confondu Anahita et Maryam.

À l'automne 2016, j'ai appris que sa maladie était de retour. Mais je savais aussi que Maryam faisait de son mieux pour rester avec sa fille et sa famille aussi longtemps que possible. Je n'étais pas le seul à penser que Maryam pourrait faire plus que qui que ce soit d'autre. Mais, même en admirant le courage exceptionnel de quelqu'un, on ne peut pas en attendre de miracle. « Une lumière s'est éteinte » a écrit Firouz Naderi en annonçant la mort de Maryam. Ses travaux et sa personnalité ont inspiré et encouragé de nombreuses personnes sur toute la Terre. Des femmes et des hommes. Nous garderons précieusement sa lumière en nous.



**Anton ZORICH**

Anton Zorich est Professeur à l'université Paris Diderot. Ses travaux portent sur la géométrie, la topologie et les systèmes dynamiques et sur les interactions entre ces trois domaines. Il fait également beaucoup de mathématiques expérimentales.



## La possibilité des nombres

Frédéric PATRAS

puf, 2014. 320 p. ISBN : 978-2130631675

Prévenons tout de suite le lecteur : « La possibilité des nombres » n'est pas un nouveau roman de Houellebecq sur une secte ésotérique, mais bien un livre de philosophie des sciences, sourcé, argumenté, passionné. Frédéric Patras, déjà auteur de *La pensée mathématique contemporaine*, convoque ici Euclide, Platon, Aristote, Descartes, Kant, Wittgenstein, Frege, Gödel, Husserl et bien d'autres pour essayer d'élucider la nature du concept de nombre, « émanation directe des lois pures de la pensée » selon Dedekind, et rendre compte des différentes façons de l'approcher.

Fonder notre relation aux nombres (ou plus généralement aux bases des mathématiques) n'est pas sans importance, bien sûr d'un point de vue philosophique, mais aussi pour l'activité de recherche en mathématiques et leur enseignement. La lecture de ce livre m'a ainsi fait réaliser le côté primitif de ma conception des fondements des mathématiques, qui était par certains aspects déjà dépassée au temps d'Aristote, et certainement à la fin du dix-neuvième siècle. Cette réalisation est d'ailleurs liée à un phénomène de redécouverte permanente au cœur de notre relation aux nombres qui est bien illustré dans le livre; des idées que les penseurs de la Renaissance pensaient neuves étaient en réalité déjà présentes chez Aristote ou Platon (ce type de mésaventure n'est bien sûr pas étranger aux mathématiciens!) On est alors surpris que d'autres idées, qui semblent aujourd'hui élémentaires, aient été d'apparition si délicate; par exemple j'ai de nouveau eu l'occasion de mesurer l'étendue de mon ignorance en découvrant que la philosophie aristotélicienne défendait l'idée que « un n'est pas un nombre ». Le livre aide ainsi à apprécier toutes les difficultés épistémologiques posées par la conquête des nombres – accepter que 0 est un nombre à part entière et pas un simple outil de calcul, par exemple.

Le rôle de Frege est longuement évoqué et l'admiration que Patras éprouve pour lui emplit de vie les passages qui lui sont consacrés; bien que son approche logiste ait finalement échoué, ce qui a posteriori semble inévitable, Patras l'érige en père fondateur de la logique mathématique et met longuement en valeur l'importance de ses contributions et leur importance encore aujourd'hui. Un des grands plaisirs proposé au lecteur par ce livre tient dans les multiples citations qui l'émaillent, par exemple celle de Dedekind mentionnée plus haut ou la suivante de Condillac, dont la clarté de la langue est justement mise en avant par Patras : « Quand les idées des nombres, d'abord aperçues dans les objets, ensuite dans tous les objets auxquels on les applique, deviennent générales et abstraites, nous ne les apercevons plus dans les doigts, ni dans les objets auxquels nous cessons de les appliquer. Où donc les apercevons-nous ? Dans les noms devenus les signes des nombres. Il ne reste dans l'esprit que ces noms, et c'est en vain que l'on y chercherait autre chose ».

Si les compétences mathématiques requises pour lire et apprécier ce livre ne poseront aucun problème aux lecteurs de la *Gazette*, des notions relativement délicates (souvent de niveau L3, parfois de niveau bien plus avancé) apparaissent de temps à autre, et on peut douter de l'efficacité des explications qui sont données en notes de bas de page. Cela n'empêchera pas un béotien en mathématiques de tirer profit de sa lecture, mais il sera certainement plus difficile à un tel lecteur de prendre de la distance avec certaines des assertions de l'auteur. Il en va de même, d'ailleurs, des affirmations sur les philosophes et leurs positions : même si de nombreuses sources sont fournies, les

efforts de vérification et d'approfondissement seraient considérables, et on (du moins, je) se trouve obligé d'accepter certaines assertions *prima facie*.

L'auteur écrit (sans doute à raison) que « à dissocier la logique mathématique de ses corrélats opératoires, voire ontologiques, la philosophie a ainsi bien souvent perdu sa pertinence et sa crédibilité auprès des mathématiciens » ; il serait intéressant de connaître l'accueil que les philosophes des sciences ont réservé à ce livre, dont on sent en permanence qu'il est écrit par un mathématicien (ce qui, pour l'auteur de ces lignes tout au moins, est tout sauf une critique).

En conclusion, non, ce n'est pas du Houellebecq ; c'est du Patras – touffu, attachant, passionné, un peu énervant parfois dans la certitude apparente de ses affirmations, mais surtout très enrichissant pour qui prendra le temps d'apprendre et de réfléchir avec ce livre, de vivre un peu avec lui, et d'en profiter pour remettre en question son rapport aux nombres et aux fondements des mathématiques.

Julien MELLERAY  
Lyon

Union des Professeurs de Spéciales  
Société Mathématique de France  
Société Française de Physique  
Institut Henri Poincaré



# une question, un chercheur

**Gwendal Fève**



**Électronique  
quantique  
dans les  
nanoconducteurs**



Conférence  
ouverte  
en particulier  
aux élèves  
de classes  
préparatoires  
et aux étudiants  
de licence  
et master

**23 novembre 2017  
19h30**

**Institut d'Astrophysique de Paris**  
98 bis boulevard Arago, 75014 Paris  
Inscription gratuite obligatoire :  
<http://smf.emath.fr/inscription-conference-feve>





## Instructions aux auteurs

**Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*.** Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

**Articles scientifiques.** Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

**Soumission d'article.** Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique ([gazette@dma.ens.fr](mailto:gazette@dma.ens.fr)), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier  $\text{\TeX}$  le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe  $\text{\LaTeX}$  *gztarticle* fournie par les distributions  $\text{\TeX}$  courantes ( $\text{\TeX}$  Live et Mac $\text{\TeX}$  – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK $\text{\TeX}$ ), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution  $\text{\TeX}$  à jour.

---

**Classe  $\text{\LaTeX}$  :** Denis BITOUZÉ ([denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr](mailto:denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr))

**Conception graphique :** Nathalie LOZANNE ([n.lozanne@free.fr](mailto:n.lozanne@free.fr))

**Impression :** Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

