AVRIL 2018 – N° 156

la Gazette des Mathématiciens

- **L'IHES fête ses soixante ans**
- **Mathématiques** – Entiers friables : un tour d'horizon
- **Raconte-moi...** l'intrication quantique
- **Carnet** – Jean-Louis Koszul

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. Vue de la bibliothèque de l'IHES dans l'ancien pavillon de musique, vers 1983. (crédit : Droit réservé).

la Gazette des Mathématiciens

Nº 156

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

À l'heure où j'écris ces lignes, notre cher traffic ferroviaire, et du même coup votre dévoué serviteur, tournent au ralenti, victimes d'une grève joliment perlée. L'occasion de placer cet éditorial sous le signe du, ou plutôt des, temps. Perdu pour l'un dans *La Recherche* ou bien « seul capital des gens qui n'ont que leur intelligence pour fortune » pour l'autre dans *Illusions perdues*. À chacun de choisir son camp.

Plus que parfait. Et pourtant, il file. Le célèbre institut de Bures-sur-Yvette, l'IHES, fête cette année ses soixante ans. Déjà. « Éternité, néant, passé, sombres abîmes, Que faites-vous des jours que vous engloutissez ? » La *Gazette* profite de cet anniversaire pour partir à la rencontre d'un champ lexical devenu si cher aux mathématiciens : Bois-Marie, l'Ormaille, les cahiers bleus...

Pas assez composé. Le nombre premier, seul et indivisible, semble régner en maître sur la fascination des arithméticiens depuis l'Antiquité. Pourtant, à l'opposé de l'échiquier numérique, se dressent aujourd'hui les entiers friables, fruit de la multiplication solidaire de petits nombres premiers. Une lutte des classes passionnante que Cécile Dartyge t'invite à découvrir.

Futur. Ni totalement zéro, ni totalement un, voici le don de *qubiquité*. Les pourfendeurs de manichéisme en tout genre jubileront assurément à la lecture du *Raconte-moi* de Guillaume Aubrun consacré à l'intrication quantique.

Impératif, s'il en est. De relayer les questions de parité, éponymes de notre chère rubrique. Dans celle-ci, nous revenons sur une bande dessinée issue de la collaboration de l'informaticienne Isabelle Collet et du dessinateur Phiip. Circulant depuis peu dans les laboratoires de mathématiques français, elle vise à sensibiliser notre communauté aux différentes causes du sexisme.

Conditionnel. Tu trouveras dans la rubrique *Information* quelques nouvelles de la candidature de Paris pour l'organisation du Congrès International des Mathématiques en 2022.

Présent. Maxime Chupin, Jean Dolbeault, Maria J. Esteban et Mathieu Lewin dressent une cartographie thématique des mathématiques en France.

Intemporel. La *Gazette* rend hommage dans ces pages à Jean-Louis Koszul, disparu en janvier dernier. Et si tu as le bonheur d'être membre de la SMF, tu as également dû recevoir un magnifique numéro spécial consacré à l'œuvre de Jean-Christophe Yoccoz.

Pour finir, pourquoi ne prendrais-tu pas le temps d'une visite de notre belle capitale ? Sinueuse, mathématique et oulipesque. Bien loin des classiques bateaux-mouches. Voilà justement l'objet de Paris-Math, petit ouvrage récemment publié par l'Ourvoir de littérature potentielle.

En te souhaitant une agréable lecture,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens

N° 156

Sommaire

Société Mathématique de France SMF

Nº 156

Mot du président

Chères et chers collègues,

Les trois derniers mois ont été cruciaux pour l'enseignement des mathématiques, avec la publication du rapport Torossian-Villani, puis la réforme du baccalauréat.

Tout d'abord, nous avons été heureux de constater que le rapport sur l'enseignement des mathématiques, publié le 12 février, était très riche, réaliste et ambitieux, et reprenait beaucoup de nos propositions, relayant nos inquiétudes sur le niveau des élèves et sur la formation des professeurs. Il proposait également de nombreuses mesures intéressantes, dont un enseignement d'informatique. Nous espérons que celles-ci seront réellement mises en place, et que la nécessité de promouvoir les mathématiques, en tant que savoir commun et enseignement pour tous, mais aussi comme science avec un enseignement plus poussé pour celles et ceux qui le souhaitent, sera véritablement reconnue.

Malheureusement, ce rapport a été quelque peu éclipsé par la réforme du baccalauréat présentée le 14 février. Celle-ci s'écartait notablement du rapport Mathiot, en particulier la place réservée aux sciences et aux mathématiques s'est avérée beaucoup moins importante que prévue. Avec de nombreuses autres associations et sociétés savantes, l'Académie… nous avons réagi et réussi à faire bouger les lignes : il y aura maintenant 2 heures de sciences dans le tronc commun de classe de première et terminale, qui en comporte… 16 ! Il reste encore plusieurs points qui ne nous satisfont pas, par exemple le manque d'heures de mathématiques en première pour les élèves souhaitant une formation plus pointue, et l'impossibilité de suivre simultanément en terminale des cours de mathématiques, physique et informatique, ce qui est une aberration à notre époque. La SMF continue donc à être mobilisée sur ces sujets.

D'autres sujets nous occupent également.

La SMF a publié une charte sur la parité femmes-hommes. Je vous invite à la consulter : notre but est ici de soulever des problèmes, de fournir des références bibliographiques, de suggérer des actions au sein des laboratoires qui permettent d'aborder ces questions, mais surtout de susciter des débats, c'est aussi le rôle de la SMF. Vous pouvez réagir à ce texte, et à tous les autres, dans la *Gazette*, qui elle aussi est là pour que vous vous exprimiez.

Enfin, nous abordons la phase finale dans la refonte de notre système informatique et en particulier de notre site web. Ce projet aura duré près de deux ans et demi, et aura permis de mettre à jour tous nos outils informatiques. Nous sommes impatients de vous le dévoiler !

Bien à vous,

Le 5 avril 2018

Stéphane SEURET, président de la SMF


SMF 2018
Deuxième congrès national de la Société Mathématique de France
Lille 4 au 8 Juin 2018
http://smf2018.sciencesconf.org/
Nalini Anantharaman, Université de Strasbourg
Denis Auroux, University of California, Berkeley
Christine Bachoc, Université de Bordeaux
Nicolas Bergeron, Université Pierre et Marie Curie
Lucien Birgé, Université Pierre et Marie Curie
Serge Cantat, CNRS et Université de Rennes
Zoé Chatzidakis, CNRS et École Normale Supérieure
Jean-Michel Coron, Université Pierre et Marie Curie
Hugo Duminil-Copin, IHES et Université de Genève
Alice Guionnet, CNRS et École Normale Supérieure de Lyon
Philippe Michel, École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Ngo Bao Chau, University of Chicago, VIASM
Simon Riche, CNRS et Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand
Stefaan Vaes, Katholieke Universiteit Leuven
Sessions thématiques :
Algèbre, Théorie des représentations
Statistiques, Traitement des données
Arithmétique et Logique
Topologie, Géométrie
EDP et analyse numérique
Systèmes dynamiques, théorie ergodique
Analyse et ses applications
Probabilités, combinatoire
Société Mathématique de France
Laboratoire Paul Painlevé
@SocMathFr
Crédit photo : Jos Leys
Conférence grand public : Vincent Borrelli, Université Claude Bernard, Lyon 1
Remise des prix d'Alembert et Jacqueline Ferrand
Conférence de Bernard Maurey, Université Paris-Diderot pour le 250ème anniversaire de Joseph Fourier

Créé en 1958 par Léon Motchane, un industriel russe passionné de mathématiques, l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) est un centre de recherche avancée en mathématique et physique théorique. Autour d'un groupe restreint de 6 professeurs permanents, l'Institut accueille chaque année plus de 200 chercheurs (85% venus de l'étranger) pour des visites scientifiques. L'idée de Motchane : rassembler les plus grands esprits et leur donner toute latitude pour poursuivre leurs travaux. L'IHES célèbre ses 60 ans en 2018; l'occasion de présenter un grand institut de recherche au fonctionnement atypique dans le paysage académique français.

Quel lieu pour quelles mathématiques ? Penser et construire l'Institut des Hautes Études Scientifiques

• A.-S. Paumier

« La recherche scientifique n'est pas un phénomène spontané de la nature qui fleurit dans les universités, mais une activité dont il faut s'occuper, qui se laisse cultiver et qui apporte au pays qui en est pourvu abondamment un surcroît considérable de prestige et de puissance politique. » Léon Motchane, le fondateur de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), est un homme de convictions. Déterminé à offrir à des scientifiques d'exception un lieu propice à l'épanouissement libre de leurs recherches, il s'inspire du modèle de l'Institute for Advanced Study (IAS) à Princeton et fonde l'IHES en 1958, dédié à aux sciences théoriques, tant mathématiques que physiques, et à leurs interactions.

Léon Motchane

Léon Motchane est né en 1900 à Saint-Pétersbourg. Il étudie à Lausanne et y est pendant une année assistant de physique. S'il quitte le monde universitaire pour celui des affaires, il ne cesse jamais de s'intéresser aux mathématiques, à la physique et à la sociologie. Pendant la guerre, il participe aux Éditions de Minuit et y publie deux essais, dont *La Pensée patiente* en 1943, sous le pseudonyme de Thimerais. Sa passion des mathématiques le conduit à soutenir une thèse à l'âge de 54 ans et à penser la création de l'Institut.

Motchane est convaincu de deux choses : la recherche fondamentale doit être soutenue par les grands industriels et les chercheurs doivent avoir

Robert Oppenheimer, Léon Motchane (16 mai 1963, IHES)

Dès 1948, Motchane rencontre Oppenheimer, alors directeur de l'IAS, à l'occasion de l'un de ses voyages aux États-Unis. Dès la création de l'IHES en 1958, Oppenheimer jouera un rôle important, à la fois pour le développement de la section de physique théorique, la création d'un comité de soutien aux États-Unis, ou encore comme conseiller du directeur.

toute liberté dans leurs choix. Ces deux aspects sont la clef de voûte de l'Institut.

« Le véritable aspect moderne de la recherche scientifique consiste dans le fait que le travail d'un industriel, d'un ingénieur, comme celui d'un physicien théoricien et d'un mathématicien, fût-ce le plus abstrait, ne sont pas aussi éloignés les uns des autres et la réussite des derniers devient indispensable aux premiers. »

Léon Motchane,
Note sur la recherche fondamentale, 1959.

La création de l'Institut

Avec Maurice Ponte (CSF), Pierre Dreyfus et Fernand Picard (Régie Renault), Motchane trouve les premiers subsides nécessaires à la création de son Institut. Ces premiers soutiens, très actifs, lui permettent de rallier d'autres patrons de grandes industries (notamment pétrolières et automobiles) très rapidement. Dans le bureau de Joseph Pérès (Institut de France) le 27 juin 1958, Motchane, à qui l'on doit l'essentiel du travail préliminaire, déclare vouloir « arrêter l'hémorragie française vers les États-Unis » : l'Institut est né et il en devient le premier directeur. Les trois sections à l'origine de l'IHES sont les mathématiques, la physique théorique, et la méthodologie mathématique et physique des sciences de l'homme [1], et reflètent les trois passions de Motchane.

1. Cette dernière section n'a jamais vraiment été mise en place ; néanmoins René Thom, professeur permanent en mathématiques depuis 1963, a occupé le premier et seul poste de professeur de la 3e section à la fin de sa carrière, reflétant les domaines très larges de ses intérêts et des applications de ses recherches.

Le « Princeton de l'Europe »

L'IHES s'inspire explicitement du modèle de l'IAS dans ses grandes lignes intellectuelles – un institut de haut niveau permettant à quelques chercheurs de se concentrer sur la recherche fondamentale – mais aussi certaines pratiques matérielles, comme le thé quotidien, propice aux échanges. Dans la défense du modèle qu'il souhaite créer, Motchane insiste sur l'aspect européen de l'Institut, qui se crée au moment même de la constitution de l'Europe.

À l'heure du thé à l'IHES, où l'on reconnaît Dieudonné et Grothendieck (de dos)

de la faculté des sciences de Paris ouvre à la fin des années 50. Motchane achète la propriété « Bois-Marie » de Charles Comar à Bures-sur-Yvette et l'IHES s'y installe en 1962. Malgré quelques réticences universitaires au moment de sa création, l'IHES crée des liens avec ses voisins, physiciens et mathématiciens, et accueille notamment des visiteurs longue durée CNRS et CEA.

« Since my arrival at the IHES in January, I have learned more from conversations with Deligne than from talking with anyone else. Just today, for example, it was much more efficient for me to take the train from Paris to Bures in order to discuss a certain question with Deligne than it would have been for me to stay at my desk in Paris thinking about it; as I had expected, Deligne had the techniques at his fingertips with which to give me a complete answer. »

John Tate à Motchane, interrogé sur l'opportunité de recruter Deligne à l'IHES, 15 mars 1968.

« Une communication directe, à travers les jardins, entre les futurs locaux de l'Institut et ceux de la Faculté des Sciences ». Le choix de l'installation à « Bois-Marie »

Lorsque l'Institut est créé en 1958, il ne possède pas de locaux. Les premiers séminaires ont lieu dans deux pièces, prêtées au sein de la Fondation Thiers (Paris XVI^{e}). Si cela n'empêche pas le développement de la section de mathématiques, les physiciens sont quant à eux préoccupés par l'installation définitive de l'Institut. Lors d'une réunion avec des physiciens renommés soutenant le projet de Motchane, ils formulent leurs souhaits : l'Institut doit s'installer à côté d'un centre de physique expérimental. Même si la physique qui se fait à l'IHES est théorique, elle ne peut se couper de la physique expérimentale. Ils proposent alors de s'installer à proximité des laboratoires modernes qui viennent d'être construits à Orsay, où une antenne

Pourquoi les mathématiciens ont-ils besoin de laboratoires ?

Si les physiciens ont l'habitude d'exercer dans un laboratoire, il n'en est pas de même des mathématiciens qui, traditionnellement, travaillent chez eux, et se rencontrent à l'occasion de séminaires, qui se développent en grand nombre après la Seconde Guerre mondiale. Jusqu'aux années 60, la section mathématique du CNRS réclame ainsi des crédits pour fournir ses bibliothèques et du personnel de secrétariat, ainsi que la création d'un centre de conférences de mathématiques. Néanmoins, l'intérêt d'un lieu où se retrouver pour échanger et discuter, et la possibilité d'avoir des bureaux, fait son chemin. Dans les années où l'IHES se développe, on assiste ainsi à la création du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique par Laurent Schwartz en 1965, et à la création du premier laboratoire de mathématiques associé au CNRS à Strasbourg en 1966 ; qui seront suivies de beaucoup d'autres.

Séminaire Grothendieck dans le pavillon de musique

Pendant les premières années de l'Institut, le pavillon de musique sert à la fois de bibliothèque et de salle de séminaires. Il abrite notamment le « séminaire de géométrie algébrique de Bois-Marie » de Grothendieck (SGA), qui prend la suite des premiers séminaires donnés par Grothendieck dans les locaux de la Fondation Thiers et permet à l'IHES d'être au cœur de la refonte de la géométrie algébrique dans les années 60.

« J'ai aussi parlé avec Mlle Rolland[2] de la question des bureaux pour nos invités mathématiciens, et pour moi-même. Je comprends bien qu'en période transitoire comme celle que traverse l'IHES, avec des locaux encore insuffisants, il ne sera pas possible d'assurer à chacun, même aux professeurs permanents, un bureau personnel au Bois-Marie. Pour ma part, je suis tout prêt à partager un bureau avec un et même s'il le faut deux de nos invités qui trouveraient commode de disposer d'un lieu de discussion hors de leur domicile. Si j'ai bien compris les explications de Mlle Rolland, elle semblait trouver problématique que même un tel arrangement puisse être maintenu à un moment où il y aurait des physiciens en nombre à Bures, jugeant que la totalité des bureaux disponibles devaient normalement être réservés aux physiciens, les mathématiciens selon elle n'ayant guère l'habitude des discussions à plusieurs hors du domicile. S'il en était ainsi, je ne verrais pas l'intérêt de réunir un certain nombre de mathématiciens à Bures, au lieu de les laisser disséminés aux quatre coins de Paris comme par le passé. »

Lettre de Grothendieck à Motchane, 4 août 1962

Les Publications Mathématiques de l'IHES : les « cahiers bleus »

Dès la création de l'IHES, Motchane souhaite lancer une publication scientifique. Depuis l'université de Northwestern, Illinois, Dieudonné pilote avec Motchane le premier numéro des *Publications Mathématiques de l'IHES* dès l'automne 1958, avant même de prendre officiellement son poste de professeur permanent dans la section de mathématiques avec Alexandre Grothendieck au début de l'année 1959. Les physiciens quant à eux ne voient pas la nécessité immédiate d'une telle publication supplémentaire en physique.

File de mathématiciens montant assister au séminaire de Grothendieck

© cop. E. Boubat, sans date

Motchane, qui a participé aux Éditions de Minuit pendant la période de la guerre, a une certaine expérience de l'édition. L'impression des « cahiers bleus » est très appréciée de Dieudonné, pourtant habitué

2. Annie Rolland est la première secrétaire générale de l'IHES et a joué un rôle important ces premières années, même s'il a laissé peu de traces autres que dans les mémoires. Elle s'occupe aussi bien de la comptabilité, de l'agenda et de la correspondance du directeur que de l'accueil et du bien-être des visiteurs, allant même jusqu'à choisir leurs rideaux ou remplir leur réfrigérateur avant leur arrivée.

de l'édition mathématique – il a notamment rédigé un grand nombre des traités des Éléments de mathématiques de Bourbaki. « Bien reçu les premières épreuves de l'article de Wall. Comme typographie, c'est excellent, agréable à l'œil et très lisible ; il serait à souhaiter que tous les périodiques impriment de la même façon, je crois que nous allons donner le ton ! » déclare-t-il à propos des épreuves du premier numéro.

Les articles paraissent sous forme de fascicules de tailles variées. À partir de 1979, les publications sont transformées en périodique régulier. Les « cahiers bleus » occupent rapidement une place particulière dans l'édition mathématique.

> « Plusieurs revues de Mathématiques Pures dans le monde – dont quelques-unes en France – ne publient que des textes de haute qualité. Ce sont les revues que tous les mathématiciens considèrent comme les très bonnes revues de classe internationale. Parmi ces revues, trois toutefois se détachent, celles qui ne publient que des textes marquants. L'une de ces trois-là est française : il s'agit des "Publications Mathématiques de l'IHES". Encore faut-il ajouter que parmi ces trois revues les célèbres"livres bleus" tiennent une place à part. Ils sont les seuls en effet à publier aussi bien des articles de longueur "normale" que des travaux monumentaux comme les Éléments de Géométrie Algébrique ou le Bruhat-Tits. »
>
> Lettre de Jean Cerf à Kuiper, 11 janvier 1975

> « Les "Publications" constituent – et de loin – le meilleur périodique français de mathématiques. »
>
> Lettre de Jean-Pierre Serre à Kuiper, 1er janvier 1975

Ce texte est extrait de l'exposition conçue et réalisée par Anne-Sandrine Paumier (« Patrimoine scientifique de l'IHES ») organisée dans le cadre des Journées du Patrimoine 2016. Les documents d'archives présentés lors de l'exposition, ainsi qu'une sélection d'archives historiques de l'IHES, ont été numérisés avec l'aide d'une subvention de la Diagonale Paris-Saclay. Pour en savoir plus sur ses actions : `www.ladiagonale-paris-saclay.fr/nos-actions/jep2016`. Une version plus longue de l'histoire de l'IHES paraîtra au cours de l'année 2018, à l'occasion du soixantième anniversaire.

Références

[1] D. Aubin. « A cultural history of catastrophes and chaos: Around the Institut des Hautes Études Scientifiques » (1998).

[2] A. Jackson. « The IHES at forty ». *Notices of the American Mathematical Society* **46**, nº 3 (1999), p. 329–337.

[3] A.-S. Paumier. « Oppenheimer et l'IHES (1958-1967) ». *Bois-Marie, Lettre d'information IHES* (2015), p. 11–13.

Anne-Sandrine Paumier

Historienne des mathématiques, Anne-Sandrine Paumier a été post-doctorante à l'IHES (2013-2017) où elle a travaillé sur l'histoire de l'Institut, à partir de ses archives et des mémoires de ses acteurs. Elle s'intéresse à la « géographie mathématique » après la Seconde Guerre mondiale, c'est-à-dire aux différents lieux des mathématiques, spécifiques à cette période, et à leur impact sur les pratiques des mathématiciens ainsi que sur les mathématiques produites.

L'auteur remercie Aurélie Brest, bibliothécaire de l'IHES, qui lui a transmis les photographies et les archives de l'Institut, ainsi que Fanny Kassel pour ses encouragements et ses corrections sur ce texte.

Entretien avec le directeur, Emmanuel Ullmo

Emmanuel Ullmo, vous êtes directeur de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) depuis septembre 2013. Pourriez-vous nous rappeler comment est né l'IHES ?

Léon Motchane était un industriel d'origine russe qui s'est intéressé aux mathématiques sur le tard, et a même soutenu une thèse à l'âge de 54 ans. Il sentait l'importance d'avoir un lieu en Europe qui réunirait des scientifiques au plus haut niveau avec une liberté totale de recherche. Il avait en tête un modèle clair, celui de l'Institute for Advanced Study (IAS), mais peut-être aussi des modèles plus anciens comme All Souls à Oxford et le Collège de France. Il a pris conseil auprès d'Oppenheimer qui dirigeait l'IAS à ce moment-là et a créé cette institution dont la fonction était, autour d'un collège très restreint de professeurs permanents de tout premier plan, d'accueillir des scientifiques pour des visites de recherche. Il a eu la chance de recruter dès le début des mathématiciens hors-norme : les deux premiers professeurs permanents étaient Dieudonné et Grothendieck. L'excellence de l'Institution a donc été très vite reconnue. Autour de Grothendieck il y avait le Séminaire de Géométrie Algébrique, et ce qui est impressionnant c'est que l'IHES est très rapidement devenu le centre d'une nouvelle direction de recherche d'importance mondiale. Immédiatement, ce niveau de reconnaissance internationale a permis à l'IHES d'être attractif pour le recrutement d'autres professeurs permanents, et les chercheurs ont pris l'habitude d'y venir pour des visites. Le modèle était lancé. Oppenheimer s'est également beaucoup impliqué, en particulier dans la création de la section de physique. Il a proposé des noms, contacté des gens, fait de la publicité pour l'Institut, y compris aux États-Unis, en appelant l'Institut « Institute for Advanced Study Europe ». Il a pesé pour convaincre des physiciens théoriciens de venir ici et de créer la section de physique.

Qu'est-ce qui caractérise l'IHES ?

La liberté académique la plus totale ! Le directeur ne peut jamais demander à un scientifique de travailler sur un thème imposé. Les professeurs invités viennent avec leurs sujets, leurs envies d'aller dans une direction. Ce que nous tentons de faire, c'est de créer la meilleure atmosphère possible de travail et de discussions intellectuelles, que ce soit par des événements sociaux comme le déjeuner et le thé, où les chercheurs échangent beaucoup, ou les groupes de travail, les conférences, les exposés scientifiques.

Thé de l'IHES, 2018

Une atmosphère calme où les gens ont du temps pour se consacrer à leurs travaux, mais aussi familiale, où ils sont à l'aise pour discuter. Par rapport à une université nous avons peu d'étudiants, et seulement à partir du doctorat ; peu de cours, et seulement au niveau recherche. Cela crée une ambiance différente. Le lieu est étonnant et tous ceux qui y viennent s'y sentent bien et ont envie de revenir ; l'environnement est extrêmement plaisant.

Qu'est-ce qui vous a poussé à accepter le poste ?

J'étais professeur à l'université Paris-Sud, très à l'aise dans le milieu universitaire. J'ai commencé par refuser le poste car je ne me voyais pas tellement faire ça... Plusieurs personnes m'en ont reparlé de manière différente. Yuri Tschinkel, Cédric Villani, notamment, m'ont dit que je devrais y réfléchir. Quand on m'a recontacté, j'ai commencé par dire que c'était difficile, mais aussi qu'il faudrait faire un certain nombre de choses qui me semblaient aller dans la bonne direction. Sans m'en rendre compte, j'étais déjà en train de discuter de ce qu'il fallait faire à l'Institut. Il y avait des choses très importantes pour moi : je voulais que les professeurs permanents donnent des cours du type de ceux du Collège de France, que l'Institut soit plus ouvert sur la communauté mathématique française. Je trouvais que son rôle international était parfaitement rempli, mais que la communauté nationale ne s'était pas assez saisie, ou ne profitait pas assez, d'une manière ou d'une autre, de l'Institut. J'essayais de trouver des pistes pour améliorer cet aspect. Finalement, j'étais déjà dans une discussion qui faisait que je pouvais proposer des solutions. Je me suis rendu compte que je pouvais changer des choses que je trouvais assez importantes pour cette institution magnifique, et cela m'a décidé à accepter.

Qu'avez-vous changé depuis 2013 ?

J'ai créé les cours des professeurs permanents ; les Cours de l'IHES sont désormais réguliers. J'ai également ouvert l'Institut à son environnement national. J'ai créé un laboratoire CNRS au sein de l'IHES : l'Équipe de Recherche Labellisée « Laboratoire Alexandre Grothendieck ». J'ai aussi développé des relations plus privilégiées avec l'université Paris-Sud : tous les ans, deux professeurs sont en délégation à l'IHES. Ces enseignants-chercheurs nous connaissent et prennent l'habitude d'organiser des événements scientifiques ici, ce qui crée des liens plus durables avec notre environnement proche. Je suis très impliqué dans la construction de l'université Paris-Saclay.

Leçons Hadamard 2017

Je me suis aussi beaucoup intéressé au problème générationnel : avoir plus de jeunes, en particulier des post-doctorants, et faire en sorte qu'ils soient bien considérés et comprennent qu'ils sont une priorité pour nous. Enfin, j'ai beaucoup augmenté le nombre d'événements scientifiques sur une année, il y a plus de 200 exposés par an en ce moment. C'est un vrai choix.

Comment l'IHES s'insère-t-il dans le paysage scientifique français ?

Nous avons une fonction assez évidente : peu d'institutions en France sont capables d'attirer et de conserver des personnalités de niveau médaille Fields ou Prix Nobel. Il y a le Collège de France, et nous. L'IHES a aussi une spécificité : c'est un organisme de droit privé, ce qui permet de faire des choses différentes et complémentaires, avec plus de souplesse. Nous devons pouvoir jouer un rôle d'excellence, mais aussi rendre des services à la communauté en lui permettant de s'approprier le lieu pour des événements et des visites scientifiques... Cela se fait de plus en plus, et j'espère que les scientifiques de Paris-Saclay, de Polytechnique, et au-delà, vont prendre l'habitude de venir ici pour assister à un exposé, ou pour organiser un séminaire.

Et dans le paysage international ?

L'IHES est visible internationalement car c'est un centre de visites, et les scientifiques pensent assez naturellement à y venir. D'autre part se pose la question de la compétition internationale pour le recrutement. Le recrutement est crucial pour notre institution car nous avons un très petit collège de professeurs. Très souvent ils restent longtemps, donc il faut faire attention. Nous avons comme spécificité de recruter les gens très jeunes : en moyenne, les professeurs permanents de mathématiques ont été recrutés à l'âge de 31 ans. On fait un pari, et un pari qui a bien marché puisque 7 des 10 professeurs qui ont été recrutés à l'IHES en mathématiques ont eu la médaille Fields. L'important, c'est qu'on ne recrute pas quelqu'un parce qu'il a déjà fait sa carrière, mais en espérant qu'il va faire des mathématiques qui vont avoir une certaine reconnaissance internationale dans le futur. Question attractivité, les salaires que nous proposons ici sont compétitifs dans le contexte des universités françaises, mais plutôt dans une moyenne très basse par rapport à des concurrents directs comme l'IAS, ou l'ETH de Zurich. Ce que nous avons à offrir en plus, c'est le cadre scientifique, le fait que, l'IHES n'étant pas une université, les professeurs n'ont pas d'obligation de cours. Il y a un personnel administratif extrêmement compétent pour les appuyer dans toutes leurs démarches. Quand quelqu'un se pose la question de venir ici comme professeur permanent, il sait aussi qu'il a la facilité d'inviter des collaborateurs du monde entier, d'organiser des événements scientifiques, de penser à son activité de recherche comme il l'entend. Il a une liberté académique totale, peu de responsabilités administratives, à part celle de participer à deux conseils scientifiques par an. L'IHES reste aussi attractif du fait que l'Île-de-France est un des meilleurs endroits au monde pour les mathématiques et la physique théorique. L'Institut est inséré dans un tissu scientifique très dense avec l'université Paris-Saclay et Paris centre. C'est important pour quelqu'un qui veut exposer ses idées.

Comment sélectionnez-vous les professeurs permanents ?

C'est le conseil scientifique (CS) qui prend la décision *in fine* et c'est un long processus. Il n'y a pas de direction de départ, nous sommes ouverts à tous les sujets : c'est la bonne personne, au bon moment, qui fait le bon sujet. Le CS propose beaucoup de noms, je contacte des scientifiques pour avoir des avis informels ou formels selon le degré d'avancement du recrutement. Nous pensons mondialement, nous recherchons des scientifiques quelle que soit leur nationalité ou leur formation. C'est, pour un directeur, une occupation centrale des plus intéressantes : avoir un œil ouvert sur tout ce qui se fait d'important, en cherchant des jeunes qui vont produire au plus haut niveau pendant qu'ils sont à l'IHES, et être extrêmement actifs. Nous avons l'aide de collègues scientifiques du monde entier qui veulent bien répondre à nos questions, avec parfois des petits soucis car les autres institutions cherchent elles aussi à recruter dans le même vivier que nous. Nous prenons le temps de discuter lors des CS et lorsqu'un nom émerge, nous demandons des avis officiels.

Et les professeurs associés (chaire Schlumberger, chaire Louis Michel, chaire René Thom, etc.) ?

Nous avons un certain nombre de chaires thématiques. En physique par exemple, la chaire Louis Michel nous permet d'avoir deux titulaires au plus haut niveau qui viennent plusieurs fois par an sur plusieurs années (typiquement trois ans). Les membres du CS – plutôt les physiciens dans ce cas-là – proposent des noms qui sont validés en CS. Nous souhaitons désormais avoir un meilleur *turn over* sur ces chaires pour établir plus de contacts avec une communauté plus grande. La chaire Schlumberger est assez différente. D'abord c'est la seule chaire qui est financée grâce à un don aux fonds propres. Le donateur, Schlumberger, nous a encouragés à recruter, tous les ans, au plus haut niveau académique, des personnalités dont les travaux peuvent intéresser le monde industriel. Cela nous oblige à nous ouvrir à des sujets au-delà de notre zone de confort et apporte des choses vraiment différentes en termes de thématiques. Les titulaires de la chaire Schlumberger ont la possibilité d'inviter des collaborateurs, d'organiser des journées scientifiques, et ils s'en saisissent. Le principe de toutes ces chaires est de faire venir des chercheurs, choisis par le cs au plus haut niveau, et de leur offrir des conditions attractives afin de les fidéliser et de les impliquer dans notre projet scientifique.

Vous évoquez Schlumberger. Plus généralement, quels sont les liens de l'ihes avec les entreprises ?

L'ihes, qui a le statut de fondation reconnue d'utilité publique, était dès le départ très en lien avec les entreprises pour le financement même de l'institution. Nous avons reçu au cours du temps le soutien de plusieurs grands groupes comme axa par exemple, qui a financé sur le principe d'un don aux fonds propres la chaire de mathématiques qu'occupe Maxim Kontsevitch. Concrètement, les intérêts de la chaire paient le salaire de Maxim année après année. Nous avons également eu le soutien de grandes banques. La Société Générale a fait un don aux fonds propres dont les intérêts générés chaque année financent une partie des écoles d'été organisées ici. bnp Paribas a participé à la création de la chaire du directeur qui permet d'assurer une partie du salaire du directeur. Récemment, Nokia-Bell Labs a fait un don pour le programme d'accueil de chercheurs. Dans tous ces cas, les choix scientifiques restent entièrement du ressort du cs. Nous gardons la maîtrise des personnes que nous accueillons, mais voyons d'un œil positif les mises en relation et les discussions avec les entreprises et des chercheurs qui s'intéressent à des questions plus appliquées.

Lors des événements que vous organisez, quelle proportion de l'assistance est extérieure au monde académique ?

Cela dépend totalement de l'événement. Par exemple, nous organisons un workshop avec Huawei sur des thématiques qui peuvent les intéresser. Huawei a créé un centre de recherche en France où il y a près d'une centaine de docteurs, avec une activité scientifique et des intérêts assez divers. Tous les ans depuis trois ans, nous avons une journée de quatre exposés pour laquelle nous essayons d'attirer les meilleurs scientifiques du monde académique, mais dans des directions intéressantes pour Huawei, comme la théorie de l'information de Shannon ou l'intelligence artificielle. Bien sûr, c'est totalement ouvert et n'importe qui de la région, ou qui a envie de venir, vient, mais il y a beaucoup de personnes du monde industriel. Sur des sujets de recherche très spécialisés en mathématique fondamentale ou en physique théorique, il y a très peu de monde de l'industrie.

Votre institut a-t-il vocation à promouvoir la formation par les mathématiques dans le monde industriel ?

Notre modèle, c'est de dire que les mathématiques sont cruciales pour l'ensemble du monde socio-économique et qu'il faut des mathématiques à tous les niveaux pour que l'ensemble tienne. Il faut la formation des jeunes à l'école, au lycée, dans les universités. Il faut des ingénieurs. Mais il faut aussi de la recherche de très haut niveau à l'université et dans des lieux comme l'ihes. Ce qui peut motiver un industriel à soutenir l'Institut, c'est d'une part de se dire que pour que les mathématiques continuent à irriguer le monde économique, il faut qu'elles soient représentées au plus haut niveau, d'autre part de pouvoir montrer qu'une entreprise peut avoir un impact. L'ihes apparaît comme un endroit raisonnable pour financer cette activité de recherche avancée.

Comment interagissez-vous avec les mécènes de l'Institut ?

La manière dont on interagit avec des mécènes potentiels, c'est du relationnel pur. C'est un véritable métier que j'ai découvert en venant ici ! La présence, au conseil d'administration, de personnes extrêmement liées au monde de l'entreprise nous permet d'entrer en contact avec de grands groupes et de leur présenter notre projet. Selon les personnalités rencontrées, ce sont différents aspects de l'ihes qui peuvent retenir l'attention : l'excellence, la liberté académique, le cosmopolitisme... Nous sommes une institution singulière et le projet que nous proposons intrigue toujours. Ce sont des relations de long terme et une implication de personne à personne. Il faut du temps pour instaurer la confiance, pour susciter l'intérêt du chef d'entreprise pour nos sujets et pour ce que l'on fait ici. Il y a un travail de fond qui est long. Notre modèle n'est pas le plus simple pour le financement non institutionnel, car nous ne sauvons pas de vies, nous n'apportons pas de réponses concrètes aux problèmes de recherche des entreprises, mais nous occupons un créneau qui peut intéresser un certain nombre d'individus, et certaines entreprises se reconnaissent dans notre modèle.

Comment se répartit le budget de l'Institut et qui finance l'IHES ? Le ministère de la défense le fait-il toujours ?

La réponse à la dernière question est non : nous n'avons aucun financement du ministère de la défense. Aujourd'hui le budget annuel est d'un peu plus de 6,5 M€. Le soutien du ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (MESR) est notre première source de revenus : plus de 40% du budget. C'est une subvention qui est débattue chaque année, ce n'est pas inscrit dans le marbre. Les fonds propres que nous avons constitués fournissent un peu moins de 20% du budget, c'en est devenu une partie très significative. Nous bénéficions également du soutien d'organismes de recherche internationaux qui contribuent au budget global de l'IHES : l'Académie Suisse des Sciences Naturelles, la Max-Planck Gesellschaft, le Service public fédéral de Programmation Politique Scientifique du Royaume de Belgique. Nous commençons aussi à avoir de plus en plus de financements sur des projets portés individuellement par des scientifiques, comme les ERC et les Simons Collaborations de la Fondation Simons. Ces bourses financent une partie des salaires mais aussi des événements scientifiques, des visites. Ensuite, quelques entreprises et particuliers contribuent au budget de l'IHES dans le cadre d'un projet particulier ou de façon plus globale, voire annuelle. Enfin, les publications mathématiques de l'IHES rapportent un peu d'argent tous les ans.

Quelle est la motivation des grands organismes étrangers à financer l'IHES ?

Le projet de l'IHES a vraiment été conçu comme un projet européen : c'était un contre-point européen à l'IAS. D'une certaine façon, les soutiens d'organismes de recherche européens sont naturels car nous accueillons énormément de chercheurs en poste en Europe. Ces organismes trouvent normal de participer aux frais d'accueil. Ils considèrent que ces visites sont utiles pour nous, mais aussi pour eux, car les scientifiques qui viennent à l'IHES vont apprendre des choses ici, en interagissant avec les professeurs permanents ou invités. C'est un modèle que certains scientifiques continuent à défendre auprès de leurs organismes nationaux et cela nous est très utile.

Quels sont les critères de sélection des professeurs invités ?

Nous recevons tous les ans un peu plus de 200 scientifiques du monde entier, pour des séjours de durée variable, en moyenne deux mois et demi. À chaque instant, il y a une cinquantaine de personnes ici. Nous avons deux modes de sélection assez différents. Le mode principal passe par le CS qui se réunit deux fois par an et valide des candidatures. Nous voulons que l'Institut soit un endroit ouvert et que n'importe qui dans le monde entier puisse se dire « tiens, j'aimerais passer du temps à l'IHES et je propose ma candidature. » Le CS se réunit, étudie un grand nombre de dossiers et valide les candidatures des chercheurs qui ont le meilleur niveau et dont la visite présente un intérêt scientifique, dans la limite des capacités d'accueil. On favorise les visites pour lesquelles on voit une interaction directe avec un chercheur sur place, mais on sélectionne aussi sur le niveau d'excellence, le moment de la carrière. Il y a beaucoup de critères objectifs et subjectifs. Le second mode de sélection concerne des visites proposées en dehors du CS, quand elles sont typiquement courtes, ou au dernier moment. Nous voulons avoir la possibilité d'inviter des collaborateurs ou d'autres scientifiques qui font des choses que nous estimons importantes et que nous avons envie de comprendre et d'écouter.

Quelle attention apportez-vous à la diversité à l'IHES ?

On peut dire que nous ne sommes pas au point sur la parité, en particulier pour l'ensemble du personnel scientifique chez nous. Par exemple, il n'y a pas de femme parmi les professeurs permanents, et parmi les chercheurs CNRS il n'y en a qu'une seule. Ce n'est pas brillant. Nous avons tout à fait conscience qu'on doit pouvoir faire mieux. Sur les événements scientifiques par exemple, on devrait pouvoir imposer plus de femmes dans les comités d'organisation, parmi les conférencières. Par ailleurs se pose la question de la diversité géographique. Quand on voit un bon dossier issu par exemple d'un pays africain, on a toujours envie de se dire qu'une visite serait vraiment utile par rapport à un chercheur qui est déjà dans une université où il a accès facilement à l'information scientifique. Ce sont des discussions informelles qu'on a facilement en CS.

Quels sont les grands domaines actifs à l'IHES ? Et quelle est l'articulation entre les mathématiques et la physique ?

Historiquement, dans les mathématiques très représentées à l'ihes il y a eu la géométrie algébrique, en particulier autour de Grothendieck, Dieudonné et ensuite Deligne. Il y a eu la géométrie différentielle, la géométrie riemannienne, avec René Thom puis Misha Gromov qui est encore ici comme professeur émérite. Après, il y a eu une nouvelle génération, avec Laurent Lafforgue autour des formes automorphes et Maxim Kontsevitch qui a un spectre très large entre la géométrie algébrique et la physique mathématique. Récemment, nous avons de nouvelles directions de recherche comme les probabilités avec Hugo Duminil-Copin. En ce qui concerne les chercheurs du cnrs, il y a eu une longue tradition en géométrie algébrique et en théorie des nombres, et plus récemment Fanny Kassel a apporté son expertise sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie. Je suis pour ma part plutôt théoricien des nombres au départ. Du côté de la physique théorique, il y a eu plusieurs vagues successives. Autour de Thibault Damour, l'activité est très liée à la relativité d'Einstein, avec en ce moment les ondes gravitationnelles qui sont très en vue. On retrouve également, du côté de Vasily Pestun, la théorie quantique des champs ou la théorie conforme des champs pour Slava Ryschkov qui vient d'arriver. Il faut ajouter que l'Institut est vraiment un lieu où il y a énormément d'échanges entre les mathématiciens et les physiciens. D'une part parce que les physiciens ici sont de grands consommateurs de mathématiques, d'autre part car beaucoup de mathématiciens ici ont un intérêt et un background en physique ce qui n'est pas si répandu chez les mathématiciens français. Maxim Kontsevitch a une double culture mathématique et physique mathématique. Il a été reconnu dans les deux disciplines et a reçu le Breakthrough Prize à la fois en mathématiques et en physique théorique. Alain Connes, qui est resté plus de 35 ans ici et est maintenant émérite, a un intérêt très marqué pour la physique. Il s'est beaucoup intéressé au modèle standard et à la manière dont la géométrie non commutative pouvait dire quelque chose sur un dépassement de ce modèle. Tous ces gens-là discutent énormément, apportent des connaissances mathématiques aux physiciens et apprennent de la physique par des physiciens. À titre personnel, je n'entendais jamais parler de physique auparavant, mais maintenant j'entends parler d'ondes gravitationnelles, des derniers développements. Cela fait partie du paysage, c'est très agréable.

Séminaire de physique théorique, 2018

Comment l'ihes s'inscrit-il dans l'université Paris-Saclay ?

L'ihes est depuis le début très impliqué dans la construction de l'université Paris-Saclay (ups).

Rentrée 2016 des Masters de mathématiques de l'université Paris-Saclay

La première raison, c'est que c'est le périmètre scientifique naturel de l'IHES. La deuxième, c'est que, pour moi, nous partageons une mission très claire qui est d'attirer et de maintenir des scientifiques au plus haut niveau sur le territoire. L'UPS peut nous aider pour les recrutements par exemple, avec un appui à des chaires d'installation. De notre côté, nous pouvons apporter à l'ensemble la qualité de ce que l'on fait ici, notre programme international, les récompenses reçues par nos scientifiques. Nous avons l'impression que chacun peut y gagner. À titre personnel, je trouve que c'est une construction très importante, cela me prend beaucoup de temps mais j'ai l'impression qu'on est en train de construire quelque chose qui va changer le paysage scientifique français. Cela m'intéresse au-delà de l'IHES.

De quelle manière cela va-t-il changer le paysage scientifique français ?

Ce que va pouvoir proposer l'UPS, c'est quelque chose qui s'appuie sur deux directions différentes au niveau de la formation. D'une part une université de plein exercice, qui aura le droit de sélectionner ses étudiants et dont la mission sera de produire des individus confrontés à la recherche dès le début, formés par et pour la recherche ; d'autre part un collège universitaire, orienté vers des filières courtes, typiquement trois ans, et dont la vraie question sera « est-ce que les étudiants trouveront un emploi à la fin de cette formation ? » L'idée est d'avoir une université qui a les moyens de choisir ses étudiants, de proposer quelque chose qui puisse être en compétition avec ce que l'on fait dans les classes préparatoires. Dans les universités, on a des enseignants qui sont au plus haut niveau de la recherche mais on ne met pas en face d'eux les meilleurs étudiants, c'est donc un système un peu bizarre. L'UPS aura les moyens d'attirer les meilleurs étudiants dès le début et de leur proposer une formation par la recherche, tout en jouant le rôle social qu'on lui demande : attirer des gens qui ont besoin d'une formation pour s'insérer dans le milieu économique. Le regroupement entre grandes écoles et universités me semble aussi extrêmement important pour remettre le doctorat au centre des diplômes reconnus par le monde du travail. Pour l'instant, ce qui est reconnu, c'est le diplôme d'ingénieur ou le diplôme de commerce. À l'université on pense que quelqu'un qui est formé par la recherche a quelque chose à apporter en plus. Pour que le modèle universitaire du doctorat se développe, il faut que les gens se parlent, se rencontrent. Ce n'est que par la création d'un ensemble un peu plus vaste où des communautés diverses se rencontrent, que les écoles d'ingénieurs vont considérer que le diplôme de doctorat est quelque chose d'utile pour le monde industriel, et les universités vont mieux comprendre comment fonctionnent les écoles d'ingénieurs, voir qu'il y a un certain nombre de choses que les écoles d'ingénieurs font et que ne font pas les universités qui sont extrêmement utiles, comme s'intéresser au devenir de ses étudiants. Chacun va apprendre de l'autre et à terme cela crée quelque chose qui me semble important.

Y a-t-il des doctorants à l'IHES ?

Les professeurs et chercheurs de l'IHES ont bien sûr la possibilité d'encadrer des thèses ; en général ils sont tous habilités à diriger des recherches. L'idée est d'avoir les doctorants sur place, et de leur fournir de bonnes conditions de travail. Ils sont inscrits dans une école doctorale, typiquement l'école doctorale de Paris-Saclay, l'EDMH. Ils peuvent soutenir leur thèse dans les locaux de l'IHES. Actuellement il y a 7 doctorants.

Et les étudiants de Licence ou de Master qui voudraient découvrir ce qu'est la recherche ?

Tous les ans, depuis que je suis arrivé, l'IHES accueille la rentrée des Masters de mathématiques de l'UPS. La cohorte d'étudiants vient à l'Institut pendant trois jours et des cours – assez généralistes – sont organisés pour eux, non sanctionnés par un examen. Ils apprécient de venir ici. Le lieu en particulier est très inspirant. Sur ce modèle, les doctorants de l'école doctorale Jacques Hadamard font eux aussi leur rentrée ici, sur un format d'un jour. Sinon, c'est du cas par cas, il n'y a pas de programme spécifique pour les étudiants en Licence ou en M1. En M2, c'est un peu comme partout : quand on prend quelqu'un en thèse, on encadre en fait souvent son mémoire de M2 avant. Cela se passe naturellement ici aussi.

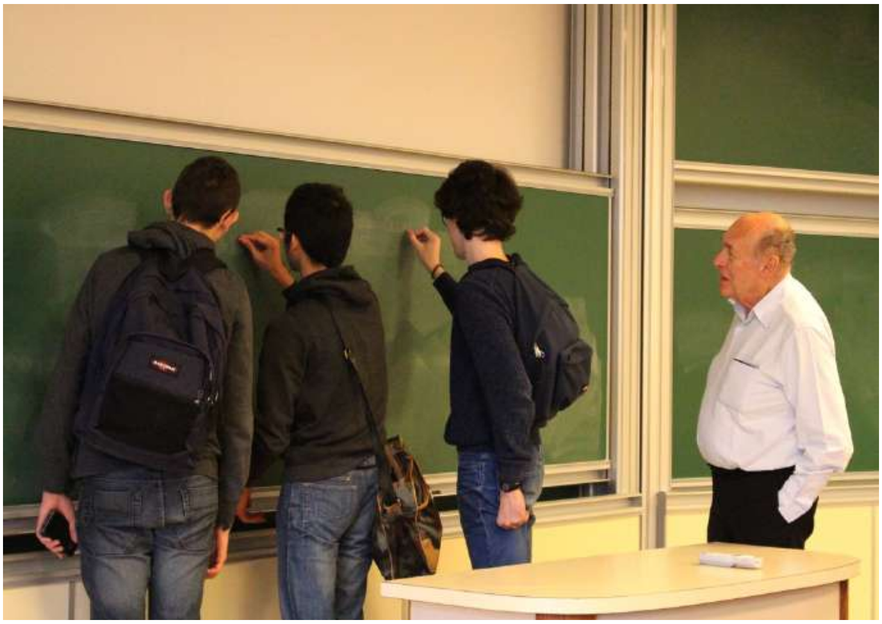
L'Institut a 60 ans cette année, quel regard portez-vous sur ces six décennies ?

Pour moi, la pérennité financière d'un institut comme l'IHES n'est absolument pas triviale. C'est un de ces projets auquel il faut que les gens adhèrent et qu'ils y voient un intérêt. J'ai discuté avec Pierre Deligne qui me disait que les salaires n'étaient pas assurés au début... parfois il passait quelques mois sans être payé. Jean-Pierre Bourguignon a œuvré de façon extraordinaire pour que la solidité financière de l'Institution soit assurée. Quand je suis arrivé, j'ai trouvé une institution beaucoup plus solide que quand lui est arrivé, ce qui m'a permis de me consacrer aux aspects scientifiques qui m'intéressaient plus. Je trouve que le modèle de l'IHES est très intéressant, car il est unique dans le paysage français. Il oblige à être en contact avec le monde économique, à regarder des scientifiques du monde entier. Il nous oblige aussi à nous interroger sur nous-mêmes, car il n'est pas écrit que l'IHES doive exister pour l'éternité, nous devons convaincre en permanence de notre utilité. Nous sommes une fondation reconnue d'utilité publique ; si nous ne montrons pas notre utilité, nous n'existons plus. Pour moi, il y a une vraie responsabilité. Au quotidien, c'est une institution avec un personnel administratif qui fait un travail remarquable, des scientifiques de très haut niveau qui ont de bonnes conditions, une structure d'accueil qui fonctionne. Je dois maintenir tout cela.

Quelle est votre vision de l'Institut dans les années à venir ?

Un Institut comme le nôtre peut rencontrer des problèmes générationnels. On recrute des grands scientifiques qui vont faire toute leur carrière ici et qui y resteront émérites, et c'est une chance pour l'IHES de pouvoir les garder. Néanmoins, le modèle c'est aussi de renouveler en permanence la recherche qui se fait sur place. On doit miser sur des jeunes qui, pendant qu'ils seront en poste, feront la science. Ce qu'il faut réussir à faire, c'est conserver l'expérience scientifique de personnalités de tout premier plan qui ont révolutionné leur domaine, tout en trouvant une nouvelle génération de scientifiques au plus haut niveau. Je cherche à établir cet équilibre des générations et j'ai décidé d'augmenter le nombre de professeurs permanents de 5 à 7, typiquement 4 en mathématiques et 3 en physique théorique. J'ai créé un laboratoire du CNRS pour attirer des chercheurs et développer d'autres thématiques. Je suis très intéressé par le fait d'avoir des post-doctorants de très haut niveau qui considèrent que l'IHES est le meilleur moyen de commencer une carrière : on accueille ici des gens après leur doctorat, ils y trouvent les meilleures conditions de recherche et on doit aussi les aider à avancer dans leur carrière. Il faut donc créer une atmosphère autour des jeunes pour qu'ils se sentent bien et puissent faire de la science sur place. Pour cela on va construire un nouveau bâtiment cette année avec une quinzaine de bureaux supplémentaires. Je souhaite que cet Institut reste un endroit vivant où il y ait beaucoup d'échanges scientifiques, où des idées nouvelles se forment, et que notre effort de réunir des gens au plus haut niveau qui interagissent porte ses fruits. Ce sont les individus qui définissent cette institution et écrivent l'histoire de la science, les personnes que l'on va réussir à recruter qui feront ici des révolutions scientifiques.

Visite de trois lycéens à l'IHES à l'occasion de la préparation de leur TPE, 2017. À droite, D. Ruelle.

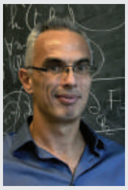


Souhaitez-vous aussi augmenter le nombre de chercheurs CNRS ?

Il me semblerait naturel qu'il y ait plus de chercheurs CNRS qui accompagnent l'augmentation des professeurs permanents, mais c'est quelque chose qui doit se discuter entre le CNRS et le CS. C'est pour un bon équilibre générationnel qu'il faut être un peu plus nombreux. Une taille un peu plus intermédiaire donne une meilleure répartition entre des professeurs très jeunes et très actifs, et des professeurs qui ont eu une carrière extraordinaire et qui partent à la retraite. Les trop petits effectifs ne permettent pas de trouver cet équilibre, mais il faut quand même rester une institution de taille modeste, c'est important de garder l'esprit familial du lieu.

Poursuivez-vous votre activité mathématique tout en étant directeur de l'IHES ?

J'ai plus de mal qu'avant... il y a des périodes où c'est très difficile de le faire, mais j'essaie ! Je n'ai plus de charges d'enseignement et je me suis libéré du journal dont j'étais éditeur, *Inventiones mathematicae*. En dehors des périodes de CA et de CS j'arrive globalement à conserver la même activité de recherche. Je me suis réorganisé, je comprends mieux ce que j'ai à faire en tant que directeur. Le personnel administratif est extrêmement efficace et j'arrive à me concentrer sur les choses que moi seul peux faire au niveau administratif. C'est un bon équilibre, même s'il est parfois difficile de se couper le cerveau en quatre ou cinq parties. On se consacre à une activité mathématique, puis des problèmes surviennent et il faut penser à autre chose. J'ai la bienveillance de certains collaborateurs qui continuent néanmoins à travailler avec moi... En tout cas, il est crucial pour moi de maintenir cette activité de recherche.



Emmanuel Ullmo est directeur de l'IHES et professeur à l'université Paris-Sud. Son domaine de recherche est l'arithmétique et la géométrie algébrique. Il s'intéresse à des questions diophantiennes sur les variétés abéliennes et les variétés de Shimura. Une partie de son travail utilise des idées de théorie ergodique et de théorie o-minimale.

Merci à Marie Caillat qui a retranscrit l'interview orale.

L'Institut des Hautes Études Scientifiques

1. Organisation de la vie scientifique

1.1 – Les différents types de postes

L'IHES offre aux chercheurs un lieu où ils peuvent se consacrer entièrement à leurs travaux, sans aucune obligation d'enseignement, ni tâches administratives. L'une des principales caractéristiques de l'Institut est de se baser sur des personnalités et non sur des thématiques lors de la sélection des professeurs et des chercheurs invités.

Professeurs permanents[1]. Recruter un professeur permanent est l'une des principales missions du conseil scientifique. Les membres sont chargés de formuler des propositions, de préparer des rapports scientifiques et d'étudier les possibilités de nomination. L'Institut compte aujourd'hui six professeurs permanents, trois en physique théorique, trois en mathématiques et le directeur souhaite créer un septième poste. De nombreux prix internationaux ont salué la contribution des professeurs permanents à la connaissance scientifique : 6 médailles Fields, 2 prix Abel, 2 prix Breakthrough, 1 prix Shaw, 1 médaille d'or du CNRS, etc.

Chercheurs CNRS[2]. Dès les années 70, quelques chercheurs du CNRS ont eu la possibilité d'avoir un poste de « visiteur longue durée » à l'IHES. La création en 2015 de l'Équipe de Recherche Labellisée « Laboratoire Alexander Grothendieck » (ERL 9216 CNRS-IHES), a permis de pérenniser ces liens historiques et fructueux. Le périmètre scientifique du laboratoire couvre tous les domaines des mathématiques et de la physique théorique. Aujourd'hui deux directeurs de recherche CNRS et une chargée de recherche CNRS sont affectés par l'INSMI au Laboratoire Grothendieck.

Délégation Université Paris-Sud/IHES. Dans le but de rapprocher davantage l'IHES de son environnement scientifique immédiat, la convention entre l'université Paris-Sud et l'IHES permet chaque année à deux enseignants-chercheurs de passer six mois à l'Institut et d'être dispensés pendant ce temps de leurs charges d'enseignement.

Professeurs associés[3]. Ces chaires permettent d'inviter un ou plusieurs titulaires pour des durées plus longues. C'est le conseil scientifique qui propose et sollicite les professeurs associés.

- La chaire Louis Michel de physique théorique a été créée en 2000.
- La chaire Schlumberger pour les sciences mathématiques, créée grâce au soutien de Schlumberger en 2006, est centrée autour de questions fondamentales à l'interface de l'industrie et des hautes technologies.
- La chaire d'analyse université de Cergy-Pontoise-IHES a été créée en 2009 avec l'université de Cergy-Pontoise.
- La chaire René Thom a été créée en 2013 et permet d'accueillir un chercheur qui travaille à l'interface de la biologie théorique. La chaire est financée par le Fonds Simons pour la biologie à l'IHES.
- La chaire Israel Gelfand de mathématiques a été créée en 2014.

Chercheurs invités[4]. Le programme d'accueil de chercheurs constitue la partie la plus importante de l'activité scientifique de l'Institut. Sélectionnés sur candidature ou invités par les membres du conseil scientifique, chaque année environ 200 professeurs invités viennent du monde entier, pour une durée moyenne de deux mois et demi. Il existe un programme spécial, dans le cadre du programme commun CARMIN[5], qui permet aux chercheurs (post-doctorants ou non) d'associer une visite à l'IHES et la participation à un programme thématique trimestriel de l'IHP pour une durée de six mois.

Post-doctorants[6]. L'accueil de post-doctorants s'est intensifié ces dernières années et une dizaine de postes sont ouverts aux candidatures. Un certain nombre de ces postes est financé grâce au partenariat de l'IHES avec des institutions extérieures et/ou

1. https://www.ihes.fr/scientifiques/professeurs/#permanent
2. https://www.ihes.fr/scientifiques/professeurs/#directeur-de-recherche
3. https://www.ihes.fr/scientifiques/chercheurs-invites/#les-professeurs-associes
4. https://www.ihes.fr/candidatures/#chercheurs-invites
5. https://www.ihes.fr/candidatures/post-doc/programme-carmin/
6. https://www.ihes.fr/candidatures/#post-doc

sur des projets spécifiques (ERC, Fondation Simons, EPSRC, CARMIN). Tous les post-doctorants sélectionnés sont accueillis comme membres de l'Institut postdoctoral de l'IHES.

Une post-doctorante de l'IHES et son collaborateur, 2017

© IHES, M.-C. Vergne

Une invitation scientifique à l'IHES comprend la mise à disposition d'un bureau, un per diem (ou un salaire dans le cadre de certains programmes post-doctoraux), un logement à la résidence de l'Ormaille et le déjeuner en semaine à la cafétéria. C'est aussi toute une infrastructure qui gère l'ensemble des aspects administratifs et scientifiques d'une visite afin de permettre aux chercheurs de se consacrer entièrement à leurs travaux. Les déjeuners à la table de la cafétéria, ou le thé quotidien, sont des occasions précieuses d'échanges et de discussions. À tout moment, l'IHES accueille une cinquantaine de personnes[7].

1.2 – Chronologie des professeurs permanents

Autour d'un feu à l'Ormaille, 1975. (Personnes identifiées : P. Deligne, J. et E. Brumfield, R. MacPherson, G. Brumfield, D. Sullivan.)

© Droits réservés

1.3 – Événements scientifiques et politique audiovisuelle

Autre composante de la politique scientifique de l'IHES : l'organisation d'événements. L'Institut dispose en effet du centre de conférences Marilyn et James Simons (130 places) et d'une plus petite salle de 60 places, l'amphithéâtre Léon Motchane. Au total, ce sont plus de 200 exposés qui sont organisés chaque année à l'IHES. Tous les événements sont annoncés sur le site de l'IHES ainsi que sur la plateforme Indico[8] et l'inscription se fait en ligne.

Les professeurs permanents, les chercheurs CNRS et les titulaires de chaires peuvent proposer des événements. Profitant de son positionnement au cœur d'un vaste réseau de chercheurs, l'institut peut également accueillir certains événements à la demande d'équipes de la région parisienne, voire au-delà. En particulier, l'Institut accueille depuis quelques années les séminaires de rentrée des masters, et des doctorats de l'université Paris-Saclay dont l'IHES est membre. Qu'elles soient à l'initiative de professeurs de l'IHES ou de personnalités extérieures, toutes les propositions sont examinées lors des conseils scientifiques. Si l'IHES peut mettre à disposition une partie des moyens nécessaires, les organisateurs doivent également réunir des financements.

Le format des rencontres peut varier : séminaire régulier sur une journée, rencontre interdisciplinaire, colloque international. Voici quelques exemples parmi les événements récurrents.

Cours de l'IHES[9]. À l'initiative d'Emmanuel Ullmo, l'IHES organise depuis 2013 les « Cours de l'IHES » (sur le modèle des cours du Collège de France), qui permettent d'exposer les résultats scientifiques récents et importants en mathématiques et physique théorique. Les professeurs permanents assurent un cours tous les deux ans, et le Conseil scientifique invite également des chercheurs extérieurs à l'Institut à participer à ce programme de haut niveau.

École d'été[10]. Créées en 2006, grâce à un grand don de la Société Générale, les écoles d'été accueillent chaque année une centaine de jeunes chercheurs pour leur offrir un aperçu des derniers développements sur des sujets porteurs en mathématiques ou physique théorique pendant deux semaines.

7. https://www.ihes.fr/scientifiques/chercheurs-invites/
8. https://indico.math.cnrs.fr/
9. https://www.ihes.fr/evenements/#cours
10. https://www.ihes.fr/candidatures/#ecole-ete

brève histoire de l'IHES

Personnalités scientifiques de tout premier plan, les professeurs permanents de l'IHES en constituent l'ADN. De nombreux prix internationaux ont salué leur immense contribution à la connaissance scientifique.

1958

Léon Motchane crée l'IHES.

1959

Le Fondateur recrute Jean Dieudonné qui reste jusqu'en 1964 et travaille sur de nombreux domaines, de la théorie des groupes à l'analyse fonctionnelle.

Alexander Grothendieck rejoint également l'Institut. Médaillé Fields en 1966, professeur à l'IHES jusqu'en 1971, il renouvelle radicalement les fondements et les méthodes de la géométrie algébrique.

1962

Arrivée de Louis Michel, premier professeur permanent de physique théorique et l'un des grands promoteurs de l'usage de la théorie des groupes en physique et l'étude des symétries. Il reste 30 ans à l'IHES.

1963

René Thom (médaille Fields 1958) est recruté par Léon Motchane et reste à l'IHES jusqu'à la fin de sa carrière. Ayant apporté des contributions majeures en géométrie différentielle et topologie, il s'intéresse ensuite au rôle des singularités dans la morphogénèse, puis à la biologie théorique, à la linguistique et à la philosophie.

1964

David Ruelle* apporte nombre de contributions majeures et durables en théorie quantique des champs, en mécanique statistique ainsi que dans la théorie des systèmes dynamiques.

1970

Pierre Deligne poursuit l'édification de la géométrie arithmétique entreprise par Alexander Grothendieck. Il reçoit la médaille Fields en 1978 et quitte l'IHES en 1984.

1974

Dennis Sullivan reste à l'IHES jusqu'en 1997. Il créé des modèles algébriques pour les espaces topologiques et contribue à l'étude des systèmes dynamiques et à une approche topologique de l'hydrodynamique.

1978

Jürg Fröhlich s'intéresse principalement à la théorie quantique des champs ; il reste 4 ans à l'IHES.

1982

Oscar Lanford III reste 7 ans pour des travaux en théorie des systèmes dynamiques, notamment avec l'application à ces systèmes d'idées issues de la théorie du groupe de renormalisation. Il s'intéresse aux démonstrations assistées par ordinateur, et est responsable des premières installations informatiques de l'IHES.

1982

Depuis plus de trente ans à l'Institut, Mikhail Gromov* transforme complètement la géométrie avant de s'intéresser à la biologie théorique. Il reçoit – entre autres – le prix Kyoto (2002) et le prix Abel (2009).

1985

Jean Bourgain travaille sur les espaces de Banach, l'analyse harmonique et la théorie ergodique. Il reçoit la médaille Fields en 1994 avant de rejoindre l'IAS cette même année.

1989

Thibault Damour* travaille sur la gravitation relativiste, la cosmologie et les nouveaux concepts de la gravitation. Spécialiste d'Einstein, il a reçu de nombreuses récompenses, dont la médaille d'or du CNRS en 2017.

1995

Maxim Kontsevich*. Il appartient à une nouvelle génération de mathématiciens qui ont su importer dans leur discipline les points de vue de la physique quantique. Il reçoit la médaille Fields en 1998 et de nombreux prix par la suite, le prix Crafoord (2008), le prix Shaw (2012), et 2 Breakthrough Prizes en physique fondamentale (2012) et mathématiques (2014).

2000

Laurent Lafforgue* reçoit la médaille Fields en 2002. Ses travaux sont une avancée dans le programme de Langlands. En 2000 également, Nikita Nekrasov devient professeur permanent de physique. Spécialiste de la théorie des cordes, il reste 12 ans à l'Institut.

2014

Vasily Pestun* travaille dans le domaine de la théorie quantique des champs et de la théorie des cordes. En 2016, il reçoit le prix Hermann Weyl.

2016

Premier probabiliste recruté à l'IHES, Hugo Duminil-Copin* a déjà reçu de nombreux prix qui récompensent la profondeur de ses travaux.

2017

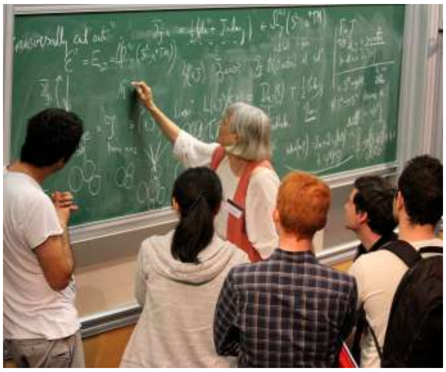
Slava Rychkov* a développé des techniques numériques et analytiques et obtenu des résultats inattendus principalement dans les domaines de la théorie conforme des champs.

● Mathématicien ● Physicien théoricien

* Professeur actuellement à l'IHES

Depuis 2014, l'Institut lance un appel à projet annuel pour l'organisation de cet événement. Les écoles d'été s'inscrivent également dans le programme des « Cours de l'IHES ».

École d'été 2015



© IHES, M.-C. Vergne

Séminaire Paris-Pékin-Tokyo. Le séminaire de géométrie arithmétique Paris-Pékin-Tokyo est organisé conjointement par l'IHES, le Morningside Center of Mathematics de la Chinese Academy of Sciences et le département des sciences mathématiques de l'université de Tokyo à Todai. Il s'agit d'un vidéo-séminaire accessible depuis les trois centres en même temps, organisé par Ahmed Abbes, directeur de recherche CNRS à l'IHES.

Colloque maths-bio. Lorsque Misha Gromov a commencé à s'intéresser à la biologie théorique, l'une des activités structurantes de ce nouvel axe de recherche pour l'Institut a été d'organiser des colloques internationaux pour favoriser les rencontres entre biologistes et mathématiciens. Organisés tous les deux ans, ces colloques continuent de recueillir un vif succès au sein de ces deux communautés.

Colloque « Biotechnologie cellulaire et moléculaire », 2012

Grâce à un investissement conséquent, notamment dans le cadre du programme commun CARMIN, la plupart des exposés sont filmés et mis en ligne sur la chaîne YouTube de l'IHES. L'Institut est par ailleurs un partenaire actif de CARMIN TV, un projet de grande chaîne scientifique avec le CIRM et l'IHP, qui verra le jour courant 2018.

1.4 – Les Publications mathématiques de l'IHES

Créée dès 1959 sous l'impulsion de Léon Motchane, et de Jean Dieudonné, professeur de l'institut, la revue *Les Publications mathématiques de l'IHES*[11] est l'une des plus prestigieuses dans son domaine. Son comité de rédaction est composé de membres permanents et de personnalités extérieures à l'IHES et tout chercheur peut soumettre un article. La revue est disponible en ligne et sur numdam.org.

2. Administration

2.1 – Gouvernance

D'abord créé avec le statut d'association, l'IHES est depuis 1981 une fondation reconnue d'utilité publique. L'institut est administré par un conseil d'administration où siègent des représentants de l'État (le Ministère de la recherche et le CNRS), un collège de fondateurs et des personnalités qualifiées. De son côté, le conseil scientifique a toute latitude pour organiser la vie scientifique de l'Institut lors de ses réunions semestrielles. Il se compose de membres de droit (le directeur et les professeurs permanents) et de membres cooptés qui sont nommés pour des mandats de trois ans, renouvelables une fois. Les chercheurs CNRS à l'IHES et le titulaire de la chaire d'analyse de l'université de Cergy-Pontoise-IHES sont invités à participer aux débats. Outre la sélection des professeurs permanents, le conseil scientifique a également la responsabilité de choisir les chercheurs invités et d'organiser le programme des événements scientifiques.

2.2 – Université Paris-Saclay

Impliqué depuis le début de la construction d'une grande université française de recherche,

11. `https://www.ihes.fr/bibliotheque/#publications-mathematiques`

l'IHES est un membre fondateur, organisme de recherche au sein de l'université Paris-Saclay dont le président est membre du CA de l'Institut. L'IHES accueille depuis quelques années un certain nombre d'événements liés aux mathématiques comme la rentrée des Masters et de l'école doctorale. En 2017, l'Institut a également accueilli la journée des post-doctorants de mathématiques de la Région Île-de-France, ainsi que celle des post-doctorants de physique théorique avec l'IPHT. L'université a par ailleurs créé la Chaire IDEX Paris Saclay pour l'arrivée d'Hugo Duminil-Copin.

2.3 – Budget

Association devenue Fondation Reconnue d'Utilité Publique en 1981, l'IHES doit trouver différents leviers de financement pour assurer son fonctionnement et son développement pour un budget d'environ 6,5 M€. Aujourd'hui le financement de l'Institut reflète son essence : un centre de recherche français au rayonnement international.

Soutien public français. Depuis 1964, le Ministère en charge de la recherche soutient l'IHES. Aujourd'hui, c'est dans le cadre d'une subvention annuelle que le Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la recherche verse à l'Institut une subvention, représentant près de la moitié de son budget. Le CNRS affecte par ailleurs quatre chercheurs dont il prend en charge les salaires et soutient un certain nombre d'événements chaque année. D'autres partenaires institutionnels, l'université Paris-Saclay, la FMJH et le LABEX CARMIN, soutiennent également une partie des activités scientifiques.

Soutien d'institutions étrangères. Dès les années 70, Nicolaas Kuiper s'est attaché à développer un réseau d'organismes de recherche étrangers prêts à contribuer au budget annuel à hauteur d'environ 25%. En 2018, plusieurs institutions étrangères soutiennent le budget ou un projet scientifique :

- Académie Suisse des Sciences Naturelles (depuis 1973)
- Max-Planck Gesellschaft, Allemagne (depuis 1975)
- Service public fédéral de Programmation Politique Scientifique du Royaume de Belgique (depuis 1976)
- Conseil Européen de la Recherche (depuis 2016).

Dons et mécénat C'est à la fin des années 90, sous l'impulsion du directeur Jean-Pierre Bourguignon, que l'IHES a créé un service dédié à la levée de fonds et réalisé avec succès deux campagnes internationales qui ont notamment permis la création de fonds propres. Constitués grâce à la générosité des donateurs, les fonds propres contribuent à près de 20% au budget de l'IHES. Les donateurs de l'IHES permettent également chaque année de conduire de nombreux projets, qu'il s'agisse de rénover les infrastructures d'accueil, de financer des visites ou de soutenir certaines directions de recherche (entre 5 et 10% du budget).

3. 60 ans en 2018

En 2018, l'IHES célèbre son 60e anniversaire et un ambitieux programme rythme l'année. Toute la programmation est détaillée sur le site web de l'IHES [12].

3.1 – Événements scientifiques à l'IHES

Une série d'événements scientifiques labellisés « 60e anniversaire » ont lieu sur le site de l'Institut. Ils s'adressent à un public de spécialistes mais peuvent prévoir un temps d'échanges avec les organisateurs afin de mettre en perspective l'importance du sujet et son histoire au sein de l'IHES.

Interface maths-bio [13]. Du 5 au 9 mars 2018. « *From Molecules and Cells to Human Health : Ideas and concepts* ». Colloque organisé par N. Segev (University of Illinois at Chicago), A. Harel-Bellan (IHES), M. Gromov (IHES) et N. Morozova (CEA).

Mathématiques [14]. Du 11 au 15 juin 2018. « *Arithmétique et géométrie algébrique – conférence en l'honneur d'Ofer Gabber à l'occasion de son 60e anniversaire* » organisée par A. Abbes (IHES, CNRS), S. Bloch (University of Chicago), L. Illusie (université Paris-Sud) et B. Mazur (Harvard).

12. https://www.ihes.fr/60-ans/
13. https://indico.math.cnrs.fr/event/2672/
14. https://indico.math.cnrs.fr/event/1771/

Physique[15]. École d'été du 16 au 27 juillet 2018. « *Supersymmetric localization and exact results* ». Comité scientifique : V. Pestun (IHES), S. Pufu (Princeton University), J. Teschner (Deutsches Elektronen-Synchrotro- DESY).

Interface maths-informatique. Du 15 au 19 octobre 2018. « *GOogle MAtriX : fundamentals, applications and beyond* ». Comité scientifique : M. Gromov (IHES), M. Kontsevich (IHES), D. Shepelyansky (université Paul Sabatier, CNRS), A. Benczur (Hungarian Academy of Sciences).

3.2 – Savant mélange, la soirée de la recherche scientifique

Afin de communiquer l'enthousiasme de la recherche au plus grand nombre, un événement grand public aura lieu à Paris le 16 octobre 2018 en Sorbonne. Grands scientifiques mais aussi personnalités artistiques et des médias se retrouveront pour partager leur passion des sciences. Cet événement a reçu le patronage de la commission nationale française pour l'UNESCO et de la Ville de Paris. Tous les détails seront bientôt disponibles sur un site dédié.

3.3 – Publication

Un projet d'écriture de l'histoire de l'IHES est en cours de réalisation avec notamment le concours d'Anne-Sandrine Paumier, historienne des sciences. L'ouvrage retracera les grandes étapes scientifiques des soixante années d'existence de l'IHES. La sortie est prévue au troisième trimestre 2018.

Rencontre des trois premiers directeurs de l'IHES (N.-H. Kuiper, L. Motchane, M. Berger), 1985

Les directeurs de l'IHES

1958 - 1971 : Léon Motchane, industriel d'origine russe, passionné de mathématiques. Il est le fondateur et premier directeur de l'Institut.

1971 - 1985 : Nicolaas H. Kuiper, néerlandais, mathématicien. Il a montré dans ses recherches un goût prononcé pour la topologie et la géométrie sous beaucoup de formes, de la théorie des plongements aux systèmes dynamiques, de la théorie des flexaèdres à celle des plongements tendus.

1985 - 1994 : Marcel Berger, français, mathématicien. Géomètre riemannien à large spectre, il s'est notamment illustré avec le théorème du pincement 1/4, l'un des points de départ de la géométrie globale. Il a été président de la Société Mathématique de France de 1979 à 1981.

1994 - 2013 : Jean-Pierre Bourguignon, français, mathématicien ayant pour domaine de prédilection la géométrie différentielle, notamment dans ses relations avec les équations aux dérivées partielles et la physique mathématique. Il s'est tout particulièrement intéressé à la courbure de Ricci, tant dans ses aspects mathématiques que dans le rôle qu'elle joue en relativité générale.

Depuis 2013 : Emmanuel Ullmo, français, mathématicien. Son domaine de recherche est la géométrie algébrique et arithmétique. Il est un ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan (promotion 1985) et Docteur ès Sciences Mathématiques de l'université Paris-Sud (1992).

15. `https://indico.math.cnrs.fr/event/3026/`

Entiers friables : un tour d'horizon

• C. Dartyge

1. Introduction

Un entier friable est un entier sans grand facteur premier. Plus précisément, notons respectivement $P^+(n)$ et $P^-(n)$ le plus grand et le plus petit facteur premier d'un entier naturel n [1]. Pour $y \geqslant 2$ on dira que n est y-friable si $P^+(n) \leqslant y$ et qu'il est y-criblé si $P^-(n) > y$. Le mot friable reflète la possibilité de fractionner ces entiers en petits diviseurs, les petits facteurs premiers. Lorsque la borne de friabilité y est très petite on peut les écrire comme des produits de diviseurs dont on maîtrise bien la taille. Cette souplesse dans la factorisation des entiers friables est à l'origine de nombreuses percées en théorie analytique des nombres. Un autre aspect fondamental est que tout entier n se décompose de manière unique sous la forme $n = ab$ où a est y-friable et b y-criblé. La partie criblée b possède alors une structure proche de celle d'un nombre premier tandis que la partie friable a se comporte comme un entier standard. Cette idée toute simple s'avère un point de départ souvent très efficace pour étudier des sommes apparaissant dans des problèmes de théorie analytique des nombres, comme par exemple dans le paragraphe 5.1 de cet article.

Les recherches sur les entiers friables ont véritablement commencé il y a un peu moins d'une centaine d'années. Elles se sont considérablement développées à partir des années 80 non seulement en raison de leur intérêt intrinsèque mais aussi pour leurs multiples applications.

Désignons par $S(x, y)$ l'ensemble des entiers y-friables n'excédant pas x et par $\Psi(x, y)$ son cardinal. Dans un premier temps, nous retraçons les différentes méthodes pour évaluer $\Psi(x, y)$ selon les tailles relatives de x et y et rappelons très brièvement quelques résultats multiplicatifs sur les entiers friables. Ensuite, nous décrivons leur utilisation dans des algorithmes de factorisation. Dans la dernière partie nous présentons divers problèmes de théorie des nombres pour lesquels des avancées importantes ont eu lieu grâce aux entiers friables.

Cette présentation est loin d'être exhaustive. On a plutôt voulu donner un aperçu du rôle des entiers friables dans différents domaines de la théorie des nombres. On pourra trouver des exposés bien plus complets dans les superbes articles de synthèse de Hildebrand et Tenenbaum [12], Granville [10], Pomerance [16]. Nous recommandons également le livre de Crandall et Pomerance [5] et celui de Tenenbaum [17] qui sont respectivement des références incontournables en théorie algorithmique et analytique des nombres.

Dans tout ce qui suit, la lettre p avec ou sans indice désigne un nombre premier, et on notera (a, b) le pgcd des entiers a et b. Pour abréger l'écriture, $\ln_k(t)$ sera pour $t > 0$, la k-ième itérée du logarithme népérien de t, en particulier pour $k = 2$, $\ln_2 t = \ln\ln t$.

2. Compter les friables

2.1 – La fonction de Dickman

Il existe plusieurs approches pour déterminer $\Psi(x, y)$ selon la taille de y par rapport à x. Ces estimations font intervenir de manière essentielle le rapport

$$u = \frac{\ln x}{\ln y}.$$

Dickman a montré en 1930 que pour tout $u > 0$ fixé, une proportion positive des entiers inférieurs à x est $x^{1/u}$-friable :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Psi(x, x^{1/u})}{x} = \rho(u)$$

où ρ, appelée fonction de Dickman, est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $]1, +\infty[$, solution

1. Avec les conventions $P^+(1) = 1$ et $P^-(1) = \infty$.

de l'équation différentielle aux différences

$$u\rho'(u) = \rho(u-1)$$

avec la condition initiale $\rho(u) = 1$ pour $0 \leqslant u \leqslant 1$. Cette fonction $\rho(u)$ est ainsi la probabilité pour qu'un entier inférieur à x soit $x^{1/u}$-friable. Elle apparaît également dans une situation sans lien évident avec les entiers friables : si $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$ alors la série $Y = U_1 + U_1U_2 + U_1U_2U_3 + \cdots$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire de densité $e^{-\gamma}\rho$, γ étant la constante d'Euler [2].

Ce phénomène d'équations différentielles aux différences n'est pas spécifique aux entiers friables. On le rencontre régulièrement dans des problèmes utilisant des méthodes de crible. Traditionnellement, on note $\Phi(x,y)$ le nombre d'entiers y-criblés inférieurs à x. On démontre alors avec un procédé analogue que la probabilité qu'un entier soit y-criblé est $\omega(u)$ (voir par exemple [17], chapitre III. 6), $\omega(u)$ étant la fonction de Buchstab. Elle est définie par $\omega(u) = 1/u$ pour $1 \leqslant u \leqslant 2$ et $(u\omega(u))' = \omega(u-1)$. On retrouve encore de telles fonctions dans des méthodes de crible comme par exemple les cribles de Rosser-Iwaniec ou de Jurkat-Richert.

Le lecteur trouvera dans [17] (chapitre III.5) une étude très précise de la fonction de Dickman. Cette fonction décroît très rapidement quand u tend vers $+\infty$, ainsi que le montre l'estimation obtenue par Hildebrand et Tenenbaum ([12] Corollary 2.3) pour $u \geqslant 1$:

$$\rho(u) = \exp\left\{-u\left(\ln u + \ln_2(u+2) - 1 + O\left(\frac{\ln_2(u+2)}{\ln(u+2)}\right)\right)\right\}.$$

La fonction ρ est implantée dans plusieurs logiciels de mathématiques comme par exemple Sage. Les valeurs que nous donnons ci-dessous sont extraites de [10] : $\rho(2) \approx 3{,}07 \times 10^{-2}$, $\rho(5) \approx 3{,}55 \times 10^{-4}$, $\rho(10) \approx 2{,}77 \times 10^{-11}$, $\rho(20) \approx 2{,}46 \times 10^{-29}$, $\rho(50) \approx 6{,}72 \times 10^{-97}$, etc.

2.2 – $\Psi(x,y)$ pour y grand, avec des équations fonctionnelles

Ce premier résultat de Dickman fut précisé par de Bruijn. L'idée de départ est la suivante : pour $z \geqslant y$, un entier n compté dans $\Psi(x,z)$ est soit y-friable soit de la forme mp avec $P^+(m) \leqslant p$, p étant un nombre premier dans $]y,z]$. On en déduit *l'identité de Buchstab* :

$$\Psi(x,y) = \Psi(x,z) - \sum_{y<p\leqslant z} \Psi\left(\frac{x}{p}, p\right) \qquad (1 < y \leqslant z \leqslant x). \tag{1}$$

On initialise l'itération avec la formule évidente $\Psi(x,y) = \lfloor x \rfloor$ pour $y \geqslant x$. En observant que $x/p \leqslant p$ quand $\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x$ et ainsi que $\Psi(x/p,p) = \lfloor x/p \rfloor$ puis en reportant cela dans (1) on obtient une formule asymptotique pour $y > x^{1/2}$. En insérant cette nouvelle formule de nouveau dans (1) on trouve une estimation de $\Psi(x,y)$ pour $y > x^{1/3}$ et ainsi de suite. Avec cette approche fonctionnelle on parvient à l'estimation uniforme pour $x \geqslant y \geqslant 2$ (voir par exemple le Théorème III.5.8 de [17]) :

$$\Psi(x,y) = x\rho(u) + O\left(\frac{x}{\ln y}\right).$$

Cette formule devient moins intéressante pour de «grandes» valeurs de u. Par exemple si $u \geqslant \ln_2 y$, le terme principal $x\rho(u)$ est dominé par le terme d'erreur $O(x/\ln y)$. La limite de la méthode de de Bruijn est en fait la région

$$y > \exp((\ln x)^{5/8+\varepsilon}), \tag{2}$$

pour $\varepsilon > 0$ fixé. Le résultat de de Bruijn sur l'estimation de $\Psi(x,y)$ qui précède, a été amélioré par Hildebrand qui utilise une autre équation fonctionnelle :

$$\Psi(x,y)\ln x = \int_1^x \Psi(t,y)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \sum_{\substack{p^k \leqslant x \\ p \leqslant y}} (\ln p)\Psi\left(\frac{x}{p^k}, y\right). \tag{3}$$

Cette formule s'obtient en évaluant de deux manières différentes la somme

$$S = \sum_{n \in S(x,y)} \ln n.$$

Tout d'abord, en effectuant une sommation d'Abel, on observe que

$$S = \Psi(x,y)\ln x - \int_1^x \Psi(t,y)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

puis en exploitant l'additivité du logarithme sous la forme $\ln n = \sum_{p^k|n} \ln p$, on obtient le deuxième terme du membre de droite de (3). Cette formule a l'avantage de conserver la borne de friabilité y constante de sorte que $\Psi(x,y)$ apparaît comme une moyenne d'elle-même en une seule variable ce qui

2. $\gamma = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 1/n - \ln N$.

rend la régularisation issue des itérations plus efficace. Hildebrand montre ainsi que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'estimation

$$\Psi(x,y) = x\rho(u)\left\{1 + O\left(\frac{\ln(u+1)}{\ln y}\right)\right\} \tag{4}$$

est valide uniformément dans une région bien plus vaste que (2) :

$$\exp((\ln_2 x)^{5/3+\varepsilon}) \leqslant y \leqslant x. \tag{5}$$

La région (5) est étroitement liée au terme d'erreur du théorème des nombres premiers. Tout progrès sur le terme d'erreur de ce théorème entraîne une amélioration de (5). En fait Hildebrand a montré que l'hypothèse de Riemann [3] est vérifiée si et seulement si la formule (4) est valide dans la région $y \geqslant (\ln x)^{2+\varepsilon}$. Dans cette même région (5), Saias obtient une estimation de $\Psi(x,y)$ plus précise que (4), le terme $x\rho(u)$ étant remplacé par un terme $\Lambda(x,y)$ qui apparaissait déjà dans l'article de de Bruijn. Il est malgré tout possible d'obtenir des formules asymptotiques pour $\ln(\Psi(x,y)/x)$ valables dans des domaines plus étendus. On trouvera par exemple dans [4], [12] ou [17] des formules très précises. Une conséquence de ces estimations est, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ fixé,

$$\Psi(x,y) = xu^{-(1+o(1))u}, \tag{6}$$

quand y et u tendent vers ∞, uniformément pour $u \leqslant y^{1-\varepsilon}$. Cette formule permet d'appréhender l'ordre de grandeur de $\Psi(x,y)$. On en déduit par exemple que pour $\alpha > 1$, $\Psi(x,(\ln x)^\alpha) = x^{1-1/\alpha+o(1)}$.

2.3 – Méthode géométrique pour y très petit

Lorsque y est plus petit qu'une puissance de $\ln x$, il faut procéder autrement pour avoir des formules asymptotiques. On remarque que $\Psi(x,y)$ est le nombre de solutions $(m_p)_{p\leqslant y}$ dans $\mathbb{N}$ de l'inégalité $\prod_{p\leqslant y} p^{m_p} \leqslant x$. En prenant les logarithmes, cette équation devient $\sum_{p\leqslant y} m_p \ln p \leqslant \ln x$. On compte ainsi le nombre de points à coordonnées entières d'un polytope de $\mathbb{R}^{\pi(y)}$, où $\pi(y)$ est le nombre de nombres premiers n'excédant pas y. Cette approche est efficace pour de très petites valeurs de y. Ennola montre ainsi pour $2 \leqslant y \leqslant \sqrt{\ln x}$

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\pi(y)!}\prod_{p\leqslant y}\frac{\ln x}{\ln p}\left\{1 + O\left(\frac{y^2}{(\ln x)(\ln y)}\right)\right\}. \tag{7}$$

La Bretèche et Tenenbaum [4] ont apporté des améliorations à ce résultat suivant plusieurs directions (domaine en y, précision du terme d'erreur) en employant la méthode du col qui est l'objet du paragraphe suivant.

2.4 – La méthode du col

La formule (4) fournit une approximation de $\Psi(x,y)$ par une fonction régulière ce qui n'est pas le cas de (7) qui dépend de $\pi(y)!$. Que se passe-t-il dans la zone non couverte par ces deux estimations, c'est-à-dire quand $\sqrt{\ln x} \leqslant y \leqslant \exp((\ln\ln x)^{5/3+\varepsilon})$?

Cette question a été résolue par Hildebrand et Tenenbaum qui donnent une estimation de $\Psi(x,y)$ en adoptant une troisième approche : la méthode du col. L'indicatrice des entiers y-friables est une fonction multiplicative. Notons $\zeta(s,y)$ la série de Dirichlet associée :

$$\zeta(s,y) := \sum_{P^+(n)\leqslant y}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\leqslant y}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Grâce à la formule de Perron ([17] chapitre II.2), on peut représenter $\Psi(x,y)$ sous la forme suivante pour tout $\alpha > 0$ et $x \notin \mathbb{N}$

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\zeta(s,y)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Le choix optimal de α correspond au point col, c'est-à-dire l'unique solution de l'équation

$$-\frac{\zeta'(\alpha,y)}{\zeta(\alpha,y)} = \ln x, \quad \text{avec} \quad -\frac{\zeta'(\alpha,y)}{\zeta(\alpha,y)} = \sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p^\alpha - 1}. \tag{8}$$

Hildebrand et Tenenbaum obtiennent pour $x \geqslant y \geqslant 2$ la formule

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2(\alpha,y)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{\ln y}{y}\right)\right),$$

où $\phi_2(s,y)$ est la dérivée seconde par rapport à s de $\ln\zeta(s,y)$.

A priori cette formule n'apporte pas d'information directement exploitable car l'expression de α donnée par (8) semble assez mystérieuse. Cependant, Hildebrand et Tenenbaum obtiennent à partir du théorème des nombres premiers des estimations asymptotiques de $\alpha = \alpha(x,y)$. Cela leur permet

3. La fonction ζ de Riemann est définie par $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$ pour $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement supérieure à 1. Elle admet un prolongement analytique noté encore ζ sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ en une fonction ayant un pôle simple en 1. L'hypothèse de Riemann dit que les zéros non triviaux de ζ ont tous une partie réelle égale à 1/2.

de retrouver par cette voie les résultats de Hildebrand évoqués précédemment. Ils déterminent en outre des estimations très précises du comportement local de $\Psi(x,y)$. Par exemple, ils montrent lorsque y tend vers $+\infty$, que $\alpha(x,y) = o(1)$ si et seulement si $y \leqslant (\ln x)^{1+o(1)}$ où cette fois-ci, le "$o(1)$" se rapporte à x. Une conséquence est que l'équivalence $\Psi(2x,y) \sim \Psi(x,y)$ a lieu si et seulement si $y \leqslant (\ln x)^{1+o(1)}$.

Très récemment, La Bretèche et Tenenbaum [4] ont obtenu des estimations de $\Psi(x,y)$ dans la zone critique $1 \leqslant y \leqslant (\ln x)^{1+o(1)}$ élucidant complètement le comportement de cette fonction dans cette région. Leurs résultats mettent notamment en évidence des discontinuités importantes de $\Psi(x,y)$ lorsque y est un nombre premier de taille $o((\ln x)^{2/3}(\ln_2 x)^{1/3})$. Les entiers très friables ne sont pas lisses...

3. Quelques propriétés des entiers friables

Avant d'exposer les applications en cryptographie et dans d'autres problèmes de théorie analytique des nombres, essayons de répondre à la question suivante : dans quelle mesure les entiers friables sont-ils des entiers comme les autres ?

Pour cela, on peut se baser sur plusieurs critères fréquemment utilisés en théorie analytique des nombres, la répartition de ces entiers dans les petits intervalles, ainsi que dans les progressions arithmétiques, ou encore étudier les moyennes friables de fonctions multiplicatives. La fin de cette partie porte sur l'inégalité de Turán-Kubilius, un résultat important de la théorie probabiliste des nombres.

3.1 – Répartition dans les petits intervalles

On s'attend à ce que la répartition des entiers friables dans les petits intervalles soit harmonieuse, c'est-à-dire

$$\frac{\Psi(x+z,y)-\Psi(x,y)}{z} \sim \frac{\Psi(x,y)}{x}, \qquad (9)$$

dans une grande région en x,y,z. Hildebrand obtient une estimation de la forme (9) dans le même domaine (5) et pour des intervalles de taille $xy^{-5/12} \leqslant z \leqslant x$. Hildebrand et Tenenbaum trouvent des estimations asymptotiques dans des domaines plus vastes en y mais en contrepartie avec des intervalles de longueur z d'un ordre de grandeur plus élevé.

Pour des intervalles plus courts, Friedlander et Lagarias montrent qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 1-\alpha-c\alpha(1-\alpha)$ fixés, l'intervalle $[x, x+x^\beta]$ contient une proportion positive d'entiers x^α-friables. On trouvera dans [12] et [10] d'autres résultats sur les entiers friables dans les petits intervalles. Très récemment Matomäki et Radzwiłł [14] ont réalisé une avancée spectaculaire : ils ont montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existait $C(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout x assez grand, l'intervalle $[x, x+C(\varepsilon)\sqrt{x}]$ contient au moins $\sqrt{x}/(\ln x)^4$ entiers x^ε-friables. On verra au paragraphe 5 que la recherche d'entiers friables dans de tels petits intervalles est un point important de plusieurs algorithmes de factorisation. C'est le cas par exemple du crible quadratique.

3.2 – Entiers friables dans les progressions arithmétiques

Désignons par $\Psi(x,y;a,q)$ le nombre d'entiers y-friables congrus à a modulo q et $\Psi_q(x,y)$ le cardinal des entiers y-friables premiers à q. Lorsque $(a,q) \neq 1$ et est y-friable, ce cardinal vaut $\Psi(x/d, y; a/d, q/d)$ si on note $d = (a,q)$. On peut donc se limiter au cas où a et q sont premiers entre eux. Dans l'hypothèse d'une bonne répartition dans les classes inversibles modulo q, on attend pour $(a,q) = 1$,

$$\Psi(x,y;a,q) \sim \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}, \qquad (10)$$

où φ est l'indicatrice d'Euler : $\varphi(n) = \sharp(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Ici encore l'enjeu est double : obtenir des estimations dans des domaines les plus grands possibles à la fois par rapport à q et à y. En fait, l'estimation du terme principal $\Psi_q(x,y)$ est déjà un problème difficile.

De très beaux résultats dans ce sens existent dans la littérature tels les travaux de Fouvry et Tenenbaum [8], Granville [9], et tout récemment les articles de Harper [11], et de Drappeau [7]. Harper a montré que (10) a lieu dès que le rapport $\ln x/\ln q \to \infty$ et $q \leqslant y^{4\sqrt{e}-\varepsilon}$, $y \geqslant y_0(\varepsilon)$.

Cependant la condition $\ln x/\ln q \to \infty$ est très contraignante, elle ne couvre pas des zones où $q \approx x^\alpha$ même pour des réels $\alpha > 0$ très petits. Cet obstacle est résolu quand on s'intéresse à la répartition en moyenne sur q. Harper montre ainsi qu'il existe $c > 0$ tel que pour $(\ln x)^c \leqslant y \leqslant x$, (10) est vérifié pour presque tout $q \leqslant \sqrt{\Psi(x,y)}(\ln x)^{-7/2}$ puis Drappeau obtient un résultat de ce type en moyenne pour $q < x^{3/5-\varepsilon}$ mais avec une uniformité moins bonne sur les classes a modulo q et pour une zone de friabilité du type $(\ln x)^c \leqslant y \leqslant x^{c'}$ où $c' > 0$ est une constante très petite.

3.3 – Fonctions multiplicatives et entiers friables

En théorie analytique des nombres, on est souvent confronté à l'estimation de sommes de la forme
$$\Psi_f(x,y) := \sum_{n \in S(x,y)} f(n)$$
où f est une fonction multiplicative c'est-à-dire telle que $f(mn) = f(m)f(n)$ si $(m,n) = 1$. Des exemples typiques sont la fonction τ qui donne le nombre de diviseurs, les caractères de Dirichlet, la fonction de Möbius qui sera définie au paragraphe 5.1, le nombre $r(n)$ de représentations de n comme somme de deux carrés, le nombre $\rho_P(n)$ de racines de P modulo n pour un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ donné, etc. Lorsque f est une fonction oscillante telle que $\sum_{n \leqslant x} f(n) = o(x)$ comme c'est le cas par exemple de la fonction de Möbius ou des caractères de Dirichlet, l'enjeu est d'obtenir la plus grande région possible en y telle que $\Psi_f(x,y) = o(\Psi(x,y))$. Quand f est à valeurs positives, on espère obtenir des formules asymptotiques. Il est fréquent dans les applications que les $f(p)$ soient proches en moyenne d'un réel κ : $\kappa = 2$ pour la fonction τ, $\kappa = 1$ pour ρ_P si P est irréductible, etc. Tenenbaum et Wu [18] montrent sous de telles hypothèses des formules du type
$$\Psi_f(x,y) = C_\kappa(f) x \rho_\kappa(u) \ln(y)^{\kappa-1}(1 + E(x,y)),$$
où ρ_κ est la puissance fractionnaire de convolution d'ordre κ de la fonction de Dickman [4], $C_\kappa(f)$ est un produit eulérien convergent dépendant de f et de κ et $E(x,y)$ un terme d'erreur très explicite qu'il serait trop long de définir ici. Dans des circonstances très générales, nous avons $E(x,y) = o(1)$ pour des régions analogues à la zone (5) de Hildebrand pour $\Psi(x,y)$.

3.4 – Inégalité de Turán-Kubilius

Un problème que l'on rencontre fréquemment en théorie analytique des nombres consiste à comprendre le comportement «presque partout» d'une fonction arithmétique f donnée. On cherche s'il existe une fonction *régulière* g telle que $|f(n) - g(n)|$ soit très petit pour presque tout entier n, c'est-à-dire pour n appartenant à un ensemble de densité naturelle 1 [5]. On dit alors que g est un ordre normal de f. Un exemple célèbre est le théorème de Hardy et Ramanujan énonçant que $g(n) = \ln_2 n$ est un ordre normal de la fonction $\omega(n)$, le nombre de facteurs premiers de n ainsi que de la fonction $\Omega(n)$, le nombre de facteurs premiers comptés avec multiplicité.

Un candidat naturel en général pour g est la valeur moyenne de f, c'est-à-dire
$$g(N) = E_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N} f(n).$$

On entre dans le domaine de la théorie probabiliste des nombres. Une méthode souvent très efficace est d'évaluer la variance
$$V_N(f) = E_N(|f(n) - E_N(f)|^2)$$
puis d'appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev. Il faut malgré tout être en mesure d'évaluer cette variance, ou les moments d'ordre 1 et 2. L'inégalité de Turán-Kubilius fournit une telle majoration de la variance, pour les fonctions additives. Une fonction additive est une fonction h telle que $h(mn) = h(m) + h(n)$ dès que $(m,n) = 1$. Les fonctions $\ln n$, $\omega(n)$, $\Omega(n)$ sont des prototypes de fonctions additives. Ces fonctions sont déterminées par leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers. Le lecteur trouvera dans [17] une construction détaillée du modèle probabiliste que l'on peut associer aux fonctions additives. En considérant que la probabilité qu'un entier n soit divisible exactement par p^k est égale à $1/p^k - 1/p^{k+1} = (1-1/p)p^{-k}$, il est naturel de penser que, si f est additive, $E_N(f)$ soit proche de $E_N^*(f) := \sum_{p^\nu \leqslant N} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big(1 - 1/p\Big)$. La variance associée devient
$$V_N^*(f) = \frac{1}{N}\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} |f(n) - E_N^*(f)|^2.$$
L'inégalité de Turán-Kubilius énonce que pour toute fonction additive f à valeurs complexes, on a
$$V_N^*(f) \leqslant \left\{4 + O\left(\sqrt{\frac{\ln\ln N}{\ln N}}\right)\right\} B_N(f)^2,$$

4. ρ_κ est la fonction continue sur $]0,\infty[$, dérivable sur $[1,\infty[$ telle que $\rho_\kappa(u) = u^{\kappa-1}/\Gamma(\kappa)$ si $0 < u \leqslant 1$ et $u\rho_k'(u) + (1-\kappa)\rho_\kappa(u) + \kappa\rho_k(u-1) = 0$ pour $u > 1$.

5. Une partie A de $\mathbb{N}$ est de densité naturelle 1 si $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sharp\{n \leqslant N : n \in A\} = 1$.

où $B_N(f)^2$ est le moment d'ordre 2 correspondant :

$$B_N(f)^2 = \sum_{p^\nu \leqslant N} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\Big(1-\frac{1}{p}\Big).$$

Une application immédiate est de retrouver une version quantitative du théorème de Hardy-Ramanujan évoqué précédemment. La Bretèche et Tenenbaum [2] ont obtenu une telle inégalité pour les entiers friables. Pour $p \leqslant y$, la probabilité qu'un entier friable soit exactement divisible par p^k est proche de $(1-1/p^\alpha)p^{-k\alpha}$ où α est le point col défini par (8). Les espérances, variances et moments d'ordre 2 associés à ce modèle probabiliste pour les entiers friables, sont :

$$E_N^*(f,y) = \sum_{p^\nu \in S(N,y)} \frac{f(p^\nu)}{p^{\alpha\nu}}\Big(1-\frac{1}{p^\alpha}\Big),$$

$$V_N^*(f,y) = \frac{1}{\Psi(N,y)} \sum_{n \in S(N,y)} |f(n) - E_N^*(f,y)|^2$$

$$\text{et } B_N(f,y)^2 = \sum_{p^\nu \in S(N,y)} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\alpha\nu}}\Big(1-\frac{1}{p^\alpha}\Big).$$

La Bretèche et Tenenbaum montrent alors qu'il existe une constante absolue $C > 0$ telle que pour tous $2 \leqslant y \leqslant N$, on ait

$$V_N^*(f,y) \leqslant C B_N(f,y)^2.$$

La Bretèche et Tenenbaum obtiennent en outre l'inégalité plus fine $V_N^*(f,y) \ll V(Z_f)$, où $V(Z_f)$ est la variance du modèle probabiliste friable Z_f associé à la fonction additive f. Ce théorème a de très belles applications sur les propriétés des entiers friables. Ici nous n'en évoquerons qu'une seule mais le lecteur en trouvera d'autres tout aussi spectaculaires dans [2]. Notons $p_j(n)$ la suite croissante des facteurs premiers de n. Un fait très surprenant est que pour presque tout entier n l'ordre de grandeur de $p_j(n)$ ne dépend que de j : pour presque tout $n \leqslant x$, $\ln_2(p_j(n)) \sim j$ pour $J_x \leqslant j \leqslant \omega(n)$, J_x étant une fonction positive tendant vers l'infini avec x.

L'inégalité de Turán-Kubilius sur les friables fournit un ordre normal de ces fonctions $p_j(n)$ quand n est friable. La Bretèche et Tenenbaum montrent que les petits facteurs premiers des entiers friables ont un comportement similaire aux entiers naturels mais que passé un certain seuil, il y a un phénomène de tassement de plus en plus important. Notamment pour $y \leqslant (\ln x)^{1+o(1)}$ et J_x comme précédemment, $p_j(n) = p_j^{1+o(1)}$ pour $J_x \leqslant j \leqslant \omega(n)$, pour presque tout $n \in S(x,y)$, où p_j est le j-ième nombre premier. D'après le théorème des nombres premiers, $p_j \sim j \ln j$, la situation est donc très différente de celle des entiers génériques.

4. Applications en théorie algorithmique des nombres et en cryptographie

La sécurité de divers systèmes de cryptographie à clé publique repose sur la difficulté de factoriser des entiers produits d'un petit nombre de grands facteurs premiers. Par exemple, la clé publique du système RSA est un entier N produit de deux «grands» facteurs premiers, soit $N = pq$. On décrypte le code si on réussit à déterminer les facteurs premiers p et q.

Les entiers friables ont une place très importante dans plusieurs algorithmes de factorisation et donc entre autres dans la détermination des facteurs p et q ci-dessus. Ils interviennent également dans le problème du logarithme discret et dans certains tests de primalité. Dans ce paragraphe, nous donnons un aperçu de leur rôle dans quelques-uns de ces algorithmes. Nous avons choisi des situations dont la présentation nécessitait assez peu de bagage mathématique. Nous laissons ainsi notamment de côté les algorithmes de factorisation ou les tests de primalité construits à partir des lois de groupes sur les courbes elliptiques et qui sont pourtant parmi les plus couramment utilisés.

La place des entiers friables dans ces algorithmes y est analogue à ce que nous décrivons ici, même si le contexte est différent. On pourra consulter par exemple l'exposé de Pomerance au congrès international des Mathématiques à Zurich en 1994 [16] ainsi que le livre de Crandall et Pomerance [5] qui nous ont beaucoup servi dans cette partie.

4.1 – Le crible quadratique

Le crible quadratique a été inventé par Pomerance au début des années 80. On cherche à factoriser un entier n que l'on sait composé. L'idée de départ est que si a et b sont deux entiers tels que $a \not\equiv \pm b \mod n$ et $a^2 \equiv b^2 \mod n$ alors $(a-b,n)$ sera un diviseur non trivial de n. Il s'agit maintenant de construire de tels entiers a et b.

La première étape du crible quadratique consiste à considérer les valeurs y-friables prises par le polynôme $Q(t) = t^2 - n$ lorsque t est proche de $\sqrt{n}$, disons $|t - \sqrt{n}| < n^{\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ petit. Pour de tels t, $Q(t)$ sera petit :

$$|Q(t)| \leqslant (2 + n^{-1/2+\varepsilon})n^{1/2+\varepsilon} < 3n^{1/2+\varepsilon}.$$

Il est naturel d'escompter que ces valeurs ont des propriétés multiplicatives similaires à celles des entiers dans l'intervalle $]-3n^{1/2+\varepsilon}, 3n^{1/2+\varepsilon}[$. Pourquoi construire autant de valeurs de $Q(t)$ friables ? Notons $(t_1, Q(t_1)), \dots, (t_N, Q(t_N))$ les couples de t_i avec $Q(t_i)$ friables ainsi obtenus. La deuxième idée de Pomerance est que si nous disposons d'au moins $N \geqslant \pi(y)+1$ entiers y-friables alors on pourra former un carré à partir de ces valeurs de $Q(t_i)$. Cela découle d'un raisonnement d'algèbre linéaire. Chaque $Q(t_i)$ se factorise sous la forme $Q(t_i) = \prod_{p \leqslant y} p^{v_p(Q(t_i))}$ où $v_p(a)$ désigne la valuation p-adique de a. On peut associer à chaque $Q(t_i)$ un vecteur de $\mathbb{F}_2^{\pi(y)}$ dont les coordonnées sont les $v_p(Q(t_i)) \mod 2$, $p \leqslant y$. Comme $N > \pi(y)$, on a construit plus de vecteurs que la dimension. Ces vecteurs ne sont donc pas indépendants, il existe $J \subset \{1, \dots, N\}$ tel que $\sum_{j \in J} v_p(Q(t_j)) \equiv 0 \mod 2$ pour tout $p \leqslant y$, autrement dit tel que $\prod_{j \in J} \prod_{p \leqslant y} p^{v_p(Q(t_j))}$ soit un carré, que l'on note v^2. On aura ainsi

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{j \in J} t_j\Big)^2 &\equiv \prod_{j \in J}(t_j^2 - n) \mod n\\ &\equiv v^2 \mod n.\end{aligned}$$

Si $\prod_{j \in J} t_j \not\equiv \pm v \pmod n$, $(v - \prod_{j \in J} t_j, n)$ sera un diviseur non trivial de n détecté à l'aide des entiers friables. En reprenant l'hypothèse que les valeurs des polynômes considérés se comportent comme des entiers naturels pris au hasard dans l'intervalle $]-3n^{1/2+\varepsilon}, 3n^{1/2+\varepsilon}[$ et en utilisant (6), Pomerance montre que la complexité du crible quadratique vaut $L(n)^{1+o(1)}$ avec $L(n) = \exp(\sqrt{\ln n \ln_2 n})$, $L(n)^{\sqrt{2}/2}$ étant la borne de friabilité optimale de l'algorithme.

4.2 – Le crible algébrique

Le crible quadratique est en pratique utilisé pour factoriser des entiers avec moins d'une centaine de chiffres. Pour les entiers plus grands, on passe au crible algébrique qui est l'objet de ce paragraphe. On commence par construire un polynôme f de degré $d \geqslant 2$ tel que $f(m) \equiv 0 \mod n$ pour un entier m proche de $n^{1/d}$ où n est l'entier à factoriser. Par exemple, pour $m = \lfloor n^{1/d} \rfloor$, on peut former le polynôme f à partir du développement de n en base m : $n = m^d + c_{d-1}m^{d-1} + \cdots + c_1 m + c_0$, où les entiers c_j sont compris entre 0 et $m-1$. On considère ensuite le polynôme $f(X) = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_1 X + c_0$. Si ce polynôme est réductible, on a tout de suite une factorisation de n. On peut donc supposer désormais le contraire. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ une racine de $f(X)$. On cherche alors un ensemble S de couples d'entiers premiers entre eux (a, b) tels que l'on ait

$$\prod_{(a,b) \in S} (a - b\theta) = \gamma^2, \quad \prod_{(a,b) \in S} (a - bm) = v^2, \qquad (11)$$

pour des $\gamma \in \mathbb{Z}[\theta]$, $v \in \mathbb{Z}$. La construction de tels carrés suit un procédé d'algèbre linéaire analogue à celui du crible quadratique. La première étape consiste ainsi à trouver des couples (a, b) tels que $(a - bm)$ et $N(a - b\theta)$ soient friables où N est la norme sur $\mathbb{Q}(\theta)$.

En supposant de nouveau que les valeurs des polynômes considérés se comportent comme des entiers naturels pris au hasard, Buhler, H. Lenstra et Pomerance montrent que la complexité du crible algébrique est de l'ordre de $\exp(c(\ln n)^{1/3}(\ln_2 n)^{2/3})$ et serait atteinte pour des polynômes de degré $d \sim \Big(\frac{3 \ln n}{\ln_2 n}\Big)^{1/3}$. Ces résultats reposent entre autres sur des conjectures relatives à la répartition des entiers friables dans les petits intervalles et dans des suites polynomiales, qui sont actuellement hors d'atteinte notamment pour le crible algébrique où le degré du polynôme optimal est très élevé. Ces dernières années, plusieurs travaux ont porté sur ce sujet. Dans le cadre du crible algébrique, on vient de voir que les formes binaires de la forme $F(a, b) = (a - bm)N(a - b\theta)$ ont une place importante. Balog, Blomer, Tenenbaum et l'auteur ont donné dans un cadre général pour des formes binaires $F \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ des minorations de $\Psi_F(x, y) = |\{1 \leqslant a, b \leqslant x : P^+(F(a, b)) \leqslant y\}|$ pour $y \geqslant x^{\alpha_F + \varepsilon}$ où α_F dépend de la structure de F. Dans le cas où F est une forme binaire irréductible, la valeur $\alpha_F = \deg F - 2$ est admissible. Lachand [13], obtient des formules asymptotiques valables dans des régions où $y = x^{o(1)}$ dans le cas où f est une forme cubique ou un produit de formes affines (avec pour les formes cubiques des expressions explicites du "$o(1)$" de l'exposant de y ci-dessus).

4.3 – Le problème du logarithme discret sur les entiers

Le problème du logarithme discret intervient dans plusieurs protocoles de cryptographie. Soient

p un grand nombre premier, g un générateur de $\mathbb{F}_p^*$ et $t \in \mathbb{F}_p^*$. Le problème du logarithme discret [6] consiste à trouver ℓ tel que $g^\ell = t$. On écrit alors $\ell = \ln_g t$. On commence par sélectionner les puissances g^m qui admettent un représentant y-friable. Si on en trouve suffisamment, on pourra déterminer par un raisonnement d'algèbre linéaire les logarithmes discrets des nombres premiers q inférieurs à y. Après cette étape, on considère les produits $g^m t$ où m est un entier choisi au hasard. Si l'un des $g^m t$ est y-friable, donc de la forme $g^m t = \prod_{i=1}^r q_i^{a_i}$, on pourra en déduire que

$$\ln_g t = -m + \sum_{i=1}^{r} a_i \ln_g(q_i).$$

5. Applications des entiers friables en analyse et en théorie des nombres

Les entiers friables ont à de nombreuses reprises ouvert des brèches dans des problèmes restés inattaquables durant des décennies. Dans cette partie nous décrivons très brièvement leur apport sur des sujets très différents.

5.1 – Théorème des nombres premiers, théorème de Daboussi sur les fonctions multiplicatives

Dans la première moitié du siècle dernier, de nombreux mathématiciens étaient persuadés qu'il n'existait pas de preuve élémentaire du théorème des nombres premiers, élémentaire signifiant uniquement avec les outils standard de l'analyse réelle, notamment sans faire appel à l'analyse complexe. Ce fut une énorme surprise lorsque Erdős et Selberg fournirent en 1949 une preuve élémentaire mais très difficile. En 1984, Daboussi [6] donne une preuve très élégante en utilisant les entiers friables. Désignons par μ la fonction de Möbius. Cette fonction est définie de la manière suivante : $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier, sinon elle vaut $(-1)^{\omega(n)}$, $\omega(n)$ étant le nombre de facteurs premiers distincts de n. Un résultat classique de théorie des nombres énonce que le théorème des nombres premiers est équivalent à la formule

$$M(x) := \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x). \qquad (12)$$

Une des idées de Daboussi est d'exprimer $M(x)$ en fonction de sommes de Möbius sur les friables $M(x,y) = \sum_{n \in S(x,y)} \mu(n)$. En écrivant $n = ab$ avec a y-friable et b y-criblé, on parvient en effet à la formule :

$$M(x) = \sum_{P^-(b)>y} \mu(b) M(x/b, y).$$

Les étapes suivantes suivent un déroulement plus naturel que la preuve élémentaire initiale d'Erdős et Selberg. Elles utilisent des estimations très simples sur les entiers criblés ainsi que sur les entiers friables, le passage clé étant la majoration d'une sorte de moyenne en y des quantités $M(x,y)$.

Ce procédé limpide de factorisation criblé-friable, combiné avec des méthodes de convolution [7] permet également de retrouver le théorème de Daboussi suivant : si f est une fonction multiplicative (i.e. $f(mn) = f(m)f(n)$ si m et n sont premiers entre eux) de module n'excédant pas 1 alors pour tout α irrationnel, on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) \exp(2i\pi n\alpha) = 0.$$

5.2 – Les entiers friables dans le problème de Waring

Le problème de Waring consiste à trouver pour chaque entier $k \geqslant 2$, le plus petit entier s tel que tout entier naturel s'écrive comme la somme de s puissances k-ièmes. Une version légèrement affaiblie est d'imposer seulement que tout entier *assez grand* soit somme de s puissances k-ièmes. Cet entier s pour cette deuxième version est souvent noté $G(k)$. Par exemple $G(3) \leqslant 7$ d'après Linnik, $G(4) = 16$ d'après Davenport. La méthode du cercle consiste à écrire le nombre de telles représentations sous la forme d'une intégrale de Cauchy ou de Fourier. Si on note $R(n)$ le nombre de représentations de n comme sommes de s puissances k-ièmes, on a alors

$$R(n) = \int_0^1 F(\alpha)^s \exp(-2i\pi n\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \text{ avec } F(\alpha) = \sum_{m \leqslant n^{1/k}} \exp(2i\pi m^k \alpha).$$

6. On peut le formuler dans un cadre plus général en remplaçant $\mathbb{F}_p^*$ par un groupe cyclique.
7. Le produit de convolution de deux fonctions arithmétiques est défini dans le paragraphe 5.3.

La contribution principale à cette intégrale provient des *arcs majeurs* qui correspondent aux α proches d'un rationnel de petit dénominateur. On note traditionnellement $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces α, puis $\mathfrak{m} =]0,1[\smallsetminus\mathcal{M}$ les *arcs mineurs*. Une part importante du travail consiste alors à montrer que la contribution des arcs mineurs est négligeable. On peut partir de majorations de la forme

$$\int_{\mathfrak{m}} |F(\alpha)|^s \,\mathrm{d}\alpha \leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |F(\alpha)|^{s-2\ell} \int_0^1 |F(\alpha)|^{2\ell} \,\mathrm{d}\alpha,$$

avec $2\ell \leqslant s$. L'intégrale du membre de droite ci-dessus correspond au nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1^k + \cdots + x_\ell^k = y_1^k + \cdots + y_\ell^k, \quad (1 \leqslant x_i, y_i \leqslant n^{1/k}).$$

En restreignant à des variables friables, Wooley [19], parvient à établir des inégalités fonctionnelles entre les solutions d'une équation diophantienne faisant intervenir ℓ variables x_i, y_i friables et les solutions d'une équation pour $\ell - 1$ variables. Le procédé est très compliqué et ne peut être expliqué en quelques lignes, mais a permis à Wooley de montrer notamment que $G(k) \leqslant k\ln k + k\ln\ln k + O(k)$ quand $k \to \infty$, les majorations précédentes étant inférieures ou égales à $(2+o(1))k\ln k$.

5.3 – Sommation friable et identités de Davenport

Duffin puis Fouvry et Tenenbaum [8] ont introduit un procédé de sommation pour les séries, la sommation friable ou P-sommation. Il s'agit de considérer les séries restreintes aux entiers friables puis d'étudier la convergence quand la borne de friabilité tend vers l'infini. Cela conduit à la définition de convergence friable suivante : on dit que la série $\sum \alpha_n$ est convergente au sens friable (ou P-convergente) vers α si

$$\sum_{P^+(n)\leqslant y} \alpha_n = \alpha + o(1) \quad (y \to +\infty).$$

La série sera dite *régulière* si sa somme friable α est égale à sa somme usuelle :

$$\lim_{y\to+\infty} \sum_{P^+(n)\leqslant y} \alpha_n = \alpha = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n.$$

Il peut arriver que la somme friable ne coïncide pas avec la somme usuelle. Le théorème 11 de [8] fournit une infinité d'exemples. Alors que pour $\theta \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$ la série $\sum_{n\geqslant1} \frac{\exp(2i\pi n\theta)}{n}$ converge au sens usuel et vaut $log\Big(\frac{1}{1-\exp(2i\pi\theta)}\Big)$, où ici log désigne la détermination principale du logarithme, Fouvry et Tenenbaum montrent que pour tout rationnel de $]0,1[$, $\theta = a/q$ avec $(a,q)=1$, $1 \leqslant a < q$ la somme friable vaut :

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\exp(2i\pi na/q)}{n} = log\Big(\frac{1}{1-\exp(2i\pi a/q)}\Big) + \frac{\Lambda(q)}{\varphi(q)},$$

où Λ est la fonction de Von Mangoldt, elle est définie par $\Lambda(q) = \ln p$ si $q = p^k$, $\Lambda(q) = 0$ si q n'est pas une puissance de nombre premier.

La sommation friable permet de contourner le phénomène de Gibbs et ainsi de résoudre des questions ardues d'analyse comme celles relatives à l'identité de Davenport que nous exposons maintenant.

Le produit de convolution de Dirichlet de deux fonctions arithmétiques u, v est donné par

$$u * v(n) = \sum_{d|n} u(d)v(n/d) \qquad (n \geqslant 1).$$

L'élément neutre pour cette loi de groupe sur les fonctions arithmétiques est souvent noté δ. On a alors $\delta(n) = 1$ pour $n = 1$ et $\delta(n) = 0$ pour $n \geqslant 2$. Notons aussi $\mathbf{1}$ la fonction qui vaut 1 pour tous les entiers supérieurs à 1. On a alors la formule fondamentale $\delta = \mu * \mathbf{1}$.

Soit $B_1(t)$ la première fonction de Bernoulli, elle est définie par $B_1(t) = \{t\} - 1/2$ si $t \notin \mathbb{Z}$ et $B_1(t) = 0$ pour t entier, $\{t\}$ étant la partie fractionnaire de t. Elle coïncide partout avec sa série de Fourier :

$$B_1(\theta) = -\sum_{k\geqslant1} \frac{\sin(2\pi k\theta)}{\pi k}.$$

À partir de cela, on obtient formellement pour deux fonctions arithmétiques f et g reliées par $f = g * \mathbf{1}$ la belle identité

$$\sum_{m\geqslant1} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\theta) + \sum_{n\geqslant1} \frac{g(n)}{n} B_1(n\theta) = 0. \qquad (13)$$

Cela amène Davenport à formuler le problème suivant : pour quels nombres réels θ la relation (13) est-elle valide ? C'est une question très difficile que l'on ne sait pas résoudre en général. Davenport a montré que si $(f,g) = (\delta,\mu)$ alors (13) est vérifiée pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Cependant, son argument ne s'étend pas aux cas emblématiques $(f,g) = (\ln,\Lambda)$, $(\tau,\mathbf{1})$, τ étant la fonction nombre de diviseurs. C'est seulement soixante années plus tard que ces cas sont résolus par La Bretèche et Tenenbaum [3]. Un des ingrédients fondamentaux de leur travail est l'emploi de la sommation friable qui est remarquablement bien adaptée à ce problème. Ils montrent ainsi que pour $(f,g)=(\ln,\Lambda)$, (13) a lieu pour tout θ réel, par contre pour $(f,g)=(\tau,\mathbf{1})$ ils obtiennent un critère sur le développement en fraction continue des θ irrationnels selon lequel (13) ait lieu ou non. Le cas des puissances de convolution de $\mathbf{1}$ a ensuite été résolu par Martin.

5.4 – Petits écarts entre nombres premiers

On termine cet article par une avancée retentissante obtenue grâce aux entiers friables : les travaux de Zhang [20] puis de Maynard [15] sur les petits écarts entre les nombres premiers. Zhang a fait sensation en 2013[8] en montrant qu'il existait une infinité de nombres premiers $p \neq p'$ tels que $|p-p'| < 70000000$. Suite à ce travail cette borne fut réduite à plusieurs reprises notamment dans le cadre de projets collaboratifs *Polymath*. À la fin de cette même année se produisit un nouveau coup de théâtre : Maynard annonce que cette borne peut être réduite à 600. Actuellement cette borne a été ramenée à 246. La conjecture des nombres premiers jumeaux qui correspond à une infinité d'écarts égaux à 2 ne semble plus aussi hors d'atteinte qu'il y a à peine dix ans.

Un ingrédient clé de la preuve de Zhang est un résultat de répartition en moyenne des nombres premiers dans des progressions arithmétiques de raisons friables. Cette structure friable permet de considérer des ensembles d'entiers inférieurs à x vérifiant des conditions de congruences modulo des entiers supérieurs à $x^{1/2}$ ce qui était crucial pour montrer un écart borné entre une infinité de nombres premiers. Très récemment Régis de la Bretèche [1] a rédigé un article passionnant pour la *Gazette* sur les projets collaboratifs *Polymath* autour des percées de Zhang [20] puis de Maynard [15] sur ce sujet. On renvoie le lecteur à [1] pour plus de détails sur cette magnifique avancée. Indéniablement de très belles mathématiques restent encore à découvrir grâce aux entiers friables.

Références

[1] R. d. l. Bretèche. « Petits écarts entre les nombres premiers et polymath: une nouvelle manière de faire de la recherche en mathématiques? » *SMF Gaz. des Math.* **140** (2014), p. 19–31.

[2] R. d. l. Bretèche et G. Tenenbaum. « Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications ». *Invent. Math.* **159** (2005), p. 531–588.

[3] R. d. l. Bretèche et G. Tenenbaum. « Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques ». *J. Anal. Math. 92* **92** (2004), p. 1–79.

[4] R. d. l. Bretèche et G. Tenenbaum. « Une nouvelle approche dans la théorie des entiers friables ». *Compos. Math.* **153** (2017), p. 453–473.

[5] R. Crandall et C. Pomerance. *Prime numbers, a computational perspective*. **4ème édition**. Springer, 546 pp., 2001.

[6] H. Daboussi. « Sur le théorème des nombres premiers ». *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **298**, nº 8 (1984), p. 161–164.

[7] S. Drappeau. « Théorèmes de type Fouvry-Iwaniec pour les entiers friables ». *Compos. Math.* **151** (2015), p. 828–862.

[8] E. Fouvry et G. Tenenbaum. « Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques ». *Proc. London Math. Soc. (3)* **63** (1991), p. 449–494.

[9] A. Granville. « Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. I ». *Acta Math.* **170** (1993), p. 255–273.

[10] A. Granville. « Smooth numbers: computational number theory and beyond ». *Algorithmic number theory, MSRI Proceedings* **44** (2008), p. 267–323.

[11] A. J. Harper. « On a paper of K. Soundararajan on smooth numbers in arithmetic progressions ». *J. Number Theory* **132**, nº 1 (2012), p. 182–199.

[12] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. « Integers without large prime factors ». *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **5**, nº 2 (1993), p. 411–484.

[13] A. Lachand. *Entiers friables et formes binaires*. Thèse, Université de Lorraine, 2014.

[14] K. Matomäki et M. Radziwiłł. « Multiplicative functions in short intervals ». *Ann. of Math. (2)* **183**, nº 3 (2016), p. 1015–1056.

[15] J. Maynard. « Small gaps between primes ». *Ann. of Math. (2)* **183**, nº 1 (2015), p. 383–413.

8. l'article correspondant est paru en 2014.

[16] C. Pomerance. « The role of smooth sumbers in number theoretic algorithms ». *Proceedings of the international congress of mathematiciens, Zurich Switzerland 1994* **5**, n° 2 (1995), p. 411–422.

[17] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. **4ème édition**. coll. Échelles, Belin, 592 pp., 2015.

[18] G. Tenenbaum et J. Wu. « Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables ». *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), p. 119–166.

[19] T. D. Wooley. « Large improvements in Waring's problem ». *Ann. of Maths.* **135** (1992), p. 131–164.

[20] Y. Zhang. « Bounded gaps between primes ». *Ann. of Math. (2)* **179**, n° 3 (2014), p. 1121–1174.

Cécile Dartyge
Cecile.Dartyge@univ-lorraine.fr

Cécile Dartyge est maîtresse de conférences à l'Institut Elie Cartan de l'université Lorraine. Ses recherches portent sur divers problèmes de la théorie analytique des nombres.

Je tiens à remercier chaleureusement Pierrick Gaudry, Martine et Hervé Queffélec, Anne de Roton, Gérald Tenenbaum et les deux rapporteurs anonymes pour leurs relectures minutieuses et pour les nombreuses remarques et suggestions qu'ils ont proposées.

Une bande dessinée contre le sexisme

• J. Le Rousseau

Après la journée parité à l'IHP de juin 2016, Isabelle Collet (oratrice) et le dessinateur Phiip (qui improvisait des dessins projetés durant la journée) ont publié une petite bande dessinée destinée à être lue au-delà des participants de cette journée. La SMAI, Inria, la FSMP, la FMJH et le labex IRMIA ont subventionné la diffusion de cet ouvrage, en particulier son envoi dans de nombreux laboratoires de mathématiques. À cette occasion, nous avons demandé à Jérôme Le Rousseau (l'un des organisateurs de la journée) une recension de cette bande dessinée.

La scène se déroula quelque part en France, dans les années 2010. Au cours d'un comité de sélection, deux mathématiciens de sexe masculin commentaient le dossier d'une candidate. Nous les appellerons collègues M1 et M2.

Collègue M1 : « C'est un bon dossier, un très bon dossier », et d'ajouter « à tout point de vue d'ailleurs... »

La remarque dut sembler bien trop fine à collègue M2 qui ressentit le besoin de préciser :

Collègue M2 : « Oui, elle est mignonne, ce qui ne gâche rien. »

Somme toute, n'a-t-on pas l'habitude d'entendre ce type de remarque sans conséquence dans notre milieu ? Doit-on s'y attarder ? La meilleure réaction n'est-elle pas tout simplement d'ignorer ces propos ? J'entends déjà des lectrices et certains lecteurs s'étouffer sur le « sans conséquence ».

Une bonne question à ce stade est peut-être la suivante : quel mathématicien peut prétendre ne jamais s'être aventuré sur les sentiers sinueux du sexisme ordinaire ? Car le sexisme peut se décliner sous beaucoup de formes et peut se révéler très insidieux. Ai-je déjà eu un comportement sexiste ? C'est fort probable. Ai-je pu le faire sans m'en rendre compte ? Bien que cela ne constitue pas une excuse, oui, c'est fort probable aussi et cela fait bien partie du problème et de sa complexité.

Un autre constat important est le suivant : parler du sexisme n'est pas une chose simple. Même rassembler un auditoire autour de cette question est une gageure en soi. La dernière journée parité organisée à l'IHP où le sujet a largement été traité s'est déroulée devant une assemblée très (trop) largement féminine. Pourtant, la question concerne tout autant les hommes que les femmes. Et elle est d'autant plus complexe que l'énonciation même du sexisme, de ses manifestations, de ses causes est tout sauf triviale. Une raison pour cela réside dans la perception très différente que les hommes et les femmes ont du sexisme. Là où un groupe ne verra qu'une blague potache, l'autre y verra une vraie marque de sexisme. Pour revenir à l'exemple du dialogue de nos collègues M1 et M2, ce ne furent pas des signes de ravissement que je pus lire sur les visages de nos collègues F1, F2 et F3. Je n'ai certainement pas besoin de préciser que nos collègues F1, F2 et F3 sont des femmes.

Que faire alors ? Et comment ? La bonne voie est certainement celle de la sensibilisation et de l'éducation dans une communauté où l'intelligence prime. Faisons ce pari. Alors qu'une journée comme la journée parité ne touche directement qu'un public restreint, un livre qui allierait une présentation de nombreuses formes de sexisme, spécialisé sur les problématiques telles qu'elles apparaissent dans la communauté scientifique serait une excellente idée. Si ce livre pouvait se révéler drôle, facilitant ainsi sa lecture et permettant de délivrer son contenu d'une manière non professorale, ce serait formidable. On pourrait le trouver dans les salles de café de nos laboratoires, nous pourrions nous le prêter, échanger dessus. Il prêterait à sourire mais aussi à réfléchir.

Réjouissons-nous car ce livre existe désormais. Isabelle Collet et Phiip l'ont écrit. Isabelle Collet, initialement informaticienne, sait de quoi elle parle : elle est titulaire d'un doctorat en sciences de l'éducation avec une thèse sur le genre et l'informatique. De son côté, Phiip est dessinateur, ce qui a permis à leur livre de prendre partiellement la forme d'une bande dessinée. Leur rencontre s'est faite à la journée parité que j'évoquais précédemment, et l'idée de ce livre a rapidement germé. La facette humoristique qui accompagne ce livre permet de désamorcer certains obstacles à une libre parole sur le sexisme. C'est une des premières vertus de ce livre. La seconde est de pointer les sources mêmes du sexisme. Un cadre culturel et historique est posé et des constats factuels chiffrés mis en avant. Le livre se nourrit aussi de nombreux témoignages récents issus de notre communauté mathématique.

Vous pourrez y apprendre que c'est, entre autres, le *déni* qui fait perdurer les scènes similaires à celle que je décris plus haut, le refus inconscient de reconnaître que le sexisme est plein de conséquences. Le discours d'Isabelle Collet est on ne peut plus clair :

> *Une plaisanterie sexiste pourrait être inoffensive si elle ne faisait pas écho à un système discriminatoire réel* [...] *À partir du moment où elle a été proférée dans un contexte professionnel elle est discriminante.*
>
> [...] *les plaisanteries ou remarques sexistes rappellent quotidiennement aux femmes la place que la société leur donne...*

Les conséquences dans le vécu de nos collègues femmes, et celui de toutes celles qui ont été découragées, sont très importantes. Ce livre met très bien en avant le lien qui existe entre le sexisme que les femmes rencontrent et la proportion actuelle tristement faible des mathématiciennes dans notre communauté.

Nous sommes tous et toutes concernés. Combattre le sexisme commence par son identification et c'est bien souvent là que le bât blesse. Changer les comportements passe avant tout par l'information et la sensibilisation de toute la communauté scientifique sur ces questions, en particulier la communauté mathématique. Cela relève d'une responsabilité individuelle mais aussi collective. Le livre d'Isabelle Collet et Phiip aidera à servir cet objectif.

… l'intrication quantique

• G. Aubrun

Introduction

L'intrication quantique est un phénomène physique qui est une des manifestations les plus étranges de la mécanique quantique. L'intrication est la raison pour laquelle deux particules physiques ne peuvent pas être décrites séparément : en connaissant parfaitement l'état de chaque particule, on ne peut pas décrire leur état joint, c'est-à-dire de l'ensemble des deux particules. Même si les particules sont arbitrairement éloignées, l'intrication implique par exemple que l'observation d'une particule a un effet immédiat sur l'état de l'autre.

Le terme d'intrication (en allemand *Verschränkung* et en anglais *entanglement*) est employé pour la première fois par Schrödinger en 1935 dans sa réponse au paradoxe EPR soulevé par Einstein, Podolsky et Rosen. Ce paradoxe est une expérience de pensée qui, à partir des postulats de la mécanique quantique, prédit l'existence de corrélations dans les résultats des mesures entre deux systèmes éloignés. Deux conclusions sont alors possibles : ou bien la mécanique quantique est incomplète et ces corrélations sont expliquées par des *variables cachées* inaccessibles pour l'observateur, ou bien la mécanique quantique est *non locale*, c'est-à-dire que des interactions immédiates à distance sont possibles. On sait que la seconde conclusion est la bonne depuis qu'on a observé expérimentalement, pour la première fois dans les travaux d'Aspect, des corrélations qui violent les inégalités de Bell ; or ces dernières sont vérifiées dans toute théorie à variables cachées.

Un peu de mécanique quantique

Avant de donner la définition précise de ce qu'est l'intrication, rappelons au lecteur quelques concepts de mécanique quantique. L'état d'un système quantique est décrit par un vecteur unitaire d'un espace de Hilbert complexe. La description complète du comportement d'une particule en termes de fonctions d'onde fait intervenir par exemple l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$. Si l'on ne retient de cette description qu'une propriété spécifique prenant un nombre fini d de valeurs possibles (par exemple, le spin), on est amené à travailler dans l'espace $\mathbb{C}^d$. L'exemple le plus simple, $\mathbb{C}^2$, correspond au système appelé *qubit*, ou bit quantique (on note $(|0\rangle, |1\rangle)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$). Tout comme un bit, un qubit peut être dans l'état $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, mais il peut être aussi dans les deux à la fois : un état pur général a pour forme $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, où les nombres complexes α, β vérifient $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. C'est une version du principe de superposition, fondamental en mécanique quantique.

Dans les expériences, ces qubits prennent diverses formes : la polarisation d'un photon, le spin d'un électron, etc. La théorie de l'information et du calcul quantique est l'étude de protocoles ou d'algorithmes manipulant des qubits abstraits pour communiquer ou calculer, indépendamment de la manière dont les qubits sont réalisés, de même que l'informatique classique ne se préoccupe pas de la manière dont est implémenté le bit.

Considérons un système quantique correspondant à un espace de Hilbert de dimension finie $\mathcal{H}$. Les vecteurs unitaires de $\mathcal{H}$ décrivent les *états purs* du système. Mais il est également possible – c'est une autre version du principe de superposition – que le système soit dans un état mélangé, c'est-à-dire un mélange pondéré de plusieurs états purs. Cela s'exprime mathématiquement à l'aide des matrices-densités. Au lieu de considérer un état pur comme un vecteur unitaire $\psi \in \mathcal{H}$, on l'interprète comme la projection orthogonale sur ψ, que l'on note $|\psi\rangle\langle\psi|$. Au passage, on vérifie que deux vecteurs unitaires qui diffèrent d'un nombre complexe de module 1 correspondent au même état ; l'ensemble des états purs est paramétré par l'espace projectif sur $\mathcal{H}$.

Dans ce formalisme matriciel, le mélange statistique des états purs $(\psi_1,\dots,\psi_n)$ selon la distribution de probabilité $(p_1,\dots,p_n)$ est donné par l'opérateur

$$\sum_{i=1}^{n} p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

On en déduit aussi une définition alternative des états mélangés : un *état mélangé* est un opérateur auto-adjoint positif de trace 1 (dans la suite du texte, on écrira simplement « état » pour « état mélangé »). L'ensemble des états sur $\mathcal{H}$ est un ensemble convexe compact dont les points extrémaux sont les états purs. C'est l'analogue non commutatif d'un simplexe. Le cas d'un qubit est très spécial : l'ensemble des états sur $\mathbb{C}^2$ est une boule euclidienne fermée de dimension 3. Sa frontière, de dimension 2, est la *sphère de Bloch* ; on retrouve là l'identification bien connue entre la sphère S^2 et l'espace projectif $\mathbb{CP}^1$.

Qu'est-ce que l'intrication ?

Si on considère plusieurs systèmes quantiques d'espaces d'états $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$, leur description jointe nécessite d'introduire le produit tensoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$. Un *état pur* de l'ensemble des systèmes est un vecteur unitaire $\psi \in \mathcal{H}$. Si ce vecteur peut se factoriser sous la forme

$$\psi = \psi^{(1)} \otimes \cdots \otimes \psi^{(n)},$$

on dit que cet état pur ψ est *séparable* ; dans le cas contraire, il est dit *intriqué*. Les états purs intriqués sont donc les vecteurs unitaires d'un produit tensoriel d'espaces de Hilbert qui ne sont pas des tenseurs élémentaires. L'exemple le plus simple d'état pur intriqué est l'état de Bell $|\Psi\rangle\langle\Psi|$, qui correspond au vecteur *maximalement intriqué* dans $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle). \tag{1}$$

La situation devient plus riche quand on définit l'intrication des états mélangés. Un état (mélangé) ρ est dit *séparable* si on peut l'écrire comme un mélange statistique d'états purs séparables, autrement dit si ρ a pour forme

$$\sum_i p_i|\psi_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_i^{(n)}\rangle\langle\psi_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_i^{(n)}|, \tag{2}$$

où (p_i) est une distribution de probabilité. À nouveau, les états qui ne sont pas séparables sont dits *intriqués*.

L'ensemble des états séparables est aussi un ensemble convexe compact, inclus dans l'ensemble de tous les états et de même dimension. Ses points extrémaux sont donnés par une sous-variété projective, la variété de Segré. On peut se faire une intuition approximative de sa géométrie par l'expérience de pensée suivante : à quoi ressemble l'enveloppe convexe (dans $\mathbb{R}^3$) de la sous-variété de S^2 formée par la ligne de couture d'une balle de tennis ? On obtient un objet qui n'est ni lisse ni un polytope, et dont la structure faciale est compliquée.

Déterminer si un état donné ρ est séparable ou intriqué est un problème important mais ardu ; on sait par exemple qu'il est NP-difficile, même dans le cas bipartite ($n = 2$) sur lequel nous allons nous concentrer par la suite. Une difficulté est que la décomposition (2), dans le cas séparable, est très loin d'être unique.

Il existe des conditions suffisantes qui certifient l'intrication, la plus utile étant donnée par la *transposition partielle*. Ce critère est fondé sur la remarque suivante : si T désigne la transposition sur $B(\mathcal{H}_A)$, alors pour tout état séparable ρ sur $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, l'opérateur $(T \otimes \mathrm{Id})(\rho)$ est positif (il suffit de le vérifier si ρ est pur, auquel cas c'est immédiat). Ainsi dès que $(T \otimes \mathrm{Id})(\rho)$ a une valeur propre strictement négative, on peut conclure que ρ est intriqué.

L'étude de la dichotomie entre intrication et séparabilité fait naturellement intervenir des considérations géométriques dans des espaces de très grande dimension. Ainsi, l'ensemble des états sur $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ a pour dimension $d^4 - 1$, soit 15 dans le cas le plus simple de deux qubits ($d = 2$). Ce fléau de la grande dimension complique notoirement les approches numériques. En revanche d'autres approches, comme la méthode probabiliste, peuvent en tirer grand profit (voir par exemple l'ouvrage [1] autour de ces idées).

Intrication et non-localité

L'intrication est à la base du phénomène de non-localité évoqué en lien avec le paradoxe EPR. Commençons par énoncer une inégalité probabiliste élémentaire, qui est un cas particulier de la plus simple des inégalités de Bell. Supposons que A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des événements d'un même espace probabilisé qui vérifient

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Si l'on note $p_{ij} = \mathbf{P}(A_i \cap B_j)$, on a alors

$$p_{11} + p_{12} + p_{21} - p_{22} \leqslant 1, \tag{3}$$

comme le lecteur peut le vérifier.

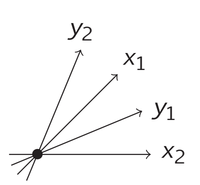
Rappelons maintenant, dans le cas le plus simple, comment le formalisme de la mécanique quantique axiomatise la mesure. Une mesure binaire (qui donne seulement deux résultats possibles, disons $\oplus$ et $\ominus$) correspond à un projecteur orthogonal P ; alors la mesure d'un système dans l'état ρ donne le résultat $\oplus$ avec probabilité $\mathrm{Tr}(\rho P)$ et le résultat $\ominus$ avec probabilité $\mathrm{Tr}(\rho(1-P))$.

Considérons maintenant l'état de Bell $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, où $\Psi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ est défini en (1). On suppose que chacun des espaces $\mathbb{C}^2$ correspond à un qubit manipulable et observable par deux expérimentateurs distants, traditionnellement dénommés Alice et Bob. L'état de Bell a la propriété que pour tout projecteur orthogonal de rang 1 sur $\mathbb{C}^2$, on a $\mathrm{Tr}(\rho(P \otimes \mathrm{Id})) = \mathrm{Tr}(\rho(\mathrm{Id} \otimes P)) = \frac{1}{2}$: les résultats $\oplus$ et $\ominus$ sont équiprobables pour la mesure correspondante, quand elle est effectuée séparément par Alice ou par Bob. Supposons maintenant qu'Alice (respectivement Bob), ait deux mesures différentes possibles, correspondant à des projecteurs $P_1 = |x_1\rangle\langle x_1|$ et $P_2 = |x_2\rangle\langle x_2|$ (respectivement $Q_1 = |y_1\rangle\langle y_1|$ et $Q_2 = |y_2\rangle\langle y_2|$). Les corrélations entre ces différentes mesures sont données par

$$p_{ij} = \mathrm{Tr}(\rho(P_i \otimes Q_j)) = \frac{1}{2}|\langle x_i, y_j\rangle|^2 \tag{4}$$

qui est la probabilité que la mesure P_i d'Alice et la mesure Q_j de Bob donnent toutes deux le résultat $\oplus$.

FIGURE 1 – Une configuration qui viole l'inégalité de Bell (3). Les vecteurs font entre eux des angles de $\pi/8$



Si on choisit les vecteurs x_i, y_j comme dans la figure 1, on a $p_{11} = p_{12} = p_{21} = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{8}$ et $p_{22} = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{8}$. Ces nombres vérifient

$$p_{11} + p_{12} + p_{21} - p_{22} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} > 1$$

et l'inégalité de Bell (3) est violée. Des expériences en laboratoire, réalisées sur ce principe, ont permis de démontrer la non-localité de la mécanique quantique.

Il est fondamental dans l'exemple précédent que l'état ρ soit intriqué : les corrélations obtenues à partir d'états séparables vérifient toujours les inégalités de Bell. Réciproquement, il n'est pas vrai que tout état intriqué viole les inégalités de Bell (de tels états sont dits *non locaux*). C'est le cas pour les états purs, mais pas pour les états mélangés. La différence entre intrication et non-localité n'est pas encore bien comprise (voir [2]).

Le scénario que nous avons décrit précédemment est le plus simple, avec un état bipartite et deux mesures binaires par observateur. Cela se généralise aisément, et il est naturel de se demander si augmenter le nombre d'observateurs, de mesures ou de résultats possibles permet de prédire, voire d'observer expérimentalement, des violations plus grandes des inégalités de Bell. Un théorème fondamental dû à Tsirelson affirme que pour des mesures binaires entre deux observateurs, les violations sont bornées (indépendamment du nombre de mesures) et la violation maximale possible est égale à la constante de Grothendieck, dont on ne connaît à ce jour qu'une valeur approchée. Dans de nombreux autres scénarios, l'existence de violations arbitrairement grandes a pu être démontrée grâce à des reformulations en termes d'espaces d'opérateurs (voir par exemple [6]).

Les corrélations quantiques que nous avons discutées ici sont des matrices de la forme $C_{ij} = \mathrm{Tr}(\rho A_i \otimes B_j)$ où ρ est un état sur un produit tensoriel $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, et A_i, B_j des opérateurs auto-adjoints respectivement sur $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_B$: nous avons pris pour axiome que le produit tensoriel modélise la séparation spatiale. On pourrait également considérer des matrices de la forme $C'_{ij} = \mathrm{Tr}(\rho A_i B_j)$, où maintenant ρ est un état sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et A_i, B_j sont des opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ vérifiant la relation de commutation $A_i B_j = B_j A_i$. C'est a priori plus général (considérer les opérateurs $A_i \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_B}$ et $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_A} \otimes B_j$), et on vérifie facilement qu'en dimension finie les deux formalismes sont équivalents. Le *problème de Tsirelson* pose la question de savoir si l'équivalence entre les deux notions de corrélations reste valable pour des espaces de Hilbert de dimension infinie. On sait aujourd'hui que ce problème est équivalent au problème de plongement de Connes pour les algèbres de von Neumann [4, 5].

L'intrication comme ressource

L'intrication quantique n'est pas seulement une bizarrerie, c'est aussi un phénomène dont on peut tirer profit, une ressource à exploiter pour calculer ou communiquer plus efficacement. Dans certains cas, la technologie est déjà exploitée commercialement, comme pour la distribution de clé quantique, qui est un protocole qui permet à deux utilisateurs distants de partager une clé générée aléatoirement, dont la confidentialité est garantie par les lois de la mécanique quantique. Le prérequis pour mettre en œuvre le protocole est le partage d'un état quantique intriqué. D'autres applications reposant sur l'intrication, comme la téléportation quantique ou l'ordinateur quantique, en sont à leurs balbutiements.

Jusqu'à présent nous avons insisté sur la dichotomie entre états séparables et états intriqués, mais on imagine aisément que tous les états intriqués ne se valent pas. Si l'on pense à l'intrication comme à une ressource, il est important de quantifier l'intrication contenue dans un état donné. On peut pour cela utiliser l'état de Bell (1) comme étalon. Cela se justifie car un grand nombre de protocoles présupposent que les deux parties partagent un ou plusieurs états de Bell ; or de tels états idéaux sont difficiles à réaliser en laboratoire, notamment à cause du phénomène de décohérence.

Lorsqu'on cherche à quantifier l'intrication partagée par Alice et Bob, on considère habituellement que la communication classique et les opérations quantiques locales (c'est-à-dire effectuées uniquement par Alice ou par Bob) sont gratuites, puisqu'elles ne produisent pas d'intrication : c'est le paradigme « LOCC ». On dit qu'un état ρ sur $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ est moins intriqué qu'un état σ sur $\mathcal{H}'_A \otimes \mathcal{H}'_B$, et on note $\rho \prec \sigma$, s'il est possible pour Alice et Bob de transformer σ en ρ par un protocole de type LOCC.

Pour les états purs, cette relation d'ordre est parfaitement comprise. Rappelons qu'on peut décomposer tout vecteur unitaire $\chi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ comme

$$\chi = \sum_k \sqrt{\lambda_k(\chi)}\, e_k \otimes f_k,$$

où (e_k) et (f_k) sont des familles orthonormales, et les réels positifs $(\lambda_k(\chi))$ sont uniquement déterminés si l'on demande qu'ils soient rangés dans l'ordre décroissant. Cette écriture s'appelle *décomposition de Schmidt* et est l'équivalent pour les tenseurs de la décomposition en valeurs singulières des matrices. Le théorème de Nielsen affirme que pour des vecteurs unitaires ϕ, ψ, la relation $|\phi\rangle\langle\phi| \prec |\psi\rangle\langle\psi|$ est équivalente à la famille d'inégalités

$$\forall n,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\phi) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\psi).$$

On retrouve ainsi une relation d'ordre connue dans d'autres branches des mathématiques sous le nom de « majorisation de Schur » ou « ordre de domination ».

On définit *l'intrication de création* $E_C(\rho)$ d'un état ρ sur $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ comme le meilleur taux auquel on peut créer des copies de ρ à partir d'états de Bell, avec une erreur asymptotiquement nulle. Autrement dit, $E_C(\rho)$ est l'infimum des $R > 0$ tels qu'il existe une suite ε_n d'opérateurs (nécessairement de trace nulle) sur $\mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n}$ vérifiant $\mathrm{Tr}|\varepsilon_n| \to 0$ et, pour tout n

$$\rho^{\otimes n} + \varepsilon_n \prec |\Psi\rangle\langle\Psi|^{\otimes \lfloor nR \rfloor}.$$

De manière duale, *l'intrication de distillation* $E_D(\rho)$ est le meilleur taux auquel on peut convertir ρ en états de Bell, c'est-à-dire le supremum des $R > 0$ tels que, avec les mêmes notations,

$$|\Psi\rangle\langle\Psi|^{\otimes \lfloor nR \rfloor} + \varepsilon_n \prec \rho^{\otimes n}.$$

Dans le cas d'un état pur, le théorème de Nielsen combiné à la loi des grands nombres implique que l'intrication de création et l'intrication de distillation coïncident toutes deux avec l'entropie de Shannon

$$E_D(|\psi\rangle\langle\psi|) = E_C(|\psi\rangle\langle\psi|) = -\sum_k \lambda_k(\psi) \ln_2 \lambda_k(\psi).$$

En particulier, la manipulation de l'intrication des états purs est réversible : si ρ_1 et ρ_2 sont deux états purs, le taux auquel on peut transformer ρ_1 en ρ_2 est l'inverse du taux auquel on peut transformer ρ_2 en ρ_1.

La situation est beaucoup plus complexe pour les états mélangés, pour lesquels on ne sait en général pas calculer l'intrication de création ni l'intrication de distillation. En général $E_D(\rho) \leqslant E_C(\rho)$, et $E_C(\rho) > 0$ pour tout état intriqué ρ (l'intrication ne peut pas être créée par des opérations locales).

De manière remarquable, il existe des états appelés intriqués-liés (*bound entangled*), c'est-à-dire vérifiant $E_C(\rho) > 0$ et $E_D(\rho) = 0$. Les états intriqués-liés témoignent d'une forme extrême de l'irréversibilité de la manipulation de l'intrication pour les états mélangés : il est possible de les créer à partir d'états de Bell, mais le processus inverse est impossible. Ce phénomène est relié à l'opération de transposition partielle évoquée précédemment.

Une question ouverte importante, le *problème de la distillabilité*, est de savoir si tout état intriqué-lié est à transposée partielle positive.

Il existe encore d'autres paramètres qui mesurent la quantité d'intrication contenue dans un système quantique (voir [3] pour un panorama). Plusieurs d'entre eux ont une interprétation en termes de théorie de l'information, et font intervenir diverses variantes de l'entropie de Shannon. Nous nous sommes restreints au cadre bipartite, et on imagine aisément que la situation devient plus beaucoup complexe quand on considère des systèmes multipartites. De tels modèles abondent dans les considérations de physique quantique à N corps.

Conclusion

L'intrication quantique reste difficile à appréhender, même si sa manipulation en laboratoire est aujourd'hui devenue quotidienne. L'information et la communication quantiques, qui utilisent l'intrication comme ressource, ouvrent des perspectives révolutionnaires. Les mathématiques sous-jacentes mêlent analyse, probabilités, géométrie et algèbres d'opérateurs. Il s'agit d'un domaine encore jeune, à l'interface entre mathématiques, physique et théorie de l'information, et qui va certainement poursuivre son expansion dans les prochaines années.

Références

[1] G. Aubrun et S. J. Szarek. *Alice and Bob Meet Banach: The Interface of Asymptotic Geometric Analysis and Quantum Information Theory*. **223**. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., 2017.

[2] N. Brunner et al. « Bell nonlocality ». *Rev. Mod. Phys.* **86** (2 avr. 2014), p. 419–478. doi : 10.1103/RevModPhys.86.419.

[3] R. Horodecki et al. « Quantum entanglement ». *Rev. Modern Phys.* **81**, nº 2 (2009), p. 865–942. issn : 0034-6861. doi : 10.1103/RevModPhys.81.865.

[4] M. Junge et al. « Connes embedding problem and Tsirelson's problem ». *J. Math. Phys.* **52**, nº 1 (2011), p. 012102, 12. issn : 0022-2488. doi : 10.1063/1.3514538.

[5] N. Ozawa. « About the Connes embedding conjecture ». *Japanese Journal of Mathematics* **8**, nº 1 (mar. 2013), p. 147–183. issn : 1861-3624. doi : 10.1007/s11537-013-1280-5.

[6] G. Pisier. « Grothendieck's theorem, past and present ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **49**, nº 2 (2012), p. 237–323. issn : 0273-0979. doi : 10.1090/S0273-0979-2011-01348-9.

Guillaume Aubrun
Guillaume Aubrun est maître de conférences à l'université Lyon 1. Ses recherches se situent à l'interface entre probabilités, géométrie convexe et théorie quantique de l'information.

La candidature Paris ICM 2022

Le contexte et les procédures

Cette nouvelle année 2018 est marquée par un événement majeur pour la communauté mathématique : le Congrès international des mathématiciens (ICM), qui sera organisé à Rio entre le 1er et le 9 août. Il est moins connu que chaque ICM est précédé d'une assemblée générale de l'Union mathématique internationale (IMU) qui décide notamment du lieu du prochain congrès. La tradition veut que l'assemblée générale se déroule dans une ville distincte de celle du congrès ; il s'agira cette fois de São Paulo.

La communauté mathématique française proposera à cette occasion la candidature de Paris pour organiser l'ICM 2022 et celle de Strasbourg pour l'assemblée générale de l'IMU qui le précède. Une déclaration d'intention avait déjà été faite à l'occasion de l'assemblée générale précédant l'ICM de Séoul en 2014. Dans le cas de la France, c'est le Comité national français des mathématiciens (CNFM) qui représente la France vis-à-vis de l'IMU, notamment au cours des assemblées générales. Les statuts de l'IMU prévoient que ce soit l'assemblée générale qui décide du lieu du prochain ICM, la direction de l'IMU exprimant une recommandation après avoir missionné un comité de visite des sites en concurrence.

Nous allons revenir sur les détails de ces points, mais ce qui nous tient le plus à cœur est de présenter les raisons qui ont conduit le comité à élaborer un projet propre à aider la communauté française à appréhender les nombreux défis qui vont se poser au milieu académique, et aux mathématiciens en un sens beaucoup plus vaste, dans les décennies à venir. Nous espérons susciter la plus forte adhésion possible de la part de la communauté mathématique française afin de pouvoir exprimer au mieux ses valeurs d'humanisme, d'ouverture et de partage. En particulier, nous mettrons tout en œuvre pour que, dans le cadre d'un budget maîtrisé compatible avec des candidatures futures émanant d'autres pays que les grandes puissances, de jeunes chercheurs du monde entier en très grand nombre puissent participer à ICM 2022 à Paris.

Un court historique

Depuis 2014 et la déclaration d'intention du CNFM pour l'organisation de l'ICM 2022 à Paris, un comité de candidature a été mis en place. Comme les textes de l'IMU encadrant les candidatures ICM le requièrent, celui-ci s'est adjoint l'aide d'un organisateur professionnel de congrès (PCO) : il s'agit de l'entreprise MCI. Les figures imposées pour une telle candidature sont multiples et des lettres de cadrage spécifiques concernant l'assemblée générale, la cérémonie d'ouverture (où les noms des récipiendaires des prix prestigieux, notamment ceux des médailles Fields, sont annoncés), mais aussi les conditions d'accueil générales, sont à prendre en compte scrupuleusement.

À ce jour, le comité est composé de : François Loeser (Responsable, Sorbonne université – ex UPMC (Paris 6)), Sylvie Benzoni-Gavage (université Claude Bernard Lyon 1 & Institut Henri Poincaré), Stéphane Cordier (université d'Orléans & Agence pour les mathématiques en interaction avec les entreprises et la société (AMIES)), Maria J. Esteban (CNRS & université Paris-Dauphine), Étienne Gouin-Lamourette (Fondation Sciences Mathématiques de Paris), Philippe Helluy (université de Strasbourg), Roger Mansuy (lycée Louis-le-Grand), Ariane Mézard (Sorbonne université – ex UPMC (Paris 6)), Anne Philippe (université de Nantes), Bertrand Rémy (École polytechnique), Denis Talay (Inria, Sophia Antipolis).

La première étape concrète a consisté à produire un dossier de candidature. Le document qui en résulte est un dossier de 80 pages environ, qui est disponible sur le site ICM Paris 2022 (`https://www.icm2022-paris.com/`, voir ci-dessous).

Celui-ci respecte le cadre imposé tout en faisant la part belle aux idées novatrices : nous considérons qu'un Congrès international des mathématiciens n'est pas un couronnement mais doit donner un point de départ pour un changement d'échelle des activités que nous tenons pour cruciales partout dans le monde : nouvelles frontières pour les mathématiques dessinées par les autres sciences et les grands défis sociétaux, renforcement des liens avec le monde industriel, accueil et formation des étudiants de pays en voie de développement, impacts culturels des mathématiques, actions en faveur de la féminisation de notre discipline.

Les visites de site par la commission ad hoc de l'imu ont eu lieu en mars (du 5 au 7 pour Paris) ; celle de Paris s'est très bien déroulée et la haute qualité du dossier a été reconnue, mais le comité exécutif a émis sa préférence pour Saint-Pétersbourg sans en donner les raisons pour l'instant. D'ici à l'assemblée générale de São Paulo le défi est donc grand, mais la volonté de le relever et d'obtenir l'assentiment démocratique de l'assemblée générale est portée par la force des valeurs universelles d'humanisme qui caractérise la candidature de Paris et Strasbourg.

Enjeux de société

La société est en train de questionner de manière nouvelle les mathématiques et la communauté mathématique. Premièrement, les réseaux sociaux et les données massives appellent des algorithmes innovants et des modélisations originales pour à la fois améliorer leur fonctionnement et analyser leurs dangers potentiels de manière quantifiable. Deuxièmement, les inquiétudes du grand public vis-à-vis des sciences et technologies doivent nous questionner. Enfin, les questions de diversité, de parité, de discrimination sociale dans l'éducation posent des problèmes actuels que la communauté mathématique, notamment française, ne peut ignorer. La médiatisation d'un événement tel qu'un icm à Paris, ville des Lumières, serait une formidable caisse de résonance aux réflexions communes entre mathématiciens, enseignants, éducateurs, grand public sur ces problématiques.

Ouverture aux pays en voie de développement

Tous les établissements d'enseignement supérieurs se remettent en cause actuellement sur la question de l'internationalisation de leurs formations. Mais que signifie cette internationalisation ? Vers qui est-elle dirigée ? Notre initiative d'accueil d'étudiants issus de pays en voie de développement dans une série d'écoles d'été, et ceci juste avant le congrès auquel ils pourront assister ensuite, dans des conditions d'accueil adaptées, vise à assurer à terme une offre de formations et d'échanges qui ne laisse aucun.e jeune scientifique sur le bord de la route. Il va de soi que nous visons la pérennisation de ces initiatives d'accueil, y compris dans les écoles nouvelles prévues pour encadrer l'icm 2022 à Paris.

Lien avec les entreprises et l'innovation

La candidature à l'organisation d'un icm, et son organisation elle-même, fournit une belle opportunité de redéfinir la communauté mathématique en un sens plus large, d'inclure des collègues non académiques. Les sociétés savantes et les organismes de recherche notamment ont déjà publié de nombreux rapports et documents sur l'ubiquité et l'impact des mathématiques dans les domaines les plus dynamiques de l'économie. En montant le projet de candidature, nous avons pu le constater très concrètement à travers les manifestations d'intérêt d'entreprises très diversifiées en termes de domaines d'activités et de taille. Ces partenaires et les interactions Mathématiques-Société-Industrie seraient très présents dans icm 2022 à Paris.

Site web et réseaux sociaux

Toutes ces initiatives vous donnent envie d'en savoir plus et de vous mobiliser ? Aidez-nous, suivez-nous, contactez-nous via les comptes sur Facebook et Twitter. N'hésitez pas à consulter en premier lieu le site web de la candidature (`https://www.icm2022-paris.com/`), qui vous permettra de parcourir le dossier de candidature, mais aussi de lire les compléments ajoutés depuis. Celui-ci évoluera jusqu'à l'assemblée générale et au-delà en cas de réussite à São Paulo. Vous voulez aller plus vite ? La candidature possède un compte sur les principaux réseaux sociaux ; likez-nous !

Une cartographie de la communauté mathématique française

- M. Chupin
- J. Dolbeault
- M. J. Esteban
- M. Lewin

Cette étude tente de dresser une cartographie thématique des mathématiques universitaires en France, définies ici comme l'ensemble des électeurs des deux sections CNU 25 et 26. Reposant sur les publications référencées dans MathSciNet et la classification MSC, elle met en évidence la répartition des forces entre les différents domaines de recherche, et compare ces résultats avec le découpage en deux sections CNU. L'approche retenue permet aussi de déterminer la part des chercheurs et enseignants-chercheurs travaillant sur les « applications des mathématiques » et de réaliser une cartographie similaire pour les recrutements des CR au CNRS pendant la période 2005-2016.

1. Introduction

La communauté mathématique française est très unie dans son fonctionnement, ce qui est un réel atout pour sa visibilité et sa vitalité. Mais, du point de vue scientifique, il faut bien admettre qu'elle est très diverse, et parfois un peu compartimentée. Quelle est la répartition thématique des recherches en mathématiques ? Quelle est la proportion des mathématiciennes et mathématiciens qui ont une activité conséquente dédiée aux « applications des mathématiques » ?

Cette étude tente de dresser une cartographie thématique des mathématiques universitaires françaises. Nous avons cherché à savoir quels sont les équilibres existant entre les différentes thématiques, et à comparer ces résultats avec le découpage en deux sections du *Conseil National des Universités*, la section CNU 25 *Mathématiques* et la section CNU 26 *Mathématiques appliquées et applications des mathématiques*. Nous avons aussi cherché à identifier les mathématiciennes et mathématiciens qui travaillent sur les « applications des mathématiques », en un sens qui sera discuté plus bas et qui ne coïncide pas nécessairement avec le découpage en deux sections CNU. Dans la dernière section, nous mettons finalement ces résultats en regard des recrutements de *Chargés de Recherche* (recrutements CR) par la Section 41 *Mathématiques et interactions des mathématiques* du CNRS depuis 2005.

Les résultats présentés ci-dessous fournissent des données inédites (malheureusement parcellaires) sur notre communauté scientifique. Ils soulèvent un certain nombre de questions qui appellent à la poursuite de l'étude, éventuellement avec des outils différents. Pour nourrir les réflexions, nous avons essayé de relever autant que possible les biais, les limitations et les problèmes méthodologiques que soulèvent les données et leur analyse.

2. Une cartographie des sections CNU 25 et 26

2.1 – Qu'est-ce qu'un mathématicien universitaire en France ?

Lorsque nous avons commencé cette étude, une première difficulté a été de définir précisément le groupe de personnes à étudier. Il semble difficile de considérer tous les mathématiciens français, y compris ceux qui exercent une activité dans l'industrie, car il ne serait pas aisé de donner une définition à la fois claire et incontestable, ni *a fortiori* d'avoir une liste de ces acteurs. Nous avons tout d'abord décidé de restreindre notre étude aux chercheurs et enseignants-chercheurs travaillant dans un établissement public d'enseignement supérieur ou de recherche. Mais même cette définition n'est pas pour autant facile à traduire de manière concrète.

Nous disposons d'un excellent annuaire sur le site internet www.emath.fr, géré par le service Mathrice (GDS n° 2754) au CNRS, et qui recense plus de 5000 personnes. Quelques tests préliminaires ont toutefois révélé que les données de cet annuaire sont très hétérogènes. Certains laboratoires y ont déclaré tous leurs membres, y compris les post-doctorants, les thésards, les personnels administratifs et même les visiteurs étrangers, alors que d'autres se contentent d'y inclure leurs chercheurs et leurs enseignants-chercheurs. Par ailleurs, certains laboratoires non directement affiliés au CNRS ou à Inria n'y sont pas référencés (comme le CERMICS à l'École des Ponts).

Nous avons donc décidé de nous limiter à la dernière liste officielle des **électeurs des deux sections CNU 25 et 26**, qui date de 2015 et regroupe **3278 personnes**, dont 1411 en section CNU 25 (43 %) et 1867 en section CNU 26 (57 %). Cette liste a de nombreux défauts, puisqu'elle ne comprend pas les chercheurs d'Inria, ni ceux des écoles d'ingénieurs, alors qu'elle comprend en général les chercheurs CNRS affectés dans les universités. À titre d'exemple, les chercheurs CNRS affectés à l'École polytechnique n'y sont pas référencés, alors que les enseignants y apparaissent le plus souvent lorsqu'ils sont, par exemple, détachés de leur établissement d'origine.

Sans les chercheurs d'Inria et des écoles d'ingénieurs, cette liste de plus de 3000 personnes sous-représente fortement les mathématiques dites « appliquées », un biais qu'il faudra retenir lors de la présentation des résultats de l'étude.

La répartition des électeurs entre les deux sections CNU 25 et 26 a évolué au cours du temps, avec un léger glissement en faveur de la section CNU 26 durant les dernières années, comme le montre le tableau 1. Il serait aussi intéressant d'étudier cette évolution sur une période plus longue et de la comparer à l'éventuelle évolution des thématiques de recherche. Malheureusement, nous n'avons eu accès ni aux listes d'électeurs pour les sessions antérieures à 2015, ni même au nombre d'électeurs pour les sessions antérieures à 2007.

Tableau 1 – Évolution du nombre d'électeurs des deux sections CNU 25 et 26, entre 2007 et 2015

Année élection	Nb électeurs CNU 25	Nb électeurs CNU 26	Total
2015	1411 (43 %)	1867 (57 %)	3278
2011	1467 (45 %)	1776 (55 %)	3243
2007	1515 (46 %)	1752 (54 %)	3267

2.2 – Une cartographie thématique

Afin d'étudier la répartition thématique des recherches en mathématiques des électeurs au CNU, nous avons basé notre étude sur les données de MathSciNet et la classification mathématique par domaine (Mathematics Subject Classification, ou MSC), qui a été établie conjointement par Mathematical Reviews (AMS) et Zentralblatt MATH (EMS, Fiz, Springer). Cette classification officielle est utilisée par les deux sites bibliographiques, ainsi que par la plupart des journaux de recherche en mathématiques.

Nous n'avons retenu que le premier niveau de cette classification, qui comprend **65 catégories** numérotées de 00 à 97 (avec des nombres manquants), voir le tableau 3 en annexe. La classification actuelle date de 1980 et elle a été révisée successivement en 1985, 2000 et 2010. Le premier niveau n'a pas changé depuis 2000, mais des changements entre catégories ont eu lieu en 1985 et 2000. Les derniers changements, en 2000, concernent :

- l'inclusion de la catégorie MSC 04 (Théorie des ensembles) au sein de la catégorie MSC 03 (Logique mathématique et fondations) [1] ;
- la création de la catégorie MSC 37 (Systèmes dynamiques et théorie ergodique), extraite des catégories MSC 28 (Mesure et intégration) et MSC 58 (Analyse globale, analyse sur les variétés) ;
- la renumérotation de la catégorie MSC 73 en MSC 74 (Mécanique des solides déformables) ;
- la création de la catégorie MSC 91 (Théorie des jeux, économie, sciences sociales et sciences du comportement), extraite des catégories MSC 90 (Recherche opérationnelle, programmation mathématique) et MSC 92 (Biologie et autres sciences naturelles).

Ces évolutions devront être gardées à l'esprit dans la suite de notre discussion.

1. Avant 1980, les deux étaient déjà regroupées au sein d'une catégorie MSC 02, désormais obsolète.

Rappelons aussi que chaque article référencé sur MathSciNet possède un code MSC primaire et plusieurs codes MSC secondaires éventuels. Les codes MSC sont choisis par les éditeurs, sur conseil des rapporteurs rédigeant les *Mathematical Reviews* et, éventuellement, des auteurs eux-mêmes (lorsque le journal collecte cette information). La procédure n'est pas explicitée sur le site de MathSciNet, mais il semblerait que le site associe dans un premier temps un code MSC primaire de façon plus ou moins automatique, avant une validation ou une correction éventuelle basée sur le rapport (s'il y en a un, ce qui n'est pas le cas de tous les articles). L'observation de nos propres publications a révélé que les classifications MSC ne sont pas toujours correctes, en particulier au niveau des sous-catégories ; les erreurs sur la catégorie primaire principale (numérotée de 00 à 97 : celle que nous avons retenue dans notre étude et que nous désignerons dans la suite, pour faire simple, comme *classification MSC*) semblent quant-à-elles assez rares.

MathSciNet propose pour chaque chercheur référencé un profil public, établi à partir de ses publications, où n'est prise en compte que la classification MSC primaire de chacun de ses articles, et qui contient le nombre d'articles publiés dans chacune des 65 catégories MSC : c'est cette donnée que nous avons utilisée. Les informations nominatives n'ont jamais été considérées dans notre étude et nous nous sommes tenus à ne prendre en compte que les résultats statistiques.

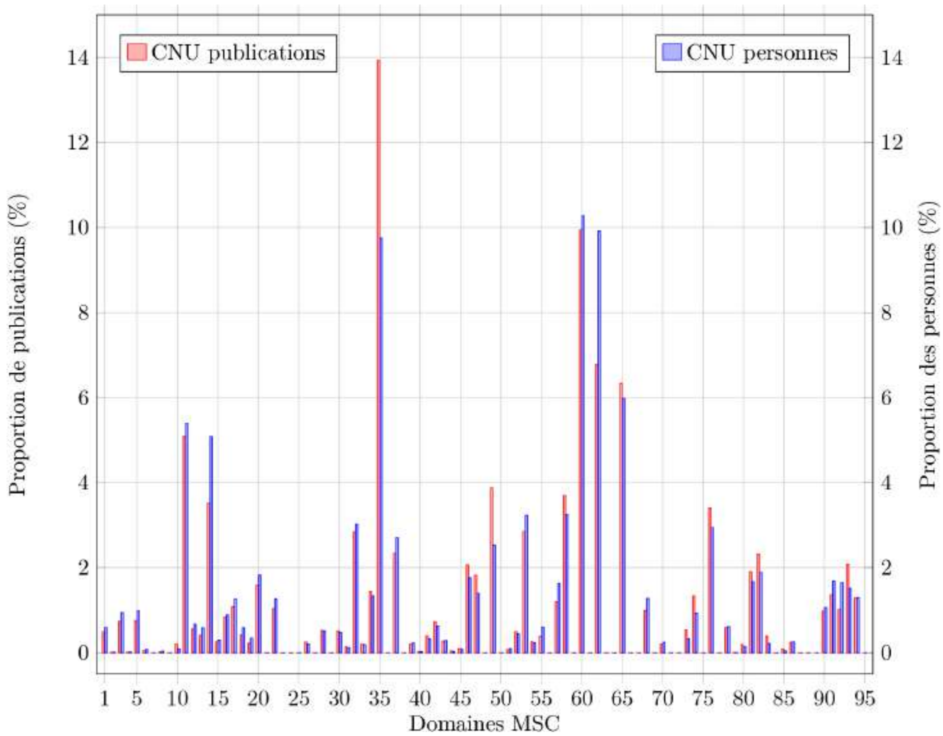
L'utilisation de MathSciNet impose de restreindre la liste des électeurs des sections CNU 25 et 26 à ceux qui y sont référencés (c'est-à-dire possèdent un *MR Author ID*). Notre étude n'a pas permis de retrouver l'identifiant MathSciNet de 459 électeurs des sections CNU, ce qui a donc restreint le groupe étudié à un ensemble de **2819 personnes** (1236 dans la section CNU 25 et 1583 dans la section CNU 26, soit respectivement 44 % et 56 %). L'absence de ces personnes dans la base MathSciNet ne signifie pas nécessairement qu'elles n'ont jamais publié d'article de recherche en mathématiques. D'autres explications sont possibles : erreurs d'orthographe, changements de noms, délais d'apparition dans MathSciNet, publication dans des revues non référencées par MathSciNet, etc. En tout état de cause, nous avons considéré que la proportion des électeurs des sections CNU 25 et 26 référencés par MathSciNet restait significative et c'est donc sur la liste correspondante qu'a porté notre étude.

La figure 1 et le tableau 2 fournissent l'histogramme de toute la communauté en fonction de la classification MSC, à la fois en nombre de personnes et en nombre de publications. Cet histogramme amène plusieurs commentaires. Tout d'abord, certaines thématiques ressortent fortement, les trois plus frappantes étant les Probabilités (MSC 60), les Équations aux Dérivées Partielles (EDP, MSC 35) et les Statistiques (MSC 62). Cette observation est le signe que les catégories MSC ont une granularité très variable selon les domaines. Ainsi les chercheurs en EDP savent que cette catégorie comprend des activités et des thèmes assez hétérogènes, qui couvrent un grand nombre de type d'équations avec des propriétés mathématiques très variées et qui nécessitent le développement de techniques mathématiques également très diverses. Ceci pourrait d'ailleurs justifier un éclatement de la catégorie 35 en plusieurs catégories.

Tableau 2 – Proportions du nombre de personnes (% pop.) et du nombre de publications (% publi.), classées par ordre décroissant (% pop.)

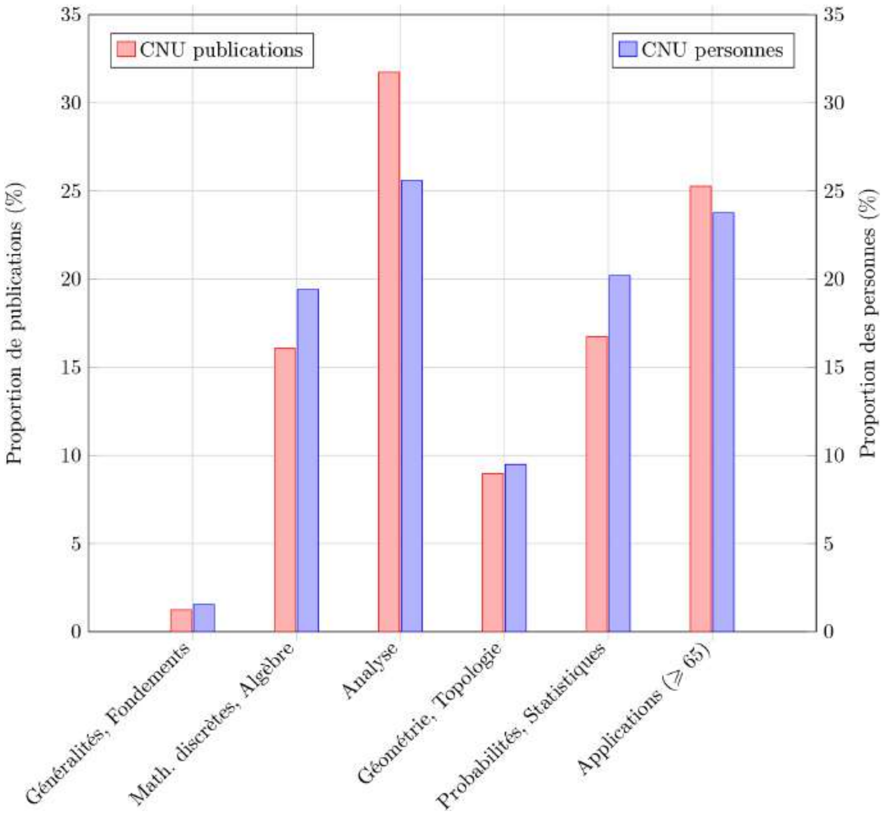
Sujet MSC	% pop.	% publi.
60 (Probabilités)	10.28	9.94
62 (Statistiques)	9.92	6.78
35 (Équations aux dérivées partielles)	9.76	13.9
65 (Analyse numérique)	5.98	6.34
11 (Théorie des nombres)	5.40	5.09
14 (Géométrie algébrique)	5.08	3.51
58 (Analyse globale, analyse sur les variétés)	3.26	3.69
53 (Géométrie différentielle)	3.23	2.85
32 (Plusieurs variables complexes, espaces analytiques)	3.02	2.84
76 (Mécanique des fluides)	2.94	3.41
37 (Systèmes dynamiques et théorie ergodique)	2.71	2.34
49 (Calcul des variations, contrôle optimal, optimisation)	2.53	3.88
82 (Mécanique statistique, structure de la matière)	1.89	2.31
⋮		

Figure 1 – Proportions en personnes et en publications, selon les thèmes msc, pour les électeurs aux sections cnu 25 et 26 en 2015



Le nombre de publications par mathématicien dépend fortement tant de son domaine de recherche que de pratiques (comme l'écriture en collaboration avec parfois de nombreux co-auteurs) qui peuvent varier énormément : l'activité de recherche d'un individu ne peut être réduite à un simple décompte de ses articles. En ce sens, notre histogramme en « nombre de personnes » semble plus adéquat, puisque chaque chercheur contribue de la même façon, indépendamment de son nombre de publications, à condition qu'il ait publié un article référencé dans MathSciNet au moins une fois dans sa vie. Une fois énoncées ces précautions importantes, il faut bien convenir que la différence entre l'histogramme basé sur le nombre de publications et celui qui repose sur le nombre de personnes est très faible, à l'échelle qui est dictée par les catégories msc. Si l'on entre dans le détail, les exceptions notables sont les edp (msc 35) et le Calcul des variations et l'optimisation (msc 49) dont les chercheurs semblent avoir un nombre de publications plus important, alors qu'en Géométrie algébrique (msc 14) et en Statistiques (msc 62), le nombre de publications est un peu moins important s'il est rapporté au nombre de personnes concernées. Pour les Statistiques (msc 62), l'absence totale de référencement des publications dans certains domaines applicatifs (par exemple en médecine) explique très certainement le résultat. Le même effet est probablement présent dans une certaine mesure en Analyse numérique (msc 65). Chaque mathématicien, dans ses catégories msc de prédilection, est bien placé pour en expliquer les particularités et il n'est pas dans le propos de cette étude de décrire finement les variations ou d'en suggérer des causes.

Figure 2 – Proportion en personnes et en publications des électeurs des sections cnu 25 et 26 en 2015, selon les grandes catégories msc



msc	Catégorie	% pop.	% publi.
00–04	Généralités et fondements	1.54	1.24
05–22	Mathématiques discrètes et algèbre	19.42	16.07
26–49	Analyse	25.60	31.73
51–58	Géométrie et topologie	9.49	8.97
60–62	Probabilités et statistiques	20.20	16.72
65–97	Applications et autres	23.75	25.27

La classification officielle msc regroupe les différents sujets selon cinq *grandes catégories* : Généralités et fondements (msc 00–04), Mathématiques discrètes et algèbre (msc 05–22), Analyse (msc 26–49), Géométrie et topologie (msc 51–58), Mathématiques appliquées et autres (msc 60–97). Parce que c'est un usage généralement admis en France, il nous a semblé opportun d'extraire de la cinquième catégorie les Probabilités (msc 60) et les Statistiques (msc 62). Les résultats sont donnés par l'histogramme de la figure 2. Ce dernier fournit une idée générale de la répartition en ressources humaines et en publications de notre communauté dans ces différentes *grandes catégories*.

Les premiers résultats de cette section fournissent une cartographie de la communauté universitaire française en mathématiques, reposant sur la classification msc. Il convient de garder à l'esprit qu'il existe divers biais possibles. Le plus important concerne le fait que MathSciNet ne retient que la catégorie msc primaire de chaque article, en ignorant les catégories msc secondaires éventuelles. Un autre biais notable de notre étude, déjà signalé, est l'absence quasi totale des publications dans certains domaines applicatifs (médecine, sciences sociales, etc.), alors que d'autres sont bien mieux représentés (physique, informatique, etc.). Ceci tend à sous-estimer le volume réel de publications dans certains domaines, en particulier les Statistiques (MSC 62), et plus généralement l'effort de recherche en interaction avec des disciplines autres que les mathématiques.

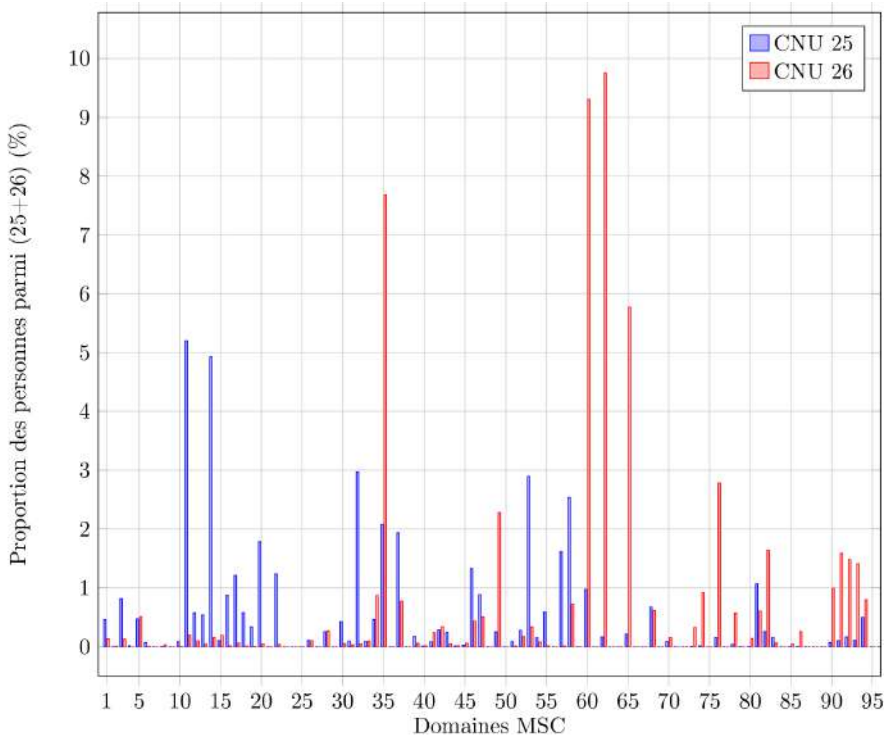
3. Mathématiques appliquées, applications des mathématiques

La distinction historique entre mathématiques « pures » et « appliquées » est restée ancrée dans le découpage des mathématiques universitaires françaises en deux sections CNU (25 et 26). Nous commencerons donc par discuter du profil global de ces deux sections, en utilisant la classification MSC, puis nous étudierons d'une manière un peu différente le profil des chercheurs qui consacrent une partie de leur travail aux « applications », sans référence particulière ni aux deux sections CNU, ni aux domaines de recherche.

3.1 – Les sections CNU 25 et 26

La figure 3 montre la répartition des personnes de notre groupe en fonction du classement MSC, pour les deux sections CNU. La première conclusion que l'on tire de cet histogramme est que la dichotomie 25/26 est essentiellement basée sur le domaine de recherche, plutôt que sur le caractère appliqué ou non de l'activité des chercheurs. Ainsi, la plupart des sujets MSC sortent très majoritairement 25 ou très majoritairement 26. La section CNU 26 regroupe ainsi la plus grande partie des EDP (MSC 35) et des Probabilités (MSC 60), la quasi totalité des Statistiques (MSC 62), de l'Analyse numérique (MSC 65), du Calcul des variations et de l'optimisation (MSC 49) et de presque tous les sujets « applicatifs » dont la catégorie MSC est supérieure à 65. La Combinatoire (MSC 05), l'Informatique (MSC 68 et 94) qui est presque à l'équilibre entre 25 et 26, et les Théories quantiques (MSC 81) qui comprennent une forte part de méthodes algébriques sont des exceptions notables. Les EDP (MSC 35) ont une assez grande proportion de 25 au sein d'une majorité de 26. Rappelons d'ailleurs que, du point de vue des *grandes catégories* MSC, les EDP font partie de « l'Analyse » et non pas des « Mathématiques appliquées et autres ».

FIGURE 3 – Proportion en personnes selon la classification MSC, pour les deux sections CNU 25 et 26



3.2 – Applications des mathématiques

Le découpage 25/26 est, en première approximation, purement lié au sujet de recherche, ce qui vide en grande partie de son sens le terme « mathématiques appliquées ». Il n'y a bien sûr aucune raison de penser que certains sujets MSC ne pourraient pas avoir d'applications, et l'histoire a largement montré que tous les domaines mathématiques ont un impact sur d'autres domaines des sciences, sur la technologie, dans l'industrie ou plus généralement dans la société et la sphère économique. Il serait également erroné d'imaginer que tous les électeurs de la section CNU 26 ont une activité principalement dirigée vers les applications. La réalité est en effet bien plus complexe et en constante évolution.

Nous avons par conséquent recherché un indicateur plus « comportemental », qui mesure réellement l'intérêt et l'implication des chercheurs pour des problèmes en dehors de l'étude des structures mathématiques pour elles-mêmes, sans privilégier ou écarter des sujets particuliers. Cet indicateur ne peut pas être binaire, car on sait bien que l'intérêt pour les applications peut prendre beaucoup de formes, et qu'il évolue aussi dans le temps.

En se basant sur la classification MSC et les données de MathSciNet, une façon de construire cet indicateur consiste à étudier l'activité des chercheurs dans les domaines applicatifs recensés dans le troisième tiers du classement MSC. En effet, les codes au-delà de la catégorie MSC 68 couvrent de nombreux domaines d'application, dont l'informatique et la théorie de l'information (MSC 68 et 94), la mécanique (MSC 70), la physique et la chimie (MSC 71–83), l'astronomie et l'astrophysique (MSC 85), les géosciences (MSC 86), la recherche opérationnelle (MSC 90), la théorie des jeux, l'économie et les sciences sociales (MSC 91), la biologie (MSC 92), la théorie des systèmes (MSC 93) et les sciences de l'éducation (MSC 97). On notera toutefois que cette classification fait la part belle aux applications physiques, qui regroupent plus de la moitié des codes MSC. D'ailleurs MathSciNet recense certains articles des journaux de physique les plus connus (comme *Physical Review Letters* par exemple, mais uniquement dans le cas de chercheurs qui possèdent déjà un *MR Author Id*), alors qu'il ne contient presqu'aucune référence dans les journaux phares de biologie, de médecine ou de sciences sociales pour ne pas parler de journaux plus tournés vers la technologie.

Nous proposons donc de calculer, pour chaque auteur, le pourcentage α d'articles publiés dont la catégorie MSC primaire est supérieure ou égale à une limite choisie. Un α proche de 100 % signifierait ainsi une (très) forte activité dédiée aux applications. Avec cette définition, on peut s'attendre à ce qu'une plus faible proportion de chercheurs ait une valeur de α conséquente que dans la distinction actuelle 25/26. Comme nous allons le voir, cette intuition est confirmée par les données.

Le choix de la limite à partir de laquelle les sujets MSC seront déclarés « domaines applicatifs » ou « applications des mathématiques » (que nous opposerons aux mathématiques « pour elles-mêmes ») nécessite une discussion. La classification MSC officielle en *grandes catégories* prétend que les applications comprennent tous les codes MSC supérieurs ou égaux à 60, en y incluant donc les Probabilités (MSC 60) et les Statistiques (MSC 62). Ce choix ne nous semble pas du tout pertinent, car ces deux catégories MSC comportent aussi, aujourd'hui, des aspects très théoriques, détachés de toute application directe dans un autre domaine des sciences. La même remarque s'applique dans une certaine mesure à l'Analyse numérique (MSC 65), même si on pourrait argumenter que l'implémentation informatique reste la motivation principale des recherches dans ce domaine, y compris pour les plus théoriques. Par ailleurs, on pourrait aussi argumenter qu'une grande part des EDP (MSC 35) devrait être comptée dans les applications, au même titre que les Probabilités (MSC 60).

Comme indiqué précédemment, la qualification des Statistiques (MSC 62) est rendue délicate par la forte variété des applications concernées, et dont le référencement par MathSciNet est très médiocre. Pour cette raison purement technique, il pourra être utile d'inclure les Statistiques dans notre définition des domaines applicatifs même si, encore une fois, l'inverse nous semblerait aussi justifié [2].

2. L'attitude consistant à se débarrasser définitivement de l'appellation « mathématiques appliquées », au profit des seules « applications des mathématiques » se développe dans certains pays. Par exemple, le département de mathématiques du Massachusetts Institute of Technology (MIT) à Cambridge aux États-Unis est divisé en « Pure Mathematics » qui comprend tous les domaines des mathématiques dont les Probabilités et les Statistiques, et « Applied Mathematics » qui ne contient que des domaines applicatifs, voir `http://math.mit.edu/research/`. Rappelons également que l'intitulé officiel de la section CNU 26 est « Mathématiques appliquées et applications des mathématiques ».

Figure 4 – Proportion des personnes qui possèdent une activité supérieure à α au-delà des msc 62 (incluant les Statistiques, gauche) ou msc 65 (excluant les Statistiques, droite)

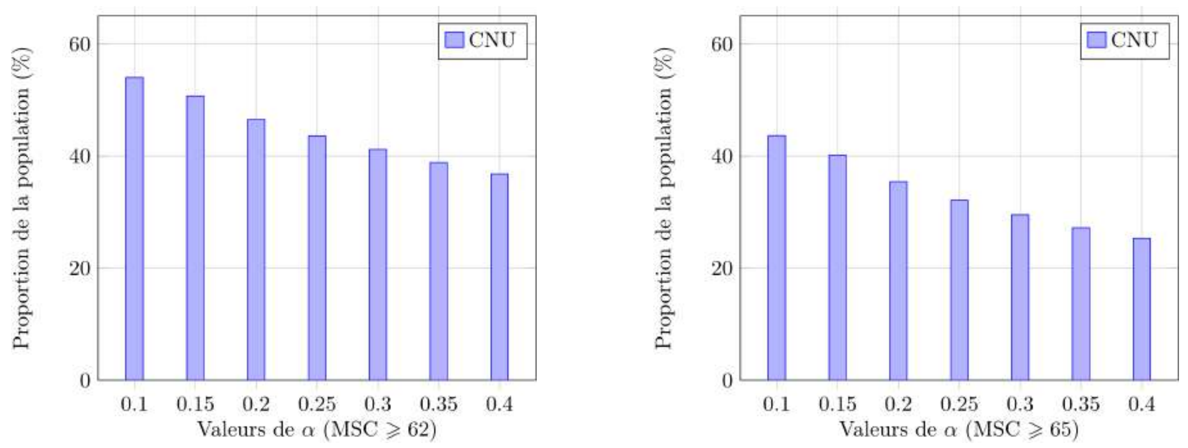
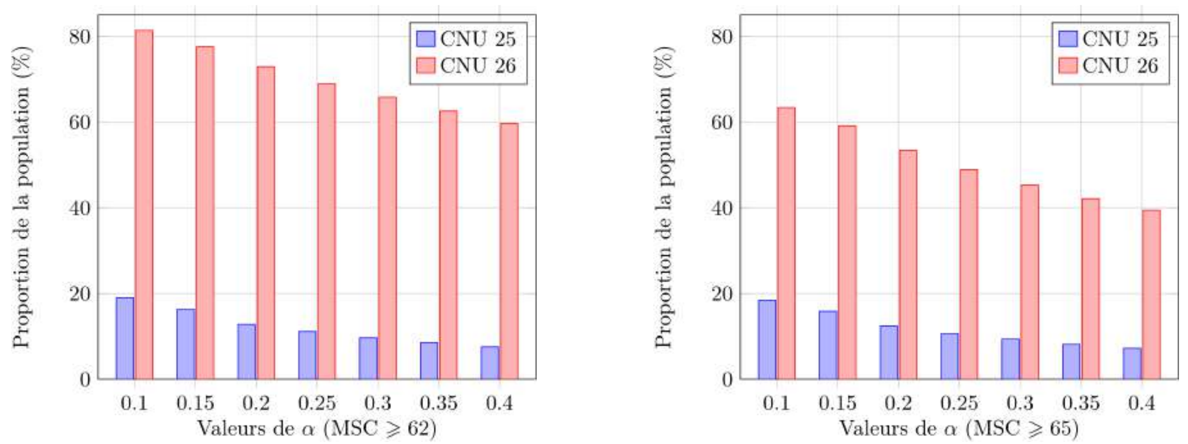


Figure 5 – Proportion des personnes qui possèdent une activité supérieure à α au-delà des msc 62 (incluant les Statistiques, gauche) ou msc 65 (excluant les Statistiques, droite) pour les deux sections cnu



La figure 4 montre la proportion de la communauté mathématique française (cnu 25 et 26 confondues) qui possède une activité supérieure à un seuil α, dont nous avons fait varier la valeur de 10 à 40 %, en incluant – ou non – les Statistiques (msc 62) dans les applications [3]. Dans la figure de gauche, on voit qu'environ 40 % de notre communauté possède une activité dans les domaines applicatifs supérieure à $\alpha = 30$ %. La figure 5 montre le même résultat en distinguant les chercheurs des sections 25 et 26. On observe ainsi que 10 % des électeurs de la section 25 et 65 % des électeurs de la section cnu 26 ont une activité appliquée, avec un α supérieur ou égal à 30 %. Les électeurs de la section cnu 26 sont donc plus impliqués dans les applications des mathématiques que ceux de la section cnu 25. Ces résultats montrent toutefois que 10 % des chercheurs de la section cnu 25 ont une activité appliquée, selon cette définition, alors que 35 % des électeurs de la section cnu 26 n'en ont pas.

3. Le nombre des personnes concernées varie avec les valeurs de α mais l'allure des histogrammes y est peu sensible. De manière pragmatique, nous avons retenu les valeurs de α qui rendent ces histogrammes les plus lisibles possibles.

Pour avoir une idée de la répartition des domaines les plus concernés par les applications, nous pouvons extraire de la population totale le nombre de chercheurs qui ont une activité appliquée supérieure à un certain seuil α, et répartir ensuite leur *activité*, mesurée par le pourcentage de leurs publications dans chaque catégorie MSC. La figure 6, réalisée en prenant $\alpha = 20$ % et en sommant pour chaque catégorie MSC les activités de tous les mathématiciens avec $\alpha \geqslant 20$ %, révèle ainsi que les sujets mathématiques les plus liés aux applications sont les EDP (MSC 35), les Probabilités (MSC 60) et le Calcul des variations et l'optimisation (MSC 49). La présence très faible des Statistiques (MSC 62) confirme le très mauvais référencement des applications de ce domaine dans MathSciNet, que nous avons déjà mentionné, et qui constitue sans aucun doute l'une des principales limitations d'une étude basée sur MathSciNet. Il est aussi légitime de se demander si le même biais est présent pour les Probabilités (MSC 60). L'Analyse numérique (MSC 65) est très représentée, ce qui découle du fait que cette catégorie est comptée dans les applications pour le choix du critère α tout en constituant un domaine de rattachement principal pour un nombre significatif de mathématiciens. Parmi les domaines du début du classement MSC, on notera la présence de la Logique (MSC 03), de la Combinatoire (MSC 05) et de la Théorie des nombres (MSC 11).

En conclusion, l'utilisation de MathSciNet pour recenser les activités des mathématiciens dans des domaines scientifiques d'application des mathématiques n'est pas sans défaut, à cause de l'absence de référencement de beaucoup de disciplines scientifiques dans la base. Une étude plus poussée avec d'autres outils serait bienvenue. Par ailleurs, un critère basé uniquement sur les publications néglige d'autres activités importantes comme les interactions avec le monde socio-économique. De ce point de vue, notre étude ne fournit qu'une vision très partielle, quoique porteuse d'informations, sur la question des applications des mathématiques. Pour faire court, il s'agit d'une vision assez « traditionnelle » qui privilégie en particulier les sciences physiques, l'informatique et la mécanique.

4. Les recrutements au CNRS

Le dernier volet de cette étude s'attache à comparer les recrutements de Chargés de Recherche (CR) au CNRS au profil de la communauté des électeurs des sections CNU 25 et 26. Notre but n'est pas d'étudier l'action d'un comité national particulier, mais bien de mesurer la politique scientifique effective, sur le long terme, de la section 41 du CNRS (qui a pris la suite de la section 01 ; par commodité, nous ne parlerons que de la *section 41* du comité national du CNRS). Notons au passage que les recrutements des maîtres de conférences s'analysent de manière différente et ne peuvent pas être comparés aux recrutements des CR du CNRS, qui relèvent d'un concours national.

Nous avons utilisé les classements des concours de recrutement CR2 et CR1 de la section 41 du CNRS de 2005 à 2016 (incluant tous les postes fléchés), soit un groupe de **137 personnes classées en liste principale, au niveau CR2 et CR1** (admissibilité) ; cette période correspond à l'activité de 4 comités différents. Nous n'avons pas utilisé la liste des CR admis, ou ayant pris un des postes de CR qui leur aurait été proposé, ou encore des CR actuellement en poste, car nous voulions étudier la politique de recrutement. Par ailleurs, après l'admissibilité au concours, il est difficile de reconstituer des données fiables : plusieurs des admis n'ont jamais pris effectivement de poste, ou sont partis rapidement à l'étranger, alors que la liste des admissibles est consultable sur le site du CoCNRS et que chacun d'eux possède un profil sur MathSciNet. C'est donc sur la base des **admissibles CR1 et CR2** que nous avons évalué les recrutements.

4.1 – Répartition en fonction des profils 25/26

On peut commencer par étudier la représentation des sections 25 et 26 pour les recrutements CR au CNRS. Comme tous les classés n'ont pas forcément pris leur poste (ou ont quitté leur poste CR entre temps), ils ne sont pas nécessairement sur la liste actuelle des électeurs au CNU, et ne l'ont pas forcément été à un moment de leur carrière. Cependant, nous pouvons reconstituer le « profil 25/26 » d'un groupe de personnes en répartissant leur activité dans chacun des domaines MSC et en utilisant ensuite la proportion 25/26 trouvée pour toute la communauté mathématique dans chacun de ces domaines. Le résultat de ce problème inverse est donné à la figure 7.

Figure 6 – Répartition de l'*activité* des mathématiciens qui possèdent une activité supérieure à 20 % au-delà de la catégorie msc 63 (incluant les Statistiques), par catégorie msc

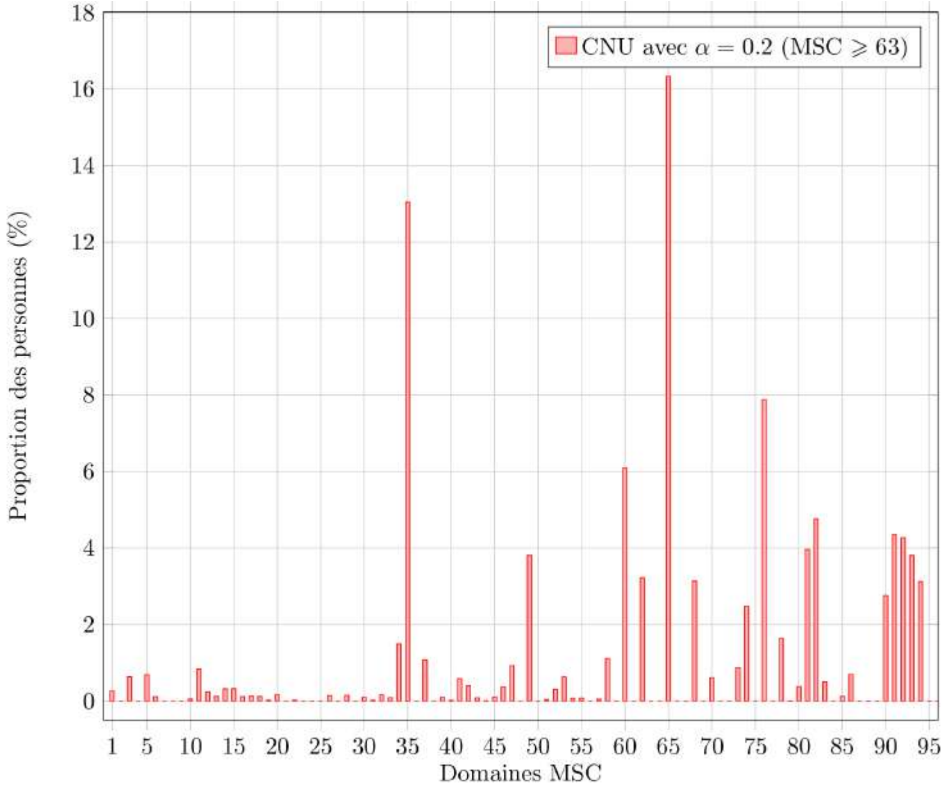
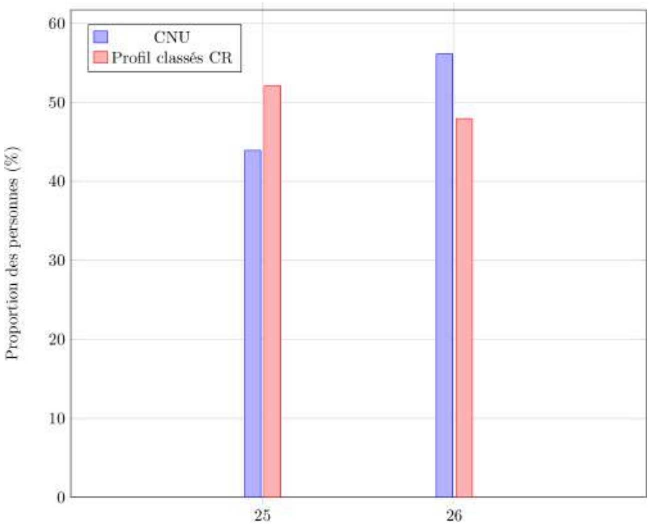
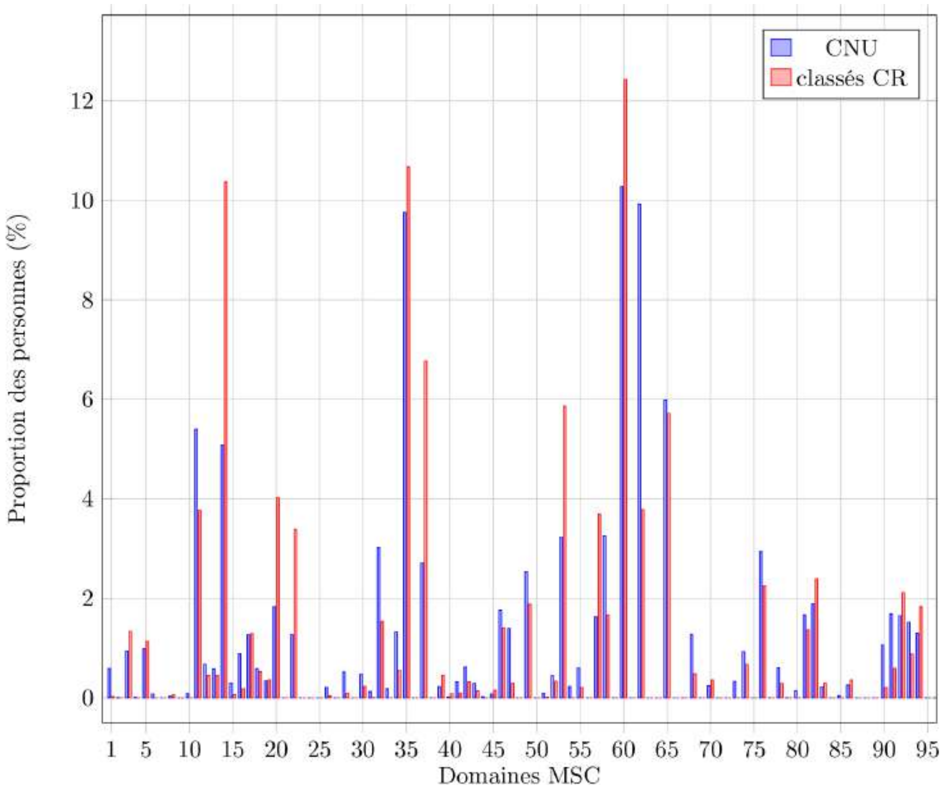


Figure 7 – Nombre de classés cr2 et cr1 par la section 41 du cnrs entre 2005 et 2016 qui ont un profil 25 ou 26, comparé à la répartition moyenne des deux sections cnu aux élections de 2007, 2011 et 2015



	25	26
Répartition moyenne électeurs section cnu (2007–2015)	44.88 %	55.12 %
Profil des classés CR au cnrs	52.06 %	47.94 %

Figure 8 – Répartition des classés CR2 et CR1 par la section 41 du CNRS entre 2005 et 2016 selon les catégories MSC, comparée au profil de tous les électeurs au CNU en 2015. Les pourcentages des classés CR prennent en compte la répartition de leurs publications par catégorie MSC



Pour faciliter l'interprétation, nous mettons ce résultat en regard avec la répartition moyenne des électeurs aux sections CNU 25 et 26 pour les trois élections de 2007, 2011 et 2015.

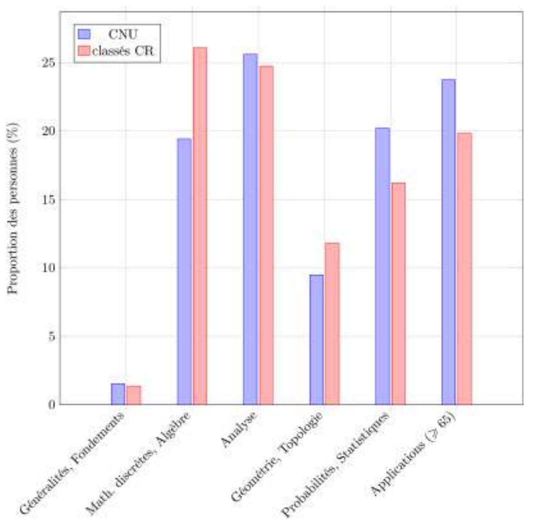
4.2 – Répartition en fonction des sujets de recherche

Comme précédemment, nous pouvons tracer un histogramme d'*activité* par catégorie MSC pour les chercheurs ayant été classés CR2 ou CR1 au CNRS. Pour chaque CR, nous avons pris en compte l'activité mesurée par le pourcentage de publications dans chaque catégorie MSC. Le résultat est contenu dans la figure 8. Il convient de garder à l'esprit que le groupe considéré étant de 137 personnes réparties en 65 catégories, les fluctuations sont importantes et que seule une analyse qualitative peut être menée.

Pour aider la lecture nous avons reporté sur le même graphique l'histogramme de la population totale des électeurs des sections CNU 25 et 26 en 2015. Il faut cependant mener la comparaison avec beaucoup de précautions, car le profil de la population totale peut avoir évolué entre 2005 et 2015, une information à laquelle nous n'avons pas accès. Il semblerait cependant que certains sujets particuliers aient été mis en avant par la section 41 du CNRS. Ceci concerne par exemple la Géométrie algébrique (MSC 14), la Théorie des groupes (MSC 20 et 22) et les Systèmes dynamiques (MSC 37). Les résultats de la catégorie MSC 37 doivent cependant être pondérés par ceux de la catégorie MSC 58, dont on rappelle qu'elle a été extraite lors de la refonte du classement MSC en 2000. Rappelons encore une fois que la taille de l'échantillon considéré empêche des conclusions trop tranchées.

Notre étude ne permet certainement pas de discuter du profil des classés CR au sein même des catégories MSC. Par contre, nous pouvons considérer les *grandes catégories* MSC, et obtenons alors l'histogramme de la figure 9.

Figure 9 – Répartition des classés CR au CNRS selon les grandes catégories MSC, comparée à celle des électeurs des sections CNU 25 et 26 en 2015



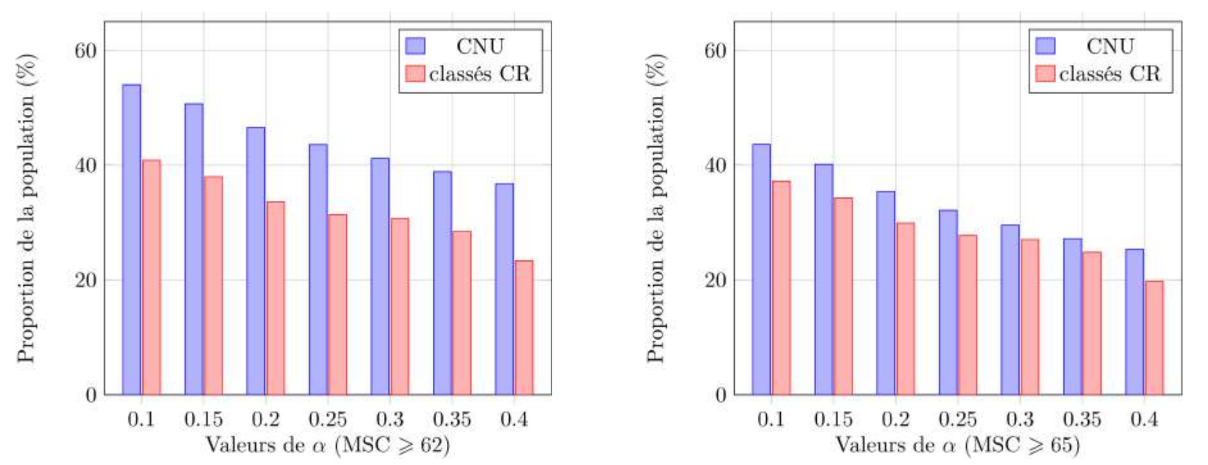
4.3 – Applications des mathématiques

Nous pouvons poser la question de la représentation des applications des mathématiques dans les recrutements CR au CNRS en section 41. À nouveau, la situation des Statistiques (MSC 62) est délicate à analyser à cause du mauvais référencement des publications. Si, dans l'indicateur α, on compte les Statistiques au côté des applications, on obtient l'histogramme à gauche de la figure 10. Si on définit le paramètre α en commençant à la catégorie MSC 65, c'est-à-dire en comptant les Statistiques (MSC 62) au côté des mathématiques fondamentales, on obtient l'histogramme de droite de la figure 10.

5. Conclusion

Notre étude, basée sur des données publiques (liste des électeurs au CNU recensés dans MathSciNet et listes des classés CR2 et CR1 par la section 41 du CNRS) fournit un éclairage inédit sur la communauté mathématique française. Elle met en évidence un décalage entre les recrutements CR et l'évolution de la communauté mathématique française telle qu'elle ressort des listes des sections CNU 25 et 26. Étant données les limitations des résultats obtenus, nous ne nous risquerons pas à les commenter ou à chercher à les expliquer. Il serait bien évidemment souhaitable de compléter notre étude avec divers autres outils (Google Scholar, Thomson Reuters – ISI Web of Science) ou d'autres moyens (enquêtes ou sondages) qui permettraient de mieux cerner la carrière et l'activité des chercheurs et des enseignants-chercheurs, quelle que soit la nature de cette activité.

Figure 10 – Pourcentage de la population totale des électeurs au CNU en 2015, et des classés CR2 et CR1 par la section 41 du CNRS entre 2005 et 2016, qui ont une activité supérieure à α dans les catégories MSC supérieures ou égales à 62 (en incluant les Statistiques, à gauche) ou supérieures ou égales à 65 (en excluant les Statistiques, à droite)



Annexe

Tableau 3 – Liste des catégories msc (classification de 2010)

00	General
01	History and biography
03	Mathematical logic and foundations
05	Combinatorics
06	Order, lattices, ordered algebraic structures
08	General algebraic systems
11	Number theory
12	Field theory and polynomials
13	Commutative algebra
14	Algebraic geometry
15	Linear and multilinear algebra ; matrix theory
16	Associative rings and algebras
17	Nonassociative rings and algebras
18	Category theory ; homological algebra
19	K-theory
20	Group theory and generalizations
22	Topological groups, Lie groups
26	Real functions
28	Measure and integration
30	Functions of a complex variable
31	Potential theory
32	Several complex variables and analytic spaces
33	Special functions
34	Ordinary differential equations
35	Partial differential equations
37	Dynamical systems and ergodic theory
39	Difference and functional equations
40	Sequences, series, summability
41	Approximations and expansions
42	Harmonic analysis on Euclidean spaces
43	Abstract harmonic analysis
44	Integral transforms, operational calculus
45	Integral equations
46	Functional analysis
47	Operator theory
49	Calculus of variations and optimal control ; optimization
51	Geometry
52	Convex and discrete geometry
53	Differential geometry
54	General topology
55	Algebraic topology
57	Manifolds and cell complexes
58	Global analysis, analysis on manifolds
60	Probability theory and stochastic processes
62	Statistics
65	Numerical analysis
68	Computer science
70	Mechanics of particles and systems
74	Mechanics of deformable solids
76	Fluid mechanics
78	Optics, electromagnetic theory
80	Classical thermodynamics, heat transfer
81	Quantum theory
82	Statistical mechanics, structure of matter
83	Relativity and gravitational theory
85	Astronomy and astrophysics
86	Geophysics
90	Operations research, mathematical programming
91	Game theory, economics, social and behavioral sciences
92	Biology and other natural sciences
93	Systems theory ; control
94	Information and communication, circuits
97	Mathematical education

Maxime Chupin

ceremade, cnrs & Université Paris-Dauphine, psl Research University.

Maxime Chupin, ingénieur de recherche cnrs, est spécialiste en calcul scientifique, mécanique céleste et chimie quantique.

Jean Dolbeault

ceremade, cnrs & Université Paris-Dauphine, psl Research University.

Jean Dolbeault, directeur de recherche cnrs, est spécialiste des edp non linéaires et leurs applications en physique et biologie.

Maria J. Esteban

ceremade, cnrs & Université Paris-Dauphine, psl Research University.

Maria J. Esteban, directrice de recherche cnrs, est spécialiste des edp non linéaires et de physique mathématique.

Mathieu Lewin

ceremade, cnrs & Université Paris-Dauphine, psl Research University.

Mathieu Lewin, directeur de recherche cnrs, est spécialiste de physique mathématique et de théorie quantique.

Nous remercions tous ceux qui se sont donnés la peine de relire ce texte et avons essayé d'intégrer de manière constructive leurs remarques. Nous avons été très sensibles aux encouragements qui nous sont parvenus.

Journal Tunisien des Mathématiques

Le Journal Tunisien des Mathématiques (TJM[1]) est une nouvelle publication internationale organisée par la Société Mathématique de Tunisie, publiée en format électronique et imprimée par Mathematical Sciences Publishers (MSP) à Berkeley. Il publie des articles de recherche dans tous les domaines des mathématiques. Ceux-ci sont sélectionnés par un comité éditorial international distingué, reposant sur une qualité et un intérêt exceptionnels, et selon les normes internationales les plus élevées. TJM souhaite ainsi se positionner immédiatement après les revues généralistes les plus sélectives.

Le continent africain s'intéresse de plus en plus aux développements scientifiques, notamment en mathématiques. La Société Mathématique de Tunisie a été fondée en 1992 et est un membre institutionnel permanent de l'Union Mathématique Internationale. Elle joue un rôle majeur dans la stimulation et le soutien de la recherche mathématique de haut niveau en Tunisie et dans la région environnante. Avec le lancement de cette revue, la Société Mathématique de Tunisie contribue au développement en Afrique d'une recherche scientifique répondant aux normes internationales les plus élevées.

Le comité éditorial invite les mathématiciens et mathématiciennes du monde entier à soumettre des articles de recherche de haut niveau.

Le premier volume de TJM vient de paraître. Il est disponible en accès libre sur le site du journal :

`https://msp.org/tunis/2019/1-1/index.xhtml`

Ces articles sont officiellement datés de 2019 et seront libres d'accès jusqu'à la fin de l'année civile 2018. Les abonnements payants à TJM débuteront en 2019.

D'autres articles à paraître dans les prochains numéros sont annoncés ici `https://msp.org/scripts/coming.php?jpath=tunis`

Merci de proposer à votre bibliothèque de vous abonner à ce nouveau journal.

Le comité éditorial : Ahmed Abbes, Hajer Bahouri, Ali Baklouti, Arnaud Beauville, Bassam Fayad, Benoit Fresse, Dennis Gaitsgory, Emmanuel Hebey, Mohamed Ali Jendoubi, Sadok Kallel, Minhyong Kim, Toshiyuki Kobayashi, Yanyan Li, Nader Masmoudi, Haynes R. Miller, Nordine Mir, Detlef Müller, Mohamed Sifi, Daniel Tataru, Sundaram Thangavelu, Saïd Zarati.

1. msp.org/tunis

Quelques souvenirs de Jean-Louis Koszul

1921-2018

• B. Malgrange

J'ai fait la connaissance de Koszul... à son pot de thèse. J'étais alors élève à l'ÉNS, et ledit pot se tenait à la bibliothèque. J'ai le souvenir d'un charmant accueil de lui et de sa femme Denise.

À peu près à la même époque, j'ai entendu parler de sa thèse au séminaire Bourbaki : trois exposés de Cartan, dont le numéro 1 de la première année (au moins de la première année où les exposés ont été rédigés, et où le séminaire a pris la forme qui subsiste aujourd'hui). Il s'agissait de travaux sur l'homologie des groupes et des algèbres de Lie. J'avoue les avoir regardés un peu superficiellement, mon intérêt en mathématiques étant ailleurs. Pendant que j'y suis, je mentionne deux autres travaux datant à peu près de la même époque ; d'une part, un travail de mise au point sur les suites spectrales, qui faisait que les membres de Bourbaki les appelaient « suites de Leray-Koszul », au grand mécontentement de Leray ; d'autre part, un travail qui contient la définition des « complexes de Koszul », notion qui a fait depuis le tour du monde (mathématique, s'entend). J'avoue que je connais moins bien ses travaux ultérieurs, et que je laisse d'autres plus au fait en parler.

Après sa thèse Koszul a été nommé à Strasbourg. Pendant cette période où je faisais la mienne, à Nancy et à Paris, j'ai quand même eu beaucoup d'occasions de le rencontrer ; d'une part, dans différents colloques et séminaires, d'autre part dans des congrès Bourbaki. Koszul y avait été recruté, et en est resté un des membres les plus actifs jusqu'à sa retraite, qui je crois se prend à Bourbaki à cinquante ans. De mon côté, j'étais allé à quelques congrès Bourbaki en tant que « cobaye » (lisez : membre à l'essai), mais je n'ai pas poursuivi.

Après ma thèse, en 1955, je l'ai retrouvé à Strasbourg, où nous sommes restés cinq ans ensemble. L'université était alors bien différente de maintenant. Il y avait huit professeurs et deux assistants en mathématiques, c'était la plus grosse de province. Parmi ceux-ci Koszul et Thom et les deux nouveaux, Berger et moi. Nous étions logés dans un palais bismarkien, somptueux et aussi peu fonctionnel que possible : d'immenses bureaux, plus hauts que larges, et de toutes petites salles de cours. Heureusement, le nombre d'étudiants n'était pas très grand. Par exemple en calcul différentiel intégral, où Koszul enseignait, il y avait, je crois une trentaine d'étudiants.

L'atmosphère était très sympathique et conviviale, c'est sans doute mon meilleur souvenir des années universitaires ; un unique séminaire où chacun racontait ce qui l'intéressait, des discussions qui se poursuivaient au bistrot d'en face devant une bière et une paire de saucisses, bref la vie universitaire idéale d'autrefois. Nous avions quand même réussi une année à trouver un sujet de séminaire pour toute l'année. C'était le livre de Hirzebruch sur Riemann-Roch qui venait de paraître.

Cette cohabitation a pris fin en 1960 quand j'ai été nommé à Paris. Koszul, lui, est resté à Strasbourg plus longtemps et est parti à Grenoble en 1963, si je me rappelle bien. Bien sûr dans ces années de séparation, nous avons eu maintes occasions de rencontres. Je mentionne un séjour que nous avons fait tous les deux à Bombay, au Tata Institute. Nous en avons profité pour passer un week-end au Népal ; le fervent montagnard qu'était Koszul ne voulait pas manquer l'occasion de voir l'Himalaya de près.

Nous nous sommes retrouvés en 69 à Grenoble; je dois dire que j'étais un peu fatigué de l'agitation parisienne; la présence de Koszul me garantissait que je trouverais un bon département de mathématiques à Grenoble. Nous étions alors dans des locaux neufs, construits trois ans avant. Koszul était, avec le chef du département Chabauty, l'un des piliers du département, avant tout du point de vue scientifique, mais aussi administratif. Son rôle administratif s'est évidemment amplifié après la retraite de Chabauty. Pendant que j'y suis, je signale aussi son rôle administratif national; par exemple, il a été impliqué, avec Aragnol et Poitou, dans la création du CIRM de Luminy. C'était quelqu'un d'extrêmement soigneux et consciencieux; quand on lui confiait une tâche, on pouvait être sûr qu'elle serait bien faite.

Au point de vue mathématique, je me souviens surtout du « séminaire d'algèbre et géométrie » auquel nous participions tous les deux, avec ses élèves Luna et Vey et quelques autres collègues. Là encore, les sujets étaient variés. Koszul parlait peu de son travail mais était remarquablement réceptif à quantités de sujets. Je me souviens néanmoins de deux exposés faits de son propre chef; l'un sur les groupes cristallographiques, l'autre sur les « super-variétés » ou variétés graduées. Ce sujet l'intéressait beaucoup car il était un développement plus ou moins tardif d'idées de lui et Cartan à l'époque de sa thèse. Je signale aussi un exposé sur la cohomologie des champs de vecteurs formels, travail dû à Gelfand Fuks, qui est à l'origine de la classe de Godbillon-Vey des feuilletages.

Nous sommes ainsi restés collègues jusqu'à sa retraite, en 1987. Il est certainement la personne dont j'ai été le plus longtemps collègue.

Après sa retraite, on le voyait, avec le temps, de moins en moins à l'Institut Fourier. Il avait sans doute d'autres occupations. Par exemple, avec sa femme, il avait entrepris pendant quelques années, de visiter tous les déserts du monde, les chauds comme les glacés. La dernière fois qu'il est venu à l'Institut Fourier, c'était il y a deux ans, pour le cinquantième anniversaire.

Au mois d'octobre dernier, il avait décidé de se retirer avec sa femme dans une maison de retraite des environs de Grenoble. Ceci, je crois, afin de pouvoir garder avec lui sa femme qui nécessitait des soins. Cette situation n'aura pas duré longtemps. En décembre son état de santé s'est aggravé jusqu'à l'issue finale.

In memoriam Jean-Louis KOSZUL

• P. CARTIER

J'ai surtout fréquenté Koszul dans les années 1950 et 1960. J'ai fait sa rencontre en juin 1951 à Pelvoux-le-Poët, où Bourbaki se réunissait assez souvent. Mais j'avais entendu parler de la suite spectrale, dite de Leray–Koszul, au Séminaire Cartan consacré cette année-là à l'algèbre homologique et aux faisceaux, sujets de grande actualité. C'est Samuel Eilenberg (que nous appelions Sammy ou S^2P^2 [1]) qui avait exposé la suite spectrale de manière si peu convaincante que je m'efforcerai à plusieurs reprises d'en éviter l'emploi (ce qui était une maladresse évidente).

La thèse de Koszul, effectuée sous la direction de Henri Cartan, portait sur l'homologie des algèbres de Lie, et surtout l'homologie relative à une sous-algèbre de Lie, avatar des espaces homogènes. Sous le titre « Travaux de Koszul I, II et III », Cartan en rendit compte au juvénile Séminaire Bourbaki. Ce compte-rendu est un peu bizarre; il décrit les bases de la théorie des algèbres de Lie, ce qui ne faisait pas encore partie de l'héritage commun, Koszul n'est mentionné que dans le titre, et dans la référence à sa thèse [2] rajoutée comme un remord tardif. Cartan faisait grand cas de Koszul, et insista pour le faire entrer dans Bourbaki. Lorsqu'il fut chargé de lui faire l'offre, les deux protagonistes furent si timides que Koszul ne comprit rien et qu'il fallut lui envoyer un second émissaire.

Lorsqu'à la suite d'un service militaire de 2 ans et demi en temps de guerre (l'Algérie!) qui aurait

1. Smart Sammy Polish Prodigy en anglais de pacotille!

pu briser mon élan scientifique, je suis arrivé à Strasbourg, Koszul revenait d'une année passée à l'I.A.S. de Princeton, et il était après le départ d'Ehresman et de Lichnerowicz vers Paris la figure paternelle du Département de Mathématiques (malgré son jeune âge). Je ne suis pas certain de ses convictions intimes, mais il représentait pour moi une figure typique de ce protestantisme alsacien, que j'ai beaucoup fréquenté à l'époque. Il en partageait le sérieux, l'honnêteté, le bon sens et l'équilibre. Il a su en particulier résister à l'attrait académique de Paris. Il nous a quittés au bout de 2 ans pour aller à Grenoble, dans une manœuvre peu courante à l'époque d'échange de postes avec Georges Reeb (lui aussi très alsacien, mais dans le genre « Ami Fritz »). Après son départ, ce fut la place aux jeunes : Gabriel, Zisman, et à l'aventure du « Séminaire Européen » entreprise de rapprochement franco-allemand des mathématiques. Il nous avait déjà quittés, mais appuyait de tout cœur notre entreprise.

Koszul avait deux passions : l'alpinisme et la géométrie différentielle. Je pense que son émigration de Strasbourg à Grenoble fut en partie motivée par le désir de se trouver au cœur des Alpes. Il avait toutes les qualités du bon guide. Moi, qui n'ai qu'un savoir-faire limité dans ce domaine, je me fiais à lui qui m'emmenait en deça du danger, mais bien au-delà de ce que j'aurais osé faire seul, avec la récompense attendue des paysages grandioses. En cela, il ressemblait à Georges de Rham, grand géomètre et grand montagnard suisse.

Les rencontres de Bourbaki permettaient de conjuguer alpinisme et géométrie. Il reste une photographie de l'expédition de juin 1951 au Glacier Blanc du Pelvoux. Il y eut aussi l'expédition de secours pour John Tate, égaré dans la montagne avec des chaussures inadéquates. La présence de gens expérimentés, dont Koszul, en liaison avec les garçons du village, était bien nécessaire. Mais parlons de la « géométrie différentielle ». Depuis le début de l'entreprise Bourbaki, André Weil lui avait assigné comme l'une de ses tâches de récupérer l'héritage d'Élie Cartan sur les espaces riemanniens symétriques et les domaines bornés homogènes. Une fois consolidés les fondements sous la forme des six premiers livres, la « deuxième partie » se structura autour de l'Algèbre Commutative (comme contrepoint aux « Éléments de Géométrie Algébrique » de Grothendieck) et des « Groupes et Algèbres de Lie ». Le dernier projet n'a paru que sous une forme très tronquée, plus centrée sur les algèbres de Lie que sur les groupes. Le dernier chapitre traite des groupes de Lie compacts, mais il y manque la théorie des groupes semi-simples réels ou complexes. Comme déjà mentionné, ceci devrait servir de prologue à la géométrie riemannienne et aux espaces symétriques, voire à la théorie des représentations unitaires de ces groupes (après Gelfand et Harish-Chandra). Sur tous ces sujets, il y eut de longs rapports (jamais publiés) de Chevalley, Godement et Borel.

Les débats les plus vifs concernèrent la *définition* des variétés. Nous n'étions plus au temps (vers 1930) où Elie Cartan écrivait : « La notion de variété est difficile à définir... Soit V une variété... » Un des premiers exposés satisfaisants est celui de Chevalley dans son livre « Theory of Lie groups » paru en 1946 (influencé par des discussions avec H. Cartan). Bourbaki subit une offensive conjointe de Grothendieck et Eilenberg qui voulaient expliquer en termes très généraux ce que signifie le recollement de modèles locaux. C'était un prélude aux topologies de Grothendieck et aux topos. Bourbaki resta à mi-course, et formula un cadre très général permettant de traiter des variétés différentielles, aussi bien qu'analytiques réelles, complexes, et même p-adiques, de dimension finie ou infinie. Pour les variétés de dimension infinie, elles sont localement homéomorphes à un ouvert de l'espace de Banach qui sert d'espace tangent [2]. En fait, pour les besoins du calcul des variations, il y a deux approches bien établies : le calcul des variations « formel » utilise des espaces de jets infinis, et l'analyse fonctionnelle joue avec des espaces de fonctions et de distributions, où la localisation ne se fait non pas géométriquement, mais par la description de propriétés de régularité locales. Notre excuse était le succès éclatant de la thèse de Douady, qui construisit un « espace de modules » (de dimension finie) en passant par l'intermédiaire d'une variété de dimension infinie.

Pour le calcul différentiel sur les variétés, le salut vint trois fois de Strasbourg. Henri Cartan, dans un effort de récupérer le travail de son père sur les formes différentielles (dites « extérieures » à l'époque) introduisit trois opérateurs sur les formes différentielles : d (dérivation extérieure), i_X (produit intérieur par le champ de vecteurs X), $\mathscr{L}_X$ (dérivée

2. Ceci est en contradiction avec ce que nous avons appris de Sobolev en 1936 pour l'équation des ondes. Les données initiales dans le problème de Cauchy $f(x,0)$ et $\partial_t f(x,0)$ ne peuvent appartenir au même espace de Hilbert.

de Lie) liés par ses six relations, dont

$$\mathscr{L}_X = i_X\, d + d\, i_X$$

où il voulait voir la clé du calcul des variations.

La deuxième contribution vint de Charles Ehresman. Celui-ci avait une imagination conceptuelle prodigieuse ; on lui doit les notions de fibration, fibrés vectoriels, fibrés principaux, espaces de jets, connexions, feuilletages. Il ne manquait que les variétés symplectiques et de Poisson pour disposer de tout l'outillage moderne, qui a rapproché mathématiciens et physiciens théoriciens depuis 40 ans. Ehresman fut le phare des mathématiques à Strasbourg, et joua un rôle important dans la première période de Bourbaki. Il commit malheureusement l'erreur [3] de quitter son cocon culturel franco-allemand pour Paris, où il fut relativement marginalisé, avant sa retraite à Amiens.

Le troisième larron fut Koszul. Il fournit à Bourbaki des rapports sur le calcul différentiel, très condensés et d'accès assez abrupt. Son idée (qui fut adoptée par divers auteurs) est de considérer un champ de tenseurs comme une forme multilinéaire sur le module des champs de vecteurs, et de son dual composé des formes différentielles de degré 1. Une connexion linéaire est décrite par l'opérateur de dérivation covariante ∇_X associé à un champ de vecteurs X. Pour donner un exemple, décrivons le calcul de la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne. La métrique se décrit par le produit scalaire $g(X,Y)$ de deux champs de vecteurs, la connexion par le symbole de Christoffel

$$\Gamma(X,Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z). \tag{1}$$

L'absence de torsion s'écrit $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, d'où

$$\Gamma(X,Y,Z) - \Gamma(Y,X,Z) = g([XY],Z), \tag{2}$$

et l'invariance $\nabla g = 0$ de la métrique s'écrit

$$\mathscr{L}_X g(Y,Z) = \Gamma(X,Y,Z) + \Gamma(X,Z,Y). \tag{3}$$

Voici la solution de ces équations :

$$\begin{aligned} 2\Gamma(X,Y,Z) &= \mathscr{L}_X g(Y,Z) + \mathscr{L}_Y g(Z,X) - \mathscr{L}_Z g(X,Y) \\ &\quad + g([XY],Z) - g([YZ],X) + g([ZX],Y). \end{aligned} \tag{4}$$

Si l'on introduit un système de coordonnées (x^i) et les dérivations partielles correspondantes ∂_i, les crochets $[\partial_i, \partial_j]$ sont nuls et la formule (4) se réduit à celle de Christoffel

$$2\, g_{ak}\, \Gamma^a_{ij} = \partial_i\, g_{jk} + \partial_j\, g_{ik} - \partial_k\, g_{ij}. \tag{5}$$

La présence des crochets de Lie complique la formule (4), mais est bien adaptée à l'étude d'un groupe agissant sur une variété. On a des formules analogues pour la différentielle extérieure, dont voici le cas particulier des formes de degré 1

$$d\,\omega(X,Y) = \mathscr{L}_X\, \omega(Y) - \mathscr{L}_Y\, \omega(X) - \omega([X,Y]). \tag{6}$$

Ces formules sont utilisées par Chevalley et Eilenberg pour définir la cohomologie des algèbres de Lie, un des sujets de prédilection de Koszul.

Dans cette ligne de pensée, on trouve les deux exposés d'Henri Cartan en 1950 lors du colloque de Bruxelles [1]. Il y eut un projet d'article commun à Borel, Cartan, Koszul, Weil, malheureusement mort-né.

Grâce à Cartan et Koszul, on dispose d'un calcul différentiel du premier ordre. Pour passer à l'ordre supérieur, il faudra attendre le Séminaire SGA 3 de Grothendieck dans les années 1960, avec la contribution de Pierre Gabriel.

Merci à Jean-Louis Koszul (et à son maître Henri Cartan) pour avoir balisé le chemin de la géométrie différentielle, de Strasbourg à Grenoble, de ses élégantes pépites.

Références

[1] H. Cartan. « La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ». In : *Colloque de topologie (espaces fibrés)*. Bruxelles. 1950, p. 57–71.

[2] J.-L. Koszul. « Thèses ». *Bulletin de la Société Mathématique de France* **78** (1950), p. 67–125.

3. Commise aussi par des figures politiques alsaciennes telles que Pflimlin et Catherine Trautmann.

Hommage à mon directeur de thèse

• E.-E. Kosmanek

Palais universitaire de Strasbourg, hérité des Allemands, fin juin 1962. Dans un long couloir majestueux, le professeur de mathématiques Jean-Louis Koszul m'interroge sur un ton amical : « Mlle Kosmanek, pourquoi êtes-vous aussi timide ? » Je ne sais que répondre ! Il poursuit, toujours gentiment : « Mais quel âge avez-vous ? » Là, je connais la réponse, je précise : « Vingt ans et demi ». Sa réplique fuse : « Oh, mais vous êtes bien jeune ! » J'avais effectivement un peu d'avance.

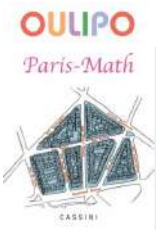
Alors, quand j'ai proposé ma candidature à une inscription en « Troisième cycle » de recherche, récemment créé, Koszul, alors directeur du département de mathématiques (ni UER ni UFR à l'époque), a accepté d'être mon directeur de thèse. Le sujet proposé par le bourbakiste Koszul, en topologie algébrique, ne m'emballait pas à vrai dire. Mais mon respect pour les enseignants m'interdisait toute contestation à l'époque. J'ai donc soutenu le 2 juin 1964, devant un jury composé de Koszul, Berger et Cartier, une thèse de 3e cycle intitulée : « Les bouts des espaces topologiques et des groupes discrets », titre qui intrigua des collègues dont François Pluvinage qui railla : « C'est paillard ? ». Non, c'est sérieux et instructif !

Puis Koszul se transféra à Grenoble pour se rapprocher de ses chères montagnes pour skieur ; il me proposa de le suivre mais là, j'ai osé refuser. Je sentais bien qu'il me fallait changer de sujet et je me suis reconvertie aux mathématiques appliquées à l'économie. Koszul a été nommé par la suite membre correspondant de l'Académie des Sciences, président de la Société Mathématique de France, directeur du laboratoire de Grenoble... Sa création mathématique, le « complexe de Koszul », a fait une belle carrière ; il a eu d'autres thésards. Les formules qu'il a établies ont trouvé récemment des applications en « géométrie de l'information », en relation avec l'informatique. Plusieurs colloques ont été organisés à ce sujet, à l'École des mines notamment. Il y a participé activement bien que nonagénaire.

Koszul est décédé le 12 janvier 2018, à l'âge de 97 ans, honoré comme Officier de l'Ordre National du Mérite et Commandeur des Palmes Académiques. La cérémonie funéraire a eu lieu le 17 janvier au Centre Œcuménique de Grenoble. Son dernier e-mail date du 27 décembre 2017, il m'y parlait de sa santé en rapide déclin et du désagrément consécutif à l'obligation du transfert de son ménage en maison de retraite où l'acclimatation s'avérait difficile, pour son épouse comme pour lui. Mme Koszul, née Denise Reyss-Brion, professeure de lettres, était connue aussi pour la particularité suivante : elle descendait de la famille de Frédérique Brion, laquelle fut au XVIIIe siècle, fugitivement (1770-1771), la petite fiancée du célèbre allemand Wolfgang Goethe, lors de son séjour à Strasbourg pour une année d'études du droit. Les trois enfants du couple, Anne, Bertrand, Michel, sont professeurs de mathématiques, d'anglais et d'histoire.

Encore merci M. Koszul, pour votre amabilité, votre tolérance, votre générosité !

Edith-Edwige Kosmanek, universitaire retraitée
ekosmanek@aol.com



Paris-Math
Oulipo
Cassini, 2017. 304 p. ISBN : 978-2-84225-231-1

On ne présente plus l'OuLiPo – OUvroir de LIttérature POtentielle – ensemble d'écrivains et de mathématiciens qui œuvrent, depuis les années 1960, à inventer de nouvelles contraintes littéraires. Grâce au soutien de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris et du Comité National Français de Mathématiciens et à l'occasion de la candidature de Paris à l'organisation de l'ICM 2022, l'OuLiPo publie chez Cassini un petit livre consacré à quelques relations entre Paris et les mathématiques. Le résultat est une petite merveille de création littéraire.

On ne trouve dans ce « Paris-Math » ni lourdes formules mathématiques, ni portraits chocs de mathématiciens parisiens. Le lien entre Paris et les mathématiques y est presque physique. Les auteurs ont en effet commencé par dresser une liste de toutes les rues de Paris en rapport avec les mathématiques. La liste des rues portant le nom d'un.e mathématicien.ne bien sûr – on apprend d'ailleurs que, même en comptant large, sur les 1700 kilomètres de voies parisiennes seules 18,7 kilomètres portent des noms de mathématicien.ne.s – mais aussi des rues (ou boulevards, ou places...) portant le nom de notions mathématiques comme carré, degré, égalité ou liberté (mais pas fraternité, faut pas pousser quand même) et même d'une notion ayant failli exister : la « cascade » que l'on appelle malheureusement maintenant « suite exacte longue » (quand ce n'est pas « longue suite exacte »). Une fois cette liste constituée, les auteurs, suivant le modèle de Raymond Queneau, sont partis *courir les rues* et en ramener une kyrielle de poèmes.

On l'a dit, le résultat est une petite merveille, il donne aussitôt envie de se lancer, son Paris-Math à la main, à la découverte de toutes ces rues, jamais visitées ou déjà parcourues mais sans les avoir vraiment vues. Les plus courageux se lanceront dans la boucle de 110 km qui débute (et arrive donc, puisque c'est une boucle) rue Raymond Queneau, dans l'arrondissement numéro 18 (nombre de Queneau), passe à mi-parcours par le collège Raymond Queneau et dessine un formidable « portrait géographique » de... Raymond Queneau ! Chaque passage, rue, boulevard ou place de cette déambulation parisienne livre une nouvelle anecdote ou information en rapport avec les mathématiques ou l'OuLiPo : on y croise ainsi Zazie, la ligne S des *Exercices de style*, le collège de pataphysique, le système de vote de Borda ou un certain Clapeyron.

Si, tout comme moi, vous êtes un peu effrayé par les 22 heures de marche du portrait géographique de Raymond Queneau et habitez Paris, vous vous jetterez peut-être d'abord sur les poèmes liés à votre arrondissement. Nul doute que vous y trouverez quelques pépites, telle cette « Rue Coriolis » qui, longeant des rails issus de la gare de Lyon, ne possède que des numéros pairs... ou presque, puisque :

> Tout au bout, en face du numéro (pair) 56, à cause
> de la force de Coriolis, qui fait se courber les rails (de la gare
> de Lyon), on a trouvé la place de mettre un immeuble, entre

la rue et les rails (de la gare de Lyon).
Il y a donc un numéro impair dans la rue Coriolis.
Un seul.
Et cet unique numéro impair est le 19.
Ah.

Ce bout de poème invite à mentionner un autre aspect du livre : son bilinguisme. Un rotation d'angle π autour de l'axe horizontal du livre conduit en effet au même livre mais en traduction anglaise. Et il arrive parfois que la traduction transcende le texte originale :

And so there is a single odd number in the rue de Coriolis.
Just one.
And this single odd number is 19.
Odd indeed.

Le traducteur-oulipien (IM), qui habite dans le 12ème, rend un autre hommage à cet arrondissement puisqu'il s'amuse à répartir douze poèmes, de douze vers de douze mots dans le livre. Le premier, « Rue Lagrange », est une sextine, forme inventée par le grand troubadour Arnaut Daniel au XIII^e^ siècle (en *douze* cent quelque chose donc) : les six vers de chacune des strophes se terminent par les mêmes mots et, d'une strophe à la suivante, ces « mots-rimes » sont échangés par la permutation « en spirale » : [a]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exécuter cette permutation une fois de plus ramènerait à l'ordre initial. On s'arrête donc avant.
On trouve bien sûr beaucoup d'autres exemples de contraintes dans le livre, des septines, quenoums, mongines, pantoums ou lipogrammmes. Tel ce savoureux lipogrammme en e, avec assonances en i, sur Cauchy :

Louis
Augustin Cauchy
naquit
puis
grandit
puis
appris.
Conspira-t-il ?
Louis
Dix-huit
fit
baron Cauchy
l'honorant ainsi.
On vit
alors Cauchy
maints folios noircir
il sommait la fonction sur un contour, divisait par π
puis par i

il formula ainsi
$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)dz}{z-\xi}=f(\xi)$
(où j'ai mis
un ξ).
Ainsi
on nomma ici
à Paris
si, si
un cours Cauchy.

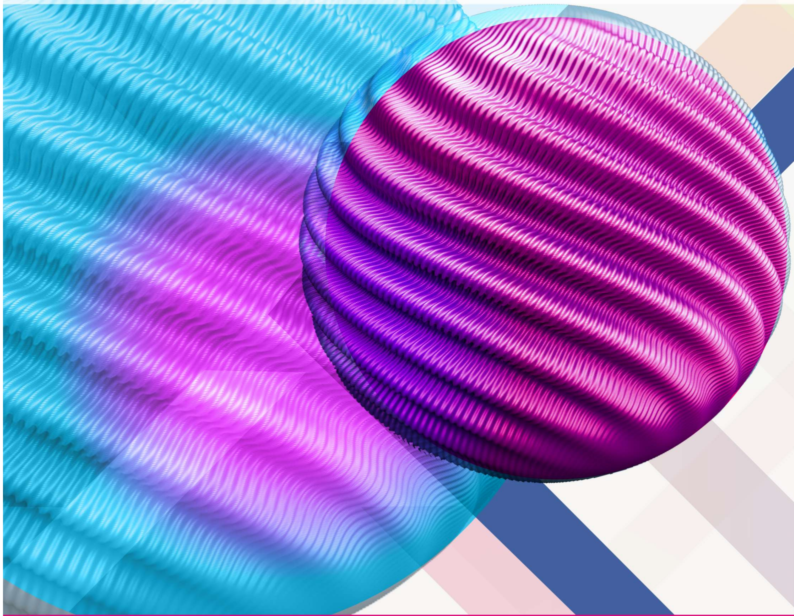
Les maths résonnent décidément autrement dans ce petit livre. Je vous en recommande chaleureusement la lecture !

Nicolas Bergeron
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

a. Cette permutation étant un cycle d'ordre 6, on dit que le chiffre 6 est un nombre de Queneau.

SMF 2018

Demi-journée grand public,
dans le cadre du deuxième congrès de la Société Mathématique de France



Lille 5 Juin 2018

http://smf2018.sciencesconf.org/

- 14 h 30 · Conférence tout public
  de **Vincent Borrelli**
  Université Claude Bernard, Lyon

Trois sphères qui défient l'impossible

- 16 h · Remise des prix d'Alembert et Jacqueline Ferrand
- 17 h · Pot offert aux participants
- 17 h 30 · Table ronde « Liaison lycée - enseignement supérieur »

Société Mathématique de France

Laboratoire Paul Painlevé

@SocMathFr

Lieu : Salle des fêtes de Fives, 91 rue de Lannoy, Lille
Entrée libre sur inscription sur le site web du congrès, rubrique « Demi-journée grand public »

Crédit photo : Crédits des images et vidéos : E. Bartzos, V. Borrelli, R. Denis, F. Lazarus, D. Rohmer, B. Thibert.

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LaTeX *`gztarticle`* fournie par les distributions TeX courantes (TeX Live et MacTeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTeX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TeX à jour.

Classe LaTeX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.