AST

Sur la cohomologie équivariante des variétés différentiables - Pages préliminaires

Astérisque, tome 215 (1993), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__1_0>

215 ASTÉRISQUE

1993

SUR LA COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Michel DUFLO, Shrawan KUMAR, Michèle VERGNE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 19L47 • 22E45 • 57R91

Table des matières.

Introduction 3

I. M. Duflo et M. Vergne. Cohomologie équivariante et descente

Introduction 5

1 Cohomologie équivariante 10
- 1.1 Cohomologie équivariante: définition
- 1.2 Cohomologie équivariante d'un espace homogène
- 1.3 G-algèbres différentielles
- 1.4 Connections
- 1.5 Classes caractéristiques
- 1.6 Algèbre de Weil et cohomologie équivariante
- 1.7 Action libre
- 1.8 Actions principales et espaces homogènes

2 Méthode de descente 35
- 2.1 Groupes presque algébriques
- 2.2 Bottes de fonctions invariantes
- 2.3 Fonctions généralisées et descente
- 2.4 Actions régulières

3 Bottes de classes de cohomologie 48
- 3.1 Germes de formes différentielles équivariantes
- 3.2 Bottes et bouquets de formes différentielles équivariantes
- 3.3 Images réciproques de bottes
- 3.4 Espaces homogènes
- 3.5 Théorie de Chern-Weil

4 Groupe métalinéaire et orientations 63
- 4.1 Transformations infinitésimalement elliptiques
- 4.2 Groupe Pin(V)
- 4.3 Groupe ML(V)
- 4.4 Fibrés G-équivariants et points fixes
- 4.5 Fibrés métalinéaires orientés

5 Bottes de cohomologie équivariante tordue 79
- 5.1 Cohomologie équivariante tordue
- 5.2 Bottes et bouquets de formes équivariantes tordues
- 5.3 Bottes tordues pour le point
- 5.4 Bottes tordues des espaces homogènes

6 Images directes 95
- 6.1 Fibrés euclidiens
- 6.2 Intégration
- 6.3 Fibrés de Clifford

Bibliographie 107

II. S. Kumar and M. Vergne. Equivariant cohomology with generalized coefficients

Introduction 109
1 Notation 114
2 G-equivariant cohomology with generalized coefficients 115
3 Koszul complexes 126
4 Induction of equivariant differential complexes 135
5 Equivariant cohomology of homogeneous spaces 143
6 Künneth formula and applications 155
7 Equivariant cohomology and subgroups 159
8 Reduction to the maximal torus 162
9 The case of a free action 165
10 A spectral sequence for T-equivariant cohomology 184
11 Localization formula 191
12 Appendix – A splitting for $d_{\mathfrak{g}}$ 195
References 203

Summary 205

Introduction

Soit G un groupe de Lie réel opérant dans une variété M. Le complexe de de Rham équivariant et sa cohomologie $H_G^*(M)$ ont été introduits par H. Cartan. Si l'action de G sur M est libre, $H_G^*(M)$ est la cohomologie $H^*(G\backslash M)$ de l'espace des orbites et si M est le point $\bullet$, $H_G^*(\bullet)$ est l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. A chaque fibré G-équivariant sur M muni d'une connection G-invariante sont associées des classes de Chern équivariantes. Il s'est avéré indispensable de considérer des objets cohomologiques plus généraux tels que l'algèbre $H_G^\infty(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients C^∞ qui est une algèbre sur $H_G^\infty(\bullet) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$, et l'espace $H_G^{-\infty}(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients $C^{-\infty}$ qui est un module pour $H_G^\infty(M)$, et pour laquelle $H_G^{-\infty}(\bullet)$ est l'espace des fonctions généralisées invariantes $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$.

Le premier des deux articles réunis ici, *Cohomologie équivariante et descente, par Michel Duflo et Michèle Vergne*, étudie une généralisation, notée $\mathcal{K}_G(M)$, de la cohomologie $H_G^\infty(M)$. C'est une algèbre sur $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$. On peut la considérer comme un analogue global de $H_G^\infty(M)$ et comme une version à la de Rham de la K-théorie équivariante de M. La construction de $\mathcal{K}_G(M)$ est basée sur la considération des points fixes dans M des éléments de G contenus dans un sous-groupe compact. Tout au moins lorsque G lui-même est compact, et sous certaines conditions d'orientation, "l'intégrale" sur M d'un élément de $\mathcal{K}_G(M)$ est une fonction G-invariante sur G.

Le deuxième article, *Equivariant cohomology with generalized coefficients, par Shrawan Kumar et Michèle Vergne*, entreprend une étude systématique des espaces $H_G^{-\infty}(M)$. On découvre des classes remarquables qui n'ont pas d'équivalent dans la théorie C^∞. En particulier lorsque l'action de G sur M est libre, l'intégrale sur M d'un élément de $H_G^{-\infty}(M)$ est une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$ de support 0. Lorsque G est compact, une suite spectrale permet de comparer $H_G^{-\infty}(M)$ et la cohomologie équivariante $H_G^*(M)$.

Les deux articles, bien qu'ayant des motivations communes, peuvent être lus indépendamment.

Astérisque

MICHEL DUFLO

MICHÈLE VERGNE

Cohomologie équivariante et descente

Astérisque, tome 215 (1993), p. 5-108

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__5_0>

Cohomologie équivariante et descente

Michel Duflo et Michèle Vergne

Introduction.

Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On suppose que le groupe G agit sur une variété M. Dans cet article nous étudions un procédé pour construire des fonctions centrales sur G basé sur l'intégration de formes différentielles équivariantes sur M et sur la méthode de descente.

La motivation de ce travail est la suivante: dans certains cas, on sait associer à l'action de G sur M et à la donnée d'un fibré G-équivariant $\mathcal{L} \to M$ un espace de Hilbert $H(M, \mathcal{L})$ et une représentation traçable $T_{\mathcal{L}}$ de G dans $H(M, \mathcal{L})$. La trace $\operatorname{Tr} T_{\mathcal{L}}(g)$ de la représentation $T_{\mathcal{L}}$ est alors une fonction généralisée centrale sur G. On peut souvent donner une formule pour le caractère $\operatorname{Tr} T_{\mathcal{L}}(g)$ de la représentation $T_{\mathcal{L}}$ en fonction de la cohomologie équivariante de M et du caractère de Chern de $\mathcal{L}$. Les formules données par exemple dans [8], [18], [12] sont une généralisation des formules de points fixes d'Atiyah-Segal-Singer [3] combinées avec la formule universelle des caractères de Kirillov [26]. Dans [31] nous utilisons les notions introduites dans cet article pour donner une formule universelle pour le caractère $\operatorname{Tr} T_{\mathcal{L}}(g)$.

Nous considérons ici une action régulière d'un groupe presque algébrique G sur une variété M (voir la définition 51 dans la section 2.4). Les exemples d'actions régulières incluent l'action d'un groupe compact sur une variété compacte et l'action d'un groupe algébrique sur une variété algébrique. Nous associons à une action régulière de G sur M un espace $\mathcal{K}_G(M)$ de cohomologie équivariante globale. Soit $\bullet$ un point. Alors on a $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$ et l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ est un module sur $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$.

Pour définir la notion d'intégration, il est nécessaire d'introduire un espace $\mathcal{K}_G(M)_t$ de cohomologie équivariante globale tordue (l'indice t est pour "tordu"). Alors, tout au moins si G et M sont compacts, l'intégration définit une application $\mathcal{K}_G(M)_t \to C^\infty(G)^G$.

Décrivons les notions introduites et les résultats de cet article plus précisément. Introduisons quelques notations. Si M est une variété différentiable, on note $\mathcal{A}(M) = \bigoplus_i \mathcal{A}^i(M)$ l' algèbre des formes différentielles à valeurs complexes sur M. Si M est orientée, et si $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ est à support compact, on note $\int_M \alpha = \int_M \alpha_{[\dim M]}$ l'intégrale de son terme de degré maximal. Cependant, il n'est pas toujours naturel de choisir une orientation, ni même de supposer M

orientable. Considérons la variété $\tilde{M}$ dont les éléments sont des couples (m, o), où m est dans M et où o est une orientation de l'espace tangent $T_m(M)$. C'est un revêtement d'ordre 2 de M, le groupe $\mathbb{Z}^\times = \{+1, -1\}$ opère dans $\tilde{M}$ de sorte que $\tilde{M}$ est un fibré principal de base M. Notons ε l'action de -1 dans $\tilde{M}$. On note encore ε l'action induite dans les formes différentielles sur $\tilde{M}$. On peut identifier $\mathcal{A}(M)$ à la sous-algèbre des éléments $\omega \in \mathcal{A}(\tilde{M})$ tels que $\varepsilon(\omega) = \omega$. On note $\mathcal{A}(M)_t$ l'espace des éléments $\omega \in \mathcal{A}(\tilde{M})$ tels que $\varepsilon(\omega) = -\omega$. C'est un module sur $\mathcal{A}(M)$, stable par la différentielle de de Rham de $\mathcal{A}(\tilde{M})$. Un élément de $\mathcal{A}(M)_t$ sera appelé une forme différentielle tordue. Les formes différentielles tordues de degré maximum sont aussi appelées densités. On notera $\int_M \beta = \int_M \beta_{[\dim M]}$ l'intégrale d'un élément $\beta \in \mathcal{A}(M)_t$ à support compact.

Soit M une variété différentiable sur laquelle G opère. Soit U un voisinage ouvert G-invariant de 0 dans $\mathfrak{g}$. Soit $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ l'algèbre des formes $X \mapsto \alpha(X)$ sur M dépendant de manière différentiable de $X \in U$. Soit $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ la sous-algèbre de $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ formée des éléments G-invariants. C'est une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On sait que $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ est munie d'une dérivation impaire de carré nul, notée $d_\mathfrak{g}$. Un élément de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ sera appelé une forme équivariante. On notera $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. Si $M = \bullet$ est un point, on a $\mathcal{H}_G^\infty(\bullet) = C^\infty(U)^G$. (Ces notions sont redéfinies dans la section 1.1).

L'action de G se relève de manière canonique en une action dans $\tilde{M}$ commutant à ε. L'espace des éléments $\omega \in \mathcal{A}_G^\infty(U, \tilde{M})$ tels que $\varepsilon(\omega) = -\omega$ sera noté $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$. C'est l'espace des formes différentielles équivariantes tordues (pour le fibré tangent). Il est stable par $d_\mathfrak{g}$. C'est un module différentiel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué sur l'algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. Soit $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_t$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$ (ces notions font l'objet de la section 5.1). Supposons pour un moment M compacte. Soit $\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t$ une forme équivariante tordue. L'intégrale $\int_M \beta(X)$ sur M définit une fonction différentiable et G-invariante dans U. Si l'application exponentielle est un difféomorphisme dans U, on obtient par composition une fonction différentiable et centrale dans l'ouvert $\exp(U)$ de G. Cette fonction ne dépend que de la classe de β modulo $d_\mathfrak{g}(\mathcal{A}_G^\infty(U, M)_t)$. Donc si β est fermée, cette fonction ne dépend que de la classe de β dans $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)_t$.

L'origine de cet article vient de l'observation suivante. Soit G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G (cette notion est définie dans la section 2.1; si G est compact, $G_{ell} = G$). Soit $s \in G_{ell}$ et soit $G(s)$ le centralisateur de s. Soit $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie de $G(s)$. Pour $s \in G_{ell}$ notons $M(s)$ l'ensemble des points fixes de s dans M. C'est une sous-variété de M dans laquelle $G(s)$ opère. On choisit pour chaque $s \in G_{ell}$ un voisinage U_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ et une classe $\beta_s \in \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(U_s, M_s)_t$. La fonction $\int_{M(s)} \beta_s(X)$ définie pour $X \in U_s$ est invariante par $G(s)$. Si les choix sont bien faits, il existe une unique fonction centrale Θ sur G telle que pour $X \in U_s$ on ait

$$\Theta(se^X) = \int_{M(s)} \beta_s(X).$$

Nous nous sommes interrogés sur les conditions que la famille β_s doit satisfaire pour assurer l'existence de la fonction Θ. Considérons tout d'abord le cas où M est un point • La description de Θ revient à utiliser la *méthode de descente*. Si f_s est une fonction différentiable $G(s)$-invariante sur U_s, alors il est facile de déterminer les conditions que doit satisfaire la famille $(f_s)_{s\in G_{ell}}$ pour qu'il existe une fonction Θ différentiable et G-invariante sur G telle que

$$f_s(X) = \Theta(se^X)$$

pour $X \in U_s$. Tout d'abord le système de fonctions f_s doit satisfaire la condition d'invariance suivante:

$$f_{gsg^{-1}}(g \cdot X) = f_s(X) \tag{1}$$

pour tout $s \in G_{ell}$ et tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit. D'autre part, il est clair que si $S \in \mathfrak{g}(s)$ est une transformation elliptique et si $Y \in \mathfrak{g}(s)$ commute à S on doit avoir

$$f_s(S+Y) = \Theta(se^{S+Y}) = \Theta(se^S e^Y)$$

(si S et Y sont assez petits). Les fonctions f_s satisfont donc la relation de recollement suivante

$$f_s(S+Y) = f_{se^S}(Y) \tag{2}$$

pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)$ elliptique et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)$ commutant à S assez petits.

Réciproquement, si les ouverts U_s sont des ouverts elliptiques (voir la définition 35 d'ouverts elliptiques dans la section 2.2) et si $(f_s)_{s\in G_{ell}}$ est une famille de fonctions différentiables définies sur un voisinage elliptique U_s de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ satisfaisant les relations (1) et (2) d'invariance et de recollement, il existe une unique fonction différentiable Θ centrale définie dans G tout entier telle que $f_s(X) = \Theta(se^X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ (ceci est expliqué dans la section 2.2).

Soit M une variété munie d'une action régulière de G. On définit dans la section 3.2 l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ des bottes de classes de cohomologie équivariante. Un élément de $\mathcal{K}_G(M)$ est une famille $\alpha = (\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ de classes de cohomologie $G(s)$-équivariantes sur $M(s)$ (définies sur U_s) satisfaisant des conditions d'invariance et de recollement données précisément dans la définition 61. Enonçons succinctement la condition de recollement que nous imposons: soit $s \in G_{ell}$ et soit $S \in \mathfrak{g}(s)$ une transformation elliptique petite. Alors $G(se^S)$ est contenu dans $G(s)$ et comme l'action de G sur M est régulière, la sous-variété $M(se^S)$ est contenue dans $M(s)$. Pour tout $s \in G_{ell}$ soit $\tilde{\alpha}_s \in \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(U_s, M(s))$ une forme différentielle équivariante fermée représentant α_s. Considérons l'opérateur de translation $T_{s,S}$ défini par $(T_{s,S}\tilde{\alpha}_s)(X) = \tilde{\alpha}_s(S+X)|M(se^S)$ pour $X \in \mathfrak{g}(se^S)$ petit. La forme $T_{s,S}\tilde{\alpha}_s$ est une forme $G(se^S)$-équivariante fermée sur $M(se^S)$. Nous demandons l'égalité *en cohomologie* et sur un petit voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(se^S)$

$$T_{s,S}\tilde{\alpha}_s \cong \tilde{\alpha}_{se^S}. \tag{3}$$

J.Block et E.Getzler [10] ont étudié pour l'action d'un groupe compact G sur une variété compacte M un espace $\mathcal{K}'_G(M)$ où les conditions de recollement sont imposées au niveau des formes différentielles. Ils montrent que l'espace $\mathcal{K}'_G(M)$ s'identifie à la cohomologie cyclique équivariante de M. Il est probable que l'application naturelle $\mathcal{K}'_G(M) \to \mathcal{K}_G(M)$ est un isomorphisme.

On peut déterminer l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ dans diverses situations. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G. Supposons que la fibration principale $G \to G/H$ admette une connection G-invariante. On dira alors que G/H est un espace homogène réductif. On obtient comme cas particulier du théorème 64 de la section 3.4 un isomorphisme:

$$\mathcal{K}_G(G/H) \cong C^\infty(H)^H.$$

Ce résultat est l'analogue d'un résultat décrivant la cohomologie équivariante de M en terme de fonctions H-invariantes sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, bien connu lorsque H est compact, et que nous démontrons ici dans la section 1.8 dans le cas réductif.

Soit $P \to P/H$ un fibré principal de groupe H et soit G un groupe de Lie agissant à gauche sur P (avec une action commutant à l'action à droite de H). Sous certaines hypothèses de compacité, nous montrons dans la section 3.5 que $\mathcal{K}_G(P/H)$ est isomorphe à $\mathcal{K}_{G\times H}(P)$.

Supposons qu'il existe une connection G-invariante pour la fibration $P \to P/H$. En adaptant la construction de Chern-Weil en cohomologie équivariante [16] [7], on définit dans la proposition 69 l' homomorphisme de Chern-Weil

$$W : C^\infty(H)^H \to \mathcal{K}_G(P/H).$$

En particulier le caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mathcal{L})$ d'un fibré G-équivariant $\mathcal{L} \to M$ muni d'une connection G-invariante est un élément de $\mathcal{K}_G(M)$. Si M et G sont compacts, nous pensons que le caractère de Chern induit un isomorphisme

$$\mathrm{ch} : C^\infty(G)^G \otimes_{R(G)} K_G(M) \to \mathcal{K}_G(M),$$

où $K_G(M)$ est l'espace de K-théorie équivariante de M et $R(G) \subset C^\infty(G)^G$ l'espace des caractères des représentations de dimension finie de G. Ceci résulte probablement de [10] puisque dans cet article cet isomorphisme est démontré pour le groupe $\mathcal{K}'_G(M)$.

On définit dans la section 5.2 la notion de *botte de classes de cohomologie équivariantes tordues*: c'est une fonction qui à $s \in G_{ell}$ associe un élément $\alpha_s \in \mathcal{H}^\infty_{G(s)}(U_s, M(s))_t$, vérifiant un certain nombre de conditions (voir la définition 108) d'invariance et de recollement presque identiques à celles définissant l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ mais faisant aussi intervenir une orientation du fibré normal à la variété des zéros de S dans $M(s)$. Plus généralement pour tout fibré G-équivariant réel $\mathcal{V} \to M$, on définit l'espace $\mathcal{K}^{\mathcal{V}}_G(M)$ des classes de cohomologie équivariante tordue par rapport au fibré $\mathcal{V}$ ainsi que l'espace $\mathcal{K}^{\mathcal{V}}_{cpt,G}(M)$ des bottes à support compact sur M. Le cas $\mathcal{K}_G(M)_t$ précédent est le cas particulièrement important où $\mathcal{V}$ est le fibré tangent à M. Si le fibré $\mathcal{V}$ est orienté et muni d'une structure métalinéaire (par exemple un fibré spinoriel) l'espace $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{K}_G(M)$ (proposition 111). Les propriétés des fibrés métalinéaires dont nous avons besoin pour établir cet isomorphisme font l'objet de la section 4.

Considérons le cas d'un point $\bullet$. Un fibré G-équivariant sur $\bullet$ est simplement la donnée d'une représentation $\lambda : G \to \mathrm{GL}(V)$. Supposons, pour simplifier, que λ soit à valeurs dans le sous-groupe $\mathrm{GL}(V)^+$ des transformations linéaires inversibles de V dont le déterminant est strictement positif. Il existe un revêtement canonique à deux feuillets $\mathrm{ML}(V)^+$ de $\mathrm{GL}(V)^+$. Soit $G_V \to G$ l'image réciproque de ce revêtement par l'application λ. Alors l'espace $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ est isomorphe à l'espace des fonctions centrales impaires différentiables sur G_V (c'est le théorème 121 de la section 5.3).

Lorsque $M = G/H$ est un espace homogène réductif et lorsque $\mathcal{V} = G \times_H V$ est un fibré associé à une représentation $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)^+$, l'espace $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ des bottes de classes de cohomologie équivariante tordues pour $\mathcal{V}$ est isomorphe à l'espace des fonctions centrales impaires différentiables sur le revêtement à deux feuillets H_V de H (c'est le théorème 123 de la section 5.4).

Par exemple, soient G un groupe semi-simple ayant un nombre fini de composantes connexes, f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$, H son stabilisateur dans G, $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie, $M = G.f = G/H$ l'orbite (co-adjointe) de f dans le dual de $\mathfrak{g}$ et $TM = G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ le fibré tangent. Dans ce cas, $H_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est isomorphe au revêtement $\tilde{H}$ de H défini dans [17]. On suppose M fermée de sorte que G/H est réductif. Soit τ une représentation irréductible de $\tilde{H}$, impaire et dont la différentielle est la restriction de if à $\mathfrak{h}$. (S'il existe une telle représentation, on dit que f est admissible). La représentation τ est de dimension finie et son caractère est une fonction impaire centrale sur $\tilde{H}$. Il lui correspond donc une botte $\alpha_{f,\tau}$ de formes équivariantes tordues sur M.

Revenons au problème initial d'intégration. Lorsque $M \to B$ est une fibration G-équivariante de fibré tangent vertical $\mathcal{V}$ on peut définir, tout au moins si G est compact, une application p_* d'image directe

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}} \to \mathcal{K}_{cpt,G}(B).$$

La définition de p_* fait l'objet de la section 6.2. Elle imite la définition de l'application p_* en K-théorie donnée par Atiyah-Hirzebruch. Elle nécessite l'introduction (voir la section 6.1) de genres équivariants, comme le genre associé à la fonction $\det{}^{1/2}(\frac{X/2}{\sinh(X/2)})$. En particulier, si B est un point et si M est une variété compacte orientée spinorielle de dimension paire, de sorte que $\mathcal{K}_G(M)_t$ est isomorphe à $\mathcal{K}_G(M)$, l'image $p_*(\mathrm{ch}(\mathcal{E}))$ du caractère de Chern d'un fibré G-équivariant est le caractère de la représentation virtuelle de G donnée par l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac $D_{\mathcal{E}}$ de M tordu par $\mathcal{E}$ (voir [2],[3],[4],[5]).

La formule de localisation de J.M.Bismut le long des fibres [9] (que nous redémontrons dans la proposition 106 de la section 5.1) permet de montrer l'existence de l'application p_* (théorème 134).

Si $M = \mathcal{V}$ est un fibré vectoriel sur B, l'application p_* est un isomorphisme. C'est l'analogue de l'isomorphisme de Thom en K-théorie équivariante démontré par Karoubi [25].

Si $p : M \to \bullet$ est l'application sur un point, on obtient donc une application

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}(M)_t \to \mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G.$$

Il est utile de considérer des variétés M non compactes. Dans certains cas, si les intégrales veulent bien converger au sens des distributions, on pourra encore associer à une botte de formes équivariantes tordues sur M une fonction généralisée invariante sur le groupe G. Le cas de la variété $M = G \cdot f$ et de la botte $\alpha_{f,\tau}$ est particulièrement important. Dans [31] nous définissons par le même formalisme

$$\Theta_{f,\tau} = \int_M \alpha_{f,\tau}$$

lorsque M est une orbite fermée. La fonction $\Theta_{f,\tau}$ est une fonction généralisée centrale sur G. C'est le caractère de la représentation unitaire irréductible $T_{f,\tau}$ de G associée à ces données (ceci est démontré dans [18] et [12] si M est de dimension maximale).

On voit que notre ambition est de donner des procédés géométriques de construction de caractères de représentations unitaires associées à l'action d'un groupe opérant dans une variété munie de quelques structures supplémentaires.

Nous sommes heureux de remercier Yves Benoist, Max Karoubi et Mustapha Rais pour leur aide.

1 Cohomologie équivariante.

Nous commençons par préciser quelques résultats sur la cohomologie équivariante à coefficients C^∞ d'une G-variété M.

Dans toute la suite, variété signifie variété C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, séparée et séparable. Soit M une variété. Rappelons les notations concernant les formes différentielles. On note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions C^∞ sur M à valeurs complexes et $C^\infty_{cpt}(M)$ le sous-espace des fonctions à support compact. On note $\mathcal{A}(M) = \bigoplus_i \mathcal{A}^i(M)$ l' algèbre des formes différentielles à valeurs complexes sur M. On note $\mathcal{A}_{cpt}(M)$ l'espace des formes différentielles à support compact. Pour $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ on note $\alpha = \sum_i \alpha_{[i]}$ sa décomposition en une somme d'éléments homogènes $\alpha_{[i]} \in \mathcal{A}^i(M)$.

On note $d : \mathcal{A}^*(M) \to \mathcal{A}^{*+1}(M)$ la différentielle extérieure. Si ξ est un champ de vecteurs sur M, on note $\iota(\xi) : \mathcal{A}^*(M) \to \mathcal{A}^{*-1}(M)$ la contraction par le champ de vecteurs ξ. Les applications d et $\iota(\xi)$ sont des dérivations de carré nul de $\mathcal{A}(M)$. On note $\mathcal{L}(\xi) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$ l'action de ξ sur $\mathcal{A}(M)$ par dérivation de Lie. Les opérateurs $\iota(\xi), d, \mathcal{L}(\xi)$ vérifient la relation de Cartan

$$(4) \qquad d\iota(\xi) + \iota(\xi)d = \mathcal{L}(\xi).$$

On note d_ξ la dérivation $d_\xi = d - \iota(\xi)$ de $\mathcal{A}(M)$.

Si V est un espace vectoriel, on note ΛV l'algèbre extérieure de V et $S(V)$ l'algèbre symétrique. Si G est un groupe opérant linéairement dans V, on note V^G le sous-espace des points fixes.

Dans cet article, les formules sont numérotées indépendamment des propositions.

Remarque. Dans cet article, les algèbres considérées sont naturellement graduées sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et nous respectons la règle des signes dans la définition des produits tensoriels, des dérivations, etc...

1.1 Cohomologie équivariante: définition.

Supposons M munie d'une action différentiable du groupe de Lie G. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour $X \in \mathfrak{g}$ on note X_M le champ de vecteurs sur M donné au point $m \in M$ par

$$X_M(m) = \frac{d}{d\varepsilon} \exp(-\varepsilon X) \cdot m|_{\varepsilon=0}. \tag{5}$$

Si X est dans $\mathfrak{g}$, on posera $d_X = d_{X_M}$.

Soit $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. En plus de la graduation par le degré des formes différentielles, on introduit une seconde graduation dans l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ par

$$\deg(P \otimes \alpha) = 2 \deg P + \deg \alpha \tag{6}$$

si $P \in S(\mathfrak{g}^*)$ et $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ sont des éléments homogènes. Nous dirons que le degré défini par (6) est le degré total.

Soit $X \mapsto \alpha(X)$ un élément de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$. On note ι (où $\iota_\mathfrak{g}$ s'il faut préciser) la dérivation de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ telle que

$$\iota(\alpha)(X) = \iota(X_M)(\alpha(X)). \tag{7}$$

Soit E_i une base de $\mathfrak{g}$ et soit $x^i \in \mathfrak{g}^*$ la base duale. On considère x^i comme une fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}$ et on note encore x^i la multiplication par x^i dans $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$. On a donc

$$\iota = \sum_i x^i \iota((E_i)_M).$$

On définit un opérateur $d_\mathfrak{g}$ sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ par

$$(d_\mathfrak{g}\alpha)(X) = d_X(\alpha(X)).$$

L'opérateur $d_\mathfrak{g}$ s'écrit donc comme différence de deux dérivations de carré nul de l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$:

$$d_\mathfrak{g} = d - \iota. \tag{8}$$

C'est une dérivation impaire de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$. Elle augmente de 1 le degré total.

Le groupe G opère sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ par produit tensoriel de l'action adjointe sur $S(\mathfrak{g}^*)$ et de l'action donnée sur $\mathcal{A}(M)$. Soit

$$\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M) = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M))^G$$

la sous-algèbre des G-invariants. L'opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ laisse stable la sous-algèbre $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. La relation de Cartan (4) implique que $d_{\mathfrak{g}}^2$ est nul sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On note $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)$ la cohomologie de l'algèbre différentielle $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M), d_{\mathfrak{g}})$. C'est l'espace de *cohomologie équivariante* de la G-variété M. Lorsque G est compact et connexe, c'est la cohomologie équivariante usuelle de M [15] [16].

Soit U un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Soit $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ l'algèbre des formes $\alpha(X)$ sur M dépendant de manière C^∞ de $X \in U$. Le groupe G agit sur $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ par $(g \cdot \alpha)(X) = g \cdot (\alpha(g^{-1} \cdot X))$ pour $g \in G$, $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$, $X \in \mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{A}_G^\infty(U, M) = (C^\infty(U, \mathcal{A}(M)))^G$ la sous-algèbre des formes équivariantes.

On définit un opérateur $d_{\mathfrak{g}}$ sur $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ par

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_X(\alpha(X)).$$

Les formes équivariantes telles que $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$ sont appelées formes fermées équivariantes. Celles de la forme $d_{\mathfrak{g}}\beta$ avec $\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ sont appelées exactes. On note $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ la cohomologie $\ker d_{\mathfrak{g}} / \operatorname{Im} d_{\mathfrak{g}}$ de $\mathcal{A}_G^\infty(U, M)$. C'est une algèbre, graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais pas sur $\mathbb{Z}$ en général.

Soit N une autre variété dans laquelle G opère. Soit ϕ un morphisme G-équivariant de M dans N. L'image réciproque ϕ^* induit un morphisme d'algèbres de $\mathcal{H}_G^\infty(U, N)$ dans $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ et $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ est une algèbre sur $\mathcal{H}_G^\infty(U, N)$.

Exemple 1 *Si $N = \bullet$ est un point, $\mathcal{H}_G^\infty(U, \bullet)$ est égal à $C^\infty(U)^G$.*

En particulier, $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ est une algèbre sur $C^\infty(U)^G$. Explicitons cette structure. Soit $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ une forme équivariante sur M. Soit $\theta \in C^\infty(U)^G$. Alors $\theta\alpha$ est la forme définie par la formule $(\theta\alpha)(X) = \theta(X)\alpha(X)$ pour tout $X \in U$.

Si $\phi : H \to G$ est un homomorphisme de groupes et si on note aussi ϕ l'application $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ différentielle de ϕ, alors ϕ induit une application

$$\phi^* : \mathcal{H}_G^\infty(U, M) \to \mathcal{H}_H^\infty(\phi^{-1}(U), M).$$

1.2 Cohomologie équivariante d'un espace homogène.

Soit G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe fermé de G. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie. On considère l'espace homogène $M = G/H$. On note e le point $\{H\}$ de M. Bien que ce ne soit pas vraiment nécessaire dans la suite, il est agréable d'expliciter la forme des opérateurs $d, \iota, d_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$.

Nous commençons par donner une autre description de l'algèbre différentielle $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On identifie l'espace tangent $T_e(M)$ à M au point e à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de la manière usuelle. Soit π la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Il résulte de la formule (5) que l'on a $X_M(e) = -\pi(X)$. L'espace cotangent à M au point $e \in M = G/H$ est égal à $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$ une application polynomiale G-invariante de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{A}(M)$. Soient $\xi_1, .., \xi_p$ des éléments de $T_e(M)$, $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$. Avec les notations évidentes, on a, à cause de l'équivariance,

$$(\alpha_{[p]}(Ad(g)(X))_{g\cdot e}(g \cdot \xi_1, ..., g \cdot \xi_p) = \alpha_{[p]}(X)_e(\xi_1, ..., \xi_p).$$

Posons $\tilde{\alpha}(X) = \alpha(X)_e$. Donc $\tilde{\alpha}$ est une application polynomiale de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ et l'on a

$$\alpha_{[p]}(X)_{g\cdot e}(\xi_1, ..., \xi_p) = \tilde{\alpha}_{[p]}(Ad(g^{-1})(X))(g^{-1} \cdot \xi_1, ..., g^{-1} \cdot \xi_p).$$

Cette formule montre que l'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$ sur l'algèbre $(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ formée des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ qui sont H-invariantes.

Nous poserons $T = S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$ et $T_H = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$. On a donc $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M) \cong T_H$.

Considérons la dérivation ι de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On notera $\tilde{\iota}$ la dérivation de T_H qui lui correspond. Soit $\tilde{\alpha} \in T_H$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. On a $\tilde{\iota}\tilde{\alpha}(X) = -\iota(\pi(X))\tilde{\alpha}(X)$. Fixons une base $E_1, ..., E_s$ de $\mathfrak{g}$ telle que les vecteurs $E_1, ..., E_r$ forment une base de $\mathfrak{h}$. Notons x^i les fonctions coordonnées correspondantes. Les x^i avec $i > r$ forment une base de l'espace $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$, identifié à l'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$. Posons

$$j = \sum_{i>r} x^i \iota(\pi E_i).$$

C'est une dérivation de carré nul de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ et $\tilde{\iota}$ est la restriction de $-j$ au sous-espace T_H.

Considérons l'opérateur d sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$. On notera $\tilde{d}$ la dérivation correspondante de T_H.

Rappelons la définition de Koszul d'un complexe calculant la cohomologie de $\mathfrak{g}$ dans un $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{V}$. Soit $\alpha \in \mathcal{V} \otimes \Lambda^p\mathfrak{g}^*$. On définit $\delta\alpha \in \mathcal{V} \otimes \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^*$ par la formule

$$(9) \qquad (\delta\alpha)(X_1, ..., X_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} X_i \cdot \alpha(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{p+1})$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{p+1}),$$

où X_1,..., X_{p+1} sont des éléments de $\mathfrak{g}$. La cohomologie du complexe $\mathcal{V}\otimes\Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*$ est isomorphe à la cohomologie $H^\bullet(\mathfrak{g},\mathcal{V})$. Soit $\mathcal{V}$ un $\mathfrak{g}-H$-module. Ceci signifie que $\mathcal{V}$ est un H-module différentiable et un $\mathfrak{g}$-module, que la différentielle de l'action de H est la restriction à $\mathfrak{h}$ de l'action de $\mathfrak{g}$, et que les actions sont compatibles: $h\cdot(Xv) = (\mathrm{Ad}(h)(X))\cdot hv$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$, $h\in H$ et $v\in\mathcal{V}$. Par exemple, un G-module différentiable $\mathcal{V}$ est muni canoniquement d'une telle structure. Alors le sous-espace $(\mathcal{V}\otimes\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ de $\mathcal{V}\otimes\Lambda\mathfrak{g}^*$ est stable par δ. Par définition la cohomologie relative $H^\bullet(\mathfrak{g},H,\mathcal{V})$ est la cohomologie de $(\mathcal{V}\otimes\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$ muni de la différentielle δ.

On considère la dérivation de Koszul δ dans $T_H = (S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^H$, où $S(\mathfrak{g}^*)$ est considéré comme G-module grâce à l'action adjointe de G.

Lemme 2 *On a* $\tilde{d} = \delta$.

Démonstration. En considérant la projection de G sur G/H, on voit qu'il suffit d'établir l'assertion lorsque $M = G$. Nous supposons donc dans la suite de cette démonstration que l'on est dans ce cas.

Soit α une application polynomiale G-invariante de $\mathfrak{g}$ dans les formes différentielles de degré p sur G, et soit $\tilde{\alpha}$ la fonction de $\mathfrak{g}$ dans $\Lambda^p\mathfrak{g}^*$ obtenue en évaluant α au point e de G. Soient X_1,..., X_{p+1} des éléments de $\mathfrak{g}$. On note par la même lettre les champs de vecteurs invariants à gauche sur G qui prolongent ces éléments. Pour $X\in\mathfrak{g}$ et $g\in G$, on a donc

$$\alpha(X)_g(X_1,...,X_p) = \tilde{\alpha}(Ad(g^{-1})(X))(X_1,...,X_p).$$

On en déduit

$$X_1\cdot(\alpha(X)(X_2,...,X_{p+1})) = \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{\alpha}(Ad(\exp-\varepsilon X_1)(X))(X_2,...,X_{p+1})|_{\varepsilon=0}.$$

Le lemme s'obtient en comparant la formule (9) avec la formule bien connue pour $d(\alpha(X))$:

$$\text{(10)}\qquad d(\alpha(X))(X_1,...,X_{p+1}) = \sum_i(-1)^{i+1}X_i\cdot(\alpha(X)(X_1,...,\hat{X}_i,...,X_{p+1})) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha(X)([X_i,X_j],X_1,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_{p+1}).$$

Ceci termine la démonstration. ∎

Notons $\tilde{d}_\mathfrak{g}$ l'opérateur dans T_H correspondant à $d_\mathfrak{g}$.

Corollaire 3 *On a* $\tilde{d}_\mathfrak{g} = j+\delta$.

En particulier, on a $(j+\delta)^2 = 0$ sur T_H ce qui peut aussi se voir directement.

1.3 G-algèbres différentielles.

Il sera utile de généraliser la notion de cohomologie équivariante d'une variété en la notion de cohomologie équivariante d'une G-algèbre en remplaçant l'algèbre $\mathcal{A}(M)$ par une G-algèbre abstraite.

Définition 4 *Dans cet article, une algèbre de Fréchet A est une algèbre associative sur $\mathbb{R}$, à élément unité, graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, supercommutative, munie d'une structure d'espace vectoriel topologique qui en fait un Fréchet et pour laquelle la multiplication est continue (comme application de $A \times A$ dans A). Une algèbre de Fréchet différentielle est une algèbre de Fréchet munie d'une dérivation impaire continue de carré nulle (notée d ou d_A). On note $H(A)$ ou $H(A, d)$ l'algèbre d'homologie correspondante. Si elle est séparée, c'est une algèbre de Fréchet graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, supercommutative.*

Exemple 5 *Soit M une variété. Alors l'algèbre $C^\infty(M)$ (munie de la différentielle nulle et de la graduation triviale) et l'algèbre de de Rham $\mathcal{A}(M)$ des formes différentielles sont des algèbres différentielles.*

Si V et W sont des espaces de Fréchet, notons $V\hat{\otimes}W$ le produit tensoriel projectif complété, au sens de Grothendieck. Par exemple, si $V = C^\infty(M)$ comme ci-dessus, $V\hat{\otimes}W$ est canoniquement égal à l'espace $C^\infty(M, W)$ des applications différentiables de M dans W (voir [29], p 533). Si T est un endomorphisme continu de V on note encore T l'endomorphisme continu de $V\hat{\otimes}W$ prolongeant $T \otimes 1$. De même, si T est un endomorphisme continu de W, et si V et W sont gradués sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on note encore T l'endomorphisme continu de $V\hat{\otimes}W$ prolongeant l'endomorphisme $v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||T|} v \otimes Tw$.

Si A et B sont des algèbres de Fréchet différentielles, $A\hat{\otimes}B$ devient une algèbre de Fréchet différentielle en définissant la différentielle comme $d_A + d_B$ et la multiplication comme d'habitude, avec la règle des signes.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Considérons une représentation différentiable (à gauche) de G dans un espace de Fréchet V. On note $\mathcal{L}_V(X)$ l'endomorphisme de V associé à un élément $X \in \mathfrak{g}$.

Soit A une algèbre de Fréchet différentielle. Nous dirons que G opère sur A, ou que A est une G-algèbre, si l'on s'est donné une représentation différentiable de G dans A respectant le produit, la graduation et la différentielle de A, et une application linéaire $X \mapsto \iota_A(X)$ de $\mathfrak{g}$ dans les dérivations impaires continues de A, vérifiant les relations de Cartan [15]

$$(11) \qquad [d, \iota_A(X)] = \mathcal{L}_A(X), \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g},$$

$$(12) \qquad g \circ \iota_A(X) \circ g^{-1} = \iota_A(g \cdot X), \qquad \text{pour tout } g \in G,\ X \in \mathfrak{g},$$

$$(13) \qquad \iota_A(X)^2 = 0, \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

Par exemple, si G opère à gauche dans une variété différentiable M, l'algèbre $A = \mathcal{A}(M)$ devient une G-algèbre pour laquelle $\iota_A(X) = \iota(X_M)$ et $\mathcal{L}_A(X) = \mathcal{L}(X_M)$.

De même, si G opère à droite sur M, on obtient une G-algèbre en considérant les champs de vecteurs

$$(14) \qquad {}_MX(m) = \frac{d}{d\varepsilon} m \cdot \exp(\varepsilon X)|_{\varepsilon=0}.$$

On définit de manière évidente les notions de morphismes de G-algèbres, de produit tensoriel projectif de G-algèbres.

On note A_{hor} la sous-algèbre des éléments horizontaux (c'est-à-dire annulés par les dérivations $\iota(X), X \in \mathfrak{g}$) et A_{bas} la sous-algèbre des éléments basiques (c'est-à-dire horizontaux et G-invariants).

La relation de Cartan (11) implique que la sous-algèbre A_{bas} est stable par d_A.

Soit (A, d_A) une G-algèbre. Considérons l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans A. Comme précédemment, les éléments de $\mathfrak{g}^*$ sont considérés comme pairs et l' algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ hérite de la graduation sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de l'algèbre A. Soit $X \mapsto a(X)$ un élément de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$. On note ι (où $\iota_{\mathfrak{g}}$ s'il faut préciser) la dérivation de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ telle que

$$(15) \qquad \iota(a)(X) = \iota_A(X)(a(X)).$$

Soit E_i une base de $\mathfrak{g}$ et soit $x^i \in \mathfrak{g}^*$ la base duale. On considère x^i comme une fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}$ et on note encore x^i la multiplication par x^i dans $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$. On a

$$\iota = \sum_i x^i \iota_A(E_i).$$

On pose

$$(16) \qquad d_{\mathfrak{g}} = d - \iota.$$

C'est une dérivation impaire de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$.

Le groupe G opère sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$ par produit tensoriel de l'action adjointe sur $S(\mathfrak{g}^*)$ et de l'action donnée sur A. Soit

$$A_G(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes A)^G$$

la sous-algèbre des G-invariants. La relation de Cartan (11) implique que $d_{\mathfrak{g}}^2$ est nul sur $A_G(\mathfrak{g})$.

On note $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, A)$ la cohomologie de l'algèbre différentielle $(A_G(\mathfrak{g}), d_{\mathfrak{g}})$. On dira que $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, A)$ est l'espace de cohomologie équivariante de A.

Soit U un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Considérons l'algèbre $C^\infty(U)\hat{\otimes}A = C^\infty(U, A)$. Soit $X \mapsto a(X)$ un élément de $C^\infty(U, A)$. En considérant l'action adjointe de G dans $C^\infty(U)$, on obtient une action naturelle de G dans $C^\infty(U, A)$. On note $A_G^\infty(U) = C^\infty(U, A)^G$ la sous-algèbre de Fréchet formée des éléments G-invariants de $C^\infty(U, A)$. On note encore x^i la restriction de x^i à U. Soit $X \mapsto a(X)$ un élément de $C^\infty(U, A)$. L'opérateur ι est encore défini sur $C^\infty(U, A)$ par

$$\iota(a)(X) = \iota(X) \cdot a(X).$$

Les relations de Cartan entraînent que $d_{\mathfrak{g}}^2$ s'annule dans $A_G^\infty(U)$.

L'algèbre de cohomologie correspondante est notée $\mathcal{H}_G^\infty(U, A)$. C'est *la cohomologie (différentiable à coefficients dans U) équivariante de A.*

Exemple 6 *Si G opère à gauche dans la variété différentiable M et si $A = \mathcal{A}(M)$, l'espace $A_G(\mathfrak{g})$ est égal à l'espace des formes équivariantes $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)$ et l'espace $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ est à l'espace $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)$ de cohomologie équivariante de la variété M. De même, on a $A_G^\infty(U) = \mathcal{A}_G^\infty(U, M)$ et $\mathcal{H}_G^\infty(U, A) = \mathcal{H}_G^\infty(U, M)$.*

Définition 7 *L'algèbre de Weil est définie par: $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$.*

Notons ${}_GG$ le groupe G considéré comme variété dans laquelle G opère à gauche. On note e l'identité de G. Rappelons que l'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ consistant à évaluer en e fournit un isomorphisme de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_GG)$ sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$. On note j, δ et d_W les dérivations de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ obtenues en transportant les dérivations $-\iota$, d et $d_{\mathfrak{g}}$ de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_GG)$. Nous les avons explicitées au paragraphe précédent. La dérivation δ de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ obtenue en transportant la différentielle d de de Rham est la dérivation de Koszul δ dans $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$, où $S(\mathfrak{g}^*)$ est considéré comme un $\mathfrak{g}$-module grâce à l'action adjointe.

Si $X \in \mathfrak{g}$, on note $\iota_\Lambda(X)$ la dérivation de $\Lambda\mathfrak{g}^*$ telle que $\iota_\Lambda(X)(f) = f(X)$ pour $f \in \mathfrak{g}^*$. On a

$$j = \sum x^i \iota_\Lambda(E_i) \quad \text{et} \quad d_W = j + \delta.$$

Si $x \in \mathfrak{g}^*$, on note encore x l'élément $x \otimes 1$ de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$ et πx l'élément x considéré comme élément impair de $\Lambda\mathfrak{g}^*$ (la lettre π est employée dans cette section pour "changement de parité", et non pour 3,14...). Les éléments x et πx engendrent $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$. Il est utile de donner les formules pour les dérivations ci-dessus sur ces générateurs. On a

$$j(x) = 0, \quad j(\pi x) = x, \tag{17}$$

$$\delta(x) = \sum \mathcal{L}(E_i)(x)\pi x^i, \quad \delta(\pi x) = \sum \tfrac{1}{2}\pi x^i\, \pi\mathcal{L}(E_i)(x) \tag{18}$$

(formules de Koszul, voir [20] p. 177).

Il est commode de réécrire les formules de Koszul en introduisant la super-algèbre de Lie $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$. On pose

$$\omega_W = \sum \pi x^i E_i \in \Lambda\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}, \quad \Omega_W = \sum x^i E_i \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathfrak{g}. \tag{19}$$

On vérifie que les formules de Koszul sont équivalentes aux formules suivantes

$$\Omega_W = d_W(\omega_W) + \tfrac{1}{2}[\omega_W, \omega_W] \tag{20}$$

et

$$d_W(\Omega_W) = [\Omega_W, \omega_W]. \tag{21}$$

L'action de G à droite dans G induit une représentation de G dans $\mathcal{A}(G)$ que l'on prolonge trivialement à $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(G)$. Elle laisse stable le sous-espace $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_GG)$. En transportant cette représentation sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_GG)$, on obtient une représentation de G dans $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$, dont on vérifie que c'est la représentation naturelle dans le produit tensoriel $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$.

De même, si $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs ${}_GX$ est invariant à gauche et la dérivation $\iota({}_GX)$ de $\mathcal{A}(G)$, étendue naturellement à $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(G)$, laisse stable le sous-espace $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_GG)$. En transportant $\iota({}_GX)$ sur $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, {}_GG)$, on obtient la dérivation $\iota_\Lambda(X)$ de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$.

Munie des dérivations d_W, $\iota_\Lambda(X)$, et de l'action naturelle de G, $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ est une G-algèbre (voir Cartan [15]). Disons brièvement pourquoi. Il résulte de ce qui précède que, munie de la différentielle δ au lieu de d_W, $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ est une G-algèbre (une sous-G-algèbre de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(G)$ où on a mis sur le premier facteur l'action triviale de G, et sur le second, l'action provenant de l'action à droite sur G). On sait d'autre part que l'on a $d_W^2 = 0$, car $d_\mathfrak{g}^2 = 0$. Il suffit donc de voir que l'opérateur j commute aux opérateurs $\iota_\Lambda(X)$ et à l'action de G, ce qui est clair.

On définit *l'algèbre de Weil à coefficients* C^∞ par

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) = C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*.$$

L'opérateur $j = \sum x^i \iota_\Lambda(E_i)$ s'étend naturellement à $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$. Considérons $C^\infty(\mathfrak{g})$ comme un G-module par l'action adjointe. La dérivation de Koszul du complexe $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$ sera encore notée δ. L'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, {}_GG)$ sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ et si on note encore d_W la dérivation obtenue en transportant $d_\mathfrak{g}$, on obtient:

$$d_W = j + \delta.$$

1.4 Connections.

Soit A une G-algèbre et soit ω un élément impair de l'algèbre de Lie $A \otimes \mathfrak{g}$. On écrit

$$\omega = \sum \omega^i \otimes E_i,$$

où les ω^i sont des éléments impairs de A. On note κ_ω l'homomorphisme d'algèbres de $\Lambda\mathfrak{g}^*$ dans A tel que $\kappa_\omega(\pi x^i) = \omega^i$.

On dit que ω est une connection si ω est G-invariant et si κ_ω commute aux opérateurs $\iota(X)$ (définis respectivement dans $\Lambda\mathfrak{g}^*$ et A). On a donc $\iota_A(E_i)\omega^j = \delta_{ij}$ et $\iota_A(X)\omega = X$. Ceci entraîne que A est l'algèbre extérieure $A_{\mathrm{hor}}[\omega_1, ..., \omega_n]$. On note h le projecteur correspondant sur A_{hor}. On dira que h est l'opérateur de projection horizontale déterminé par ω. Cet opérateur commute à l'action de G. Donnons une formule pour h. On note encore ω^i la multiplication par ω^i sur A. L'opérateur $\omega^i \iota_A(E_i)$ est un opérateur pair et commute aux $\omega^j \iota_A(E_j)$. On a

(22) $$h = \prod_i (I - \omega^i \iota_A(E_i)).$$

On pose $\Omega = d_A\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$. On dit que Ω est la courbure de ω. On écrit

$$\Omega = \sum \Omega^i \otimes E_i.$$

L'élément Ω est basique, pair, et vérifie l'identité de Bianchi

$$d_A\Omega = [\Omega,\omega].$$

On prolonge κ_ω de manière unique en un morphisme d'algèbres de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ dans A en posant

$$\kappa_\omega(x^i) = \Omega^i.$$

Les formules (20) montrent que κ_ω est un morphisme de G-algèbres.

Pour $\alpha = \alpha(\ldots,x^j,\ldots,\pi x^i,\ldots) \in S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Lambda\mathfrak{g}^*$, le morphisme $\kappa_\omega(\alpha)$ consiste à substituer les éléments impairs ω^i de A aux variables impaires πx^i et les éléments pairs Ω^j aux variables paires x^j. Si $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)$, on note

$$\kappa_\omega(\phi) = \phi(\Omega).$$

La sous-algèbre des éléments horizontaux de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ est égale à $S(\mathfrak{g}^*)$, et celle des éléments basiques à $S(\mathfrak{g}^*)^G$. Tous les éléments de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ sont annulés par $d_W = j + \delta$. L'application κ_ω induit donc une application de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ dans les éléments basiques et fermés de A. Montrons que, pour $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)^G$, la classe de cohomologie de $\phi(\Omega) \in H(A_{\mathrm{bas}})$ est indépendante du choix de la connection.

Soit $\tilde\omega \in C^\infty(\mathbb{R}, A\otimes\mathfrak{g})$ et soit $\omega_t = \tilde\omega(t)$. Supposons que ω_t, $t \in \mathbb{R}$, soit une famille à un paramètre de connections. Soit Ω_t la courbure de ω_t. Notons $\omega_t' = \frac{d}{dt}\omega_t$.

Considérons l'algèbre $\tilde A = \mathcal{A}(\mathbb{R})\hat\otimes A$. On étend l'action de G sur A par action triviale sur le premier facteur. Munie de $\tilde d = d_{\mathbb{R}} + d_A$ et des opérateurs $\iota_A(X)$, l'algèbre $\tilde A$ est une G-algèbre. On a

$$\tilde A = C^\infty(\mathbb{R}, A) \oplus C^\infty(\mathbb{R}, A)dt.$$

On considère $\tilde\omega$ comme une connection sur $\tilde A$. Sa courbure est $\tilde\Omega = -\omega_t' dt + \Omega_t$. Notons $\tilde\kappa$ l'application correspondante de $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ dans $\tilde A$. Soit $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)$. Dans la décomposition $\tilde A = C^\infty(\mathbb{R}, A) \oplus C^\infty(\mathbb{R}, A)dt$, on a

$$\phi(\tilde\Omega) = \phi(\Omega_t) - \sum_i (\omega_t')^i(\partial_i\phi)(\Omega_t)\wedge dt$$

où ∂_i est la dérivée partielle du polynôme $\phi(x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots)$ par rapport à la variable x^i.

Le même argument que ci-dessus montre que si $\phi \in S(\mathfrak{g}^*)^G$ est G-invariant, $\phi(\tilde\Omega)$ est $(d_{\mathbb{R}} + d_A)$-fermée et basique. On en déduit la formule de transgression dans les éléments basiques de A:

$$\frac{d}{dt}\phi(\Omega_t) = d_A\Big(\sum_i (\omega_t')^i(\partial_i\phi)(\Omega_t)\Big). \tag{23}$$

Ceci montre que la classe de cohomologie de $\phi(\Omega_t)$ dans (A_{bas}, d_A) est indépendante de t. En particulier, si ω_0 et ω_1 sont deux connections, $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0$ est une famille de connections égale à ω_0 au temps $t = 0$ et à ω_1 au temps $t = 1$. Donc $\phi(\Omega_1) = \phi(\Omega_0)$ dans $H(A_{bas})$.

Par conséquent, l'application κ_ω induit un homomorphisme indépendant du choix de ω, appelé *homomorphisme de Chern-Weil* et noté W, de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ dans l'algèbre d'homologie $H(A_{\mathrm{bas}})$.

Nous dirons que ω est une *connection différentiable* si κ_ω est continue pour la topologie de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$. C'est le cas si et seulement si l'application $x^i \mapsto \Omega^i$ se prolonge en un homomorphisme continu de $C^\infty(\mathfrak{g})$ dans A. Dans ce cas nous noterons encore κ_ω le morphisme continu de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ dans A qui prolonge κ_ω et nous noterons encore

$$\kappa_\omega(\phi) = \phi(\Omega)$$

si $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$.

La sous-algèbre des éléments horizontaux de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ est égale à $C^\infty(\mathfrak{g})$, et celle des éléments basiques à $C^\infty(\mathfrak{g})^G$. Tous les éléments de $C^\infty(\mathfrak{g})^G$ sont annulés par d_W. L'application κ_ω induit donc une application de $C^\infty(\mathfrak{g})^G$ dans les éléments basiques et fermés de A, et donc un homomorphisme W_ω prolongeant l' homomorphisme de Chern-Weil de $C^\infty(\mathfrak{g})^G$ dans l'algèbre d'homologie $H(A_{\mathrm{bas}})$. Cet homomorphisme est indépendant de la connection dans le sens suivant: soient ω_0 et ω_1 deux connections différentiables faisant partie d'une famille différentiable $t \mapsto \omega_t$ de sorte que la formule de transgression (23) ci-dessus reste valable. Alors $W_{\omega_0}\phi = W_{\omega_1}\phi$ pour $\phi \in C^\infty(G)^G$ et nous notons cette classe $W(\phi)$.

L'exemple fondamental est celui d'un fibré principal P de base B où G opère à droite [15] [16] . On choisit une forme de connection $\omega \in (\mathcal{A}^1(P) \otimes \mathfrak{g})^G$ (une telle forme existe) et on a $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in (\mathcal{A}^2(P) \otimes \mathfrak{g})^G$. On dit que Ω est la forme de courbure de la connection. Si $\phi = \phi(x^1, .., x^i, ..) \in C^\infty(\mathfrak{g})$, alors $\phi(\Omega) \in \mathcal{A}(P)$ est donné par la formule de Taylor

$$\phi(\Omega) = \sum_I \frac{\Omega^I}{I!}(\partial_I \phi)(0),$$

où I désigne un multi-indice $I = (i_1, i_2, ..., i_k, ..)$, $\Omega^I = \prod \Omega^{i_k}$, etc .... Cette somme est finie, puisque les formes Ω^i sont de degré extérieur 2.

Soit p la projection de P sur B. On identifie par p^* l'algèbre $\mathcal{A}(B)$ et l'algèbre $\mathcal{A}(P)_{\mathrm{bas}}$. Si ϕ est G-invariante, $\phi(\Omega)$ représente une classe $W(\phi) \in H(B)$ indépendante du choix de la connection ω.

Ce qui précède se généralise à une situation équivariante (voir [7]). Soit L un groupe de Lie opérant à gauche dans P avec une action commutant à celle de G, et supposons de plus que ω soit L-invariante. La sous-algèbre $\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P)$ des éléments L-invariants de $C^\infty(\mathfrak{l})\hat{\otimes}\mathcal{A}(P)$ est invariante par l'action de G et des opérateurs $\iota(_PX)$ $(X \in \mathfrak{g})$. Munie de la différentielle $d_\mathfrak{l}$, c'est une G-algèbre (cela résulte immédiatement de ce que la dérivation $\iota_\mathfrak{l}$ commute (au sens gradué) aux dérivations $\iota(_PX)$ $(X \in \mathfrak{g})$). On pose

$$\Omega_\mathfrak{l} = d_\mathfrak{l}\omega + \tfrac{1}{2}[\omega,\omega] \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l},P)\otimes\mathfrak{g}. \tag{24}$$

On a donc

$$\Omega_\mathfrak{l} = \Omega + \mu,$$

où

$$\mu = -\iota_\mathfrak{l}(\omega) \in \mathfrak{l}^*\otimes C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}. \tag{25}$$

On dit que $\Omega_\mathfrak{l}$ est la courbure équivariante de ω et que μ est le moment équivariant de ω [7]. Pour $Y \in \mathfrak{l}$, $\mu(Y) = -\sum \omega^i(Y_P)E_i \in C^\infty(P)\otimes\mathfrak{g}$.

Si $\phi = \phi(x^1,..,x^i,..) \in C^\infty(\mathfrak{g})$, alors $\phi(\Omega_\mathfrak{l}) \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l},P)$ est donnée par la formule de Taylor

$$\phi(\Omega_\mathfrak{l}) = \sum_I \frac{\Omega^I}{I!}(\partial_I\phi)(\mu),$$

c'est-à-dire

$$\phi(\Omega_\mathfrak{l})_p(X) = \sum_I \frac{\Omega_p^I}{I!}(\partial_I\phi)(\mu_p(X)). \tag{26}$$

Dans la suite, si $X \in \mathfrak{l}$, nous écrivons $\Omega(X)$ pour $\Omega_\mathfrak{l}(X) = \Omega + \mu(X)$. On répète pour ce cas particulier les propriétés générales de l'application W_ω.

Proposition 8 *Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe G muni d'une connection ω. Soit L un groupe de Lie opérant à gauche dans P et supposons que ω soit L-invariante. Si $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$, la forme différentielle équivariante $W_\omega(\phi) = \phi(\Omega_\mathfrak{l}) \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l},B)$ associée à ϕ par l'homomorphisme de Chern-Weil est une forme différentielle équivariante fermée sur B. La classe de cohomologie de $W_\omega\phi$ représente une classe $W(\phi) \in \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l},B)$ indépendante de la connection ω.*

1.5 Classes caractéristiques.

Nous utiliserons dans la suite l'homomorphisme de Chern-Weil dans le cas de fibrés vectoriels. Nous explicitons les formes équivariantes obtenues à l'aide de l'opérateur de courbure équivariante.

Soit M une variété. On note ΛT^*M le fibré d'algèbres extérieures du fibré cotangent. Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel (réel ou complexe) sur M, on note $\Gamma(M,\mathcal{E})$ l'espace des sections de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}(M,\mathcal{E}) = \Gamma(M,\Lambda T^*M\otimes\mathcal{E})$ l'espace des formes différentielles sur M à valeurs dans $\mathcal{E}$. Supposons $\mathcal{E}$ de rang constant N. On note $\mathrm{GL}(N)$ le groupe $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ ou le groupe $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ suivant le contexte. Soit P le fibré des repères de $\mathcal{E}$. La fibre P_m de P au point $m \in M$ est l'espace des isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^N$ (ou $\mathbb{C}^N$) avec $\mathcal{E}_m$. Le groupe $\mathrm{GL}(N)$ opère à droite sur P et P est un fibré principal sur M de groupe $\mathrm{GL}(N)$. Notons τ la représentation canonique de $\mathrm{GL}(N)$ dans $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{C}^N$. Le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ est le fibré $P \times_{\mathrm{GL}(N)} \mathbb{R}^N$ (si $\mathcal{E}$ est réel) ou $P \times_{\mathrm{GL}(N)} \mathbb{C}^N$ (si $\mathcal{E}$ est complexe) associé à la représentation τ.

Soient L un groupe opérant sur M et $\mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel L-équivariant de rang N sur la variété M. Soit N le rang de $\mathcal{E}$. Le groupe L opère à gauche sur $\mathrm{GL}(\mathcal{E})$. Supposons $\mathcal{E}$ muni d'un opérateur de connection L-invariante ∇. Par définition, l'opérateur ∇ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$. Si U est un ouvert au-dessus duquel $\mathcal{E} \cong U \times E$ est trivial, alors l'opérateur ∇ est égal à $d + \omega_U$, où ω_U est une 1-forme sur U à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$. Les 1-formes de connection ω_U sur les ouverts de trivialisation U déterminent une forme de connection ω sur le fibré principal des repères P, comme expliqué par exemple dans [6], chapitre 1.

Soit $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}(X)$ la dérivée de Lie de l'action de G sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$. On définit la courbure équivariante de ∇ comme l'opérateur sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$

$$F(X) = (\nabla - \iota(X_M))^2 + \mathcal{L}^{\mathcal{E}}(X) \quad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{l}.$$

On voit facilement que cet opérateur est donné par l'action sur $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$ d'un élément de $\mathcal{A}(M, \mathrm{End}\,\mathcal{E})$ qu'on notera encore $F(X)$. On écrit aussi

$$F(X) = F + \mu(X),$$

où

$$F = \nabla^2 \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}\,\mathcal{E})$$

est la *courbure* de la connection ∇ et

$$\mu(X) = \mathcal{L}^{\mathcal{E}}(X) - (\nabla\iota(X_M) + \iota(X_M)\nabla) \in \Gamma(M, \mathrm{End}\,\mathcal{E})$$

est le *moment* de la connection ∇. Le rapport entre l'opérateur $F(X)$ et la forme de courbure équivariante $\Omega(X)$ de ω sur P définie en (24) est expliqué dans [6], chapitre 7.

Si ϕ est une fonction $\mathrm{GL}(N)$- invariante sur $\mathfrak{gl}(N)$ et si $X \in \mathfrak{l}$, on peut définir $\phi(F(X))$. En effet, si e_i est un repère local de $\mathcal{E}$ et e^i le repère dual, alors $F_i^j(X) = (e^j, F(X)e_i)$ est une matrice $N \times N$ à coefficients formes (locales) sur la base. Puisque ϕ est invariante, $\phi(F(X)) = \phi(F_i^j(X))$ est indépendante du repère local e_i choisi et donc la forme $\phi(F(X))$ est une forme différentielle sur M. Elle est égale à la forme $\phi(\Omega(X))$ donnée par (26). Donc $X \mapsto \phi(F(X))$ est une forme équivariante fermée et sa classe de cohomologie ne dépend pas de ∇.

On considère en particulier la fonction $\phi(Y) = \mathrm{Tr}(e^Y)$, $Y \in \mathfrak{gl}(N)$.

Définition 9 *Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel L-équivariant sur M muni d'une connection L-invariante ∇ de courbure équivariante $F(X)$, on définit le caractère de Chern équivariant* $\mathrm{ch}(\mathcal{E}, \nabla)$ *par*

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}, \nabla)(X) = \mathrm{Tr}(e^{F(X)}) \quad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{l}.$$

La forme différentielle équivariante $\mathrm{ch}(\mathcal{E}, \nabla)$ est fermée et sa classe de cohomologie équivariante notée $\mathrm{ch}(\mathcal{E})$ est indépendante du choix de la connection ∇. On notera que la convention de signe dans cet article diffère de [6]. Si M est un point, $\mathcal{E}$ est un espace de représentation de L et $\mathrm{ch}(\mathcal{E})(X) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}(\exp X)$.

Définition 10 *Soit E un espace vectoriel réel. Notons J la fonction invariante par conjugaison sur* $\mathrm{End}\, E$ *définie par*

$$J(Y) = \det(\frac{\sinh(Y/2)}{Y/2}) \quad \text{pour } Y \in \mathrm{End}\, E.$$

Définition 11 *Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel réel L-équivariant sur M muni d'une connection L-invariante ∇ de courbure équivariante $F(X)$, on définit le J-genre équivariant $J(\mathcal{E}, \nabla)$ de $(\mathcal{E}, \nabla)$ par*

$$J(\mathcal{E}, \nabla)(X) = J(F(X)) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{l}.$$

Le J-genre équivariant est une forme différentielle équivariante fermée sur M et sa classe de cohomologie $J(\mathcal{E})$ ne dépend que du fibré $\mathcal{E}$.

1.6 Algèbre de Weil et cohomologie équivariante.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soit $B = B^+ \oplus B^-$ une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et supercommutative. Supposons que B soit munie d'une structure de ΛV-module au sens suivant. Si e_i est une base de V, on s'est donné des dérivations impaires $\iota(e_i)$ de B vérifiant les relations

$$\iota(e_i)\iota(e_j) + \iota(e_j)\iota(e_i) = 0.$$

Un élément de connection pour ι est un élément $\omega = \sum_i \omega^i e_i \in B^- \otimes V$ tel que $\iota(e_i)\omega^j = \delta_i^j$.

Lemme 12 *Soit B une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et supercommutative. Soient ι_1 et ι_2 deux structures de ΛV-modules sur B, commutant entre elles (c'est-à-dire $\iota_1(v)\iota_2(w) + \iota_2(w)\iota_1(v) = 0$, pour tout $v, w \in V$). Supposons qu'il existe un élément de connection ω commun pour ι_1 et ι_2. Alors les deux structures ι_1 et ι_2 de ΛV-module sur B sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\omega = \sum \omega^i e_i$. Les opérateurs impairs ω^i et $\iota_1(e_j) - \iota_2(e_j)$ commutent. Considérons la dérivation

$$\theta = \sum_i \omega^i(\iota_1(e_i) - \iota_2(e_i))$$

de B. Elle est paire et nilpotente de sorte que

$$\Theta = \exp(\theta) = \prod(1 + \omega^i(\iota_1(e_i) - \iota_2(e_i)) \tag{27}$$

est un automorphisme de B. On voit facilement que pour tout $v \in V$:

$$\iota_2(v)\Theta = \Theta\iota_1(v).$$

En effet, il suffit de le vérifier pour un espace vectoriel V de dimension 1 où la vérification est aisée. ∎

Soit A une G-algèbre différentiable. On considère l'algèbre $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$. Les structures $\iota_1(X) = \iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)$ et $\iota_2(X) = \iota_\Lambda(X)$ commutent entre elles et ont l'élément de connection commun $\omega_V = \sum_i \pi x^i \otimes E_i$. On note θ la dérivation

$$\theta = \sum \pi x^i \iota_A(E_i).$$

D'après le lemme 12

$$\Theta = \exp(\theta) = \prod(1 + \pi x^i \iota_A(E_i))$$

est un automorphisme de $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$ et on a

$$\iota_\Lambda(X)\Theta = \Theta(\iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)). \tag{28}$$

Il en résulte que Θ induit un isomorphisme d'algèbres de $(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\mathrm{hor}}$ (munie de la contraction totale $\iota_\Lambda + \iota_A$) sur la sous-algèbre $A = 1 \otimes A$ de $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$. Notons $r(\alpha) \in A$ la projection d'un élément $\alpha \in \Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$ sur la composante de degré extérieur 0. Alors, pour tout $\alpha \in (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\mathrm{hor}}$, $\Theta(\alpha) \in A$ est égal à $r(\alpha)$.

Définissons

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A) = \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A = C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A).$$

On considère sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ la structure de G-algèbre obtenue par produit tensoriel (gradué) des structures de G-algèbres de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})$ et de A. En particulier $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ est muni de la différentielle $d_W + d_A$. On étend Θ en un automorphisme $C^\infty(\mathfrak{g})$-linéaire de $C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A) = \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Comme ci-dessus, on voit que Θ induit un isomorphisme de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\mathrm{hor}}$ sur $C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A$ et de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\mathrm{bas}}$ sur $A_G^\infty(\mathfrak{g}) = (C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A)^G$. L'isomorphisme Θ coïncide sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\mathrm{hor}} = C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\mathrm{hor}}$ avec la projection r sur la composante de degré extérieur 0.

Notons j_A et c_A les dérivations impaires de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ définies par

$$j_A = \sum_i x^i \iota_A(E_i) \quad \text{et} \quad c_A = \sum_i \pi x^i \mathcal{L}_A(E_i).$$

Lemme 13 *[24] Posons $k = \Theta(d_W + d_A)\Theta^{-1}$. On a*

$$k = d_W + d_A - j_A + c_A = j + \delta + d_A - j_A + c_A.$$

Démonstration. D'après (28), on a $\iota_\Lambda(X) = \Theta(\iota_\Lambda(X) + \iota_A(X))\Theta^{-1}$. Donc la dérivation k vérifie

$$\iota_\Lambda(X)k + k\iota_\Lambda(X) = \mathcal{L}(X)$$

où $\mathcal{L}(X)$ est la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)$ produit tensoriel des représentations de G sur les trois facteurs. Il est facile de voir que l'opérateur $k' = j + \delta + d_A - j_A + c_A$ vérifie aussi

$$\iota_\Lambda(X)k' + k'\iota_\Lambda(X) = \mathcal{L}(X).$$

On voit donc que

$$\iota_\Lambda(X)(k' - k) + (k' - k)\iota_\Lambda(X) = 0.$$

Pour montrer que $k = k'$, nous procédons par récurrence descendante sur le degré extérieur. Il suffit de montrer que $k = k'$ pour tout $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda^{\max}\mathfrak{g}^* \otimes A)$. On calcule sans difficulté que

$$\begin{aligned} k\alpha &= \Theta(j + \delta + d_A)\alpha \\ &= \Theta(j + d_A)\alpha \\ &= d_A\alpha + j\alpha - j_A\alpha \\ &= k'\alpha. \end{aligned}$$

∎

Corollaire 14 *[16] La projection r induit un isomorphisme de l'algèbre différentielle $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\mathrm{bas}}, d_W + d_A)$ sur l'algèbre différentielle $(A_G^\infty(\mathfrak{g}), d_\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Si $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A$, alors $k\alpha = d_A\alpha - j_A\alpha + (\delta + c_A)\alpha$. Mais $(\delta + c_A)\alpha = \sum_i \pi x^i \mathcal{L}(E_i)\alpha$. Si $\alpha \in A_G^\infty(\mathfrak{g}) = (C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A)^G$, alors $(\delta + c_A)\alpha = 0$ et $k\alpha = (d_A - j_A)\alpha = d_\mathfrak{g}\alpha$. ∎

Remarque 15 *Dans [16] le corollaire est donné sous sa forme algébrique. D'après [16] l'algèbre $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ joue le rôle d'une algèbre de formes différentielles sur l'espace classifiant E_G. Lorsque A est la G-algèbre $\mathcal{A}(M)$ associée à l'action de G dans la variété M, le corollaire est lié à l'interprétation de la cohomologie équivariante comme cohomologie de l'espace $E_G \times_G M$.*

1.7 Action libre.

Nous dirons que l'action de G dans une G-algèbre différentiable A est infinitésimalement libre s'il existe une connection différentiable $\omega \in A \otimes \mathfrak{g}$. On note κ_ω^A l'homomorphisme d'algèbres de Fréchet de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ dans A qui prolonge l'application $\alpha \otimes a \mapsto \kappa_\omega(\alpha)a$. C'est un morphisme de G-algèbres différentielles. Donc κ_ω^A envoie $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\mathrm{bas}}$ dans A_{bas}.

Considérons l'isomorphisme Θ^{-1} de $A_G^\infty(\mathfrak{g})$ avec $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\text{bas}}$. Alors $\kappa_\omega^A\Theta^{-1}$ est un homomorphisme d'algèbres différentielles de $A_G^\infty(\mathfrak{g})$ dans A_{bas} et $\kappa_\omega^A\Theta^{-1}$ est égal à l'identité sur la sous-algèbre $A_{\text{bas}} \subset (C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A)^G$. Explicitons $\kappa_\omega^A\Theta^{-1}$. Soit $\Omega = \sum_i \Omega^i E_i$ la courbure de la connection ω. Si $\alpha = \phi \otimes a \in C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes A$, avec $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ et $a \in A$, on a $\kappa_\omega^A(\alpha) = \phi(\Omega)a$. Pour $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A$, on note $\kappa_\omega^A\alpha = \alpha(\Omega)$. Comme $\phi(\Omega) \in A_{\text{hor}}$, on voit que, si $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A$,

$$\kappa_\omega^A\Theta^{-1}\alpha = \prod_i (I - \omega^i\iota_A(E_i))(\alpha(\Omega)).$$

Donc $\kappa_\omega^A\Theta^{-1}\alpha = h(\alpha(\Omega))$ où $h : A \to A_{hor}$ est l'opérateur de projection horizontale (22) déterminé par ω.

Définition 16 *On note W_ω l'opérateur de $A_G^\infty(\mathfrak{g}) \to A_{bas}$ défini par*

$$W_\omega(\alpha) = h(\alpha(\Omega)).$$

Comme $W_\omega = \kappa_\omega^A\Theta^{-1}$, l'application W_ω est un morphisme d'algèbres différentielles, prolongeant l'application $\phi \mapsto \phi(\Omega)$ définie pour $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})^G \subset A_G^\infty(\mathfrak{g})$, et égal à l'identité sur $A_{\text{bas}} \subset A_G^\infty(\mathfrak{g})$. Nous dirons encore que c'est l'homomorphisme de Chern-Weil.

L'application $x^i \mapsto x^i + \Omega^i$ définit un automorphisme T_Ω de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes A$. On dit que T_Ω est la translation par Ω. Nous supposons que cet automorphisme se prolonge en un automorphisme de $C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A$. Cette condition est vérifiée dans l'exemple de la section 1.4 d'un fibré principal $P \to B$ de groupe G muni d'une action à gauche de L. En effet, on a $C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A = C^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, \mathcal{A}(P))^L$ et pour $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{l}, p \in P$, $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, \mathcal{A}(P))^L$, on a

$$(T_\Omega\phi)_p(X,Y) = \phi(X + \Omega(Y), Y)_p = \sum_I \frac{\Omega_p^I}{I!}(\frac{\partial}{\partial_X})^I\phi(X + \mu_p(Y), Y))_p.$$

Théorème 17 *Soit A une G-algèbre différentiable. On suppose que l'action de G dans A est munie d'une connexion ω de courbure Ω et que la translation T_Ω est définie sur $C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A$. Alors l'injection canonique de A_{bas} dans $(C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A)^G$ induit un isomorphisme en cohomologie de $H(A_{\text{bas}})$ sur $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, A)$. L'inverse est induit par W_ω.*

Remarque 18 *Ce résultat est dû à H. Cartan [15][16] pour la cohomologie à coefficients polynomiaux.*

Démonstration. Ecrivons $\omega = \sum \omega^i \otimes E_i$ la connection de la G-algèbre A. Considérons les deux structures $\iota_1(X) = \iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)$ et $\iota_2(X) = \iota_A(X)$ de $\Lambda\mathfrak{g}$-module sur $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$. La connection ω est commune aux deux structures. D'après le lemme 12, l'opérateur $\Theta_A = \prod_i(1 + \omega^i\iota_\Lambda(E_i))$ vérifie $\Theta_A(\iota_\Lambda(X) + \iota_A(X)) = \iota_A(X)\Theta_A$. L'automorphisme Θ_A de $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A$ consiste à remplacer πx^i par $\pi x^i + \omega^i$.

L'application Θ_A induit donc un isomorphisme de $(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A)_{\mathrm{hor}}$ avec $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A_{\mathrm{hor}}$. Par prolongement $C^\infty(\mathfrak{g})$-linéaire, Θ_A se prolonge en un automorphisme de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Cet automorphisme définit un isomorphisme de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\mathrm{bas}}$ sur $(C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes A_{\mathrm{hor}}))^G$.

Notons $\Omega = \sum_i \Omega^i \otimes E_i \in A \otimes \mathfrak{g}$ la courbure de la connection ω. On note encore Ω^i l'opérateur de multiplication par Ω^i sur A. Notons j_Ω et c_ω les dérivations impaires de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ définies par

$$j_\Omega = \sum \Omega^i \iota_\Lambda(E_i) \quad \text{et} \quad c_\omega = \sum_i \omega^i \mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(E_i)$$

où $\mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(X)$ désigne la dérivée de Lie de de l'action de G dans $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$.

On note C l'opérateur $\Theta_A(d_W + d_A)\Theta_A^{-1}$ sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$.

Lemme 19 *On a* $C = d_W + d_A - j_\Omega + c_\omega = j - j_\Omega + c_\omega + d_A + \delta$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\Theta_A(d_W + d_A)\alpha = (j - j_\Omega + c_\omega + d_A + \delta)\Theta_A\alpha$ pour α parcourant un système de générateurs (au sens topologique) de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$.

Pour $\alpha \in A$, la relation précédente est évidente. Pour $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\Theta_A(d_W + d_A)\phi &= \Theta_A\delta\phi \\
&= \Theta_A(\sum_i \pi x^i \mathcal{L}(E_i)\phi) \\
&= \sum_i (\pi x^i + \omega^i)\mathcal{L}(E_i)\phi \\
&= \delta\phi + c_\omega\phi
\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation désirée pour $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})$.

Soit $\pi x^i \in \mathfrak{g}^*$. On a, en écrivant $\Theta_A = \exp\theta_A$,

$$\begin{aligned}
\Theta_A(d_W + d_A)\pi x^i &= \Theta_A(x^i + \delta\pi x^i) \\
&= x^i + \delta\pi x^i + \theta_A\delta\pi x^i + \tfrac{1}{2}\theta_A^2\delta\pi x^i
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
(j + \delta + d_A - j_\Omega + c_\omega)\Theta_A\pi x^i &= (j + \delta + d_A - j_\Omega + c_\omega)(\pi x^i + \omega^i) \\
&= x^i + \delta\pi x^i + d_A\omega^i - \Omega^i + c_\omega\pi x^i \\
&= x^i + \delta\pi x^i - \tfrac{1}{2}(x^i, [\omega, \omega]) + c_\omega\pi x^i.
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier sur les formules explicites pour $\delta\pi x^i$ que l'on a $\theta_A\delta\pi x^i = c_\omega\pi x^i$ et $\theta_A^2\delta\pi x^i = -(x^i, [\omega, \omega])$. Ceci achève la démonstration du lemme. ∎

Sur A l'opérateur Θ_A est l'identité et C coïncide avec d_A.

Considérons la graduation de $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g},A)$ induite par le degré extérieur:

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g},A)^\bullet = \sum_{q=0}^{\dim\mathfrak{g}} C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda^q\mathfrak{g}^*\otimes A).$$

Décomposons C en somme d'opérateurs C_i homogènes de degré i pour cette graduation. On a $C = C_{-1} + C_0 + C_1$ avec $C_{-1} = j - j_\Omega$, $C_0 = d_A + c_\omega$ et $C_1 = \delta$.

Considérons enfin l'opérateur T_Ω de translation par Ω sur $C^\infty(\mathfrak{g},A)$. Il consiste à remplacer x^i par $x^i + \Omega^i$. L'opérateur T_Ω est un automorphisme de degré 0 et commute à l'action de G.

Si $\alpha \in \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g},A) = C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^*\otimes A)$, on note $\alpha(0)$ la valeur de α en 0, c'est un élément de $\Lambda\mathfrak{g}^*\otimes A$. On note $\alpha_{[0]}$ la composante de degré extérieur 0 de α. C'est un élément de $C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A$. Donc $\alpha_{[0]}(0)\in A$.

Lemme 20 *1. Soit $D = T_\Omega\circ C\circ T_\Omega^{-1}$. Alors D est une différentielle G-invariante sur $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g},A)$. Elle vérifie $\iota_A(X)D + D\iota_A(X) = \mathcal{L}(X)$.*

2. On a $D = D_{-1} + D_0 + D_1$ où les D_i sont des opérateurs homogènes de degré i pour la graduation $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g},A)^\bullet$ et $D_{-1} = j$, $D_0 = d_A + c_\omega$.

3. Sur A, l'opérateur D coïncide avec d_A. L'application $\alpha\mapsto\alpha_{[0]}(0)$ est un morphisme d'algèbres différentielles de $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g},A),D)$ dans (A,d_A) et on a $\kappa_\omega^A\alpha = (T_\Omega\Theta_A\alpha)_{[0]}(0)$.

Démonstration. L'opérateur T_Ω commute aux opérateurs $\iota_A(X)$ car Ω est horizontale. On obtient donc 1.

Il est clair que $T_\Omega(j-j_\Omega)T_\Omega^{-1} = j$. On vérifie sur les générateurs par un calcul analogue au précédent (utilisant la relation $d_A\Omega = [\omega,\omega]$) que $T_\Omega(c_\omega + d_A) = (c_\omega + d_A)T_\Omega$.

Enfin l'application $T_\Omega\Theta_A$ consiste à substituer $x^i + \Omega^i$ à x^i et $\pi x^i + \omega^i$ à πx^i. Donc $(T_\Omega\Theta_A\alpha)_{[0]}(0) = \kappa_\omega^A\alpha$. ∎

La sous-algèbre $(C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^*\otimes A_{\mathrm{hor}}))^G$ est donc stable par D. Comme algèbre différentielle, elle est isomorphe à $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g},A)_{\mathrm{bas}}, d_W + d_A)$ par l'application $T_\Omega\Theta_A$. Le théorème 17 est donc équivalent à la proposition suivante:

Proposition 21 *Soit $D = T_\Omega\Theta_A(d_W + d_A)\Theta_A^{-1}T_\Omega^{-1}$. L'injection*

$$A_{\mathrm{bas}} \to (C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^*\otimes A_{\mathrm{hor}}))^G$$

induit un isomorphisme de $H(A_{\mathrm{bas}})$ sur la cohomologie de $((C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}(\Lambda\mathfrak{g}^*\otimes A_{\mathrm{hor}}))^G, D)$.

Démonstration. Considérons l'algèbre différentielle $((\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A), D)$. Nous utiliserons le lemme de Poincaré.

Soit V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. L'espace $C^\infty(V) \otimes \Lambda V^*$ est l'espace des formes différentielles dans V. On note x^i les fonctions coordonnées et e_i la base canonique. On note j_V la dérivation de degré -1 définie par $j_V = \sum x^i \iota(e_i)$. Notons $C^\infty(V)_0$ le sous-espace des fonctions nulles en 0. Le complexe

$$R^\bullet(V): \quad \cdots \xrightarrow{j_V} C^\infty(V) \otimes V^* \xrightarrow{j_V} C^\infty(V) \to 0$$

contient le sous-complexe

$$R_0^\bullet(V): \quad \cdots \xrightarrow{j_V} C^\infty(V) \otimes V^* \xrightarrow{j_V} C^\infty(V)_0 \to 0.$$

Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ opère dans le complexe $R^\bullet(V)$ en commutant à j_V. Le complexe $R_0^\bullet(V)$ est exact. En fait, il existe une homotopie h de degré 1 de $R_0^\bullet(V)$ telle que l'on ait $hj_V + j_V h = I$ dans $R_0^\bullet(V)$ qui est de plus $\mathrm{GL}(V)$-invariante. Nous la décrivons ci-dessous.

On définit un opérateur $\mathcal{F}_V$ de degré 0 dans le complexe $R_0^\bullet(V)$ en posant $\mathcal{F}_V(f dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}) = g\, dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}$, où $g(x) = \int_0^1 f(tx) t^{p-1} dt$. Cela a un sens, car si $p = 0$, on a $f(0) = 0$ par hypothèse. Soit d_V la différentielle de de Rham dans $R^\bullet(V)$. Soit $\mathcal{E}_V$ la dérivation d'Euler dans $R^\bullet(V)$ par rapport à l'ensemble des variables x^i et dx^i. Donc $\mathcal{E}_V = [d_V, j_V] = d_V j_V + j_V d_V$. On sait que $\mathcal{E}_V$ est inversible dans $R_0^\bullet(V)$, d'inverse $\mathcal{F}_V$. Les opérateurs d_V, j_V, $\mathcal{E}_V$, et $\mathcal{F}_V$ commutent à l'action de $\mathrm{GL}(V)$. Les opérateurs $\mathcal{E}_V$ et $\mathcal{F}_V$ commutent avec j_V et d_V. On pose

$$h_V = \mathcal{F}_V d_V.$$

On a $h_V^2 = 0$ et

$$h_V j_V + j_V h_V = I$$

sur $R_0^\bullet(V)$. L'opérateur h_V est une homotopie du complexe $R_0^\bullet(V)$, commutant à l'action de $\mathrm{GL}(V)$.

Nous démontrons maintenant la proposition. Considérons

$$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet = (C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*) \hat{\otimes} A = R^\bullet(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A.$$

On a $j = j_\mathfrak{g} \otimes I$. Considérons $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet = R_0^\bullet(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} A$ et $h = h_\mathfrak{g} \otimes I$. Comme A est graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les espaces $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ et $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$ ont une graduation totale sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'opérateur h est un opérateur homogène de degré 1 pour la graduation extérieure. Il est donc impair pour la graduation totale. Il commute à l'action de G et commute (au sens gradué) aux opérateurs impairs $\iota_A(X)$: $h\iota_A(X) + \iota_A(X) h = 0$. Les opérateurs h et j vérifient $hj + jh = I$ sur $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$.

Soit $D = j + D_0 + D_1$. D'après le lemme 20, l'opérateur $D_0 = d_A + \sum_i \omega^i \mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(E_i)$ laisse stable $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$ car les opérateurs $\mathcal{L}_{C^\infty \otimes \Lambda}(E_i)$ préservent le sous-espace des fonctions sur $\mathfrak{g}$ s'annulant en 0. Comme $j(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A))$ est contenu dans $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$, le sous-espace $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)^\bullet$ est stable par $D = j + D_0 + D_1$. Soit $N = (D_1 + D_0)h + h(D_1 + D_0)$. C'est un opérateur pair (pour la graduation totale) qui commute à l'action de G. On a $Dh + hD = I + N$ sur

$\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$. Comme $D^2 = 0$, on voit que N commute à D. De même, N commute à h. L'opérateur N est un opérateur nilpotent, car somme d'opérateurs homogènes de degré strictement positif pour la graduation extérieure. Comme $(D_1 + D_0)\iota_A(X) + \iota_A(X)(D_1 + D_0) = \mathcal{L}(X)$, et comme h commute à G, l'opérateur N vérifie $[\iota_A(X), N] = 0$ et N laisse stable le sous-espace $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A_{\text{hor}})^G$. L'opérateur $I + N$ est inversible dans $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$, d'inverse $1 - N + N^2 + \cdots$. Si on note k l'endomorphisme de $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$ défini par la formule $k = (I + N)^{-1}h$, on a $kD + Dk = I$. La cohomologie de $(\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A), D)$ est donc nulle. De même, comme k préserve le sous-espace $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A_{hor})^G$, la cohomologie de ce sous-espace est nulle. D'après le lemme 20, l'application $\alpha \mapsto \alpha_{[0]}(0)$ est un morphisme d'algèbres différentielles de $(\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A), D)$ dans (A, d_A). Soit $\alpha \in \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)$ un élément fermé pour D. Donc $\beta = \alpha - \alpha_{[0]}(0)$ est un élément fermé de $\mathcal{W}_0^\infty(\mathfrak{g}, A)$. C'est donc un bord. On voit donc que l'application $\alpha \mapsto \alpha_{[0]}(0)$ induit un isomorphisme en cohomologie. Ceci termine la démonstration de la proposition 21 et du théorème 17. ∎

1.8 Actions principales et espaces homogènes.

Soit P une variété munie d'une action à droite d'un groupe de Lie N. (Bien entendu, toute variété munie d'une action à gauche peut être considérée comme munie de l'action à droite $x \cdot g = g^{-1} \cdot x$, pour $x \in P$, $g \in N$). On dira que l'action de N est principale si l'espace des orbites P/N est une variété C^∞ et si l'application quotient $q : P \to P/N$ est une fibration principale de groupe N.

Soit G un groupe de Lie et soit N un sous-groupe distingué de G. Soit P une variété munie d'une action à droite de G. Supposons que l'action du sous-groupe N soit principale. La variété P/N est donc munie d'une action à droite du groupe G/N.

Théorème 22 *Soit G un groupe de Lie et soit $N \subset G$ un sous-groupe fermé distingué de G. Soit P une variété munie d'une action à droite de G telle que l'action du sous-groupe N soit principale. Supposons qu'il existe une connection G-invariante pour la fibration $q : P \to P/N$. Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N) \to \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$$

induit un isomorphisme

$$q^* : \mathcal{H}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N) \to \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P).$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas particulier suivant. Soient L et G deux groupes de Lie. Soit $q : P \to B$ un fibré principal de groupe G. Nous supposons que L opère à gauche dans P avec une action commutant à celle de G et nous supposons qu'il existe une connection ω pour la fibration q qui soit L-invariante. L'espace quotient $B = P/G$ est donc muni d'une action de L. Nous sommes dans la situation décrite en 1.4. Considérons $(A, d_A) = (\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P), d_\mathfrak{l})$. Munie de l'action de G sur P et des opérateurs $\iota({}_PX), X \in \mathfrak{g}$ et de la connection

ω, c'est une G-algèbre infinitésimalement libre. Le sous-espace des éléments G-basiques de A s'identifie à $\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ par l'application q^*. Considérons

$$C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A = C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}C^\infty(\mathfrak{l}, \mathcal{A}(P))^L.$$

L'espace $A_G^\infty(\mathfrak{g}) = (C^\infty(\mathfrak{g})\hat{\otimes}A)^G$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{A}_{G\times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, P)$ et la différentielle $d_A - \iota_\mathfrak{g} = d_P - \iota_\mathfrak{l} - \iota_\mathfrak{g}$ est la différentielle $d_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{l}}$. Les hypothèses du théorème 17 sont vérifiées et l'application

$$q^* : \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B) \to \mathcal{H}_{L\times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, P)$$

est un isomorphisme.

Montrons maintenant que nous pouvons nous ramener à ce cas particulier. Soit P une G-variété telle que le sous-groupe distingué N de G agisse de manière principale. Soit $q : P \to P/N$ l'application quotient. Notons L le groupe quotient G/N. Considérons la variété $L \times P$. Munissons la de l'action à droite diagonale de G: $(u, x) \cdot g = (ug, xg)$ pour $g \in G$, $u \in L$ et $x \in P$ et de l'action à gauche de L: $u_0 \cdot (u, x) = (u_0u, x)$. Il est facile de voir que l'action de G est principale. La variété quotient par l'action de G est isomorphe à la variété P/N par l'application $q_G(u, x) \to q(x) \cdot u^{-1}$. De plus la fibration $q_G : L \times P \to P/N$ admet une connection G-invariante. En effet le fibré tangent horizontal HP pour la fibration $q : P \to P/N$ (déterminé par la connection), considéré comme sous-fibré du fibré tangent $T(L \times P)$ à $L \times P$, est un supplémentaire $L \times G$-invariant au sous-espace engendré par les vecteurs tangents aux G-orbites dans $L \times P$. D'après le cas précédent (appliqué à la variété $L \times P$), on sait que q_G^* induit un isomorphisme

$$q_G^* : \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, P/N) \to \mathcal{H}_{L\times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P).$$

Il est clair que l'action de L sur $L \times P$ est libre et admet une connection $G \times L$ invariante. La projection $q_L : L \times P \to P$ induit un isomorphisme

$$q_L^* : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P) \to \mathcal{H}_{L\times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P).$$

Considérons le sous-groupe $\Delta(G) = \{(\overline{g}, g); g \in G\}$ de $L \times G$ et son action à gauche $(\overline{g}, g) \cdot (u, x) = (\overline{g}ug^{-1}, xg^{-1})$ sur $L \times P$. Soit e_L l'identité de L. On note $r_P(x) = (e_L, x)$ l'injection de P dans $L \times P$. La sous-variété (e_L, P) de $L \times P$ est stable par $\Delta(G)$. Considérons l'application $r_P^* : \mathcal{H}_{L\times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P) \to \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$ obtenue par composition des restrictions successives

$$\mathcal{H}_{L\times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, L \times P) \to \mathcal{H}_{\Delta(G)}^\infty(\mathfrak{g}, L \times P) \to \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P).$$

On voit facilement que $r_P^* q_L^* = I$. Donc r_P^* est l'isomorphisme inverse de q_L^* (c'est l'homomorphisme W_ω de la définition 16 dans le cas d'une connection de courbure nulle). Le composé $r_P^* q_G^* : \mathcal{H}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N) \to \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$ coïncide avec q^* et nous obtenons notre théorème. ∎

Soit ω la connection G-invariante pour la fibration $q : P \to P/N$. Nous explicitons un morphisme d'algèbres différentielles

$$W_\omega : (\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P), d_\mathfrak{g}) \to (\mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N), d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}})$$

inverse à gauche de q^*.

Soit $X \in \mathfrak{g}$. On appellera encore $\mu(X) = -\omega(_P X) \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{n}$ le moment de X. Si $Y \in \mathfrak{n}$, $\mu(Y) = -Y$. Soit $\Omega(X) = \mu(X) + \Omega \in \mathcal{A}(P) \otimes \mathfrak{n}$. On appellera $\Omega(X)$ la courbure équivariante de ω. Si $X \in \mathfrak{g}$, alors $X + \Omega(X) \in \mathcal{A}(P) \otimes \mathfrak{g}$, et on voit que $X + \Omega(X)$ ne dépend que de la projection de $X \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. La connection ω définit un projecteur h sur l'espace des formes N-horizontales. Définissons pour $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P))$, $\overline{X} \in \mathfrak{l} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ image de $X \in \mathfrak{g}$,

$$W_\omega(\alpha)(\overline{X}) = h(\alpha(X + \Omega(X))).$$

Comme N est distingué, N agit trivialement sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Par N-invariance on voit donc que $\alpha(X + \Omega(X)) \in \mathcal{A}(P)^N$ et $h(\alpha(X + \Omega(X))) \in \mathcal{A}(P/N)$. Donc $W_\omega(\alpha)$ est un élément de $C^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathcal{A}(P/N))$ et de plus est G/N-invariant. L'application W_ω est donc une application de $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P)$ dans $\mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$. C'est une généralisation de l'homomorphisme de Chern-Weil de la définition 16 (qui correspond au cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$ et $\mathcal{A}(P) = A$).

Lemme 23 *L'application $W_\omega : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, P) \to \mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$ est un morphisme d'algèbres différentielles. De plus, si $\beta \in \mathcal{A}_{G/N}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$, alors*

$$W_\omega q^* \beta = \beta.$$

Démonstration. L'assertion $W_\omega q^* = I$ est évidente. Montrons que W_ω est un morphisme d'algèbres différentielles. Commençons par le cas produit. Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe G sur lequel le groupe de Lie L opère à gauche. On peut alors exprimer l'application W_ω grâce au morphisme κ_ω^A de la section précédente. En effet soit $(A, d_A) = (\mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P), d_\mathfrak{l})$. La connection ω détermine un homomorphisme $\kappa_\omega : \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$. L'homomorphisme $\kappa_\omega \otimes I : \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \to \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$ suivi de l'application

$$\mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \to \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$$

obtenue par restriction à la diagonale est l'application $\kappa_\omega^A : \mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A) \to A$ dans le cas particulier où $A = \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P)$. L'algèbre différentielle $\mathcal{A}_{G \times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, P)$ est isomorphe à $\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, A)_{\mathrm{bas}\, G}$ par l'application Θ_A. Notons $F_\omega = \kappa_\omega^A \Theta_A^{-1}$. C'est un morphisme d'algèbres différentielles

$$F_\omega : \mathcal{A}_{G \times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, P) \to \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P)_{\mathrm{bas}\, G} = \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, P/G).$$

On a vu que $F_\omega = W_\omega$.

Considérons maintenant la situation générale d'une fibration $q : P \to P/N$. Soit $L = G/N$. Considérons la $L \times G$-variété $L \times P$ et la G-algèbre différentielle $(A, d_A) = (\mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, L \times P), d_\mathfrak{l})$. Alors $A_G^\infty(\mathfrak{g}) = \mathcal{A}_{G\times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, L \times P)$. Soit $\tilde{\omega}$ la connection $G \times L$-invariante pour la fibration $q_G : L \times P \to P/N$ dont l'espace horizontal coïncide avec HP. Notons $\tilde{\Omega} \in A \otimes \mathfrak{g}$ la courbure équivariante de $\tilde{\omega}$. Alors

$$W_{\tilde{\omega}} : \mathcal{A}_{G\times L}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}, L \times P) \to \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, P/N)$$

est un morphisme d'algèbres différentielles.

Soit $\alpha \in (C^\infty(\mathfrak{g}) \hat{\otimes} \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, L \times P))^G$. Le morphisme $W_{\tilde{\omega}}$ consiste à calculer $\alpha(\tilde{\Omega}) \in \mathcal{A}_L^\infty(\mathfrak{l}, L \times P)$ puis à projeter sur l'espace des formes horizontales pour l'action de G. Comme (e_L, P) s'envoie surjectivement sur $(L \times P)/G$, une forme basique est déterminée par sa restriction à (e_L, P). Cette restriction est horizontale pour l'action de N. On a donc $W_{\tilde{\omega}}\alpha = h(\alpha(\tilde{\Omega})|P)$. Il suffit maintenant de montrer que $\tilde{\Omega}|P \in \mathcal{A}_L(\mathfrak{l}, P) \otimes \mathfrak{g}$ coïncide avec l'application $\overline{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{n} \mapsto \Omega(X) + X$ définie précédemment. Il est clair que la restriction de $\tilde{\omega}$ à P est ω. Calculons pour $Y \in \mathfrak{l}$ l'élément $\tilde{\omega}(Y_L)|P \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{g}$ est un représentant de Y, le champ produit par l'action à droite diagonale de G sur $L \times P$ coïncide sur la sous-variété (e_L, P) avec $(-Y_L, {}_PX)$. Par définition $\tilde{\omega}(-Y_L, {}_PX) = X$. On obtient donc $-\tilde{\omega}(Y_L)|P = X + \mu(X)$ et $\tilde{\Omega}(Y)|P = X + \Omega(X)$. ∎

Nous montrons maintenant comment le théorème précédent nous permet de calculer la cohomologie d'espaces induits.

Soit $G \to G/H$ un espace homogène. Considérons une H-variété M. Le groupe H opère librement à droite dans $G \times M$ par $(g, m) \cdot h = (gh, h^{-1}m)$ tandis que G opère à gauche. L'espace $G \times_H M$ des H-orbites est appelé l'espace induit (de H à G) de M. Il est muni d'une action de G à gauche. On note $[g, m]$ la classe de (g, m) dans $G \times_H M$.

Soit e l'identité de G. La sous-variété M se plonge dans $G \times_H M$ par $m \mapsto (e, m)$. C'est une sous-variété H-invariante de $G \times_H M$. Les applications de restriction successives $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M) \to \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, G \times_H M) \to \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ sont bien définies. On note

$$E : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M) \to \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$$

l'application composée. C'est un morphisme d'algèbres différentielles.

Nous dirons que G/H est un espace homogène réductif si la fibration H-principale $G \to G/H$ admet une connection G-invariante. En d'autres termes, si $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de H, il existe un sous-espace supplémentaire H-invariant $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

Théorème 24 *Supposons que l'espace homogène $G \to G/H$ soit réductif. Alors l'application E induit un isomorphisme de $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$ sur $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$.*

Démonstration. La connection ω pour la fibration $G \to G/H$ définit une connection $G \times H$-invariante pour la fibration $q_H : G \times M \to G \times_H M$. D'après le théorème 17, q_H^* induit un isomorphisme en cohomologie

$$q_H^* : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M) \to \mathcal{H}_{G\times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M).$$

Considérons l'action à gauche de G sur $G \times M$. La variété quotient est la variété M. L'action de G sur $G \times M$ est libre et la fibration $q_G : G \times M \to M$ est munie d'une connection $G \times H$-invariante. L'application q_G^* induit donc un isomorphisme de $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ sur $\mathcal{H}_{G\times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M)$. Considérons le sous-groupe diagonal $\Delta(H) = \{(h,h)\}$ de $G \times H$. Soit e l'identité de G. La sous-variété (e, M) est une sous-variété invariante de $G \times M$ sous l'action de $\Delta(H)$. Notons r_M l'injection ainsi obtenue. L'application de restriction $r_M^* : \mathcal{H}_{G\times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M) \to \mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ obtenue par composition successive des applications de restriction $\mathcal{H}_{G\times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M) \to \mathcal{H}_{\Delta(H)}^\infty(\mathfrak{h}, G \times M) \to \mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ vérifie $r_M^* q_G^* = I$. Donc $r_M^* = {q_G^*}^{-1}$ et $r_M^* q_H^*$ coïncide avec l'application E. ∎

Soit $\omega \in \mathcal{A}^1(G) \otimes \mathfrak{h}$ la forme de connection de la fibration principale $G \to G/H$. La forme $\omega \otimes 1$ détermine une forme de connection pour la fibration H-principale $G \times M \to G \times_H M$. Considérons le morphisme d'algèbres différentielles $W_\omega : \mathcal{A}_{G\times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M) \to \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$. On note encore

$$W_\omega : \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M) \to \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$$

l'application W_ω restreinte à la sous-algèbre $\mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$ de $\mathcal{A}_{G\times H}^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, G \times M)$. On a $EW_\omega = 1$. Donc l'application W_ω donne une formule pour l'inverse de l'application de restriction E.

Nous l'explicitons un peu plus. On identifie les formes sur $G \times_H M$ aux formes basiques sur $G \times M$. Si $\alpha \in \mathcal{A}(G \times M)$, on a $\alpha(e) \in \Lambda\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{A}(M)$.

Si $\alpha \in \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$, alors l'élément $W_\omega\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$ est déterminée par $(W_\omega\alpha)(e) \in C^\infty(\mathfrak{g}, (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{A}(M))_{\mathrm{hor}_H})^H$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ la décomposition H-invariante donnée de $\mathfrak{g}$. La forme $\omega \in \mathcal{A}^1(G) \otimes \mathfrak{h}$ est déterminée par sa valeur en e. C'est l'élément $\tilde\omega \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{h}$ tel que $\tilde\omega(X) = pr_{\mathfrak{h}}X$ où $pr_{\mathfrak{h}}$ est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$ parallèlement à $\mathfrak{r}$. On écrit $\tilde\omega = \sum_i \tilde\omega^i \otimes E_i$, où E_i est une base de $\mathfrak{h}$. Soit $\Omega \in \mathcal{A}^2(G) \otimes \mathfrak{h}$ la courbure de ω. Elle est déterminée par sa valeur en e. C'est l'élément $\tilde\Omega \in (\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathfrak{h})^H$ donné par la formule

$$\tilde\Omega(X,Y) = [\tilde\omega(X), \tilde\omega(Y)] - \tilde\omega([X,Y])$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{g}$.

Le moment $\mu \in \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(G/H) \otimes \mathfrak{h}$ est déterminé par sa restriction $\tilde\mu$ à $g = e$ et on a

$$\tilde\mu(X) = \tilde\omega(X)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

La courbure équivariante de ω est déterminée par sa restriction en e et on a

$$\tilde{\Omega}(X) = \tilde{\omega}(X) + \tilde{\Omega}.$$

C'est un élément pair de $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathfrak{h}$. Si $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{h})\hat{\otimes}\mathcal{A}(M)$ et $X \in \mathfrak{g}$, on a $\alpha(\tilde{\Omega}(X)) \in \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathcal{A}(M)$ et

$$(W_\omega\alpha)(X)(e) = \prod_i (1 - \tilde{\omega}^i\iota((E_i)_M))\alpha(\tilde{\Omega}(X)).$$

Si M est un point, c'est un cas particulier (pour la fibration H-principale $G \to G/H$) de l'homomorphisme de Chern-Weil équivariant

$$W_\omega : C^\infty(\mathfrak{h})^H \to \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G/H)$$

défini dans la proposition 8 par

$$(W_\omega\phi)(X) = \phi(\Omega(X)).$$

2 Méthode de descente.

2.1 Groupes presque algébriques.

Nous aurons besoin d'une classe de groupes de Lie réels qui ne soit pas trop éloignée de celle des groupes de Lie algébriques et qui contienne leurs revêtements (en fait les revêtements d'ordre 2 suffiraient).

Définition 25 *Un groupe presque algébrique est la donnée d'un groupe de Lie réel séparable G, d'un espace vectoriel réel V de dimension finie et d'un morphisme de groupes de Lie j de G dans le groupe* $\mathrm{GL}(V)$ *vérifiant les conditions suivantes: le noyau* $\ker j$ *de j est un sous-groupe discret et central de G, et l'image $j(G)$ de j est un sous-groupe ouvert (pour la topologie ordinaire) de son adhérence de Zariski dans* $\mathrm{GL}(V)$.

Soit (G, j, V) un groupe presque algébrique. En général, les notions qui suivent dépendent assez peu du choix de la représentation linéaire localement fidèle j de G, de sorte que nous parlerons quelques fois du groupe presque algébrique G, sans citer explicitement j et V.

On notera $\mathbf{G}$ l'adhérence de Zariski de $j(G)$ dans $\mathrm{GL}(V)$. On identifie grâce à j l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et celle de $\mathbf{G}$. C'est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(V)$. Un élément $X \in \mathfrak{gl}(V)$ est dit nilpotent si c'est un endomorphisme nilpotent de V. Il est dit hyperbolique s'il existe une base de V formée de vecteurs propres de X. Il est dit elliptique s'il existe une base de $V \otimes \mathbb{C}$ formée de vecteurs propres de X avec valeurs propres imaginaires pures. Comme $\mathfrak{g}$ est contenue dans $\mathfrak{gl}(V)$, ces définitions s'appliquent en particulier aux éléments

X de $\mathfrak{g}$. Tout élément X de $\mathfrak{gl}(V)$ s'écrit de manière unique sous la forme $X = S + H + N$, où S est elliptique, H hyperbolique et N nilpotent, et où les éléments S, H et N commutent deux à deux. On posera $S = S(X)$, $H = H(X)$ et $N = N(X)$. Comme $\mathfrak{g}$ est algébrique, si $X \in \mathfrak{g}$, on a $S(X) \in \mathfrak{g}$, $H(X) \in \mathfrak{g}$ et $N(X) \in \mathfrak{g}$.

On notera $\mathfrak{g}_{ell}$ l'ensemble des éléments elliptiques de $\mathfrak{g}$.

Les définitions correspondantes pour le groupe $\mathrm{GL}(V)$ sont les suivantes. Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$. Alors g est unipotent si $g - 1$ est nilpotent, positivement hyperbolique s'il admet une base de vecteurs propres dans V avec des valeurs propres > 0, elliptique s'il admet une base de vecteurs propres dans $V \otimes \mathbb{C}$ avec des valeurs propres de module 1. Un élément $g \in \mathrm{GL}(V)$ s'écrit de manière unique sous la forme $g = shu$, où s est elliptique, h positivement hyperbolique et u unipotent, et où les éléments s, h et u commutent deux à deux. On pose $s = s(g)$, $h = h(g)$ et $u = u(g)$. Notons la propriété suivante:

Lemme 26 *Si s est une transformation elliptique de V, alors $\det_V(1 - s)$ est un nombre réel positif ou nul.*

Démonstration. En effet, les valeurs propres différentes de 1 possibles de s sont soit -1 et l'on a $1 - (-1) = 2 > 0$, soit des paires conjuguées μ et $\bar{\mu}$, et l'on a $(1 - \mu)(1 - \bar{\mu}) > 0$. ∎

Soit a un nombre réel > 0. On note $\mathfrak{gl}(V)_a$ l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que la partie imaginaire $\mathrm{Im}(\lambda)$ de toute valeur propre λ de X dans V vérifie $|\mathrm{Im}(\lambda)| < a$. Pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ on pose $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{gl}(V)_a \cap \mathfrak{h}$. Si H est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, on pose $H_a = \exp(\mathfrak{h}_a)$.

Lemme 27 *Soient b et c deux nombres réels tels que l'on ait $0 < b < c$. Il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ qui est égale à 1 dans $\mathfrak{g}_b$ et à 0 en dehors de $\mathfrak{g}_c$.*

Démonstration. Il suffit d'établir cette assertion lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Nous employons la méthode décrite p.60 de [28]. Pour $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $s(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathfrak{g}$ la matrice

$$s(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}u_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-2}u_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -u_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_1 \end{pmatrix}$$

et $\mathfrak{s}$ l'espace $s(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $r > 0$ on pose $\mathfrak{s}_r = \mathfrak{g}_r \cap \mathfrak{s}$. On choisit une fonction $\gamma \in C^\infty(\mathfrak{s})$ qui vaut 1 dans $\mathfrak{s}_b$ et qui est nulle en dehors de $\mathfrak{s}_c$. Notons p_i les coefficients du polynôme caractéristique, de sorte que l'on a $\det(z - X) =$

$\sum_i (-1)^i p_i(X) z^{n-i}$. On a $p_i(s(u_1, u_2, \cdots, u_n)) = u_i$ pour tout i. On définit une fonction différentiable sur $\mathfrak{g}$, invariante par conjugaison, en posant $\theta(X) = \gamma(s(p_1(X), p_2(X), \cdots, p_n(X)))$, et θ prolonge γ. Soit $r > 0$ et soit $X \in \mathfrak{g}$. Les matrices X et $s(p_1(X), p_2(X), \cdots, p_n(X))$ ont même polynôme caractéristique et on a $X \in \mathfrak{g}_r$ si et seulement si $s(p_1(X), p_2(X), \cdots, p_n(X)) \in \mathfrak{s}_r$. La fonction θ convient donc. ∎

Remarque 28 *On peut déduire aussi le lemme 27 du corollaire 2.3.2 de Bouaziz [13].*

Supposons $a \in]0, \pi]$. On sait que l'application exponentielle de $\mathfrak{h}$ dans H est régulière dans $\mathfrak{h}_a$. Donc H_a est ouvert dans H. S'il existe un homomorphisme de H dans $\mathrm{GL}(V)$ dont la différentielle en 1 est l'injection de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$, c'est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}_a$ sur H_a. En particulier, l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}_a$ sur l'ouvert G_a de G, et sur l'ouvert $j(G)_a$ de $j(G)$. Il en résulte que j induit un difféomorphisme de G_a sur $j(G)_a$.

Remarque 29 *Même si H est un sous-groupe algébrique connexe de* $\mathrm{GL}(V)$, *on n'a pas nécessairement $H_a = H \cap \mathrm{GL}(V)_a$. Donnons un exemple. Soit $a \in]0, \pi]$. Soit n un entier tel que $a > \frac{2\pi}{n}$. Soit H le sous-groupe de* $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^2) \subseteq \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)$ *formé des matrices diagonales (u, v) où u et v sont des nombres complexes de modules 1 vérifiant l'équation $u^n = v$. Le groupe H_a est formé des (e^{it}, e^{int}) avec $-a < nt < a$. Le groupe $H \cap \mathrm{GL}(\mathbb{R}^4)_a$ contient l'élément $(e^{2i\pi/n}, 1)$, mais celui-ci n'appartient pas à H_a.*

Soit $a > 0$. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Alors X appartient à $\mathfrak{g}_a$ si et seulement s'il en est de même de $S(X)$. Donc $\mathfrak{g}_a$ contient l'ensemble des éléments nilpotents et hyperboliques de $\mathfrak{g}$.

Nous poserons $\mathfrak{g}_{ell,a} = \mathfrak{g}_{ell} \cap \mathfrak{g}_a$.

Lemme 30 *Soit $a \in]0, \pi]$.*

Soit $g \in j(G)$. On a $s(g) \in j(G)$, $h(g) \in j(G)$ et $u(g) \in j(G)$.

L'ensemble $j(G)_a$ est égal à l'ensemble des $g \in j(G)$ tels que l'on ait $s(g) = e^S$ où $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$.

Soit $X \in \mathfrak{g}_a$ et soit $g = e^X$. On a $s(g) = e^{S(X)}$, $h(g) = e^{H(X)}$ et $u(g) = e^{N(X)}$.

L'ensemble $j(G)_a$ contient l'ensemble des éléments unipotents et positivement hyperboliques de $j(G)$.

L'exponentielle est une bijection de l'ensemble des éléments nilpotents (resp. hyperboliques) de $\mathfrak{g}$ sur l'ensemble des éléments unipotents (resp. positivement hyperboliques) de $j(G)$.

Démonstration. Comme $\mathbf{G}$ est algébrique, on a $s(g) \in \mathbf{G}$, $h(g) \in \mathbf{G}$ et $u(g) \in \mathbf{G}$. D'après ce qu'on vient de rappeler, les éléments $h(g)$ et $u(g)$ sont dans $\exp(\mathfrak{g})$, et donc dans $j(G)$. Le lemme en résulte. ∎

On considère maintenant le groupe G. Un élément $g \in G$ est dit unipotent s'il est de la forme $g = e^N$ avec N nilpotent dans $\mathfrak{g}$, positivement hyperbolique s'il est de la forme $g = e^H$ avec H hyperbolique dans $\mathfrak{g}$ et elliptique si $j(g)$ est un élément elliptique de $\mathrm{GL}(V)$. On notera qu'un élément de $g \in G$ est elliptique si et seulement si $j(g)$ est contenu dans un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$. On notera G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G.

Lemme 31 *Soit $g \in G$. Alors g s'écrit de manière unique sous la forme $g = shu$, où s est elliptique, h positivement hyperbolique et u unipotent, et où les éléments s, h et u commutent deux à deux.*

Démonstration. On écrit $j(g) = s'e^He^N$ où H est un élément hyperbolique de $\mathfrak{g}$, N est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$, et s' un élément elliptique de $j(G)$ (c'est possible d'après le lemme qui précède). On définit un élément s dans G par la formule $g = se^He^N$. Comme $j(s) = s'$, s est elliptique. Par définition d'un groupe presque algébrique, le noyau de j est central dans G et opère donc trivialement dans $\mathfrak{g}$. On a donc $\mathrm{Ad}(s)H = \mathrm{Ad}(s')H$. On a $se^Hs^{-1} = e^{\mathrm{Ad}(s)H} = e^{\mathrm{Ad}(s')H} = e^H$. De même, on a $se^Ns^{-1} = e^N$. ∎

Si g appartient à G, on écrira $g = s(g)h(g)u(g)$ la décomposition du lemme précédent.

Nous résumons ce qui précède dans un lemme.

Lemme 32 *Soit $a \in]0, \pi]$. Alors G_a est ouvert dans G. L'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}_a$ sur G_a. L'ensemble G_a est égal à l'ensemble des $g \in G$ tels que l'on ait $s(g) = e^S$ où $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$.*

Soit $X \in \mathfrak{g}_a$. Soit $g = e^X$. On a $s(g) = e^{S(X)}$, $h(g) = e^{H(X)}$ et $u(g) = e^{N(X)}$.

Définition 33 *Soit H un sous-groupe fermé de G. On dit que c'est un sous-groupe presque algébrique si $j(H)$ est ouvert (pour la topologie ordinaire) dans son adhérence de Zariski dans* $\mathrm{GL}(V)$.

Le triplet $(H, j|_H, V)$ est alors un groupe presque algébrique. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}$. Si $g \in H$, on a $s(g) \in H$, $h(g) \in H$ et $u(g) \in H$.

Pour $g \in G$, on note $G(g)$ le centralisateur de g dans G et $\mathfrak{g}(g)$ l'algèbre de Lie de $G(g)$. De même, pour $X \in \mathfrak{g}$, on note $G(X)$ le centralisateur de X dans G et $\mathfrak{g}(X)$ l'algèbre de Lie de $G(X)$.

Pour tout $g \in G$, le sous-groupe $G(g)$ de G est un sous-groupe presque algébrique de G. En effet, le sous-groupe $\mathbf{G}(j(g))$ de $\mathbf{G}$ est algébrique. Les groupes $G(g)$ et $\mathbf{G}(j(g))$ ont la même algèbre de Lie $\mathfrak{g}(g)$, égale au noyau de $Ad(g) - 1$ dans $\mathfrak{g}$. Donc $j(G(g))$ est ouvert dans $\mathbf{G}(j(g))$.

De même, si $X \in \mathfrak{g}$, le sous-groupe $G(X)$ de G est presque algébrique.

Définition 34 *Soit (G', j', V') un autre groupe presque algébrique. Un homomorphisme $\phi : G' \to G$ est presque algébrique s'il existe un homomorphisme de groupes algébriques $\overline{\phi}$ de l' adhérence de Zariski de $j(G')$ dans l'adhérence de Zariski de $j(G)$ tel que $j\phi = \overline{\phi}j'$.*

2.2 Bottes de fonctions invariantes.

Dans ce paragraphe on fixe un groupe presque algébrique G.

Définition 35 *Un ouvert $\mathcal{W}$ de G est dit $G-$elliptique (ou simplement elliptique s'il n'y a pas de risque de confusion) s'il est invariant par l'action adjointe de G, et si, pour tout $g \in G$, on a $g \in \mathcal{W}$ si et seulement si $s(g) \in \mathcal{W}$.*

Un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{g}$ est dit $G-$elliptique (ou simplement elliptique s'il n'y a pas de risque de confusion) s'il est invariant par l'action adjointe de G, et si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si $S(X) \in \mathcal{V}$.

Les ouverts elliptiques forment une topologie sur G (resp. sur $\mathfrak{g}$), dite topologie elliptique. Si G est compact, alors $G_{ell} = G$ (resp. $\mathfrak{g}_{ell} = \mathfrak{g}$) et un ouvert elliptique de G (resp. de $\mathfrak{g}$) est simplement un ouvert de G (resp. de $\mathfrak{g}$) pour la topologie ordinaire qui de plus est G-invariant. Par contre, si G est un sous-groupe unipotent (ou plus généralement résoluble déployé) de $\mathrm{GL}(V)$, les seuls ouverts elliptiques sont l'ensemble vide et l'espace total.

Nous allons décrire une base de la topologie elliptique. Introduisons quelques notations. Soit $s \in G_{ell}$. L'action adjointe de s dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple. On a la décomposition $G(s)$-invariante

(29) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(s) \oplus \mathfrak{q}(s),$$

avec

$$\mathfrak{g}(s) = \{X \in \mathfrak{g}, sX = X\}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}(s) = (1-s)\mathfrak{g}.$$

De même, si $S \in \mathfrak{g}$ est elliptique on a

(30) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(S) \oplus \mathfrak{q}(S),$$

avec

$$\mathfrak{g}(S) = \{X \in \mathfrak{g}, [S, X] = 0\}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}(S) = [S, \mathfrak{g}].$$

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\mathrm{Arg}(z)$ la détermination de son argument comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On notera

$$\epsilon'(s) = \inf(|\mathrm{Arg}(\mu_i)|, \pi)$$

où μ_i parcourt l'ensemble des valeurs propres de $Ad(s)_{\mathfrak{q}(s)}$. Comme $Ad(s)$ est elliptique, tous les μ_i sont des nombres complexes de module 1, $\mu_i \neq 1$. Donc $\epsilon'(s) \in]0, \pi]$.

Lemme 36 *Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a \in]0, \epsilon'(s)]$. On a* $\det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - Ad(sh)) > 0$ *pour tout $h \in G(s)_a$.*

Démonstration. On peut supposer que $\mathfrak{q}(s)$ est non nul. Le nombre $\det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - Ad(s))$ est non nul, donc strictement positif d'après le lemme 26. Comme h et s commutent, et comme $h \in G(s)_a$, on voit que les valeurs propres de $Ad(sh)$ dans $\mathfrak{q}(s)$ sont toutes différentes de 1. Comme $G(s)_a$ est connexe, on a $\det_{\mathfrak{q}(s)}(1 - Ad(sh)) > 0$ pour tout $h \in G(s)_a$. ∎

Nous posons

$$\epsilon(s) = \tfrac{1}{2}(\inf_{i \neq j} |\operatorname{Arg}(\lambda_i \lambda_j^{-1})|, \pi)$$

où λ_i parcourt l'ensemble des valeurs propres (distinctes) de $j(s)$ dans l'espace vectoriel V. Comme s est elliptique les $\lambda_i \lambda_j^{-1}$ sont des nombres complexes de module 1, différents de 1. On a donc $\epsilon(s) \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Notons l'inégalité

$$\epsilon(s) \leq \tfrac{1}{2}\epsilon'(s).$$

C'est clair si $\mathfrak{q}(s)$ est nul. Sinon, cela résulte de ce que les valeurs propres de $Ad(s)_{\mathfrak{q}(s)}$ sont certains des nombres $\lambda_i \lambda_j^{-1}$.

Lemme 37 *Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a \in]0, \epsilon(s)]$. Soient $g \in G$, $h \in G(s)_a$ et $h' \in G(s)_a$ tels que l'on ait $sh' = gshg^{-1}$. Alors on a $g \in G(s)$.*

Soit $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. On a $G(se^Y) = G(s) \cap G(Y)$.

Démonstration. Considérons les valeurs propres λ_i de $j(s)$, et les sous-espaces propres V_{λ_i} correspondants. Chacun de ces sous-espaces est stable sous l'action de $j(h)$ et de $j(h')$. Les valeurs propres $\lambda_{i,l}$ de $j(sh)$ dans V_{λ_i} vérifient $|\operatorname{Arg}(\lambda_i^{-1}\lambda_{i,l})| < a$. De même, les valeurs propres $\lambda'_{i,k}$ de $j(sh')$ dans V_{λ_i} vérifient $|\operatorname{Arg}(\lambda_i^{-1}\lambda'_{i,k})| < a$. Soit $v \in V_{\lambda_i}$ un vecteur propre de $j(sh)$ pour la valeur propre $\lambda_{i,l}$. Comme $j(sh')$ est conjugué de $j(sh)$, $\lambda_{i,l}$ est égal à l'un des $\lambda'_{i',k'}$. Comme on a $a \leq \epsilon(s)$, ceci implique l'égalité $i = i'$. Donc $j(g)v$ appartient à V_{λ_i}. Puisque $j(s)$ est semi-simple, $j(g)$ commute à $j(s)$. On a donc $j(h') = j(ghg^{-1})$. Puisque $a \leq \pi$, on a $h' = ghg^{-1}$. On trouve $sh' = sghg^{-1} = gshg^{-1}$, et $sg = gs$.

Soit $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. Il résulte de ce qui précède que $G(se^Y)$ est contenu dans $G(s)$. Quitte à remplacer $G(s)$ par G, on est donc ramené à prouver que $G(e^X) = G(X)$ si $X \in \mathfrak{g}_a$. C'est vrai car l'exponentielle est injective dans $\mathfrak{g}_a$. ∎

Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a \in]0, \pi]$. L'ouvert $G(s)_a$ de $G(s)$ est invariant par l'action adjointe de $G(s)$. On peut donc considérer l'espace fibré $G \times_{G(s)} G(s)_a$ de base $G/G(s)$. On notera $[g, h]$ la classe dans $G \times_{G(s)} G(s)_a$ d'un élément (g, h) de $G \times G(s)_a$. On définit une application différentiable

$$\gamma : G \times_{G(s)} G(s)_a \to G \tag{31}$$

en posant $\gamma([g,h]) = gshg^{-1}$. L'image de γ est donc l'ensemble

$$(32) \qquad \mathcal{W}(s,a) = \{gshg^{-1}, g \in G, h \in G(s)_a\}.$$

C'est un sous-ensemble G-invariant de G contenant la classe de conjugaison de s.

Lemme 38 *Soit $s \in G_{ell}$ et soit $a \in]0,\pi]$. Si $a \leq \epsilon'(s)$, γ est un revêtement de $\mathcal{W}(s,a)$, et $\mathcal{W}(s,a)$ est un voisinage ouvert G-invariant de la classe de conjugaison de s dans G. Si $a \leq \epsilon(s)$, γ est un difféomorphisme de $G \times_{G(s)} G(s)_a$ sur $\mathcal{W}(s,a)$.*

Démonstration. Prouvons 1. Comme $a \leq \pi$, l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}(s)_a$ sur l'ouvert $G(s)_a$ de $G(s)$. Calculons la différentielle D de γ au point $[g,h]$. L'espace tangent T en $[g,h]$ à $G \times_{G(s)} G(s)_a$ s'identifie à $\mathfrak{q}(s) \times \mathfrak{g}(s)$ grâce à la différentielle de l'application $(X,Y) \mapsto [ge^X, he^Y]$. De même, l'espace tangent T' à G en un point g' de G s'identifie à $\mathfrak{g}$, par translation à gauche par g'. Avec ces conventions D est égale à

$$(33) \qquad D(X,Y) = Ad(g)(Y + (Ad(sh)^{-1} - 1)X).$$

D'après le lemme 36, D est bijective. L'application γ est donc un revêtement de $\mathcal{W}(s,a)$.

La seconde assertion résulte de la première et du lemme 37. ∎

Lemme 39 *Soit $s \in G_{ell}$ et soit $a \in]0,\epsilon(s)]$. Alors l'ouvert $\mathcal{W}(s,a)$ est elliptique. Plus précisément, soit $x \in \mathcal{W}(s,a)$. Alors il existe des éléments S elliptique, H hyperbolique, et N nilpotent dans $\mathfrak{g}(s)_a$, commutant deux à deux, et un élément $g \in G$ tels que $x = gse^Se^He^Ng^{-1}$, et l'on a $s(x) = gse^Sg^{-1}$.*

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du lemme 38. ∎

Lemme 40 *Soit $\mathcal{W}$ un ouvert elliptique de G. Soit $x \in \mathcal{W}$. Pour tout $a \in]0,\pi]$, l'ouvert $\mathcal{W}(s(x),a)$ contient x. De plus, si a est suffisamment petit, $\mathcal{W}(s(x),a)$ est contenu dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. C'est clair. ∎

En d'autres termes, la topologie elliptique de $\mathcal{W}$ a une base formée d'ouverts de la forme $\mathcal{W}(s,a)$, où $s \in \mathcal{W}_{ell}$, et $a > 0$ est suffisamment petit.

Exemple 41 *Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0,\epsilon(s)]$. Soit t un élément elliptique de $\mathcal{W}(s,a)$. Nous allons déterminer $b > 0$ tel que le voisinage $\mathcal{W}(t,b)$ soit contenu dans $\mathcal{W}(s,a)$. D'après le lemme 39, t est conjugué d'un élément de la forme se^S avec $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. D'après le lemme 37, on a $G(se^S) = G(s)(S)$ et $\mathfrak{g}(se^S) = \mathfrak{g}(s)(S)$. Soit $a' = \sup|\lambda_i|$, où λ_i parcourt l'ensemble des valeurs propres de S dans V. On a donc $a' < a$. Soit $b = a - a'$. On en déduit les inclusions $S + \mathfrak{g}(se^S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_a$ et $e^SG(se^S)_b \subseteq G(s)_a$. On a donc $\mathcal{W}(t,b) = \mathcal{W}(se^S,b) \subseteq \mathcal{W}(s,a)$.*

Soit θ une fonction C^∞ et G-invariante définie dans l'ouvert $\mathcal{W}(s,a)$. Une telle fonction est donc déterminée par sa restriction à la sous-variété fermée $sG(s)_a$. Nous noterons $R_s\theta$ la fonction C^∞ dans $\mathfrak{g}(s)_a$ obtenue en composant $\theta|_{sG(s)_a}$ avec le difféomorphisme $Y \mapsto se^Y$:

$$(R_s\theta)(Y) = \theta(se^Y) \tag{34}$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. La fonction $R_s\theta$ détermine la restriction de θ à l'ouvert $\mathcal{W}(s,a)$. Si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ et $Y \in \mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S)$, on a évidemment:

$$\theta(se^S e^Y) = \theta(se^{S+Y}).$$

Pour tout $s \in G_{ell}$ soit $a(s) \in]0, \epsilon(s)]$, choisi de telle sorte que la fonction $s \mapsto a(s)$ soit invariante. Les conditions suivantes sont donc vérifiées:

1. $a(gsg^{-1}) = a(s)$ et $(R_{gsg^{-1}}\theta)(gYg^{-1}) = (R_s\theta)(Y)$ pour tout $g \in G$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$,
2. pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a(s)}$, il existe $b \in]0, a(se^S)]$ tel que

$$S + \mathfrak{g}(s\exp S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_{a(s)} \quad \text{et} \quad (R_{s\exp S}\theta)(Y) = (R_s\theta)(S+Y)$$

pour tout $Y \in G(se^S)_b$.

Définition 42 *Considérons une famille $(a(s), \theta_s)_{s\in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, $a(s) \in]0, \epsilon(s)]$ et $\theta_s \in C^\infty(\mathfrak{g}(s)_{a(s)})^{G(s)}$, vérifiant les conditions suivantes.*

1. Invariance: $a(gsg^{-1}) = a(s)$ et $\theta_{gsg^{-1}}(gYg^{-1}) = \theta_s(Y)$ pour tout $g \in G$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.

2. Recollement: pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a(s)}$, il existe $b \in]0, a(se^S)]$ tel que

$$S + \mathfrak{g}(s\exp S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_{a(s)} \quad et \quad \theta_{s\exp S}(Y) = \theta_s(S+Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(se^S)_b$.

Deux familles $(a(s), \theta_s)$ et $(b(s), \phi_s)$ sont équivalentes s'il existe une fonction $c(s) \in]0, \inf(a(s), b(s))]$ telle que $c(gsg^{-1}) = c(s)$ et telle que θ_s et ϕ_s coïncident sur $\mathfrak{g}(s)_{c(s)}$.

Une classe d'équivalence de telles familles de fonctions sera appelée une botte de fonctions C^∞ dans G.

Autrement dit, une botte θ est une fonction qui à $s \in G_{ell}$ associe un germe (pour la topologie elliptique) θ_s en 0 de fonction C^∞ sur $\mathfrak{g}(s)$ vérifiant les conditions d'invariance et de recollement énoncée ci-dessus.

Lemme 43 *Soit θ une botte de fonctions C^∞ dans G représentée par une famille $(a(s), \theta_s)_{s\in G_{ell}}$. Il existe un unique élément $\Theta \in C^\infty(G)^G$ tel que, pour tout $s \in G_{ell}$, on ait $R_s\Theta = \theta_s$ dans $\mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.*

Démonstration. Pour tout $s \in G_{ell}$ notons $\psi^{(s)}$ l'unique fonction G-invariante dans $\mathcal{W}(s, a(s))$ telle que l'on ait $\psi^{(s)}(se^Y) = \theta_s(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$ (lemme 45). Montrons que pour tout s et s' dans G_{ell} les fonctions $\psi^{(s)}$ et $\psi^{(s')}$ coïncident dans l'intersection $\mathcal{W}(s, a(s)) \cap \mathcal{W}(s', a(s'))$. D'après le lemme 40, il suffit de voir que pour tout élément elliptique $s" \in \mathcal{W}(s, a(s)) \cap \mathcal{W}(s', a(s'))$, il existe un nombre $a" > 0$ tel que $\psi^{(s)}$ et $\psi^{(s')}$ coïncident dans $\mathcal{W}(s", a")$. On écrit $s" = gse^S g^{-1} = g's'e^{S'}g'^{-1}$ avec $g \in G$, $g' \in G$, $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a(s)}$ et $S' \in \mathfrak{g}(s')_{ell,a(s')}$ (exemple 41 appliqué à s et s'). D'après la seconde propriété d'une botte admissible, on voit que les restrictions de $\psi^{(s)}$ et $\psi^{(s')}$ à $\mathcal{W}(s", a") = \mathcal{W}(se^S, a")$ sont toutes deux égales à $\psi^{(s")}$. ∎

Nous dirons que Θ est la fonction définie par la botte de fonctions $\theta = (\theta_s)_{s \in G_{ell}}$. Dans cet article, nous construirons des bottes de fonctions C^∞ sur G en intégrant des formes différentielles équivariantes.

2.3 Fonctions généralisées et descente.

Nous définissons dans ce paragraphe la notion de bottes de fonctions généralisées. Nous n'utiliserons pas ce paragraphe dans cet article. Cependant nous en aurons besoin dans un article ultérieur. Rappelons que c'est l'étude et la construction par Harish-Chandra [22] [23] de fonctions généralisées G-invariantes sur un groupe semi-simple réel G qui est à l'origine de la méthode de descente.

Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0, \epsilon(s)]$. Considérons une fonction généralisée G-invariante dans l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$. Une telle fonction est déterminée par sa restriction à la sous-variété fermée $sG(s)_a$. Précisons ce point. Soit dg une mesure de Haar à gauche sur G. Notons dX la mesure de Lebesgue tangente sur $\mathfrak{g}$, et choisissons des mesures de Lebesgue dY sur $\mathfrak{g}(s)$ et dQ sur $\mathfrak{q}(s)$ telles que $dX = dY\, dQ$. On note dq la "mesure" G-invariante tangente à dQ sur l'espace des fonctions ϕ sur G qui vérifient

$$\phi(gy) = |det_{\mathfrak{q}(s)}(Ad(y))|\phi(g)$$

pour tout $g \in G$ et tout $y \in G(s)$. On note dy la mesure de Haar sur $G(s)$ à gauche tangente à dY.

Lemme 44 *Pour toute fonction α continue à support compact contenu dans l'ouvert $\mathcal{W}(s, a)$ on a*

$$\int_{\mathcal{W}(s,a)} \alpha(g)dg = \int_{G/G(s)} |det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{sG(s)_a} \alpha(gyg^{-1}) \det{}_{\mathfrak{q}(s)}(1-y)dy \right) dq.$$

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du lemme 36, du lemme 38 et de la formule (33). ∎

Donc, si θ est une fonction continue G-invariante dans $\mathcal{W}(s,a)$, on a

$$\int_{\mathcal{W}(s,a)} \theta(g)\alpha(g)dg = \int_{G/G(s)} |det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{sG(s)_a} \theta(y)\alpha(gyg^{-1}) \det{}_{\mathfrak{q}(s)}(1-y)dy \right) dq.$$

Cette formule permet de définir une bijection entre l'espace des fonctions généralisées G-invariantes dans $\mathcal{W}(s,a)$ et l'espace des fonctions généralisées $G(s)$-invariantes dans $sG(s)_a$. C'est ce qu'exprime le lemme ci-dessous, dû à Harish-Chandra (voir par exemple [21]).

Lemme 45 *Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0, \epsilon(s)]$. Soit θ une fonction généralisée G-invariante dans $\mathcal{W}(s,a)$. Il existe une unique fonction généralisée $G(s)$-invariante ψ dans $sG(s)_a$ telle que, pour toute fonction α différentiable à support compact dans $\mathcal{W}(s,a)$, on ait*

$$\int_{\mathcal{W}(s,a)} \theta(g)\alpha(g)dg = \int_{G/G(s)} |det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{sG(s)_a} \psi(y)\alpha(gyg^{-1}) \det{}_{\mathfrak{q}(s)}(1-y)dy \right) dq.$$

Réciproquement, si ψ est une fonction généralisée $G(s)$-invariante dans $sG(s)_a$, la formule ci-dessus définit une fonction généralisée θ G-invariante dans $\mathcal{W}(s,a)$.

La fonction généralisée θ est différentiable (resp. continue, localement intégrable) si et seulement s'il en est de même de ψ.

Nous poserons $\psi = \theta|_{sG(s)_a}$. C'est la *restriction* de θ à la sous-variété $sG(s)_a$. On peut aussi définir $\theta|_{sG(s)_a}$ en remarquant que $sG(s)_a$ est une sous-variété de $\mathcal{W}(s,a)$ transverse au front d'onde $\mathrm{WF}(\theta)$ de θ (cf. [18]).

Soit $\theta \in C^{-\infty}(G)^G$. Soient $s \in G_{ell}$ et $a \in]0, \epsilon(s)]$. Nous noterons $R_s\theta$ la fonction généralisée dans $\mathfrak{g}(s)_a$ obtenue en composant $\theta|_{sG(s)_a}$ avec le difféomorphisme $Y \mapsto se^Y$. Informellement, $R_s\theta$ est l'élément de l'espace $C^{-\infty}(\mathfrak{g}(s)_a)^{G(s)}$ défini par la formule

(35) $$(R_s\theta)(Y) = \theta(se^Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$. La fonction généralisée $R_s\theta$ détermine la restriction de θ à l'ouvert $\mathcal{W}(s,a)$. Ecrivons la formule intégrale correspondante.

Introduisons d'abord une notation. Soit H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Pour tout $Y \in \mathfrak{h}$ on pose

(36) $$j_{\mathfrak{h}}(Y) = \det\left(\frac{1 - e^{-ad(Y)}}{ad(Y)}\right).$$

On identifie l'espace tangent en un point h de H à $\mathfrak{h}$ au moyen de la translation à gauche par h. La fonction $j_{\mathfrak{h}}$ est donc le jacobien de l'exponentielle. On notera que si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$, et si $a \in]0, \pi]$, on a $j_{\mathfrak{h}}(Y) > 0$ pour $Y \in \mathfrak{h}_a$.

Soient donc θ, s, et a comme ci-dessus. Pour toute fonction α différentiable à support compact dans $\mathcal{W}(s,a)$, on a

$$\int_{\mathcal{W}(s,a)} \theta(g)\alpha(g)dg =$$
$$\int_{G/G(s)} |det_{\mathfrak{g}}(g)| \left(\int_{\mathfrak{g}(s)_a} (R_s\theta)(Y)\alpha(gse^Y g^{-1}) \det{}_{\mathfrak{q}(s)}(1 - se^Y)\, j_{\mathfrak{g}(s)}(Y)dY\right) dq.$$

Définition 46 *Considérons une famille $(a(s), \theta_s)_{s\in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, $a(s) \in]0, \epsilon(s)]$ et $\theta_s \in C^{-\infty}(\mathfrak{g}(s)_{a(s)})^{G(s)}$, vérifiant les conditions suivantes.*

1. Invariance: $a(gsg^{-1}) = a(s)$ et $\theta_{gsg^{-1}}(gYg^{-1}) = \theta_s(Y)$ pour tout $g \in G$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.

2. Recollement: pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a(s)}$, il existe $b \in]0, a(se^S)]$ tel que

$$S + \mathfrak{g}(s \exp S)_b \subseteq \mathfrak{g}(s)_{a(s)} \quad et \quad \theta_{s\exp S}(Y) = \theta_s(S+Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{g}(se^S)_b$.

Deux familles $(a(s), \theta_s)$ et $(b(s), \phi_s)$ sont équivalentes s'il existe une fonction $c(s) \in]0, \inf(a(s), b(s))]$ telle que $c(gsg^{-1}) = c(s)$ et telle que θ_s et ϕ_s coïncident sur $\mathfrak{g}(s)_{c(s)}$.

Une classe d'équivalence de telles familles de fonctions sera appelée une botte de fonctions $C^{-\infty}$ dans G

Dans la condition 2 ci-dessus, $\theta_s(S + Y)$ désigne la restriction de θ_s à la sous-variété $S + \mathfrak{g}(se^S)_b$ qui existe d'après l'invariance de θ_s.

La même démonstration que celle du lemme 43 donne le théorème suivant.

Théorème 47 *Soit θ une botte de fonctions $C^{-\infty}$ représentée par une famille $(a(s), \theta_s)_{s\in G_{ell}}$ vérifiant les conditions ci-dessus. Alors il existe un unique élément $\Theta \in C^{-\infty}(G)^G$ tel que, pour tout $s \in G_{ell}$, on ait $R_s\Theta = \theta_s$ dans $\mathfrak{g}(s)_{a(s)}$.*

La fonction généralisée Θ est différentiable (resp. continue, localement intégrable) si et seulement s'il en est de même des θ_s pour tout $s \in G_{ell}$.

Nous dirons que Θ est la fonction généralisée définie par la botte de fonctions généralisées $\theta = (\theta_s)_{s\in G_{ell}}$. Dans [31], nous construisons des bottes de fonctions généralisées en intégrant des familles de formes différentielles équivariantes.

2.4 Actions régulières.

Nous supposons que G est un groupe presque algébrique comme dans le paragraphe 2.1 dont nous employons les notations. Soit M une variété sur laquelle G opère.

Si $X \in \mathfrak{g}$, on note $M(X)$ l'ensemble des zéros du champ de vecteurs X_M. Si g est un élément de G on note $M(g)$ l'ensemble des points fixes de g dans M.

Remarque 48 *Faisons opérer G sur lui-même par l'action adjointe. Alors $G(s)$ est le centralisateur de s dans G, de sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans la notation.*

Définition 49 *Une action d'un groupe presque algébrique G sur une variété M est dite presque algébrique s'il existe une variété algébrique $\mathbf{M}$ munie d'une action rationnelle de $\mathbf{G}$ et une application de revêtement $j : M \to \mathbf{M}$ sur un ouvert de $\mathbf{M}$ commutant à l'action de G.*

Exemple 50 *Soit H un sous-groupe presque algébrique de G. Alors l'action de G sur G/H est presque algébrique. De même, l'action adjointe de G sur G est presque algébrique.*

Définition 51 *Soit G un groupe presque algébrique opérant sur une variété M. Nous dirons que G opère régulièrement dans M si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout $s \in G_{ell}$.*

Condition 1: $M(s)$ est une sous-variété de M et il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(se^S) = M(s) \cap M(S)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$.

Condition 2: l'action de s dans l'espace tangent $T_m(M)$ en tout point $m \in M(s)$ est elliptique et l'espace tangent $T_m(M(s))$ en un point $m \in M(s)$ est égal à l'espace des points fixes de s dans $T_m(M)$.

Les deux classes de variétés que nous avons en vue sont les suivantes:

1. une action d'un groupe de Lie compact dans une variété ayant un nombre fini de types d'orbites (par exemple compacte),
2. une action presque algébrique.

Il découle en effet des deux lemmes ci-dessous que ces actions sont régulières.

Lemme 52 *On suppose que* $\ker j$ *contient un sous-groupe Z' d'indice fini opérant trivialement dans M. Soit K' un sous-groupe compact maximal de $G' = G/Z'$. On suppose que l'action de K' dans M a un nombre fini de types d'orbites dans M. Alors G opère régulièrement dans M.*

Démonstration. Soient $G' = G/Z'$ et j' l'application naturelle de G sur G'. Le groupe G' a un nombre fini de composantes connexes et possède donc des sous-groupes compacts maximaux. Soit $s \in G_{ell}$. Alors $j'(s)$ est contenu dans un sous-groupe compact de G'. Des théorèmes bien connus sur les actions de groupes compacts (cf. [14], ch. VI) on déduit que $M(s)$ est une sous-variété de M et que la condition 2 de la definition 51 est vérifiée.

Vérifions la condition 1. Soit $s \in G_{ell}$. Montrons qu'il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(se^S) \subseteq M(s)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Soit T un tore maximal dans $G(s)$. Le sous-groupe U de G engendré par s et T est compact. On peut donc supposer que c'est un sous-groupe de K. Pour chaque espace homogène K/H de K il y a un nombre fini de types d'orbites de U dans K/H (voir [14]), et donc un nombre fini de types d'orbites de U dans M. Comme U est abélien, ceci signifie que l'ensemble des sous-groupes $\{U(m), m \in M\}$ est fini. Notons le $\{U_1, ..., U_n\}$. Soit M_i l'ensemble des $m \in M$ tels que $U(m) = U_i$. Supposons la numérotation telle que l'on ait $s \notin U_i$ exactement pour $i \geq p$. Les M_i forment une partition de M et $M(s)$ est la réunion des M_i pour $i < p$.

Les ensembles $\mathfrak{t}_a$ avec $a > 0$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathfrak{t}$ car $\mathfrak{t}$ est un sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie d'un tore maximal de $\mathrm{GL}(V)$. Il existe donc $a > 0$ tel que $s\exp(\mathfrak{t}_a)$ ne rencontre pas U_i pour $i \geq p$. Donc $s\exp(\mathfrak{t}_a) \cap U_i$ est vide si et seulement si $s \notin U_i$. Choisissons un tel a. Soit $S \in \mathfrak{t}_a$. Soit $m \in M(se^S)$. Soit i tel que $m \in M_i$. On a $se^S \in U_i$, $s \in U_i$ et $m \in M(s)$. Donc $M(se^S) \subseteq M(s)$.

Supposons enfin que S soit un élément de $\mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Il est conjugué par $G(s)$ d'un élément de $\mathfrak{t}_a$, et l'on a encore $M(se^S) \subseteq M(s)$.

Soit $s \in G_{ell}$. Montrons qu'il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(se^S) = M(s) \cap M(S)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Compte-tenu de ce qui précède, en remplaçant $G(s)$ par G et $M(s)$ par M, on voit que l'on est ramené à démontrer l'assertion suivante. Il existe $a > 0$ tel que l'on ait $M(e^S) = M(S)$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. On suppose comme plus haut que l'on a $G = G'$, on note T un tore maximal de G, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie, T_1,..., T_n des sous-groupes fermés deux à deux distincts de T tel que, pour tout $m \in M$, $T(m)$ soit égal à l'un des T_i. On note $\mathfrak{t}_i$ l'algèbre de Lie de T_i. On choisit $a > 0$ tel que l'on ait $T_i \cap \exp(\mathfrak{t}_a) = \exp(\mathfrak{t}_{i_a})$ pour $i = 1, ..., n$. Il est clair que a convient. ∎

Lemme 53 *Soient M et M' des variétés dans lesquelles G opère et $\tau : M \to M'$ un revêtement équivariant. Si l'action de G dans M' est régulière, il en est de même de l'action de G dans M.*

Démonstration. Soit $s \in G_{ell}$. Soit $m_0 \in M(s)$. Soit V un voisinage ouvert de m_0 dans M homéomorphe par τ à son image dans M. Soit $W \subseteq V$ tel que $s^{-1}(W) \subseteq V$ (c'est possible car s est continue). Soit $m \in W$ tel que $s^{-1}(\tau(m)) = \tau(m)$. On a $s^{-1}(m) = m$. On voit donc que $\tau|_W$ induit un difféomorphisme de $W \cap M(s)$ sur $\tau(W) \cap M'(s)$.

Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Alors $M(S)$ est l'image réciproque de $M'(S)$. Supposons que l'on ait $M'(se^S) = M'(s) \cap M'(S)$. Soit $m \in M(se^S)$. Alors $\tau(m)$ appartient à $M'(se^S)$, donc à $M'(S)$. Donc m appartient à $M(S)$. Donc m appartient à $M(s)$. ∎

Remarque 54 *Par contre, dans les conditions du lemme 53, il se peut que l'action de G dans M soit régulière mais pas l'action de G dans M'. On peut fabriquer un tel exemple en considérant $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, Γ un sous-groupe discret ayant des éléments elliptiques d'ordre arbitrairement élevé, $M = G$ avec l'action à gauche, et $M' = M/\Gamma$.*

3 Bottes de classes de cohomologie.

3.1 Germes de formes différentielles équivariantes.

Soit G un groupe presque algébrique. Nous supposons donc donnée une représentation de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie V et, pour tout $a > 0$, nous notons $\mathfrak{g}_a$ l'ouvert image réciproque de $\mathfrak{gl}(V)_a$ dans $\mathfrak{g}$. Soit M une variété dans laquelle G opère. Considérons l'algèbre différentielle $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ des formes équivariantes sur M définies sur l'ouvert elliptique $\mathfrak{g}_a$ et son algèbre de cohomologie $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$. Si $a < b$, il y a des morphismes naturels de restriction $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_b, M) \to \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ et $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_b, M) \to \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$.

Définition 55 *On note*

$$\mathcal{A}_{[G]}(M) = \lim_{a \to 0} \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$$

l'espace des germes en 0 (pour la topologie elliptique) de formes équivariantes et

$$\mathcal{H}_{[G]}(M) = \lim_{a \to 0} \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$$

l'espace des germes en 0 des classes de cohomologie équivariante.

Soit H un sous-groupe presque algébrique de G et N une sous-variété H-invariante de M. Si $g \in G$ et $\alpha \in \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, N)$, alors $(g \cdot \alpha)(X) = g \cdot \alpha(g^{-1} \cdot X)$ est un élément de $\mathcal{A}_{gHg^{-1}}^\infty(g \cdot \mathfrak{h}, gN)$. Comme H agit trivialement sur $\mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}, N)$, cette transformation ne dépend que de gH. C'est un morphisme d'algèbres différentielles. On note encore g la transformation induite $g : \mathcal{H}_{[H]}(N) \to \mathcal{H}_{[gHg^{-1}]}(gN)$, etc...

Lemme 56 *1. L'application $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \to \mathcal{H}_{[G]}(M)$ est surjective.*

2. Un élément $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ est d'image nulle dans $\mathcal{H}_{[G]}(M)$ si et seulement s'il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ identiquement égale à 1 dans un voisinage elliptique $\mathfrak{g}_a$ de 0 telle que $\theta\alpha = 0$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ un élément annulé par $d_\mathfrak{g}$. Soient b et c tels que l'on ait $0 < b < c < a$. D'après le lemme 27, il existe une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ qui est égale à 1 dans $\mathfrak{g}_b$ et à 0 en dehors de $\mathfrak{g}_c$. On définit $\alpha' \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ en posant $\alpha'(X) = \theta(X)\alpha(X)$ si $X \in \mathfrak{g}_a$, et $\alpha'(X) = 0$ si $X \in \mathfrak{g}$, $X \notin \mathfrak{g}_a$. Alors la classe de α' dans $\mathcal{H}_{[G]}(M)$ coïncide avec la classe de α puisque α et $\theta\alpha$ ont même restriction à $\mathfrak{g}_b$. Ceci prouve le point 1.

Prouvons 2. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ une forme équivariante fermée d'image nulle dans $\mathcal{H}_{[G]}(M)$. Il existe donc un nombre réel a et un élément $\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)$ tel que $\alpha = d_\mathfrak{g}\beta$ sur $\mathfrak{g}_a$. En choisissant θ comme précédemment, on a $\theta\alpha = d_\mathfrak{g}(\theta\beta)$ sur $\mathfrak{g}_a$ et $\theta\beta \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$. L'égalité précédente prolongée par 0 est valable sur $\mathfrak{g}$. Donc $\theta\alpha = 0$ dans $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$. ∎

Nous énonçons maintenant une généralisation du théorème 24. Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On pose $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{h}$. Soit M une H-variété. L'application de restriction définit un morphisme

$$E : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, G \times_H M) \to \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}_a, M)$$

et donc une application notée encore

$$E : \mathcal{H}_{[G]}(G \times_H M) \to \mathcal{H}_{[H]}(M).$$

Proposition 57 *On suppose que l'espace homogène $G \to G/H$ est réductif. Soit M une H-variété. Alors l'application $E : \mathcal{H}_{[G]}(G \times_H M) \to \mathcal{H}_{[H]}(M)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme l'application $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M) \to \mathcal{H}_{[H]}(M)$ est surjective, le théorème 24 et le lemme 56 impliquent que l'application E est surjective. Montrons qu'elle est injective. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$ une forme équivariante fermée telle que $E(\alpha) = 0$ dans $\mathcal{H}_{[H]}(M)$. Il existe donc $a > 0$ et $\beta \in \mathcal{A}_H^\infty(\mathfrak{h}_a, M)$ tel que $E(\alpha) = d_\mathfrak{h}\beta$ sur $\mathfrak{h}_a$. Soient b et c tels que l'on ait $0 < b < c < a$ et, comme dans le lemme précédent, soit $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ une fonction invariante égale à 1 dans $\mathfrak{g}_b$ et à 0 en dehors de $\mathfrak{g}_c$. On a alors $E(\theta\alpha) = (\theta|\mathfrak{h})d_\mathfrak{h}\beta = d_\mathfrak{h}((\theta|\mathfrak{h})\beta)$ et cette égalité sur $\mathfrak{h}_a$ se prolonge par 0 en une égalité sur tout $\mathfrak{h}$. Donc la classe de $E(\theta\alpha)$ est nulle dans $\mathcal{H}_H^\infty(\mathfrak{h}, M)$. D'après le théorème 24, la classe de $\theta\alpha$ est nulle dans $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, G \times_H M)$. D'après le lemme 56, la classe de α est nulle dans $\mathcal{H}_{[G]}(G \times_H M)$. ∎

Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe G et soit L un groupe de Lie opérant à gauche sur P. Supposons que P admette une connection L-invariante. Nous avons démontré dans la section 1.8 que l'application $q^* : \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B) \to \mathcal{H}_{L\times G}^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, P)$ est un isomorphisme. Elle induit une application surjective de $\mathcal{H}_{[L]}(B)$ sur $\mathcal{H}_{[L\times G]}(P)$. Nous ne savons pas si cette application est injective. Citons cependant un exemple où q^* est un isomorphisme.

Proposition 58 *Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe G sur une variété compacte B. Soit L un groupe compact opérant à gauche sur P. Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{H}_{[L]}(B) \to \mathcal{H}_{[L\times G]}(P)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Puisque L est compact, la fibration $P \to B$ admet une connection invariante. Il reste à prouver que q^* est injective. Soit $\beta \in \mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ telle que $\alpha = q^*\beta$ soit nulle dans $\mathcal{H}_{[G\times L]}(P)$. Soit $\theta \in C^\infty(\mathfrak{l}\times\mathfrak{g})^{L\times G}$ une fonction identiquement égale à 1 sur un voisinage $\mathfrak{l}_a \times \mathfrak{g}_a$ de 0 dans $\mathfrak{l}\times\mathfrak{g}$ telle que $\theta\alpha = 0$. Considérons l'application inverse W_ω de l'application q^*. On a donc

$$W_\omega(\theta)\beta = 0.$$

Pour montrer que $\beta = 0$ dans $\mathcal{H}_{[L]}(B)$, il suffit donc de montrer que W_ω envoie une fonction $\theta \in C^\infty(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g})^{L\times G}$ identiquement égale à 1 sur un voisinage $\mathfrak{l}_a \times \mathfrak{g}_a$ sur une classe de cohomologie de $\mathcal{H}_L^\infty(\mathfrak{l}, B)$ identiquement égale à 1 sur un voisinage $\mathfrak{l}_b$ de 0 dans $\mathfrak{l}$. Soit $\mu(Y) = -\omega(Y_P) \in C^\infty(P) \otimes \mathfrak{g}$ le moment de $Y \in \mathfrak{l}$, Ω la courbure de ω et soit $\Omega(Y) = \mu(Y) + \Omega$ la courbure équivariante de ω. On a $(W_\omega\theta)(Y) = \theta(Y, \Omega(Y))$. On a $\mu(Y)(pg) = g^{-1} \cdot \mu(Y)(p)$. La classe de conjugaison de $\mu(Y)(p) \in \mathfrak{g}$ ne dépend donc que de la projection de p sur B. Puisque L est compact, un voisinage elliptique de 0 dans $\mathfrak{l}$ est un voisinage aussi petit qu'on veut pour la topologie ordinaire. Comme B est compacte, on voit donc qu'on peut choisir $b \leq a$ tel que si $Y \in \mathfrak{l}_b$ alors $\mu(Y) \in \mathfrak{g}_a$. La forme $\theta(Y, \Omega(Y)) = \theta(Y, \mu(Y) + \Omega)$ est calculée à partir de sa série de Taylor (par rapport aux variables de $\mathfrak{g}$)

$$\theta(Y, \Omega(Y)) = \theta(Y, \mu(Y)) + \sum_I \frac{\Omega^I}{I!}(\partial_I\theta)(Y, \mu(Y)).$$

On voit que $W_\omega\theta$ est identiquement égale à 1 dans le voisinage $\mathfrak{l}_b$. L'équation $W_\omega(\theta)\beta = 0$ implique $\beta = 0$ dans $\mathcal{H}_{[L]}(B)$. ∎

3.2 Bottes et bouquets de formes différentielles équivariantes.

Soit G un groupe presque algébrique opérant régulièrement dans M.

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$. La sous-variété $M(S)$ de M est $G(S)$-invariante de M. On considère l'application de translation

$$T_S : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \to \mathcal{A}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S)) \tag{37}$$

donnée par

$$(T_S\alpha)(Y) = \alpha(S+Y)|M(S).$$

Comme S_M s'annule sur $M(S)$, cette application commute aux différentielles. On en déduit une application en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \to \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S)).$$

Soit $a > 0$ et soit $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, il existe $b > 0$ tel que $S + \mathfrak{g}(S)_b \subset \mathfrak{g}_a$. Pour tout $S \in \mathfrak{g}_a$, on peut donc définir une application encore notée

$$T_S : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M) \to \mathcal{A}_{[G(S)]}(M(S))$$

par $(T_S\alpha)(Y) = \alpha(S+Y)$, puisque si Y varie dans un voisinage elliptique suffisamment petit de 0 dans $\mathfrak{g}(S)$, alors $S + Y \in \mathfrak{g}_a$. Si $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on obtient aussi une application de translation en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M) \to \mathcal{H}_{[G(S)]}(M(S)).$$

Soient $s \in G_{ell}$ et $a > 0$. En appliquant les définitions ci-dessus au groupe $G(s)$ opérant dans la variété $M(s)$, on obtient des opérateurs de translation

$$(38)\quad \begin{aligned} T_{s,S} &: \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), M(s)) \to \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)\cap G(S)}(\mathfrak{g}(s)\cap\mathfrak{g}(S), M(s)\cap M(S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), M(s)) \to \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)\cap G(S)}(\mathfrak{g}(s)\cap\mathfrak{g}(S), M(s)\cap M(S)) \end{aligned}$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ et

$$(39)\quad \begin{aligned} T_{s,S} &: \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \to \mathcal{A}_{[G(s)\cap G(S)]}(M(s)\cap M(S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \to \mathcal{H}_{[G(s)\cap G(S)]}(M(s)\cap M(S)) \end{aligned}$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$.

Si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ est assez petit on a

$$G(se^S) = G(s)\cap G(S) \quad \text{et} \quad M(se^S) = M(s)\cap M(S).$$

et l'opérateur $T_{s,S}$ fournit des applications

$$(40)\quad \begin{aligned} T_{s,S} &: \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), M(s)) \to \mathcal{A}^{\infty}_{G(se^S)}(\mathfrak{g}(se^S), M(se^S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \to \mathcal{A}_{[G(se^S)]}(M(se^S)) \\ T_{s,S} &: \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s)) \to \mathcal{H}_{[G(se^S)]}(M(se^S)). \end{aligned}$$

En général, si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ on a des inclusions $G(s)\cap G(S) \subset \mathfrak{g}(se^S)$ et $M(s)\cap M(S) \subset M(se^S)$ et nous aurons à utiliser l'application de restriction

$$(41)\quad r_{s,S} : \mathcal{A}^{\infty}_{G(se^S)}(\mathfrak{g}(se^S), M(se^S)) \to \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)\cap G(S)}(\mathfrak{g}(s)\cap\mathfrak{g}(S), M(s)\cap M(S)).$$

Définition 59 *Nous dirons qu'une famille $(\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ où, pour tout $s \in G_{ell}$, α_s est un élément de $\mathcal{A}_{[G(s)]}(M(s))$, est une botte de formes équivariantes si elle vérifie les conditions suivantes.*

1. Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g\cdot\alpha_s$ pour tout $g \in G$ et tout $s \in G_{ell}$.

2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$, il existe $a > 0$ et un représentant $\alpha_{s,a} \in \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$ de α_s tels que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait

$$G(se^S) = G(s)\cap G(S), \quad M(se^S) = M(s)\cap M(S)$$

et

$$T_{s,S}\alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{A}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{B}_G(M)$ l'espace des bottes de formes différentielles équivariantes. Cet espace est muni d'une différentielle $d_G = (d_{\mathfrak{g}(s)})_{s\in G_{ell}}$.

Il est clair que si la condition de recollement est vérifiée pour un représentant $\alpha_{s,a}$ de α_s, alors si $\alpha_{s,b} \in \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_b, M(s))$ est un autre représentant de α_s, il existe $c \leq b$ tel que pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,c}$ on ait $T_{s,S}\alpha_{s,b} \cong \alpha_{se^S}$ dans $\mathcal{A}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

Nous verrons que dans de nombreux cas on peut représenter des cycles de $\mathcal{B}_G(M)$ au moyen de familles de formes fermées partout définies pour lesquelles les conditions de recollement sont globales. Ces familles spécialement agréables seront appelées des *bouquets*.

Définition 60 *Un bouquet de formes équivariantes est une famille* $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ *où, pour tout* $s \in G_{ell}$, α_s *est un élément de* $\mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), M(s))$, *vérifiant les conditions suivantes.*

1. Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ *pour tout* $g \in G$ *et tout* $s \in G_{ell}$.

2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$ *et pour tout* $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ *on a*

$$T_{s,S}\alpha_s = r_{s,S}\alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{A}^{\infty}_{G(s)\cap G(S)}(\mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{g}(S), M(s) \cap M(S))$.

3. Fermeture: pour tout $s \in G_{ell}$ *on a* $d_{\mathfrak{g}(s)}(\alpha_s) = 0$.

On note $\mathcal{Z}_G(M)$ *l'espace des bouquets de formes équivariantes.*

On introduit une définition similaire au niveau des classes de cohomologie équivariante.

Définition 61 *Une botte de classes de cohomologie équivariante est une famille* $(\alpha_s)_{s \in G_{ell}}$ *où, pour tout* $s \in G_{ell}$, α_s *est un élément de* $\mathcal{H}_{[G(s)]}(M(s))$, *vérifiant les conditions suivantes.*

1. Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ *pour tout* $g \in G$ *et tout* $s \in G_{ell}$.

2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$, *il existe* $a > 0$ *et un représentant* $\alpha_{s,a} \in \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$ *de* α_s *tels que, pour tout* $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, *on ait*

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S), \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S)$$

et

$$T_{s,S}\alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{H}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{K}_G(M)$ *l'espace des bottes de classes de cohomologie équivariante.*

La structure d'algèbre des $\mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$ induit une structure d'algèbre dans $\mathcal{K}_G(M)$.

On définit de manière analogue les espaces $\mathcal{B}_{cpt,G}(M)$ de bottes de formes équivariante à support compact sur M, $\mathcal{Z}_{cpt,G}(M)$ et $\mathcal{K}_{cpt,G}(M)$.

J. Block et E. Getzler [10] ont considéré pour un groupe G compact l'algèbre de cohomologie $\mathcal{K}'_G(M)$ de l'algèbre différentielle $(\mathcal{B}_G(M), d_G)$ obtenue en considérant l'espace des bottes de formes différentielles équivariantes. Nous pensons plus naturel de considérer l'algèbre $\mathcal{K}_G(M)$ des bottes de classes de cohomologie équivariante. Il est cependant probable en vue de la remarque 70 ci-dessous que pour un groupe compact agissant sur une variété compacte l'homomorphisme naturel $\mathcal{K}'_G(M) \to \mathcal{K}_G(M)$ est un isomorphisme.

Exemple 62 *Si $N = \bullet$ est un point, l'algèbre $\mathcal{K}_G(\bullet)$ est canoniquement isomorphe à $C^\infty(G)^G$.*

Démonstration. Soit $(\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ un élément de $\mathcal{K}_G(\bullet)$. Alors α_s est juste une fonction différentiable $G(s)$-invariante définie sur un voisinage elliptique $\mathfrak{g}(s)_{a(s)}$ de 0. La famille $(a(s), \alpha_s)$ est donc une botte de fonctions C^∞ sur G, au sens de la definition 42. La fonction $\Theta \in C^\infty(G)^G$ correspondante (lemme 43) vérifie $\Theta(se^Y) = \alpha_s(Y)$ pour tout $s \in G_{ell}$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_{a(s)}$, pour $a(s)$ petit. ∎

3.3 Images réciproques de bottes.

Soit N une autre variété dans laquelle G opère régulièrement. Soit ϕ un morphisme G-équivariant de M dans N. Pour tout $s \in G_{ell}$, ϕ induit un morphisme de $M(s)$ dans $N(s)$. On peut donc considérer l'image réciproque sur $M(s)$ d'une forme différentielle sur $N(s)$. Cette opération induit un morphisme d'algèbres ϕ^* de $\mathcal{K}_G(N)$ dans $\mathcal{K}_G(M)$ de sorte que $\mathcal{K}_G(M)$ est une algèbre sur $\mathcal{K}_G(N)$.

En particulier, $\mathcal{K}_G(M)$ est une algèbre sur $C^\infty(G)^G$. Explicitons cette structure. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ une botte de classes de cohomologie équivariante sur M. Soit $\Theta \in C^\infty(G)^G$. Alors $\Theta\alpha$ est la botte définie par la formule $(\Theta\alpha)_s(Y) = \Theta(se^Y)\alpha_s(Y)$ pour tout $s \in G_{ell}$ et tout $Y \in \mathfrak{g}(s)_a$, où $a > 0$ est suffisamment petit.

Soit $\phi : H \to G$ un morphisme de groupes presque algébriques. Alors l'image réciproque $\phi^{-1}(\mathfrak{g}_a)$ est un ouvert elliptique dans $\mathfrak{h}$. Il contient donc un ouvert $\mathfrak{h}_b$. Considérons l'action de H sur M déduite de celle de G. On peut donc définir une application $\phi^* : \mathcal{K}_G(M) \to \mathcal{K}_H(M)$ par $(\phi^*\beta)_s(H) = \beta_{\phi(s)}(\phi(H))$ pour H variant dans un voisinage elliptique $\mathfrak{h}_b$ assez petit. On obtient ainsi une botte de classes de cohomologie H-équivariante et donc un morphisme d'algèbres $\phi^* : \mathcal{K}_G(M) \to \mathcal{K}_H(M)$.

3.4 Espaces homogènes.

Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe fermé presque algébrique de G (définition 33). On note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, et on considère l'action de G dans $B = G/H$. (D'après l'exemple 50, c'est une action régulière).

Soit $s \in G_{ell}$. Nous étudions la variété $B(s)$ des points fixes de s. Soit $\mathcal{O}_s$ la classe de conjugaison de s dans G. Soit $N_s = \{g \in G; g^{-1}sg \in H\}$. Le sous-ensemble N_s est fermé dans G, et invariant par l'action à gauche de $G(s)$ et de H à droite. L'ensemble $B(s)$ est isomorphe à N_s/H par l'application

$g \mapsto gH$. Notons $\{g_i\}_{i\in I(s)}$ un système de représentants dans N_s des doubles classes modulo $G(s)\times H$. Posons $s_i = g_i^{-1}sg_i$. Les $\{s_i\}_{i\in I(s)}$ forment un système de représentants des classes de conjugaison de H dans le sous-ensemble $\mathcal{O}_s \cap H$. Les $g_iH \in B(s)$ forment un système de représentants des orbites de $G(s)$ dans $B(s)$. L'application $y \mapsto yg_iH$ induit un isomorphisme de $G(s)/(G(s)\cap g_iHg_i^{-1})$ sur $G(s)g_iH/H$.

Lemme 63 *1. La classe de conjugaison $\mathcal{O}_s$ de s dans G est fermée. C'est un revêtement d'ordre fini de la classe de conjugaison $\mathcal{O}_{j(s)}$ de $j(s)$ dans $j(G)$.*

2. L'ensemble $I(s)$ est fini. Donc $\mathcal{O}_s \cap H$ est réunion disjointe finie des classes de conjugaison sous H des éléments s_i, $i \in I(s)$.

3. L'ensemble N_s est une sous-variété fermée de G, réunion disjointe finie des doubles classes $G(s)g_iH$, $i \in I(s)$.

4. L'ensemble $B(s)$ est une sous-variété de B, réunion disjointe finie des orbites $G(s)g_iH/H$, $i \in I(s)$.

Démonstration. Prouvons 1. Comme $j(s)$ est un élément semi-simple de $\mathrm{GL}(V)$, la classe de conjugaison $\mathcal{O}'$ de $j(s)$ dans $\mathrm{GL}(V)$ est fermée. Il résulte du lemme 66 ci-dessous que $\mathcal{O}_{j(s)}$ est fermée.

Comme j est un revêtement, les groupes $G(s')$ et $G(j(s))$ ont la même algèbre de Lie $\mathfrak{g}(s)$ pour tout $s' \in j^{-1}(j(s))$. L'image réciproque $j^{-1}(\mathcal{O}_{j(s)})$ est réunion disjointe de classes de conjugaison par G, qui sont toutes ouvertes, et donc toutes fermées, dans $j^{-1}(\mathcal{O}_{j(s)})$. En particulier, la classe de conjugaison $\mathcal{O}_s$ de s est fermée.

On a les inclusions $(\ker j)G(s)_0 \subseteq G(s) \subseteq G(j(s))$, où $G(s)_0$ est la composante neutre de $G(s)$. On en déduit que le cardinal de $G(j(s))/G(s)$ est fini, et donc $\mathcal{O}_s$ est un revêtement fini de $\mathcal{O}_{j(s)}$.

Prouvons 2. Il résulte de 1 et du lemme 66 que $\mathcal{O}_s\cap H$ est réunion localement finie de classes de conjugaison de H. Pour montrer que celles-ci sont en nombre fini, il suffit à cause de 1 de démontrer l'assertion analogue dans le groupe $j(G)$. Ceci résulte de ce que $\mathcal{O}_{j(s)} \cap j(H)$ a un nombre fini de composantes connexes, à cause des hypothèses d'algébricité.

Prouvons 3. L'application $g \mapsto g^{-1}sg$ de G dans $\mathcal{O}_s$ est une submersion. L'ensemble N_s est l'image réciproque de la sous-variété $\mathcal{O}_s \cap H$. C'est donc une sous-variété fermée de G.

Prouvons 4. Il résulte de 3 que $B(s) = N_s/H$ est réunion finie d'orbites de $G(s)$. ∎

Soit M une variété où H opère régulièrement. Considérons l'espace induit $\mathcal{M} = G \times_H M$. Il est fibré sur $B = G/H$. Soit $s \in G_{ell}$. Etudions la variété $\mathcal{M}(s)$. Un point de $\mathcal{M}(s)$ se projette sur un point de $B(s)$. Par conséquent, si la classe de conjugaison de s ne rencontre pas H, la variété $\mathcal{M}(s)$ est vide. Si la classe de conjugaison de s rencontre H, notons comme plus haut $\{g_i\}_{i\in I(s)}$ un système de représentants des doubles classes $G(s)g_iH$ de N_s, et posons $s_i = g_i^{-1}sg_i$. On a $s_i \in H_{ell}$. Comme $G(s)$-espace, $\mathcal{M}(s)$ est réunion disjointe des espaces $G(s)[g_i, M(s_i)]$ (certains de ces espaces peuvent être vides si $M(s_i)$ est vide). L'action de g_i induit un isomorphisme de $\mathcal{M}_i = G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i)$ sur $G(s)[g_i, M(s_i)]$. L'action de G dans $\mathcal{M}$ est donc régulière.

Considérons la sous-variété $[e, M]$ de $\mathcal{M}$. C'est une sous-variété stable par H. On obtient donc un morphisme

$$E : \mathcal{K}_G(G \times_H M) \to \mathcal{K}_H(M)$$

par composition des morphismes de restriction successive $\mathcal{K}_G(G \times_H M) \to \mathcal{K}_H(G \times_H M) \to \mathcal{K}_H(M)$.

Théorème 64 *Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique tel que l'espace homogène $G \to G/H$ soit réductif. Soit M une variété sur laquelle H opère régulièrement. Alors G opère régulièrement sur $G \times_H M$ et l'application de restriction*

$$E : \mathcal{K}_G(G \times_H M) \to \mathcal{K}_H(M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Nous aurons à utiliser le lemme suivant.

Lemme 65 *Soit H un sous-groupe presque algébrique de G tel que G/H soit réductif. Soit $s \in G_{ell} \cap H$. L'espace homogène $G(s)/H(s)$ est réductif.*

Démonstration. Ecrivons $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ où $\mathfrak{r}$ est un supplémentaire H-invariant de $\mathfrak{h}$. Comme s est dans H, $Ad(s)$ laisse stable cette décomposition. Posons $\mathfrak{r}(s) = \mathfrak{g}(s) \cap \mathfrak{r}$. Comme $Ad(s)$ est semi-simple, on a $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{h}(s) \oplus \mathfrak{r}(s)$. ∎

Nous démontrons maintenant le théorème. Commençons par l'injectivité.

Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s \in G_{ell}} \in \mathcal{K}_G(\mathcal{M})$ tel que $E(\alpha) = 0$. Nous devons montrer que $\alpha_s = 0$. Soit $s \in H_{ell}$. On note α'_s l'élément de $\mathcal{H}_{[G(s)]}(G(s) \times_{H(s)} M(s))$ obtenu en restreignant α_s à $G(s) \times_{H(s)} M(s) \subset \mathcal{M}(s)$. D'après le lemme 65 l'espace homogène $G(s)/H(s)$ est réductif. D'après l'hypothèse $E(\alpha) = 0$, l'élément $E(\alpha'_s) \in \mathcal{H}_{[H(s)]}(M(s))$ est nul. D'après la proposition 57, on en déduit que $\alpha'_s = 0$.

Soit $s \in G_{ell}$. Si la classe de conjugaison de s ne rencontre pas H la variété $\mathcal{M}(s)$ est vide et on a $\alpha_s = 0$. Si la classe de conjugaison de s rencontre H, soient $s_i \in H$ un système de représentants des classes de H-conjugaison dans $\mathcal{O}_s \cap H$. Soit $\mathcal{M}_i = G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i) \subset \mathcal{M}(s_i)$. D'après le lemme 63, la variété $\mathcal{M}(s)$ est réunion disjointe des sous-variétés fermées $g_i\mathcal{M}_i$, où $\mathcal{M}_i = G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i)$. Par G-invariance, la restriction de α_s à chaque $g_i\mathcal{M}_i$ est égale à $g_i\alpha'_{s_i}$, et donc est nulle. Comme $I(s)$ est fini, $\alpha_s = 0$.

Démontrons la surjectivité. Soit $\beta = (\beta_s)_{s \in H_{ell}} \in \mathcal{K}_H(M)$ et construisons $\alpha \in \mathcal{K}_G(\mathcal{M})$ tel que $E(\alpha) = \beta$. Si $s \in H_{ell}$, on note $\alpha'_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}(G(s) \times_{H(s)} M(s))$ l'unique élément tel que $E(\alpha'_s) = \beta_s$. Soit $s \in G_{ell}$. Si la classe de conjugaison de

s ne rencontre pas H, on pose $\alpha_s = 0$. Supposons que la classe de conjugaison de s rencontre H. Nous employons les mêmes notations que ci-dessus dans la démonstration de l'injectivité. Ecrivons $\mathcal{M}(s) = \cup_i g_i \cdot (G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i))$, l'union étant disjointe. On définit α_s comme étant égal à l'élément $g_i \cdot \alpha'_{s_i}$ sur $g_i \cdot (G(s_i) \times_{H(s_i)} M(s_i))$. On vérifie grâce à la condition de H-invariance sur la botte β que α_s ne dépend pas du choix du système de représentants g_i. On obtient ainsi une collection de classes de cohomologie équivariante $\alpha_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}(M(s))$ qui vérifie la condition d'invariance requise.

Vérifions maintenant la condition de recollement. Soit donc $s \in G_{ell}$. Nous devons montrer qu'il existe $a > 0$ et un représentant $\alpha_{s,a}$ de α_s tels que sur $\mathcal{M}(s)$, $T_{s,S}(\alpha_{s,a}) = \alpha_{se^S}$ pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Il suffit de le faire pour $s = e$ en remplaçant $\mathcal{M}(s)$ par une des variétés $\mathcal{M}_i, i \in I(s)$, G par $G(s_i)$, H par $H(s_i)$ et M par $M(s_i)$.

Soit $\beta_e \in \mathcal{H}_{[H]}(M)$ et choisissons un représentant de $\beta_e \in \mathcal{H}^\infty_H(\mathfrak{h}, M)$ que nous notons $\tilde{\beta}$. Alors on choisit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}^\infty_G(\mathfrak{g}, \mathcal{M})$ tel que $E(\tilde{\alpha}) = \tilde{\beta}$. C'est un représentant de α_e. Soit $S \in \mathfrak{h}_{ell}$. Comme β est une botte, il existe donc $b > 0$ tel que l'on ait $M(e^S) = M(S), H(e^S) = H(S)$ et l'égalité $T_S\tilde{\beta} = \beta_{e^S}$ dans $\mathcal{H}_{[H(S)]}(M(S))$ pour tout $S \in \mathfrak{h}_{ell,b}$. Soit $a < b$ et tel que $G(e^S) = G(S)$ pour $S \in \mathfrak{h}_{ell,a}$. La sous-variété $G(S) \times_{H(S)} M(S)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}(e^S)$. La restriction de $T_S\tilde{\alpha}$ à $G(S) \times_{H(S)} M(S) \subset \mathcal{M}(S)$ détermine une classe dans $\mathcal{H}_{[G(S)]}(G(S) \times_{H(S)} M(S))$ qui coïncide avec la restriction de $\alpha_{e^S} \in \mathcal{H}_{[G(e^S)]}(\mathcal{M}(e^S))$ à $G(S) \times_{H(S)} M(S) \subset \mathcal{M}(e^S)$ puisque ces classes se restreignent respectivement sur $\mathfrak{h}(S) \times M(S)$ en $T_S\tilde{\beta}$ et en β_{e^S}.

Soit maintenant $S \in \mathfrak{g}_{ell,b}$. Etudions les zéros de S sur $B = G/H$ et sur $\mathcal{M} = G \times_H M$. On voit que $B(S)$ est vide lorsque l'orbite de S ne rencontre pas $\mathfrak{h}$. L'ensemble des $G(S)$-orbites dans $B(S)$ est fini et paramétré par les représentants g_i des doubles classes de l'ensemble $N_S = \{g \in G, g^{-1} \cdot S \in \mathfrak{h}\}$ sous l'action de $G(S) \times H$. On note $S_i = g_i^{-1}S \in \mathfrak{h}$ et $\mathcal{M}_i = G(S_i) \times_{H(S_i)} M(S_i)$. On a alors $\mathcal{M}(S) = \cup_i g_i \mathcal{M}_i$. Par G-invariance, pour montrer que $T_S\tilde{\alpha} = \alpha_{e^S}$ sur $\mathcal{M}(S) = \cup_i g_i \cdot \mathcal{M}_i$, il suffit de montrer que pour chaque i, $T_{S_i}\alpha|\mathcal{M}_i = \alpha(e^{S_i})|\mathcal{M}_i$, lorsque $S_i \in \mathfrak{h}_b$, ce qui a été prouvé ci-dessus. ∎

Si M est un point $\bullet$, on obtient ainsi un isomorphisme $\mathcal{K}_G(G/H) \cong \mathcal{K}_H(\bullet) = C^\infty(H)^H$. Décrivons cet isomorphisme plus directement. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ une famille de formes équivariantes représentant un élément de $\mathcal{K}_G(M)$. La fonction $E(\alpha) \in C^\infty(H)^H$ est l'unique fonction H-invariante telle que l'on ait $E(\alpha)(se^Y) = (\alpha_s(Y))_{[0]}(e)$ pour tout $s \in H_{ell}$ et pour tout $Y \in \mathfrak{h}(s)_a$, où a est suffisamment petit.

Appendice.

Cet appendice contient pour la commodité du lecteur un résultat technique utilisé plus haut.

Lemme 66 *Soit G un groupe de Lie réel séparable. Soit $s \in G$ un élément tel que $Ad(s)$ soit un endomorphisme semi-simple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On suppose que la classe de conjugaison $\mathcal{O}_s$ de s est fermée. Soit H un sous-groupe fermé de G. Alors les classes de conjugaison de H contenues dans $\mathcal{O}_s \cap H$ sont fermées et $\mathcal{O}_s \cap H$ est une réunion localement finie de classes de conjugaisons de H.*

Identifions l'espace tangent à $t \in G$ au translaté à gauche par t de $\mathfrak{g}$. L'espace tangent en un point $t \in \mathcal{O}_s \cap H$ est égal à $(Ad(t^{-1}) - 1)\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap (Ad(t^{-1}) - 1)\mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{O}_s \cap H$. Comme G est séparable et $\mathcal{O}_s$ fermée, $\mathcal{O}_s$ est homéomorphe à $G/G(t)$ par l'application naturelle. L'endomorphisme $Ad(t)$ est semi-simple car il est conjugué de $Ad(s)$. Ecrivons une décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{r}(t) \oplus \mathfrak{q}'(t) \oplus \mathfrak{q}''(t)$$

de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces $Ad(t)$-stables de sorte que l'on ait $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{q}'(t)$ et $\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{r}(t)$.

Il existe des voisinages U' de 0 dans $\mathfrak{q}'(t)$, U'' de 0 dans $\mathfrak{q}''(t)$, V' de 0 dans $\mathfrak{h}(t)$ et V'' de 0 dans $\mathfrak{r}(t)$ tels que

1. l'application $(Q', Q'', Y', Y'') \mapsto e^{Q''}e^{Q'}(te^{Y'}e^{Y''})e^{-Q'}e^{-Q''}$ soit un difféomorphisme de $U' \times U'' \times V' \times V''$ sur un ouvert W de G,
2. $e^{Q''}e^{Q'}(te^{Y'}e^{Y''})e^{-Q'}e^{-Q''}$ appartienne à $\mathcal{O}_s$ si et seulement si $Y' = Y'' = 0$,
3. $e^{Q''}e^{Q'}(te^{Y'}e^{Y''})e^{-Q'}e^{-Q''}$ appartienne à H si et seulement si $Q'' = Y'' = 0$.

Donc $W \cap H \cap \mathcal{O}_s$ est défini par les équations $Q'' = Y'' = Y' = 0$. C'est l'intersection avec $W \cap H$ d'une classe de conjugaison de H, et c'est un ensemble fermé dans $W \cap H$. Le lemme en résulte facilement. ∎

3.5 Théorie de Chern-Weil.

Nous reprenons l'exemple de la section 1.4. Soit G un groupe de Lie presque algébrique. Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe G. Soit L un groupe de Lie presque algébrique agissant à gauche sur P et commutant à l'action de G.

Soit $s \in L_{ell}$ et soit $B(s)$ la variété des points fixes de l'action de s sur B. Si $x \in B(s)$ et si y est un point de P au dessus de x, il existe un unique élément $r(s, y) \in G$ (r est employé pour "right") tel que $sy = yr(s, y)$. On a $r(s, yg) = g^{-1}r(s, y)g$.

Définition 67 . *On dira que l'action de L sur le fibré principal P est principalement régulière si l'action de $L \times G$ sur P vérifie les conditions suivantes.*

1. L'action de $L \times G$ sur P est régulière.

2. Pour tout $s \in L_{ell}$ et tout $y \in P$ au dessus de $B(s)$ l'élément $r(s, y) \in G$ est elliptique.

(Nous dirons en général régulière au lieu de principalement régulière en espérant que le contexte évitera les confusions). Cette seconde condition est en général vérifiée. C'est clair si G est compact. Il en est de même, d'après le lemme 63, si G est un sous-groupe presque algébrique de L, pour la fibration principale $L \to L/G$.

Soient $s \in L_{ell}$ et $s' \in G_{ell}$. Soit $P(s,s') = \{y \in P; sy = ys'\}$ l'espace des points fixes de (s,s'). Comme $(s,s') \in L \times G$ est elliptique et comme l'action de $L \times G$ dans P est régulière on voit, en regardant l'application tangente à la projection $P \to B$, que l'application $P(s,s') \to B(s)$ est une submersion. Notons $B(s)^{s'}$ l'ouvert de $B(s)$ image de $P(s,s')$. Alors $P(s,s')$ est un fibré principal de groupe $G(s')$ muni d'une action à gauche de $L(s)$. Soient $s', s'' \in G_{ell}$, alors $B(s)^{s'} \cap B(s)^{s"}$ n'est pas vide si et seulement si s' et $s"$ sont conjugués dans G et dans ce cas $B(s)^{s'} = B(s)^{s"}$. Comme l'action de L est principalement régulière, $B(s)$ est réunion disjointe des sous-variétés ouvertes $B(s)^{s'}$, paramétrée par les classes de conjugaison d'éléments $s' \in G_{ell}$ pour lesquels $P(s,s')$ est non vide.

Le même argument montre que l'action de L dans B est régulière.

Supposons qu'il existe une connection ω pour la fibration $P \to B$ invariante par l'action de L. Nous allons associer à toute fonction $\phi \in C^\infty(G)^G$ un bouquet $W(\phi) \in \mathcal{Z}_L(B)$ de formes différentielles équivariantes. La connection ω définit une connection $L(s)$-invariante pour chacune des fibrations principales $P(s,s') \to B(s)^{s'}$. En effet, $\omega | P(s,s') \in \mathcal{A}^1(P(s,s')) \otimes \mathfrak{g}(s')$ comme on le voit par G-invariance et $\omega | P(s,s')$ est une 1-forme de connection $L(s)$-invariante. Soit $\phi_{s'} \in C^\infty(\mathfrak{g}(s'))^{G(s')}$ la fonction définie par $\phi_{s'}(Y) = \phi(s'e^Y)$, pour $Y \in \mathfrak{g}(s')$. L'homomorphisme de Chern-Weil (proposition 8) associe à $\phi_{s'}$ une forme équivariante fermée $W_\omega \phi_{s'} \in \mathcal{A}^\infty_{L(s)}(\mathfrak{l}(s), B(s)^{s'})$. Explicitons $W_\omega \phi_{s'}$ en fonction de la connection. Soit $Y \in \mathfrak{l}$ et soit $\Omega(Y) = \mu(Y) + \Omega \in \mathcal{A}(P) \otimes \mathfrak{g}$ la courbure équivariante de ω. Si $Y \in \mathfrak{l}(s)$, la restriction $\Omega(Y)|P(s,s')$ de la forme $\Omega(Y)$ à $P(s,s')$ est dans $\mathcal{A}(P(s,s')) \otimes \mathfrak{g}(s')$ et $\phi(s'e^{\Omega(Y)|P(s,s')})$ est une forme $G(s')$-basique. On pose

$$W_\omega \phi_{s'}(Y) = \phi(s'e^{\Omega(Y)|P(s,s')}).$$

Comme ϕ est une fonction G-invariante sur G, il est facile de voir que $W_\omega(\phi_{s'})$ ne dépend que de la classe de conjugaison de s'. Ecrivons $B(s) = \cup_{s' \in (G_{ell}/G)} B(s)^{s'}$ et définissons $W_s \phi \in \mathcal{A}^\infty_{L(s)}(\mathfrak{l}(s), B(s))$ comme étant égale à $W_{s'}(\phi_{s'})$ sur $B(s)^{s'}$.

Soit $s \in L_{ell}$ et soit $S \in \mathfrak{l}(s)_{ell}$. Alors $L(s) \cap L(S) \subset L(se^S)$ et $B(s) \cap B(S) \subset B(se^S)$.

Lemme 68 *Soit $S \in \mathfrak{l}(s)_{ell}$. Alors, si $Y \in L(S) \cap L(s)$, on a*

$$(W_s \phi)(S+Y)|B(s) \cap B(S) = (W_{se^S} \phi)(Y)|B(s) \cap B(S)$$

dans $\mathcal{A}^\infty_{L(s) \cap L(S)}(\mathfrak{l}(s) \cap \mathfrak{l}(S), B(s) \cap B(S))$.

Démonstration. Il suffit de démontrer cette relation pour $s = e$. Soit $S \in \mathfrak{l}_{ell}$. Considérons le groupe à un paramètre $\exp(tS)$. Au dessus de $B(S)$, il produit un groupe à un paramètre de transformations verticales : si $y \in P$ est au dessus de $x \in B(S)$, $\exp(tS)y = y\exp(tr(S,y))$ où $r(S,y)$ est un élément de $\mathfrak{g}_{ell}$. La classe de conjugaison de $r(S,y)$ ne dépend que de la projection $x \in B(S)$ de y et est localement constante. On écrit $B(S) = \cup_{S' \in (\mathfrak{g}_{ell}/G)} B(S)^{S'}$ où $B(S)^{S'}$ désigne la sous-variété ouverte et fermée de $B(S)$ sur laquelle l'élément $r(S,y) \in \mathfrak{g}_{ell}$ produit par l'action verticale de S est dans la classe de conjugaison de S'. Soit $Y \in \mathfrak{l}(S)$. L'espace $P(S,S')$ des zéros de (S,S') sur P est un fibré principal sur $B(S)^{S'}$. On a donc

$$(W_e\phi)(S+Y)|B(S)^{S'} = \phi(e^{\Omega(S+Y)|P(S,S')}).$$

On a

$$\mu(S)|P(S,S') = -\omega(S_P)|P(S,S') = \omega({}_PS')|P(S,S') = S'.$$

Donc $\Omega(S+Y) = \mu(S+Y) + \Omega = S' + \Omega(Y)$ et $\Omega(Y)|P(S,S') \in \mathcal{A}(P(S,S')) \otimes \mathfrak{g}(S')$. Donc $e^{\Omega(S+Y)|P(S,S')} = e^{S'}e^{\Omega(Y)|P(S,S')}$. Mais on a $B(S)^{S'} \subset B(e^S)^{e^{S'}}$ et $P(S,S') \subset P(e^S, e^{S'})$. Donc, si $Y \in \mathfrak{l}(S)$, on a

$$(W_{e^S}\phi)(Y)|B(S)^{S'} = \phi(e^{S'}e^{\Omega(Y)|P(S,S')})$$

et on obtient l'égalité cherchée. ∎

Nous avons donc démontré la proposition suivante.

Proposition 69 *Soient G et L deux groupes presque algébriques. Soit $P \to B$ un fibré principal sous l'action de G, muni d'une action à gauche de L principalement régulière. Supposons qu'il existe une connection ω L-invariante. Alors si $\phi \in C^\infty(G)^G$, la famille $W_\omega\phi = (W_s\phi)_{s \in L_{ell}}$ d'éléments de $\mathcal{A}^\infty_{L(s)}(\mathfrak{l}(s), B(s))$ est un bouquet de formes différentielles équivariantes. La botte de classes de cohomologie définie par $W_\omega(\phi)$ est indépendante du choix de ω. On la note $W\phi \in \mathcal{K}_L(B)$*

On peut donc munir $\mathcal{K}_L(P/G)$ d'une structure de $C^\infty(G)^G$ module en posant pour $\phi \in C^\infty(G)^G$ et $\alpha \in \mathcal{K}_L(B)$

$$\phi \cdot \alpha = W(\phi)\alpha.$$

Remarque 70 *Considérons une espace homogène réductif $G \to G/H$ comme dans le théorème 64. On a vu que l'application de restriction $E : \mathcal{K}_G(G/H) \to C^\infty(H)^H$ est un isomorphisme. Choisissons une connection G-invariante ω. Alors $W_\omega\phi$ est un bouquet représentant de $E^{-1}\phi$. En particulier, ce représentant se recolle non seulement au niveau cohomologique, mais au niveau formes différentielles.*

Remarque 71 *On peut généraliser la proposition ci-dessus au cas considéré dans le paragraphe 1.8: soit P une variété munie d'une action régulière d'un groupe G pour laquelle un sous-groupe distingué N opère librement. Lorsque la condition analogue à la condition 67 est vérifiée, on peut associer à une fonction $\phi \in C^\infty(G)^G$ un bouquet $W_\omega(\phi) \in \mathcal{B}_{G/N}(P/N)$ de formes différentielles équivariantes. La botte de classes de cohomologie équivariante déterminée par $W_\omega(\phi)$ est indépendante de la connection.*

Soit M une variété sur laquelle le groupe L opère. Soit $\mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel réel (ou complexe) L-équivariant. On explicite les constructions précédentes appliquées au fibré principal P de groupe $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ (ou $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$) des repères de $\mathcal{E}$. Soit $s \in L_{ell}$. Au dessus de $M(s)$, l'action de s sur $\mathcal{E}$ produit un automorphisme $s^{\mathcal{E}}$ du fibré $\mathcal{E}$.

Définition 72 *On dira que l'action de L sur le fibré $\mathcal{E}$ est principalement régulière si*

1. l'action de L sur $\mathcal{E}$ est régulière,

2. pour tout $s \in L_{ell}$ et pour tout $m \in M(s)$ l'automorphisme $s^{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}_m$ est elliptique.

Comme pour la définition 67, nous dirons en général régulier plutôt que principalement régulier.

On dira que le fibré $\mathcal{E} \to M$ est connecté si $\mathcal{E}$ est muni d'une connection L-invariante ∇. Pour $X \in \mathfrak{l}$, soit $F(X) \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(\mathcal{E}))$ sa courbure équivariante (définie dans la section 1.5).

Soit $s \in L_{ell}$. La restriction de ∇ à $M(s)$ fournit une connection $L(s)$-équivariante sur $\mathcal{E}|M(s)$ dont la courbure équivariante est obtenue pour $X \in \mathfrak{l}(s)$ par restriction de $F(X)$ à $M(s)$.

Appliquons la construction précédente à la fonction $\phi(g) = \mathrm{Tr}(g)$. On définit pour $X \in \mathfrak{l}(s)$

$$\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla)(X) = \mathrm{Tr}(s^{\mathcal{E}} e^{F(X)|M(s)}).$$

La forme $\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla)$ est une forme différentielle $L(s)$-équivariante fermée sur $M(s)$.

Lemme 73 *Pour tout $S \in \mathfrak{l}(s)_{ell}$ on a l'égalité*

$$T_{s,S}\, \mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla) = r_{s,S}\, \mathrm{ch}_{se^S}(\mathcal{E}, \nabla)$$

dans $\mathcal{A}^{\infty}_{L(s)\cap L(S)}(\mathfrak{l}(s) \cap \mathfrak{l}(S), M(s) \cap M(S))$.

Démonstration. Nous explicitons les étapes de la démonstration précédente. Comme S_M s'annule sur $M(s) \cap M(S)$, le moment de S est égal à l'action $S^{\mathcal{E}}$ verticale produite par S sur $\mathcal{E}|M(s) \cap M(S)$. Donc $F(S + Y) = S^{\mathcal{E}} + F(Y)$. Pour $Y \in \mathfrak{l}(s) \cap \mathfrak{l}(S)$,

$$T_{s,S}\, \mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla)(Y) = \mathrm{Tr}(s^{\mathcal{E}} \exp(S^{\mathcal{E}} + (F(Y)|M(s) \cap M(S)))).$$

Sur $M(s) \cap M(S)$, les matrices $S^{\mathcal{E}}$ et $F(Y)$ commutent. Donc

$$\mathrm{Tr}(s^{\mathcal{E}} \exp(S^{\mathcal{E}} + F(Y)|M(s) \cap M(S))) = \mathrm{Tr}(s^{\mathcal{E}} \exp S^{\mathcal{E}} \exp F(Y)|M(s) \cap M(S)).$$

∎

La proposition suivante est donc claire.

Proposition 74 *Soit $\mathcal{E}$ un fibré L-équivariant connecté. La famille*

$$(\mathrm{ch}_s(\mathcal{E}, \nabla))_{s \in L_{ell}}$$

est un bouquet de formes équivariantes. La botte de classes de cohomologie correspondante $\mathrm{ch}(\mathcal{E}) \in \mathcal{K}_L(M)$ est indépendante de la connection L-équivariante choisie.

On dira que $\mathrm{ch}(\mathcal{E})$ est le *caractère de Chern équivariant* du fibré (connecté) $\mathcal{E}$.

L'application $\mathcal{E} \to \mathrm{ch}(\mathcal{E})$ est un caractère: si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux fibrés connectés, alors $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ et $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ sont des fibrés connectés et

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}) &= \mathrm{ch}(\mathcal{E}) + \mathrm{ch}(\mathcal{F}) \\ \mathrm{ch}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) &= \mathrm{ch}(\mathcal{E})\,\mathrm{ch}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

(Ces égalités sont déjà vraies dans $\mathcal{Z}_L(M)$).

Si $M = L/H$ est un espace homogène réductif, un fibré vectoriel L-équivariant est un fibré $\mathcal{E}_\tau = L \times_H E$ associé à une représentation $\tau : H \to \mathrm{GL}(E)$ de dimension finie de H. La connection L-invariante sur le fibré principal $L \to L/H$ fournit une connection L-invariante sur $\mathcal{E}_\tau$. Considérons l'isomorphisme de restriction $E : \mathcal{K}_L(L/H) \to C^\infty(H)^H$. Soit $\mathrm{Tr}\,\tau$ la fonction trace de la représentation τ. On a

$$E(\mathrm{ch}(\mathcal{E}_\tau)) = \mathrm{Tr}\,\tau.$$

Soit G un groupe de Lie et soit N un sous-groupe distingué de G. Soit P une variété munie d'une action à droite de G. Supposons que l'action du sous-groupe N soit principale. Considérons la fibration $q : P \to P/N$. L'image réciproque q^* induit une application de $\mathcal{K}_{G/N}(P/N)$ dans $\mathcal{K}_G(P)$. Il serait tentant de généraliser le théorème 22 au groupe $\mathcal{K}_G(P)$. Toutefois nous ne pouvons le faire sans hypothèses supplémentaires. Nous supposerons que le groupe G/N et la variété P/N sont compacts. Il existe alors une connection G-invariante pour la fibration $q : P \to P/N$, puisqu'une connection N-invariante existe (car l'action de N est principale) et qu'il suffit alors de la moyenner sur G/N.

Théorème 75 *Soit G un groupe de Lie et soit $N \subset G$ un sous-groupe fermé distingué de G. Soit P une variété munie d'une action à droite de G telle que l'action du sous-groupe N soit principale. Supposons que le groupe G/N et la variété P/N soient compacts. Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{K}_{G/N}(P/N) \to \mathcal{K}_G(P)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Considérons tout d'abord la situation produit. Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe G. Soit L un groupe de Lie opérant sur P à gauche. Nous supposons que L est compact, donc l'action de L sur P vérifie la condition

67. Nous employons les notations de la démonstration de 69. Supposons de plus B compacte. Montrons tout d'abord que l'application q^* est injective. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s\in L}$ un élément de $\mathcal{K}_L(B)$ tel que $q^*\alpha = 0$. Notons $\alpha_{s,s'} = \alpha_s|B(s)^{s'}$. L'espace $P(s,s')$ est un fibré principal sur la variété compacte $B(s)^{s'}$. Notons $q_{s,s'} : P(s,s') \to B(s)^{s'}$ la fibration correspondante. Donc pour tout $(s,s') \in L \times G_{ell}$, l'élément $q^*_{s,s'}\alpha_{s,s'} \in \mathcal{H}_{[L(s)\times G(s')]}(P(s,s'))$ est nul. Le groupe $L(s)$ est compact. D'après la proposition 58, l'application $q^*_{s,s'} : \mathcal{H}_{[L(s)]}(B(s)^{s'}) \to \mathcal{H}_{[L(s)\times G(s')]}(P(s,s'))$ est injective. On en déduit que $\alpha_s|B(s)^{s'}$ est nulle. La variété $B(s)$ est union disjointe finie de variétés $B(s)^{s'}$. Donc $\alpha_s = 0$.

Montrons que l'application q^* est surjective. Soit $\beta = (\beta_{s,s'})_{s\in L, s'\in G_{ell}}$ un élément de $\mathcal{K}_{L\times G}(P)$. Construisons un élément $\alpha \in \mathcal{K}_L(B)$ tel que $\beta = q^*\alpha$. On définit $\alpha_{s,s'}|B(s)^{s'}$ comme l'unique élément de $\mathcal{H}_{[L(s)]}(B(s)^{s'})$ tel que $q^*_{s,s'}\alpha_{s,s'} = \beta_{s,s'}$. La condition de G-invariance sur la botte β implique que $\alpha_{s,s'}$ ne dépend que de la classe de conjugaison de s'. On définit α_s comme étant égal à $\alpha_{s,s'}$ sur $B(s)^{s'}$. On obtient ainsi une collection $\alpha = (\alpha_s)_{s\in L}$ de classes $\alpha_s \in \mathcal{H}_{[L(s)]}(B(s))$. L'invariance sous L de β implique que α vérifie la condition d'invariance voulue. Vérifions la condition de recollement. En changeant de notations ($L = L(s)$, $P = q^{-1}(B(s))$, etc...) il suffit de le vérifier pour $s = e$. Choisissons un représentant $\tilde{\beta} \in \mathcal{H}^\infty_{L\times G}(\mathfrak{l} \times \mathfrak{g}, P)$ de β_e. On choisit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}^\infty_L(\mathfrak{l}, B)$ tel que $q^*\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$. L'élément $\tilde{\alpha}$ est un représentant de α_e. Il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $S \in \mathfrak{l}_a$ et tout $S' \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on ait $L(e^S) = L(S)$, $G(e^{S'}) = G(S')$, $P(e^S, e^{S'}) = P(S,S')$ et $T_{S,S'}\tilde{\beta} = \beta_{e^S, e^{S'}}$ dans $\mathcal{H}_{[L(e^S)\times G(e^{S'})]}(P(e^S, e^{S'}))$. Soit $B(S) = \cup_{S'\in(\mathfrak{g}_{ell}/G)} B(S)^{S'}$. Puisque L est compact, un voisinage elliptique $\mathfrak{l}_a$ de 0 dans $\mathfrak{l}$ est un voisinage aussi petit que l'on veut pour la topologie ordinaire. Comme $B(S)$ est compacte, la classe de conjugaison de $r(S,y) \in \mathfrak{g}_{ell}$ (qui ne dépend que de $x \in B(S)$) produite par l'action verticale de S au dessus de $B(S)$ reste dans un voisinage invariant de 0 pour la topologie ordinaire, donc à fortiori pour la topologie elliptique. On choisit $b \le a$ tel que si $S \in \mathfrak{l}_b$ alors $B(S) = B(e^S)$ et $B(S) = \cup_{S'\in((\mathfrak{g}_{ell}\cap\mathfrak{g}_b)/G)} B(S)^{S'}$. Notons $s = e^S, s' = e^{S'}$. On a $B(S)^{S'} = B(s)^{s'}, P(S,S') = P(s,s')$. Comme ${}_PS'$ est vertical, on voit que

$$T_{S,S'}q^*\tilde{\alpha} = q^*_{s,s'}(T_S\tilde{\alpha}|B(S)^{S'}).$$

D'autre part,

$$T_{S,S'}q^*\tilde{\alpha} = T_{S,S'}\tilde{\beta} = \beta_{s,s'}.$$

On en déduit l'égalité $\beta_{s,s'} = q^*_{s,s'}(T_S\tilde{\alpha}|B(s)^{s'})$ dans $\mathcal{H}_{[L(s)\times G(s')]}(P(s,s'))$. Mais par définition $\beta_{s,s'} = q^*_{s,s'}\alpha_{s,s'}$. D'après la proposition 58, l'application $q^*_{s,s'}$ est injective. Donc $\alpha_{s,s'} = \alpha_s|B(s)^{s'} = T_S\tilde{\alpha}|B(s)^{s'}$. Ceci étant vrai pour le recouvrement fini de $B(s)$ par les variétés non vides $B(s)^{e^{S'}}$, $S' \in \mathfrak{g}_b$, on obtient $T_S\tilde{\alpha} = \alpha_s$ et la famille α_s vérifie la condition de recollement voulue.

Retournons à la situation du théorème 75. On raisonne comme dans la démonstration de 22. On note L le groupe G/N et on considère la variété $L \times P$.

Le groupe L est compact ainsi que la variété $(L \times P)/G \cong P/N$. L'application

$$q_G^* : \mathcal{K}_L(P/N) \to \mathcal{K}_{L\times G}(L \times P)$$

est donc un isomorphisme, d'après le cas produit.

Considérons l'action de $L \times G$ sur $L \times P$. Soit $\Delta(G)$ le sous-groupe $\{(\overline{g}, g)\}$ de $L \times G$. Alors le $(L \times G)$-espace $L \times P$ est isomorphe à l'espace induit $(L \times G) \times_{\Delta(G)} P$ par l'application $[(l, g), x] \to (lg^{-1}, xg^{-1})$ pour $l \in L, g \in G, x \in P$. L'espace homogène $(L \times G)/\Delta(G)$ est réductif, puisque l'algèbre de Lie de L est un supplémentaire invariant sous l'action adjointe de $\Delta(G)$ de l'algèbre de Lie $(\overline{X}, X)$ de $\Delta(G)$. L'application $E : \mathcal{K}_{L\times G}(L \times P) \to \mathcal{K}_G(P)$ est donc un isomorphisme d'après le théorème 67. Le composé Eq_G^* coïncide avec q^* et notre théorème est démontré. ∎

4 Groupe métalinéaire et orientations.

Dans cette section, nous rassemblons quelques résultats sur l'orientation des variétés de points fixes de transformations elliptiques nécessaires à l'intégration des bottes.

4.1 Transformations infinitésimalement elliptiques.

Rappelons que si U est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, une orientation de U est un choix d'une des deux demi-droites de $\Lambda^{\max}(U)$. Si $U = 0$, on note ξ_0 l'orientation contenant le point 1. Si ξ et ξ' sont des orientations de U et U', l'orientation $\xi \wedge \xi'$ de $U \oplus U'$ est bien définie. Si o est une orientation de $U \oplus U'$ et ξ une orientation de U, on note o/ξ l'orientation de U' telle que $(o/\xi) \wedge \xi = o$. On définit de même l'orientation $\xi\backslash o$. Si l'un des deux espaces U ou U' est de dimension paire (ce qui sera souvent le cas ci-dessous), les deux orientations $\xi\backslash o$ et o/ξ sont égales.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $S \in \mathrm{End}(V)_{ell}$ une transformation infinitésimalement elliptique de V. Alors il existe des entiers positifs ℓ, r tels que $n = 2\ell + r$, une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2\ell-1}, e_{2\ell}, f_1, \ldots, f_r\}$ de V et des nombres réels non nuls $\lambda_i, 1 \leq i \leq \ell$ tels que

$$\begin{aligned} Se_{2i-1} &= \lambda_i e_{2i}, \\ Se_{2i} &= -\lambda_i e_{2i-1}, \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq \ell \\ Sf_j &= 0, \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq r. \end{aligned}$$

Supposons S inversible. Alors $r = 0$ et la dimension de V est paire: $n = 2\ell$. On a alors $\det S = \lambda_1^2\lambda_2^2 \cdots \lambda_\ell^2$. Choisissons une orientation o de V. Supposons la base précédente $e_1, e_2, \ldots, e_{2\ell-1}, e_{2\ell}$ orientée. Ces choix déterminent une racine carrée de $\det S$ en posant

(42) $$\det{}_o^{1/2} S = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_\ell.$$

Cette racine carrée ne dépend que de l'orientation de V. Si S n'est pas inversible, on pose $\det_o^{1/2} S = 0$. On obtient ainsi une fonction $\det_o^{1/2}$ sur $\mathrm{End}(V)_{ell}$ dépendant de l'orientation o de V.

Réciproquement, si on suppose S inversible, S détermine une orientation $\zeta(S)$ de V par la convention

$$\det{}_{\zeta(S)}^{1/2} S > 0. \tag{43}$$

Remarque 76 *On peut définir $\zeta(S)$ sans choisir de base: soit $\tau^{-1}(S)$ l'élément de $\Lambda^2(V)$ défini ci-dessous (formule 59). Alors $\zeta(S)$ est l'orientation qui contient la composante de degré* $\dim(V)$ *de l'élément* $\exp(\tau^{-1}(S))$ *de* $\Lambda(V)$.

Plus généralement, si U est un sous-espace de V stable par S tel que la restriction $S|_U$ soit inversible, nous posons

$$\zeta(U, S) = \zeta(S|_U). \tag{44}$$

Nous disons que $\zeta(U, S)$ est l'orientation de U définie par S.

Enfin, pour $S \in End(V)_{ell}$ rappelons la décomposition $V = V(S) \oplus \mathfrak{q}(S)$, où $V(S) = \ker(S)$ et $\mathfrak{q}(s) = S(V)$. Nous notons

$$\zeta(S) = \zeta(\mathfrak{q}(S), S). \tag{45}$$

Ceci a un sens car la restriction de S à $\mathfrak{q}(S)$ est inversible, et, si S est inversible, ceci ne diffère pas de la définition précédente.

Le but de cette section est de décrire les notions équivalentes à $\zeta(S)$ et $\det_o^{1/2} S$ pour des transformations elliptiques. Nous allons voir qu'elles ne sont pas définies pour les éléments elliptiques de $\mathrm{GL}(V)$ mais pour ceux d'un certain recouvrement $\mathrm{ML}(V)$ d'ordre 2 de $\mathrm{GL}(V)$.

4.2 Groupe Pin(V).

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme quadratique Q définie positive. On note $B(v, w)$ la forme bilinéaire symétrique telle que $B(v, v) = Q(v)$. On considère l'algèbre de Clifford $C(V, Q)$ dans laquelle les relations sont $v^2 = -Q(v)$.

L'algèbre $C(V, Q)$ est graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note $C^+(V, Q)$ la partie paire et $C^-(V, Q)$ la partie impaire de $C(V, Q)$. On note $a \mapsto a^*$ l'antiautomorphisme tel que $v^* = -v$. Donc $(ab)^* = b^* a^*$.

Pour une algèbre A graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on note $A^\times$ le groupe des éléments homogènes et inversibles de A et $p(a)$ est la parité d'un élément homogène $a \in A$. Pour $a \in A^\times$, on note $\iota(a)$ l'automorphisme intérieur défini par a :

$$\iota(a)(b) = (-1)^{p(a)p(b)} aba^{-1}.$$

L'application ι est un homomorphisme de $A^\times$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes de A préservant la graduation. Son noyau est $Z^\times$ si Z est la sous-algèbre de A formée des éléments qui commutent (au sens gradué) aux éléments de A.

Dans le cas de $C(V,Q)$, on a $Z = \mathbb{R}$, et ι est surjective (par le théorème de Skolem-Noether gradué).

On définit le groupe de Clifford $\Gamma(V,Q)$ comme le sous-groupe de $C(V,Q)^\times$ formé des éléments a tels que $\iota(a)(V) = V$. Pour $a \in \Gamma(V,Q)$, on note $j(a) \in \mathrm{GL}(V)$ la restriction de $\iota(a)$ à V. L'application j est un homomorphisme surjectif de $\Gamma(V,Q)$ sur le groupe orthogonal $\mathrm{O}(V,Q)$, de noyau $\mathbb{R}^\times$. Si $a \in \Gamma(V,Q)$, l'élément aa^* est un scalaire > 0 noté $N(a)$. La fonction N vérifie $N(a) = N(a^*)$ et $N(ab) = N(a)N(b)$. On pose $\Gamma^+(V,Q) = \Gamma(V,Q) \cap C(V,Q)^+$ et $\Gamma^-(V,Q) = \Gamma(V,Q) \cap C(V,Q)^-$.

Par exemple, soit $v \in V$. On a $v \in C(V,Q)^\times$ si et seulement si $Q(v) \neq 0$, et alors $v^{-1} = -v/Q(v)$. Dans ce cas, v appartient à $\Gamma(V,Q)$, on a $N(v) = Q(v)$ et $j(v)$ est la symétrie de vecteur v et de noyau l'hyperplan orthogonal à v.

Le groupe $\mathrm{Pin}(V,Q)$ est le sous-groupe des éléments de $a \in \Gamma(V,Q)$ tels que $N(a) = 1$. Soit $v \in V$. Alors $v \in \mathrm{Pin}(V,Q)$ si et seulement si $Q(v) = 1$. L'application j induit une surjection de $\mathrm{Pin}(V,Q)$ sur $\mathrm{O}(V,Q)$. Le noyau est le sous-groupe $\{1,-1\}$ de $\mathbb{R}^\times$. Pour éviter des confusions, nous noterons aussi ϵ l'élément -1 de $\ker j$.

On note $\mathrm{Spin}(V,Q)$ le groupe $\Gamma^+(V,Q) \cap \mathrm{Pin}(V,Q)$. L'application j induit un morphisme de $\mathrm{Spin}(V,Q)$ sur $\mathrm{SO}(V,Q)$ de noyau $\{1,\epsilon\}$. Nous poserons $\mathrm{Pin}^-(V) = \Gamma^-(V,Q) \cap \mathrm{Pin}(V,Q)$.

Dans la suite nous enlevons en général Q de la notation.

Soit U un sous-espace de V. Soit U' l'orthogonal de U. La sous-algèbre de $C(V)$ engendrée par U est canoniquement isomorphe à $C(U)$. Les groupes $\Gamma(U)$, $\mathrm{Pin}(U)$ et $\mathrm{Spin}(U)$ sont les sous-groupes des groupes $\Gamma(V)$, $\mathrm{Pin}(V)$ et $\mathrm{Spin}(V)$ respectivement formés des éléments a tels que $j(a)$ laisse fixe l'orthogonal U' de U dans V. Tout élément $a \in \Gamma(V)$ tel que $j(a)$ laisse stable U s'écrit $a = bb'$ avec $b \in \Gamma(U)$ et $b' \in \Gamma(U')$. Si $a = cc'$ est une autre décomposition avec $c \in \Gamma(U)$ et $c' \in \Gamma(U')$, il existe $k \in \{1,\epsilon\}$ tel que $b = kc$ et $b' = k^{-1}c'$.

Voici une propriété fonctorielle supplémentaire permettant de ramener l'étude du groupe Pin à celle du groupe Spin. On pose $\tilde{V} = V \oplus \mathbb{R}\tilde{e}$. On munit $\tilde{V}$ de la forme quadratique prolongeant Q pour laquelle cette décomposition est orthogonale et $\tilde{e}$ de norme 1. On vérifie que l'on définit un isomorphisme κ de $C(V)$ (dans lequel on oublie la graduation) sur $C^+(\tilde{V})$ en posant

$$\begin{cases} \kappa(a) = a & \text{pour } p(a) = 1, \\ \kappa(a) = a\tilde{e} & \text{pour } p(a) = -1. \end{cases} \tag{46}$$

L'application κ induit un isomorphisme de $\Gamma(V)$ sur le sous-groupe de $\Gamma^+(\tilde{V})$ formé des $\tilde{a}$ tels que $j(\tilde{a})(\tilde{e}) = \pm\tilde{e}$.

On munit $C(V)$ de la forme quadratique telle que, si $f_1, \ldots, f_n$ est une base orthonormée de V, les $f_{j_1} \cdots f_{j_i}$ avec $j_1 < \cdots < j_i$ et $0 \leq i \leq n$ forment une base orthonormée de $C(V)$. On remarque que la restriction de cette forme quadratique à $\Gamma(V, Q)$ est la fonction N. De même $\Lambda(V)$ est muni du produit scalaire tel que les $f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_i}$ forment une base orthonormée de $\Lambda(V)$.

On filtre $C(V)$ par les sous-espaces $C_i(V)$ engendrés par les produits de longueur $\leq i$ d'éléments de V. L'espace $C_i(V)/C_{i-1}(V)$ est canoniquement isomorphe à $\Lambda^i(V)$. On note σ_i le symbole $\sigma_i : C_i(V) \to \Lambda^i(V)$. L'orthogonal $C^i(V)$ de $C_{i-1}(V)$ dans $C_i(V)$ est un supplémentaire. Si $f_1, \ldots, f_n$ est une base orthonormée de V, les $f_{j_1} \cdots f_{j_i}$ avec $j_1 < \cdots < j_i$ forment une base orthonormée de $C^i(V)$.

On note T la forme linéaire sur $C(V)$ telle que

$$a - T(a) \in \oplus_{i>0} C^i(V) \tag{47}$$

pour tout $a \in C(V)$.

Proposition 77 *Soit* $a \in \Gamma(V)$. *On a*

$$T(a)^2 = 2^{-n} N(a) \det(1 + j(a)).$$

Démonstration. Lorsque a appartient à $Pin^-(V)$ les deux côtés de l'égalité sont nuls. Par homogénéité, il nous reste à considérer le cas où $a \in \mathrm{Spin}(V)$. On se ramène immédiatement au cas où $\dim(V) = 2$. Soit e, f une base orthonormée de V. On peut écrire $a = \cos\theta\, e + \sin\theta\, f$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $j(a)$ est la rotation d'angle 2θ et la relation ci-dessus revient à la formule $\cos^2\theta = (1 + e^{2i\theta})(1 + e^{-2i\theta})/4$. ∎

Le groupe Spin(V) est l'ensemble des points réels du groupe algébrique connexe Spin($V \otimes \mathbb{C}$). La restriction de T à Spin($V \otimes \mathbb{C}$) est une fonction polynomiale. On a obtenu le corollaire suivant.

Corollaire 78 *Sur* Spin($V \otimes \mathbb{C}$) *la fonction* $\det(1 + j(a))$ *a une racine carrée polynomiale .*

Nous noterons

$$\det{}_V^{1/2}(1 + a) \tag{48}$$

la racine carrée polynomiale de $\det(1 + j(a))$ qui est positive pour $a = 1$.

Considérons maintenant l'espace $C(V)/C_{n-1}(V)$. Il est canoniquement isomorphe à $\Lambda^{\max}(V) = \Lambda^n(V)$. On pose $\sigma_V = \sigma_n$.

Soit o une base orthonormée de $\Lambda^{\max}(V)$. Le choix de o est équivalent au choix d'une orientation de V. On note γ_o l'image réciproque de o dans $C^n(V)$. Si f_i est une base de V orthonormée orientée de V on a $o = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ et

$$\gamma_o = f_1 \cdots f_n. \tag{49}$$

Notons que γ_o appartient au groupe Pin(V) et que $j(\gamma_o) = -1 \in \mathrm{O}(V)$. Le choix d'une orientation de V est donc équivalent au choix d'une image réciproque de

$-1 \in O(V)$ dans $\mathrm{Pin}(V)$. Notons $D(V) \subset C(V)$ le commutant de la partie paire de $C(V)$. Les éléments 1 et γ_o forment une base de $D(V)$ et on a

(50) $$(\gamma_o)^2 = (-1)^{n(n+1)/2}.$$

Pour $a \in C(V)$, on note $T^o(a)$ le scalaire tel que l'on ait

(51) $$\sigma_V(a) = T^o(a)o,$$

ou encore, $a - T^o(a)\gamma_o \in C_{n-1}(V)$. Par analogie avec l'intégrale de Berezin dans $\Lambda(V)$ (voir ci-dessous) on peut appeler T^o l'intégrale de Berezin.

On vérifie facilement la formule suivante.

(52) $$T^o(a) = (-1)^{n(n+1)/2} T(a\gamma_o).$$

Le carré de la forme linéaire T^o ne dépend pas de o. Il résulte de la proposition 77 que l'on a:

Proposition 79 *([6] lemme 3.22) Soit $a \in \Gamma(V)$. On a*

$$T^o(a)^2 = 2^{-n} N(a) \det(1 - j(a)).$$

Le choix de o détermine une racine carrée polynomiale de la fonction $\det(1 - j(a))$ sur $\mathrm{Pin}(V)$: pour $a \in \mathrm{Pin}(V)$ on pose

(53) $$\det{}^{1/2}_{V,o}(1-a) = (-1)^{n(n+1)/2} \det{}^{1/2}_V(1 + a\gamma_o) = 2^{n/2} T^o(a).$$

C'est la racine carrée qui est positive en γ_o. Cette définition est analogue à celle de la formule (42).

Notons que $\det{}^{1/2}_{V,o}(1 - a^{-1})$ est la racine carrée positive en γ_o^{-1} et donc on a aussi

(54) $$\det{}^{1/2}_{V,o}(1 - a^{-1}) = \det{}^{1/2}_V(1 + a\gamma_o) = 2^{n/2} T(a\gamma_o).$$

Corollaire 80 *Soit $a \in \Gamma(V)$. Alors $1 - j(a)$ est inversible si et seulement si $\sigma_V(a)$ est non nul.*

Soit $a \in \Gamma(V)$. Posons $V(a) = \ker(1 - j(a))$ et $\mathfrak{q}(a) = (1 - j(a))V$. On a la décomposition

(55) $$V = V(a) \oplus \mathfrak{q}(a).$$

L'espace $\mathfrak{q}(a)$ est l'orthogonal de $V(a)$ dans V. Donc a appartient au sous-groupe $\Gamma(\mathfrak{q}(a))$ de $\Gamma(V)$.

Corollaire 81 *Soit $a \in \Gamma(V)$. Soit o une base orthonormée de $\Lambda^{\max}(\mathfrak{q}(a))$ et T^o l'intégrale de Berezin correspondante dans $C(\mathfrak{q}(a))$. On a*

$$T^o(a)^2 = 2^{-\dim \mathfrak{q}(a)} N(a) \det(1 - j(a)|_{\mathfrak{q}(a)}).$$

En particulier, $\sigma_{\mathfrak{q}(a)}(a)$ est un élément non nul de $\Lambda^{\max}(\mathfrak{q}(a))$.

Le corollaire 81 permet de poser les définitions suivantes.

Définition 82 *Soit $a \in \Gamma(V)$ et o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On note $\xi(a)$ l'orientation de $\mathfrak{q}(a)$ qui contient $\sigma_{\mathfrak{q}(a)}(a)$. On note $F(a,o)$ le nombre (égal à ± 1) tel que $\xi(a) = F(a,o)o$.*

C'est l'analogue de la définition de $\zeta(S)$ (formule 45). Si U est un sous-espace de V stable par $j(a)$, on ne peut pas définir l'équivalent de $\zeta(U,S)$ (formule 44) car a n'a pas d'image bien déterminée dans $\Gamma(U)$.

Donc, par définition, on a

$$F(a,o) = \operatorname{sign} T^o(a) = \operatorname{sign} det^{1/2}_{\mathfrak{q}(a),o}(1-a).$$

En d'autres termes, $\xi(a)$ est l'orientation de $\mathfrak{q}(a)$ telle que

$$\det{}^{1/2}_{\mathfrak{q}(a),\xi(a)}(1-a) > 0. \tag{56}$$

La proposition suivante rassemble quelques propriétés immédiates de $\xi(.)$ et $F(.,.)$.

Proposition 83 *1. L'orientation $\xi(1)$ est l'orientation ξ_0 de l'espace $\mathfrak{q}(1) = \{0\}$.*

1'. On a $F(1,\xi_0) = 1$.

2. Soit $a \in \Gamma(V)$. On a $\xi(\epsilon a) = -\xi(a)$.

2'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On a

$$F(a,o) = -F(\epsilon a, o) = -F(a,-o)..$$

3. Soit $v \in V$, $v \neq 0$. Notons $\tilde{\xi}(v)$ l'orientation de l'espace $\mathbb{R}v$ définie par v. On a $\mathfrak{q}(v) = \mathbb{R}v$ et $\xi(v) = \tilde{\xi}(v)$.

3'. On a $F(v,\tilde{\xi}(v)) = 1$.

4. Supposons donnés une décomposition orthogonale $V = U \oplus U'$, $b \in \Gamma(U)$, $b' \in \Gamma(U')$. Alors on a $\mathfrak{q}(bb') = \mathfrak{q}(b) \oplus \mathfrak{q}(b')$ et $\xi(bb') = \xi(b) \wedge \xi(b')$.

4'. Soient de plus o et o' des orientations de $\mathfrak{q}(b)$ et $\mathfrak{q}(b')$ respectivement. On a $F(bb', o \wedge o') = F(b,o)F(b',o')$.

5. Soit $a \in \Gamma(V)$ et soit $\kappa(a) \in \Gamma^+(\tilde{V})$ l'élément défini par la formule (46). Si $a \in \Gamma^+(V)$, on a $\mathfrak{q}(\kappa(a)) = \mathfrak{q}(a)$ et $\xi(\kappa(a)) = \xi(a)$. Si $a \in \Gamma^-(V)$, on a $\mathfrak{q}(\kappa(a)) = \mathfrak{q}(a) \oplus \tilde{e}$ et $\xi(\kappa(a)) = \xi(a) \wedge \tilde{e}$.

5'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. Si $a \in \Gamma^+(V)$, on a $F(\kappa(a),o) = F(a,o)$. Si $a \in \Gamma^-(V)$, on a $F(\kappa(a), o \wedge \tilde{e}) = F(a,o)$.

6. Soient $a \in \Gamma(V)$ et $b \in \Gamma(V)$. L'application $j(b)$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{q}(a)$ sur $\mathfrak{q}(bab^{-1})$, et donc une application $j(b)_*$ de l'ensemble des orientations de $\mathfrak{q}(a)$ sur l'ensemble des orientations de $\mathfrak{q}(bab^{-1})$. On a $j(b)_*(\xi(a)) = \xi(\iota(b)(a))$.

6'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On a $F(\iota(b)(a), j(b)_*(o)) = F(a,o)$.

Voici une application. Pour deux nombres réels non nuls x et y on pose $\gamma(x,y) = -1$ si $x < 0$ et $y < 0$, et $\gamma(x,y) = 1$ sinon. Pour $s \in \mathrm{GL}(V)_{ell}$, rappelons que l'on pose $\mathfrak{q}(s) = (1-s)V$. Comme s est elliptique, on a

$$\det(s|_{\mathfrak{q}(s)}) = (-1)^{\dim(\mathfrak{q}(s))}. \tag{57}$$

Corollaire 84 *Soient s et t des éléments de $\mathrm{O}(n)$ qui commutent. Soient $\hat{s}$ et $\hat{t}$ des représentants de s et t dans le groupe $\mathrm{Pin}(V)$. On a*

$$\hat{s}\hat{t}\hat{s}^{-1}\hat{t}^{-1} = \gamma(\det(s),\det(t))(-1)^{\dim(\mathfrak{q}(s)\cap\mathfrak{q}(t))}.$$

Démonstration. En appliquant la formule (57) à la restriction de s à $\mathfrak{q}(t)$, cette formule est équivalente à $\iota(\hat{s})(\hat{t}) = \det(s|_{\mathfrak{q}(t)})\hat{t}$. Celle-ci résulte du numéro 6 de la proposition 83. ∎

Nous considérons maintenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{spin}(V)$ du groupe $\mathrm{Spin}(V)$. Comme $\mathrm{Spin}(V)$ est un sous-groupe fermé du groupe des éléments inversibles de $C^+(V)$, son algèbre de Lie $\mathfrak{spin}(V)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $C^+(V)$. C'est le sous-espace $C^2(V)$ de $C_2(V)$. Nous poserons donc

$$\mathfrak{spin}(V) = C^2(V). \tag{58}$$

L'action adjointe de $a \in \mathrm{Pin}(V)$ sur un élément $A \in \mathfrak{spin}(V)$ est $Ad(a)(A) = aAa^{-1} = \iota(a)(A)$ (rappelons que A est pair). L'action adjointe $j(A)(v) = Av - vA$ est la différentielle de la représentation $j : \mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$. C'est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{spin}(V) = C^2(V)$ sur $\mathfrak{so}(V) \subset \mathrm{End}(V)$. Le symbole

$$\sigma_2 : C^2(V) \to C_2(V)/C_1(V) \cong \Lambda^2(V)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Exemple 85. *Soient $e \in V$ et $f \in V$ des vecteurs orthogonaux de norme 1 et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \theta ef$. On a $A \in \mathfrak{spin}(V)$, $j(\theta ef)e = 2\theta f$, $j(\theta ef)f = -2\theta e$, et $\sigma_2(\theta ef) = \theta e \wedge f$.*

On note τ l'isomorphisme $j \circ (\sigma_2)^{-1}$ de $\Lambda^2(V)$ sur $\mathfrak{so}(V)$. Soit f_j une base orthonormale de V. Soit $S \in \mathfrak{so}(V)$. On a

$$\tau^{-1}(S) = \tfrac{1}{2}\sum_{i<j} B(Sf_i, f_j) f_i \wedge f_j \in \Lambda^2 V. \tag{59}$$

Soit o une base orthonormée de $\Lambda^{\max}(V)$. On note encore T^o l'intégrale de Berezin, c'est-à-dire la coordonnée sur $\Lambda(V)$ correspondant à o. Soit $A \in \mathfrak{spin}(V)$. Calculons le nombre $T^o(\exp(\sigma_2(A))$. On a $T^o(\exp(\sigma_2(A)) = 0$ si n est impair, et $T^o(\exp(\sigma_2(A))o = (\sigma_2(A))^p/p!$ si $n = 2p$. De manière analogue à la proposition 79 on trouve

$$T^o(\exp(\sigma_2(A))^2 = 2^{-n}\det{}_V(j(A)).$$

Rappelons que $j(A)$ est un élément elliptique de $\mathrm{End}(V)$ et que o est une orientation de V. Nous avons défini (formule 42) le nombre $\det_o^{1/2}(j(A))$. On a

$$2^p T^o(\exp(\sigma_2(A))) = \det{}_o^{1/2}(j(A)).$$

Cette formule montre que la restriction de $\det_o^{1/2}$ au sous-espace $\mathfrak{so}(V,Q)$ est polynomiale (c'est le pfaffien). Elle ressemble à la formule de la définition 53. Un rapport plus précis est donné par la formule (60) ci-dessous. Soit $A \in \mathfrak{spin}(V)$. On a défini (définition 10) la fonction J sur $\mathrm{End}(V)$. Sa restriction à $\mathfrak{so}(V)$ admet une racine carrée analytique, en fait entière sur $\mathfrak{so}(V \otimes \mathbb{C})$ (voir par exemple [6], corollary 3.15).

Définition 86 *On note $J^{1/2}$ la fonction entière sur $\mathfrak{so}(V \otimes \mathbb{C})$ dont le carré est J et telle que $J^{1/2}(0) = 1$.*

On a alors ([6], proposition 3.16)

$$\det{}_{V,o}^{1/2}(1 - \exp(A)) = J^{1/2}(j(A)) \det{}_o^{1/2}(j(A)). \tag{60}$$

Soit $S \in \mathfrak{so}(V)$. Posons $\hat{s} = \exp(j^{-1}(S)) \in \mathrm{Spin}(V)$ et $s = \exp(S) \in \mathrm{SO}(V)$. Si l'on identifie $\mathfrak{spin}(V)$ et $\mathfrak{so}(V)$ grâce à j, on peut aussi noter $\hat{s} = \exp_{\mathrm{Spin}(V)}(S)$. On a $j(\hat{s}) = s$. Soit o une orientation de $\mathfrak{q}(\hat{s}) = \mathfrak{q}(s)$.

Nous choisissons (ce qui est possible) une base de V formée des vecteurs de norme 1 deux à deux orthogonaux $e_1, e_2, \ldots, e_{2p-1}, e_{2p}$, $f_1, f_2, \ldots, f_{2q-1}, f_{2q}$ et des nombres réels $\alpha_i \notin 2\pi\mathbb{Z}$,$\lambda_j \in 2\pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{aligned}
Se_{2i-1} &= \lambda_i e_{2i} \\
Se_{2i} &= -\lambda_i e_{2i-1} \\
Sf_{2j-1} &= \alpha_j f_{2j} \\
Sf_{2j} &= -\alpha_j f_{2j-1}
\end{aligned}$$

L'espace $\mathfrak{q}(s)$ est engendré par les f_j. Supposons de plus que o soit l'orientation de $\mathfrak{q}(s)$ définie par la basef_j.

Proposition 87 *On a*

$$F(\exp_{\mathrm{Spin}(V)}(S), o) = \prod_{i=1}^{p} \cos(\lambda_i/2) \ \mathrm{sign}\left(\prod_{j=1}^{q} \sin(\alpha_j/2)\right).$$

Démonstration. Il résulte de la proposition 83, numéro 4, qu'il suffit de démontrer l'assertion lorsque $\dim(V) = 2$. Soient e et f deux vecteurs orthogonaux de longueur 1 de V. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Se = 2\theta f$, $Sf = -2\theta e$. On a vu (exemple 85) que l'on a $j^{-1}(S) = \theta ef$ et donc $\hat{s} = \cos\theta + \sin\theta ef$. Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, on a $\hat{s} = \cos\theta$ et donc $F(\hat{s}, \xi_0) = \cos\theta$. Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\xi(\hat{s})$ est l'orientation de V qui contient $\sin\theta\, e \wedge f$, et donc $F(\hat{s}, e \wedge f) = \mathrm{sign}(\sin\theta)$. ∎

Nous verrons qu'un des intérêts de cette formule est de ne pas faire intervenir explicitement la forme quadratique Q.

Nous notons, pour tout réel $x > 0$, $\mathfrak{spin}(V)_x$ l'ensemble des $A \in \mathfrak{spin}(V)$ tels que les valeurs propres de $j(A)$ soient de module $\leq x$. Soit $a \in \mathrm{Pin}(V)$. Soit $\mathfrak{spin}(V)(a)$ le centralisateur de a dans $\mathfrak{spin}(V)$. Soit $x > 0$. Si x est assez petit, on a $V(ae^A) = V(a) \cap V(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{spin}(V)(a)_x$. On raffine la décomposition (55) de V en

$$V = V(ae^A) \oplus \mathfrak{q}(a, A) \oplus \mathfrak{q}(a), \tag{61}$$

où $\mathfrak{q}(a, A) = j(A)(V(a))$. On a donc

$$\mathfrak{q}(ae^A) = \mathfrak{q}(a, A) \oplus \mathfrak{q}(a) \tag{62}$$

Comme $j(A)$ est une transformation elliptique inversible de $\mathfrak{q}(a, A)$, elle détermine une orientation $\zeta(\mathfrak{q}(a, A), A)$ de $\mathfrak{q}(a, A)$.

Voici un supplément à la proposition 83. C'est une sorte de propriété de continuité des fonctions ξ et F.

Proposition 88 *(La numérotation continue celle de la proposition 83).*

7. Soit $a \in \mathrm{Pin}(V)$. Il existe $x > 0$ tel que pour tout élément A de $\mathfrak{spin}(V)(a)_x$ on ait la décomposition 61 et la formule

$$\xi(ae^A) = \xi(a) \wedge \zeta(\mathfrak{q}(a, A), A) = \zeta(\mathfrak{q}(a, A), A) \wedge \xi(a).$$

7'. Soit de plus o une orientation de $\mathfrak{q}(a)$. On a $F(ae^A, o \wedge \zeta(\mathfrak{q}(a, A), A)) = F(a, o)$.

Démonstration. En appliquant la proposition 83 on se ramène aux deux situations suivantes.

1. On suppose V de dimension 2 et $a = 1$. On munit V d'une base orthonormée e, f et on a $A = \theta e f$. On a $j(A)\,e = 2\theta f$ et $j(A)\,f = -2\theta\, e$. Si $\theta = 0$, l'assertion est claire. Supposons $\theta \neq 0$. Soit $x = 2\pi$. Si $A \in \mathfrak{spin}(V)_x$, on a $0 < |\theta| < \pi$, les nombres θ et $\sin\theta$ ont le même signe et donc $\xi(e^A) = \xi(a)$. (Si l'on préfère, on peut aussi utiliser la formule (60)).

2. On suppose $1 - j(a)$ inversible. Si x est assez petit, $1 - j(ae^A)$ est inversible pour tout $A \in \mathfrak{spin}(V)(a)_x$. Comme l'application σ_V est continue et comme $\mathfrak{spin}(V)(a)_x$ est connexe, on voit que les orientations $\xi(s)$ et $\xi(ae^A)$ sont égales. ∎

Corollaire 89 *On suppose* $\dim(V) \geq 2$.

1. La fonction ξ qui à $a \in \mathrm{Spin}(V)$ associe une orientation de $\mathfrak{q}(a)$ est l'unique fonction vérifiant les propriétés 1, 6 (de la proposition 83) et 7 (de la proposition 88).

2.La fonction ξ qui à $a \in \mathrm{Pin}^-(V)$ associe une orientation de $\mathfrak{q}(a)$ est l'unique fonction vérifiant les propriétés 3, 6 (de la proposition 83) et 7 (de la proposition 88).

Démonstration. Cela résulte facilement de ce que $\mathrm{Spin}(V)$ et $\mathrm{Pin}^-(V)$ sont connexes pour $\dim(V) > 2$. ∎

En particulier, la propriété 2 est une conséquence des autres, ce qui montre la nécessité d'introduire le groupe $\mathrm{Pin}(V)$ dans ces questions d'orientation.

Nous expliquons maintenant le rapport des fonctions introduites ci-dessus avec la représentation spinorielle.

Supposons n pair. On pose $n = 2p$ et $m = 2^{p-1}$. Soit $M(m,m,\mathbb{C})$ la super algèbre des matrices représentant les endomorphismes de l'espace vectoriel gradué $\mathbb{C}^{m|m}$. Soit ψ un isomorphisme

$$\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \to M(m,m,\mathbb{C}).$$

(On sait qu'un tel isomorphisme existe). On a facilement

$$tr(\psi(a)) = 2^p T(a).$$

Si o est une orientation de V, on a donc

$$tr(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^p 2^p T^o(a).$$

En comparant cette formule avec les propositions 77 et 79 on trouve les relations (voir [6], proposition 3.23)

$$\mathrm{tr}(\psi(a)) = \det{}_o^{1/2}(1+a) \quad \text{pour} \quad a \in \mathrm{Pin}(V) \tag{63}$$

et

$$\mathrm{tr}(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^p \det{}_{V,o}^{1/2}(1-a) = \det{}_{V,o}^{1/2}(1-a^{-1}) \quad \text{pour} \quad a \in \mathrm{Pin}(V). \tag{64}$$

Ecrivons ces relations en terme de super trace. Rappelons que si $u = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec A, B, C et D dans $M(m,\mathbb{C})$, est un élément de $M(m,m,\mathbb{C})$ on pose

$$\mathrm{str}(u) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(u \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}).$$

Il existe deux classes de conjugaison (sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(m,m,\mathbb{C})$ des éléments inversibles *pairs* de $M(m,m,\mathbb{C})$) d'isomorphismes

$$\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \to M(m,m,\mathbb{C}).$$

Fixons une racine carrée i de -1 et une orientation o de V. Il résulte de (50) que l'on a

$$\psi(i^p\gamma_o) = \pm \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

où I est la matrice de l'application identique de $\mathbb{C}^m$. On détermine une classe ψ^o en demandant que l'on ait $\psi^o(i^p\gamma_o) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, ou, ce qui revient au même, $i^p \operatorname{str}(\psi^o(\gamma_o)) = 2^p$. On a alors

(65) $$i^p \operatorname{str}(\psi^o(a)) = 2^p T^o(a) \quad \text{pour} \quad a \in \mathbb{C}(V).$$

On suppose maintenant n impair. On pose $n = 2p+1$ et $m = 2^p$. Soit $Q(m, \mathbb{C})$ la sous-algèbre de $M(m, m, \mathbb{C})$ formée des matrices commutant (au sens gradué) à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ où I est la matrice de l'application identique dans $\mathbb{C}^m$. C'est l'algèbre des matrices

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

avec A et B dans $M(m, \mathbb{C})$. L'algèbre $Q(m, \mathbb{C})$ est isomorphe à $M(m, \mathbb{C} + e\mathbb{C})$, où e est un élément impair tel que $e^2 = -1$, par l'isomorphisme qui à $A + Be$ associe $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Soit ψ un isomorphisme

$$\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \to Q(m, \mathbb{C}).$$

(On sait qu'un tel isomorphisme existe). On a facilement

$$tr(\psi(a)) = 2^{p+1} T(a).$$

Si o est une orientation de V, on a donc

$$tr(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^{p+1} 2^{p+1} T^o(a).$$

En comparant cette formule avec les propositions 77 et 79 on trouve, pour $a \in \operatorname{Pin}(V)$ les relations

(66) $$\operatorname{tr}(\psi(a)) = \sqrt{2} \det{}_o^{1/2}(1 + a)$$

et

(67) $$\operatorname{tr}(\psi(a\gamma_o)) = (-1)^{p+1}\sqrt{2} \det{}_{V,o}^{1/2}(1 - a) = \sqrt{2} \det{}_{V,o}^{1/2}(1 - a^{-1}).$$

Ecrivons ces relations en terme de “super trace impaire”. Notons J l'élément

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

de $Q(m, \mathbb{C})$. Rappelons que l'on définit une forme linéaire impaire ostr sur $Q(m, \mathbb{C})$ par la relation

$$\operatorname{ostr}(A + Be) = 2 \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} J).$$

Il existe deux classes de conjugaison (sous l'action du groupe $GQ(m, \mathbb{C})$ des éléments inversibles *pairs* de $Q(m, \mathbb{C})$) d'isomorphismes $\psi : C(V) \otimes \mathbb{C} \to Q(m, \mathbb{C})$. Fixons une racine carrée i de -1 et une orientation o de V. La relation (50) implique que l'on a $\psi(i^p \gamma_o) = \pm J$. On détermine une classe ψ^o en demandant que l'on ait $\psi^o(i^p \gamma_o) = J$, ou bien encore $\operatorname{ostr}(\psi^o(i^p \gamma_o)) = -2^{p+1}$. On a alors

$$(68) \qquad = -i^p \operatorname{ostr}(\psi^o(a)) = 2^{p+1} T^o(a) \quad \text{pour} \quad a \in \mathbb{C}(V).$$

4.3 Groupe $\mathrm{ML}(V)$.

Soit V une espace vectoriel réel de dimension finie.

Définition 90 *Si* $\dim(V) \geq 2$, *on note* $j : \mathrm{DL}(V) \to \mathrm{SL}(V)$ *le revêtement connexe d'ordre* 2 *de* $\mathrm{SL}(V)$. *On note* $\{1, \epsilon\}$ *le noyau de* j.

Si $\dim(V) \leq 1$, *on note* $DL(V)$ *le groupe à deux éléments* $\{1, \epsilon\}$ *et* j *l'unique application* $j : \mathrm{DL}(V) \to \mathrm{SL}(V)$.

(La notation DL est employée pour "double").

On peut motiver cette définition de la manière suivante. Lorsque $\dim V \geq 3$, $\mathrm{DL}(V)$ est le revêtement simplement connexe de $\mathrm{SL}(V)$. Supposons que V soit la somme directe de deux sous-espaces U et U'. Notons encore $\mathrm{SL}(U)$ (par abus de notation car U' devrait figurer dans celle-ci) le sous-groupe de $\mathrm{SL}(V)$ formé des éléments g fixant U' et laissant stable U. Notons $\mathrm{DL}'(U)$ l'image réciproque de $\mathrm{SL}(U)$ dans $\mathrm{DL}(V)$. Le revêtement $\mathrm{DL}'(U) \to \mathrm{SL}(U)$ est canoniquement isomorphe au revêtement $\mathrm{DL}(U) \to \mathrm{SL}(U)$. On identifiera donc $\mathrm{DL}(U)$ au sous-groupe $\mathrm{DL}'(U)$ de $\mathrm{DL}(V)$. En prenant V de dimension ≥ 3 et U de dimension ≤ 2, ceci justifie notre définition de $\mathrm{DL}(U)$.

Nous définissons maintenant un revêtement de $\mathrm{GL}(V)$. On introduit comme dans la section 4.2 un espace $\tilde{V} = V \oplus \mathbb{R}\tilde{e}$ et on considère le revêtement $\tilde{j} : \mathrm{DL}(\tilde{V}) \to \mathrm{SL}(\tilde{V})$. On note $\mathrm{ML}(V)$ le sous-groupe de $\mathrm{DL}(\tilde{V})$ formé des $a \in \mathrm{DL}(\tilde{V})$ tels que $\tilde{j}(a)$ laisse stable V et $\mathbb{R}\tilde{e}$. On note $j(a) \in \mathrm{GL}(V)$ la restriction de $\tilde{j}(a)$ à V. On a donc $\tilde{j}(a)(\tilde{e}) = \det(j(a))^{-1}\tilde{e}$. L'application $j : \mathrm{ML}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ est un revêtement d'ordre 2 et sa restriction à l'image réciproque de $\mathrm{SL}(V)$ est canoniquement isomorphe au revêtement $j : \mathrm{DL}(V) \to \mathrm{SL}(V)$ définie ci-dessus.

Définition 91 *Le revêtement* $j : \mathrm{ML}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ *s'appelle le revêtement métalinéaire de* $\mathrm{GL}(V)$ *et* $\mathrm{ML}(V)$ *le groupe métalinéaire.*

Nous définissons le sous-groupe $\mathrm{GL}^+(V)$ de $\mathrm{GL}(V)$ formé des éléments de déterminant > 0, le sous-ensemble $\mathrm{GL}^-(V)$ de $\mathrm{GL}(V)$ formé des éléments de déterminant < 0, $\mathrm{ML}^+(V)$ et $\mathrm{ML}^-(V)$ les images réciproques de $\mathrm{GL}^+(V)$ et $\mathrm{GL}^-(V)$ respectivement dans $\mathrm{ML}(V)$. On note aussi $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ formé des éléments de déterminant ± 1, $\mathrm{SL}^-(V)$ le sous-ensemble de

$\mathrm{GL}(V)$ formé des éléments de déterminant -1, $\mathrm{DL}^{\pm}(V)$ et $\mathrm{DL}^{-}(V)$ les images réciproques de $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$ et $\mathrm{SL}^{-}(V)$ respectivement dans $\mathrm{ML}(V)$.

Supposons que V soit la somme directe de deux sous-espaces U et U'. Notons encore $\mathrm{GL}(U)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ formé des éléments g fixant U' et laissant stable U. Notons $\mathrm{ML}'(U)$ l'image réciproque de $\mathrm{GL}(U)$ dans $\mathrm{ML}(V)$. Le revêtement $\mathrm{ML}'(U) \to \mathrm{GL}(U)$ est canoniquement isomorphe au revêtement $\mathrm{ML}(U) \to \mathrm{GL}(U)$. On identifiera donc $\mathrm{ML}(U)$ au sous-groupe $\mathrm{ML}'(U)$ de $\mathrm{ML}(V)$.

Avec ces notations, tout élément $a \in \mathrm{ML}(V)$ tel que $j(a)$ laisse stable U et U' s'écrit $a = bb'$ avec $b \in \mathrm{ML}(U)$ et $b' \in \mathrm{ML}(U')$. Si $a = cc'$ est une autre décomposition avec $c \in \mathrm{ML}(U)$ et $c' \in \mathrm{ML}(U')$, il existe $k \in \{1, \epsilon\}$ tel que $b = kc$ et $b' = k^{-1}c'$.

Rappelons la notation $\tilde{V} = V \oplus \mathbb{R}\tilde{e}$. Par définition, $\mathrm{ML}(V)$ est un sous-groupe de $\mathrm{DL}(\tilde{V})$. On note κ l'injection

$$\kappa : \mathrm{ML}(V) \to \mathrm{DL}(\tilde{V}). \tag{69}$$

Soit Q une forme quadratique définie positive sur V. Le groupe $\mathrm{SO}(V,Q)$ est un sous-groupe compact maximal de $SL(V)$. Soit $\mathrm{Spin}'(V,Q)$ l'image réciproque de $\mathrm{SO}(V,Q)$ dans $\mathrm{DL}(V)$. Il existe un unique isomorphisme $\phi_Q : \mathrm{Spin}(V,Q) \to \mathrm{Spin}'(V,Q)$ qui induise un isomorphisme de revêtements de $j : \mathrm{Spin}(V,Q) \to \mathrm{SO}(V,Q)$ sur $j : \mathrm{Spin}'(V,Q) \to \mathrm{SO}(V,Q)$.

De même, on note $\mathrm{Pin}'(V,Q)$ l'image réciproque de $\mathrm{O}(V,Q)$ dans $\mathrm{ML}(V)$. C'est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{ML}(V)$. Il existe un unique isomorphisme $\phi_Q : \mathrm{Pin}(V,Q) \to \mathrm{Pin}'(V,Q)$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pin}(V,Q) & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{Spin}(\tilde{V},\tilde{Q}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_Q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{\tilde{Q}}} \\ \mathrm{Pin}'(V,Q) & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{Spin}'(\tilde{V},\tilde{Q}) \end{array}$$

où $\tilde{Q}$ est la forme quadratique sur $\tilde{V}$ qui prolonge Q et pour laquelle $\tilde{e}$ est orthogonal à V et de longueur 1, la première flèche κ est définie par la formule (46) et la seconde par la formule (69).

Remarquons que nous faisons un peu attention car il n'est pas vrai qu'il existe un unique isomorphisme du revêtement de $\mathrm{Pin}(V,Q)$ de $\mathrm{O}(V,Q)$ sur le revêtement $\mathrm{Pin}'(V,Q)$. En fait il y en a deux. Considérons l'automorphisme η de $C(V,Q)$ tel que, pour tout élément homogène $a \in C(V,Q)$, on ait

$$\eta(a) = (-1)^{p(a)}a.$$

Si γ_o est l'élément de $C^n(V,Q)$ associé ci-dessus à une orientation o de V, on a $\eta = \iota(\gamma_o)$. Comme η induit un automorphisme non trivial du revêtement $j : \mathrm{Pin}(V,Q) \to \mathrm{O}(V,Q)$, on voit que $\phi_Q \circ \eta$ est un second isomorphisme de revêtements de $j : \mathrm{Pin}(V,Q) \to \mathrm{O}(V,Q)$ sur $j : \mathrm{Pin}'(V,Q) \to \mathrm{O}(V,Q)$. Néanmoins, le choix de ϕ_Q est canonique.

Soit $b \in ML(V)_{ell}$. Soit $\mathfrak{q}(b) = (1 - j(b))V$. Par définition de la notion d'élément elliptique, il existe une forme quadratique définie positive Q sur V stable par $j(b)$. Donc b appartient à $\mathrm{Pin}'(V,Q)$, $\phi_Q^{-1}(b)$ appartient à $\mathrm{Pin}(V,Q)$ et on a défini (definition 82) l'orientation $\xi(\phi_Q^{-1}(b))$ de $\mathfrak{q}(b)$.

Lemme 92 *L'orientation $\xi(\phi_Q^{-1}(b))$ de $\mathfrak{q}(b)$ ne dépend pas du choix de la forme Q stable par $j(b)$.*

Démonstration. On le démontre d'abord pour $b \in \mathrm{DL}(V)_{ell}$. On peut supposer $\dim(V) \geq 2$. On écrit $b = \exp_D(S)$ où $S \in (V)_{ell}$ et où $\exp_D(.)$ désigne l'exponentielle dans $\mathrm{DL}(V)$. La proposition 87 donne une formule pour $\xi(\phi_Q^{-1}(b)) = \xi(\exp_{\mathrm{Spin}(V,Q)}(S))$ qui ne dépend que de la décomposition spectrale de S.

On se ramène au cas précédent en considérant l'injection κ de $\mathrm{ML}(V)$ dans $\mathrm{DL}(\tilde{V})$. ∎

Le lemme permet de poser la définition suivante.

Définition 93 *Nous noterons $\xi(b)$ l'orientation $\xi(\phi_Q^{-1}(b))$ de $\mathfrak{q}(b)$.*

Introduisons encore quelques notations. Pour $a \in ML(V)$, on note $\iota(a)$ l'automorphisme de $ML(V)$ défini pour $b \in ML(V)$ par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \iota(a)(b) = \epsilon aba^{-1} & \text{pour } a \in ML^-(V) \text{ et } b \in ML^-(V), \\ \iota(a)(b) = aba^{-1} & \text{sinon.} \end{array} \right. \tag{70}$$

Si $b \in \mathrm{ML}(V)_{ell}$ et si o est une orientation de $\mathfrak{q}(b)$, on note encore $F(b,o) \in \{1,-1\}$ le nombre tel que $\xi(b) = F(b,o)o$.

Avec ces définitions, les propriétés des fonctions $\xi(.)$ et $F(.,.)$ énoncées dans les propositions 83 et 88 pour le groupe $\mathrm{Pin}(V,Q)$ s'étendent sans changement au sous-ensemble $\mathrm{ML}(V)_{ell}$ de $ML(V)$ et nous ne les répétons pas.

4.4 Fibrés G-équivariants et points fixes.

Soit G un groupe de Lie presque algébrique et soit M une variété sur laquelle G opère. Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré vectoriel réel G-équivariant sur la variété M sur lequel G opère régulièrement (définition 72). En particulier G opère régulièrement sur M.

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$. D'après la condition 51, l'espace des zéros de S_M est une sous-variété de M. Considérons le fibré vectoriel $\mathcal{V}|M(S)$. Comme S_M s'annule sur $M(S)$, on obtient un morphisme encore noté $S : \mathcal{V}|M(S) \to \mathcal{V}|M(S)$ de fibrés vectoriels au dessus de $M(S)$. D'après la condition 72, en chaque point $m \in M(S)$, S induit une transformation elliptique de $\mathcal{V}_m$. On a donc la décomposition $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(S) \oplus \mathcal{Q}_m(S)$ avec $\mathcal{V}_m(S) = \{v \in \mathcal{V}_m; S \cdot v = 0\}$ et

$\mathcal{Q}_m(S) = S(\mathcal{V}_m)$. Comme la transformation S_M est localement constante, la dimension de $\mathcal{V}_m(S)$ est localement constante lorsque m varie dans $M(S)$. On voit donc que l'espace des zéros $\mathcal{V}(S)$ de $S_\mathcal{V}$ est un fibré sur $M(S)$ dont la fibre au dessus de $m \in M(S)$ est $\mathcal{V}_m(S)$. De même on peut définir le fibré vectoriel $\mathcal{Q}(S) \to M(S)$ de fibre $\mathcal{Q}_m(S)$ au dessus de $m \in M(S)$. On a donc la décomposition

(71) $$\mathcal{V}|M(S) = \mathcal{V}(S) \oplus \mathcal{Q}(S).$$

La transformation S induit une transformation inversible du fibré vectoriel $\mathcal{Q}(S) \to M(S)$ infinitésimalement elliptique non dégénérée sur chaque fibre. Le groupe $G(S)$ opère sur la variété $M(S)$ et les fibrés $\mathcal{V}(S)$ et $\mathcal{Q}(S)$ sont des fibrés $G(S)$-équivariants sur $M(S)$.

Définition 94 *Nous noterons $\zeta(S)$ l'orientation du fibré $\mathcal{Q}(S) \to M(S)$ qui dans chaque fibre est induite par l'action de S (formule 45).*

De même, si $\mathcal{U}$ est un sous-fibré S stable de $\mathcal{Q}(S)$, nous notons $\zeta(\mathcal{U}, S)$ l'orientation définie par S dans $\mathcal{U}$ (voir la formule 44).

Exemple 95 *Si $\mathcal{V}$ est le fibré tangent, $\zeta(S)$ est une orientation du fibré normal à $M(S)$, invariante par $G(S)$.*

Soit s un élément elliptique de G. Etudions l'espace $\mathcal{V}(s)$ des points fixes de la transformation s sur $\mathcal{V}$. Au dessus de $M(s)$, la transformation s induit un isomorphisme encore noté $s : \mathcal{V}|M(s) \to \mathcal{V}|M(s)$ du fibré vectoriel $\mathcal{V}$ restreint à $M(s)$. Il est clair que l'on a

$$\mathcal{V}(s) = \{(m, v); m \in M(s), s \cdot v = v\}.$$

D'après la condition 72, la transformation s induit une transformation elliptique sur chaque fibre $\mathcal{V}_m$ localement constante lorsque m varie dans $M(s)$. Au dessus de chaque point $m \in M(s)$ on a la décomposition $\mathcal{V}_m = \mathcal{V}_m(s) \oplus \mathcal{Q}_m(s)$ avec $\mathcal{V}_m(s) = \{v \in \mathcal{V}_m; s \cdot v = v\}$ et $\mathcal{Q}_m(s) = (1 - s)\mathcal{V}_m$. Comme la transformation s est localement constante, il s'ensuit que la dimension de l'espace $\mathcal{V}_m(s)$ est localement constante lorsque m varie dans $M(s)$. Donc l'espace $\mathcal{V}(s)$ est le fibré vectoriel sur $M(s)$ de fibre $\mathcal{V}_m(s)$. On note $\mathcal{Q}(s)$ le fibré sur $M(s)$ de fibre $\mathcal{Q}_m(s)$. On a donc la décomposition

(72) $$\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

La transformation $(1 - s)$ induit un automorphisme du fibré $\mathcal{Q}(s) \to M(s)$.

Même si $\mathcal{V}$ est orienté et si G préserve l'orientation de $\mathcal{V}$, le fibré $\mathcal{Q}(s)$ n'est en général pas orientable.

4.5 Fibrés métalinéaires orientés.

Soit G un groupe presque algébrique opérant régulièrement sur une variété M. Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré vectoriel réel sur lequel G opère régulièrement.

Rappelons quelques définitions. On dira que $\mathcal{V}$ est *un fibré métalinéaire G-équivariant* si l'on s'est donné un espace vectoriel réel V, un fibré principal $P \to M$ de groupe $\mathrm{ML}(V)$ avec une action à gauche de G sur P commutant à celle de $\mathrm{ML}(V)$, et un isomorphisme G-équivariant de $\mathcal{V}$ sur $P \times_{\mathrm{ML}(V)} V$ où $\mathrm{ML}(V)$ agit dans V par j.

On dira que $\mathcal{V}$ est *un fibré métalinéaire orientable G-équivariant* si l'on s'est donné un espace vectoriel réel V, un fibré principal $P \to M$ de groupe $\mathrm{ML}^+(V)$ avec une action à gauche de G sur P commutant à celle de $\mathrm{ML}^+(V)$, et un isomorphisme G-équivariant de $\mathcal{V}$ sur $P \times_{\mathrm{ML}^+(V)} V$ où $\mathrm{ML}^+(V)$ agit dans V par j.

On dira que $\mathcal{V}$ est *un fibré métalinéaire orienté G-équivariant* si c'est un fibré métalinéaire orientable G-équivariant, et si on s'est donné de plus une orientation o_V de V. On en déduit une orientation G-invariante $o_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$.

Soit donc $\mathcal{V}$ un fibré métalinéaire orientable G-équivariant. Soit $s \in G_{ell}$. Nous allons définir une orientation $\xi(s)$ du fibré $\mathcal{Q}(s) \to M(s)$ (formule 72). Soit $m \in M(s)$. Soit $p \in P$ au-dessus du point m. On a $sp = pr(s,p)$ avec $r(s,p) \in \mathrm{ML}^+(V)_{ell}$. Le point p nous fournit une identification $v \mapsto [p,v]$ de V avec $\mathcal{V}_m$ et de $\mathfrak{q}(r(s,p))$ avec $\mathcal{Q}(s)_m$. On munit $\mathfrak{q}(r(s,p))$ de l'orientation $\xi(r(s,p))$ (définition 82). En transportant cette orientation par l'identification déduite de p, on obtient une orientation notée $\xi(s,p)$ de $\mathcal{Q}(s)_m$. La proposition 83 implique que $\xi(hr(s,p)h^{-1}) = \xi(r(s,ph^{-1}))$ pour tout $h \in \mathrm{ML}^+(V)$, et donc $\xi(s,p)$ ne dépend pas du choix de p au dessus de m. On note $\xi_m(s)$ l'orientation de $\mathcal{Q}(s)_m$ ainsi obtenue.

La classe de conjugaison de $r(s,p)$ est localement constante sur $M(s)$ puisque l'action de G sur $\mathcal{V}$ est régulière. On obtient donc une orientation $\xi(s)$ du fibré $\mathcal{Q}(s) \to M(s)$. Elle est invariante sous l'action de $G(s)$.

Définition 96 *On dit que $\xi(s)$ est l'orientation du fibré $\mathcal{Q}(s) \to M(s)$ associée à s.*

Soient $s \in G_{ell}$ et $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Décomposons le fibré $\mathcal{V}(s)$ au dessus de $M(s)(S)$ en $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s,S)$ où

$$\mathcal{V}(s)(S) = \mathcal{V}(s) \cap \mathcal{V}(S), \quad \mathcal{Q}(s,S) = S(\mathcal{V}(s)).$$

On a donc

$$\mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s,S) \oplus \mathcal{Q}(s). \tag{73}$$

Si $a > 0$ est assez petit et si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on a $G(se^S) = G(s) \cap G(S)$, $M(se^S) = M(s) \cap M(S)$, $\mathcal{V}(se^S) = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}(se^S) = \mathcal{Q}(s,S) \oplus \mathcal{Q}(s)$.

Rappelons la définition 94 de l'orientation $\zeta(\mathcal{Q}(s,S),S)$ du fibré $\mathcal{Q}(s,S)$. On déduit de la proposition 88 la formule suivante

$$\xi(se^S) = \zeta(\mathcal{Q}(s,S),S) \wedge \xi(s). \tag{74}$$

Choisissons de plus une orientation o_V de V, et soit $o_{\mathcal{V}}$ l'orientation correspondante de $\mathcal{V}$. Pour chaque $s \in G_{ell}$, $o_{\mathcal{V}}/\xi(s)$ est une orientation $G(s)$-invariante du fibré $\mathcal{V}(s) \to M(s)$. Le fait que $\mathcal{V}(s)$ soit orientable est dû à Bott et Taubes [11].

5 Bottes de cohomologie équivariante tordue.

5.1 Cohomologie équivariante tordue.

Soit M une variété et soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel réel sur M. Nous introduisons maintenant la notion de formes différentielles $\mathcal{E}$-tordues. Lorsque $\mathcal{E}$ est le fibré tangent à M, la notion de formes tordues a été définie dans l'introduction.

Considérons la variété $M_{\mathcal{E}}$ dont les éléments sont des couples (m,o), où m est dans M et où o est une orientation de $\mathcal{E}_m$. C'est un revêtement d'ordre 2 de M. Par définition même, l'image réciproque du fibré $\mathcal{E}$ sur $M_{\mathcal{E}}$ est un fibré orienté.

Soit $(m,o) \in M_{\mathcal{E}}$. Si $\xi \in T_mM$ est un vecteur tangent en $m \in M$, le vecteur ξ se remonte canoniquement en un vecteur tangent en (m,o). Soit T_m^*M l'espace cotangent en m. Si $\alpha \in \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})$, on peut considérer $\alpha_{(m,o)}$ comme un élément de ΛT_m^*M.

Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{+1,-1\}$ opère dans $M_{\mathcal{E}}$ de sorte que $M_{\mathcal{E}}$ est un fibré principal de base M. Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel réel orientable, le choix d'une orientation définit un isomorphisme entre $M_{\mathcal{E}}$ et $M \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cependant il est souvent souhaitable, même lorsque $\mathcal{E}$ est orientable, de ne pas préférer une orientation particulière.

Notons ϵ l'action de -1 dans $M_{\mathcal{E}}$. On note encore ϵ l'action induite dans les formes différentielles sur $M_{\mathcal{E}}$. On a donc

$$\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}}) = \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^+ \oplus \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^-,$$

où $\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^{\pm}$ sont les sous-espaces propres de valeur propre ± 1 pour l'action de ϵ:

$$\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^+ = \{\alpha \in \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = \alpha\}$$
$$\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^- = \{\alpha \in \mathcal{A}(M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = -\alpha\}.$$

L'espace $\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^+$ s'identifie à $\mathcal{A}(M)$.

Définition 97 *On note $\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})^-$ par $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$. Un élément de $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ sera appelé une forme différentielle $\mathcal{E}$-tordue.*

L'espace $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ est un module sur $\mathcal{A}(M)$, stable par la différentielle de de Rham de $\mathcal{A}(M_{\mathcal{E}})$. On définit de même l'espace $\mathcal{A}_{cpt}(M)_{\mathcal{E}}$ des formes différentielles $\mathcal{E}$-tordues à support compact.

Si o est un choix local d'orientation de $\mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ une forme $\mathcal{E}$-tordue, on notera α_o la forme différentielle que l'on en déduit naturellement sur l'ouvert de M dans lequel est définie o.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ et si o_i $(i = 1, 2)$ sont des orientations locales de $\mathcal{E}_i$, $o_1 \wedge o_2$ est une orientation locale de $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ déduite de o_1 et o_2. On définit une application de $\mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_1} \otimes \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_2} \to \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}}$ par

$$(\alpha \wedge \beta)_{o_1 \wedge o_2} = \alpha_{o_1} \wedge \beta_{o_2},$$

si $\alpha \in \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_1}$ et $\beta \in \mathcal{A}(M)_{\mathcal{E}_2}$.

Si M est une variété de dimension n et si $\mathcal{E}$ est le fibré tangent, on note $\mathcal{A}(M)_t$ l'espace des formes différentielles TM-tordues. Un élément de $\mathcal{A}(M)_t$ sera appelé une forme différentielle M-tordue. Un élément homogène de degré extérieur n de $\mathcal{A}(M)_t$ est une densité sur M. On note $\int_M \alpha = \int_M \alpha_{[\dim M]}$ l'intégrale d'une forme différentielle M-tordue à support compact.

Plus généralement, soit $p : M \to B$ une fibration et soit $\mathcal{V}$ le fibré tangent vertical. On peut alors intégrer sur la fibre de p une forme différentielle $\mathcal{V}$-tordue à support compact. On note p_* ou $\int_{M/B}$ l'opération d'intégration sur la fibre. On suit les conventions de [6], chapitre 1, pour l'intégration sur la fibre: en particulier si $\alpha \in \mathcal{A}_{cpt}(M)_{\mathcal{V}}$ et $\beta \in \mathcal{A}(B)$, alors $p_*(\alpha \wedge p^*\beta) = p_*\alpha \wedge \beta$.

De même, si $\mathcal{E}$ est un fibré réel sur B et si $p^*\mathcal{E}$ est le fibré image réciproque de $\mathcal{E}$ par p, l'application d'intégration p_* sur les fibres est une application de l'espace $\mathcal{A}_{cpt}(M)_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}$ des formes différentielles sur M tordues pour le fibré $\mathcal{V} \oplus p^*\mathcal{E}$ dans l'espace $\mathcal{A}_{cpt}(B)_{\mathcal{E}}$ des formes différentielles sur B tordues pour $\mathcal{E}$. En particulier, si $\mathcal{E}$ est le fibré tangent à B, l'intégration sur la fibre est une application p_* de l'espace des formes M-tordues à support compact dans l'espace des formes B-tordues à support compact.

Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Supposons que G opère sur M et que $\mathcal{E}$ soit un fibré vectoriel G-équivariant. Le groupe G opère naturellement sur le revêtement $M_{\mathcal{E}}$ de M et son action commute à l'action de ϵ. En reprenant les notations de la section 1.3, on considère l'algèbre différentielle $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M_{\mathcal{E}}), d_{\mathfrak{g}})$ et, si U est un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$, l'algèbre différentielle $(\mathcal{A}_G^{\infty}(U, M_{\mathcal{E}}), d_{\mathfrak{g}})$. On note encore ϵ l'action de -1 sur ces espaces. L'opérateur ϵ commute à $d_{\mathfrak{g}}$.

L'espace

$$\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}} = \{\alpha \in \mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = -\alpha\}$$

est appelé l'espace des formes différentielles G-équivariantes $\mathcal{E}$-tordues à coefficients polynomiaux. La différentielle $d_{\mathfrak{g}}$ induit une différentielle sur $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}}$. L'espace $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}}, d_{\mathfrak{g}})$ est un module différentiel $\mathbb{Z}$-gradué sur l'algèbre différentielle $\mathbb{Z}$-graduée $(\mathcal{A}_G(\mathfrak{g}, M), d_{\mathfrak{g}})$.

L'espace

$$\mathcal{A}_G^{\infty}(U, M)_{\mathcal{E}} = \{\alpha \in \mathcal{A}_G^{\infty}(U, M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = -\alpha\}$$

est appelé l'espace des formes différentielles G-équivariantes $\mathcal{E}$-tordues définies sur U. La différentielle $d_{\mathfrak{g}}$ laisse stable $\mathcal{A}_G^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}$. L'espace $(\mathcal{A}_G^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}, d_{\mathfrak{g}})$ est un module différentiel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué sur l'algèbre différentielle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée $(\mathcal{A}_G^\infty(U,M), d_{\mathfrak{g}})$.

On considère aussi le sous-espace $(\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}, d_{\mathfrak{g}})$ des formes équivariantes tordues à support compact sur M.

Définition 98 *On note $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g},M)_{\mathcal{E}}$ l'espace de cohomologie de $\mathcal{A}_G(\mathfrak{g},M)_{\mathcal{E}}$ pour la différentielle $d_{\mathfrak{g}}$, $\mathcal{H}_G^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}$ celui de $\mathcal{A}_G^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}$ celui de $\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}$.*

L'espace $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g},M)_{\mathcal{E}}$ est un module $\mathbb{Z}$-gradué sur $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g},M)$, $\mathcal{H}_G^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}$ un module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué sur $\mathcal{H}_G^\infty(U,M)$ et $\mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(U,M)_{\mathcal{E}}$ un module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué sur $\mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(U,M)$.

Exemple 99 *Si M est un point $\bullet$, le fibré $\mathcal{E}$ est une représentation de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie E. Soit $or(E)$ l'ensemble des deux orientations de E. Un élément de $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g},\bullet)_{\mathcal{E}}$ est une fonction $\phi(X,o)$ différentiable sur $\mathfrak{g}\times or(E)$, vérifiant $\phi(gXg^{-1}, \det_E(g)o) = \phi(X,o) = -\phi(X,-o)$. Le choix d'une orientation o détermine (par restriction à $\mathfrak{g}\times\{o\}$) un isomorphisme de $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g},M)_{\mathcal{E}}$ sur l'espace $C^\infty(\mathfrak{g})^{G,E}$ formé des fonctions semi-invariantes de poids* $\operatorname{sign}\det_E(.)$.

Exemple 100 *Soit par exemple E une espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme quadratique définie positive, et soit $G = \mathrm{O}(E)$. Si* $\dim E$ *est paire, la fonction* $\det_o^{1/2}(S)$ *($S \in \mathfrak{so}(E)$ et o orientation de E) définie en 42 est une base de $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g},\bullet)_{\mathcal{E}}$ comme module sur $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g},\bullet) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$.*

Nous laissons au lecteur d'énoncer les résultats analogues à ceux de la section 1, et en particulier le théorème 24.

Soit G un groupe presque algébrique et soit $\mathfrak{g}_a$, $a > 0$, son système fondamental de voisinages elliptiques de 0.

Définition 101 *On note $\mathcal{A}_{[G]}^{\mathcal{E}}(M) = \lim_{a\to 0} \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a,M)_{\mathcal{E}}$ l'espace des germes (pour la topologie elliptique) en 0 de formes G-équivariantes $\mathcal{E}$-tordues. On note $\mathcal{H}_{[G]}^{\mathcal{E}}(M) = \lim_{a\to 0} \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a,M)_{\mathcal{E}}$ l'espace des germes (pour la topologie elliptique) en 0 de classes de cohomologie G-équivariante tordue.*

Soit B une G-variété. Soit $p : M \to B$ une fibration de G-variétés. Soit $\mathcal{V} \to M$ le fibré tangent vertical. Les formes équivariantes $\mathcal{V}$-tordues à support compact (sur les fibres) peuvent s'intégrer sur la fibre de p. Plus généralement, soit $\mathcal{E}$ un fibré réel G-équivariant sur B. Alors l'intégration sur la fibre définit un morphisme

$$p_* : (\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U,M)_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}, d_{\mathfrak{g}}) \to (\mathcal{A}_{cpt,G}^\infty(U,B)_{\mathcal{E}}, d_{\mathfrak{g}}).$$

On note $\mathcal{A}_{vcpt}(M)$ l'espace des formes différentielles α sur M telles que p soit propre sur le support de α (l'indice v est pour vertical). On note $\mathcal{A}^{\infty}_{vcpt,G}(U,M) = (C^{\infty}(U)\hat{\otimes}\mathcal{A}_{vcpt}(M))^G$, etc... On étend p_* à l'espace $\mathcal{A}^{\infty}_{vcpt,G}(U,M)_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}$ et on note encore p_* l'application induite par p_* en cohomologie

$$(75) \qquad p_* : \mathcal{H}^{\infty}_{vcpt,G}(U,M)_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}} \to \mathcal{H}^{\infty}_{G}(U,B)_{\mathcal{E}}$$

ainsi que sur les germes

$$p_* : \mathcal{A}^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}_{vcpt,[G]}(M) \to \mathcal{H}^{\mathcal{E}}_{[G]}(B).$$

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$. La sous-variété $M_{\mathcal{E}}(S)$ des zéros de S dans le revêtement $M_{\mathcal{E}}$ de M est naturellement isomorphe à $M(S)_{\mathcal{E}|M(S)}$. Nous notons encore $\mathcal{E}$ la restriction de $\mathcal{E}$ à toute sous-variété de M. On note encore T_S l'opérateur

$$T_S : \mathcal{A}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g},M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{A}^{\infty}_{G(S)}(\mathfrak{g}(S),M(S))_{\mathcal{E}}$$

obtenu par restriction de l'opérateur $T_S : \mathcal{A}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g},M_{\mathcal{E}}) \to \mathcal{A}^{\infty}_{G(S)}(\mathfrak{g}(S),M_{\mathcal{E}}(S))$ de la formule (37) au sous-espace de valeur propre -1 pour l'action de ϵ. Si o est un choix local d'orientation de $\mathcal{E}$ défini au voisinage d'un point $m \in M(S)$, on a donc au voisinage de ce point, pour $Y \in \mathfrak{g}(S)$

$$(76) \qquad T_S\alpha_o(Y) = \alpha_o(S+Y)|M(S).$$

On en déduit une application en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g},M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}^{\infty}_{G(S)}(\mathfrak{g}(S),M(S))_{\mathcal{E}}.$$

Soit $a > 0$ et soit $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on peut définir une application encore notée

$$T_S : \mathcal{A}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g}_a,M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{[G(S)]}(M(S))$$

par la même formule que (76), pour Y variant dans un voisinage elliptique assez petit. On obtient aussi une application de translation en cohomologie

$$T_S : \mathcal{H}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g}_a,M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}^{\mathcal{E}}_{[G(S)]}(M(S)).$$

Soit $s \in G_{ell}$. Soit $a > 0$. Comme en (38) on défini des opérateurs de translation

$$(77) \; T_{s,S} : \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s),M(s))_{\mathcal{E}} \to \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)\cap G(S)}(\mathfrak{g}(s)\cap\mathfrak{g}(S),M(s)\cap M(S))_{\mathcal{E}}$$
$$T_{s,S} : \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s),M(s))_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)\cap G(S)}(\mathfrak{g}(s)\cap\mathfrak{g}(S),M(s)\cap M(S))_{\mathcal{E}}$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ et

$$(78) \qquad T_{s,S} : \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a,M(s))_{\mathcal{E}} \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{[G(s)\cap G(S)]}(M(s)\cap M(S))$$
$$T_{s,S} : \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a,M(s))_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}^{\mathcal{E}}_{[G(s)\cap G(S)]}(M(s)\cap M(S))$$

pour $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$.

Des exemples naturels de formes équivariantes tordues sont donnés par la forme de Thom équivariante et la forme d'Euler équivariante (voir [27] ou [6], chapitre 7). En effet, ces formes dépendent de choix d'orientations. Nous rappelons leur construction.

Soit $p : \mathcal{V} \to B$ un fibré vectoriel réel G-équivariant. Supposons $\mathcal{V}$ muni d'une structure euclidienne G-invariante et d'une connection euclidienne ∇ G-invariante. On dira alors que $\mathcal{V}$ est *un fibré euclidien G-équivariant connecté.*

Notons $\mathcal{A}_{rap}(\mathcal{V})$ l'espace des formes différentielles sur $\mathcal{V}$ rapidement décroissantes le long des fibres. Notons $\mathcal{A}_{rap,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}} = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}_{rap}(\mathcal{V})_{\mathcal{V}})^G$. Le fibré tangent vertical $T(p)$ pour la fibration p est isomorphe à $p^*\mathcal{V}$. On le note encore $\mathcal{V}$. Rappelons que le choix d'une connection euclidienne G-invariante détermine une forme de Thom $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{A}_{rap,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}}$. C'est une forme de degré total n (où n est égal au rang du fibré $\mathcal{V} \to B$ au dessus d'une composante connexe de B), fermée et telle que

$$p_*(u(\mathcal{V})) = 1.$$

Décrivons $u(\mathcal{V})$. Choisissons une orientation locale o de $\mathcal{V}$ et un repère local orthonormal orienté de $\mathcal{V}$ défini sur un ouvert U de B. On obtient une trivialisation de $\mathcal{V}|U$ en $U \times V$, où $V = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $\omega \in \mathcal{A}^1(U) \otimes \mathfrak{so}(V)$ la 1-forme de connection déterminée par ∇ (c.a.d. $\nabla|U$ est l'opérateur différentiel $d+\omega$). Soit $X \in \mathfrak{g}$. On note $F(X)$ la courbure équivariante de $(\mathcal{V},\nabla)$. Soit e_i une base orthonormée orientée de V. Alors $(F(X)e_i, e_j) \in \mathcal{A}(U)$. Soit $x = \sum x^i e_i \in V$. On pose $Dx^i = dx^i + (e_i, \omega x) \in \mathcal{A}^1(U \times V)$. Notons

$$f(X) = -\|x\|^2 + \sum_i Dx^i e_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i<j}(F(X)e_i,e_j)e_i \wedge e_j.$$

C'est un élément pair de l'algèbre $\mathcal{A}(U \times V) \otimes \Lambda V$. On peut donc calculer $\exp f(X) \in \mathcal{A}(U \times V) \otimes \Lambda V$. On étend $T_o : \Lambda V \to \mathbb{R}$ en une application encore notée

$$T_o : \mathcal{A}(U \times V) \otimes \Lambda V \to \mathcal{A}(U \times V)$$

par $T_o(\alpha \otimes \xi) = \alpha T_o(\xi)$. La forme de Thom est alors donnée en coordonnées locales par

(79) $$u(\mathcal{V})(X) = (-1)^{n(n-1)/2}\pi^{-n/2}T_o(\exp f(X)).$$

C'est une forme G-équivariante fermée. La classe de $u(\mathcal{V})$ est indépendante de la structure euclidienne et de la connection euclidienne choisie.

Remarque 102 *En remplaçant dans la formule 79 la fonction* exp *par une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ bien choisie (voit [19], prop. 13), ou bien en appliquant un difféomorphisme convenable du fibré en disque unité de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}$, on trouve une forme G-équivariante fermée $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{A}_{vcpt,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}}$, à support compact le long des fibres et telle que $p_*(u(\mathcal{V})) = 1$.*

On note encore $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_{vcpt,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}}$ la classe de $u(\mathcal{V})$.

On note $Eul(\mathcal{V}) \in \mathcal{A}_G(\mathfrak{g},B)_{\mathcal{V}}$ la restriction de la forme de Thom $u(\mathcal{V})$ à la section nulle. C'est la forme d'Euler équivariante du fibré G-équivariant connecté $\mathcal{V} \to B$. On note $rg(\mathcal{V})$ la fonction localement constante sur B égale au rang de $\mathcal{V}$. La forme d'Euler est nulle si le rang de $\mathcal{V}$ est impair. Rappelons la définition (42) de la fonction $\mathrm{SO}(V)$-invariante $\det{}_o^{1/2}(.)$ sur $\mathfrak{so}(V)$. On pourra comparer le lemme suivant et l'exemple 100.

Lemme 103 *Soit $\mathcal{V} \to B$ un fibré euclidien G-équivariant muni d'une connection G-invariante euclidienne ∇. Soit $F(X)$ la courbure équivariante de ∇. Soit o une orientation locale de $\mathcal{V}$, alors pour $X \in \mathfrak{g}$*

$$Eul(\mathcal{V})_o(X) = (-2\pi)^{-rg(\mathcal{V})/2} \det{}_o^{1/2} F(X).$$

On note encore $Eul(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_G(\mathfrak{g},B)_{\mathcal{V}}$ la classe de cohomologie de $Eul(\mathcal{V})$. Elle est indépendante de la structure euclidienne et de la connection euclidienne choisie.

Enonçons l'isomorphisme de Thom. La multiplication à gauche par la classe de Thom équivariante $u = u(\mathcal{V})$ induit une application $m(\alpha) = u \wedge p^*\alpha$ de $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g},B)_{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{H}_{vcpt,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}$. L'isomorphisme de Thom en cohomologie équivariante [1] [27] [30] s'énonce:

Proposition 104 *Soit G un groupe de Lie opérant sur une variété B. Soit $\mathcal{V} \to B$ un fibré G-équivariant euclidien connecté. Soit $u \in \mathcal{H}_{vcpt,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}}$ la classe de Thom équivariante. Soit $\mathcal{E}$ un fibré réel G-équivariant sur B. Alors les applications*

$$m : \mathcal{H}_G(\mathfrak{g},B)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}_{vcpt,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}$$

et

$$p_* : \mathcal{H}_{vcpt,G}(\mathfrak{g},\mathcal{V})_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}} \to \mathcal{H}_G(\mathfrak{g},B)_{\mathcal{E}}$$

sont inverses l'une de l'autre.

L'isomorphisme de Thom est aussi valide pour les divers groupes de cohomologie introduits: par exemple, l'application m induit des isomorphismes:

$$\mathcal{H}_G^\infty(U,B)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}_{vcpt,G}^\infty(U,\mathcal{V})_{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}},$$

$$\mathcal{H}_{[G]}^{\mathcal{E}}(B) \to \mathcal{H}_{vcpt,[G]}^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}(\mathcal{V}).$$

Soit G un groupe de Lie compact opérant dans une variété compacte M. Soit $S \in \mathfrak{g}$ un élément invariant par G. En particulier, S est dans le centre de $\mathfrak{g}$. Soit $M(S)$ la variété des zéros de S_M. C'est une sous-variété fermée G-stable de M. Soit $\mathcal{N}$ le fibré normal à $M(S)$ dans M. Notons $p : \mathcal{N} \to M(S)$ la projection. Le fibré $\mathcal{N}$ est un fibré réel G-équivariant sur $M(S)$. L'orientation $\zeta(S)$ de $\mathcal{N}$ (définition 94) est G-invariante Elle définit une classe de Thom u_S et un isomorphisme $m_S : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g},M(S)) \to \mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(\mathfrak{g},\mathcal{N})$ défini par $m_S(\alpha) =$

$u_S \wedge p^*\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M(S))$. Si U est un ouvert G-invariant dans $\mathfrak{g}$, l'application m_S est aussi un isomorphisme $m_S : \mathcal{H}_G^\infty(U, M(S)) \to \mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(U, \mathcal{N})$. Choisissant un voisinage tubulaire $p : N \to M(S)$ de $M(S)$ dans M et une classe u_S G-équivariante fermée à support compact dans N comme ci-dessus (en particulier elle vérifie $p_* u_S = 1$), il existe donc une application encore notée $m_S : \mathcal{H}_G^\infty(U, M(S)) \to \mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ définie par $m_S(\alpha) = u_S \wedge p^*\alpha$.

Proposition 105 *Soit G un groupe de Lie compact opérant sur une variété compacte M. Soit $S \in \mathfrak{g}$ un élément G-fixe de $\mathfrak{g}$. Soient $M(S)$ la variété des zéros de S_M. Il existe un voisinage G-invariant U de S dans $\mathfrak{g}$ tel que m_S induise un isomorphisme*

$$m_S : \mathcal{H}_G^\infty(U, M(S)) \to \mathcal{H}_G^\infty(U, M).$$

Démonstration. On peut démontrer ceci comme dans [1] ou dans [19]. Recopions ici la démonstration de [19]. Soit a un nombre réel strictement positif. Soit ϕ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$, telle que $\phi = 0$ si $|t| > a$ et $\phi(0) = 1$. On a donc $1 - \phi(t) = t\psi(t)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $(.,.)$ une métrique G-invariante sur M. Soit $\theta(\xi) = (S_M, \xi)$ la 1-forme sur M définie comme le gradient du champ de vecteurs S_M. C'est une 1-forme G-invariante. Si a est assez petit, on peut trouver un voisinage U de S dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage tubulaire N de $M(S)$ dans M tel que $|(S_M, Y_M)_m| > a$, si $Y \in U$ et $m \in M - N$. Considérons $\phi(d_\mathfrak{g}\theta)$ que l'on calcule par série de Taylor. La composante de degré extérieur 0 de $(d_\mathfrak{g}\theta)(Y)$ est égale à la fonction $-(S_M, Y_M)(m)$. Si $Y \in U$, la forme $\phi(d_\mathfrak{g}\theta)(Y)$ est donc à support compact dans N. On a

$$1 - \phi(d_\mathfrak{g}\theta) = d_\mathfrak{g}\theta \wedge \psi(d_\mathfrak{g}\theta) = d_\mathfrak{g}(\theta\psi(d_\mathfrak{g}\theta)).$$

Si α est une forme équivariante fermée sur M, on voit donc que

$$\alpha - \phi(d_\mathfrak{g}\theta)\alpha = d_\mathfrak{g}(\theta\psi(d_\mathfrak{g}\theta))$$

est un bord. De plus $\phi(d_\mathfrak{g}\theta)$ est à support compact dans N. D'après l'isomorphisme de Thom, on voit que m_S est surjective sur $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$. On démontre de même l'injectivité. ∎

Enonçons maintenant la formule de localisation de Bismut [9] le long des fibres. Soit G un groupe de Lie compact. Soit $p : M \to B$ une fibration de G-variétés compactes. Soit $\mathcal{V}$ le fibré tangent vertical. Soient $S \in \mathfrak{g}$, $M(S)$ la variété des zéros de S_M et $B(S)$ la variété des zéros de S_B. L'application p se restreint en une fibration $p^S : M(S) \to B(S)$ et le fibré tangent vertical pour la fibration p^S est $\mathcal{V}(S)$. On note $\mathcal{N}$ le fibré normal à la sous-variété $M(S)$ dans $p^{-1}(B(S))$. C'est un fibré $G(S)$-équivariant sur $M(S)$. Soit $Eul(\mathcal{N}) \in \mathcal{H}_{G(S)}(\mathfrak{g}(S), M(S))_\mathcal{N}$ la classe d'Euler équivariante du fibré $\mathcal{N} \to M(S)$. On note $Eul_S(\mathcal{N}) \in \mathcal{H}_{G(S)}(\mathfrak{g}(S), M(S))_\mathcal{N}$ la classe d'Euler translatée $Eul_S(\mathcal{N})(Y) = Eul(\mathcal{N})(S + Y)$ pour $Y \in \mathfrak{g}(S)$. Il existe un voisinage $G(S)$-invariant U de 0 dans $\mathfrak{g}(S)$ tel que $Eul_S(\mathcal{N})$ définisse par restriction à U un élément inversible de $\mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, M(S))_\mathcal{N}$.

Si $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{V}$ est une classe de cohomologie équivariante tordue pour le fibré vertical pour p, nous avons défini les éléments $\int_{M/B} \alpha = p_*\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, B)$ (formule (75)) et $T_S\alpha \in \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_\mathcal{V}$ (formules (76)). Puisque p^S est une fibration, on a :

$$\mathcal{V}|M(S) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{V}(S).$$

La forme $Eul_S(\mathcal{N})^{-1}T_S\alpha$ est tordue pour $\mathcal{V}(S)$ et on peut l'intégrer sur la fibre de p^S ce qui donne un élément de $\mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, B(S))$.

Proposition 106 *[9] Soit G un groupe de Lie compact. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante de variétés compactes. Soit $S \in \mathfrak{g}$. Soit $M(S)$ (resp. $B(S)$) la variété des zéros de S_M (resp S_B). Soit $\mathcal{N}$ le fibré normal à $M(S)$ dans $p^{-1}(B(S))$. Soit $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_\mathcal{V}$ une classe de cohomologie G-équivariante sur M, tordue pour le fibré vertical $\mathcal{V}$. Il existe un voisinage $G(S)$-invariant U de 0 dans $\mathfrak{g}(S)$ tel que sur U la classe $Eul_S(\mathcal{N}) \in \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, M(S))_\mathcal{V}$ soit inversible et que l'égalité suivante soit vérifiée dans $\mathcal{H}_{G(S)}^\infty(U, B(S))$:*

$$T_S\Big(\int_{M/B} \alpha\Big) = \int_{M(S)/B(S)} Eul_S(\mathcal{N})^{-1}T_S\alpha.$$

Démonstration. Nous donnons une démonstration cohomologique de cette égalité en procédant comme dans [1] ou [19], prop. 25, qui correspond au cas où B est un point. En restreignant d'abord α à $p^{-1}(B(S))$ on peut supposer que S s'annule sur B, que $G = G(S)$ et que $M = p^{-1}(B(S))$. L'élément $S \in \mathfrak{g}$ appartient au centre de $\mathfrak{g}$ et le champ S_M est vertical pour la fibration $M \to B$. Soit $q : N \to M(S)$ un voisinage tubulaire de $M(S)$ dans M. Comme $\mathcal{V}|M(S) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{V}(S)$, on peut supposer que $p|N = p^S q$. Soit $u \in \mathcal{H}_{cpt,G}(\mathfrak{g}, N)_\mathcal{N}$ la classe de Thom de N. On a donc $q_*u = 1$ et $u|M(S) = Eul(\mathcal{N})$. D'après le lemme précédent, on peut supposer que sur un voisinage W de S dans $\mathfrak{g}$ on a $\alpha = u \wedge q^*\beta$ avec $\beta \in \mathcal{H}_G^\infty(W, M(S))_{\mathcal{V}(S)}$. On a donc $p_*\alpha = (p^S)_*q_*\alpha = (p^S)_*\beta$. L'égalité $\alpha = u \wedge q^*\beta$ dans $\mathcal{H}_{cpt,G}^\infty(W, N)$ entraîne par restriction à $M(S)$ l'égalité $Eul(\mathcal{N})\beta = \alpha|M(S)$. Comme $Eul(\mathcal{N})$ est inversible dans $\mathcal{H}_G^\infty(W, M(S))_\mathcal{N}$ on obtient $\beta = Eul(\mathcal{N})^{-1}\alpha|M(S)$ sur le voisinage W de S dans $\mathfrak{g}$. En translatant W par S, on obtient l'égalité voulue sur le voisinage $U = W - S$. ∎

5.2 Bottes et bouquets de formes équivariantes tordues.

Soit G un groupe presque algébrique opérant régulièrement sur une variété M. Soit $\mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel réel sur lequel G opère régulièrement.

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$. Nous définissons un opérateur de translation $T_S^\mathcal{E}$ tordu par $\mathcal{E}$. Considérons l'espace $M(S)_{\mathcal{E}(S)}$. Un élément de $M(S)_{\mathcal{E}(S)}$ est un couple (m, o) où $m \in M(S)$ et où o est une orientation de $\mathcal{E}(S)$. Considérons la décomposition $\mathcal{E}|M(S) = \mathcal{E}(S) \oplus \mathcal{Q}(S)$ et l'orientation $\zeta(-S)$ du fibré $\mathcal{Q}(S)$ (définition 94).

De manière analogue à (37) on note

$$T_S^{\mathcal{E}} : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{A}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_{\mathcal{E}(S)}$$

l'opérateur défini par

$$(80) \qquad (T_S^{\mathcal{E}}\alpha)_o(Y) = \alpha_{o\wedge\zeta(-S)}(S+Y)|M(S)$$

pour $Y \in \mathfrak{g}(S)$ et o une orientation locale de $\mathcal{E}(S)$. On appelle $T_S^{\mathcal{E}}$ l'opérateur de translation tordu par $\mathcal{E}$. On déduit de $T_S^{\mathcal{E}}$ une application en cohomologie

$$T_S^{\mathcal{E}} : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}_{G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(S), M(S))_{\mathcal{E}(S)}.$$

Soit $a > 0$. Pour tout $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, on définit de même des applications

$$T_S^{\mathcal{E}} : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{A}_{[G(S)]}^{\mathcal{E}(S)}(M(S))$$
$$T_S^{\mathcal{E}} : \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}_a, M)_{\mathcal{E}} \to \mathcal{H}_{[G(S)]}^{\mathcal{E}(S)}(M(S)).$$

Soient $s \in G_{ell}$ et $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Décomposons le fibré $\mathcal{E}(s)$ au dessus de $M(s)(S)$ en $\mathcal{E}(s) = \mathcal{E}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s,S)$ où

$$\mathcal{E}(s)(S) = \mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S), \quad \mathcal{Q}(s,S) = S(\mathcal{E}(s)).$$

On a donc

$$\mathcal{E}|M(s)(S) = \mathcal{E}(s)(S) \oplus \mathcal{Q}(s,S) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

En utilisant l'orientation $\zeta(\mathcal{Q}(s,S), -S)$ du fibré $\mathcal{Q}(s,S)$ (définition 94), on définit comme ci-dessus l'opérateur

$$T_{s,S}^{\mathcal{E}} : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))_{\mathcal{E}(s)} \to \mathcal{A}_{G(s)\cap G(S)}^\infty(\mathfrak{g}(s)\cap\mathfrak{g}(S), M(s)\cap M(S))_{\mathcal{E}(s)\cap\mathcal{E}(S)}$$

donné par

$$(81) \qquad (T_{s,S}^{\mathcal{E}}\alpha)_o(Y) = \alpha_{o\wedge\zeta(\mathcal{Q}(s,S),-S)}(S+Y)$$

pour $Y \in \mathfrak{g}(s)\cap\mathfrak{g}(S)$ et o orientation locale de $\mathcal{E}(s)\cap\mathcal{E}(S)$. De même, si $a > 0$, on obtient des applications

$$T_{s,S}^{\mathcal{E}} : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \to \mathcal{A}_{[G(s)\cap G(S)]}^{\mathcal{E}(s)\cap\mathcal{E}(S)}(M(s)\cap M(S)),$$
$$T_{s,S}^{\mathcal{E}} : \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \to \mathcal{H}_{[G(s)\cap G(S)]}^{\mathcal{E}(s)\cap\mathcal{E}(S)}(M(s)\cap M(S)).$$

Si $a > 0$ est assez petit et si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on a $G(se^S) = G(s)\cap G(S)$, $M(se^S) = M(s)\cap M(S)$ et $\mathcal{E}(se^S) = \mathcal{E}(s)(S)$, et on a des applications

$$T_{s,S}^{\mathcal{E}} : \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \to \mathcal{A}_{[G(se^S)]}^{\mathcal{E}(se^S)}(M(se^S)),$$
$$T_{s,S}^{\mathcal{E}} : \mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)} \to \mathcal{H}_{[G(se^S)]}^{\mathcal{E}(se^S)}(M(se^S)).$$

Définition 107 *Nous dirons qu'une famille* $(\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ *où, pour tout* $s \in G_{ell}$, α_s *est un élément de* $\mathcal{A}^{\mathcal{E}(s)}_{[G(s)]}(M(s))$, *est une botte de formes équivariantes tordues si elle vérifie les conditions suivantes.*

1. Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ *pour tout* $g \in G$ *et tout* $s \in G_{ell}$.

2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$, *il existe* $a > 0$ *et un représentant* $\alpha_{s,a} \in \mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)}$ *de* α_s *tels que, pour tout* $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, *on ait*

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S), \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S), \quad \mathcal{E}(se^S) = \mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)$$

et

$$T^{\mathcal{E}}_{s,S}\alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{A}^{\mathcal{E}(se^S)}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}_G(M)$ *l'espace des bottes de formes équivariantes tordues.*

La condition de recollement est motivée par la formule de localisation (proposition 106) et le signe $-$ qui apparaît dans la formule (81) provient du signe $-$ dans la formule donnée pour la classe d'Euler (lemme 103).

On introduit une définition similaire au niveau des classes de cohomologie équivariante tordue:

Définition 108 *Une botte de classes de cohomologie équivariante tordue est une famille* $(\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ *où, pour tout* $s \in G_{ell}$, α_s *est un élément de* $\mathcal{H}^{\mathcal{E}(s)}_{[G(s)]}(M(s))$, *vérifiant les conditions suivantes.*

1. Invariance: $\alpha_{gsg^{-1}} = g \cdot \alpha_s$ *pour tout* $g \in G$ *et tout* $s \in G_{ell}$.

2. Recollement: pour tout $s \in G_{ell}$, *il existe* $a > 0$ *et un représentant* $\alpha_{s,a} \in \mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)}$ *de* α_s *tels que, pour tout* $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, *on ait*

$$G(se^S) = G(s) \cap G(S), \quad M(se^S) = M(s) \cap M(S), \quad \mathcal{E}(se^S) = \mathcal{E}(s) \cap \mathcal{E}(S)$$

et

$$T^{\mathcal{E}}_{s,S}\alpha_{s,a} = \alpha_{se^S}$$

dans $\mathcal{H}^{\mathcal{E}(se^S)}_{[G(se^S)]}(M(se^S))$.

On note $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$ *l'espace des bottes de classes de cohomologie équivariante tordue.*

De manière analogue à la définition 60 nous pourrions considérer des bouquets $(\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ de formes équivariantes tordues fermées. Cependant les conditions de recollement sont plus lourdes à énoncer car elles font intervenir les orientations $\xi(e^S)$ associées à un élément elliptique S, et nous nous en tenons là.

On définit de manière évidente l'espace $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_{cpt,G}(M)$ des bottes équivariantes à support compact sur M et, pour une fibration $p : M \to B$, l'espace $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_{vcpt,G}(M)$.

La structure de $\mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))$-module sur $\mathcal{H}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s)_a, M(s))_{\mathcal{E}(s)}$ induit une structure de $\mathcal{K}_G(M)$-module sur $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$. Plus généralement, si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux fibrés analogues à $\mathcal{E}$, et si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, il y a une application bilinéaire naturelle de $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1}_G(M) \times \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1}_G(M)$ dans $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$.

Si $\phi : H \to G$ est un morphisme de groupes algébriques, il est clair qu'on obtient une application naturelle

$$\phi^* : \mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M) \to \mathcal{K}^{\mathcal{E}}_H(M).$$

Si $\phi : M_1 \to M_2$ est un morphisme de G-variétés, l'image réciproque des formes différentielles induit une application

$$\phi^* : \mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M_2) \to \mathcal{K}^{\phi^*\mathcal{E}}_G(M_1).$$

La proposition suivante résulte immédiatement des définitions.

Proposition 109 *On suppose donnée, pour chaque $s \in G_{ell}$, une orientation $G(s)$-équivariante $o(s)$ du fibré $\mathcal{E}(s) \to M(s)$ telle que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ assez petit, on ait*

(82) $$o(s) = o(se^S) \wedge \zeta(\mathcal{Q}(s,S), -S).$$

Alors les espaces $\mathcal{B}_G(M)$ et $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}_G(M)$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit $(\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ est un élément de $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}_G(M)$. Pour $s \in G_{ell}$ posons $\alpha'_s = \alpha_{s,o(s)}$. Il est clair que $(\alpha'_s)_{s\in G_{ell}}$ est un élément de $\mathcal{B}_G(M)$. ∎

La même proposition est évidemment valable pour les espaces $\mathcal{K}_G$, $\mathcal{Z}_G$, $\mathcal{K}_{cpt,G}$, etc...

Exemple 110 *Soit $\mathcal{E}_1 \to M$ un fibré vectoriel réel sur M. Supposons que G opère régulièrement sur $\mathcal{E}_1$. Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_1$. Pour $s \in G_{ell}$, on définit une orientation de $\mathcal{E}(s) = \mathcal{E}_1(s) \oplus \mathcal{E}_1(s)$ par $o(s) = o'(s) \wedge o'(s)$, où $o'(s)$ est une orientation locale de $\mathcal{E}_1(s)$. La condition (82) est vérifiée et $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}_G(M)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{B}_G(M)$.*

On en déduit une application bilinéaire de $\mathcal{B}^{\mathcal{E}}_G(M) \times \mathcal{B}^{\mathcal{E}}_G(M)$ dans $\mathcal{B}_G(M)$, et une structure d'algèbre sur $\mathcal{B}_G(M) \oplus \mathcal{B}^{\mathcal{E}}_G(M)$ et sur $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$. Evidemment c'est la structure induite par la structure d'algèbre que l'on a pour chaque $s \in G_{ell}$ sur $\mathcal{A}(M(s)_{\mathcal{E}(s)}) \simeq \mathcal{A}(M(s)) \oplus \mathcal{A}(M(s))_{\mathcal{E}(s)}$.

En général, (comme $\mathcal{K}_G(M)$-module) l'espace $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$ peut ne pas être isomorphe à $\mathcal{K}_G(M)$. Il s'agit de savoir si $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{K}_G(M)$ et dans ce cas d'en décrire une base. Par exemple, supposons donnée une classe de bottes tordues $f^{\mathcal{E}} \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$ qui soit inversible dans $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$. Alors $f^{\mathcal{E}}$ est une base de $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$ sur $\mathcal{K}_G(M)$.

Les deux exemples qui suivent sont classiques en K-théorie.

Considérons un fibré métalinéaire orienté $\mathcal{E} \to M$ comme dans la section 4.5, et soit $o_{\mathcal{E}}$ son orientation. Nous employons les notations de cette section. Soit $s \in G_{ell}$ et soit o une orientation locale du fibré $\mathcal{E}(s) \to M(s)$. Rappelons l'orientation $\xi(s^{-1})$ du fibré $\mathcal{Q}(s)$ (définition 96). Donc $o \wedge \xi(s^{-1})$ est une orientation locale de $\mathcal{E}$ au-dessus de $M(s)$. On la compare avec l'orientation $o_{\mathcal{E}}$. On note $f_s^{\mathcal{E}}$ la fonction à valeurs dans $\{\pm 1\}$ sur $M(s)_{\mathcal{E}(s)}$ déterminée par $o \wedge \xi(s^{-1}) = f_{s,o}^{\mathcal{E}} o_{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire, si $m \in M(s)$, si $p \in P$ est un point au dessus de m, et si $r(s,p)$ est l'élément correspondant de $\mathrm{ML}^+(E)_{ell}$,

$$f_{s,o}^{\mathcal{E}}(m) = F(r(s,p)^{-1}, o\backslash o_{\mathcal{E}}(m)) \tag{83}$$

où F est la fonction définie à la fin de la section 4.3. Il résulte des propositions 83 et 88 que la famille $f^{\mathcal{E}} = (f_s^{\mathcal{E}})_{s \in G_{ell}}$ appartient à $\mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$. Comme on a $f^{\mathcal{E}} f^{\mathcal{E}} = 1$, $f^{\mathcal{E}}$ est inversible. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 111 *Soit $\mathcal{E}$ un fibré orienté métalinéaire G-équivariant. Alors $\mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$ est un $\mathcal{K}_G(M)$-module libre de base $f^{\mathcal{E}}$.*

Remarquons que l'algèbre $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$ est isomorphe à $\mathcal{K}_G(M) \otimes \mathbb{C}[t]/(t^2 - 1)$.

On considère maintenant un fibré G-équivariant complexe $\mathcal{V} \to M$ de dimension N. On suppose que $\mathcal{V}$ admet une connection G-invariante ∇. Pour $X \in \mathfrak{g}$, soit $F(X) \in \mathcal{A}_G(M, \mathrm{End}(\mathcal{V}))$ sa courbure équivariante. Notons V un espace vectoriel complexe de dimension N. On considère $\mathcal{V}$ comme un fibré $P \times_{\mathrm{GL}(V)} V$, où P est un fibré principal G-équivariant de groupe $\mathrm{GL}(V)$.

On note E l'espace vectoriel réel sous-jacent à V. On peut donc considérer le revêtement $\mathrm{GL}(V)_E$ de $\mathrm{GL}(V)$ associé à l'injection $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(E)$. On sait que, si $\dim(V) > 0$, le groupe $GL(V)_E$ est connexe, et qu'il existe un unique caractère $\det_V^{1/2}$ de $GL(V)_E$ dans $\mathbb{C}^\times$ de carré $\det_V$. De plus $\det_V^{1/2}(\epsilon) = -1$, ce que l'on choisit comme définition de $\det_V^{1/2}$ quand $V = \{0\}$.

On choisit une racine i de -1. Si $E = \mathbb{C}$, on munit E de l'orientation donnée par la base $1, i$. On identifie E à $\mathbb{C}^n$ et on munit E de l'orientation produit, que l'on notera o_E.

On considère le fibré réel $\mathcal{E}$ sous-jacent à $\mathcal{V}$. Il a donc une orientation canonique $o_{\mathcal{E}}$. Soit $s \in G_{ell}$. Soit $m \in M(s)$. Soit $p \in P$ un point au dessus de m, et soit $r(s,p) \in GL(V)$ la transformation verticale correspondante de sorte que $sp = pr(s,p)$. Soit $\hat{r}(s,p)$ un représentant de $r(s,p)$ dans $GL(V)_E$. On peut considérer la fonction localement constante sur $M(s)_{\mathcal{E}(s)}$ telle que

$$a_s^{\mathcal{V}}(m, o) = \det{}_V^{1/2}(\hat{r}(s,p)) F(\hat{r}(s,p)^{-1}, o\backslash o_{\mathcal{E}}).$$

Cette définition ne dépend pas du choix du représentant $\hat{r}(s,p)$. La famille $a^{\mathcal{V}} = (a_s^{\mathcal{V}})$ est une famille de formes tordues fermées vérifiant la relation d'invariance des bottes, mais pas la relation de recollement.

Pour corriger ce défaut, on considère la forme équivariante $\nu \in \mathcal{A}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g}, M)$ telle que, pour $X \in \mathfrak{g}$, on ait

$$\nu(X) = \exp(\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} F(X)).$$

C'est la racine carrée normalisée du caractère de Chern équivariant du fibré en droite complexe $\Lambda^N(\mathcal{V})$. Pour $s \in G_{ell}$ on note ν_s la restriction de ν en un élément de $\mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), M(s))$, et on pose

$$f^{\mathcal{V}}_s = a^{\mathcal{V}}_s \nu_s.$$

C'est un élément fermé de $\mathcal{A}^{\infty}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), M(s))$. On vérifie que la famille $f^{\mathcal{V}} = (f^{\mathcal{V}}_s)_{s \in G_{ell}}$ est une botte tordue inversible. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 112 *Soit $\mathcal{V}$ un fibré complexe G-équivariant dans lequel G opère régulièrement et muni d'une connection invariante. Soit $\mathcal{E}$ le fibré réel sous-jacent. Alors $\mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$ est un $\mathcal{K}_G(M)$-module libre de base $f^{\mathcal{V}}$.*

Remarquons que $f^{\mathcal{V}} f^{\mathcal{V}}$ est le caractère de Chern $\operatorname{ch}(\Lambda^N \mathcal{V}) \in \mathcal{K}_G(M)$ du fibré $\Lambda^N \mathcal{V}$. Si $\operatorname{ch}(\Lambda^N \mathcal{V})$ admet une racine carrée dans $\mathcal{K}_G(M)$, on voit que l'algèbre $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}^{\mathcal{E}}_G(M)$ est isomorphe à $\mathcal{K}_G(M) \otimes \mathbb{C}[t]/(t^2 - 1)$ comme dans le cas des fibrés métalinéaires orienté, mais ce n'est pas toujours le cas.

La proposition 112 se généralise aux fibrés réels munis d'une $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}$-structure.

5.3 Bottes tordues pour le point.

Dans cette section, nous donnons une description de l'espace $\mathcal{K}^{\mathcal{V}}_G(M)$ lorsque M est un point $\bullet$. La donnée d'un fibré G-équivariant $\mathcal{V} \to M$ est la donnée d'une représentation $\lambda : G \to \mathrm{GL}(V)$ de G dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. Nous introduisons un revêtement d'ordre 2 de G.

Définition 113 *Soit $\lambda : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie. On définit le revêtement $G_V \to G$ où*

$$G_V = \{(g, h);\ g \in G,\ h \in \mathrm{ML}(V),\ \lambda(g) = j(h)\}$$

image réciproque du revêtement $j : \mathrm{ML}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ par l'application $\lambda : G \to \mathrm{GL}(V)$.

On note encore $j : G_V \to G$ l'application de revêtement $j(g, h) = g$ et $\lambda : G_V \to \mathrm{ML}(V)$ l'application $\lambda(g, h) = h$. On note encore ϵ l'élément $(1, \epsilon)$ de G_V. On a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \{1,\epsilon\} & \longrightarrow & G_V & \xrightarrow{j} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \lambda & & \big\downarrow \lambda & & \\ 1 & \longrightarrow & \{1,\epsilon\} & \longrightarrow & \mathrm{ML}(V) & \xrightarrow{j} & \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{84}$$

On note G_V^+ l'image réciproque de $\mathrm{ML}^+(V)$. Le sous-groupe G_V^+ est formé des $a \in G_V$ tels que $\det(j(a)) > 0$. On définit de même G_V^-. On définit pour $a \in G_V$ l'automorphisme intérieur tordu $\iota(a)$ par la formule suivante. Pour $b \in G_V$, on a

$$\iota(b)(a) = \begin{cases} \epsilon aba^{-1} & \text{pour } a \in G_V^- \text{ et } b \in G_V^-, \\ aba^{-1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{85}$$

Définition 114 *On dit qu'une fonction ϕ sur G_V est impaire si $\phi(\epsilon b) = -\phi(b)$ pour tout $b \in G_V$.*

Le groupe G_V est un exemple de groupe gradué: on dit qu'un groupe H est gradué si l'on s'est donné un morphisme de groupe (noté p pour parité) dans le groupe $\{0, 1\}$. L'image réciproque de 0 est notée H^+, celle de 1 est notée H^-.

Définition 115 *Une fonction ϕ sur un groupe gradué H sera dite anti-invariante si l'on a*

$$\phi(aba^{-1}) = (-1)^{p(a)(p(b)+1)}\phi(b) \quad \textit{pour } a \in H \textit{ et } b \in H.$$

Donc la restriction de ϕ à H^- est invariante, et la restriction à H^+ est semi-invariante de poids $(-1)^{p(\cdot)}$. Si $H = H^+$, une fonction anti-invariante est juste une fonction invariante. Donnons quelques exemples de fonctions anti-invariantes sur H.

Une représentation graduée de type I de dimension $p|q$ de H est par définition un homomorphisme λ de H dans le groupe des éléments inversibles homogènes de la super algèbre $M(p, q, \mathbb{C})$, préservant la parité. Remarquons que si H^- est non vide, on a $p = q$. La fonction sur H définie par

$$\phi(h) = \mathrm{str}(\lambda(g)) = \mathrm{tr}(\lambda(g) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix})$$

est anti-invariante, nulle sur H^-.

Une représentation graduée de type II de dimension p de H est par définition un homomorphisme λ de H dans le groupe des éléments inversibles homogènes de la super algèbre $Q(p, \mathbb{C})$, préservant la parité. La fonction sur H définie par

$$\phi(h) = \mathrm{ostr}(\lambda(g)) = \mathrm{tr}(\lambda(g) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix})$$

est anti-invariante, nulle sur H^+.

Dans le cas du groupe G_V, une fonction impaire ϕ est anti-invariante si et seulement si elle vérifie la relation d'allure peut-être plus naturelle

$$\phi(\iota(a)b) = (-1)^{p(a)}\phi(b). \tag{86}$$

Définition 116 *On note $C^\infty(G_V)^{G,V}$ l'espace des fonctions C^∞ sur G_V qui sont impaires et anti-invariantes. On note $C^\infty(G_V^+)^{G,V}$ le sous-espace des fonctions à support dans G_V^+ et on définit de même $C^\infty(G_V^-)^{G,V}$.*

L'espace $C^\infty(G_V^\pm)^{G,V}$ est un module sur l'algèbre $C^\infty(G^\pm)^G$ où $G^\pm$ est l'ouvert des $g \in G$ tels que $\det \lambda(g) = \pm 1$.

Nous introduisons une définition voisine de la définition 99. Soit $or(V)$ l'ensemble des deux orientations de V.

Définition 117 *On note $\kappa_G^\infty(V)$ l'espace des fonctions $\psi \in C^\infty(G_V \times or(V))$ qui vérifient les relations $\psi(\iota(a)(b), ao) = -\psi(-\epsilon b, o) = -\psi(b, -o) = \psi(b, o)$ pour tout $a \in G_V$, $b \in G_V$ et $o \in or(V)$. Si $\dim(V)$ est pair, on note $\kappa_{G,+}^\infty(V)$ le sous-espace des fonctions $\psi \in \kappa_G^\infty(V)$ à support dans $G_V^+ \times or(V)$. Si $\dim(V)$ est impair, on note $\kappa_{G,+}^\infty(V)$ le sous-espace des fonctions $\psi \in \kappa_G^\infty(V)$ à support dans $G_V^- \times or(V)$. On définit de même $\kappa_{G,-}^\infty(V)$.*

Par restriction à $G_V \times \{o\}$, le choix d'une orientation o de V détermine un isomorphisme de $\kappa_{G,\pm}^\infty(V)$ sur $C^\infty(G_V^\pm)^{G,V}$ si $\dim(V)$ est pair, et sur $C^\infty(G_V^\mp)^{G,V}$ si $\dim(V)$ est impair.

Exemple 118 *Munissons V d'une forme quadratique définie positive. On considère le cas où λ est la représentation du groupe $G = \mathrm{O}(V)$ dans V. Donc G_V est le groupe $\mathrm{Pin}(V)$. L'espace $\kappa_{G,-}^\infty(V)$ est nul. La fonction $\det_{V,o}^{1/2}(1-a)$ ($a \in Pin(V)$, $o \in or(V)$) définie en 53 est un élément de $\kappa_{G,+}^\infty(V)$.*

On peut montrer que si $\dim V$ est pair, $\kappa_{G,+}^\infty(V) \simeq C^\infty(G_V^+)^{G,V}$ est libre de rang 1 sur $C^\infty(G^+)^G$ et la fonction $\det_{V,o}^{1/2}(1-a)$ est une base.

De même, si $\dim V$ est impair, $\kappa_{G,+}^\infty(V) \simeq C^\infty(G_V^-)^{G,V}$ est libre de rang 1 sur $C^\infty(G^-)^G$ avec pour base la fonction $\det_{V,o}^{1/2}(1-a)$.

Exemple 119 *Supposons que W soit un espace vectoriel complexe muni d'une représentation de G. Soit V l'espace réel sous-jacent. Sur le groupe $\mathrm{GL}(W)_V$ on dispose de la fonction impaire invariante $\det_W^{1/2}$. On note encore $\det_W^{1/2}$ la fonction impaire (anti)-invariante que l'on en déduit sur $G_V = G_V^+$. On voit que $\det_W^{1/2}$ est une base de $C^\infty(G_V)^{G,V}$ sur $C^\infty(G_V)^G$.*

On pourra comparer cet exemple avec la proposition 112.

Exemple 120 *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit λ un homomorphisme de G dans $\mathrm{ML}^+(V)$. On considère la représentation de G dans V obtenue en composant avec la projection $\mathrm{ML}^+(V) \to \mathrm{GL}(V)$. On a $G_V = G_V^+$. La formule $s(g) = (g, \lambda(g))$ définit un homomorphisme de G dans G_V. La fonction impaire f sur G_V telle $f(s(g)) = 1$ pour tout $g \in G$ est une base de $C^\infty(G_V)^{G,V}$ sur $C^\infty(G_V)^G$.*

On pourra comparer cet exemple avec la proposition 111.

Un élément $\hat{g} \in G_V$ est elliptique si et seulement si $j(\hat{g}) \in G$ est elliptique, ou encore si et seulement si $\lambda(\hat{g}) \in \mathrm{ML}(V)$ est elliptique. On a $\mathsf{q}(\hat{g}) = \mathsf{q}(\lambda(\hat{g})) =$

$\mathfrak{q}(j(\hat{g}))$. Dans ce cas on posera $\xi(\hat{g}) = \xi(\lambda(\hat{g}))$, où $\xi(\lambda(\hat{g}))$ est l'orientation de $\mathfrak{q}(\hat{g})$ de la définition 93. On voit que si g appartient à G_{ell}, un choix d'un élément $\hat{g}$ de G_V au dessus de g est équivalent à un choix d'une orientation de $\mathfrak{q}(g)$.

Venons en à la détermination de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$. Par définition, un élément θ de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ est une famille $(\theta_s)_{s\in G_{ell}}$ où chaque θ_s est un germe (pour la topologie elliptique) de fonctions sur $\mathfrak{g}(s) \times or(V(s))$. Soit o une orientation de $V(s)$. On note $\theta(s,o)$ la restriction de θ_s à $\mathfrak{g}(s) \times \{o\}$. Alors $\theta(s,o)$ est représenté par une fonction sur $G(s)$-semi-invariante de poids $\operatorname{sign}\det_{V(s)}(.)$ définie dans un voisinage elliptique de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$. Elle vérifie $\theta(s,-o) = -\theta(s,o)$. Cette famille est G-invariante et vérifie la condition de recollement : si $s' = s\exp S$ avec $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$ suffisamment petit, alors, pour tout X dans un voisinage elliptique de $\mathfrak{g}(s')$, on a

$$\theta(s',o')(S+X) = \operatorname{sign}(\det{}^{1/2}_{o/o'}(-S))\theta(s,o)(X).$$

Soit $\psi \in \kappa_G^\infty(V)$. Soit $s \in G_{ell}$. Soit $\hat{s} \in G_{V\,ell}$ au dessus de s. Soit o une orientation de $V(s)$. Considérons l'orientation $\xi(\hat{s}^{-1})$ de $\mathfrak{q}(s)$. Donc $o \wedge \xi(\hat{s}^{-1})$ est une orientation de V. Notons θ_s le germe de fonction sur $\mathfrak{g}(s) \times or(V(s))$ représenté par la fonction $\theta(s,o)(X)$ définie pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ par la formule

$$\theta(s,o)(X) = \psi(\hat{s}e^X, o \wedge \xi(\hat{s}^{-1})). \tag{87}$$

Cette définition ne dépend pas du choix du représentant $\hat{s}$ de s. Si o_V est une orientation de V, et si $\phi \in C^\infty(G_V)^{G,V}$ est la restriction de ψ à $G_V \times \{o_V\}$, on peut aussi écrire

$$\theta(s,o)(X) = F(\hat{s}^{-1}, o\backslash o_V)\phi(\hat{s}e^X) \tag{88}$$

où $F(.,.)$ est la fonction à valeurs dans ± 1 définie en 82.

Il résulte de la proposition 83 que la famille $(\theta_s)_{s\in G_{ell}}$ est un élément de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$.

Une variante évidente du lemme 43 montre que l'application $\psi \mapsto \theta$ de $\kappa_G^\infty(V)$ dans $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ est un isomorphisme. On a démontré le théorème suivant.

Théorème 121 *Soit $\lambda : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G dans un espace vectoriel V réel de dimension finie. La formule (87) définit un isomorphisme de $\kappa_G^\infty(V)$ sur $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$.*

Soit o_V une orientation de V. La formule (88) définit un isomorphisme de $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ sur l'espace $C^\infty(G_V)^{G,V}$ des fonctions impaires anti-invariantes sur le revêtement à deux feuillets G_V de G.

5.4 Bottes tordues des espaces homogènes.

Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G. Soit M une variété sur laquelle H opère régulièrement. Soit V un fibré vectoriel réel H-équivariant sur M sur lequel H opère régulièrement. On peut donc considérer le fibré vectoriel réel G-équivariant $\mathcal{V} = G \times_H V$ sur $\mathcal{M} = G \times_H M$. Le groupe G opère régulièrement sur $\mathcal{V}$.

On a une application de restriction $E : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(G \times_H M) \to \mathcal{K}_H^V(M)$. On démontre de manière similaire au théorème 64 le théorème suivant.

Théorème 122 *Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique tel que l'espace homogène $G \to G/H$ soit réductif. Soit M une variété sur laquelle H opère régulièrement. Soit $V \to M$ un fibré vectoriel réel sur M sur lequel H opère régulièrement. Alors G opère régulièrement sur $G \times_H M$ et sur $\mathcal{V} = G \times_H V$. L'application de restriction*

$$E : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(G \times_H M) \to \mathcal{K}_H^V(M)$$

est un isomorphisme.

En considérant le cas où $M = \bullet$, et en combinant le théorème 122 et le théorème 121, on obtient:

Théorème 123 *Soit G un groupe presque algébrique. Soit H un sous-groupe presque algébrique de G tel que G/H soit un espace homogène réductif. Considérons une représentation de H dans un espace vectoriel réel de dimension finie V. Soit $\mathcal{V}$ le fibré $G \times_H V$. Alors $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(G/H)$ est isomorphe à l'espace des fonctions anti-invariantes et impaires sur le revêtement à deux feuillets H_V de H défini en 113. L'isomorphisme dépend du choix d'une orientation de V.*

On obtient aussi, par une démonstration similaire à celle du théorème 75, le théorème suivant.

Théorème 124 *Soit G un groupe de Lie et soit $N \subset G$ un sous-groupe fermé distingué de G. Soit P une variété munie d'une action à droite de G telle que l'action du sous-groupe N soit principale. Supposons que le groupe G/N et la variété P/N soient compacts. Soit $\mathcal{V}$ un fibré G/N-équivariant sur P/N. Alors l'application*

$$q^* : \mathcal{K}_{G/N}^{\mathcal{V}}(P/N) \to \mathcal{K}_G^{q^*\mathcal{V}}(P)$$

est un isomorphisme.

6 Images directes.

6.1 Fibrés euclidiens.

Soit G un groupe algébrique opérant régulièrement sur une variété M. Dans tout ce paragraphe, on considère un fibré $\mathcal{V} \to M$ réel euclidien G-équivariant sur lequel G opère régulièrement. On suppose que $\mathcal{V}$ possède une connection euclidienne G-invariante ∇. Rappelons que nous notons encore $\mathcal{V}$ le fibré sur $\mathcal{V}$ image réciproque de $\mathcal{V}$.

De même que la classe de Thom $u(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_{vcpt,G}(\mathfrak{g}, \mathcal{V})_{\mathcal{V}}$ est une classe de cohomologie équivariante tordue naturelle, nous allons construire un élément naturel $b(\mathcal{V}) \in \mathcal{K}^{\mathcal{V}}_{vcpt,G}(\mathcal{V})$ que nous appellerons *classe de Bott*. La restriction $e(\mathcal{V}) \in \mathcal{K}^{\mathcal{V}}_{vcpt,G}(M)$ de $b(\mathcal{V})$ à M sera encore appelée la classe d'Euler du fibré $\mathcal{V}$.

Pour définir $b(\mathcal{V})$ nous avons besoin d'introduire d'autres classes caractéristiques.

Soit V un espace vectoriel euclidien muni d'une forme quadratique Q définie positive. Nous avons défini en 86 la fonction entière $J^{1/2}$ sur $\mathfrak{so}(Q, \mathbb{C})$.

Soit $s \in O(V)$ un automorphisme tel que $(1-s)$ soit inversible. On dira que s est *un automorphisme elliptique non dégénéré*. On note D_s la restriction à $\mathfrak{so}(Q)(s)$ de la fonction $Y \mapsto \det_V(1 - se^Y)$. D'après la formule (53), D_s a une racine carrée entière $D_s^{1/2}$. Comme $\det(1-s)$ est un nombre réel strictement positif (lemme 26), on la normalise par $D_s^{1/2}(0) > 0$. La fonction $D_s^{1/2}$ est une fonction $O(Q)(s)$-invariante sur $\mathfrak{so}(Q)(s)$. Choisissons un élément $\hat{s}$ de $\mathrm{Pin}(V)$ au dessus de s. D'après la formule (56) on a, pour $X \in \mathfrak{so}(Q)(s)$

$$D_s^{1/2}(X) = \det{}^{1/2}_{V,\xi(\hat{s})}(1 - \hat{s}\exp X).$$

De manière analogue, soit $S \in \mathfrak{so}(V)$ un élément tel que S soit inversible. On note d_S la restriction de $X \mapsto (2\pi)^{-\dim(V)} \det_V(S + X)$ à $\mathfrak{so}(V)(S)$. On a $d_S(0) = \det_V(S) > 0$ et on note $d_S^{1/2}$ la racine carrée polynomiale telle que $d_S^{1/2}(0) > 0$.

Revenons au fibré $\mathcal{V} \to M$. Soit $X \mapsto F(X)$ la courbure équivariante de la connection ∇. Dans un repère orthonormal, $F(X)$ est une matrice antisymétrique (à coefficients formes sur la base). On peut donc définir pour tout $X \in \mathfrak{g}$ la forme $J^{1/2}(F(X)) \in \mathcal{A}(M)$.

Définition 125 *On définit la forme G-équivariante $J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla) \in \mathcal{A}^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ par*

$$J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)(X) = J^{1/2}(F(X))$$

pour $X \in \mathfrak{g}$.

La forme équivariante $J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)$ est une racine carrée de la forme $J(\mathcal{V}, \nabla)$ précédemment introduite en 11, vérifiant $J^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)_{[0]}(0) = 1$. Elle est fermée. Sa classe de cohomologie $J^{1/2}(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ est indépendante des choix de structure euclidienne et de connection faits.

Soit $s \in G_{ell}$ un élément central. Supposons que s agisse trivialement sur M et que $s^{\mathcal{V}}$ soit un automorphisme elliptique non dégénéré. La fonction $\det_{\mathcal{V}}(1-s)$ est strictement positive et localement constante sur M. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Dans un repère orthonormal, la courbure équivariante $F(X)$ de la connection ∇ est une matrice antisymétrique commutant à $s^{\mathcal{V}}$. On peut donc définir la forme $D_s^{1/2}(F(X))$.

Définition 126 *Soit $s \in G_{ell}$ un élément central. Supposons que s agisse trivialement sur M et que $s^{\mathcal{V}}$ soit un automorphisme elliptique non dégénéré. On définit la forme G-équivariante $D_s(\mathcal{V}, \nabla)$ sur M par*

$$D_s(\mathcal{V}, \nabla)(X) = D_s(F(X))$$

pour $X \in \mathfrak{g}$ et sa racine carrée

$$D_s^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)(X) = D_s^{1/2}(F(X))$$

pour $X \in \mathfrak{g}$, normalisée par la condition $D_s^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)_{[0]}(0) > 0$.

La forme équivariante $D_s^{1/2}(\mathcal{V}, \nabla)$ est fermée. On note $D_s^{1/2}(\mathcal{V}) \in \mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ sa classe de cohomologie. Elle est indépendante des choix de structure euclidienne et de connection faits.

Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$ un élément G-invariant. Supposons que $S_M = 0$ et que l'action $S^{\mathcal{V}}$ de S dans $\mathcal{V}$ soit inversible. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Dans un repère orthonormal, la courbure équivariante $F(X)$ de la connection ∇ est une matrice antisymétrique commutant à $S^{\mathcal{V}}$. On peut donc définir la forme $d_S^{1/2}(F(X))$.

Définition 127 *Soit $S \in \mathfrak{g}_{ell}$ un élément G-invariant. Supposons que $S_M = 0$ et que l'action $S^{\mathcal{V}}$ de S dans $\mathcal{V}$ soit inversible. On définit la forme G-équivariante $Eul_S^+(\mathcal{V}, \nabla) \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ par $Eul_S^+(\mathcal{V}, \nabla)(X) = d_S^{1/2}(F(X))$ pour $X \in \mathfrak{g}$.*

Rappelons que comme S est inversible dans $\mathcal{V}$, on a défini (formule 43) une orientation $\zeta(\mathcal{V}, -S)$ de $\mathcal{V}$. Il résulte du lemme 103 que l'on a

$$Eul_S^+(\mathcal{V}, \nabla)(X) = Eul(\mathcal{V})_{\zeta(\mathcal{V}, -S)}(S + X). \tag{89}$$

Si α est une forme sur la base B, on notera encore α la forme $p^*\alpha$ sur $\mathcal{V}$.

Soit $s \in G_{ell}$. D'après (72) on a

$$\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

La connection G-invariante ∇ détermine par restriction des connections $G(s)$-équivariantes sur les fibrés $\mathcal{V}(s)$ et $\mathcal{Q}(s)$. Comme ∇ est fixée, nous ne mentionnerons plus les choix de connections dans les notations qui suivent. Le rang de $\mathcal{V}(s)$ est une fonction localement constante sur $M(s)$ notée $\mathrm{rg}(\mathcal{V}(s))$.

Définition 128 *On pose $n(\mathcal{V})_s = (2\pi)^{\mathrm{rg}\,\mathcal{V}(s)/2} J^{1/2}(\mathcal{V}(s)) D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s))$. C'est un élément fermé de $\mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$ qui dépend du choix de ∇, et nous notons encore $n(\mathcal{V})_s$ sa classe dans $\mathcal{H}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$ qui ne dépend pas du choix de ∇.*

La famille $(n(\mathcal{V})_s)_{s\in G_{ell}}$ n'est pas une botte car les conditions de recollement ne sont pas vérifiées. Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Posons $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}_0 = S(\mathcal{V}(s))$. Raffinons comme en (73) la décomposition $\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s)$ au dessus de $M(s)(S)$ en

(90) $$\mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{Q}(s).$$

L'élément S induit une transformation infinitésimalement elliptique inversible de $\mathcal{Q}_0$.

Lemme 129 *Soit $s \in G_{ell}$. Il existe $a > 0$ tel que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait*

$$G(s)(S) = G(se^S), \quad M(se^S) = M(s)(S), \quad \mathcal{V}(s)(S) = \mathcal{V}(se^S)$$

et l'égalité

$$n(\mathcal{V})_{se^S} = Eul_S^+(\mathcal{Q}_0)T_{s,S}n(\mathcal{V})_s$$

dans $\mathcal{A}^\infty_{G(se^S)}(\mathfrak{g}(se^S), M(se^S))$.

Démonstration. Soit $a > 0$ tel que, pour tout $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$, on ait

$$G(s)(S) = G(se^S), \quad M(se^S) = M(s)(S), \quad \mathcal{V}(s)(S) = \mathcal{V}(se^S).$$

Un tel a existe par définition des actions régulières. Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Soit $F(X), X \in \mathfrak{g}$, la courbure équivariante de la connection ∇. Soit $Y \in \mathfrak{g}(s)(S)$. Notons $A(Y) \in \mathcal{A}(M(se^S), \mathrm{End}(\mathcal{V}))$ la matrice antisymétrique à coefficients formes sur $M(se^S)$ définie par $A(Y) = F(Y)|M(se^S)$.

Dans la décomposition

$$\mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{Q}$$

on voit que A se décompose en

$$A(Y) = A_0(Y) \oplus B(Y) \oplus C(Y)$$

où A_0 est la courbure équivariante de $\mathcal{V}(se^S)$, B la courbure équivariante de $\mathcal{Q}_0$ et C la courbure équivariante de $\mathcal{Q}(s)$. On note encore s (resp. S) l'endomorphisme vertical produit par s (resp S). Comme s agit trivialement sur $\mathcal{Q}_0$, on a

$$n_{se^S}(Y) = (2\pi)^{\mathrm{rg}\,\mathcal{V}(se^S)/2} J^{1/2}(A_0(Y)) \det{}^{1/2}(1 - e^S e^{B(Y)}) \det{}^{1/2}(1 - se^S e^{C(Y)}).$$

(On a normalisé les racines carrées de sorte que pour $Y = 0$ elles soient > 0).

Comme S s'annule sur $\mathcal{V}(s)(S)$, on a $A_0(S+Y) = A_0(Y)$ et

$$n_s(S+Y)|M(se^S) = (2\pi)^{\mathrm{rg}\,\mathcal{V}(s)/2} J^{1/2}(A_0(Y)) J^{1/2}(B(S+Y)) \det{}^{1/2}(1 - se^{C(S+Y)}).$$

(Ici, on a normalisé les racines carrées de sorte que pour $Y = -S$ elles soient > 0).

On a $B(S+Y) = S + B(Y)$, $C(S+Y) = S + C(Y)$. Comme la connection ∇ est G-invariante, $B(Y)$ et $C(Y)$ commutent à S.

On a

$$(-2\pi)^{\mathrm{rg}\, \mathcal{Q}_0/2} Eul(\mathcal{Q}_0)_S^+(Y) = \det{}^{1/2}(S + B(Y)).$$

(On a normalisé la racine carrée de sorte que pour $Y = 0$ elles soient > 0).

L'égalité des formes

$$n_{se^S}(Y) = Eul(\mathcal{Q}_0)^+(Y) n_s(S+Y) | M(se^S)$$

résultera des égalités

$$(91) \qquad \det{}^{1/2}(1 - e^S e^{B(Y)}) = \det{}^{1/2}(S + B(Y)) J^{1/2}(S + B(Y)),$$

$$(92) \qquad \det{}^{1/2}(1 - se^S e^{C(Y)}) = \det{}^{1/2}(1 - se^{S+C(Y)}).$$

Démontrons ces égalités. Remarquons que les choix des déterminations de racines carrées montrent que, pour $Y = 0$ et $S \in \mathfrak{g}_{ell,a}$, les termes de degré extérieur 0 de tous les termes sont des fonctions positives localement constantes sur $M(se^S)$. Il suffira donc de vérifier l'égalité des carrés. L'égalité (92) est immédiate puisque $C(Y)$ commute à S. Pour l'égalité (91), il s'agit de montrer que

$$\det{}_{\mathcal{Q}_0}(1 - e^{S+B(Y)}) = \det{}_{\mathcal{Q}_0}(e^{(S+B(Y))/2} - e^{-(S+B(Y))/2}).$$

Comme la dimension de $\mathcal{Q}_0$ est paire et comme les matrices S et $B(Y)$ sont de trace nulle (car infinitésimalement orthogonales), l'égalité précédente est vérifiée. ∎

Soit $s \in G_{ell}$. On note $u_s \in \mathcal{A}_{rap,G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$ la forme de Thom (formule 79) du fibré $\mathcal{V}(s) \to M(s)$ déterminée par la connection $\nabla | M(s)$. La famille $(u_s)_{s \in G_{ell}}$ n'est pas une botte de formes tordues, car les conditions de recollement ne sont pas vérifiées.

Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$. Posons comme ci-dessus $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}_0 = S(\mathcal{V}(s))$. Soit

$$Eul(\mathcal{Q}_0) \in \mathcal{A}_{G(s)(S)}(\mathfrak{g}(s)(S), M(s)(S))_{\mathcal{Q}_0}$$

la forme d'Euler du fibré $\mathcal{Q}_0$ au dessus de $M(s)(S)$ et $Eul_S(\mathcal{Q}_0)$ la forme d'Euler translatée

$$Eul_S(\mathcal{Q}_0)(Y) = Eul(\mathcal{Q}_0)(S + Y).$$

Soit $u_{s,S}$ la forme de Thom du fibré $\mathcal{V}_0 \to M(s)(S)$.

Comme $\mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s) | M(s)(S)$, on a

$$Eul_S(\mathcal{Q}_0) u_{s,S} \in \mathcal{A}_{rap,G(s)(S)}(\mathfrak{g}(s)(S), \mathcal{V}_0)_{\mathcal{V}(s)}.$$

Lemme 130 *Si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell}$, on a l'égalité*

$$T_{S,s} u_s = Eul_S(\mathcal{Q}_0) u_{s,S}$$

dans $\mathcal{A}_{rap,G(s)(S)}(\mathfrak{g}(s)(S), \mathcal{V}_0)_{\mathcal{V}(s)}$.

Démonstration. Comme $\mathcal{V}(s)|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0$, il est facile de voir qu'on a l'égalité des formes différentielles $G(s)(S)$-équivariantes $u_s(Y) = u_{s,S}(Y) \wedge u(\mathcal{Q}_0)(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}(s)(S)$. Comme S agit trivialement sur $\mathcal{V}_0$, on obtient

$$u_s(S+Y) = u_{s,S}(Y) \wedge u(\mathcal{Q}_0)(S+Y) \tag{93}$$

pour $Y \in \mathfrak{g}(s)(S)$. En prenant la restriction à $\mathcal{V}_0$ de cette égalité, on obtient l'égalité cherchée. ∎

Remarque 131 *De manière analogue à la remarque 102, on voit qu'il existe des familles de formes de Thom à support compact $u_s \in \mathcal{A}_{vcpt,G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$, $s \in G_{ell}$, vérifiant encore l'égalité du lemme 130. Par contre l'égalité (93) n'est en général pas possible.*

Nous choisissons une telle famille.

Compte tenu de la définition de la translation tordue $T^{\mathcal{V}}_{s,S}$ et de la formule 89, on peut écrire la formule du lemme 130 sous la forme

$$T^{\mathcal{V}}_{S,s} u_s = Eul^+_S(\mathcal{Q}_0) u_{s,S} \tag{94}$$

dans $\mathcal{A}_{vcpt,G(s)(S)}(\mathfrak{g}(s)(S), \mathcal{V}_0)_{\mathcal{V}(s)(S)}$.

Nous construisons maintenant la botte de Bott $b(\mathcal{V}) \in \mathcal{B}^{\mathcal{V}}_{vcpt,G}(\mathcal{V})$. Soit $s \in G_{ell}$. On pose

$$b_s = u_s n(\mathcal{V})_s \in \mathcal{A}_{vcpt,G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}.$$

Théorème 132 *Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré euclidien vectoriel G-équivariant muni d'une connection euclidienne G-invariante. Soit $s \in G_{ell}$ et soit*

$$\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

Soit $u_s \in \mathcal{A}_{vcpt,G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$ la forme de Thom équivariante du fibré $\mathcal{V}(s) \to M(s)$. Soit $b_s \in \mathcal{A}^{\infty}_{vcpt,G(s)}(\mathfrak{g}(s), \mathcal{V}(s))_{\mathcal{V}(s)}$ la forme définie par

$$b_s = (2\pi)^{\mathrm{rg}\,\mathcal{V}(s)/2} J^{1/2}(\mathcal{V}(s)) D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s)) u_s.$$

Alors la famille $b(\mathcal{V}) = (b_s)_{s \in G_{ell}}$ définit une botte $b(\mathcal{V}) \in \mathcal{B}^{\mathcal{V}}_{vcpt,G}(\mathcal{V})$ de formes équivariantes tordues fermées sur $\mathcal{V}$.

On note encore $b(\mathcal{V})$ la classe de cette botte dans $\mathcal{K}^{\mathcal{V}}_{vcpt,G}(\mathcal{V})$. Elle ne dépend pas des choix faits de connection et de structure euclidienne.

Démonstration. Soit $s \in G_{ell}$ et soit $a > 0$ tel que le lemme 129 soit valable. Soit $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$. Montrons que si $S \in \mathfrak{g}(s)_{ell,a}$ on a $T^{\mathcal{V}}_{s,S} b_s = b_{se^S}$. En employant successivement la formule (104) et le lemme 129, on obtient

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{V}}_{s,S} b_s &= T^{\mathcal{V}}_{s,S} u_s T_{s,S} n(\mathcal{V})_s \\ &= u_{se^S} Eul^+_S(\mathcal{Q}_0) T_{s,S} n(\mathcal{V})_s \\ &= u_{se^S} n(\mathcal{V})_{se^S} \\ &= b_{se^S}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. ∎

La restriction de la classe $b(\mathcal{V})$ à M est un élément de $\mathcal{B}_G^{\mathcal{V}}(M)$ (ou de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ si l'on considère la classe) encore appelé classe d'Euler du fibré $\mathcal{V}$, et notée $e(\mathcal{V})$.

Exemple 133 *Soit V une espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $G = \mathrm{O}(V)$. On considère V comme un fibré équivariant sur $M = \bullet$. La classe d'Euler $e(V)$ est un élément de $\mathcal{K}_G^V(\bullet) \simeq \kappa_G^\infty(V)$. On vérifie immédiatement que c'est la fonction*

$$e(V)(a,o) = \det{}_o^{1/2}(1-a^{-1}) = (-1)^{n(n+1)/2}\det{}_o^{1/2}(1-a)$$

sur $\mathrm{Pin}(V) \times or(V)$.

Il résulte de l'exemple 118 que $\mathcal{K}_G^V(\bullet)$ est engendré par $e(V)$ comme module sur $\mathcal{K}_G(\bullet)$.

6.2 Intégration.

Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante. Soit $\mathcal{V} \to M$ le fibré tangent vertical à la fibration $M \to B$. Nous définissons maintenant une application

$$p_* : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M) \to \mathcal{K}_G(B).$$

La définition de l'application p_* imite la définition d'Atiyah-Hirzebruch [2] de l'application p_* en K-théorie.

Soit $s \in G$. Considérons la classe $n(\mathcal{V})_s \in \mathcal{A}_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$ (définition 128). La forme $n(\mathcal{V})_s(0) \in \mathcal{A}(M(s))$ a un terme de degré 0 qui est une fonction > 0 sur $M(s)$. Comme G est compact, un voisinage elliptique de 0 est un voisinage aussi petit qu'on veut pour la topologie ordinaire. Donc $n(\mathcal{V})_s(X) \in \mathcal{A}(M(s))$ a un terme de degré 0 qui est une fonction > 0 sur $M(s)$ pour tout X dans $\mathfrak{g}_a$ dès que $a > 0$ est assez petit. La forme $n(\mathcal{V})_s(X)$ est donc inversible pour $X \in \mathfrak{g}_a$, et l'on obtient un élément $n(\mathcal{V})_s^{-1} \in \mathcal{H}_{[G(s)]}(M(s))$.

Soit $\alpha \in \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. C'est donc une famille de classes $\alpha_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}^{\mathcal{V}(s)}(M(s))$ indexés par les éléments s de G, vérifiant les conditions d'invariance et de recollement de la définition 108.

Considérons la fibration $p : M \to B$. On sait qu'elle se restreint en une fibration $p^s : M(s) \to B(s)$ pour laquelle le fibré tangent vertical est $\mathcal{V}(s)$. Considérons le germe de classes de cohomologie tordue

$$\alpha_s/n(\mathcal{V})_s \in \mathcal{H}_{[G(s)]}^{\mathcal{V}(s)}(M(s)).$$

Il s'intègre sur la fibre de la fibration $M(s) \to B(s)$.

Théorème 134 *Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante. Soit $\mathcal{V} \to M$ le fibré tangent* *vertical à la fibration $M \to B$. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ un élément de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. La famille $\beta = (\beta_s)_{s\in G_{ell}}$ où*

$$\beta_s = \int_{M(s)/B(s)} \alpha_s/n(\mathcal{V})_s$$

est un élément de $\mathcal{K}_G(B)$. Nous dirons que β est l'intégrale de α sur les fibres et nous noterons $\beta = p_*\alpha$.

Démonstration. Soit $s \in G$ et soit $S \in \mathfrak{g}(s)$. On reprend les notations du paragraphe 6.1 pour le fibré vertical $\mathcal{V} \to M$. En particulier, on écrit

$$\mathcal{V}|M(s)(S) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{Q}(s)$$

où $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(s)(S)$ et $\mathcal{Q}_0 = S(\mathcal{V}(s))$. Soit $I_s = \alpha_s n_s^{-1}$. Considérons la fibration $p^s : M(s) \to B(s)$. On a $\beta_s = p_*^s I_s$. Il est facile de voir que β_s vérifie la condition d'invariance voulue. Vérifions la condition de recollement. Soit $\tilde{\alpha_s}$ un représentant de α_s. En restreignant au besoin le voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ sur lequel $\tilde{\alpha_s}$ est défini pour que n_s soit inversible sur ce voisinage, ceci nous donne un représentant $\tilde{I}_s$ de I_s. Soit $\tilde{\beta}_s = p_*^s\tilde{I}_s$ l'intégrale de $\tilde{I}_s$ sur les fibres de p^s. Alors $\tilde{\beta}_s \in \mathcal{H}_{G(s)}^{\infty}(U, M(s))$. D'après la formule de localisation 106, appliquée à la fibration $G(s)$-équivariante p^s, on a sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(s)(S)$ l'égalité:

$$T_{s,S}\tilde{\beta}_s = p_*^{se^S}(Eul_S(\mathcal{Q}_0)^{-1}T_{s,S}\tilde{I}_s).$$

On a

$$Eul_S(\mathcal{Q}_0)^{-1}T_{s,S}\tilde{I}_s = Eul_S^+(\mathcal{Q}_0)^{-1}T_{s,S}^{\mathcal{V}}\tilde{I}_s = T_{s,S}^{\mathcal{V}}(\tilde{\alpha_s})/(Eul_S^+(\mathcal{Q}_0)T_{s,S}(n(\mathcal{V})_s))$$

La définition des bottes dit que $T_{s,S}^{\mathcal{V}}(\tilde{\alpha_s})$ est un représentant $\tilde{\alpha_{se^S}}$ de α_{se^S}. Il résulte du lemme 129 que l'on a

$$Eul_S(\mathcal{Q}_0)^{-1}T_{s,S}\tilde{I}_s = \tilde{\alpha_{se^S}}/n(\mathcal{V})_{se^S}$$

et donc $T_{s,S}\tilde{\beta}_s = \beta_{se^S}$, ce qui termine la démonstration du théorème. ∎

De même, si $p : M \to B$ est une fibration G-équivariante de fibré vertical $\mathcal{V}$ et si $\mathcal{E}$ est un fibré réel sur la base B, on peut définir une application

$$p_* : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}(M) \to \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(B).$$

Si M n'est pas compacte, on peut définir p_* dans l'espace $\mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}(M)$.

Soit $p : \mathcal{V} \to M$ un fibré réel G-équivariant sur une variété compacte M. Le fibré vertical pour la fibration p est isomorphe à $p^*\mathcal{V}$. Comme G est compact, ce fibré peut être muni d'une structure euclidienne et d'une connection euclidienne

G-invariante. Soit $b = b(\mathcal{V})$ la classe de Bott de $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{E}$ un fibré réel G-équivariant sur la base M. On peut donc définir une application

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M).$$

D'autre part, on peut définir l'application

$$m(\alpha) = b \wedge \alpha : \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M) \to \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}(\mathcal{V}).$$

La définition de $b = (b_s) \in \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ implique que $p_*b = 1$. Par ailleurs, il résulte de la proposition 104 que p_* est injective. On a donc l'isomorphisme de Thom

Théorème 135 *Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M. Soit $\mathcal{V}$ un fibré réel G-équivariant sur M. Les applications*

$$m : \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M) \to \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}(\mathcal{V})$$

et

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}\oplus p^*\mathcal{E}}(\mathcal{V}) \to \mathcal{K}_G^{\mathcal{E}}(M)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Considérons le cas particulier où $\mathcal{E} = \mathcal{V}$. D'après l'exemple 110, $\mathcal{K}_{cpt,G}^{\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{K}_{cpt,G}(\mathcal{V})$. Comme cas particulier du théorème précédent, nous avons

Théorème 136 *Soit G un groupe compact agissant sur une variété compacte M. Soit $\mathcal{V}$ un fibré réel G-équivariant sur M. Les applications*

$$m : \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M) \to \mathcal{K}_{cpt,G}(\mathcal{V})$$

et

$$p_* : \mathcal{K}_{cpt,G}(\mathcal{V}) \to \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Ce théorème fournit donc pour l'action d'un groupe compact sur une variété compacte une interprétation du groupe $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$.

Rappelons que l'espace des bottes tordues pour le fibré tangent à M se note $\mathcal{K}_G(M)_t$. Considérons l'application $p : M \to \bullet$ de M sur un point. Explicitons l'application $p_* : \mathcal{K}_G(M)_t \to \mathcal{K}_G(\bullet)$ dans ce cas particulièrement important.

Soit $s \in G$, soit $M(s)$ la variété des points fixes de l'action de s sur M. Soit $\dim M(s)$ la fonction localement constante dimension sur $M(s)$. Soit $TM(s)$ le fibré tangent à $M(s)$ et $\mathcal{N}$ le fibré normal à $M(s)$ dans M. Soit $J^{1/2}(M(s))$ la classe $J^{1/2}(TM(s))$ du fibré tangent à $M(s)$ et $D_s^{1/2}(\mathcal{N})$ la classe du fibré normal. En explicitant le théorème 134 on obtient le théorème suivant.

Théorème 137 *Soit G un groupe de Lie compact agissant sur une variété compacte M. Soit $\alpha = (\alpha_s)_{s\in G_{ell}}$ un élément de $\mathcal{K}_G(M)_t$. Il existe une unique fonction C^∞ G-invariante Θ sur G telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}(s)$ suffisamment petit on ait*

$$\Theta(se^X) = \int_{M(s)} \frac{(2\pi)^{-\dim M(s)/2}\alpha_s(X)}{J^{1/2}(M(s))(X)D_s^{1/2}(\mathcal{N})(X)}.$$

Dans [31] nous montrons que la théorie de l'intégration des formes différentielles M-tordues fournit un cadre naturel pour la théorie des caractères d'un groupe de Lie G non nécessairement compact. Si M est une orbite fermée de l'action coadjointe de G, on peut en effet définir $\Theta_{f,\tau} = p_*(\alpha_{f,\tau})$ pour certains éléments canoniques $\alpha_{f,\tau}$ de l'espace $\mathcal{K}_G(M)_t$ et on obtient ainsi des fonctions généralisées $\Theta_{f,\tau}$ invariantes canoniquement associées aux orbites coadjointes fermées.

6.3 Fibrés de Clifford.

Nous avons vu que la cohomologie équivariante tordue d'un fibré euclidien est intimement reliée au groupe spinoriel. Dans cette section, nous donnons un peu plus d'explications sur cette relation. Nous traiterons dans un article ultérieur la relation entre la cohomologie tordue d'un espace symplectique et le groupe métaplectique. Cette relation est importante dans la théorie des caractères des groupes de Lie.

Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré euclidien G-équivariant. Il lui est associé un fibré $C(\mathcal{V}) \to M$ d' algèbres de Clifford. On dira que $\mathcal{V}$ est *un fibré spinoriel G-équivariant* si l'on s'est donné un fibré principal $P \to M$ de groupe $\mathrm{Spin}(V)$ muni d'une action à gauche de G (commutant à l'action à droite de $\mathrm{Spin}(V)$) tel que $\mathcal{V}$ soit le fibré associé

$$\mathcal{V} = P \times_{\mathrm{Spin}(V)} V$$

où $\mathrm{Spin}(V)$ agit dans V par la représentation $\tau : \mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$. On dit qu'il est orienté si l'on s'est donné une orientation o_V de V. Elle détermine une orientation G-invariante $o_{\mathcal{V}}$ sur $\mathcal{V}$. Un fibré spinoriel G-équivariant est en particulier un fibré métalinéaire orienté G-équivariant. Nous avons construit (formule 83) un élément particulier $f^{\mathcal{V}} \in \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ de carré un dans $\mathcal{K}_G(M) \oplus \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. Comme cas particulier de la proposition 111 on obtient:

Proposition 138 *Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré spinoriel orienté G-équivariant. Alors $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ est un $\mathcal{K}_G(M)$-module libre de base $f^{\mathcal{V}}$.*

Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré euclidien G-équivariant muni d'une connection euclidienne G-invariante ∇. *Nous supposons le fibré $\mathcal{V} \to M$ muni d'une orientation G-invariante*, mais nous ne supposons plus l'existence d'une structure spinorielle sur $\mathcal{V}$. Nous allons montrer que le caractère de Chern relatif d'un module de Clifford G-équivariant gradué (essentiellement défini dans [6]) fournit naturellement un élément de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$.

Soit $\mathcal{L} \to M$ un fibré complexe G-équivariant sur M. Nous supposons que $\mathcal{L}$ est munie d'une action de l'algèbre de Clifford $C(\mathcal{V})$ construite sur $\mathcal{V}$. L'action d'une section v du fibré $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{L}$ sera notée $c(v)$. Nous supposons que les actions de G et de $C(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{L}$ vérifient la condition suivante de compatibilité:

$$gc(v)g^{-1} = c(g \cdot v).$$

Supposons de plus que $\mathcal{V}$ soit muni d'une connection G-invariante ∇ et que $\mathcal{L}$ soit muni d'une connection de Clifford G-invariante $\nabla^{\mathcal{L}}$ compatible: si $v \in \Gamma(M, \mathcal{V})$,

$$[\nabla^{\mathcal{L}}, c(v)] = c(\nabla v).$$

(Si G est compact, un tel choix de connections est toujours possible). On dira alors que $\mathcal{L}$ est un $(G, C(\mathcal{V}))$-module connecté.

Soit F la courbure équivariante de $\nabla^{\mathcal{L}}$. Soit $s \in G$. Soit comme d'habitude

$$\mathcal{V}|M(s) = \mathcal{V}(s) \oplus \mathcal{Q}(s).$$

La connection ∇ induit une connection sur les fibrés vectoriels $\mathcal{V}(s)$ et $\mathcal{Q}(s)$ au-dessus de $M(s)$. Soit R^0 (resp R^1) les courbures $G(s)-$équivariantes de $\mathcal{V}(s)$ (resp. $\mathcal{Q}(s)$).

On peut donc définir comme en 126 la forme $D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s)) \in \mathcal{A}_{G(s)}^{\infty}(\mathfrak{g}(s), M(s))$. Pour $X \in \mathfrak{g}(s)$

$$D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s))(X) = \det{}^{1/2}(1 - s \exp R^1(X)).$$

Au dessus de $M(s)$, l'action de s produit un automorphisme $s^{\mathcal{L}}$ du fibré $\mathcal{L}$ et $s^{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$. On choisit un représentant local $\hat{s}$ de $s^{\mathcal{V}}$ dans l'algèbre de Clifford de $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{L}^s$ les points fixes de l'action de Clifford de $\hat{s}$ dans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{q,s}$ le complémentaire $\hat{s}$-invariant. Le fibré $\mathcal{L}^{q,s}$ est muni d'une structure de $(G(s), C(\mathcal{Q}(s))$-module. Notez que la dimension de $\mathcal{Q}(s)$ est paire à cause des hypothèses d'orientabilité.

Soit o une orientation locale de $\mathcal{V}(s)$. On note $o_{\mathcal{V}}/o$ l'orientation de $\mathcal{Q}(s)$ qui s'en déduit et $\gamma_{o_{\mathcal{V}}/o}$ l'élément de l'algèbre de Clifford $C(\mathcal{Q}(s))$ défini en 49. Donc $\gamma_{o_{\mathcal{V}}/o}$ est une section du fibré en algèbres de Clifford sur le fibré $\mathcal{Q}(s)$, définie dans l'ouvert de $M(s)$ où o est définie.

Considérons pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ la forme différentielle tordue sur le revêtement $(M(s))_{\mathcal{V}(s)}$ de $M(s)$ définie pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ par:

$$V_s(X)_o = \operatorname{Tr}_{\mathcal{L}^{q,s}}(\gamma_{o_{\mathcal{V}}/o} s^{\mathcal{L}} e^{F(X)|M(s)}).$$

Il est facile de voir que $V_s \in \mathcal{A}_{G(s)}^{\infty}(\mathfrak{g}(s), M(s))_{\mathcal{V}(s)}$ est une forme équivariante tordue fermée.

On définit $\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})_s$ par

$$\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})_s = V_s / D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s)).$$

En explicitant, on a pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ petit

$$\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})_s(X)_o = \mathrm{Tr}_{\mathcal{L}^{q,s}}(\gamma_{o_{\mathcal{V}}/o} s^{\mathcal{L}} e^{F(X)|M(s)}) / \det{}^{1/2}(1 - s \exp R^1(X)).$$

On note $\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})$ la famille de formes équivariantes fermées $(\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})_s)_{s \in G_{ell}}$. L'élément $\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})$ dépend du choix des connections compatibles $\nabla^{\mathcal{L}}$ et ∇.

Cette définition curieuse appelle une explication donnée dans le corollaire qui suit. Ce corollaire montre de plus que $\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})_s$ défini pour X petit est en fait une fonction analytique de X.

Supposons, pour un moment, que le fibré $\mathcal{V}$ soit spinoriel et notons $\mathcal{E}$ le fibré des spineurs associé. Puisque $\mathcal{E}$ est un fibré associé à une représentation de $\mathrm{Spin}(V)$, il est muni d'une structure de G-fibré équivariant, et on voit facilement que c'est un $(G, C(\mathcal{V}))$-fibré.

Lemme 139 *On a* $\mathrm{ch}_t(\mathcal{E}) = f^{\mathcal{V}}$, *où* $f^{\mathcal{V}}$ *est l'élément de* $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ *défini par la formule (83).*

Démonstration. Ceci résulte de la définition de la forme $D_s^{1/2}(\mathcal{Q}(s))$, de la formule 64 et de la définition de $f^{\mathcal{V}}$. ∎

Soit $\mathcal{W}$ un fibré complexe G-équivariant connecté. On peut donc associer à $\mathcal{W}$ (muni de sa connection $\nabla^{\mathcal{W}}$) son caractère de Chern (proposition 74)

$$\mathrm{ch}(\mathcal{W}) = (\mathrm{ch}_s(\mathcal{W}, \nabla^{\mathcal{W}}))_{s \in G_{ell}} \in \mathcal{B}_G(M).$$

Considérons le $(G, C(\mathcal{V}))$-module connecté $\mathcal{L} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{W}$.

On déduit du lemme ci-dessus le corollaire suivant.

Corollaire 140 *On a* $\mathrm{ch}_t(\mathcal{L}) = \mathrm{ch}(\mathcal{W}) f^{\mathcal{V}}$.

Sans supposer l'existence de structure spinorielle, on montre par une démonstration similaire à celle de la proposition 132 la proposition suivante.

Proposition 141 *Soit* $\mathcal{V} \to M$ *un fibré euclidien orienté* G*-équivariant muni d'une connection euclidienne* G*-invariante. Soit* $\mathcal{L}$ *un* $(G, C(\mathcal{V}))$*-module gradué connecté. Alors la famille* $\mathrm{ch}_t(\mathcal{L})$ *est une botte de formes équivariantes fermées tordues. L'élément correspondant* $\mathrm{ch}_t(\mathcal{L}) \in \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$ *est indépendant des choix faits de connections compatibles.*

Lorsque G et M sont compacts, et $\mathcal{V}$ un fibré euclidien orienté de rang pair G-équivariant, notons $K_G^{\mathcal{V}}(M)$ le groupe de K-théorie défini par Karoubi (voir [25]). Les éléments en sont des classes de $(G, C(\mathcal{V}))$-modules. Le caractère de Chern relatif ch_t fournit un homomorphisme

$$\mathrm{ch}_t : C^\infty(G)^G \otimes_{R(G)} K_G^{\mathcal{V}}(M) \to \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M),$$

ce qui donne une justification supplémentaire de notre définition de $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(M)$. Il reste à traiter les autres cas de fibrés $\mathcal{V}$...

Bibliographie

[1] M. F. ATIYAH ET R. BOTT. The moment map and equivariant cohomology. *Topology*, **23** (1984), 1–28.

[2] M. F. ATIYAH ET F. HIRZEBRUCH. Vector bundles and homogeneous spaces. *Amer. Math. Symp.*, **III** (1961), 7–38.

[3] M. F. ATIYAH ET G. B. SEGAL. The index of elliptic operators II. *Ann. Math.*, **87** (1968), 531–545.

[4] M. F. ATIYAH ET I. M. SINGER. The index of elliptic operators. I. *Ann. Math.*, **87** (1968), 484–530.

[5] M. F. ATIYAH ET I. M. SINGER. The index of elliptic operators. III. *Ann. Math.*, **87** (1968), 546–604.

[6] N. BERLINE, E. GETZLER ET M. VERGNE. Heat kernels and Dirac operators. *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*, 1991.

[7] N. BERLINE ET M. VERGNE. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. *Duke Math. Journal*, **1983** (50), 539–549.

[8] N. BERLINE ET M. VERGNE. The equivariant index and Kirillov character formula. *Amer. J. of Math*, **107** (1985), 1159–1190.

[9] J.-M. BISMUT. Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families. *Comm. Math. Phys.*, **103** (1986), 127-166.

[10] J. BLOCK ET E. GETZLER. Equivariant cyclic homology and equivariant differential forms. A paraître aux Annales de l'Ec. Norm. Sup.

[11] R. BOTT ET C. TAUBES. On the rigidity theorems of Witten. *J. of the Amer. Math. Soc.*, **2** (1989), 137–186.

[12] A. BOUAZIZ. Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes. *J. of Functional Analysis*, **70** (1987), 1-79.

[13] A. BOUAZIZ. Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives. *A paraître à Inventiones Math.*

[14] G. E. BREDON. Introduction to compact transformation groups. *Academic Press*, 1972.

[15] H. CARTAN. Notions d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles*, (1950), 15-27.

[16] H. CARTAN. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles,* (1950), 57-71.

[17] M. DUFLO. Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. In "Harmonic analysis and group representations" C.I.M.E 1980. *Liguori, Napoli,* 1982.

[18] M. DUFLO, G. HECKMAN ET M. VERGNE. Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner. *Mem. Soc. Math. Fr.*, **15** (1984), 65-128.

[19] M. DUFLO ET M. VERGNE. Orbites coadjointes et cohomologie équivariante. In *The orbit method in representation theory . Birkhäuser, Progress in math.*, **82** (1990), 11–60.

[20] W. GREUB, S. HALPERIN ET R. VANSTONE. Connections, curvature, and cohomology, vol. III. *Academic Press*, 1976.

[21] HARISH-CHANDRA. Invariant Eigendistributions on a Semisimple Lie Group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **119** (1965), 457–508.

[22] HARISH-CHANDRA. Discrete series for semi-simple Lie groups I. *Acta Math.*, **113** (1965), 241-318.

[23] HARISH-CHANDRA. Discrete series for semi-simple Lie groups II. *Acta Math.*, **116** (1966), 1-111.

[24] J. KALKMAN. BRST model for equivariant cohomology and representatives for the equivariant Thom class. *Preprint, Utrecht 1992.*

[25] M. KAROUBI. Algèbres de Clifford et K-théorie. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* , **1** (1968), 161–270.

[26] A. A. KIRILLOV. Elements of the theory of representations. *Grundlehren der mathematische Wissenschaften 220, Springer Verlag*, 1976.

[27] V. MATHAI ET D. QUILLEN . Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. *Topology*, **25** (1986), 85–110.

[28] M. RAIS. Distributions homogènes sur des espaces de matrices. *Bulletin de la Soc. Math. Fr., Mémoire* , **30** (1972), 1-109.

[29] F. TREVES. Topological vector spaces, distributions and kernels. *Academic Press*, 1967.

[30] E. VASSEROT. Classes de Segre et multiplicité équivariante. *Bulletin de la Soc. Math. Fr.* , **119** (1991), 463-477.

[31] M. VERGNE. Geometric quantization and equivariant cohomology. *A paraître dans les proceedings du Congrès Européen.*

Astérisque

SHRAWAN KUMAR
MICHÈLE VERGNE

Equivariant cohomology with generalized coefficients

Astérisque, tome 215 (1993), p. 109-204
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__109_0>

Equivariant cohomology with generalized coefficients

Shrawan Kumar and Michèle Vergne

Introduction

In the text of this article, definitions, propositions, theorems, lemmas, examples, corollaries are numerated in the same sequential order. Formulas follow an independent sequential order.

Let G be a real Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and let M be a smooth manifold on which G acts. Let $\mathcal{A}(M) = \sum_i \mathcal{A}^i(M)$ be the space of smooth differential forms on M and let $\mathcal{A}_{cpt}(M)$ be the subspace of forms with compact support. Let us recall (Cartan ;[10]) that the G-equivariant de Rham complex of M is by definition the differential $\mathbb{Z}_+$-graded algebra

$$\mathcal{A}_G(M) := (S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M))^G$$

endowed with the tensor product graded algebra structure (where elements of $\mathfrak{g}'$ are assigned degree 2) together with the equivariant de Rham differential $d_{\mathfrak{g}}$ of degree 1 (see section 2, Formula 5). Its cohomology denoted $H^*_G(M)$ is called the G- equivariant de Rham cohomology of M. Alternatively, an element $\alpha \in \mathcal{A}_G(M)$ can be thought of as a differential form $\alpha(X)$ on M depending polynomially on $X \in \mathfrak{g}$, such that α is equivariant:

$$\alpha(g \cdot X) = g \cdot \alpha(X),$$

for all $g \in G$.

The complex $\mathcal{A}_G(M)$ admits a subcomplex

$$\mathcal{A}_{cpt,G}(M) := (S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}_{cpt}(M))^G,$$

and its cohomology is called the G-equivariant de Rham cohomology with compact support $H^*_{cpt,G}(M)$.

Sometimes, it is natural to consider the space $\mathcal{A}^\infty_G(M)$ of equivariant forms $\alpha(X)$ on M depending smoothly on $X \in \mathfrak{g}$. The differential $d_{\mathfrak{g}}$ extends to this space and the cohomology of the complex $(\mathcal{A}^\infty_G(M), d_{\mathfrak{g}})$ is denoted by $H^\infty_G(M)$.

This cohomology $H_G^\infty(M)$ is studied in the preceding article of this volume (notation differs slightly from the ones used in the preceding article. In particular, the dual vector space of $\mathfrak{g}$ is denoted here by $\mathfrak{g}'$ instead of $\mathfrak{g}^*$, the space denoted here by $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ (resp. $H_G^\infty(M)$) was denoted by $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ (resp.by $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$)). In some situations, it is also important to consider the space $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ of equivariant forms depending in a generalized way on the variable $X \in \mathfrak{g}$ (cf. section 2, Definition 3 for a precise definition). The differential $d_\mathfrak{g}$ still has a meaning on $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ and the cohomology of the complex $(\mathcal{A}_G^{-\infty}(M), d_\mathfrak{g})$ is denoted by $H_G^{-\infty}(M)$. (The space $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ and its cohomology $H_G^{-\infty}(M)$ were introduced in [12].) One similarly defines $H_{cpt,G}^{-\infty}(M)$. When M is a point, $H_G^{-\infty}(point)$ is equal to the space $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ of G-invariant generalized functions on $\mathfrak{g}$. There is a natural map $H_G^\infty(M) \to H_G^{-\infty}(M)$.

If M is compact and G-oriented, integration over M gives us a map from $H_G^{-\infty}(M)$ to $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$. More generally if $p: M \to B$ is a G-equivariant fibration, with G-oriented fibers, then there is defined an integration along the fiber map

$$p_*: H_{cpt,G}^{-\infty}(M) \to H_{cpt,G}^{-\infty}(B)$$

(cf. Formula 8).

If M is non compact, and if $\alpha(X)$ is an equivariant form on M depending smoothly on $X \in \mathfrak{g}$, the integral of $\alpha(X)$ over M may sometimes exist in a generalized sense: after integrating $\alpha(X)$ against a test function Φ on the Lie algebra $\mathfrak{g}$, the form $(\alpha, \Phi) := \int_\mathfrak{g} \alpha(X)\Phi(X)dX$ may become integrable over M and we can define $\int_M \alpha \in C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ by

$$(\int_M \alpha, \Phi) = \int_M (\alpha, \Phi).$$

Many important examples of generalized functions on $\mathfrak{g}$ arise this way. For instance, characters of representations of G attached to a generic coadjoint orbit M are given by the integral of an equivariant form over M (see [21], [12]). If G is compact, the formula of [20] for the index of a G-transversally elliptic operator D on a compact G-manifold B is given by the integration (in the generalized sense) over $M = T^*B$ of a G-equivariant form $\alpha(\sigma)(X)$ on M (depending smoothly on $X \in \mathfrak{g}$) attached to the symbol σ of D.

It will thus be useful to understand the space $H_G^{-\infty}(M)$. The aim of this article is to start a systematic study of the cohomology space $H_G^{-\infty}(M)$.

Now we describe some of the results we prove in this article.

We first prove (in section 2) that for a G-equivariant real vector bundle $p: \mathcal{V} \to B$, the canonical pull-back map $p^*: H_G^{-\infty}(B) \to H_G^{-\infty}(\mathcal{V})$ is an isomorphism (cf. Proposition 8). In particular, for a real representation V of G, $H_G^{-\infty}(V) \cong C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$. Similarly, we prove the Thom isomorphism; asserting that if G is compact and the fibers of p are G-oriented, then the integration along the fiber map

$$p_* : H^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V}) \to H^{-\infty}_{cpt,G}(B)$$

is an isomorphism (cf. Proposition 11).

Let $K \subset G$ be a closed subgroup . Let $\chi = \chi_{G/K} : K \to \{\pm 1\}$ be the character of K defined by $\chi(k) = sign\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} k$, for all $k \in K$. Let M be a K-manifold and let $H^{-\infty}_{K,\chi}(M)$ be the cohomology of the complex

$$(\mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi}(M), d_{\mathfrak{k}}) := (C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))^{\chi}, d_{\mathfrak{k}})$$

(cf. Definition 49). Fix an orientation o on $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Consider the space $G \times_K M$, fibered over G/K with fiber M. In section 5, we define a cochain map

$$Ind_{G/K,o} : \mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi}(M) \to \mathcal{A}^{-\infty}_{G}(G \times_K M)$$

(cf. Proposition 50) and prove that if K is compact, $Ind_{G/K,o}$ induces an isomorphism in cohomology (cf. Theorem 52). This is one of the central results of this article. The proof of this result relies on a study of the homology of the perturbed Koszul complexes defined in sections 3 and 4. This technique is already used in [13] for the study of G-equivariant cohomology with smooth coefficients.

Taking $M = point$, we get the isomorphism

$$C^{-\infty}(\mathfrak{k})^{\chi} \cong H^{-\infty}_{G}(G/K)$$

where $C^{-\infty}(\mathfrak{k})^{\chi} := \{f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k}); k \cdot f = \chi(k) f, \text{ for all } k \in K\}$.

The explicit description of the isomorphism (cf. Proposition 43) indicates the analogy between $\int_{G/K} Ind_{G/K,o} f$ and characters of induced representations (cf. Proposition 44).

Recall [13] that $H^{\infty}_{G}(G/K)$ is canonically isomorphic to $C^{\infty}(\mathfrak{k})^{K}$. We determine the canonical map

$$C^{\infty}(\mathfrak{k})^{K} \cong H^{\infty}_{G}(G/K) \to C^{-\infty}(\mathfrak{k})^{\chi} \cong H^{-\infty}_{G}(G/K),$$

coming from the natural map $H^{\infty}_{G}(G/K) \to H^{-\infty}_{G}(G/K)$, in Proposition 53.

From now on in the introduction, the notation K will be reserved to denote a compact connected Lie group with maximal torus T and Weyl group W. The Lie algebras of K, T are denoted by $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$ respectively.

In section 6, we prove a Künneth theorem: Let D be a compact K-manifold such that $H_K(D)$ is free over $H_K(point)$ (e.g. $D = K/U$, for a closed subgroup $U \subset K$ of the same rank, cf. Lemma 65). Then, for any K-manifold M, the canonical Künneth map

$$\hat{m}^{-\infty} : H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H^{-\infty}_{K}(M) \to H^{-\infty}_{K}(D \times M)$$

is an isomorphism (cf. Theorem 61). In fact Theorem 61 is true without the assumption on K to be connected, but then we need to add the assumption that the evaluation map $H_K(D) \to H(D)$ is surjective. In particular for any such D, taking M to be a point, we get

$$H_K^{-\infty}(D) \cong C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} H_K(D)$$

(cf. Corollary 64).

Using Künneth theorem and the Induction isomorphism, we obtain in Proposition 66 an extension of Chevalley's theorem. Let $C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon$ be the space of all the generalized W-anti-invariant functions on $\mathfrak{t}$. Then the multiplication of generalized functions on $\mathfrak{t}$ by polynomial functions induces an isomorphism

$$C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}') \cong C^{-\infty}(\mathfrak{t}).$$

By the same technique, we obtain the Reduction Theorem asserting that for any K-manifold M, we have a canonical isomorphism

$$H_T^{-\infty}(M)^W \cong H_K^{-\infty}(M),$$

where $H_T^{-\infty}(M)^W$ refers to the W-invariants under the canonical action of W on $H_T^{-\infty}(M)$ (cf. Theorem 74). The proof of this reduction theorem is inspired by the proof of Theorem 4.2 in Atiyah [1].

Again combining the Künneth theorem and the Induction isomorphism, we obtain an isomorphism of $H_L(point)$-modules

$$H_L(point) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \cong H_{L,\chi_{K/L}}^{-\infty}(M),$$

for any closed subgroup $L \subset K$ of the same rank and any K-manifold M (cf. Theorem 70). In particular, taking $M = K/U$ (for any closed subgroup U of K), we obtain

$$H_{L,\chi_{K/L}}^{-\infty}(K/U) \cong S(\mathfrak{l}')^L \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} (C^{-\infty}(\mathfrak{u})^{\chi_{K/U}}).$$

If M is a T-manifold, we give a homology spectral sequence (in section 10) with

$$E_p^2 = Tor_p^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M))$$

converging to the cohomology $H_T^{-\infty}(M)$, where $S(\mathfrak{t}')$ acts by multiplication on $C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ (cf. Theorem 102). We show that this spectral sequence degenerates at the E^2-term for any homogeneous space $M = K/U$ (U any closed subgroup of K) (cf. Proposition 106).

In section 9, we study free actions. Let P be a principal G-bundle (for any Lie group G) and let $q : P \to P/G$ be the quotient map. Assume that the fibers of q admit a G-orientation o. Then we prove (cf. Theorem 89) that $H_G^{-\infty}(P)$ is a free module over $H_G(P) \cong H(P/G)$ with a generator γ_o. We determine this generator explicitly (cf. Proposition 80). Consider, for example, the free action of T on $P = K$ by right translations. Then the space $H_T^{-\infty}(P)$ is a vector space of dimension $|W|$ over $\mathbb{R}$. We use the description of $H_T^{-\infty}(K)$ to conclude that the canonical map $H_T^{\infty}(K) \to H_T^{-\infty}(K)$ is identically 0 (cf. Corollary 96).

More generally, we consider the case of a manifold P with a right action of a Lie group G and where we assume that a normal closed subgroup N of G acts principally on P (cf Definition 75). In addition, assume that the principal N-bundle $q_N : P \to P/N$ admits a G-invariant connection and that the fibers of q_N admit a G-orientation o. We then construct a map

$$m_o : H_{G/N}^{-\infty}(P/N) \to H_G^{-\infty}(P),$$

and show that m_o is an isomorphism if G is compact (cf. Theorem 91).

In section 11, we prove a Localization theorem for any compact oriented T-manifold M. We first need to take a T-equivariant embedding of M in a representation space V of T. This gives rise to a certain non-zero polynomial $P \in S(\mathfrak{t}')$. Now we determine

$$P(X) \int_M \alpha(X) \in C^{-\infty}(\mathfrak{t}),$$

for any $\alpha \in H_T^{-\infty}(M)$, in terms of the restriction of α to M^T and of the equivariant Euler class of the normal bundle of the submanifold $M^T \subset M$ (cf. Theorem 107). One striking difference from the smooth case is that it is possible to have $\int_M \alpha(X) \neq 0$, for $\alpha \in H_T^{-\infty}(M)$, even though M^T may be empty. In fact, we prove that $\int_K : H_T^{-\infty}(K) \to C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ is injective, where T acts on K by right multiplication (cf. Proposition 95, section 9).

Finally in the appendix, we prove that if M is a paracompact manifold, then the de Rham differential d admits a continuous splitting on the space of exact differential forms on M. This result seems to be new and interesting on its own. In a similar way, we prove that the equivariant de Rham differential $d_{\mathfrak{g}}$ for the action of a compact Lie group G on a paracompact manifold M admits a continuous splitting. We were motivated to prove this result, as this enables us to obtain the spectral sequence of section 10 for any paracompact T-manifold.

Acknowledgements

Collaboration between the two authors on the topics of this article started when the second author visited Tata Institute of Fundamental Research (T.I.F.R) in January 1991 . The second author would thus like to acknowledge the financial support from the Indian government and the hospitality of T.I.F.R.. Numerous discussions with M.Duflo have influenced strongly the second author. The first author thanks M.E. Taylor for helpful conversations, and also acknowledges the hospitality of Ecole Normale Superieure during his stay in Paris in June 1991 and June 1992. The first author was partially supported by N.S.F. grant no. DMS-9203660.

1 Notation

By a manifold M, we shall always mean a paracompact C^∞ real manifold without boundary (unless otherwise stated). We denote by $C^\infty(M)$ the space of C^∞- (real-valued) functions on M. We denote by $C^{-\infty}(M)$ the space of generalized (real-valued) functions on M. By definition, $C^{-\infty}(M)$ is the continuous dual of the space of smooth compactly supported densities on M under the C^∞-topology. The space $C^\infty(M)$ is canonically a subspace of $C^{-\infty}(M)$ and $C^{-\infty}(M)$ is a module over $C^\infty(M)$.

We denote the space of smooth differential forms on M (with real coefficients) by $\mathcal{A}^*(M)$. We denote the subspace of compactly supported differential forms by $\mathcal{A}^*_{cpt}(M)$. The exterior derivative is denoted by d_M or simply by d. If ξ is a vector field on M, we denote by $\iota(\xi) : \mathcal{A}^*(M) \to \mathcal{A}^{*-1}(M)$ the contraction by the vector field ξ. We denote by $\mathcal{L}(\xi) : \mathcal{A}^*(M) \to \mathcal{A}^*(M)$ the Lie derivative action of ξ. The operators $d, \iota(\xi), \mathcal{L}(\xi)$ on $\mathcal{A}(M)$ satisfy the Cartan relation :

$$d\iota(\xi) + \iota(\xi)d = \mathcal{L}(\xi). \tag{1}$$

If M is oriented, for $\alpha \in \mathcal{A}_{cpt}(M) = \oplus_{i=0}^{\dim M} \mathcal{A}^i_{cpt}(M)$, we note $\int_M \alpha$ the integral of the component of α in $\mathcal{A}^{\dim M}_{cpt}(M)$.

Let G be a real Lie group. By a G-manifold, we mean a manifold on which G acts smoothly. Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G. If $X \in \mathfrak{g}$, we denote by X_M (or simply X, if no confusion is likely) the vector field on M such that

$$(X_M \cdot \varphi)(x) = \frac{d}{d\varepsilon}\varphi((\exp -\varepsilon X)x)|_{\varepsilon=0}$$

for $\varphi \in C^\infty(M)$, $x \in M$.

Unless otherwise stated, vector spaces are over $\mathbb{R}$, and the dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ of a vector space V is denoted by V'. If $E^i, 1 \leq i \leq n$ is a basis of a n-dimensional vector space V, E_i denotes the dual basis of V'.

Tensor products without subscripts will mean over $\mathbb{R}$. Unless otherwise indicated, cohomology of a manifold is taken to be the de Rham cohomology (with real coefficients).

In this article, $\mathbb{Z}/2$-graded objects will carry a superscript $\bullet$, while $\mathbb{Z}$-graded objects will carry a superscript $*$. A vector space with a $\mathbb{Z}/2$-grading will often be called a superspace. In defining actions on the tensor product $V \otimes W$ of two $\mathbb{Z}/2$-graded vector spaces V, W, we will respect usual rules of signs. For example, an odd endomorphism A of the $\mathbb{Z}/2$-graded vector space W is extended to an endomorphism still denoted by A of $V \otimes W$ by defining

$$A(v \otimes w) = v \otimes Aw \qquad \text{if } v \in V^{even}, w \in W. \tag{2}$$

$$A(v \otimes w) = -v \otimes Aw \qquad \text{if } v \in V^{odd}, w \in W. \tag{3}$$

Any $\mathbb{Z}$-graded object C^* can of course be thought of as a $\mathbb{Z}/2$-graded object $C^\bullet$ by defining

$$C^{even} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C^{2n}, \qquad C^{odd} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C^{2n+1}.$$

Lie algebra of any real Lie group will be denoted by the same lower case German letter.

If a group G acts on a set E, we denote by E^G the subset of invariants.

2 G-equivariant cohomology with generalized coefficients - Basic definitions

Let G be a Lie group and let M be a G-manifold. Let us recall the definition of the G-equivariant de Rham cohomology $H^*_G(M)$ of M:

Let $S(\mathfrak{g}')$ be the symmetric algebra of $\mathfrak{g}'$. Consider the $\mathbb{Z}_+$-graded space $S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M)$, where the degree of an element $P \otimes \alpha, P \in S^p(\mathfrak{g}'), \alpha \in \mathcal{A}^q(M)$ is defined by

$$\deg(P \otimes \alpha) = 2p + q. \tag{4}$$

We refer to this degree as being the total degree.

Let E^i be a basis of $\mathfrak{g}$ and let $E_i \in \mathfrak{g}'$ be the dual basis. Define the operator $d_\mathfrak{g}$ of degree 1 on $S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M)$ by:

$$d_\mathfrak{g}(P \otimes \alpha) = P \otimes d_M\alpha - \sum_i E_i P \otimes \iota(E^i_M)\alpha$$

for $P \in S(\mathfrak{g}'), \alpha \in \mathcal{A}(M)$. This expression is independent of the choice of the basis E^i, as the element $\sum_i E_i \otimes E^i \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}$ is the canonical element $I \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, where I is the identity element of $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

We often will identify $S(\mathfrak{g}')$ with the space of polynomial functions on $\mathfrak{g}$. Writing $X \in \mathfrak{g}$ as $X = \sum x_i E^i$, we identify E_i with the linear coordinate function x_i. An element α of the space $S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M)$ can be viewed as a polynomial map $X \mapsto \alpha(X)$ from $\mathfrak{g}$ to $\mathcal{A}(M)$ and then the operator $d_{\mathfrak{g}}$ is given by the formula:

$$(5) \qquad (d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_M(\alpha(X)) - \iota(X_M)(\alpha(X))$$

or by

$$(6) \qquad (d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_M(\alpha(X)) - \sum_i x_i \iota(E^i_M)(\alpha(X)).$$

Consider the action of G on $S(\mathfrak{g}')$ induced from the adjoint representation of G on $\mathfrak{g}$ and the action of G on $\mathcal{A}(M)$ induced from the action of G on M. Let

$$\mathcal{A}_G(M) := (S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M))^G$$

be the space of G-invariants in $S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M)$. In other words, an element α of $\mathcal{A}_G(M)$ is an equivariant polynomial map (i.e.$\alpha(g \cdot X) = g \cdot (\alpha(X))$) from $\mathfrak{g}$ to $\mathcal{A}(M)$. The operator $d_{\mathfrak{g}}$ commutes with the tensor product action of G on $S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M)$, thus $d_{\mathfrak{g}}$ preserves $\mathcal{A}_G(M)$. The Cartan relation (1)

$$\mathcal{L}(X_M) = d\iota(X_M) + \iota(X_M)d$$

implies $(d^2_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = -\mathcal{L}(X_M)(\alpha(X))$. Thus $(d^2_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = 0$ for $\alpha \in \mathcal{A}_G(M)$ and thus $(\mathcal{A}_G(M), d_{\mathfrak{g}})$ is a complex.

Definition 1 *Define:*

$$Z_G(M) = \{\alpha \in \mathcal{A}_G(M), d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0\},$$

$$B_G(M) = \{\alpha \in \mathcal{A}_G(M), \alpha = d_{\mathfrak{g}}\beta, \text{for some} \beta \in \mathcal{A}_G(M)\}$$

and

$$H_G(M) = Z_G(M)/B_G(M).$$

The space $H_G(M)$ is called the *G-equivariant de Rham cohomology of M*. The cohomology $H_G(M)$ inherits the $\mathbb{Z}_+$-grading from $\mathcal{A}^*_G(M)$. The graded algebra $S(\mathfrak{g}')^G$ of invariant polynomial functions on $\mathfrak{g}$ acts by multiplication on $\mathcal{A}_G(M)$. This action commutes with the differential $d_{\mathfrak{g}}$. Thus $H^*_G(M)$ is a $\mathbb{Z}$-graded $S(\mathfrak{g}')^G$-module.

In particular for G reduced to the identity element, the space $Z_G(M) \subset \mathcal{A}(M)$ is the subspace $Z(M)$ of closed differential forms on M, the space $B_G(M) \subset \mathcal{A}(M)$ is the space $B(M)$ of exact differential forms and $H^*_G(M)$ is the usual de Rham cohomology $H^*(M)$ with real coefficients.

If K is a closed subgroup of G, the restriction to $\mathfrak{k}$ of a function defined on $\mathfrak{g}$ induces a map from $H^*_G(M)$ to $H^*_K(M)$. In particular, evaluation at $0 \in \mathfrak{g}$: $\alpha \mapsto \alpha(0)$ induces a map from $H^*_G(M)$ to $H^*(M)$.

The complex $\mathcal{A}_G(M)$ has a subcomplex

$$\mathcal{A}_{cpt,G}(M) := (S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}_{cpt}(M))^G.$$

The *compactly supported G-equivariant de Rham cohomology* $H^*_{cpt,G}(M)$ of M is defined as the cohomology of the complex $(\mathcal{A}^*_{cpt,G}, d_\mathfrak{g})$.

We may also consider the space $C^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ of C^∞-maps from $\mathfrak{g}$ to $\mathcal{A}(M)$. The group G acts naturally on $C^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$. The operator $d_\mathfrak{g}$ is defined by the same formula (5) on $C^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$. The space $C^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ has a $\mathbb{Z}/2$-grading given by parity of differential forms. The operator $d_\mathfrak{g}$ is an odd operator on this superspace. However it is impossible to define a $\mathbb{Z}_+$-grading on $C^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$, such that $d_\mathfrak{g}$ would be of degree 1.

We denote by

$$\mathcal{A}^\infty_G(M) = C^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))^G,$$

the space of G-equivariant C^∞ maps from $\mathfrak{g}$ to $\mathcal{A}(M)$. The Cartan relation implies again $d_\mathfrak{g}^2 = 0$ on $\mathcal{A}^\infty_G(M)$.

Definition 2 *Define:*

$$Z^\infty_G(M) = \{\alpha \in \mathcal{A}^\infty_G(M), d_\mathfrak{g}\alpha = 0\},$$

$$B^\infty_G(M) = \{\alpha \in \mathcal{A}^\infty_G(M), \alpha = d_\mathfrak{g}\beta \quad \text{for some}\, \beta \in \mathcal{A}^\infty_G(M)\}$$

and

$$H^\infty_G(M) = Z^\infty_G(M)/B^\infty_G(M).$$

Introduce (as in [12]) the space $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ of generalized functions on $\mathfrak{g}$ with values in the space $\mathcal{A}(M)$. This is, by definition, the space of continuous $\mathbb{R}$-linear maps $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}(\mathfrak{g}), \mathcal{A}(M))$ from the space of smooth compactly supported densities $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ on $\mathfrak{g}$ to the space $\mathcal{A}(M)$, where $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ and $\mathcal{A}(M)$ are both endowed with the C^∞-topologies. Thus, if α is an element of $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ and if Φ is a smooth compactly supported density on $\mathfrak{g}$, then (α, Φ) is a differential form on M denoted by $\int_\mathfrak{g} \alpha(X) d\Phi(X)$. A compactly supported C^∞ density on $\mathfrak{g}$ will be called a *test density* (on $\mathfrak{g}$). A compactly supported C^∞ function on $\mathfrak{g}$ will be called a *test function.* We write d_M for the operator on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ defined by

$$(d_M\alpha, \Phi) = d_M(\alpha, \Phi), \qquad \text{for}\, \Phi\, \text{a test density},$$

and ι for the operator defined by

$$(\iota\alpha, \Phi) = \sum_i \iota(E^i_M)(\alpha, x_i\Phi).$$

Then define the operator $d_\mathfrak{g}$ on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ by

$$d_\mathfrak{g}\alpha = d_M\alpha - \iota\alpha.$$

Observe that for $\alpha \in C^{\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M)) \subset C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$, the operator $d_{\mathfrak{g}}$ coincides with the operator $d_{\mathfrak{g}}$ introduced above. We thus will also write informally

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d_M(\alpha(X)) - \sum_i x_i \iota(E_M^i)(\alpha(X))$$

for $\alpha \in C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$.

The group G acts naturally on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$:

$$(g\alpha, \Phi) = g \cdot (\alpha, g^{-1} \cdot \Phi).$$

It can be easily seen that the operators d and ι commute with the action of G. Define

$$\mathcal{A}_G^{-\infty}(M) = C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))^G$$

as the space of G-equivariant $C^{-\infty}$-maps from $\mathfrak{g}$ to $\mathcal{A}(M)$. An element of the space $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ will be called a *G-equivariant form with generalized coefficients*, or simply *an equivariant form*. If Φ is a test function on $\mathfrak{g}$, we denote by Φ^g the function $\Phi^g(X) = \Phi(gX)$. Let dX be an Euclidean measure on $\mathfrak{g}$. For $\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ and $g \in G$, we have

$$(7) \qquad |\det{}_{\mathfrak{g}}(g)|\left(\int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\Phi^g(X)dX\right) = g^{-1} \cdot \left(\int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\Phi(X)dX\right).$$

The operator $d_{\mathfrak{g}}$ preserves $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ and the Cartan relation (1) implies again $d_{\mathfrak{g}}^2 = 0$ on $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$.

Definition 3 *Define:*

$$Z_G^{-\infty}(M) = \{\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M), d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0\},$$

$$B_G^{-\infty}(M) = \{\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M), \alpha = d_{\mathfrak{g}}\beta \qquad \text{for some } \beta \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)\}$$

and

$$H_G^{-\infty}(M) = Z_G^{-\infty}(M)/B_G^{-\infty}(M).$$

An equivariant form in $Z_G^{-\infty}(M)$ (resp. $B_G^{-\infty}(M)$) is said to be *closed* (resp. *exact*).

Observe that the parity of the exterior degree on $\mathcal{A}(M)$ induces a $\mathbb{Z}/2$-degree on the preceding spaces. We denote them by

$$Z_G^{-\infty}(M)^{\bullet}, B_G^{-\infty}(M)^{\bullet}, H_G^{-\infty}(M)^{\bullet}.$$

The ring $S(\mathfrak{g}')^G$ of invariant polynomial functions on $\mathfrak{g}$ acts by multiplication on $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$. This action commutes with the differential $d_{\mathfrak{g}}$. Thus $H_G^{-\infty}(M)^{\bullet}$

is a $S(\mathfrak{g}')^G$-module. In fact $H_G^{-\infty}(M)$ is a module for $H_G^\infty(M)$ under left multiplication.

If M is a point, then, from the definition, it is clear that $H_G(point) = S(\mathfrak{g}')^G$, $H_G^\infty(point) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$ and $H_G^{-\infty}(point) = C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$.

There is a natural map

$$H_G^\infty(M) \to H_G^{-\infty}(M).$$

Define similarly $(\mathcal{A}_{cpt,G}^{-\infty}(M), d_\mathfrak{g})$ as the subcomplex of $(\mathcal{A}_G^{-\infty}(M), d_\mathfrak{g})$, consisting of all $\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ such that $(\alpha, \Phi) \in \mathcal{A}_{cpt}(M)$, for all test densities Φ, and define $H_{cpt,G}^{-\infty}(M)$ as the cohomology of this subcomplex.

If $\phi : N \to M$ is a G- equivariant map between two G-manifolds, then the pull-back of differential forms induces a cochain map

$$\phi^* : (\mathcal{A}_G^{-\infty}(M), d_\mathfrak{g}) \to (\mathcal{A}_G^{-\infty}(N), d_\mathfrak{g}),$$

in particular a map in cohomology (again denoted by)

$$\phi^* : H_G^{-\infty}(M) \to H_G^{-\infty}(N).$$

Thus the correspondence $M \mapsto H_G^{-\infty}(M)$ is a contravariant functor from the category of G-manifolds and G-equivariant maps to the category of $\mathbb{Z}/2$-graded $S(\mathfrak{g}')^G$-modules.

Similarly the correspondence $M \mapsto H_{cpt,G}^{-\infty}(M)$ is a contravariant functor from the category of G-manifolds and G-equivariant proper maps to the category of $\mathbb{Z}/2$-graded $S(\mathfrak{g}')^G$-modules.

Definition 4 *Let $p : M \to B$ be a G-equivariant fibration of G-manifolds. Then the map p is said to have* G-oriented *fibers if the fibers of p are oriented with an orientation varying continuously and if the G-action on M preserves the orientation of all the fibers.*

If $p : \mathcal{V} \to B$ is a G-equivariant real vector bundle and if p has G-oriented fibers, we will just say that the *vector bundle* $\mathcal{V}$ *is G-oriented.* We say that a *G-manifold B* is *G-oriented* if the tangent bundle of B is G-oriented.

If M is G-oriented, integration over M defines a map $\int_M$ from $\mathcal{A}_{cpt,G}^{-\infty}(M)$ to $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$:

$$(\int_M \alpha, \Phi) := \int_M (\alpha, \Phi), \qquad \text{for any test density } \Phi \text{ on } \mathfrak{g}.$$

This map induces a map from $H_{cpt,G}^{-\infty}(M)$ to $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$.

If $p : M \to B$ is a G-equivariant fibration of G-manifolds with G-oriented fibers, then the integration over the fibers gives a cochain map denoted by $\int_{M/B}$ or by p_* from $\mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(M)$ to $\mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(B)$:

$$(8) \qquad (\int_{M/B} \alpha, \Phi) := \int_{M/B} (\alpha, \Phi), \qquad \text{for any test density } \Phi \text{ on } \mathfrak{g}.$$

In particular, we get an induced map in cohomology (again denoted by) p_* or $\int_{M/B}$ (depending on the choice of a G-orientation):

$$p_* : H^{-\infty}_{cpt,G}(M) \to H^{-\infty}_{cpt,G}(B).$$

Similarly if, in addition, p is a proper map, we get the integration map

$$p_* : H^{-\infty}_G(M) \to H^{-\infty}_G(B).$$

Observe that if $\alpha \in H^{\infty}_{cpt,G}(M), \beta \in H^{-\infty}_G(B)$, then $\alpha \wedge p^*\beta \in H^{-\infty}_{cpt,G}(M)$ and we have

$$(9) \qquad p_*(\alpha \wedge p^*\beta) = p_*\alpha \wedge \beta.$$

(Our sign convention for p_* is as in [3], chapter 1.)

If $\mathcal{E} \to M$ is a G-equivariant real vector bundle, we introduce the manifold $M_{\mathcal{E}}$: An element of $M_{\mathcal{E}}$ is a couple (m, o), where $m \in M$ and o is an orientation of the fiber $\mathcal{E}_m$. Then $M_{\mathcal{E}}$ has a canonical G-manifold structure. Define a G-equivariant diffeomorphism of $M_{\mathcal{E}}$ by $\epsilon(m, o) = (m, -o)$. As in section 5 of [13], we may also consider the $\mathcal{E}$-twisted cohomology group $H_G(M)_{\mathcal{E}}$, which is by definition the cohomology of the complex

$$\mathcal{A}_G(M)_{\mathcal{E}} := \{\alpha \in \mathcal{A}_G(M_{\mathcal{E}}); \epsilon \cdot \alpha = -\alpha\}.$$

We define similarly the $\mathcal{E}$-twisted groups $H^{\pm\infty}_G(M)_{\mathcal{E}}$ and $H^{\pm\infty}_{cpt,G}(M)_{\mathcal{E}}$. If $p : M \to B$ is a G-equivariant fibration with vertical tangent bundle $\mathcal{V}$, then we get the integration map

$$p_* : H^{\pm\infty}_{cpt,G}(M)_{\mathcal{V}} \to H^{\pm\infty}_{cpt,G}(B).$$

If $TM \to M$ is the tangent bundle, the manifold M_{TM} is denoted by M_t, the TM-twisted group $H_G(M)_{TM}$ is denoted by $H_G(M)_t$ and the compactly supported twisted group by $H_{cpt,G}(M)_t$. If M is G-oriented, the space $H_G(M)_t$ is canonically isomorphic with $H_G(M)$. In general $H_G(M)_t$ is a module over $H_G(M)$. Taking the fibration $p : M \to point$, we get

$$p_* = \int_M : H_{cpt,G}(M)_t \to S(\mathfrak{g}')^G$$

even if M is not oriented. We thus can form the bilinear map $(,) : H_G(M) \times H_{cpt,G}(M)_t \to S(\mathfrak{g}')^G$ defined by: for $\alpha \in H_G(M)$ and $\beta \in H_{cpt,G}(M)_t$

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha\beta.$$

If $G = e$, the bilinear form above (over $\mathbb{R}$) is non-degenerate. For lack of reference we include a proof of the following proposition.

Proposition 5 *Let G be a compact Lie group and let M be a G-manifold. If the evaluation map $H_G(M) \to H(M)$ is surjective, then*

1. *the evaluation map $H_{cpt,G}(M)_t \to H_{cpt}(M)_t$ is surjective*

2. *the spaces $H_G(M)$ and $H_{cpt,G}(M)_t$ are free modules over $S(\mathfrak{g}')^G$*

3. *if M is compact, the bilinear form $(.,.)$ induces an isomorphism of $H_G(M)_t$ with $Hom_{S(\mathfrak{g}')^G}(H_G(M), S(\mathfrak{g}')^G)$.*

Remark 6 *Let G be a compact connected Lie group and let M be a G-manifold such that $H_G(M)$ is a free $H_G(point)$-module. Then the Eilenberg-Moore spectral sequence (see [16], chapter 3, section 1) degenerates at the E^2-term. In particular, the evaluation map $H_G(M) \to H(M)$ is surjective. Observe that the assumption that G is connected can not be dropped here. Consider for example $G = O(3)$ and $M = O(3)/O(2)$.*

Proof: Let $n = \dim M$. For $\alpha \in S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}(M)$ we define the exterior degree of α to be the smallest integer k such that $\alpha \in S(\mathfrak{g}') \otimes \left(\sum_{i=0}^k \mathcal{A}^i(M)\right)$ and we write $\alpha = \sum_{i=0}^k \alpha_{[i]}$ with $\alpha_{[i]} \in S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}^i(M)$.

Let us prove (1). As $H_G(M)$ surjects on $H(M)$ under evaluation at 0, the group G acts trivially on $H(M)$ and (by Poincaré duality) also on $H_{cpt}(M)_t$. Let $[\alpha] \in H_{cpt}(M)_t$ and let α be an element of $Z_{cpt}(M)_t^G$ representing the (G-invariant) cohomology class $[\alpha]$. Assume α to be homogeneous. Let $\tilde{\alpha}$ be a homogeneous (for the total degree given by formula 4) element of $\mathcal{A}_{cpt,G}(M)_t := (S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}_{cpt}(M)_t)^G$ such that $\tilde{\alpha}(0) = \alpha$. Let $\beta = d_{\mathfrak{g}}\tilde{\alpha}$. As $d\alpha = 0$, $\beta(0) = 0$. Let k be the exterior degree of β. Let $\tilde{\nu} \in Z_G(M)$ be homogeneous of total degree $(n-k)$. Since $\tilde{\nu}$ is $d_{\mathfrak{g}}$-closed,

$$(\tilde{\nu}, \beta) = \int_M \tilde{\nu}\beta = \int_M \tilde{\nu}(d_{\mathfrak{g}}\tilde{\alpha}) = 0.$$

As only the terms of exterior degree n of $\tilde{\nu}\beta$ contribute to the integral, we obtain that the polynomial $(\tilde{\nu}(0), \beta_{[k]})$ is 0. If $\beta_{[k]} = \sum P_i\beta_i$, where $P_i \in S(\mathfrak{g}')$

are linearly independent and $\beta_i \in \mathcal{A}^k(M)$, we obtain $\sum_i P_i \int_M \tilde{\nu}(0)\beta_i = 0$. Thus $\int_M \tilde{\nu}(0)\beta_i = 0$ for all homogeneous elements $\tilde{\nu} \in Z_G(M)$ of total degree $n-k$. Since the evaluation map $H_G(M) \to H(M)$ is surjective, this implies that $\beta_i \in B_{cpt}(M)_t$ (by Poincaré duality). Thus $\beta_{[k]} \in (S(\mathfrak{g}') \otimes B_{cpt}(M)_t)^G$. As G is compact, we can choose $\beta_{[k]} = d\omega$ with homogeneous $\omega \in (S(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{A}_{cpt}(M)_t)^G$ of exterior degree $(k-1)$ and such that $\omega(0) = 0$. Thus $\gamma := \tilde{\alpha} - \omega$ is still such that $\gamma(0) = \alpha$ and $d_{\mathfrak{g}}(\gamma)$ is of exterior degree strictly less than k. By induction on k, we can construct a $d_{\mathfrak{g}}$-closed form κ such that $\kappa(0) = \alpha$. Thus the evaluation map at 0 gives a surjective map from $H_{cpt,G}(M)_t$ to $H_{cpt}(M)_t$.

Let us prove (2): Let x_a be a homogeneous basis of $H(M)$ over $\mathbb{R}$ and let α_a be any homogeneous elements of $Z_G(M)$ such that $[\alpha_a(0)] = x_a$. Let us prove that the cohomology classes of the elements α_a form a system of generators for $H_G(M)$ over $S(\mathfrak{g}')^G$. Let $\mathcal{H} \subset Z(M)^G$ be the subspace generated by the elements $\alpha_a(0)$. We have $Z(M) = \mathcal{H} \oplus B(M)$. Take $\alpha \in Z_G(M)$ (say of exterior degree k). Then

$$\alpha_{[k]} \in (S(\mathfrak{g}') \otimes Z(M))^G = S(\mathfrak{g}')^G \otimes \mathcal{H} \oplus (S(\mathfrak{g}') \otimes B(M))^G.$$

Arguing as in the proof of (1), we see that the cohomology class of α is congruent to an element $\beta + \sum_a P_a \alpha_a$ with $P_a \in S(\mathfrak{g}')^G$ and $\beta \in Z_G(M)$ of exterior degree strictly less than k. By induction on k, this proves that the equivariant cohomology classes of the elements α_a form a system of generators for $H_G(M)$. Let us prove that they are independent over $S(\mathfrak{g}')^G$. Let $\beta = \sum_a P_a \alpha_a \in Z_G(M)$ be such that β is 0 in $H_G(M)$. Let k be the maximum of the exterior degrees of those α_a's such that $P_a \neq 0$. Then for every $\nu \in Z_{cpt,G}(M)_t$ homogeneous of total degree $(n-k)$, the polynomial

$$(\beta, \nu) = \sum_a P_a \int_M (\alpha_a(0))_{[k]} \nu(0)$$

is equal to zero. By (1) the evaluation map $H_{cpt,G}(M)_t \to H_{cpt}(M)_t$ is surjective. Thus the polynomial map $\sum_{deg x_a = k} P_a x_a$ from $\mathfrak{g}$ to $H(M)$ is identically 0. But the elements x_a being linearly independent, this implies that the elements P_a for which x_a is of exterior degree k are identically 0. This is in contradiction with the definition of k. This prove that $\{\alpha_a\}$ are linearly independent over $S(\mathfrak{g}')^G$. One can similarly prove that $H_{cpt,G}(M)_t$ is a free module over $S(\mathfrak{g}')^G$.

Proceeding in a similar way and using Poincaré duality we can construct (if M is compact) a basis $\alpha^b \in H_G(M)_t$ such that $(\alpha_a, \alpha^b) = \delta_a^b$. This proves (3). ∎

Definition 7 *If Q is a continuous operator on $\mathcal{A}(M)$, we still denote by Q the operator on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ defined by*

$$(Q \cdot \alpha, \Phi) = Q \cdot (\alpha, \Phi), \qquad \text{for all test densities } \Phi \text{ on } \mathfrak{g}.$$

We will often write the above as $(Q\alpha)(X) = Q \cdot (\alpha(X))$ *and say that* Q *is the* pointwise extension *of* Q *to* $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$.

We start to compute the space $H_G^{-\infty}$ in some elementary situations.

Let $p : \mathcal{V} \to B$ be a G-equivariant real vector bundle over B. Let $i : B \to \mathcal{V}$ be the inclusion from B to $\mathcal{V}$ as the zero section.

Proposition 8 *The canonical maps*

$$i^* : H_G^{-\infty}(\mathcal{V}) \to H_G^{-\infty}(B)$$

and

$$p^* : H_G^{-\infty}(B) \to H_G^{-\infty}(\mathcal{V})$$

are inverses to each other. In particular, both of them are isomorphisms.

Proof: The proof is similar to the Poincaré lemma for the de Rham complex. Let $\mathcal{R}$ be the vertical Euler vector field on $\mathcal{V}$. Extend the operator $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ pointwise to $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(\mathcal{V}))$. Extend similarly the operator $\iota(\mathcal{R})$ to $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(\mathcal{V}))$. As $\iota(E^i)\iota(\mathcal{R}) + \iota(\mathcal{R})\iota(E^i) = 0$, for all i, Cartan relation implies

$$\mathcal{L}(\mathcal{R}) = d_{\mathfrak{g}}\iota(\mathcal{R}) + \iota(\mathcal{R})d_{\mathfrak{g}}$$

on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(\mathcal{V}))$. As $\mathcal{R}$ commutes with the action of G, the operators $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, $\iota(\mathcal{R})$ preserve $\mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{V})$. Let $h_t(v) = tv$. Let $\beta \in \mathcal{A}(\mathcal{V})$. Then $h_t^*\beta = \beta$ for $t = 1$, while $h_t^*\beta = p^*i^*\beta$ for $t = 0$. We compute

$$\frac{d}{dt}h_t^*\beta = t^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{R})h_t^*\beta.$$

(As $\mathcal{R}$ vanishes at 0, the right hand side depends smoothly on $t \in \mathbb{R}$). Clearly, the same relation persists for differential forms with parameters. Thus for $\beta \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{V})$, we have

$$\frac{d}{dt}h_t^*\beta = t^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{R})h_t^*\beta = t^{-1}(\iota(\mathcal{R})d_{\mathfrak{g}} + d_{\mathfrak{g}}\iota(\mathcal{R}))h_t^*\beta.$$

Define $H : \mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{V})$ by

$$H\beta = \int_0^1 h_t^*(\iota(\mathcal{R})\beta)t^{-1}dt.$$

Then we obtain

$$\beta - p^*i^*\beta = \int_0^1 \frac{d}{dt}h_t^*\beta dt = (d_{\mathfrak{g}}H + Hd_{\mathfrak{g}})\beta,$$

for all $\beta \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{V})$. Thus we see that $p^*i^* = I$ in cohomology, where I is the identity operator. Of course, $pi = I$, in particular $i^*p^* = I$. This proves the proposition. ∎

Considering the case of a vector space V, we have

Corollary 9 *Let G be a Lie group and V be a finite dimensional real representation space for G, then*

$$H_G^{-\infty}(V) = C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G.$$

We now prove the Thom isomorphism for compactly supported cohomology of vector bundles.

Definition 10 *Let G be a compact Lie group and let $p : \mathcal{V} \to B$ be a G-equivariant G-oriented vector bundle over a compact base B.*

An element $u \in H_{cpt,G}(\mathcal{V})$ such that $p_* u = 1$ in $H_G(B)$ will be called a Thom class.

Given a G-orientation o on $\mathcal{V}$, recall [18] that there exists a unique Thom class $u_o \in H_{cpt,G}(\mathcal{V})$. Multiplication by u_o induces a map m_o: $m_o(\alpha) = u_o \wedge p^*\alpha$ from $H_G(B)$ to $H_{cpt,G}(\mathcal{V})$ and the map m_o is an isomorphism. Similarly, as $u_o \in H_{cpt,G}(\mathcal{V})$, we can define the map $m_o(\alpha) = u_o \wedge p^*\alpha$ from $H_G^{-\infty}(B)$ to $H_{cpt,G}^{-\infty}(\mathcal{V})$.

Proposition 11 . *Let G be a compact Lie group and let $\mathcal{V} \to B$ be a G-equivariant G-oriented real vector bundle over a compact base B. Then the maps*

$$m_o : H_G^{-\infty}(B) \to H_{cpt,G}^{-\infty}(\mathcal{V})$$

and

$$p_* : H_{cpt,G}^{-\infty}(\mathcal{V}) \to H_G^{-\infty}(B)$$

are inverses to each other. In particular both of them are isomorphisms.

Remark 12 *In the above proposition, we have assumed the base B to be compact, just in order to simplify notation. If B is not necessarily compact, the same proof will lead to isomorphism of $H_{cpt,G}^{-\infty}(B)$ with $H_{cpt,G}^{-\infty}(\mathcal{V})$. It is also clear that a similar Thom isomorphism will hold between $H_G^{-\infty}(B)$ and the cohomology $H_{vcpt,G}^{-\infty}(\mathcal{V})$ of the complex of equivariant forms on $\mathcal{V}$ with compact support along the fibers.*

Proof: The proof is similar to the proof of the Thom isomorphism in equivariant cohomology given in [19]. For $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{V})$, we denote by $\tilde{\alpha}$ the image of α under the automorphism $x \mapsto -x$ of $\mathcal{V}$. Let us consider the bundle $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ over B and let $\sigma(x, y) = (y, -x)$ be the automorphism of $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$. Denote by $\sigma_t, t \in \mathbb{R}$ the transformation

$$\sigma_t(x, y) = ((\cos t)x + (\sin t)y, -(\sin t)x + (\cos t)y)$$

of the fibers of $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$. Then σ_0 is the identity, while $\sigma_{\pi/2}$ is equal to σ. Let

$$S = (\frac{d}{dt}\sigma_t)$$

be the vector field on $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ induced by the group of transformations σ_t. We have

$$\mathcal{L}(S) = d\iota(S) + \iota(S)d$$

on $\mathcal{A}_{cpt}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$.

Extending these transformations pointwise to $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{cpt}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}))$ (cf. Definition 7) we obtain the relation:

$$\mathcal{L}(S) = d_{\mathfrak{g}}\iota(S) + \iota(S)d_{\mathfrak{g}}$$

on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{cpt}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}))$. The transformations σ_t commute with the action of G. Thus $\iota(S)$ and $\mathcal{L}(S)$ preserve $\mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$.

Define $H : \mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}) \to \mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$ by

$$H\nu = \int_0^{\pi/2} (\sigma_t^* \iota(S)\nu)dt.$$

We obtain, as in the proof of the preceding proposition (8)

$$\sigma^*\nu - \nu = (d_{\mathfrak{g}}H + Hd_{\mathfrak{g}})\nu$$

for any $\nu \in \mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$.

Let $p_i : \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \to \mathcal{V}, i = 1,2$ be the natural maps obtained by projections on the first or second component respectively. Consider $\alpha \in \mathcal{A}^{\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V})$ and $\beta \in \mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V})$. Then $p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta$ is a well defined element of $\mathcal{A}^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$. If α, β are closed equivariant forms, then $p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta$ is closed and is in the same cohomology class as $\sigma^*(p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta) = p_2^*\alpha \wedge p_1^*\tilde{\beta}$. Let us integrate over the fibers of p_2. It is clear that $(p_2)_*(p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta) = p^*(p_*\alpha)\beta$. Thus the equality in cohomology

$$p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta \cong p_2^*\alpha \wedge p_1^*\tilde{\beta}$$

implies (if N is the rank of $\mathcal{V}$, and $|\alpha| \in \{0,1\}$ is the parity of α):

$$p^*(p_*\alpha) \wedge \beta \cong (-1)^{N(|\alpha|-1)}\alpha \wedge p^*(p_*\beta)$$

in cohomology. In particular let $\alpha = u_o$ be the equivariant Thom class of $\mathcal{V} \to B$, which is of parity N. We obtain the relation

$$\beta \cong u_o \wedge p^*p_*\beta$$

in $H^{-\infty}_{cpt,G}(\mathcal{V})$. Thus, we see that $m_o p_* = I$ in cohomology. Of course $p_* m_o = I$. This proves the proposition. ∎

We finish this section by giving an example of a non-trivial closed equivariant form with generalized coefficients.

We need a notation.

Let V be a real vector space of dimension n. Let ν' be a non-zero element in $\Lambda^n V'$. We denote by $|\nu'|^{-1}\delta_V$ the element of $C^{-\infty}(V)$ defined by

$$(10) \qquad \int_V |\nu'|^{-1}\delta_V(X)\Phi(X)dX = \Phi(0), \qquad \text{for any test function } \Phi \text{ on } V,$$

where dX is the Euclidean density on V determined by ν'.

We denote by $\delta_{V,o} \in C^{-\infty}(V) \otimes \Lambda^n V'$ the element:

$$(11) \qquad \delta_{V,o} = |\nu'|^{-1}\delta_V \otimes \nu'.$$

The element $\delta_{V,o}$ depends only on the orientation o of V determined by ν'.

Let G be a Lie group. Consider the action of G on itself by left translations. Let $n = \dim G$. Fix an orientation o on $\mathfrak{g}$. Let $\nu' \in \Lambda^n \mathfrak{g}'$ be a positive element. Let dg be the unique left invariant form of maximal degree on G such that $(dg)_e = \nu'$, where e is the identity element of G.

Lemma 13 *The form*

$$\alpha_{G,o}(X) := |\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{g}}(X) \otimes |\det{}_{\mathfrak{g}} g| dg$$

is a closed equivariant form on G, which depends only on the choice of o.

Proof: The form $\alpha_{G,o}$ is equivariant, as $g_0 \cdot (|\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{g}}) = |\det{}_{\mathfrak{g}} g_0|(|\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{g}})$ and $|\det{}_{\mathfrak{g}}(g_0^{-1}g)| = |\det{}_{\mathfrak{g}} g_0|^{-1}|\det{}_{\mathfrak{g}} g|$. It is immediate to see that $\alpha_{G,o}$ depends only on o. As $\alpha_{G,o}$ is of maximal degree, $d\alpha_{G,o} = 0$. Also, as the generalized function $|\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{g}}$ is annihilated by multiplication by all the coordinates functions on $\mathfrak{g}$, we see that $\iota\alpha_{G,o} = 0$. ∎

We will prove in section 5 that $H_G^{-\infty}(G) = \mathbb{R}\alpha_{G,o}$

3 Koszul complexes

Our main aim in sections 4 and 5 will be the study of the cohomology of "perturbed" Koszul complexes. Thus, in this section, we recall some well-known facts on Koszul complexes.

Let V be a finite dimensional real vector space of dimension n with basis $e^i, 1 \leq i \leq n$ and dual basis $e_i \in V'$. Let $S(V')$ be the ring of polynomial functions on V. Let L be a $S(V')$-module. We still denote by e_i the action of $e_i \in V'$ on L. We denote by $\iota(e^i) : \Lambda^* V' \to \Lambda^{*-1} V'$ the contraction by the vector $e^i \in V$.

Consider the space

$$L \otimes \Lambda^* V'$$

which is $\mathbb{Z}_+$-graded by the exterior degree. On this space, the operator

$$j_L = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \iota(e^i) \tag{12}$$

is an operator of degree -1 and its square is zero. We denote by $H(j_L)$ the homology space of j_L. It is a $\mathbb{Z}_+$-graded vector space. If $L = S(V')$ (considered as a $S(V')$-module under multiplication), we denote the operator j_L by j_V. We denote:

$$A^* = S(V') \otimes \Lambda V'.$$

The following proposition is basic

Proposition 14 *Consider the operator j_V on A^*. We have:*

1. *If $i > 0, H_i(j_V) = 0$.*

2. *If $i = 0$, the map $\phi \mapsto \phi(0)$ from $A^0 = S(V')$ to $\mathbb{R}$ induces an isomorphism from $H_0(j_V)$ with $\mathbb{R}$.*

Even though this proposition is well known, we give a proof as we will use the explicit homotopy given below in the rest of the article.

Proof: We identify the space $A^* = S(V') \otimes \Lambda^* V'$ with the space of differential forms with polynomial coefficients on V. We write an element $x \in V$ as $x = \sum_i x_i e^i$, so that $e_i(x) = x_i$. If $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ is a multi-index: $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, we identify $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \cdots \wedge e_{i_k} \in \Lambda V'$ with the k-form $dx_I = dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$.

Consider the partial derivative ∂^i in the direction of $e^i \in V$. Let E_V be the Euler vector field $E_V = \sum_i x_i \partial^i$. We denote the contraction operator $\iota(e^i)$ on $\Lambda V'$ by ι^i. Thus

$$j_V = \sum_i x_i \iota^i = \iota(E_V).$$

We denote by ϵ_i the multiplication by dx_i. Let $d_V = \sum_i \partial^i \otimes \epsilon_i$ be the de Rham differential on A^*. Let $\mathcal{L}_V$ be the Euler operator on $S(V') \otimes \Lambda V'$ given by the Lie derivative action of E_V.

$$\mathcal{L}_V(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = (\sum_i x_i \partial^i f + kf) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

for $f \in S(V')$.

Then, Cartan relation implies $\mathcal{L}_V = d_V j_V + j_V d_V$.

Consider the subcomplex A_0^* of A^* such that $A_0^k = A^k$, if $k > 0$, while $A_0^0 = \{\phi \in S(V'), \phi(0) = 0\}$. The operator $\mathcal{L}_V$ keeps A_0^* stable and induces an invertible operator of degree 0 on A_0^*. We can give an integral formula for the inverse F_V of the Euler operator $\mathcal{L}_V$: Define F_V on A_0^* by

1. If $f dx_I \in A^k$, $k > 0$,

$$F_V(f dx_I) = (\int_0^1 f(tx)t^{k-1}dt)dx_I.$$

2. If $f \in A_0^0$

$$F_V f = \int_0^1 f(tx)t^{-1}dt.$$

It is well defined as $f(tx)$ vanishes for $t = 0$.

It is immediate to see that $F_V \mathcal{L}_V \phi = \phi$ for every $\phi \in A_0^*$. The operator $F_V = \mathcal{L}_V^{-1}$ commutes with j_V and d_V.

Let $h_V := F_V d_V$, then, if $\phi \in A_0^*$,

$$\phi = (h_V j_V + j_V h_V)\phi.$$

This formula clearly implies the proposition. ∎

Let L, N be two $S(V')$-modules. The tensor product space (over $\mathbb{R}$) $L \otimes N$ is given a structure of $S(V')$-module by defining the action of an element $f \in V'$ to be $f \cdot (m \otimes n) = fm \otimes n - m \otimes fn$.

Consider the operator $j_{L\otimes N}$ on $L \otimes N \otimes \Lambda V'$. The homology space $H_0(j_{L\otimes N})$ in degree 0 is the quotient of $L \otimes N$ by the subspace spanned by elements of the form $fm \otimes n - m \otimes fn$, for $f \in V'$. This quotient is by definition $L \otimes_{S(V')} N$:

$$H_0(j_{L\otimes N}) = L \otimes_{S(V')} N.$$

If N is a $S(V')$-module, denote by N^0 the space N with the trivial action of V'.

Lemma 15 *Let N be a $S(V')$-module. The operator $R := \exp \sum_i \partial^i \otimes e_i$ gives an isomorphism of the $S(V')$-module $S(V') \otimes N$ with the $S(V')$-module $S(V') \otimes N^0$.*

Proof: It is sufficient to check this assertion when V is a 1-dimensional vector space, where it is checked easily. ∎

Corollary 16 *If L is a free $S(V')$-module, then $L \otimes N$ is also free; hence $H_i(j_{L\otimes N}) = 0$ if $i > 0$.*

Lemma 17 *For any $S(V')$-modules L and N, the homology space of the operator $j_{L\otimes N}$ on the complex*

$$L \otimes N \otimes \Lambda V'$$

is equal to the torsion group $Tor^{S(V')}(L,N)$, i.e.,

$$H_i(j_{L\otimes N}) = Tor_i^{S(V')}(L,N).$$

Proof: Let us consider the complex

$$0 \to S(V')\otimes N \otimes \Lambda^n V' \xrightarrow{j_{S(V')\otimes N}} \cdots \xrightarrow{j_{S(V')\otimes N}} S(V')\otimes N \otimes V' \xrightarrow{j_{S(V')\otimes N}} S(V')\otimes N \xrightarrow{m} N \to 0$$

where the last map is the surjective map $m : S(V')\otimes N \to N : m(\phi\otimes n) = \phi n$. By the preceding corollary, this complex is exact. Furthermore if we endow the space $S(V')\otimes N\otimes \Lambda V'$ with the $S(V')$ module structure $S(V')\otimes (N\otimes\Lambda V')^0$, the homomorphisms $j_{S(V')\otimes N}$ and m are $S(V')$-module morphisms. Thus the complex above is a free resolution of N as a $S(V')$-module. We may calculate the torsion group $Tor^{S(V')}(L,N)$ using this resolution. The space $L\otimes_{S(V')} S(V')\otimes (N\otimes\Lambda^* V')^0$ is isomorphic with $L\otimes N\otimes \Lambda^* V'$. The operator $I\otimes_{S(V')}(j_{S(V')\otimes N})$ under this isomorphism becomes the operator $j_{L\otimes N}$. This proves the lemma. ∎

We now introduce another vector space P considered as a parameter space. Let $W = V\oplus P$. We write an element $w\in W$ as $w = x+y$, with $x\in V$, $y\in P$.

Let us consider the space

$$A^{\infty,*} = C^\infty(W)\otimes \Lambda^* V'.$$

The multiplication by the coordinate function x_i is an operator on $C^\infty(W)$. Thus the operator $j_V^\infty := \sum_{i=1}^n x_i\otimes \iota(e^i)$ is an operator of degree -1 on $A^{\infty,*}$ and $(j_V^\infty)^2 = 0$. Let $r_P : C^\infty(W)\to C^\infty(P)$ be the restriction map.

Proposition 18 *Consider the operator j_V^∞ on the complex $A^{\infty,*}$. We have*

1. *If $i>0, H_i(j_V^\infty) = 0$.*

2. *If $i = 0$, the map r_P from $A^0 = C^\infty(W)$ to $C^\infty(P)$ induces an isomorphism from $H_0(j_V^\infty)$ with $C^\infty(P)$.*

Proof: The method of proof is identical to the proof of Proposition 14. For simplicity, we denote j_V^∞ by j_V. Let

$$d_V = \sum_i \partial^i \otimes \epsilon_i \tag{13}$$

be the partial de Rham differential in the direction of V on the complex $A^{\infty,*}$. Let $\mathcal{L}_V$ be the Euler operator on $A^{\infty,*}$ with respect to the variables x_i, dx_i:

$$\mathcal{L}_V(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = (\sum_i x_i \partial^i f + kf) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

if $f \in C^\infty(W)$.

Then, $\mathcal{L}_V = d_V j_V + j_V d_V$.

Let $A_0^{\infty,*}$ be the subcomplex of $A^{\infty,*}$ defined by $A_0^{\infty,k} = A^{\infty,k}$ if $k > 0$ and $A_0^{\infty,0} = \{\phi \in C^\infty(W); r_P\phi = 0\}$.

The Euler operator $\mathcal{L}_V$ induces an operator of degree 0 on $A_0^{\infty,*}$, which is invertible. Its inverse F_V is given explicitly by an integral formula as in the proof of Proposition 14:

Definition 19 *Let us consider the operator F_V of degree 0 on $A_0^{\infty,*}$ defined by*

1. *If $f dx_I \in A_0^{\infty,k}$, $k > 0$,*

$$F_V(f dx_I) = (\int_0^1 f(tx + y) t^{k-1} dt) dx_I.$$

2. *If $f \in A_0^{\infty,0}$,*

$$F_V f = \int_0^1 f(tx + y) t^{-1} dt.$$

It is well defined as $f(tx + y)$ vanishes for $t = 0$.

The operator F_V commutes with d_V, j_V. It is easy to prove

$$F_V \mathcal{L}_V \phi = \phi$$

for every $\phi \in A_0^{\infty,*}$. Thus if

(14) $$h_V = F_V d_V,$$

$$\phi = (h_V j_V + j_V h_V)\phi, \qquad \text{for } \phi \in A_0^{\infty,*}.$$

Thus h_V is a homotopy for the complex $A_0^{\infty,*}$. The existence of h_V implies that the subcomplex $A_0^{\infty,*}$ is exact. This in turn implies the proposition. ∎

Observe that if $f \in C_{cpt}^\infty(W) \otimes \Lambda V'$ is compactly supported, then $F_V f$ is not necessarily compactly supported.

Remark 20 *If a Lie group G acts linearly on V and P, the operator j_V^∞ commutes with the action of G. Thus $(A^{\infty,*})^G$ is a subcomplex of $A^{\infty,*}$. The homotopy h_V, that we have constructed above, commutes with the action of G. It results that the homology of the subcomplex $(A^{\infty,*})^G$ of $A^{\infty,*}$ exists only in degree 0 and in degree 0 is isomorphic to $C^\infty(P)^G$.*

Now, consider the space:

$$A^{-\infty,*} = C^{-\infty}(W) \otimes \Lambda^* V'.$$

The operator $j_V^{-\infty}$ is similarly defined on $A^{-\infty,*}$. The complex $j_V^{-\infty} : A^{-\infty,*} \to A^{-\infty,*-1}$ is called the *Koszul complex with $C^{-\infty}$-coefficients* (with the space P as a parameter space).

Choose an orientation o on V. By Formula (11) of section 2, this determines an element $\delta_{V,o}$ of $C^{-\infty}(V) \otimes \Lambda^n V'$. If $f \in C^{-\infty}(P)$ is a generalized function on P, the product $\delta_{V,o}(x) f(y)$ is in $C^{-\infty}(W) \otimes \Lambda^n V'$.

It is easy to identify the homology of $j_V^{-\infty}$ in top degree.

Lemma 21 *The kernel of $j_V^{-\infty}$ on $A^{-\infty,n} = C^{-\infty}(W) \otimes \Lambda^n V'$ is equal to the space $\delta_{V,o} \otimes C^{-\infty}(P)$.*

Proof: As $x_i \delta_{V,o}(x) = 0$ for all i, the subspace $\delta_{V,o}(x) \otimes C^{-\infty}(P)$ of $C^{-\infty}(W) \otimes \Lambda^n V'$ is in $Ker(j_V^{-\infty})$. Reciprocally if $f \otimes \nu' \in C^{-\infty}(W) \otimes \Lambda^n V'$ is such that $j_V^{-\infty}(f \otimes \nu') = 0$, we see that $x_i f(x+y) = 0$ for all i. Thus f is the product of the δ- function on the transverse subspace V with a generalized function on P. ∎

Proposition 22 *We have*

1. *If $i \neq n$, $H_i(j_V^{-\infty}) = 0$.*

2. *$H_n(j_V^{-\infty}) = \delta_{V,o} \otimes C^{-\infty}(P)$*

Remark 23 *Let K be a compact group acting linearly on W and preserving the direct sum decomposition $W = V \oplus P$. Thus the group K acts on $A^{-\infty,*}$ and the operator j_V commutes with the action of K. Hence $(A^{-\infty,*})^K$ is a subcomplex of $A^{-\infty,*}$. Let $\chi(k) := det_V(k)$. Then, K being compact, $\chi(k) = \pm 1$ and moreover $k \cdot \delta_{V,o} = \chi(k) \delta_{V,o}$. By averaging over K the equation $\alpha = j_V^{-\infty} \beta$, we see that the homology of the subcomplex $(A^{-\infty,*})^K$ of $A^{-\infty,*}$ is also equal to 0, except in top degree n, while in top degree $H_n((A^{-\infty,*})^K) = \delta_{V,o} \otimes C^{-\infty}(P)^\chi$, where $C^{-\infty}(P)^\chi = \{f \in C^{-\infty}(P); k \cdot f = \chi(k) f, \text{for all}\, k \in K\}$.*

We now give a proof of Proposition 22.

Proof: Let us consider the subcomplex $L^* = C^{-\infty}_{cpt,V}(W) \otimes \Lambda^* V'$ of $A^{-\infty,*}$, where $C^{-\infty}_{cpt,V}(W)$ denotes the space of generalized functions ϕ on W, with support contained in a set of the form $F \oplus P$ where F is a compact subset of V (F depending upon the generalized function ϕ) .

Lemma 24 *The inclusion $L^* \to A^{-\infty,*}$ induces an isomorphism in homology.*

Proof: Let us denote the operator $j_V^{-\infty}$ by j_V. Choose a scalar product on V and an orthonormal basis e^i of V. Let $e_i \in V'$ be the dual basis and let us denote by ϵ_i the exterior multiplication by e_i on $\Lambda V'$. Let ϵ_V be the operator of degree $+1$ on $A^{-\infty,*}$ defined by $\epsilon_V = \sum_i x_i \epsilon_i$. It is easily verified that $\epsilon_V j_V + j_V \epsilon_V = |x|^2 I$.

Let χ be a smooth function on V such that $\chi(x) = 1$ for $|x| < 1/2$ and $\chi(x) = 0$ for $|x| > 1$. Extend χ to a smooth function on W by setting $\chi(x+y) = \chi(x)$. The multiplication by the function χ on $A^{-\infty}$ commutes with j_V. It sends $A^{-\infty}$ to L. The function $(1-\chi(x))(|x|^2)^{-1}$ is a C^∞ function on V, thus on W. We write for $\phi \in C^{-\infty}(W) \otimes \Lambda V'$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1$$

with $\phi_0 = \chi\phi$ and

$$\phi_1 = \frac{1-\chi(x)}{|x|^2}|x|^2\phi = \frac{1-\chi(x)}{|x|^2}(j_V\epsilon_V + \epsilon_V j_V)\phi.$$

If $j_V\phi = 0$, both elements ϕ_0 and ϕ_1 are annihilated by j_V. Furthermore ϕ_1 is in the image of j_V. Thus each element of $H(A^{-\infty})$ has a representative in the subcomplex L and hence the natural map $H(L) \to H(A^{-\infty})$ is surjective. Now let $\phi \in L$ be such that $\phi = j_V\alpha$ with $\alpha \in A^{-\infty}$. We can find a C^∞ function θ on W such that it is equal to 1 on the support of ϕ and such that $\theta\alpha \in L$. Thus $\phi = \theta\phi = j_V(\theta\alpha)$ and the homology class of ϕ in $H(L)$ is zero. Thus the natural map $H(L) \to H(A^{-\infty})$ is injective. ∎

If $f \otimes \nu' \in L^n$, i.e $f \in C^{-\infty}_{cpt,V}(W)$, we can define $I(f\otimes\nu') \in C^{-\infty}(P)$ by

$$\int_P I(f\otimes\nu')(y)\phi(y)dy = \int_W f(x,y)\phi(y)dxdy$$

where dx is the positive density on V associated to ν'. If $\ell = \delta_{V,o}(x)g(y)$, then $I(\ell) = g$. We denote by L_0^* the subcomplex of L^* such that $L_0^k = L^k$ if $k \neq n$, while $L_0^n = \{\phi \in L^n, I(\phi) = 0\}$. We will construct an explicit homotopy for $j_V^{-\infty}$ on the subcomplex L_0^*.

Consider the complex $R^* = C^\infty_{cpt,P}(W) \otimes \Lambda^* V'$, where $C^\infty_{cpt,P}(W)$ denotes the space of smooth functions on W, with support contained in a set of the form $V \oplus F$ where F is a compact subset of P. Define the subcomplex R^*_0 by $R^k_0 := R^k$, if $k > 0$, while $R^0_0 := \{\phi \in R^0; r_P\phi = 0\}$, where r_P is the restriction map from $C^\infty(W)$ to $C^\infty(P)$. The operator F_V given in Definition 19 preserves R^*_0. Thus the homotopy $h_V = F_V d_V$ of $A^{\infty,*}_0$ is also a homotopy for R^*_0.

Let us choose a Lebesgue measure dy on P. The pairing $(,)$ between the complexes L^* and R^{n-*} defined by

$$(\phi dx_I, f dx_J) = \int_W \phi(x+y) f(x+y)(dx_I \wedge dx_J) dy$$

is a non degenerate pairing. The space L^n_0 is the orthogonal of the subspace $1 \otimes C^\infty_{cpt}(P)$ of functions on W constant in the $x \in V$ variables. Thus $(,)$ induces a non degenerate pairing between L^*_0 and R^{n-*}_0.

The operator j_V satisfies

$$(j_V\alpha, \beta) + (-1)^{|\alpha|}(\alpha, j_V\beta) = 0$$

for $\alpha \in L^*, \beta \in R^{n-*}$.

Thus we can transpose the homotopy for R^*_0 and obtain a homotopy for L^*_0. More explicitly, define the operator U_V of degre 0 on L^*_0 by

$$(U_V\alpha, \beta) = (\alpha, F_V\beta)$$

for $\alpha \in L^*_0, \beta \in R^{n-*}_0$. We extend the partial de Rham differential d_V from $A^{\infty,*}$ to $A^{-\infty,*}$ (again denoted by d_V) by the same formula (13). The operator d_V also satisfies

$$(d_V\alpha, \beta) + (-1)^{|\alpha|}(\alpha, d_V\beta) = 0.$$

Thus $d_V L^{n-1} \subset L^n_0$ and d_V is an operator of degree 1 on L^*_0. The operator U_V commutes with d_V. Let $k_V = U_V d_V = d_V U_V$. Then, for $\alpha \in L_0$, $\beta \in R_0$,

$$(k_V\alpha, \beta) + (-1)^{|\alpha|}(\alpha, h_V\beta) = 0.$$

Thus, for $\alpha \in L_0$,

$$\alpha = (k_V j_V + j_V k_V)\alpha$$

as follows from the transpose relation $\beta = (h_V j_V + j_V h_V)\beta$.

The complex L^*_0 is thus exact and this implies the proposition. ∎

Let us now consider a Lie group G with Lie algebra $\mathfrak{g}$. Recall the definition of the Koszul differential c_L on the space $T^* = L \otimes \Lambda^* \mathfrak{g}'$ calculating the cohomology of a $\mathfrak{g}$-module L: For $\alpha \in L \otimes \Lambda^p \mathfrak{g}'$, $c_L \alpha \in L \otimes \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}'$ is defined by

(15)
$$(c_L\alpha)(X_1, ..., X_{p+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} X_i \cdot \alpha(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{p+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{p+1}),$$

where $X_1,...,X_{p+1}$ are elements of $\mathfrak{g}$.

Consider $\iota(X) : T^* \to T^{*-1}$, the contraction by an element $X \in \mathfrak{g}$ and $\mathcal{L}(X)$ the action of $\mathfrak{g}$ by tensor product on T. It is not difficult to verify the relation $\mathcal{L}(X) = c_L\iota(X) + \iota(X)c_L$. The space $\Lambda\mathfrak{g}'$ acts by exterior multiplication on T and c_L satisfies the Leibniz's rule: $c_L(\alpha\xi) = c(\alpha)\xi + (-1)^{|\alpha|}\alpha c_L(\xi)$, where c in this formula denotes the Koszul differential of the complex $\Lambda\mathfrak{g}'$ (corresponding to the trivial one dimensional representation L).

Let K be a Lie subgroup of G. Assume that L is a $(\mathfrak{g}, K)$-module. Consider the subspace
$$T_K^* = (L \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})')^K$$
of $L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$. From the relation $\mathcal{L}(X) = c_L\iota(X) + \iota(X)c_L$, it is easy to see that (T_K^*, c_L) is a subcomplex of $(L \otimes \Lambda^*\mathfrak{g}', c_L)$. The cohomology of the subcomplex (T_K^*, c_L) is by definition the relative Lie algebra cohomology $H^*(\mathfrak{g}, K, L)$ of the $(\mathfrak{g}, K)$-module L.

Consider the algebra $D(\mathfrak{g})$ of differential operators on $\mathfrak{g}$ with polynomial coefficients. Then the adjoint action of $\mathfrak{g}$ on $\mathfrak{g}$ determines a Lie algebra homomorphism τ from $\mathfrak{g}$ into $D(\mathfrak{g})$. If L is a $D(\mathfrak{g})$-module, then L is a $\mathfrak{g}$-module, via the adjoint action. Furthermore, as $D(\mathfrak{g})$ contains $S(\mathfrak{g}')$, the module L is a $S(\mathfrak{g}')$-module.

Let e^i be a basis of $\mathfrak{g}$, $e_i \in \mathfrak{g}'$ the dual basis. We consider the element $\Omega = \sum_i e_i\tau(e^i)$ of $D(\mathfrak{g})$

Lemma 25 *The element $\Omega \in D(\mathfrak{g})$ is identically* 0.

Proof: For $X \in \mathfrak{g}$, denote by ∂_X the constant coefficient vector field on $\mathfrak{g}$ equal to X. The adjoint vector field $\tau(e^i)$ is given by: $\tau(e^i) = -\sum_j x_j \partial_{[e^i, e^j]}$ and hence
$$\Omega = -\sum_{i,j} x_i x_j \partial_{[e^i, e^j]}$$
which is equal to zero, as the vector field $-\sum_{i,j} x_i x_j \partial_{[e^i,e^j]}$ is the vector field equal at the point $X \in \mathfrak{g}$ to $[X, X] = 0$. ∎

Let L be a $D(\mathfrak{g})$-module. Consider the space
$$A^* := L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'.$$

As L is a $S(\mathfrak{g}')$-module, we can consider the operator $j = j_L : A^* \to A^{*-1}$ given (as in Formula (12)) by $j = \sum_i e_i \otimes \iota(e^i)$.

On the other hand, the $\mathfrak{g}$-module structure on L gives rise to the Koszul differential $c : L^* \to L^{*+1}$.

Lemma 26 . *Let L be a $D(\mathfrak{g})$-module. The operator $j + c$ satisfies*

$$(j + c)^2 = 0$$

Proof: As $j^2 = 0$, $c^2 = 0$, we have to verify that $jc + cj = 0$. We have, (setting $\iota^i = \iota(e^i)$) and using the Leibniz's rule:

$$jc+cj = \sum_i (e_i\iota^i c + c e_i \iota^i) = \sum_i e_i(\iota^i c + c\iota^i) + \sum_i c(e_i)\iota^i = \sum_i e_i \mathcal{L}(e^i) + \sum_i c(e_i)\iota^i.$$

The action $\mathcal{L}(e^i)$ is by the tensor product action $\tau(e^i) \otimes I + I \otimes \mathcal{L}_\Lambda(e^i)$, where $\mathcal{L}_\Lambda(e^i)$ is the action of $\mathfrak{g}$ on $\Lambda\mathfrak{g}'$ induced from the adjoint representation. Thus, as $\sum_i e_i \tau(e^i) = 0$ from the preceding lemma, it remains to see that $\sum_i e_i \mathcal{L}_\Lambda(e^i)\xi + \sum_i c(e_i)\iota^i\xi = 0$ for $\xi \in \Lambda\mathfrak{g}'$. Writing ξ as a product of elements $\alpha \in \mathfrak{g}'$, it is sufficient to prove this relation for $\xi \in \mathfrak{g}'$ where this is checked easily. ∎

The spaces $L = C^{\pm\infty}(\mathfrak{g})$ have natural $D(\mathfrak{g})$-module structures. Thus on $L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$, the operators j and c are defined and satisfy $(j + c)^2 = 0$. We will see in section 5 that we obtain this example of perturbed Koszul complex when computing the G-equivariant cohomology of a Lie group G provided with the free action of G on itself given by left translation. We compute the cohomology of slightly more complicated complexes in the next section.

4 Induction of equivariant differential complexes

Let (A, d) be a differential complex, i.e. a $\mathbb{Z}/2$-graded vector space over $\mathbb{R}$, with a differential d of odd degree. We will assume that A is a Fréchet space and that d is continuous. (In most of the applications, A will be the space of smooth differential forms on a G-manifold M.) Let G be a Lie group acting on A. We assume that the action of G on A is differentiable. As in H.Cartan [10], we say that (A, d) is a *G-differential complex*, if

1. The action of G preserves the $\mathbb{Z}/2$-grading and commutes with d.

2. There are given continuous contraction operators $\iota(X), X \in \mathfrak{g}$ of odd degree satisfying $\iota(X)\iota(Y) + \iota(Y)\iota(X) = 0$ for all $X, Y \in \mathfrak{g}$ and $g\iota(X)g^{-1} = \iota(gX)$, for all $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$.

3. The Lie derivative action $\mathcal{L}(X)$ of the action of G on A satisfies $\mathcal{L}(X) = d\iota(X) + \iota(X)d$, for all $X \in \mathfrak{g}$.

If A is a G-differential complex, define the space A_{horG} of *G-horizontal* elements to be

$$A_{horG} = \{\alpha \in A; \iota(Y)\alpha = 0, \quad \text{for all Y} \in \mathfrak{g}\}.$$

The space A_{basG} of *G-basic* elements is by definition the space of elements of A which are G-invariant and horizontal:

$$A_{basG} = A^G_{horG}.$$

Remark that the differential d leaves the space A_{basG} stable.

Let (A, d) be a G-differential complex. We call (A, d) a *G-differential algebra* if, in addition, A has a $\mathbb{Z}/2$-graded algebra structure satisfying the following:

1. The action of any $g \in G$ on A is by algebra automorphisms.

2. The operator d and the operators $\iota(X), X \in \mathfrak{g}$, are odd derivations of the algebra A.

If G acts smoothly on a manifold M, then $\mathcal{A}^\bullet(M) = \mathcal{A}^{even}(M) \oplus \mathcal{A}^{odd}(M)$ is a G-differential algebra. If L is a differentiable G-module, the tensor product G-module $L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ together with the Koszul differential c_L and the contraction operators $I \otimes \iota(X)$ is a G-differential complex. In particular, taking L to be the trivial one dimensional G-module, $\Lambda\mathfrak{g}'$ is a G-differential complex, in fact a G-differential algebra.

The tensor product (over $\mathbb{R}$) of two G-differential complexes is canonically a G-differential complex. Thus, for any G- differential complex A, we can form the G-differential complex $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$. We write an element $\alpha \in A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ as $\alpha = \sum_k \alpha_{[k]}$ with $\alpha_{[k]} \in A \otimes \Lambda^k\mathfrak{g}'$. We denote by $r : A \otimes \Lambda\mathfrak{g}' \to A$ the projection of an element $\alpha \in A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ on its component $\alpha_{[0]}$ of exterior degree 0.

Lemma 27 *Let A be a G-differential complex. The map $r : A \otimes \Lambda\mathfrak{g}' \to A$ induces an isomorphism from $(A \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{horG}$ to A.*

Proof: For $X \in \mathfrak{g}$, we denote by $\iota_t(X)$ the tensor product contraction on $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$. If $\alpha \in (A \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{horG}$ is such that $\alpha_{[0]} = 0$, it is easy to see by induction on the exterior degree that $\alpha = 0$. Let us prove that r is surjective: Let E^i be a basis of $\mathfrak{g}$ with dual basis $E_i \in \mathfrak{g}'$. Denote by ϵ_i the exterior multiplication by E_i on $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ from the left. Let $h_i = I - \epsilon_i\iota_t(E^i)$. It is easy to see that the operators

h_i commute with each other. In particular, the operator $h = \prod_i(I - \epsilon_i \iota_t(E^i))$ acting on $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ is well defined, i.e. it does not depend upon the order in which the product is taken. We verify : $\iota_t(E^i)h_i = 0, \iota_t(E^j)h_i = h_i\iota_t(E^j)$ for $i \neq j$. Thus h is a projector from $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ to the set $(A \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{hor_G}$. If $a \in A = A \otimes \Lambda^0\mathfrak{g}'$, the element $h(a) = a - (-1)^{|a|-1}\sum_i \iota(E^i)a \otimes E_i + \cdots$ is a horizontal element of $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ with component of exterior degree 0 equal to a. Thus r is surjective. ∎

Definition 28 *The operator $h := \prod_i(I - \epsilon_i\iota_t(E^i))$ on $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ is called the horizontal projection.*

By the preceding lemma, if $\alpha \in A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$, the element $h(\alpha)$ is the unique horizontal element of $A \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ whose component of exterior degree 0 is $\alpha_{[0]}$.

If (A, d_A) is a G-differential complex, we can define the spaces $\mathcal{A}^{\pm\infty} := C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A)$. We denote both of them by $\mathcal{A}$ when there is no need to indicate precisely the smoothness properties of a function $f : \mathfrak{g} \to A$ that we assume. The space $\mathcal{A}$ inherits a $\mathbb{Z}/2$-graded structure from that of A.

For any $E \in \mathfrak{g}$, the contraction operator $\iota(E)$ is extended to $\mathcal{A}$ pointwise:

$$(\iota(E)f)(X) = \iota(E)(f(X)).$$

Similarly the differential d_A is extended on $\mathcal{A}$ by

$$(d_A f)(X) = d_A(f(X)).$$

Thus we can define on $\mathcal{A}$ the operator

$$\iota_{\mathfrak{g}} = \sum x_i \iota(E^i)$$

i.e. $(\iota_{\mathfrak{g}} f)(X) = \sum_i x_i(\iota(E^i)f(X))$ and the operator

$$d_{\mathfrak{g}} = d_A - \iota_{\mathfrak{g}}.$$

When $\mathfrak{g}$ is understood, we will just write ι for $\iota_{\mathfrak{g}}$. If we take $A = \mathcal{A}(M)$, for a G-manifold M, then $\mathcal{A}^{\pm\infty}$ was introduced in section 2 and $d_{\mathfrak{g}}$ here coincides with the operator $d_{\mathfrak{g}}$ of section 2.

Lemma 29 *The operator $d_{\mathfrak{g}}$ is odd and satisfies $d_{\mathfrak{g}}^2 = 0$ on*

$$\mathcal{A}_G^{\pm\infty} := C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A)^G.$$

More generally if χ is a character of G trivial on its connected component, then

$$(\mathcal{A}_{G,\chi}^{\pm\infty}, d_{\mathfrak{g}}) := (C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A)^\chi, d_{\mathfrak{g}})$$

is a complex, where

$$C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A)^\chi := \{f \in C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A) : g \cdot f = \chi(g)f, \text{ for all } g \in G\}.$$

Proof: It is easy to see that $\iota^2 = 0$. So to prove that $d_{\mathfrak{g}}^2 f = 0$ for $f \in \mathcal{A}_{G,\chi}^{\pm\infty}$, it suffices to show that $(d_A\iota + \iota d_A)f = 0$. Now $((d_A\iota + \iota d_A)f)(X) = \sum_i x_i \mathcal{L}_A(E^i)(f(X))$, where $\mathcal{L}_A(E^i)$ is the Lie derivative action on A of the element $E^i \in \mathfrak{g}$. The invariance condition on an element $f \in C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A)^\chi$ implies that $\mathcal{L}_A(E^i)(f(X)) = \frac{d}{d\epsilon} f(X + \epsilon[E^i, X])$. Thus, for $f \in C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A)^\chi$, we obtain in the notation of Lemma 25 (section 3)

$$((d_A\iota + \iota d_A)f)(X) = \sum_i x_i \frac{d}{d\epsilon} f(X + \epsilon[E^i, X]) = \sum_{i,j} x_i x_j \partial_{[E^i,E^j]} f(X) = 0.$$

∎

Let G be a Lie group and let K be a closed subgroup of G. Let (A, d_A) be a K-differential complex. Let

$$L^{\pm\infty} = C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A).$$

As for $\mathcal{A}$, we denote both of these by L, when there is no need to indicate the precise smoothness assumption. The $\mathbb{Z}/2$-graded structure on A induces a $\mathbb{Z}/2$-structure on L. Consider on L the structure of G-module, defined by $(g \cdot f)(X) = f(g^{-1} \cdot X)$, for $f \in C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A)$. This structure of G-module of course induces a structure of $\mathfrak{g}$-module on differentiation. Thus on $L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$, we can define the Koszul differential c (associated to this $\mathfrak{g}$-module structure on L). However, we take in account sign rules in defining c: c coincides with the Koszul differential $c_{L^{even}}$ (see Formula 15 of section 3) on $L^{even} \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$, while we define $c = -c_{L^{odd}}$ on $L^{odd} \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$.

We extend the operator d_A pointwise on L: $(d_A f)(X) = d_A(f(X))$. We still denote by d_A the operator $d_A \otimes I$ on $L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$.

Let E^i be a basis of $\mathfrak{g}$. We extend the operator $\iota_\Lambda(E^i)$ to $L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ following the sign rules (2), (3) given in section 1.

Consider the operator

$$j = \sum x_i \iota_\Lambda(E^i)$$

on $L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$.

Lemma 30 *The operator $c_{\mathfrak{g}} := d_A + c + j$ satisfies $c_{\mathfrak{g}}^2 = 0$.*

Proof: The $\mathfrak{g}$-module structure on L is induced from its $D(\mathfrak{g})$-module structure via the adjoint representation. It follows from Lemma 26 of section 3 that we have $(c + j)^2 = 0$. Furthermore, as can be easily seen, we have $(c + j)d_A + d_A(c + j) = 0$. ∎

The space L is equipped with the operators still denoted by $\iota_A(E), E \in \mathfrak{k}$, defined pointwise by their action on A.

Total contraction operators $\iota_t(Y), Y \in \mathfrak{k}$, are defined by the tensor product contraction on $L \otimes \Lambda \mathfrak{g}'$. Let us consider the action of K on L by

$$(k \cdot f)(X) = k \cdot f(k^{-1}X)$$

and the action on $L \otimes \Lambda \mathfrak{g}'$ by tensor product. We denote by $\mathcal{L}_t(Y), Y \in \mathfrak{k}$, the corresponding infinitesimal action of $Y \in \mathfrak{k}$.

We define $(L \otimes \Lambda \mathfrak{g}')_{horK} = \{\alpha \in L \otimes \Lambda \mathfrak{g}'; \iota_t(Y)\alpha = 0, \text{for all } Y \in \mathfrak{k}\}$. The subspace $(L\otimes\Lambda\mathfrak{g}')_{basK}$ of K-basic elements is the subspace of elements of $L\otimes\Lambda\mathfrak{g}'$ which are horizontal and invariant under K:

$$(L \otimes \Lambda \mathfrak{g}')_{basK} = ((L \otimes \Lambda \mathfrak{g}')_{horK})^K.$$

Lemma 31 *The operators $c_A := c + d_A$ and j preserve the subspace of K-basic elements.*

Proof: The operator j clearly preserves the space of horizontal elements. It commutes with the action of K, thus it preserves the space of K basic elements.

Using the relation $\iota_t(Y)c_A + c_A\iota_t(Y) = \mathcal{L}_t(Y)$, we see that the space of K-basic elements is stable under c_A. ∎

Definition 32 *Let A be a K-differential complex. Define the induced complex $Ind_{G/K}^{\pm\infty}A$ from K to G of the K-differential complex A to be the space*

$$Ind_{G/K}^{\pm\infty}A = (C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, A) \otimes \Lambda \mathfrak{g}')_{basK}$$

with the differential $c_\mathfrak{g} = c + d_A + j$.

If $(A, d_A) = (\mathbb{R}, 0)$, then $Ind_{G/K}^{\pm\infty}\mathbb{R} = (C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})')^K$ with differential $c_\mathfrak{g} = c + j$, where c is the Koszul differential of the $(\mathfrak{g}, K)$-module $C^{\pm\infty}(\mathfrak{g})$.

Our aim is to compute the cohomology of the complex $(Ind_{G/K}^{\pm\infty}A, c_\mathfrak{g})$ in terms of the cohomology of the complex $(C^{\pm\infty}(\mathfrak{k}, A)^K, d_\mathfrak{k})$.

The cohomology of the complex $Ind_{G/K}^{\infty}A$ is determined in [13]. Recall the results:

Theorem 33 *The restriction map*

$$r_\mathfrak{k} : C^\infty(\mathfrak{g}, A) \otimes \Lambda \mathfrak{g}' \to C^\infty(\mathfrak{k}, A)$$

given by

$$(r_\mathfrak{k}\alpha)(Y) = \alpha(Y) \qquad \text{for } \alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}, A), Y \in \mathfrak{k}$$

$$(r_\mathfrak{k}\alpha) = 0 \qquad \text{if } \alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}, A) \otimes \Lambda^{\geq 1}\mathfrak{g}'$$

defines a cochain map from $(Ind_{G/K}^{\infty}(A), c_\mathfrak{g})$ to $(C^\infty(\mathfrak{k}, A)^K, d_\mathfrak{k})$. Furthermore if the principal bundle $G \to G/K$ possesses a G-invariant connection, then the restriction map $r_\mathfrak{k}$ induces an isomorphism in cohomology.

In particular, if $A = \mathbb{R}$, we obtain a map $r_{\mathfrak{k}} : Ind_{G/K}\mathbb{R} \to C^{\infty}(\mathfrak{k})^K$ and this map is an isomorphism in cohomology when K is compact.

Remark here that the restriction map does not extend to $Ind^{-\infty}_{G/K}(A)$ as generalized functions cannot usually be restricted to a subspace.

The assumption that $G \to G/K$ possesses a G-invariant connection is satisfied for example when K is a reductive Lie group, in particular when K is a compact subgroup.

We now consider $Ind^{-\infty}_{G/K}A$. Let $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. We identify $\mathfrak{r}'$ with $\mathfrak{k}^{\perp} = \{f \in \mathfrak{g}', f|\mathfrak{k} = 0\}$. Let $n = \dim \mathfrak{r}$. Consider the character $\chi_{G/K}(k) = sign(det_{\mathfrak{r}}k)$ of K. As G and K are fixed, we denote $\chi_{G/K}$ simply by χ. Let $\nu' \in \Lambda^n\mathfrak{r}'$ be a nonzero element. The element ν' determines an Euclidean measure $|d\nu'|$ and an orientation o on $\mathfrak{r}$. If dX is an Euclidean measure on $\mathfrak{g}$, we denote by dY the Euclidean measure on $\mathfrak{k}$ such that $dX = |d\nu'|dY$.

Remark that, as $n = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, the space $\Lambda\mathfrak{k}' \otimes \Lambda^n\mathfrak{r}'$ is naturally embedded as a subspace of $\Lambda\mathfrak{g}'$. Consider the horizontal projection operator (see Definition 28) $h_K : A \to (A \otimes \Lambda\mathfrak{k}')_{horK}$. Thus, for $a \in A$, the element $h_K(a) \wedge \nu'$ belongs to $(A \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{horK}$.

Definition 34 *Let $f \in \mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi} := C^{-\infty}(\mathfrak{k}, A)^{\chi}$. Choose ν' a nonzero element of $\Lambda^n\mathfrak{r}'$. We define $Ind_{G/K,\nu'}f \in Ind^{-\infty}_{G/K}A = (C^{-\infty}(\mathfrak{g}, A) \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{basK}$ by*

$$(Ind_{G/K,\nu'}f, \Phi dX) = h_K\Big(\int_{\mathfrak{k}} f(Y)\Phi(Y)dY\Big) \wedge \nu', \text{ for any test function } \Phi \text{ on } \mathfrak{g}$$

(with $dX = dY|d\nu'|$).

It is easy to see that the map $Ind_{G/K,\nu'}$ depends only on the orientation o of $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ determined from ν'. Thus we write $Ind_{G/K,o}$ for $Ind_{G/K,\nu'}$. Remark that the map $Ind_{G/K,o}$ is injective.

Proposition 35 *The map $Ind_{G/K,o}$ is a cochain map of parity degree equal to $\dim G/K$ from the $\mathbb{Z}/2$ -cochain complex $(\mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi}, d_{\mathfrak{k}})$ to the $\mathbb{Z}/2$-cochain complex $(Ind^{-\infty}_{G/K}A, c_{\mathfrak{g}})$.*

Proof: Let $L = C^{-\infty}(\mathfrak{g}, A)$ and let $L^{\det} \subset L$ be the subset of elements $F \in L$ satisfying $k \cdot F = (\det_{\mathfrak{r}}k)F$. If $F \in L$, define $h_K(F) \in L \otimes \Lambda\mathfrak{k}'$ by $h_K(F)(X) = h_K(F(X))$. The map $F \to h_K(F)\wedge\nu'$ sends L to $(L\otimes\Lambda\mathfrak{k}')_{horK}\wedge\nu'$. It sends $L^{\det}$ to $(L \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{basK} = Ind^{-\infty}_{G/K}A$.

Lemma 36 *For every $F \in L^{\det}$, we have $c_A(h_K F \wedge \nu') = h_K(d_A F) \wedge \nu'$, where c_A is the operator on $Ind^{-\infty}_{G/K}A$ defined in Lemma 31.*

Proof: We compute $c_A(h_K(F) \wedge \nu')$ for $F \in L^{\det}$. Let K^i be a basis of $\mathfrak{k}$ with dual basis K_i. It is easy to see that $c(\nu') = -\sum_i (Tr\,(ad_{\mathfrak{r}} K^i))K_i \wedge \nu'$. Thus, by Leibniz's rule,

$$c_A(h_K(F) \wedge \nu') \in L \otimes (\Lambda\mathfrak{g}' \wedge \nu') = L \otimes (\Lambda\mathfrak{k}' \wedge \nu').$$

As c_A preserves K-basic elements (cf. Lemma 31), $c_A(h_K(F) \wedge \nu')$ is K-basic, in particular is horizontal. The space $(L \otimes (\Lambda\mathfrak{g}' \wedge \nu'))_{horK}$ is isomorphic with L by the map $\alpha \wedge \nu' \to \alpha_{[0]} \in L$ for $\alpha \in L \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$, where $\alpha_{[0]}$ is the component of α in the zeroth exterior degree. Thus, if $c_A(h_K(F) \wedge \nu') = G \wedge \nu'$, then $c_A(h_K(F) \wedge \nu') = h_K(G_{[0]}) \wedge \nu'$.

We have $G = d_A(h_K(F)) + c(h_K F) + (-1)^{|F|+1} h_K F \wedge \sum_i (Trad_{\mathfrak{r}} K^i)K_i$. Looking at the term of zeroth-exterior degree, it follows that $G_{[0]} = d_A F$. This proves the lemma. ∎

For $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k}, A)^\chi$, the element $F \in C^{-\infty}(\mathfrak{g}, A)$ defined by $(F, \Phi dX) = \int_{\mathfrak{k}} f(Y)\Phi(Y)dY$ belongs to $L^{\det}$ and $Ind_{G/K,o} f = h_K(F) \wedge \nu'$. The preceding lemma implies $c_A Ind_{G/K,o} f = Ind_{G/K,o} d_A f$. Proposition 35 is now a consequence of the following

Lemma 37

$$j(Ind_{G/K,o} f) = -Ind_{G/K,o}(\iota_{\mathfrak{k}} f).$$

Proof: Let E^i be a basis of $\mathfrak{g}$ such that the first elements form a basis of $\mathfrak{k}$. Let E_i be the dual basis. Then the last n coordinates x_i vanish on $\mathfrak{k}$. We denote by $y_i, 1 \le i \le \dim \mathfrak{k}$ the coordinates on $\mathfrak{k}$ corresponding to the basis of $\mathfrak{k}'$ dual to the basis E^i of $\mathfrak{k}$. We have then

$$(j(Ind_{G/K,o} f), \Phi dX) = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{k}} (\iota_\Lambda(E^i) h_K(\int_{\mathfrak{k}} f(Y) y_i \Phi(Y)dY)) \wedge \nu'.$$

As h_K is a projector on the K-horizontal elements for the tensor product contraction, it satisfies for $E^i \in \mathfrak{k}$ and $a \in A$, $\iota_\Lambda(E^i)(h_K a) + \iota_A(E^i)(h_K a) = 0$. But $\iota_A(E^i) h_K = h_K \iota_A(E^i)$, and we obtain the lemma. ∎

The proof of this lemma completes the proof of Proposition 35. ∎

If A is a K-differential algebra, then $C^{-\infty}(\mathfrak{k}, A)^\chi$ is a module over $C^\infty(\mathfrak{k}, A)^K$. Similarly $Ind^{-\infty}_{G/K} A$ is a module over $Ind^\infty_{G/K} A$. Remark the following relation between the maps $r_{\mathfrak{k}}$ and $Ind_{G/K,o}$

Lemma 38 *If $\alpha \in Ind^\infty_{G/K} A$ and $s \in C^{-\infty}(\mathfrak{k}, A)^\chi$, then*

$$\alpha Ind_{G/K,o} s = Ind_{G/K,o}((r_{\mathfrak{k}} \alpha) s).$$

The main result of this section is the following

Theorem 39 *Assume that the group K is compact. Then the map $Ind_{G/K,o}$: $(\mathcal{A}^{-\infty}_{K,X}, d_{\mathfrak{k}}) \to (Ind^{-\infty}_{G/K}A, c_{\mathfrak{g}})$ induces an isomorphism in cohomology.*

Proof: We can choose a K-invariant decomposition:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}.$$

To this direct sum decomposition is associated the tensor product decomposition $\Lambda\mathfrak{g}' = \Lambda\mathfrak{k}' \otimes \Lambda\mathfrak{r}'$.

Let $h_K : L \to L \otimes \Lambda\mathfrak{k}'$ be the projection on K-horizontal vectors for the tensor product contraction (see definition 28). The map

$$W(v \otimes \xi) = h_K(v) \wedge \xi$$

for $v \in L$ and $\xi \in \Lambda\mathfrak{r}'$ is an isomorphism from the space $L \otimes \Lambda\mathfrak{r}'$ to the space $(L \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{horK}$. The map W commutes with the action of K and allows us to identify the space

$$T_K := (L \otimes \Lambda\mathfrak{r}')^K$$

with the space

$$Ind^{-\infty}_{G/K}A = (C^{-\infty}(\mathfrak{g}, A) \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{basK}.$$

On the space T_K, we will use the $\mathbb{Z}_+$-gradation given by the exterior degree $T_K = \oplus_{p=0}^{n} T_K^p = \oplus_{p=0}^{n}(L \otimes \Lambda^p\mathfrak{r}')^K$.

Let R^i be a basis of $\mathfrak{r}$ with dual basis R_i and let K^j be a basis of $\mathfrak{k}$ with dual basis K_j. We write $X \in \mathfrak{g}$ as $X = Y + R$, with $R = \sum_i x_i R^i$, $Y = \sum_j y_j K^j$.

The operator $\iota_{\mathfrak{k}} = \sum_j y_j \iota_A(K^j)$ is defined on $L = C^{-\infty}(\mathfrak{g}, A)$. Let $j_{\mathfrak{r}}$: $L \otimes \Lambda^*\mathfrak{r}' \to L \otimes \Lambda^{*-1}\mathfrak{r}'$ be given by $j_{\mathfrak{r}} = \sum_i x_i \iota_\Lambda(R^i)$. It is easy to see that $\iota_{\mathfrak{k}}$ and $j_{\mathfrak{r}}$ commute with the action of K on $L \otimes \Lambda\mathfrak{r}'$.

Lemma 40 *For all $\alpha \in L \otimes \Lambda\mathfrak{r}'$,*

$$jW(\alpha) = W(j_{\mathfrak{r}}\alpha - \iota_{\mathfrak{k}}\alpha).$$

Proof: We have, for $v \in L$ and $\xi \in \Lambda\mathfrak{r}'$,

$$j(h_K v \wedge \xi) = \sum_i x_i \iota_\Lambda(R^i)(h_K v \wedge \xi) + \sum_j y_j(\iota_\Lambda(K^j) h_K(v)) \wedge \xi.$$

Further, for $K^j \in \mathfrak{k}$, $\iota_\Lambda(K^j) h_K(v) + h_K(\iota_A(K^j)v) = 0$, and we obtain the lemma. ∎

Lemma 41 *If $\alpha \in T_K^p$, then $W^{-1} c_A W(\alpha) \in T_K^p \oplus T_K^{p+1} \oplus T_K^{p+2}$.*

Proof: This is obvious since, $\mathfrak{k}$ being a subalgebra, $c(\Lambda^q\mathfrak{k}' \otimes \Lambda^p\mathfrak{r}') \subset (\Lambda^{q+1}\mathfrak{k}' \otimes \Lambda^p\mathfrak{r}') \oplus (\Lambda^q\mathfrak{k}' \otimes \Lambda^{p+1}\mathfrak{r}') \oplus (\Lambda^{q-1}\mathfrak{k}' \otimes \Lambda^{p+2}\mathfrak{r}')$. ∎

Let us now prove Theorem 39. By the map W, we identify $Ind^{-\infty}_{G/K}A$ with T_K and write still $c_\mathfrak{g}$ for the operator $W^{-1}c_\mathfrak{g}W$ on T_K. As we have seen in Proposition 22 and Remark 23 (of section 3), the homology groups of the operator $j_\mathfrak{r} : T_K^* \to T_K^{*-1}$ are equal to zero except in maximal degree $n = \dim \mathfrak{r}$. Furthermore, if $\alpha \in T_K^n$ is such that $j_\mathfrak{r}\alpha = 0$, then $\alpha = \delta_{\mathfrak{r},o}(x) \otimes f(y)$ for some $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k}, A)^\chi$ by Lemma 21 and Remark 23 (of section 3). But then, by definition of $Ind_{G/K,o}$, we obtain $\alpha = Ind_{G/K,o}f$.

Now, if $\alpha \in T_K^n$ is such that $c_\mathfrak{g}\alpha = 0$, writing this equation componentwise, we see that α satisfies the relation $j_\mathfrak{r}\alpha = 0$. Thus α is of the form $Ind_{G/K,o}f$. As $c_\mathfrak{g}Ind_{G/K,o}f = Ind_{G/K,o}d_\mathfrak{k}f$ (by Proposition 35), we see that $f \in Kerd_\mathfrak{k}$, since $Ind_{G/K,o}$ is an injective map. Consider now an element $\alpha = \sum_{k\geq k_0}\alpha_{[k]}$ in the kernel of $c_\mathfrak{g}$. From the degree consideration, we see that its component of minimal exterior degree k_0 is annihilated by $j_\mathfrak{r}$. If k_0 is less than n, there exists an element $\beta \in T_K^{k_0+1}$ such that $\alpha_{[k_0]} = j_\mathfrak{r}\beta$. The element $\alpha - c_\mathfrak{g}\beta$ is in the same cohomology class as α and all its non-zero exterior degree components are of degree strictly greater than k_0. By induction, α has a representative in T_K^n and we see that the map $Ind_{G/K,o}$ is surjective in cohomology.

Suppose now that $Ind_{G/K,o}f = c_\mathfrak{g}\beta$ with $\beta = \sum_{k\geq k_0}\beta_{[k]}$. Writing this equation component wise, we see that $j_\mathfrak{r}\beta_{[k_0]} = 0$. If $k_0 < n$, changing β to $\beta' = \beta - c_\mathfrak{g}\gamma$ with $\gamma \in T_K^{k_0+1}$ and $j_\mathfrak{r}\gamma = \beta_{[k_0]}$, we still have $Ind_{G/K,o}f = c_\mathfrak{g}\beta'$. By choice, $\beta' = \sum_{k>k_0}\beta'_{[k]}$. Hence, by induction, we obtain an element $\tilde{\beta} \in T_K^n$ such that $Ind_{G/K,o}f = c_\mathfrak{g}\tilde{\beta}$. From degree consideration, $j_\mathfrak{r}\tilde{\beta} = 0$. But then $\tilde{\beta} = Ind_{G/K,o}g$ for some $g \in C^{-\infty}(\mathfrak{k}, A)^\chi$. The equation $c_\mathfrak{g}Ind_{G/K,o}g = Ind_{G/K,o}f$ reads as $Ind_{G/K,o}d_\mathfrak{k}g = Ind_{G/K,o}f$. But $Ind_{G/K,o}$ being an injective map, we get $d_\mathfrak{k}g = f$. This proves that the map $Ind_{G/K,o}$ is injective in cohomology, thereby completing the proof of Theorem 39. ∎

As a particular case, if K is compact and if $(A, d_A) = (\mathbb{R}, 0)$, we obtain that the map $Ind_{G/K,o}$ induces an isomorphism from $C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$ to the cohomology of the complex $((C^{-\infty}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})')^K, j + c)$.

We apply these calculations in the next section to the calculation of the equivariant cohomology of fiber bundles over homogeneous spaces.

5 Equivariant cohomology of homogeneous spaces

Let G be a Lie group and let K be a closed subgroup of G. Let $D = G/K$. Let $e \in D$ be the base point of D. We identify the tangent space of G at a point $g \in G$ with $\mathfrak{g}$ by sending $X \in \mathfrak{g}$ to the tangent vector to the curve

$g \exp \epsilon X$ in G. Let $n = \dim D$. Let $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. The tangent space $T_e D$ at $e \in D$ is identified with $\mathfrak{r}$. If $g \in G$, we again denote by L_g the map $T_e D \to T_{g\cdot e} D$ induced from the left multiplication map $L_g : D \to D$. For $\alpha \in C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(D)) := \sum_{p=0}^{\dim D} C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}^p(D))$, $\alpha_{[p]}$ is the p-th component of α. If $x \in D$ and $\xi_1, \cdots, \xi_p \in T_x D$, then $(\alpha_{[p]})_x(\xi_1, \cdots, \xi_p)$ is a function (maybe generalized) on $\mathfrak{g}$ given by $X \mapsto (\alpha_{[p]}(X))_x(\xi_1, \cdots, \xi_p)$.

Let $\alpha \in \mathcal{A}_G^{\pm\infty}(D) = C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(D))^G$. Let $R^1, .., R^p \in \mathfrak{r}$, $X \in \mathfrak{g}$ and $g \in G$. As α iz an equivariant form

$$\alpha_{[p]}(Ad(g)(X))_{g\cdot e}(L_g R^1, \ldots, L_g R^p) = \alpha_{[p]}(X)_e(R^1, ..., R^p).$$

Let $\tilde{\alpha}(X) = \alpha(X)_e$. Thus $\tilde{\alpha}$ is a function on $\mathfrak{g}$ with values in $\Lambda\mathfrak{r}'$ and the map $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ is an isomorphism from the space $\mathcal{A}_G^{\pm\infty}(D)$ to the space $T_K = (C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{r}')^K$, where the action of K on both $C^{\pm\infty}(\mathfrak{g})$ and $\Lambda\mathfrak{r}'$ is induced from the adjoint representation.

Let R^i be a basis of $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, with dual basis $R_i \in \mathfrak{r}'$. Let $x_i = R_i(X)$. Let $j_\mathfrak{r}$ be the operator on T_K given by

$$j_\mathfrak{r} = \sum_i x_i \iota_\Lambda(R^i).$$

Let c be the Koszul differential on T_K (see Formula 15 of section 3). From [13], we have

Lemma 42 *For $\alpha \in \mathcal{A}_G^{\pm\infty}(D)$, we have $\widetilde{(d_\mathfrak{g}\alpha)} = (c + j_\mathfrak{r})\tilde{\alpha}$.*

For example, the complex $\mathcal{A}_G^{-\infty}(G)$ becomes isomorphic, under evaluation at e, to $C^{-\infty}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{g}'$ and the differential $d_\mathfrak{g}$ becomes the perturbed differential $c + j$.

In the notation of the preceeding section, if $(A, d_A) = (\mathbb{R}, 0)$, we have $\mathcal{A}_G^{\pm\infty}(D) \cong Ind_{G/K}^{\pm\infty}(\mathbb{R})$, as cochain complexes.

Let $\chi_{G/K}(k) := sign(det_\mathfrak{r} k)$. As G and K are fixed in this section, we denote $\chi_{G/K}$ by χ. Recall the definition (see Theorem 33 and Definition 34 of section 4) of the maps

$$r_\mathfrak{k} : Ind_{G/K}^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathfrak{k})^K$$

and

$$Ind_{G/K,o} : C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi \to Ind_{G/K}^{-\infty}(\mathbb{R}).$$

Using the identification $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$, we get maps again denoted by $r_\mathfrak{k}$ and $Ind_{G/K,o}$:

$$r_\mathfrak{k} : \mathcal{A}_G^{\infty}(D) \to C^\infty(\mathfrak{k})^K$$

and

$$Ind_{G/K,o} : C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(D).$$

Let us describe explicitly these maps.

The point e is a K-stable submanifold of D. The successive restriction maps $\mathcal{A}_G^\infty(D) \to \mathcal{A}_K^\infty(D) \to \mathcal{A}_K^\infty(e)$ are well defined. The composed map $\mathcal{A}_G^\infty(D) \to \mathcal{A}_K^\infty(e) = C^\infty(\mathfrak{k})^K$ coincides obviously with the map $r_\mathfrak{k}$:

$$(r_\mathfrak{k}\alpha)(Y) = (\alpha_{[0]})_e(Y)$$

for $Y \in \mathfrak{k}$.

We now describe the map $Ind_{G/K,o}$ from $C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$ to $\mathcal{A}_G^{-\infty}(G/K)$. Let $\nu' \in \Lambda^n\mathfrak{r}'$ be a non-zero element. The element ν' determines an orientation o and an Euclidean measure $|d\nu'|$ on $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. If dX is an Euclidean measure on $\mathfrak{g}$, we denote by dY the Euclidean measure on $\mathfrak{k}$ such that $dX = |d\nu'|dY$.

We identify the space $\mathcal{A}(G/K)$ with $C^\infty(G, \Lambda\mathfrak{r}')^K$.

Proposition 43 *The map $Ind_{G/K,o} : C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(G/K)$ is given, for $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$, by*

$$(16) \qquad \left(\int_\mathfrak{g}(Ind_{G/K,o}f)(X)\phi(X)dX\right)(g) = |det_\mathfrak{g}(g)|\left(\int_\mathfrak{k} f(Y)\phi(gY)dY\right)\nu',$$

where ϕ is any test function on $\mathfrak{g}$ and $g \in G$.

Moreover, for any $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$, the equivariant form $Ind_{G/K,o}(f)$ is $d_\mathfrak{g}$-closed.

Proof: It is easy to verify that $Ind_{G/K,o}f$ defined by the Formula 16 is indeed an element of $\mathcal{A}_G^{-\infty}(D)$. It obviously coincides with the map given in Definition 34 of section 4 (denoted also by $Ind_{G/K,o}$) at $g = e$. The fact that $Ind_{G/K,o}f$ is $d_\mathfrak{g}$ closed follows from Proposition 35 of section 4. It is also easy to check it directly. ∎

Assume that G/K is compact and G-oriented. Thus $\chi = 1$. We can integrate over G/K an equivariant cohomology class and we obtain then a G-invariant generalized function on $\mathfrak{g}$. The next formula is just the integration over G/K of the formula given in Proposition 43 for $Ind_{G/K,o}f$. However, it indicates the analogy between $\int_{G/K} Ind_{G/K,o}f$ and characters of induced representations.

Proposition 44 *Assume G/K compact and G-oriented. Let $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$. Then*

$$\int_{G/K,o}(Ind_{G/K,o}f, \Phi dX) = \int_{G/K,o} |\det{}_\mathfrak{g}(g)|\left(\int_\mathfrak{k} f(Y)\Phi(gY)dY\right)dg/dk.$$

for any test function Φ on $\mathfrak{g}$ and compatible choices of the left-invariant Haar measure dg on G, of the G-invariant measure dg/dk on G/K and of the Euclidean measure dY on $\mathfrak{k}$.

We still denote by $r_{\mathfrak{k}}$ the map $H_G^\infty(G/K) \to C^\infty(\mathfrak{k})^K$ induced from the map $r_{\mathfrak{k}}$ at the cohomology level and by $Ind_{G/K,o}$ the map $C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi \to H_G^{-\infty}(G/K)$ induced from the map $Ind_{G/K,o}$ at the cohomology level.

As a particular case of [13] (see Theorem 33 of section 4), we have the following

Proposition 45 *Assume that K is compact. Then the map $r_{\mathfrak{k}}$ gives an isomorphism from $H_G^\infty(G/K)$ with $C^\infty(\mathfrak{k})^K$.*

Further Theorem 39 of section 4 gives as an immediate corollary the following

Theorem 46 *Assume that K is compact. Then the map $Ind_{G/K,o}$ gives an isomorphism from $C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$ with $H_G^{-\infty}(G/K)$. The map $Ind_{G/K,o}$ is of even (resp. odd) degree if* $\dim G/K$ *is even (resp. odd).*

When K is compact, let us give a formula for the map $Ind_{G/K,o}$ in terms of generalized functions.

Choose a K-invariant decomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$$

and let $pr_{\mathfrak{k}}$ (resp. $pr_{\mathfrak{r}}$) be the projection of $\mathfrak{g}$ on $\mathfrak{k}$ (resp. on $\mathfrak{r}$) determined by this decomposition.

With the notation of Formula 10 of section 2, we have (by Proposition 43), for $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$,

$$(Ind_{G/K,o} f(X))(e) = |\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{r}}(pr_{\mathfrak{r}}X) f(pr_{\mathfrak{k}}X)\nu', \tag{17}$$

where we have identified the space $\mathcal{A}(G/K)$ with $C^\infty(G, \Lambda\mathfrak{r}')^K$.

Consider the case where K is the trivial subgroup. Recall that we have defined the element

$$\alpha_{G,o}(X) = |\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{g}}(X) \otimes |\det_{\mathfrak{g}} g| dg$$

in Lemma 13 of section 2. From Formula 17, we see that it is also equal to the element $Ind_{G,o}1$. Thus we obtain from Theorem 46:

Lemma 47 *Let G be a Lie group acting on itself by left translations, then*

$$H_G^{-\infty}(G) \cong \mathbb{R}\alpha_{G,o}.$$

A more general result is proved in Theorem 89 in section 9.

Now we are going to generalize Proposition 45 and Theorem 46 as follows. Let M be a K-manifold. Consider the product manifold $G \times M$. The group K acts freely on the right on $G \times M$ by $(g, m)k = (gk, k^{-1}m)$. Consider the fiber space $\mathcal{M} = G \times_K M$ of orbits of the K-action. The group G acts on the left on $\mathcal{M}$. When M is a point, the space $\mathcal{M}$ is $D = G/K$. The projection $(g, m) \mapsto g$ induces a map $\mathcal{M} \to D$. Thus the space $\mathcal{M}$ is a fiber space over D with fiber M.

If $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}(G \times M)$, and $g \in G$, then $\alpha(g)$ is an element of $(\Lambda\mathfrak{g}' \otimes \mathcal{A}(M))_{horK}$, where $\mathfrak{g}'$ is identified with left invariant 1-forms on G.

Thus

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) = C^\infty(G, (\Lambda\mathfrak{g}' \otimes \mathcal{A}(M))_{horK})^K$$

where K-invariants are taken with respect to the action of K by right multiplication on G, left action on M and adjoint action on $\Lambda\mathfrak{g}'$.

If $\alpha(X) \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$, then $\tilde{\alpha}(X) := \alpha(X)_e \in (\Lambda\mathfrak{g}' \otimes \mathcal{A}(M))_{horK}$.

By G-invariance, the space $\mathcal{A}_G^{\pm\infty}(\mathcal{M})$ is thus identified with

$$Ind_{G/K}^{\pm\infty}(\mathcal{A}(M)) := (C^{\pm\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M)) \otimes \Lambda\mathfrak{g}')_{basK}.$$

Let $A = \mathcal{A}(M)$ be our K-differential complex, then $Ind_{G/K}^{\pm\infty}(A)$ is provided with a differential $c_\mathfrak{g}$. As before, the map $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ is an isomorphism from $\mathcal{A}_G^{\pm\infty}(G \times_K M)$ to $Ind_{G/K}^{\pm\infty}(A)$ and the following lemma ([13]) iz a generalization of Lemma 42.

Lemma 48 *For any $\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{M})$,*

$$\widetilde{d_\mathfrak{g}\alpha} = c_\mathfrak{g}\tilde{\alpha}.$$

Thus $(\mathcal{A}_G^{\pm\infty}(\mathcal{M}), d_\mathfrak{g})$ is identified with the complex $(Ind_{G/K}^{\pm\infty}(\mathcal{A}(M)), c_\mathfrak{g})$ of section 4. The complex $(C^\infty(\mathfrak{k}, A)^K, d_\mathfrak{k})$ defined in section 4 is the complex $(\mathcal{A}_K^\infty(M), d_\mathfrak{k})$ of the K-equivariant cohomology of M. As χ is trivial on the connected component of K, the operator $d_\mathfrak{k}$ on $C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))^\chi$ still satisfies $d_\mathfrak{k}^2 = 0$, as follows from Lemma 29 of section 4.

Definition 49 *Let us denote by $\mathcal{A}_{K,\chi}^{-\infty}(M)$ the space $C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))^\chi$. We define $H_{K,\chi}^{-\infty}(M)$ to be the cohomology of the complex $(C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))^\chi, d_\mathfrak{k})$.*

Recall the definition of the maps

$$r_\mathfrak{k} : Ind_{G/K}^\infty(\mathcal{A}(M)) \to \mathcal{A}_K^\infty(M)$$

and

$$Ind_{G/K,o} : \mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi}(M) \to Ind^{-\infty}_{G/K}(\mathcal{A}(M))$$

from section 4. Using the identification $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$, we get maps again denoted by $r_{\mathfrak{k}}$ and $Ind_{G/K,o}$:

$$r_{\mathfrak{k}} : \mathcal{A}^{\infty}_{G}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{\infty}_{K}(M)$$

and

$$Ind_{G/K,o} : \mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi}(M) \to \mathcal{A}^{-\infty}_{G}(\mathcal{M}).$$

Let us describe explicitly these maps.

The fiber of $\mathcal{M} \to D$ over the point $e \in D$ is canonically identified with M and is a K-stable submanifold of $\mathcal{M}$. The successive restriction maps $\mathcal{A}^{\infty}_{G}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{\infty}_{K}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{\infty}_{K}(M)$ are well defined. Obviously, the composed map $\mathcal{A}^{\infty}_{G}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}^{\infty}_{K}(M)$ coincides with the map $r_{\mathfrak{k}}$.

The following proposition gives an explicit description of the map $Ind_{G/K,o}$ generalizing Proposition 43, whose proof is identical (and hence is omitted).

Proposition 50 *For any $f \in \mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi}(M)$, $Ind_{G/K,o}f \in \mathcal{A}^{-\infty}_{G}(\mathcal{M})$ is given by*

$$(Ind_{G/K,o}f, \Phi dX)(g) = |det_{\mathfrak{g}} g| h_K\left(\int_{\mathfrak{k}} f(Y)\Phi(gY)dY\right) \wedge \nu'$$

where Φ is any test function on $\mathfrak{g}$ and $dX = dY|d\nu'|$.

We still denote by $r_{\mathfrak{k}}$ the map from $H^{\infty}_{G}(\mathcal{M})$ to $H^{\infty}_{K}(M)$ induced from the map $r_{\mathfrak{k}}$ at the cohomology level. As a generalization of Proposition 45, we have the following Theorem ([13]), (got from Theorem 33 of section 4):

Theorem 51 *Let K be a compact subgroup of a Lie group G and let M be a K-manifold. Then the map $r_{\mathfrak{k}}$ gives an isomorphism from $H^{\infty}_{G}(\mathcal{M})$ with $H^{\infty}_{K}(M)$.*

We still denote by $Ind_{G/K,o}$ the map from $H^{-\infty}_{K,\chi}(M)$ to $H^{-\infty}_{G}(G \times_K M)$ induced from the map $Ind_{G/K,o}$ at the cohomology level. As a corollary of Theorem 39 of section 4, we get the main result of this section which generalizes Theorem 46.

Theorem 52 *Let K be a compact subgroup of a Lie group G and let M be a K-manifold. Then the map $Ind_{G/K,o}$ gives an isomorphism in cohomology from $H^{-\infty}_{K,\chi}(M)$ to $H^{-\infty}_{G}(G \times_K M)$. This map is of even (resp. odd) degree, if $\dim(G/K)$ is even (resp. odd).*

When K is compact, let us write the map $Ind_{G/K,o}$ in terms of generalized functions. We identify $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ with the subspace of K-basic elements of $\mathcal{A}(G \times M)$.

Choose a K-invariant decomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$$

and let $pr_{\mathfrak{k}}$ (resp. $pr_{\mathfrak{r}}$) be the projection of $\mathfrak{g}$ on $\mathfrak{k}$ (resp. on $\mathfrak{r}$) determined by this decomposition. Let $\nu' \in \Lambda^n \mathfrak{r}'$ be a positive element. With the help of the decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$, we consider ν' as an element of $\Lambda^n \mathfrak{g}'$. With the notation of Formula 10 of section 2, we have by Proposition 50, for any $m \in M$ and $f \in \mathcal{A}^{-\infty}_{K,\chi}(M)$,

$$((Ind_{G/K,o} f)(X))_{(e,m)} = |\nu'|^{-1} \delta_{\mathfrak{r}}(pr_{\mathfrak{r}} X)(h_K(f(pr_{\mathfrak{k}} X)))_m \wedge \nu'. \tag{18}$$

Assume that K is compact. Choose an orientation o on $\mathfrak{r}$. Then there are canonical isomorphisms

$$r_{\mathfrak{k}} : H^{\infty}_G(G/K) \cong C^{\infty}(\mathfrak{k})^K$$

and

$$Ind_{G/K,o} : C^{-\infty}(\mathfrak{k})^{\chi} \cong H^{-\infty}_G(G/K)$$

guaranteed by Proposition 45 and Theorem 46 respectively.

The natural map $H^{\infty}_G(G/K) \to H^{-\infty}_G(G/K)$ thus gives rise (using the above two identifications) to a map

$$M_o : C^{\infty}(\mathfrak{k})^K \to C^{-\infty}(\mathfrak{k})^{\chi}.$$

Comparing the $\mathbb{Z}/2$ degree of the maps, we see that this map is identically zero if G/K is not of even dimension. The orientation o determines a polynomial square root $Y \mapsto det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o}(Y)$ of the polynomial function $Y \mapsto det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(Y)$ on $\mathfrak{k}$. The normalization of this square root is as in ([12], Formula 12).

Proposition 53 *If $f \in C^{\infty}(\mathfrak{k})^K$, then*

$$M_o(f)(Y) = (-2\pi)^{\dim(G/K)/2} det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o}(Y) f(Y)$$

for $Y \in \mathfrak{k}$.

(If $\dim G/K$ is odd, then the function $det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$ is identically 0.)

Proof: The map M_o is a morphism of $C^{\infty}(\mathfrak{k})^K$-modules by Lemma 38 of section 4. It is thus sufficient to prove that

$$1 \cong Ind_{G/K,o}((-2\pi)^{\dim(G/K)/2} det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o})$$

in $H_G^{-\infty}(G/K)$.

We will prove this relation using the method of the proof of Proposition 31 of [12]. As K is compact, we can choose a G-invariant metric $<.,.>$ on $D = G/K$. Let $X \in \mathfrak{g}$. Let $\omega(X)$ be the 1-form on D given by $\omega(X)(\xi) = < X_D, \xi >$ for any vector field ξ on D. We denote by ω the G-equivariant form on D given by $X \mapsto \omega(X)$. We have

$$\frac{d}{dt}(e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}) = d_{\mathfrak{g}}(\omega e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}).$$

Integrating this relation from $t = 0$ to T, we obtain

$$e^{Td_{\mathfrak{g}}\omega} - 1 = d_{\mathfrak{g}}(\int_0^T \omega e^{td_{\mathfrak{g}}\omega} dt).$$

Let $n = \dim G/K$. Let us show that, when $T \to \infty$, the form $e^{Td_{\mathfrak{g}}\omega}$ tends to $Ind_{G/K,o}((-2\pi)^{n/2} det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o})$ in $\mathcal{A}_G^{-\infty}(D)$ while $\alpha(T) = \int_0^T \omega e^{td_{\mathfrak{g}}\omega} dt$ also has a limit in the space $\mathcal{A}_G^{-\infty}(D)$.

By G-invariance, it is sufficient to compute at the base point $e \in G/K$. Choose a K-invariant decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$ (as in the proof of Theorem 52). The elements $e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}$ and $\omega e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}$ evaluated at the base point e are elements of $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{r}'$. The G-invariant Riemannian metric on D gives us a K-invariant scalar product $<.,.>$ on $\mathfrak{r}$. We choose an oriented orthonormal basis E^a of $\mathfrak{r}$ with dual basis $E_a \in \mathfrak{r}'$. Let us write any $X \in \mathfrak{g}$ as $X = X_0 + X_1$ with $X_0 \in \mathfrak{k}$ and $X_1 \in \mathfrak{r}$. We write $X_1 \in \mathfrak{r}$ as $X_1 = \sum_a x_a(X) E^a$. The function $X \mapsto x_a(X)$ is a linear function on $\mathfrak{g}$. Let E_I be the homogeneous basis of $\Lambda\mathfrak{r}'$ indexed by subsets I of $\{1, 2, ..., n\}$. In particular, $E_{\{1,2,\dots,n\}} = E_1 \wedge \cdots \wedge E_n$. Then $\omega_e \in C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{r}'$ is given by the formula $\omega_e = -\sum_a x_a \otimes E_a$. We compute $d_{\mathfrak{g}}\omega$ using Lemma 42 of Section 5. For any $X \in \mathfrak{g}$, we have $j_{\mathfrak{r}}(\omega_e)(X) = \|X_1\|^2$ and $c(\omega_e)(X) = \kappa(X)$ where $\kappa(X)$ is the element of $\Lambda^2\mathfrak{r}'$ given by

$$\kappa(X)(v, v') = < [v, X]_1, v' > - < [v', X]_1, v > + < X_1, [v, v'] > .$$

In particular, if $X_0 \in \mathfrak{k}$, $\kappa(X_0)(v, v') = -2 < (ad_{\mathfrak{r}} X_0) \cdot v, v' >$. We write $f(t) = (e^{td_{\mathfrak{g}}\omega})_e$. We have

$$f(t, X_0, X_1) = e^{-t\|X_1\|^2} \sum_I P_I(X_0, X_1) t^{|I|/2} E_I$$

where P_I is a homogeneous polynomial of degree $|I|/2$ on $\mathfrak{g}$. It is easy to see that $P_{\{1,2,\dots,n\}}(X_0) = (-2)^{n/2} det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o}(X_0)$. Let us show that $f(t, X_0, X_1)$ has a limit when $t \to \infty$, as a generalised function on $\mathfrak{g}$ with values in $\Lambda\mathfrak{r}'$. For a test function ϕ on $\mathfrak{g}$

$$\int_{\mathfrak{g}} f(t, X)\phi(X) dX = \sum_I \left(\int_{\mathfrak{g}} e^{-t\|X_1\|^2} t^{|I|/2} P_I(X_0, X_1) \phi(X_0, X_1) dX_0 dX_1 \right) E_I.$$

The change of variable $X_1 \mapsto t^{-1/2}X_1$ shows that this is also equal to:

$$\sum_I t^{|I|/2-n/2}\left(\int_{\mathfrak{g}} e^{-\|X_1\|^2}P_I(X_0,t^{-1/2}X_1)\phi(X_0,t^{-1/2}X_1)dX_0dX_1\right)E_I.$$

Thus the limit when $t\to\infty$ of $\int_{\mathfrak{g}} f(t,X)\phi(X)dX \in \Lambda\mathfrak{r}'$ exists. Furthermore, when $t\to\infty$, the coefficient of E_I tends to zero except when $I=\{1,2,...n\}$, and the coefficient of $E_{\{1,2,\ldots,n\}}$ tends to $\int_{\mathfrak{g}} e^{-\|X_1\|^2}P_{\{1,2,\ldots,n\}}(X_0,0)\phi(X_0,0)dX_0dX_1$. Computing the constants, we obtain that the form $e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}$ tends to

$$Ind_{G/K,o}((-2\pi)^{\dim(G/K)/2}det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o})$$

when $t\to\infty$.

It remains to show that $\alpha(T)=\int_0^T \omega e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}dt$ also has a limit in the space $\mathcal{A}^{-\infty}_G(D)$.

Remark that $\omega(X)$ is homogeneous of degree 1 in the variable X_1. Let $g(t)=(\omega e^{td_{\mathfrak{g}}\omega})_e$. We have

$$g(t,X)=\sum_{a,I}\left(e^{-t\|X_1\|^2}t^{|I|/2}x_aP_I(X_0,X_1)\right)E_a\wedge E_I.$$

Here all the subsets I occuring in this sum are such that $|I|\le n-2$. Now

$$\int_{\mathfrak{g}} g(t,X)\phi(X)dX=\sum_{a,I}\left(\int_{\mathfrak{g}} e^{-t\|X_1\|^2}t^{|I|/2}x_aP_I(X_0,X_1)\phi(X_0,X_1)dX_0dX_1\right)E_a\wedge E_I.$$

The same change of variable (as earlier) shows that this is equal to

$$\sum_{a,I} t^{|I|/2-1/2-n/2}\left(\int_{\mathfrak{g}} e^{-\|X_1\|^2}x_aP_I(X_0,t^{-1/2}X_1)\phi(X_0,t^{-1/2}X_1)dX_0dX_1\right)E_a\wedge E_I.$$

In particular, as $|I|\le(n-2)$, this function of t is uniformly bounded when $t\to\infty$ by $O(t^{-3/2})$. Thus the function $t\mapsto\int_{\mathfrak{g}} g(t,X)\phi(X)dX$ is integrable on $[0,\infty]$. This shows that $\alpha(T)=\int_0^T\omega e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}dt$ has a limit in $\mathcal{A}^{-\infty}_G(G/K)$ when $T\to\infty$. This concludes the proof. ∎

We now turn to the question of the explicit determination of the inverse of the map $Ind_{G/K,o}$.

Definition 54 *Define the Chern-Weil map*

$$w_{G/K}: C^\infty(\mathfrak{k})^K\to H^\infty_G(G/K)$$

as the inverse of the map $r_{\mathfrak{k}}$.

Define the map

$$S_o: H^{-\infty}_G(G/K)\to C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$$

as the inverse of the map $Ind_{G/K,o}$.

We denote $w_{G/K}$ simply by w if G and K are understood. An explicit formula for $w_{G/K}$ can be given in terms of the curvature of the principal bundle $G \to G/K$, see [21]. On the other hand we are not able to give an explicit expression for S_o in general. We are able to do it only under some restrictive assumptions or on some particular subspaces. Lemma 38 of section 4 implies that, if $\alpha \in H_G^{-\infty}(G/K)$ and $p \in C^\infty(\mathfrak{k})^K$,

$$S_o(w(p)\alpha) = pS_o(\alpha). \tag{19}$$

It follows from proposition 53 that $S_o\alpha = (-2\pi)^{\dim(G/K)/2}(det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o}^{1/2})\, r_{\mathfrak{k}}\alpha$ for $\alpha \in H_G^\infty(G/K)$.

We can improve this result as follows. Let $\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(G/K)$. Then $\alpha_e \in C^{-\infty}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda\mathfrak{r}'$. We say that α_e admits a restriction to $\mathfrak{k}$ if each component of α_e admits a restriction to $\mathfrak{k}$ (see [12]). We can then define $r_{\mathfrak{k}}\alpha = (\alpha_e)_{[0]}|_{\mathfrak{k}}$. Then $r_{\mathfrak{k}}\alpha \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$ is a generalized function on $\mathfrak{k}$. This definition extends the definition of $r_{\mathfrak{k}} : \mathcal{A}_G^\infty(G/K) \to C^\infty(\mathfrak{k})^K$.

Proposition 55 *Let $\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(G/K)$ be a closed equivariant differential form on G/K. Assume that α_e admits a restriction to $\mathfrak{k}$. Then*

$$S_o\alpha = (-2\pi)^{\dim(G/K)/2}(det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o}^{1/2})\, r_{\mathfrak{k}}\alpha.$$

Proof: Using notation of the proof of Proposition 53, we have $\alpha \cong \alpha e^{td_{\mathfrak{g}}\omega}$. Then using the same arguments as in the proof of Proposition 53, we obtain the desired result. Indeed, if f is a generalized function on $\mathfrak{g}$ admitting a restriction $r_{\mathfrak{k}}f$ to $\mathfrak{k}$, then for any test function ϕ on $\mathfrak{g}$, the limit when $t \to \infty$ of

$$t^{|I|/2}\int_{\mathfrak{g}} e^{-t\|X_1\|^2} f(X_0, X_1)\phi(X_0, X_1)dX_0dX_1$$

is 0 if $|I| < n$ while for $|I| = n$ this is $(\pi)^{n/2}\int_{\mathfrak{k}}(r_{\mathfrak{k}}f)(X_0)\phi(X_0)dX_0$. ∎

Remark 56 *Proposition 31 of [12] becomes then a consequence of Proposition 44 and Proposition 55 above.*

Let $q^* : C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G \to H_G^{-\infty}(G/K)$ be induced from the map $q : G/K \to$ *point*. Thus we get a map (still denoted by) S_o

$$S_o : C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G \to C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$$

taking f to $S_o(q^*f)$. The map S_o exists under the only assumption that K is compact, and extends the map $f \mapsto (-2\pi)^{\dim(G/K)/2}(det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o}^{1/2})\, r_{\mathfrak{k}}f$, defined on generalised functions f admitting a restriction $r_{\mathfrak{k}}f$ to $\mathfrak{k}$. On the open set where $\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}Y \neq 0$, the G-orbits are transverse to $\mathfrak{k}$. Thus the restriction to $\mathfrak{k}$ of an invariant generalized function on $\mathfrak{g}$ has a meaning on this open set. By the same proof as Proposition 36, we see that $S_o(f)$ coincides with

$$(-2\pi)^{\dim(G/K)/2}(det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o})\, r_{\mathfrak{k}} f$$

on this open set, for any $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$. However, we are able to compute the map $S_o : C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G \to C^{-\infty}(\mathfrak{k})^\chi$ on arbitrary invariant generalised functions and on the full space $\mathfrak{k}$ explicitly only when G itself is compact.

Let G be a compact connected Lie group. We also assume that $\chi = 1$ so that G/K is orientable (this is only for convenience). We choose the orientation on G/K given by o.

Definition 57 *If $\Phi \in C^\infty(\mathfrak{k})^K$, define $C_o(\Phi) \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ by*

$$C_o(\Phi)(X) = \int_{G/K,o} (w\Phi)(X)$$

where w is the Chern-Weil homomorphism.

Define

$$F_o : C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G \to C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$$

as the transpose of the map C_o:

$$vol(G/K, dg/dk) \int_{\mathfrak{k}} F_o(f)(Y)\Phi(Y)dY = \int_{\mathfrak{g}} f(X)C_o(\Phi)(X)dX$$

for any $\Phi \in C^\infty_{cpt}(\mathfrak{k})^K$, and where the measures dX on $\mathfrak{g}$, dY on $\mathfrak{k}$ and dg/dk on G/K are chosen in a compatible way.

It is easy to see that C_o sends invariant compactly supported functions on $\mathfrak{k}$ to invariant compactly supported functions on $\mathfrak{g}$, hence the map F_o is well defined.

Lemma 58 *If $f \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$, then $F_o(f)(Y) = (-2\pi)^{\dim(G/K)/2} det^{1/2}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k},o}(Y)f(Y)$, for $Y \in \mathfrak{k}$.*

Proof: The integral formula ([12], page 43) for equivariant cohomology classes gives the lemma. ∎

Proposition 59 *Assume that G is a compact connected Lie group and K a closed subgroup of G such that G/K is oriented. Then for every $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ and $p \in C^\infty(\mathfrak{k})^K$,*

$$fw(p) \sim Ind_{G/K,o}(F_o(f)p)$$

in $H^{-\infty}_G(G/K)$.

Proof: Using Formula 19, it is sufficient to prove the formula of this proposition when $p = 1$.

Let Φ be a G-invariant test function on $\mathfrak{g}$ and let $p' \in C^\infty(\mathfrak{k})^K$. Let us compute

$$\int_{\mathfrak{g}}\int_{G/K,o} \Phi(X)f(X)w(p')(X)dX = \int_{\mathfrak{g}} \Phi(X)f(X)C_o(p')(X)dX.$$

If $q^*f \cong Ind_{G/K,o}u$, for $u \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$, then $fw(p') \cong Ind_{G/K,o}(p'u)$ by Lemma 38 of section 4. Thus, using Proposition 44, we have:

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{g}}\int_{G/K,o} \Phi(X)f(X)w(p')(X)dX &= \int_{\mathfrak{g}}\int_{G/K,o} \Phi(X)(Ind_{G/K,o}(p'u))(X)dX \\ &= \int_{G/K,o}(\int_{\mathfrak{g}} \Phi(X)Ind_{G/K,o}(p'u)(X)dX) \\ &= \int_{G/K,o}(\int_{\mathfrak{k}} \Phi(gY)p'(Y)u(Y)dY)dg/dk\end{aligned}$$

Let p' be compactly supported. Taking Φ with sufficiently large support, we obtain

$$\int_{\mathfrak{g}} f(X)C_o(p')(X)dX = vol(G/K, dg/dk)\int_{\mathfrak{k}} p'(Y)u(Y)dY$$

which is what we needed to prove. ∎

The preceding proposition determines the inverse S_o of the map $Ind_{G/K,o}$ on the subspace of $H_G^{-\infty}(G/K)$ spanned by elements of the form $f\alpha$ where $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ and $\alpha \in H_G^\infty(G/K)$. We will see in section 6 that this space is equal to $H_G^{-\infty}(G/K)$ provided that G and K have equal rank.

We compute even more explicitly the map F_o when G is a compact connected Lie group and $K = T$ is a maximal torus of G.

Let W be the Weyl group of the pair $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Let $C^{\pm\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon$ be the space of W-anti-invariant smooth functions (resp. anti-invariant generalized functions) on $\mathfrak{t}$. Recall the definitions of the maps C_o and F_o from Definition 57.

Lemma 60 *The restriction of the map C_o to $C^\infty(\mathfrak{t})^\epsilon$ gives an isomorphism between $C^\infty(\mathfrak{t})^\epsilon$ and $C^\infty(\mathfrak{g})^G$.*

Furthermore the image of F_o is contained in $C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon$ and the map F_o gives an isomorphism between $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ and $C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon$.

Proof: If $\phi \in C^\infty(\mathfrak{t})^\epsilon$, then ϕ is divisible by $\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t},o}(Y)^{1/2}$ and the restriction of $C_o\phi$ to $\mathfrak{t}$ is equal to $|W|(-2\pi)^{n/2}\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t},o}(Y)^{-1/2}\phi(Y)$, where $n := \dim(G/T)$. Thus the first assertion follows from Chevalley's theorem for C^∞-functions, see for example [12]. The second is a consequence of the first, as C_o preserves the subspace of compactly supported functions. ∎

Let us describe $F_o f$, when f is the δ-function: Let $\delta_{\mathfrak{g}}(X)$ (resp. $\delta_{\mathfrak{t}}(Y)$) be the δ function on $\mathfrak{g}$ (resp. on $\mathfrak{t}$), given with respect to the Euclidean measure on $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{t}$) associated to the Killing form. Let $\alpha \in i\mathfrak{t}'$ be a root . Using the identification of $\mathfrak{t}$ with $\mathfrak{t}'$ determined by the Killing form, we can consider the differential operator $\prod_{\alpha>0} \partial_{i\alpha}$ on $\mathfrak{t}$, where the product is taken over all the positive roots of $\mathfrak{g}$ for an order compatible with the orientation o as defined in [12]. Then $F_o\delta_{\mathfrak{g}} = \prod_{\alpha>0} \partial_{i\alpha}\delta_{\mathfrak{t}}$.

6 Künneth formula and applications

Let K be a Lie group. Let D and M be K-manifolds. Consider the complex $\mathcal{A}_K(D)$ of K-equivariant forms on D with polynomial coefficients and its cohomology $H_K(D) = Z_K(D)/B_K(D)$ defined in section 2, Definition 1. Recall that these spaces are $\mathbb{Z}_+$-graded. The evaluation map E at zero taking $\alpha \mapsto \alpha(0)$ gives a map from $H_K(D)$ to the usual De Rham cohomology $H(D)$ of D. Consider the map m from $\mathcal{A}_K(D) \otimes \mathcal{A}_K(M)$ to $\mathcal{A}_K(D \times M)$ given by $m(\alpha \otimes \beta)(X) = \alpha(X) \wedge \beta(X)$. It induces a map (still denoted by m) from $H_K(D) \otimes H_K(M)$ to $H_K(D \times M)$.

Similarly, we can also consider the map $m^{-\infty}$ from $\mathcal{A}_K(D) \otimes \mathcal{A}_K^{-\infty}(M)$ to $\mathcal{A}_K^{-\infty}(D \times M)$ given by $m^{-\infty}(\alpha \otimes \beta)(X) = \alpha(X) \wedge \beta(X)$: this is well defined as we can multiply a generalized function by a polynomial function. It induces a map (still denoted by $m^{-\infty}$) from $H_K(D) \otimes H_K^{-\infty}(M)$ to $H_K^{-\infty}(D \times M)$.

Theorem 61 *Let K be a compact Lie group. Let D be a compact K-manifold. Assume that the evaluation map $E : H_K(D) \to H(D)$ is surjective. Then, for any K-manifold M, the multiplication map $m^{-\infty}$ induces an isomorphism*

$$\hat{m}^{-\infty} : H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \cong H_K^{-\infty}(D \times M).$$

Remark 62 *Proposition 5 implies that $H_K(D)$ is free over $H_K(point)$. As is well known, from the Künneth spectral sequence (see [16]; Proposition 6.1, page 50), the map m induces an isomorphism*

$$\hat{m} : H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H_K(M) \cong H_K(D \times M)$$

under the hypothesis of the theorem. (This also follows from the same argument as that for $\hat{m}^{-\infty}$ given below.)

Proof: We can assume D to be oriented. Indeed let us consider the two-fold cover D_t of D defined in section 2 before Proposition 5. An element of D_t is a couple (m, o), where $m \in D$ and o is an orientation of T_mD. Thus the manifold D_t is canonically oriented. Consider the map $\epsilon(m, o) = (m, -o)$ and its action on $H_K(D_t)$. We have $H_K(D_t) = H_K(D) \oplus H_K(D)_t$, where $H_K(D)$ is isomorphic to the eigenspace with eigenvalue 1 for the action of ϵ, while $H_K(D)_t$ is by definition the eigenspace of eigenvalue -1 for the action of ϵ. Furthermore by Proposition 5, the manifold D_t also satisfies the hypothesis that the evaluation map $H_K(D_t) \to H(D_t)$ is surjective. The map

$$\hat{m}^{-\infty} : H_K(D_t) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \to H_K^{-\infty}(D_t \times M)$$

clearly commutes with the action of ϵ. So if we show that $\hat{m}^{-\infty}$ is an isomorphism for the oriented manifold D_t, by taking the eigenspace of eigenvalue 1 for ϵ we will obtain the desired isomorphism

$$\hat{m}^{-\infty} : H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \cong H_K^{-\infty}(D \times M).$$

Let $\mathcal{A}^{(p)}(D \times M) = \Gamma(D \times M, \Lambda^p T'D \otimes \Lambda T'M)$, where Γ denotes the space of smooth sections and $T'M$ denotes the cotangent bundle of M.

We write $\mathcal{A}(D \times M) = \oplus_{p=0}^{\dim D} \mathcal{A}^{(p)}(D \times M)$. The total exterior differential $d_{D\times M}$ on $\mathcal{A}(D \times M)$ breaks up into the sum $d_D + d_M$ of partial exterior differential d_D along D

$$d_D : \mathcal{A}^{(p)}(D \times M) \to \mathcal{A}^{(p+1)}(D \times M)$$

and partial exterior differential d_M along M

$$d_M : \mathcal{A}^{(p)}(D \times M) \to \mathcal{A}^{(p)}(D \times M).$$

Let us consider the complex $\mathcal{A}_K^{-\infty}(D \times M) = C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(D \times M))^K$. We write

$$B^p = C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}^{(p)}(D \times M))^K.$$

The operator $d_\mathfrak{k}$ can be written as a sum of homogeneous operators $d_\mathfrak{k} = d_1 + r_0 + r_{-1}$, with

$$d_1 : B^p \to B^{p+1}, r_0 : B^p \to B^p, r_{-1} : B^p \to B^{p-1}.$$

We have $d_1 = d_D$, $r_0 = d_M - \sum_i x_i \iota(E_M^i)$, and $r_{-1} = -\sum_i x_i \iota(E_D^i)$, where E^i is a basis of $\mathfrak{k}$. We write $d = d_D$.

Let us choose a K-invariant metric on D and consider D as a Riemannian manifold. This endows the space $\mathcal{A}(D)$ with an inner product. Let $d^* : \mathcal{A}^p(D) \to \mathcal{A}^{p-1}(D)$ be the adjoint operator to $d = d_D$. Let $\mathcal{H}(D) = Ker(d) \cap Ker(d^*)$ be the space of harmonic forms on D. It is a K-invariant finite dimensional space of d-closed forms on D. The map $\mathcal{H}(D) \to H(D)$ is an isomorphism. Recall that we do not necessarily assume K to be connected. However as the evaluation map at 0 is surjective, K acts trivially on $H(D)$ (this would be automatic if K were connected). Thus every element of $\mathcal{H}(D)$ is K-invariant.

Lemma 63 *For any $\alpha_0 \in \mathcal{H}^p(D)$, there exists $\alpha \in Z_K(D)$ such that*

$$\alpha_0 - \alpha(X) \in \sum_{j<p} \mathcal{A}^j(D), \qquad \text{for every } X \in \mathfrak{k}.$$

Proof: Our hypothesis implies that if $\alpha_0 \in \mathcal{A}^p(D)$ is d-closed, we can find $\gamma \in \mathcal{A}^{p-1}(D)$ and $\lambda \in Z_K(D)$ such that $\alpha_0 - d\gamma = \lambda(0)$. If α_0 is K-invariant, we may assume (eventually after averaging this equation by the action of K) that γ is K-invariant. Take $\alpha = \lambda + d_{\mathfrak{k}}\gamma$, then $\alpha \in Z_K(D)$ and $\alpha(0) = \alpha_0$. The complex $\mathcal{A}_K(D)$ is $\mathbb{Z}_+$-graded by its total equivariant degree. We may thus assume that α is of total degree p. Thus $\alpha(X) - \alpha(0) \in \mathcal{A}^{p-2}(D) \oplus \mathcal{A}^{p-4}(D) \oplus \cdots$. This proves the lemma. ∎

We continue with the proof of Theorem 61.

Let P be the orthogonal projection of $\mathcal{A}(D)$ onto $\mathcal{H}(D)$. We have $Pd = dP = 0$. Let $G : \mathcal{A}^p(D) \to \mathcal{A}^{p-1}(D)$ be the Green kernel. It satisfies $Gd + dG = I - P$. We can extend the operator P, by the formula $P(\alpha)(X) = P(\alpha(X))$, to an operator still denoted by P,

$$P : B^p \to \mathcal{H}^p(D) \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{k}}^{-\infty}(M).$$

Similarly we can extend pointwise the operator G

$$G : B^p \to B^{p-1}.$$

Let $r = r_0 + r_{-1}$ and let $N = Gr + rG$. The operator N decreases strictly the exterior degree in D . Let $\nu \in B = \sum_j B^j$. The equation $Gd + dG = I - P$ gives the perturbed equation

$$Gd_{\mathfrak{k}}\nu + d_{\mathfrak{k}}G\nu = \nu - (P - N)\nu.$$

Assume $d_{\mathfrak{k}}\nu = 0$. Let us write $\nu = \sum_{j\leq p} \nu_j$, with $\nu_j \in B^j$. We will prove by induction on p that ν has a representative in $Z_K(D) \otimes Z_K^{-\infty}(M)$. The equation above implies that $\nu \cong \nu' := (P-N)\nu$. We have $\nu'_p = P\nu_p \in \mathcal{H}^p(D) \otimes \mathcal{A}_K^{-\infty}(M)$. Let us write the equation $d_{\mathfrak{k}}\nu' = 0$ component by component. We obtain, in particular, the equation $r_0\nu'_p + d\nu'_{p-1} = 0$. Applying P, we get $Pr_0\nu'_p + Pd\nu'_{p-1} = 0$. As $Pd = 0$, this implies that $Pr_0\nu'_p = r_0P\nu'_p = r_0\nu'_p = 0$. Thus $\nu'_p \in \mathcal{H}^p(D) \otimes Z_K^{-\infty}(M)$. The preceding lemma allows us to find an element $\xi \in Z_K(D) \otimes Z_K^{-\infty}(M)$ such that $\nu' - \xi \in \sum_{j<p} B^j$. Thus the map $m^{-\infty}$ is surjective.

Let us prove that $\hat{m}^{-\infty}$ is an isomorphism. It suffices to show that $\hat{m}^{-\infty}$ is injective: Recall from Proposition 5 that $H_K(D)$ is free over $H_K(point)$. Furthermore we can find a basis P^p for the $H_K(point)$-module $H_K(D)$ and a basis P_q for the $H_K(point)$-module $H_K(D)_t$ such that $\int_M P^p P_q = \delta_p^q$. We can write an element $\alpha \in H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M)$ uniquely as $\alpha = \sum_a P^a \otimes \nu_a$. Let $\nu \in H_K^{-\infty}(D \times M)$. For any fixed a, consider the map $\nu \mapsto \int_D P_a(X)\nu(X)$. This is a well defined map from $H_K^{-\infty}(D \times M) \to H_K^{-\infty}(M)$. We have

$$\int_D P_a(X)(\hat{m}^{-\infty}\alpha)(X) = \nu_a(X).$$

Thus if $\hat{m}^{-\infty}(\alpha) = 0$, $\nu_a(X) = 0$, for all a, and hence $\hat{m}^{-\infty}$ is injective ∎

Applying Theorem 61 to the case where M is a point, we obtain the following

Corollary 64 *Let K be a compact Lie group. Let D be a compact K-manifold . Assume that $H_K(D)$ surjects on $H_K(point)$. Then*

$$H_K^{-\infty}(D) \cong C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} H_K(D).$$

Recall from [14] that if K is a compact connected Lie group acting on a compact symplectic manifold D in an Hamiltonian way, then $H_K(D)$ is free over $H_K(point)$. In particular, the following well-known lemma gives some examples of compact K-manifolds D such that $H_K(D)$ is free over $H_K(point) = S(\mathfrak{k}')^K$.

Lemma 65 *Let K be a compact connected Lie group and let L be a closed subgroup of K. Then $H_K(K/L)$ is free over $H_K(point)$ if and only if K and L have the same rank.*

Proof: Let $D = K/L$. Recall that the equivariant cohomology $H_K(D)$ is isomorphic to $H_L(point) = S(\mathfrak{l}')^L$ by the map $r_{\mathfrak{l}}$, induced from the inclusion of the base point $e \in K/L$. The restriction of polynomial functions on $\mathfrak{k}$ to polynomial functions on $\mathfrak{l}$ gives a homomorphism from $S(\mathfrak{k}')^K$ to $S(\mathfrak{l}')^L$. If $H_K(K/L)$ is free over $H_K(point)$, then in particular the homomorphism $S(\mathfrak{k}')^K \to S(\mathfrak{l}')^L$ is injective. This implies that K and L have the same rank. Conversely, suppose now that L is a closed subgroup of K with equal rank. Let T be a maximal torus of L (and hence of K. Let $W = N_K(T)/T, W_L = N_L(T)/T$ be the respective Weyl groups of (K,T) and (L,T). By Chevalley's theorem, $S(\mathfrak{l}')^L$ is isomorphic to $S(\mathfrak{t}')^{W_L}$, while the ground ring $S(\mathfrak{k}')^K$ is isomorphic to $S(\mathfrak{t}')^W$. Further $S(\mathfrak{t}')^{W_L}$ is a free module over $H_K(point) \cong S(\mathfrak{t}')^W$. ∎

The case where $D = K/T$ is a particularly important example. Considering this case we will see that we obtain as a consequence of Theorem 61 the following:

Proposition 66 *Let K be a compact connected Lie group with maximal torus T and Weyl group W. Let $C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon$ be the space of W-anti-invariant generalized functions on $\mathfrak{t}$. Then the map from*

$$S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon \to C^{-\infty}(\mathfrak{t})$$

given by $P \otimes f \mapsto Pf$, for $P \in S(\mathfrak{t}'), f \in C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon$, is an isomorphism.

Proof: Let us consider $D = K/T$ and $M = point$ in Theorem 61. We thus obtain an isomorphism

$$\hat{m}^{-\infty} : H_K(K/T) \otimes_{H_K(point)} C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K \to H_K^{-\infty}(K/T). \tag{20}$$

We have $H_K(point) \cong S(\mathfrak{t}')^W$. Recall the isomorphisms

$$w_{K/T} : S(\mathfrak{t}') \to H_K(K/T) \tag{21}$$

where $w_{K/T}$ is the Chern-Weil homomorphism (see Definition 54 of section 5), the isomorphism F_o proved in Lemma 60

$$F_o : C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K \to C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon, \tag{22}$$

and the isomorphism (cf. Theorem 46)

$$Ind_{K/T,o} : C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \to H_K^{-\infty}(K/T). \tag{23}$$

Using the above identifications, the isomorphism (20) gives an isomorphism, again denoted by

$$\hat{m}^{-\infty} : S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon \to C^{-\infty}(\mathfrak{t}). \tag{24}$$

By Proposition 59 of section 5, we have for $a \in S(\mathfrak{t}'), f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$

$$w_{K/T}(a)f = Ind_{G/K,o}(aF_o f).$$

Hence we obtain our proposition. ∎

7 Equivariant cohomology and subgroups

Let K be a compact connected Lie group and let M be a K-manifold. If L is a compact subgroup of K of equal rank, then $H_K(K/L)$ is free over $H_K(point)$. In this section, we will use Theorem 61 to compare $H_K^{-\infty}(M)$ and $H_L^{-\infty}(M)$ (and also $H_K(M)$ and $H_L(M)$).

Let $D = K/L$. The space $H_K(D)$ is isomorphic to $H_L(point) = S(\mathfrak{l}')^L$ by the Chern-Weil isomorphism:

$$w_D : H_L(point) = S(\mathfrak{l}')^L \to H_K(D). \tag{25}$$

Consider the natural restriction map $r_L : H_K(M) \to H_L(M)$ of a K-equivariant form on M to a L-equivariant form on M.

Let us recall the following proposition (see [16]; page 38). We include a proof for completeness.

Proposition 67 *Let K be a compact connected Lie group and let M be a K-manifold. Let L be a compact subgroup of K of equal rank. Then the map*

$$I_M : H_L(point) \otimes_{H_K(point)} H_K(M) \to H_L(M)$$

given by

$$P \otimes \omega \mapsto P(r_L \omega)$$

for $P \in H_L(point)$ and $\omega \in H_K(M)$ is an isomorphism.

In particular, $H_L(M)$ is generated by $r_L H_K(M)$ over $H_L(point) = S(\mathfrak{l}')^L$.

Proof: Consider the manifold $\mathcal{M} = K \times_L M$. By Theorem (51), the restriction map induced from the inclusion $i_{L,M}$ of the fiber M at $e \in D$ in the fibered space $\pi : \mathcal{M} \to D$ induces an isomorphism

$$i^*_{L,M} : H_K(\mathcal{M}) \to H_L(M) \tag{26}$$

Consider the map $\mu : [k, m] \mapsto km$ from $K \times_L M$ to M. The map $t = (\pi \times \mu)$ given by $t([k, m]) = (kL, k \cdot m)$ is a K-equivariant isomorphism from $\mathcal{M}$ to $D \times M$, where K acts on $D \times M$ as the diagonal action. Thus we have an isomorphism

$$t^* : H_K(D \times M) \to H_K(\mathcal{M}). \tag{27}$$

As follows from Theorem 61 and Lemma 65, the multiplication map $\hat{m}$ is an isomorphism:

$$\hat{m} : H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H_K(M) \to H_K(D \times M). \tag{28}$$

Using the isomorphisms (25) -(28), we obtain an isomorphism

$$I : H_L(point) \otimes_{H_K(point)} H_K(M) \to H_L(M). \tag{29}$$

It remains to show that I is equal to I_M. For this, we have to compute for $P \in S(\mathfrak{l}')^L$ and $\omega \in H_K(M)$

$$\begin{aligned} i^*_{L,M}(\pi^*(w_D P) \wedge \mu^* \omega) &= i^*_{L,M} \pi^*(w_D P) \wedge i^*_{L,M} \mu^* \omega \\ &= P \wedge r_L \omega. \end{aligned}$$

This proves the proposition. ∎

In particular, consider $M = K/U$ for a closed subgroup U of K. Then the equivariant cohomology space $H_K(M)$ is equal to $H_U(point)$ via the Chern-Weil homomorphism w_M and we obtain :

Proposition 68 *Let K be a compact connected Lie group. Let L be a closed subgroup of K of same rank. Let U be a closed subgroup of K. Then the map $P \otimes A \mapsto P(r_L(w_M A))$ for $P \in S(\mathfrak{l}')^L$, $A \in S(\mathfrak{u}')^U$ determines an isomorphism:*

$$S(\mathfrak{l}')^L \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} S(\mathfrak{u}')^U \cong H_L(K/U) \tag{30}$$

Remark that by our hypothesis, $H_K(K/L) = S(\mathfrak{l}')^L$ is free over $S(\mathfrak{k}')^K$ with rank equal to $\dim H(K/L)$. Thus as a vector space

$$H_L(K/U) \cong H(K/L) \otimes_{\mathbb{R}} S(\mathfrak{u}')^U.$$

Corollary 69 *If U also has the same rank as K, then $H_L(K/U)$ is a free (finitely generated) $H_L(point)$-module.*

Proof: As $S(\mathfrak{u}')^U$ is free over $S(\mathfrak{k}')^K$, the $S(\mathfrak{l}')^L$ -module $S(\mathfrak{l}')^L \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} S(\mathfrak{u}')^U$ is free with rank equal to $\dim H(K/U)$. ∎

We turn now to the determination of the equivariant cohomology $H_L^{-\infty}(M)$ in the case where M is a K-manifold. We denote by $\chi_{K/L}$ the character of L with values in ± 1 given by $\gamma \to \det_{\mathfrak{k}/\mathfrak{l}} \gamma$. Recall the definition of $H^{-\infty}_{L,\chi_{K/L}}(M)$ from Definition 49 of section 5.

Theorem 70 *Let K be a compact connected Lie group and let M be a K-manifold. Let L be a compact subgroup of K of equal rank. Choose an orientation o on $\mathfrak{k}/\mathfrak{l}$. Then, there is a natural isomorphism of $H_L(point)$-modules:*

$$I^{-\infty}_{M,o} : H_L(point) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \to H^{-\infty}_{L,\chi_{K/L}}(M).$$

In particular, for $M = K/U$, we obtain

$$H^{-\infty}_{L,\chi_{K/L}}(M) \cong S(\mathfrak{l}')^L \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} C^{-\infty}(\mathfrak{u})^{\chi_{K/U}}.$$

Proof: The proof is almost the same as the proof of Proposition 67. Using the same notation, we use the chain of isomorphisms:

$$Ind_{K/L,o} : H^{-\infty}_{L,\chi_{K/L}}(M) \to H_K^{-\infty}(\mathcal{M}). \tag{31}$$

The isomorphism t of $\mathcal{M}$ with $D \times M$ induces an isomorphism

$$t^* : H_K^{-\infty}(D \times M) \to H_K^{-\infty}(\mathcal{M}). \tag{32}$$

As follows from Theorem 61 and Lemma 65, the multiplication map $\hat{m}^{-\infty}$ is an isomorphism:

$$\hat{m}^{-\infty} : H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \to H_K^{-\infty}(D \times M). \tag{33}$$

Using the isomorphisms (25), (31)-(33), we obtain an isomorphism

$$(34) \qquad I_{M,o}^{-\infty} : H_L(point) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \to H_{L,\chi_{K/L}}^{-\infty}(M).$$

The description of $I_{M,o}^{-\infty}$ is as follows: for $P \in H_L(point) = S(\mathfrak{l}')^L$ and $\omega \in H_K^{-\infty}(M)$, the element $\alpha = I_{M,o}^{-\infty}(P \otimes \omega)$ is the unique element in $H_{L,\chi_{K/L}}^{-\infty}(M)$ such that $Ind_{K/L,o}\alpha = \pi^*(w_D P) \wedge \mu^*\omega$. It follows from Lemma 38 of section 4 that

$$\pi^*(w_D Q) Ind_{K/L,o}\alpha = Ind_{K/L,o} Q\alpha$$

for any $Q \in H_L(point)$. Hence $I_{M,o}^{-\infty}$ is an isomorphism of $H_L(point)$-modules. The last statement in Theorem 70 follows easily from Theorem 46. ∎

The isomorphism $I_M^{-\infty}$ is not so easy to determine explicitly as the isomorphism I_M. We determine it as much as we can.

Consider $H_K^{-\infty}(M)$ as a $H_K(M)$-module and $H_{L,\chi_{K/L}}^{-\infty}(M)$ as a $H_L(M)$-module.

Lemma 71 *If $\alpha \in H_K(M)$ and $\beta \in H_K^{-\infty}(M)$, then*

$$I_{M,o}^{-\infty}(1 \otimes \alpha\beta) = I_M(1 \otimes \alpha) I_{M,o}^{-\infty}(1 \otimes \beta).$$

Proof: If $I_M^{-\infty}(1 \otimes \beta) = \omega$, we have $\mu^*\beta = Ind_{K/L,o}\omega$. Then $\mu^*\alpha \wedge \mu^*\beta = Ind_{K/L,o}(r_L\alpha)\omega$ by Lemma 38 of section 4. This proves the lemma. ∎

We assume that K/L is orientable so that $\chi_{K/L} = 1$. Recall the map $F_o : C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K \to C^{-\infty}(\mathfrak{l})^L$ given in Definition 57 of section 5. Then

Lemma 72 *Let $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$, $\alpha \in H_K(M)$, then $I_{M,o}^{-\infty}(1 \otimes f\alpha) = (F_o f) r_L \alpha$.*

Proof: This follows immediately from Proposition 59 of section 5. ∎

Thus we know $I_M^{-\infty}$ on the subspace $S(\mathfrak{l}')^L \otimes_{H_K(point)} C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K H_K(M)$ of $S(\mathfrak{l}')^L \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M)$.

If M is compact and $H_K(M)$ is a free module over $H_K(point)$, then $H_K^{-\infty}(M)$ is equal to $C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K \otimes_{H_K(point)} H_K(M)$ (cf. Corollary 64 of section 6). Thus in this case, the isomorphism $I_{M,o}^{-\infty}$ is entirely determined by the knowledge of F.

8 Reduction to the maximal torus

Let K be a compact connected Lie group and let T be its maximal torus. Let $W = N(T)/T$ be the Weyl group.

Let M be a K-manifold. It is well known (cf. [16]; chapter 3, section 1, Proposition 1) that the natural restriction map $\mathcal{A}_K(M) \to \mathcal{A}_T(M)$ induces an isomorphism between $H_K(M)$ and $H_T(M)^W$. In this section, we prove a similar statement for the generalized K-cohomology $H_K^{-\infty}(M)$.

We first need to define a map from $H_T^{-\infty}(M)$ to $H_K^{-\infty}(M)$: Choose a non-zero K-invariant form ν' on K/T of maximal exterior degree. In particular, ν' determines an Euclidean measure $|d\nu'|$ on $\mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ and an orientation o. For $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M))$, define $A_o(f) \in C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(K \times M))$ by: If Φ is a test function on $\mathfrak{k}$

$$(A_o(f), \Phi dX)_{(k,m)} := \nu' \wedge (k \cdot (\int_{\mathfrak{t}} f(Y)\Phi(k \cdot Y)dY))_m$$

where dY is the Euclidean measure on $\mathfrak{t}$ which is quotient of dX by $|d\nu'|$ on $\mathfrak{k}/\mathfrak{t}$. In particular A_o depends only on the orientation o on K/T associated to ν'.

Lemma 73 *Let $D = K/T$. Consider $D \times M$ as a K-manifold under the diagonal action. Then the map A_o defines a cochain map from $(\mathcal{A}_T^{-\infty}(M), d_{\mathfrak{t}})$ to $(\mathcal{A}_K^{-\infty}(D \times M), d_{\mathfrak{k}})$.*

Proof: It is not difficult to check that if f is T -invariant, then $A_o(f)$ is in $\mathcal{A}_K^{-\infty}(D \times M)$. Now, as ν' is of maximal degree, we see that $d_{D\times M}(A_o(f)) = A_o(d_M f)$. It is also easy to prove that $\iota_{\mathfrak{k}} A_o(f) = A_o(\iota_{\mathfrak{t}} f)$. ∎

Consider the projection $\pi : D \times M \to M$ with fiber D. We denote the map $\pi_* : \mathcal{A}_K^{-\infty}(D \times M) \to \mathcal{A}_K^{-\infty}(M)$ by $\int_D$ (cf. Formula 8 of section 2).

Define $B(f) \in \mathcal{A}_K^{-\infty}(M)$ by

$$B(f) = \int_{D,o} A_o(f),$$

where the orientation on D is the orientation o. In particular, we see that B does not depend on o. If we denote by dk/dt the positive density on K/T associated to ν', we have for $f \in \mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$ and Φ a test function on $\mathfrak{k}$,

$$\int_{\mathfrak{k}} B(f)(X)\Phi(X)dX = \int_{K/T} k \cdot (\int_{\mathfrak{t}} f(Y)\Phi(k \cdot Y)dY)dk/dt.$$

The map B is a cochain map from $(\mathcal{A}_T^{-\infty}(M), d_{\mathfrak{t}})$ to $(\mathcal{A}_K^{-\infty}(M), d_{\mathfrak{k}})$. The Weyl group W canonically acts on $\mathcal{A}_T^{-\infty}(M) = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T)$.

Theorem 74 *Let K be a compact connected Lie group and let T be its maximal torus. Let W be the Weyl group of K.*

The restriction of the cochain map B to $\mathcal{A}_T^{-\infty}(M)^W$ induces an isomorphism in cohomology

$$b : H_T^{-\infty}(M)^W \to H_K^{-\infty}(M).$$

Proof: Again, this theorem is an easy consequence of Theorem 61 of section 6. As in the proof of Theorem 70, we consider $\mathcal{M} = K \times_T M$ and we use the isomorphism (cf. Theorem 52 of section 5):

$$(35) \qquad Ind_{K/T,o} : H_T^{-\infty}(M) \to H_K^{-\infty}(\mathcal{M}).$$

Composing this with the isomorphism (see Formula 32 of section 7):

$$(36) \qquad t^* : H_K^{-\infty}(D \times M) \to H_K^{-\infty}(\mathcal{M}),$$

we obtain an isomorphism

$$(37) \qquad (t^*)^{-1} \circ \operatorname{ind}_{K/T,o} : H_T^{-\infty}(M) \to H_K^{-\infty}(D \times M).$$

It is not difficult to see that $(t^*)^{-1} Ind_{K/T,o} f = A_o f$, for $f \in H_T^{-\infty}(M)$,

Let ϵ be the character of W given by $\epsilon(w) = det_{\mathfrak{t}}(w)$. Let r be the action of W on $K/T \times M$ given by $w \cdot (kT, m) = (kw^{-1}T, m)$. This action commutes with the diagonal action of K and hence induces an action still denoted by r on $H_K^{-\infty}(D \times M)$. Under the isomorphism (37), the natural action of W on $H_T^{-\infty}(M)$ becomes the action $r \otimes \epsilon$.

The K-equivariant cohomology $H_K(D) \cong S(\mathfrak{t}')$ of D is free over $H_K(point) \cong S(\mathfrak{t}')^W$. Hence, as follows from Theorem 61, the multiplication map $\hat{m}^{-\infty}$ is an isomorphism:

$$(38) \qquad \hat{m}^{-\infty} : H_K(D) \otimes_{H_K(point)} H_K^{-\infty}(M) \to H_K^{-\infty}(D \times M).$$

For the action of the group W on $H_K(D)$, induced by the action of W by right translation on $D = K/T$, the subspace $H_K(D)^\epsilon$ of $H_K(D)$ is a free $H_K(point)$ -module of rank one, in fact $H_K(D)^\epsilon = H_K(point) w_D(\chi)$, where $w_D(\chi) \in H_K(D)^\epsilon$ is the image under the Chern-Weil homomorphism w_D of the W-anti-invariant polynomial function

$$\chi(Y) = (2\pi)^{-\dim(D)/2} |W|^{-1} \det{}^{1/2}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t},o}(Y), Y \in \mathfrak{t}.$$

We have $\int_D w_D(\chi)(X) = 1$, for all $X \in \mathfrak{k}$. The space $H_K(D)^\epsilon$ is isomorphic to $H_K(point)$ under $\alpha \mapsto \int_D \alpha(X)$. Thus, by (38), the map $\alpha \mapsto \int_D \alpha$ induces an isomorphism (depending on the choice of an orientation on D)

$$H_K^{-\infty}(D \times M)^\epsilon \cong H_K^{-\infty}(M).$$

and hence, by (37),

$$H_T^{-\infty}(M)^W \cong H_K^{-\infty}(M).$$

The above isomorphism is given by the restriction to $H_T^{-\infty}(M)^W$ of the map $B = \int_{D,o} A_o$. Thus we obtain the formula of the theorem. ∎

In particular, when $M = point$, the isomorphism given by Theorem 74 is the well known isomorphism $b : C^{-\infty}(\mathfrak{t})^W \to C^{-\infty}(\mathfrak{k})^K$ given by:

$$(b(f), \Phi dX) = vol(K/T, dk/dt)(\int_{\mathfrak{t}} f(Y)\Phi(Y)dY)$$

if Φ is a K-invariant test function on $\mathfrak{k}$.

9 The case of a free action

Let G be a Lie group. Let P be a right G-manifold (i.e. G acts on P from the right). (Of course any left G-manifold can be thought of as a right G-manifold under $x \cdot g := g^{-1} \cdot x$, for $x \in P$ and $g \in G$.)

Definition 75 *Let P be a right G-manifold. We will say that the* action of G on P is principal *(or that G acts* principally *on P) if the orbit space P/G is a smooth manifold such that $P \to P/G$ is a smooth principal G-bundle.*

If G is compact, then a right action is principal if and only if the action is free.

Let P be a right G-manifold. If G acts principally on P, it is known [11] that the G- equivariant de Rham cohomology of P is isomorphic to the de Rham cohomology of the quotient space P/G. In this section, we prove similarly that the space $H_G^{-\infty}(P)$ is isomorphic to $H(P/G)$. We also consider the following more general situation:

(S):*Let G be a Lie group and let N be a closed normal subgroup of G. Let P be a right G-manifold. Assume that the subgroup N acts principally on P.*

We ask the question: Under what hypothesis are $H_G^{-\infty}(P)$ and $H_{G/N}^{-\infty}(P/N)$ isomorphic. In this section, we prove this affirmatively when G is compact connected. On the other hand when $N = G$, we need no compactness hypothesis on G to prove the isomorphism $H_G^{-\infty}(P) \cong H(P/G)$ and the proof for this case is comparatively easy. The reader only interested in the case where $N = G$ can go directly to the proof of Theorem 89.

An important example of this situation (S) is the following:

Example 76 *Let U and K be two Lie groups and let $G := U \times K$ be the direct product. Let L be a $U \times K$- manifold. For convenience, we assume that U acts on the left and K on the right. Assume the right action of K on L is principal. Let M be a K-manifold and let $P := L \times M$. Define the action of an element $g = (u, k) \in G = U \times K$ on P by :$(x, m) \cdot (u, k) = (u^{-1}xk, k^{-1}m)$, for $x \in L$, $m \in M$. Then the action of the (normal) subgroup K of G is principal on P. The quotient manifold $(L \times M)/K$ is the left U-space $\mathcal{M} = L \times_K M$ fibered over L/K with fiber M.*

Consider the quotient map $q : P \to P/N$ under the situation (S). Recall Definition 4 of a G-equivariant fibration with G-oriented fibers. Later in the section, we will need to impose the following conditions (77) and (78)

Condition 77 *There exists a G-orientation o for the fibers of q.*

This condition (77) is satisfied, for example, when $\det_{\mathfrak{n}} g > 0$, for all $g \in G$. In particular this is satisfied if G is connected.

Condition 78 *There exists a G-invariant connection ω for the principal N-bundle $q : P \to P/N$.*

This condition (78) is always satisfied when G is compact.

It is proved in [13] that the canonical map $q^* : H^\infty_{G/N}(P/N) \to H^\infty_G(P)$ is an isomorphism, when the condition (78) is satisfied. Furthermore, an explicit formula for the inverse of q^* is given in terms of the equivariant curvature of ω. The reader should however be warned that the natural map q^* is sometimes equal to zero when applied to the equivariant cohomology with generalized coefficients.

Whenever the conditions (77) and (78) are satisfied, we will construct a natural map (cf. Proposition 82)

$$m_o : H^{-\infty}_{G/N}(P/N) \to H^{-\infty}_G(P)$$

and will show that m_o is an isomorphism, if either $N = G$ or G is compact.

We begin by constructing a natural element $\gamma_o \in H^{-\infty}_G(P)$ (assuming the validity of conditions (77) and (78)):

Let $B := P/N$ be the space of N-orbits. Consider the projection $q : P \to B$. The vertical tangent bundle V is a G-equivariant real vector bundle over P. By assumption, the bundle V is a G-orientable vector bundle. As the group N acts principally, the bundle V is a trivial bundle over P canonically isomorphic to $P \times \mathfrak{n}$. The isomorphism is obtained by sending $(x, X) \in P \times \mathfrak{n}$ to the vertical tangent vector $(X_P)_x$. The action of an element $g \in G$ on $V = P \times \mathfrak{n}$ is given by $(x, Y) \cdot g = (xg, g^{-1} \cdot Y)$ for $x \in P, Y \in \mathfrak{n}$. (Observe that if $\det_{\mathfrak{n}}(g) > 0$, for all $g \in G$, then any choice of orientation of $\mathfrak{n}$ gives rise to a G-orientation of the vector bundle V, i.e., in this case the condition (77) is satisfied.)

Let us choose a G-invariant connection form $\omega \in (\mathcal{A}^1(P) \otimes \mathfrak{n})^G$. Using ω, we obtain a G-invariant decomposition

$$TP = V \oplus H$$

of the tangent bundle as sum of vertical and horizontal subbundles.

Similarly, using ω, we have an isomorphism

$$(39) \qquad U : P \times \mathfrak{g} \to P \times \mathfrak{n} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$$

given by $U(x, X) = (x, Y, Q)$, where $Q \in \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ is the projection of $X \in \mathfrak{g}$ and where $Y = \omega_x(X_P) \in \mathfrak{n}$.

Consider the dual bundle $V' = P \times \mathfrak{n}'$ to the vertical tangent bundle V. The projection $TP \to V$, given by the connection ω, determines a G-invariant injection s_ω of V' in the cotangent bundle $T'P$. Consider the canonical 1-form

α on the manifold $T'P$. Let $\alpha_\omega := s_\omega^*\alpha \in \mathcal{A}^1(V')$. It is a G-invariant differential form on V'. The form

$$\beta_\omega := e^{id_{\mathfrak{g}}\alpha_\omega} \in \mathcal{A}_G^\infty(V') \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

is a closed G-equivariant differential form. Consider the projection $p : V' \to P$. We will prove below that if Φ is a test function on $\mathfrak{g}$, then $\int_{\mathfrak{g}} \beta_\omega(X)\Phi(X)dX$ is a differential form on $V' = P \times \mathfrak{n}'$ rapidly decreasing in the direction $\mathfrak{n}'$. Thus, as the vector bundle V' is G-oriented, we may define $p_*\beta_\omega$ as an element of $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ by setting:

$$\int_{\mathfrak{g}}(p_*\beta_\omega)(X)\Phi(X)dX = p_*(\int_{\mathfrak{g}} \beta_\omega(X)\Phi(X)dX)$$

(the map p_* depends on the choice of o).

A representative of the element γ_o will be defined as the integral of β_ω over the fibers of p, normalized in order that $\gamma_o(X)$ is a differential form on P with real coefficients.

Proposition 79 *Let $p : V' \to P$ be the projection as above. Let us choose a G-orientation o on the vector bundle V'. Let $n = \dim \mathfrak{n}$. Let $c_n = 1$, if n is even, and $c_n = -i$ if n is odd. Define*

$$\gamma_{\omega,o} := c_n(2\pi)^{-n}p_*(e^{id_{\mathfrak{g}}\alpha_\omega}).$$

Then $\gamma_{\omega,o}$ is an element of $\mathcal{A}_G^{-\infty}(P)$ and is $d_{\mathfrak{g}}$-closed.

The cohomology class of $\gamma_{\omega,o}$ in $H_G^{-\infty}(P)$ is independent of the choice of the G-invariant connection ω. It depends only on the G-orientation o. We denote it by γ_o.

Proof: Writing $\beta_\omega = e^{id_{\mathfrak{g}}\alpha_\omega}$, we compute $p_*\beta_\omega$.

Let E^j be a basis of $\mathfrak{n}$ with dual basis E_j. We write an element of $\mathfrak{n}'$ as $y = \sum_j y^j E_j$. Let

$$\omega = \sum_j \omega_j E^j \in (\mathcal{A}^1(P) \otimes \mathfrak{n})^G$$

be the connection form. By definition $(\omega_k, E_P^j) = \delta_k^j$ and ω of course by definition vanishes on the horizontal vectors. Under the identification $V' \cong P \times \mathfrak{n}'$, the 1-form

$$\alpha_\omega = \sum_j y^j\omega_j.$$

Define, as in ([3], chapter 7), the moment $\mu \in \mathfrak{g}' \otimes C^\infty(P) \otimes \mathfrak{n}$ of the connection ω by setting, for any $X \in \mathfrak{g}$

$$\mu(X) = -\omega(X_P).$$

Thus $\mu(X)_x$ is an element of $\mathfrak{n}$ and $\mu(X+Y)_x = \mu(X)_x - Y$ for all $Y \in \mathfrak{n}$ and $x \in P$. Let us compute

$$d_X\alpha_\omega := (d_{\mathfrak{g}}\alpha_\omega)(X).$$

We obtain

$$d_X\alpha_\omega = (y, \mu(X)) + \sum_j (dy^j\omega_j + y^j d\omega_j).$$

We have $e^{id_X\alpha_\omega} = e^{i(y,\mu(X))}A(y, dy, \omega, d\omega)$, where A is a polynomial expression in $y^j, dy^j, \omega_j, d\omega_j$. If Φ is a test function on $\mathfrak{g}$, the integral

$$\int_{\mathfrak{g}} e^{i(y,\mu(X))}\Phi(X)dX$$

is a function on V' rapidly decreasing over the fiber $\mathfrak{n}'$. This can be seen as follows: Consider the isomorphism (39) of $P \times \mathfrak{g}$ with $P \times \mathfrak{n} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$.

For $x \in P$, let

$$\mathfrak{q}_x := \{X \in \mathfrak{g}; \omega_x(X_P) = 0\}.$$

Thus $\mathfrak{q}_x$ is isomorphic to $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ under the natural projection $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ and

(40) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{q}_x.$$

We fix $x \in P$, and write $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}$. Let $X \in \mathfrak{g}$. Using the decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{q}$, we write $X = Y + Q$, with $Y \in \mathfrak{n}, Q \in \mathfrak{q}$. We have $(y, \mu(X)) = -(y, Y)$. Writing $\Phi(X)dX = \Phi(Y,Q)dQdY$, we get

$$\int_{\mathfrak{g}} e^{i(y,\mu(X))}\Phi(X)dX = \int_{\mathfrak{n}} e^{-i(y,Y)}\Psi(Y)dY,$$

where $\Psi(Y) = \int_{\mathfrak{q}}\Phi(Y,Q)dQ$. Clearly $\Psi(Y)$ is a C^∞-function with compact support on $\mathfrak{n}$. As Fourier transform of test functions are rapidly decreasing, it follows that

$$\int_{\mathfrak{g}} e^{id_X\alpha_\omega}\Phi(X)dX = A(y, dy, \omega, d\omega)\int_{\mathfrak{n}} e^{-i(y,Y)}\Psi(Y)dY$$

is a form on V' rapidly decreasing over the fiber $\mathfrak{n}'$ of the projection $V' \to P$.

This proves that $p_*\beta_\omega$ exists, as an element of $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. It is clearly G-invariant, so that $p_*\beta_\omega \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Furthermore $p_*\beta_\omega$ is $d_{\mathfrak{g}}$-closed:

$$(d_{\mathfrak{g}}p_*\beta_\omega, \Phi dX) = p_*(d_{\mathfrak{g}}\beta_\omega, \Phi dX) = 0.$$

If ω_t is a one-parameter smooth family of G-invariant connections, we denote $\alpha_{\omega_t}, \beta_{\omega_t}$ by α_t,β_t respectively. We have

$$\frac{d}{dt}\beta_t = \frac{d}{dt}(e^{id_{\mathfrak{g}}\alpha_t}) = id_{\mathfrak{g}}((\frac{d}{dt}\alpha_t) \wedge \beta_t).$$

The integral of $(\frac{d}{dt}\alpha_t \wedge \beta_t)$ over the fiber $\mathfrak{n}'$ exists in the sense of generalized functions and

$$\frac{d}{dt}p_*\beta_t = id_{\mathfrak{g}}p_*(\frac{d}{dt}\alpha_t \wedge \beta_t). \tag{41}$$

Thus the cohomology class of $p_*\beta_t$ is independent of the choice of the connection ω_t.

We now compute explicitly the element $\gamma_{\omega,o}$ defined in Proposition 79 and show, in particular, that $\gamma_{\omega,o}(X)$ is a differential form with real coefficients.

Let us fix $x \in P$. The orientation o on the vector bundle V gives rise to an orientation o_x on $\mathfrak{n}$ (which may depend on the connected component of $x \in P$). Let E^j be an ordered basis of $\mathfrak{n}$. We will say that this order is o-compatible, if this basis is of orientation o_x. The exterior product $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ of the components ω_i of the connection ω is a vertical form on P of maximum dimension.

Let $\nu' \in \Lambda^n\mathfrak{n}'$ be such that $(\nu', E^1 \wedge \cdots \wedge E^n) = 1$. The element ν' also determines an Euclidean measure dY on $\mathfrak{n}$ and a δ- function $|\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{n}}(Y) \in C^{-\infty}(\mathfrak{n})$ (cf Section 2, Formula 10).

We can also write

$$|\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{n}}(Y) = (2\pi)^{-\dim \mathfrak{n}} \int_{\mathfrak{n}'} e^{i(y,Y)}dy,$$

where dy is the measure on $\mathfrak{n}'$ dual to the Euclidean measure dY on $\mathfrak{n}$. Let $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ be the curvature of the connection ω. Thus $\Omega \in (\mathcal{A}^2(P) \otimes \mathfrak{n})^G$. We write

$$\Omega = \sum_j \Omega_j E^j.$$

Define the equivariant curvature of ω (as in [3], chap 7) by

$$\Omega(X) = \mu(X) + \Omega.$$

To simplify notation, we will use ν' to identify generalized functions and distributions and write $\delta_{\mathfrak{n}}$ instead of $|\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{n}}$.

Let us show that the generalized function $\delta_{\mathfrak{n}}(\Omega(X)) \in C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P))$ is well defined. We describe, at each point $x \in P$, $\delta_{\mathfrak{n}}(\Omega(X))_x$ as a generalized function on $\mathfrak{g}$ with values in the vector space $\Lambda T_x'P$. In the decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{q}_x$ given by formula 40, we write $X = Y + Q$. Then $\Omega(Y + Q)_x = -Y + \Omega_x$ and we define $\delta_{\mathfrak{n}}(\Omega(X))_x$ by its Taylor expansion:

$$\delta_{\mathfrak{n}}(\Omega(X))_x = \delta_{\mathfrak{n}}(-Y) + \sum_j \Omega_j(\partial_{E^j}\delta_{\mathfrak{n}})(-Y) + \cdots$$

Proposition 80 *Let $x \in P$ and let E^j be an ordered basis of $\mathfrak{n}$, with an order compatible with the orientation o_x. Then*

$$\gamma_{\omega,o}(X)_x = |\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{n}}(\Omega(X))_x \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n)_x.$$

Proof: The highest degree component of $e^{id\alpha_\omega} = e^{i(dy,\omega)+i(y,d\omega)}$ in dy_j's is equal to

$$c_n^{-1} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n e^{i(y,d\omega)}.$$

The curvature Ω is equal to $d\omega$ modulo terms in ω_j. Thus

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n e^{i(y,d\omega)} = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n \wedge e^{i(y,\Omega)}$$

and

$$\begin{aligned} p_*\beta_\omega(X)_x &= c_n^{-1}\Big(\int_{\mathfrak{n}'} e^{i(y,\mu(X)+\Omega)} dy\Big) \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n)_x \\ &= c_n^{-1}(2\pi)^n |\nu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{n}}(\Omega(X))_x(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n)_x. \end{aligned}$$

This proves the proposition. ∎
In particular, we see that $\gamma_{\omega,o}$ indeed belongs to $\mathcal{A}_G^{-\infty}(P)$ and we obtain Proposition 79. ∎

Remark 81 *It is easy to check directly from the formula of the above proposition that $\gamma_{\omega,o}$ is $d_{\mathfrak{g}}$ closed.*

Fix $x \in P$ and consider the decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{q}$ given by (40). The space $\mathfrak{q}$ is isomorphic to $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. The generalized function $\gamma_{\omega,o}(X)_x$ iz constant in the direction $\mathfrak{q}$: $\gamma_{\omega,o}(Y+Q)_x = \gamma_{\omega,o}(Y)_x$. Thus, if $f(Q)$ is a generalized function on $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, we can multiply $\gamma_{\omega,o}(Y)_x$ by $f(Q)$ and we obtain a generalized function on $\mathfrak{g}$ with values in $\Lambda T'_x P$.

Define the map

$$m_{\omega,o} : \mathcal{A}_{G/N}^{-\infty}(P/N) \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(P)$$

by setting

$$m_{\omega,o}(\alpha) = q^*(\alpha) \wedge \gamma_{\omega,o},$$

for $\alpha \in \mathcal{A}_{G/N}^{-\infty}(P/N)$.

The above discussion shows that $m_{\omega,o}$ is well defined. It is a cochain map of differential complexes

$$m_{\omega,o} : (\mathcal{A}_{G/N}^{-\infty}(P/N), d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}) \to (\mathcal{A}_G^{-\infty}(P), d_{\mathfrak{g}}).$$

Proposition 82 *The induced map in cohomology*

$$H^{-\infty}_{G/N}(P/N) \to H^{-\infty}_G(P),$$

from the cochain map

$$m_{\omega,o}(\alpha) = q^*(\alpha) \wedge \gamma_{\omega,o},$$

does not depend upon the choice of the G-invariant connection ω on the principal N-bundle $q : P \to P/N$. We will denote it by m_o.

Proof: This follows easily from Formula 41 on the variation of $p_*\beta_\omega$. ∎

We describe now the properties of $m_{\omega,o}$ in relation to the $\mathcal{A}^\infty_G(P)$-module structure on $\mathcal{A}^{-\infty}_G(P)$.

If $\alpha \in \mathcal{A}^\infty_G(P)$, we can define $\beta \in \mathcal{A}^\infty_G(P)$, by setting

$$\beta(X) := \alpha(X + \Omega(X)).$$

Explicitly, for $x \in P$, $Y \in \mathfrak{n}$, $Q \in \mathfrak{q}$, $X = Y + Q$, then $X + \Omega(X) = Y + Q + \Omega_x - Y = Q + \Omega_x$, thus $\beta(X)_x = \alpha(Q + \Omega)_x$ is defined by its Taylor expansion

$$\alpha(\Omega + Q)_x = \alpha(Q)_x + \sum_j \Omega_j(\partial_{E^j}\alpha)(Q)_x + \cdots$$

Thus $\beta(X + Y)_x = \beta(X)_x$, for $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{n}$. Hence $\beta \in C^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathcal{A}(P))$.

Let $\Gamma \subset \mathcal{A}(P)$ be the subspace of horizontal forms. The group G acts on Γ. The connection ω defines a horizontal projector $h : \mathcal{A}(P) \to \Gamma$ which commutes with the action of G. Define, for $\alpha \in \mathcal{A}^\infty_G(P)$,

$$W_\omega(\alpha)(X) := h(\alpha(X + \Omega(X))).$$

As $W_\omega\alpha = h(\beta)$, $W_\omega(\alpha) \in C^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma)$. The G-invariance implies that $W_\omega(\alpha) \in C^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma)^G$. As N is a normal subgroup of G, N acts trivially on $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, in particular $W_\omega(\alpha) \in C^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma^N)$. The space Γ^N is the space of forms on $B := P/N$, and we think of $W_\omega(\alpha)$ as an element of $C^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathcal{A}(B))$. The G-invariance implies that $W_\omega(\alpha) \in \mathcal{A}^\infty_{G/N}(P/N)$. Thus we have obtained a map

$$W_\omega : \mathcal{A}^\infty_G(P) \to \mathcal{A}^\infty_{G/N}(P/N).$$

Remark 83 . *The map W_ω is a generalization of the Chern-Weil map: If $N = G$, let $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ and consider $\phi(X)1 \in \mathcal{A}^\infty_G(P)$. Then $W_\omega(\phi(X)1) = \phi(\Omega)$ is the characteristic form on P/G associated to ϕ by the classical Chern-Weil homomorphism.*

Proposition 84 *If* $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(P)$, *then*

$$\alpha \wedge \gamma_{\omega,o} = q^*(W_\omega \alpha) \wedge \gamma_{\omega,o} = m_{\omega,o}(W_\omega(\alpha)).$$

In particular, for $\beta \in \mathcal{A}_{G/N}^{-\infty}(P/N)$,

$$\alpha \wedge m_{\omega,o}(\beta) = m_{\omega,o}(W_\omega \alpha \wedge \beta).$$

Proof: The proof follows easily from our formula given in Proposition 80 for $\gamma_{\omega,o}$. We have, for $x \in P$, $X = Y + Q$, $Y \in \mathfrak{n}, Q \in \mathfrak{q}$

$$\begin{aligned}
\alpha(X)_x \wedge \gamma_{\omega,o}(X)_x &= \alpha(Y+Q)_x \delta_{\mathfrak{n}}(\Omega - Y)_x (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n)_x \\
&= \alpha(\Omega+Q)_x \delta_{\mathfrak{n}}(\Omega - Y)_x (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n)_x \\
&= \alpha(X + \Omega(X))_x \wedge \gamma_{\omega,o}(X)_x.
\end{aligned}$$

As $\gamma_{\omega,o}$ is already of top degree in the vertical directions, we see that

$$\alpha(X+\Omega(X))_x \wedge \gamma_{\omega,o}(X)_x = h(\alpha(X+\Omega(X)))_x \wedge \gamma_{\omega,o}(X)_x$$

which is the formula we want. ∎

The following proposition is proved in [13]. We give another proof, which is an easy application of Proposition 84.

Proposition 85 *Let* G *be a Lie group and let* $N \subset G$ *be a closed normal subgroup of* G. *Let* P *be a right* G-*manifold such that the action of* N *is principal. Assume that the principal* N-*bundle* $q : P \to P/N$ *admits a* G-*invariant connection* ω. *Then the map*

$$W_\omega : \mathcal{A}_G^\infty(P) \to \mathcal{A}_{G/N}^\infty(P/N)$$

defined above is a cochain map:

$$W_\omega d_{\mathfrak{g}} = d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}} W_\omega.$$

Furthermore, if $\beta \in \mathcal{A}_{G/N}^\infty(P/N)$ *then*

$$W_\omega q^* \beta = \beta.$$

Proof: The last equation follows from the definition of W_ω, as $\alpha(Y+Q)_x = (q^*\beta)(Q)$ is independent of the variable $Y \in \mathfrak{n}$, thus $\alpha(\Omega + Q)_x = \alpha_x(Q)$ and is horizontal.

Let us prove that W_ω commutes with differentials. Let $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(P)$ and write γ instead of $\gamma_{\omega,o}$ and W instead of W_ω. Let us compute $d_{\mathfrak{g}}(\alpha \wedge \gamma)$:

As γ is $d_{\mathfrak{g}}$-closed, we obtain from Proposition 84,

$$d_{\mathfrak{g}}(\alpha \wedge \gamma) = d_{\mathfrak{g}}\alpha \wedge \gamma = q^*(W(d_{\mathfrak{g}}\alpha)) \wedge \gamma.$$

We also have

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{g}}(\alpha \wedge \gamma) &= d_{\mathfrak{g}}(q^*W(\alpha) \wedge \gamma) \\ &= d_{\mathfrak{g}}(q^*W(\alpha)) \wedge \gamma \\ &= q^*(d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}W(\alpha)) \wedge \gamma. \end{aligned}$$

Thus

$$m_{\omega,o}(W(d_{\mathfrak{g}}\alpha)) = m_{\omega,o}(d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}W(\alpha)).$$

But the map $m_{\omega,o}$ is easily seen to be injective and hence we obtain

$$W(d_{\mathfrak{g}}\alpha) = d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}W(\alpha).$$

∎

We also have ([13])

Theorem 86 *Let the notation and assumptions be as in the above proposition (85). Then the cochain map*

$$q^* : \mathcal{A}^{\infty}_{G/N}(P/N) \to \mathcal{A}^{\infty}_{G}(P)$$

induces an isomorphism in cohomology.

As $W_\omega q^* = I$, where I is the identity operator, the map W_ω provides an explicit inverse for q^* in cohomology.

Let us consider example 76 for the following special case: The manifold L is equal to the Lie group U and K is a closed subgroup of U. The manifold $L = U$ is a $U \times K$ manifold, where the action of $(u, k) \in U \times K$ on $x \in L$ is given by $x \cdot (u, k) = u^{-1}xk$. Let $G = U \times K$ and $P = U \times M$, for a K-manifold M. The action of both of the (normal) subgroups U and K of G on P are principal.

Consider first the action of U. The space P/U is our K-manifold M we started with. Consider the canonical Maurer-Cartan connection $\omega_U \in (\mathcal{A}^1(U) \otimes \mathfrak{u})^U$ defined by $\omega_U(X_U) = X$ for every $X \in \mathfrak{u}$. Here X_U is the vector field associated to the action of U on L by left translation, i.e $(X_U)_x$ is the tangent vector to the curve $\exp(-\epsilon X)x$. We have $\omega_U(Y_L)_x = -x \cdot Y$, for $x \in L$, $Y \in \mathfrak{k}$, as K acts by right translations on L. The connection ω_U extends trivially to a $(U \times K)$-invariant connection $\omega_U \otimes 1$ for the principal U-bundle $q_U : U \times M \to M$.

As before, trivialize the vertical bundle $V_U \cong P \times \mathfrak{u}$ (for q_U) by the map defined by sending the vertical tangent vector $(X_{U \times M})_{x,m}$ to (x, m, X), for $x \in$

$U, m \in M, X \in \mathfrak{u}$. Choose an orientation $o_{\mathfrak{u}}$ on $\mathfrak{u}$. We obtain a U-invariant orientation o_U on V_U, by setting $(o_U)_{x,m} = sign(\det_{\mathfrak{u}} x) o_{\mathfrak{u}}$. This orientation is $U \times K$ invariant, if and only if $\det_{\mathfrak{u}} k > 0$, for every $k \in K$. Thus, under this condition, we get a map

$$m_{o_U} : H_K^{-\infty}(M) \rightarrow H_{U \times K}^{-\infty}(U \times M).$$

Consider now the action of K. The quotient space $U \times M$ by the action of K is the induced space

$$\mathcal{M} = U \times_K M$$

with left action of U, that we considered in section 5. Assume there exists a U-invariant connection $\omega \in (\mathcal{A}^1(U)^U \otimes \mathfrak{k})^K$ for the principal K-bundle $U \rightarrow U/K$. Then the form $\omega \otimes 1$ on $U \times M$ is a U-invariant connection form for the principal K-bundle $q_K : U \times M \rightarrow U \times_K M$. Assume that $\det_{\mathfrak{k}} k > 0$ for every $k \in K$. Choose an orientation $o_{\mathfrak{k}}$ on $\mathfrak{k}$, then the fibration q_K has a unique $U \times K$-invariant orientation o_K given by $o_{e,m} = o_{\mathfrak{k}}$ for each point $m \in M$, where e is the identity of U. Thus, under these conditions, there exists a map

$$m_{o_K} : H_U^{-\infty}(U \times_K M) \rightarrow H_{U \times K}^{-\infty}(U \times M).$$

Given orientations $o_{\mathfrak{u}}, o_{\mathfrak{k}}$ of $\mathfrak{u}, \mathfrak{k}$ respectively, they determine an orientation o on $\mathfrak{u}/\mathfrak{k}$. We have $\det_{\mathfrak{u}/\mathfrak{k}} k > 0$ for all $k \in K$, as both numbers $\det_{\mathfrak{u}} k$ and $\det_{\mathfrak{k}} k$ are > 0, by assumption. Recall the map

$$Ind_{U/K,o} : H_K^{-\infty}(M) \rightarrow H_U^{-\infty}(U \times_K M)$$

from Section 5, Proposition 50

Lemma 87 *Let U be a Lie group and let K be a closed subgroup of U, such that the principal K-bundle $U \rightarrow U/K$ admits a U-invariant connection. Assume* $\det_{\mathfrak{k}} k > 0$, $\det_{\mathfrak{u}} k > 0$ *for all $k \in K$. Let $o_{\mathfrak{u}}, o_{\mathfrak{k}}, o$ be compatible orientations on* $\mathfrak{u}, \mathfrak{k}, \mathfrak{u}/\mathfrak{k}$, *then*

$$m_{o_U} = m_{o_K} Ind_{U/K,o}.$$

Proof: First, we explicitly compute the map m_{o_U}. Consider the canonical connection ω_U. Its curvature is 0. The equivariant curvature of ω_U is given, for the identity element e of U, $m \in M$, $X \in \mathfrak{u}, Y \in \mathfrak{k}$, by

$$\Omega_U(X,Y)_{(e,m)} = -X + Y.$$

Let $\ell = \dim U$. Let $\nu'_U \in \Lambda^\ell \mathfrak{u}'$ be a positive element (with respect to the orientation $o_{\mathfrak{u}}$). Let dx be the unique left U-invariant form on U, such that

$(dx)_e = \nu'$. Then ν'_U determines a δ-function $|\nu'_U|^{-1}\delta_{\mathfrak{u}}$ on $\mathfrak{u}$, and for $X \in \mathfrak{u}$, $Y \in \mathfrak{k}$,

$$\gamma_{\omega_U,o_U}(X,Y)_{(e,m)} = |\nu'_U|^{-1}\delta_{\mathfrak{u}}(Y-X)(dx)_e.$$

Thus, for $\alpha \in \mathcal{A}_K^{-\infty}(M)$,

$$(m_{\omega_U,o_U}\alpha)(X,Y)_{(e,m)} = |\nu'_U|^{-1}\delta_{\mathfrak{u}}(Y-X)(\alpha(Y)\wedge dx)_{(e,m)}.$$

More explicitly, for Φ_1 a test function on $\mathfrak{u}$, Φ_2 a test function on $\mathfrak{k}$,

$$\left(\int_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{k}}(m_{\omega_U,o_U}\alpha)(X,Y)\Phi_1(X)\Phi_2(Y)dXdY\right)_{(e,m)} =$$
$$\left(\left(\int_{\mathfrak{k}}\alpha(Y)\Phi_1(Y)\Phi_2(Y)dY\right)\wedge dx\right)_{(e,m)}$$

where dX is the Euclidean density on $\mathfrak{u}$ determined by ν'.

Now let us analyse the action of K on $U \times M$. Let $k = \dim K$, $n = \dim(U/K)$. Let E^i be an oriented basis of $\mathfrak{k}$ with dual basis $E_i \in \mathfrak{k}'$. Let $\nu'_K = E_1 \wedge \cdots \wedge E_k$. The connection ω determines a K-invariant decomposition $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{r}$. Thus E_i can be thought of as an element of $\mathfrak{u}'$ vanishing on $\mathfrak{r}$. If $\omega = \sum_i \omega_i E^i$, the form ω_i is the unique left U-invariant 1-form on U such that $(\omega_i)_e = E_i$. Let $pr_{\mathfrak{k}}$ (resp. $\mathrm{pr}_{\mathfrak{r}}$) be the projection from $\mathfrak{u}$ to $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{r}$) determined by ω.

Consider the connection $\tilde{\omega} := \omega\otimes 1$ for the principal K-bundle $q_K : U\times M \to U \times_K M$. Let $\Omega \in \mathcal{A}^2(U)\otimes\mathfrak{k}$ be the curvature of ω. The equivariant curvature of $\tilde{\omega}$ at the point $(e,m) \in U \times M$ is given, for $X \in \mathfrak{u}, Y \in \mathfrak{k}$ by

$$\Omega(X,Y)_{(e,m)} = (pr_{\mathfrak{k}}X - Y) + \Omega_e.$$

Thus the element $\gamma_{\tilde{\omega},o_K}$ is given by

$$(\gamma_{\tilde{\omega},o_K})(X,Y)_{(e,m)} = |\nu'_K|^{-1}\delta_{\mathfrak{k}}((pr_{\mathfrak{k}}X - Y) + \Omega_e)(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)_e.$$

Let $\mu' \in \Lambda^n\mathfrak{r}'$ be such that $\mu' \wedge \nu'_K = \nu'_U$. Let dr be the unique left U-invariant n-form on U such that $(dr)_e = \mu'$. The element μ' determines also a δ-function $|\mu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{r}}$ on the vector space $\mathfrak{r}$. Let $\alpha \in \mathcal{A}_K^{-\infty}(M)$. By definition, for $X \in \mathfrak{u}$, $(Ind_{U/K,o}\alpha)(X)_{(e,m)}$ is the projection (on the horizontal elements for the diagonal K-action) of $|\mu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{r}}(pr_{\mathfrak{r}}X)(\alpha(pr_{\mathfrak{k}}X)\wedge dr)_{(e,m)}$. As $\gamma_{\tilde{\omega},o_K}$ is already of top vertical dimension in the direction K, we have

$$((m_{\tilde{\omega},o_K}Ind_{U/K,o}\alpha)(X,Y))_{(e,m)} =$$
$$|\mu'|^{-1}\delta_{\mathfrak{r}}(pr_{\mathfrak{r}}X)(\alpha(\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}X)\wedge dr \wedge |\nu'_K|^{-1}\delta_{\mathfrak{k}}((pr_{\mathfrak{k}}X - Y) + \Omega)\wedge\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k)_{(e,m)}.$$

Now $dr \wedge \omega_1 \ldots \wedge \omega_k$ is the form dx of top degree on U and Ω is a form on U, so that $dx \wedge \delta_{\mathfrak{k}}((pr_{\mathfrak{k}}X - Y) + \Omega) = dx \wedge \delta_{\mathfrak{k}}(pr_{\mathfrak{k}}X - Y)$. Thus, if Φ_1 is a test function on $\mathfrak{u}$ and Φ_2 a test function on $\mathfrak{k}$, we obtain

$$(\int_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{k}}(m_{\tilde{\omega},o_K} Ind_{U/K,o}\alpha)(X,Y)\Phi_1(X)\Phi_2(Y)dXdY)_{e,m} =$$

$$((\int_{\mathfrak{k}}\alpha(Y)\Phi_1(Y)\Phi_2(Y)dY) \wedge dx)_{(e,m)}.$$

Comparing with the preceding calculation, we obtain the equality, for $X \in \mathfrak{u}, Y \in \mathfrak{k}, m \in M$,

$$(m_{\omega_U,o_U}\alpha)(X,Y)_{(e,m)} = (m_{\tilde{\omega},o_K} Ind_{U/K,o}\alpha)(X,Y)_{(e,m)}.$$

By U-invariance we obtain the equality at each point $(x,m) \in U \times M$ and the lemma is proved. ∎

Proposition 88 *Let U be a Lie group. Let K be a compact subgroup of U such that* $\det_{\mathfrak{u}} k = 1$, $\det_{\mathfrak{k}} k = 1$ *for all $k \in K$. Then for any K-manifold M, the maps*

$$m_{o_U} : H_K^{-\infty}(M) \to H_{U\times K}^{-\infty}(U \times M)$$

and

$$m_{o_K} : H_U^{-\infty}(U \times_K M) \to H_{U\times K}^{-\infty}(U \times M),$$

(defined earlier) are both isomorphisms.

Proof: Let $G = U \times K$. The space $P = U \times M$ is also the induced space $G \times_{\Delta(K)} M$, where K is embedded in $G = U \times K$ by the diagonal map Δ. It is easy to see from the explicit calculation above that the map m_{o_U} coincides with the map $Ind_{G/K,o}$. As K is compact, Theorem 52 of section 5 implies that m_{o_U} is an isomorphism. As $Ind_{U/K,o}$ is also an isomorphism, Lemma 87 gives us the proposition. ∎

Let us return to the general situation (S) of a right G-manifold P, with principal action of a normal subgroup N of G, satisfying Conditions (77) and (78). Then the map $m_o : H_{G/N}^{-\infty}(P/N) \to H_G^{-\infty}(P)$ is defined. Although it would be desirable to know that m_o is always an isomorphism, we are able to prove it only under additional hypotheses.

First consider the case where $G = N$. Thus $H_{G/N}^{-\infty}(P/N)$ is simply equal to $H(P/G) = H(B)$. As $P \to B = P/G$ is a principal bundle with group G, we can find a (G-invariant) connection ω for the bundle $P \to B$. We assume that this fibration has G-oriented-fibers. Thus we can construct a canonical element (up to the G-orientation o) $\gamma_o \in H_G^{-\infty}(P)$ and the map m_o.

Let Ω be the curvature of the connection ω for $P \to P/G$. If $\phi(X) \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$, then $\phi(\Omega) \in H(B)$ and is independent of the choice of ω. We thus define a structure of $C^\infty(\mathfrak{g})^G$-module on $H(B)$ via the Chern -Weil homomorphism: $\phi \cdot \beta = \phi(\Omega) \wedge \beta$, for $\phi \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ and $\beta \in H(B)$.

Theorem 89 *Let G be a Lie group acting principally (from the right) on a manifold P. Assume further that the quotient map $q : P \to P/G$ has G-oriented fibers under an orientation o. Then the map*

$$m_o : H(P/G) \to H_G^{-\infty}(P)$$

given by $m_o(\alpha) = q^*\alpha \wedge \gamma_o$ is an isomorphism of $C^\infty(\mathfrak{g})^G$-modules.

Proof: The fact that m_o is a morphism of $C^\infty(\mathfrak{g})^G$-modules, follows readily from Proposition 84.

It remains to see that m_o is an isomorphism of vector spaces:

If $P = G \times B$ is the direct product of G and B, with the action of an element $g_0 \in G$ given by $(g, m) \cdot g_0 = (g_0^{-1}g, m)$, for $g \in G, m \in B$, then by Proposition 88 (for $U = G$, $K = e$, $M = B$), the equivariant cohomology $H_G^{-\infty}(P)$ is isomorphic with $H(B)$ under the map m_o. Thus our theorem is true when the fibration $P \to B$ is trivial. (Remark: a trivial principal G-bundle is usually trivialized as $G \times B$, where the action of G is on the right $(g, m) \cdot g_0 = (gg_0, m)$. We can use the isomorphism $(g, m) \to (g^{-1}, m)$ to change this usual trivialization to the trivialization used above.)

Let us now return to the general situation . Choose a (G-invariant) connection form ω for the principal G-bundle q. Consider the element $\gamma_o \in H_G^{-\infty}(P)$ given in Proposition 79 (with respect to the given G-orientation o). Let U be an open subset of B. Denote by γ_U the restriction of γ_o to $q^{-1}(U)$. We denote by $m_U : H(U) \to H_G^{-\infty}(q^{-1}(U))$ the map m_o restricted to $q^{-1}(U)$: $m_U(\alpha) = q^*\alpha \wedge \gamma_U$.

Lemma 90 *Let U and V be two open subsets of B. Assume that the maps m_U, m_V, $m_{U\cap V}$ are isomorphisms, then $m_{U\cup V}$ is an isomorphism.*

Proof: This lemma is proved by a standard Mayer-Vietoris argument: Both the sequences

$$0 \to \mathcal{A}(U \cup V)) \to \mathcal{A}(U) \oplus \mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U \cap V) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(q^{-1}(U \cup V)) \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(q^{-1}(U)) \oplus \mathcal{A}_G^{-\infty}(q^{-1}(V)) \\ \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(q^{-1}(U \cap V)) \to 0$$

are exact. The surjectivity of the last map can be seen as follows: Choose a partition of unity f_U, f_V for $U \cup V$ subordinate to U, V. Then the functions $q^* f_U, q^* f_V$ are G-invariant functions. If $\beta \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(q^{-1}(U \cap V))$, then β is the image of $(-(q^* f_V)\beta, (q^* f_U)\beta) \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(q^{-1}(U)) \oplus \mathcal{A}_G^{-\infty}(q^{-1}(V)))$.

Thus the above Mayer-Vietoris sequences induce the long exact sequences in cohomology. The lemma follows from the five lemma. ∎

Now Theorem 89 follows by recalling that there is a finite open cover U_i of the base B such that the bundle $q^{-1}(U_i) \to U_i$ is trivial. ∎

We now return to the general situation (S) . Assume now that G is compact. Then the condition (78) on the existence of a G-invariant connection for the map $q : P \to P/N$ is always satisfied. We prove the following theorem

Theorem 91 *Let G be a compact Lie group and let P be a right G-manifold. G. Let N be a closed normal subgroup of G acting freely on P. We assume furthermore that the fibers of $q : P \to P/N$ admit a G-orientation o. Then the map*

$$m_o : H_{G/N}^{-\infty}(P/N) \to H_G^{-\infty}(P)$$

is an isomorphism.

Proof: We choose a G-invariant connection form $\omega \in (\mathcal{A}^1(P) \otimes \mathfrak{n})^G$ and use notation of the proof of Proposition 79. Let $\Gamma \subset \mathcal{A}(P)$ be the space of horizontal forms. The action of G on $\mathcal{A}(P)$ preserves the subspace Γ. Let us consider the algebra homomorphism $C : \Lambda\mathfrak{n}' \to \mathcal{A}(P)$, determined by sending $E_j \in \mathfrak{n}'$ to ω_j. We still denote by

$$C : \Gamma \otimes \Lambda\mathfrak{n}' \to \mathcal{A}(P)$$

the map given by $C(\alpha \otimes \xi) = \alpha \wedge C(\xi)$, for $\alpha \in \Gamma, \xi \in \Lambda\mathfrak{n}'$. The map C is an isomorphism. Furthermore C commutes with the action of G.

Recall the isomorphism (11) $U : P \times \mathfrak{g} \to P \times \mathfrak{n} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Let us explicitly write U, using coordinates. Let $n = \dim \mathfrak{n}$. Choose a basis Q^a, $n < a \leq \dim \mathfrak{g}$, of $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. We choose a basis G^j of $\mathfrak{g}$ such that the first n-vectors are the vectors E^j and the last ones are representatives of Q^a. Let $Q = \sum_{i>n} x_i Q^i$ be an element of $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Define, for $p \in P$,

$$k_j(p, Q) = (\omega_p(\sum_{i>n} x_i G^i)_P, E_j).$$

Then $Q \mapsto k_j(p, Q)$ is a linear function in Q varying smoothly in p. Let $X = \sum_i x_i G^i$. In these coordinates $x = (x_i)$, we have

$$U(p, X) = (p, Y(x), Q(x))$$

with
$$Q(x) = \sum_{i>n} x_i Q^i, Y(x) = \sum_{j=1}^{n}(x_j + k_j(p, Q(x))E^j.$$

We denote by U^* the isomorphism

$$U^* : C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, C^\infty(P)) \to C^{-\infty}(\mathfrak{g}, C^\infty(P))$$

given by $(U^*s)(X, p) = s(U(p, X))$, for $s \in C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, C^\infty(P))$.

Formula above shows that U^*s is indeed smooth in p and generalized in X.

Let
$$A = C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma) \otimes \Lambda\mathfrak{n}'.$$

With the help of U and C, we can define an isomorphism

$$T : A \to C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P))$$

by the following formula: For $s \in C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, C^\infty(P))$, $\alpha \in \Gamma \otimes \Lambda\mathfrak{n}'$,

$$T(s\alpha) = (U^*s)C(\alpha).$$

The group G acts on A by the action induced by the adjoint representation of G on $\mathfrak{n}, \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, and its natural action on Γ. We denote by A_G the space of G-invariants in A. Then T commutes with the action of G and induces an isomorphism still denoted by T between A_G and $\mathcal{A}_G^{-\infty}(P)$.

Consider the $\mathbb{Z}_+$-gradation on A

$$A^* = C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma) \otimes \Lambda^*\mathfrak{n}'.$$

We still denote by $d_\mathfrak{g}$ the operator on the space A obtained from the operator $d_\mathfrak{g}$ on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P))$ under the isomorphism T.

We write $Y \in \mathfrak{n}$ as $Y = \sum y_j E^j$. Let $\iota(E^j)$ be the contraction on $\Lambda\mathfrak{n}'$ by the vector E^j. Let $j_\mathfrak{n}$ be the operator of degree -1 on A given by

$$j_\mathfrak{n} = \sum_j y_j \iota(E^j).$$

The components Ω_j of the curvature Ω are horizontal forms. Thus exterior multiplication by Ω_j is an operator on Γ. We can consider the operator f acting on $C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma) \otimes \Lambda\mathfrak{n}'$ given by

$$f = \sum_j \Omega_j \otimes \iota(E^j).$$

The operator f is homogeneous of degree -1.

Let us write, using the $\mathbb{Z}_+$-grading of A, the operator $d_\mathfrak{g}$ on A as a sum of homogeneous operators d_i of degree i.

Lemma 92 *We have*

$$d_{\mathfrak{g}} = d_{-1} + d_0 + d_1$$

with $d_{-1} = -j_{\mathfrak{n}} + f$.

Proof: Let Q^a be a basis of $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Let $p \in P$. At the point $p \in P$, consider the decomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{q}_p$$

given in (40). We write $Q^a_p \in \mathfrak{q}_p$ for the unique element of $\mathfrak{q}_p$ above $Q^a \in \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. We have $\omega_p(Q^a_P) = 0$. The contraction by Q^a_P produces an operator ι^a on the space of horizontal forms Γ. Let $Q = \sum_a q_a Q^a \in \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. The coordinate function q_a acts on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$ by multiplication. The operator $\iota_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}} = \sum q_a \iota^a$ is an operator of degree 0 on $C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma) \otimes \Lambda \mathfrak{n}'$.

It is easy to see that the operator $\iota = \iota_{\mathfrak{g}}$ on $C^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(P))$ becomes the operator $\iota_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}} \oplus j_{\mathfrak{n}}$ on A under the isomorphism T.

Let us now analyse the differential d_P under the isomorphism T. If $I = \{1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n\}$ is an ordered multiindex, we write $\omega_I = \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}$. Let $s \in C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, C^\infty(P)), \alpha \in \Gamma$. We compute $d_P((U^* s)\alpha \wedge \omega_I)$. As d_P is a derivation, we analyse the exterior differential of each term of this product.

As $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = \Omega$, where Ω is horizontal, we see that the differential $d\omega_j$ of the component ω_j of the connection ω is the sum of an element of $C(\Lambda^2 \mathfrak{n}')$ and of $\Omega_j \in \Gamma$.

The differential d_P does not necessarily keep the space Γ of horizontal forms stable, but $d_P(\alpha) \in \Gamma \oplus \Gamma \otimes \mathfrak{n}'$, for $\alpha \in \Gamma$.

Finally, for $s(Y, Q, p) \in C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, C^\infty(P))$, we have, with $Y = \sum_j y_j E^j$,

$$T^{-1} d_P T s = d_P s + \sum_j \partial_{y_j} s(Y, Q, p) d_P k_j(p, Q).$$

Combining all these observations, we see that d_P becomes a sum of the homogeneous operators $f_{-1} + f_0 + f_1$ under the isomorphism T. Furthermore the term f_{-1} is the operator f. Hence we obtain the lemma. ∎

We now prove Theorem 91 by an induction argument similar to the argument of the proof of Theorem 39. Actually we will make use of the bigrading

$$A^{k,q} = C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma^q) \otimes \Lambda^k \mathfrak{n}',$$

where Γ^q refers to the $\mathbb{Z}^+$-grading on Γ given by the exterior degree.

Each of the spaces $A^{k,q}$ is stable by G, since N is a normal subgroup of G. As the group G is compact, the proof of Proposition 22 and Remark 23 (of section 3) implies that the homology groups of the operator $j_{\mathfrak{n}} : A^{*,q}_G \to A^{*-1,q}_G$ are equal to zero, except in maximal degree $n = \dim \mathfrak{n}$.

Let $\alpha \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(P)$ be such that $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$. We first show that α is homologous to an element β divisible by $\gamma_{\omega,o}$. We work with A_G and write again α for the element $T^{-1}(\alpha) \in A_G$. Let $\alpha = \sum_{k \geq k_0} \alpha_k$ with $\alpha_k \in A_G^k$. From the degree consideration (cf. Lemma 92), we see that $(j_{\mathfrak{n}} - f)\alpha_{k_0} = 0$.

Write now $\alpha_{k_0} = \sum_{q \geq q_0} \alpha_{(k_0,q)}$ with $\alpha_{(k_0,q)} \in A^{k_0,q}$. The operator f sends $A^{k_0,q}$ to $A^{k_0-1,q+2}$. Thus, we see again from degree considerations in q that $j_{\mathfrak{n}}(\alpha_{k_0,q_0}) = 0$. So if $k_0 < n$, there exists $\beta \in A_G^{k_0+1,q_0}$ such that $\alpha_{k_0,q_0} = j_{\mathfrak{n}}\beta$. The element $\alpha + d_{\mathfrak{g}}\beta$ is homologous to α and its term of degree k_0 is in $\sum_{q>q_0} A^{k_0,q}$. (Of course $\alpha + d_{\mathfrak{g}}\beta$ has no term of degree strictly less than k_0.) By successive approximations, we thus see that we can construct a representative of α in A_G^n. Now, let $\alpha \in A_G^n$ be such that $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$. In particular, $(j_{\mathfrak{n}} - f)(\alpha) = 0$. We can write at the point $p \in P$ $\alpha(Y,Q)_p = \lambda(Y,Q,p)(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n)_p$ where $\lambda(Y,Q,p) \in C^{-\infty}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{n}) \otimes \Lambda H_p^*$, where H_p is the space of horizontal vectors. Let us write $Y = \sum_j y_j E^j$. For every $j, 1 \leq j \leq n$, the equation $(j_{\mathfrak{n}} - f)\alpha = 0$ implies

$$(y_j - \Omega_j)\lambda(Y,Q,p) = 0.$$

It is not difficult to see (using for example the translation $\lambda(Y,Q,p) \mapsto \lambda(Y + \Omega, Q, p)$) that $\lambda(Y,Q,p) = \delta_{\mathfrak{n}}(-Y + \Omega)\beta(Q,p)$ where $\beta(Q,p)$ is a generalized function on $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ with values in ΛH_p^*. This way, we construct an element $\beta \in C^{-\infty}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma)$. As $\alpha \in A_G$ is G-invariant, $\beta \in (C^{-\infty}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma))^G$. As N is normal, the group N acts trivially on $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Thus, we see that $\beta \in (C^{-\infty}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \Gamma^N))^{G/N} = \mathcal{A}_{G/N}^{-\infty}(P/N)$ and $\alpha = q^*\beta \wedge \gamma_{\omega,o}$.

The equation $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$ and the injectivity of the map $m_{\omega,o}$ at the cochain level (cf. Proof of Proposition 85) implies that $d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}\beta = 0$. Thus β is closed and the map m_o is surjective. The injectivity is proved by a similar argument. ∎

Let K and U be compact subgroups of a Lie group L. Then L can be thought of as a $U \times K$-manifold under $x \cdot (u,k) = u^{-1}xk$, for $x \in L$, $u \in U$ and $k \in K$. If M is a K-manifold, we consider the $U \times K$ manifold $P = L \times M$, with twisted action as in Example 76.

Thus, specializing Theorem 91 to this example, we obtain

Proposition 93 *Let K, U be compact subgroups of a Lie group L. Assume that there exists a $U \times K$-invariant orientation o_K for the principal K-bundle $q_K : L \times M \to L \times_K M$. Then the map*

$$m_{o_K} : H_U^{-\infty}(L \times_K M) \to H_{U \times K}^{-\infty}(L \times M)$$

is an isomorphism. In particular, when $M =$ point,

$$H_U^{-\infty}(L/K) \cong H_{U \times K}^{-\infty}(L).$$

In the case of a free action, we have seen that $H_G^{-\infty}(M)$ is isomorphic to $H_G(M)$ under the multiplication by γ_o. However it may happen that the natural inclusion $H_G(M) \to H_G^{-\infty}(M)$ is identically 0. This is for example the case for the action of G on itself, at least when G is compact: The element $1 \in H_G(G) = \mathbb{R}$ has integral zero over G, while the integral of $\gamma_o \in H_G^{-\infty}(G)$ is equal to $vol(G, dg)\delta_{\mathfrak{g}}(X)$, as follows from the explicit formula for γ_o given above.

Assume that M is compact and oriented. Thus $\int_M$ defines a map from $H_G^{-\infty}(M)$ to $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$. It is clear from the formula, given in Proposition 80 for the generator γ_o that if $\alpha = \beta \wedge \gamma_o$ with $\beta \in H_G(M)$, then $\int_M \alpha$ is a derivative $P(\partial)\delta_{\mathfrak{g}}$ of the $\delta_{\mathfrak{g}}$- function on $\mathfrak{g}$. Moreover, the order of the derivative is less or equal that of $\dim(B)/2$. We will determine explicitly this map in a special case.

Let K be a compact connected semi-simple Lie group and let T be its maximal torus. Let W be the Weyl group of (K, T). Let $S(\mathfrak{t})^W$ be the subalgebra of W-invariants in $S(\mathfrak{t})$. Let I be the ideal in $S(\mathfrak{t})$ generated by all the invariants of positive degree. Similarly, let $S(\mathfrak{t}')^W$ be the subalgebra of W-invariants in $S(\mathfrak{t}')^W$ and let J be the ideal in $S(\mathfrak{t}')$ generated by all the invariants of positive degree. Let $\delta_{\mathfrak{t}}$ be the δ function on $\mathfrak{t}$ determined by the Euclidean measure on $\mathfrak{t}$ associated to the Killing form.

If $f \in C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ and $Q \in S(\mathfrak{t})$, then the derivative $Q(\partial)f$ of f by the constant coefficient differential operator $Q(\partial)$ is well defined.

Similarly, if $P \in S(\mathfrak{t})$ is a polynomial function on $\mathfrak{t}'$ and $Q \in S(\mathfrak{t}')$, we can define $Q(\delta)P$. An element $P \in S(\mathfrak{t})$ is called *harmonic*, if $Q(\delta)P = 0$, for all $Q \in J$. We denote by $\mathcal{H}$ the set of harmonic elements of $S(\mathfrak{t})$.

Lemma 94 *Let*

$$\mathcal{J} := \{f \in C^{-\infty}(\mathfrak{t}), Pf = 0, \text{for all}\, P \in J\}$$

be the set of generalized functions on $\mathfrak{t}$ *annihilated by all the* W*-invariant functions* P *without constant terms under multiplications. Then* $\mathcal{J}$ *is equal to*

$$\mathcal{J} = \{Q(\partial)\delta_{\mathfrak{t}}; Q \in \mathcal{H}\}.$$

Proof: Choose a W-invariant norm $|x|$ on $\mathfrak{t}$. If $f \in \mathcal{J}$, then f is annihilated by the invariant polynomial function $|x|^2$. Hence f is supported at the origin and there exists a $Q \in S(\mathfrak{t})$ such that $f = Q(\partial)\cdot\delta_{\mathfrak{t}}$. The equation $J\cdot Q(\partial)\cdot\delta_{\mathfrak{t}} = 0$ implies, by Fourier transform, that Q is harmonic. ∎

Let $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r}$ be the T-invariant decomposition of $\mathfrak{k}$, and let $n = \dim \mathfrak{r}$. Choose compatible orientations $o_{\mathfrak{k}}, o_{\mathfrak{r}}, o_{\mathfrak{t}}$ on $\mathfrak{k}, \mathfrak{r}, \mathfrak{t}$. Let κ', μ', ν' be the forms of maximal degree on $\mathfrak{k}, \mathfrak{r}, \mathfrak{t}$ respectively, associated to the Killing form $(,)$ and our choice of orientations . We denote also by κ' the left K-invariant form on K

coinciding with κ' at the identity e of K. Similarly, we extend ν' (resp. μ') as a left K-invariant $\dim\mathfrak{t}$-form (resp. $\dim\mathfrak{r}$-form) on K coinciding with ν' (resp μ') at e.

Let $\lambda \in \mathfrak{t}'$. The bilinear form on $\mathfrak{r}$ given by $B_\lambda(X,Y) = (\lambda, [X,Y])$ is an element of $\Lambda^2\mathfrak{r}'$. Let $\Delta = \{\alpha \in i\mathfrak{t}'\}$ be the set of roots of $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$. Choose an order on Δ compatible with the orientation $o_\mathfrak{r}$, as in ([12], page 40). Let U be the polynomial function $U(\lambda) = \prod_{\alpha>0}(\lambda, i\alpha)$. Then $U \in \mathcal{H}$ and the map $P \in S(\mathfrak{t}') \mapsto P(\partial)U$ induces an isomorphism from $S(\mathfrak{t}')/J$ to $\mathcal{H}$. Furthermore it is easy to see that $B_\lambda^{n/2} = ((n/2)!)U(\lambda)\mu'$.

Consider the free action of T on $M = K$ by $k \cdot t = kt$. The space $H_T(K)$ is isomorphic to $H(K/T)$. The Chern-Weil map $W : S(\mathfrak{t}') \to H(K/T)$ is surjective, with kernel J. Thus we identify $H_T(K)$ with the $S(\mathfrak{t}')$-module $S(\mathfrak{t}')/J$.

Proposition 95 *The map*

$$\int_K : H_T^{-\infty}(K) \to C^{-\infty}(\mathfrak{t})$$

is an isomorphism from $H_T^{-\infty}(K)$ to $\mathcal{J}$. Furthermore, we have

$$\int_K \gamma_o = (-1)^{n/2} vol(K) U(\partial) \cdot \delta_\mathfrak{t},$$

where $n = \dim K$.

Proof: Consider the curvature Ω of $K \to K/T$, determined by the T-invariant decomposition $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r}$. It is an element of $\Lambda^2\mathfrak{r}' \otimes \mathfrak{t}$. Let us compute $\exp\Omega$ in the algebra $\Lambda\mathfrak{r}' \otimes S(\mathfrak{t})$. The component of $\exp\Omega$ of exterior degree n is given by the formula $(\exp\Omega)_{[n]} = \mu' \otimes U$. The term of exterior degree n of $\delta_\mathfrak{t}(\Omega - X)$ is thus equal to $(-1)^{n/2}\mu' \otimes U(\partial)\delta_\mathfrak{t}$. Formula for $\gamma_o \in \mathcal{A}_T^{-\infty}(K)$ given in Proposition 80 shows that the term of maximal exterior degree of γ_o is

$$(\gamma_o)_{[\dim K]}(X) = (-1)^{n/2}(U(\partial) \cdot \delta_\mathfrak{t})(X)\kappa'.$$

Integrating over K, we obtain the formula for $\int_K \gamma_o$ given in the proposition.

As $H_T(K)$ is generated by 1 over $S(\mathfrak{t}')$, we obtain the equality $H_T^{-\infty}(K) = (S(\mathfrak{t}')/J)\gamma_o$. Furthermore, as seen by Fourier transform, the map $P \mapsto P(U(\partial) \cdot \delta_\mathfrak{t})$ induces an isomorphism from $S(\mathfrak{t}')/J$ to $\mathcal{J}$ and we obtain our proposition. ∎

Corollary 96 *The natural map $H_T(K) \to H_T^{-\infty}(K)$ is identically* 0.

Proof: Elements of $H_T(K) = H(K/T)$ come from the base, thus have integral zero on K. ∎

Remark 97 *If a torus acts on a compact oriented manifold M without fixed points, every (equivariant) cohomology class in $H_T(M)$ is of integral equal to zero, as follows from the localization formula (see [3], chap 7). The preceding example (i.e T acting on K by right translations) gives a striking case of an action of T without fixed points, where any non-zero equivariant cohomology class with generalized coefficients has a non-zero integral.*

10 A spectral sequence for T-equivariant cohomology

Let K be a compact connected Lie group and M a K- manifold. Let T be a maximal torus of K. In section 8, we have seen that the K-equivariant cohomology $H_K^{-\infty}(M)$ of M can be computed in terms of the T-equivariant cohomology of M. In this section, we will establish a spectral sequence relating the $S(\mathfrak{t}')$- modules $H_T(M)$ and $H_T^{-\infty}(M)$.

Let T be an abelian Lie group (not necessarily compact) and let M be a T-manifold Let $\mathfrak{t}$ be the Lie algebra of T. Then, as T is abelian,

$$\mathcal{A}_T(M) = S(\mathfrak{t}') \otimes \mathcal{A}(M)^T.$$

Similarly

$$\mathcal{A}_T^{-\infty}(M) = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T).s$$

We can then consider $\mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$ as obtained from the space $\mathcal{A}_T(M)$ by "extension" of coefficients.

Let us consider the space:

$$\Omega = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T) \otimes S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda\mathfrak{t}'$$

$\mathbb{Z}$-graded by its exterior degree with respect to $\Lambda\mathfrak{t}'$, i.e.

$$\Omega^p = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T) \otimes S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda^p\mathfrak{t}'.$$

Let E^i be a basis of $\mathfrak{t}$ with dual basis E_i of $\mathfrak{t}'$. An element $X \in \mathfrak{t}$ is written as $X = \sum_i x_i E^i$. We can consider an element of

$$V = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T) \otimes S(\mathfrak{t}')$$

as a form $\alpha(X,Y) \in \mathcal{A}(M)^T$ depending in a generalized way on the first variable $X \in \mathfrak{t}$ and in a polynomial way on the second variable $Y \in \mathfrak{t}$.

We consider on V the $\mathbb{Z}/2$-grading given by the parity of an element in $\mathcal{A}(M)^T$. Consider the $S(\mathfrak{t}')$-module structure on the space V defined by $(E_i \cdot$

$\alpha)(X,Y) = (x_i - y_i)\alpha(X,Y)$, i.e. $E_i(\theta \otimes P) = x_i\theta \otimes P - \theta \otimes y_iP$, for $\theta \in C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T)$ and $P \in S(\mathfrak{t}')$.

Let j be the Koszul differential of degree -1 on $\Omega = V \otimes \Lambda\mathfrak{t}'$, got from the $S(\mathfrak{t}')$-module V (cf. Formula 12 of section 3), i.e.

$$j = \sum_i (x_i - y_i) \otimes \iota_\Lambda(E^i).$$

(As usual, in extending $\iota_\Lambda(E^i)$ to the tensor product of the two superspaces V and $\Lambda\mathfrak{t}'$, we respect the sign rules (2) and (3) of section 1).

If $\alpha(X,Y) = \theta(X) \otimes P(Y) \in V$, the restriction $\alpha(X,X) = \theta(X)P(X)$ of α to the diagonal is well defined. Thus, for any $\beta \in \Omega$, the restriction $\beta(X,X)$ of β to the diagonal is an element of $C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T) \otimes \Lambda\mathfrak{t}'$. Let us denote by $r(\beta)$ the component of exterior degree zero of $\beta(X,X)$. Thus the map r is a map from Ω to $\mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$.

We can also write

$$\Omega = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}_T(M)) \otimes \Lambda\mathfrak{t}',$$

where by definition

$$C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}_T(M)) = \sum_{p \geq 0} C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}_T^p(M))$$

and $\mathcal{A}_T^*(M)$ refers to the $\mathbb{Z}_+$-grading of $\mathcal{A}_T(M)$ defined in section 2.

We extend pointwise the differential $d_\mathfrak{t}$ of $\mathcal{A}_T(M)$ to $C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}_T(M))$ by defining $(\overline{d_\mathfrak{t}}f)(X) = d_\mathfrak{t}(f(X))$. Consider the operator

$$d_0 = \overline{d_\mathfrak{t}} \otimes I$$

of degree 0 (with respect to the $\mathbb{Z}$-grading of $\Lambda\mathfrak{t}'$) on Ω.

The operators j and d_0 satisfy $j^2 = 0$, $d_0^2 = 0$, $jd_0 + d_0j = 0$.

Consider the $\mathbb{Z}/2$ grading on Ω given by the parity of forms on $\mathcal{A}(M)^T$ together with the $\mathbb{Z}$-grading of $\Lambda\mathfrak{t}'$. Then d_0 and j are odd operators. Define the operator

$$D = j + d_0.$$

The operator D is an odd operator on Ω of square equal to 0.

Let $H(\Omega, D)$ be the cohomology space of D. It is a $\mathbb{Z}/2$-graded space.

Proposition 98 *The map $r : \Omega \to \mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$ satisfies $rD = d_\mathfrak{t}r$. Moreover r induces an isomorphism in cohomology. Thus the cohomology of the complex (Ω, D) is isomorphic to $H_T^{-\infty}(M)$.*

Proof: Since $rj = 0$, and $r(\theta(X) \otimes y_i\iota(E^i_M)P(Y)) = x_i\iota(E^i_M)(\theta(X)P(X))$ if $\theta(X) \in C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ and $P(Y) \in \mathcal{A}_T(M)$, the first assertion is immediate,. Let $n = \dim \mathfrak{t}$. As V is a tensor product of the free module $S(\mathfrak{t}')$ by $C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T)$, the space V is a free $S(\mathfrak{t}')$-module (cf. Corollary 16 of section 3). Thus by Proposition 14 the Koszul complex

$$0 \to \Omega^n \xrightarrow{j} \quad \cdots \xrightarrow{j} \Omega^1 \xrightarrow{j} \Omega^0 \xrightarrow{r} \mathcal{A}_T^{-\infty}(M) \to 0$$

is exact at all the levels Ω^i, for all $i > 0$. Exactness at Ω^0 is easy to check.

Let Ω' be the exact complex for j defined by $\Omega'^i = \Omega^i$ if $i > 0$ and $\Omega'^0 = Kerr$. Choose any homotopy h of Ω' of degree 1 i.e. $hj + jh = I_{\Omega'}$. Consider $N = hd_0 + d_0h$. Then N is an operator of degree 1 on Ω'. We have $hD + Dh = I + N$ on Ω', and N is a nilpotent operator commuting with D. Let us prove that r is surjective in cohomology: Let $\theta \in \mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$ be such that $d_\mathfrak{t}\theta = 0$. We lift θ as a form in two variables $\Theta(X, Y) = \theta(X)$ constant in Y, i.e $\Theta = \theta \otimes 1$. Then $r(D\Theta) = 0$ i.e $D\Theta = d_0\Theta \in \Omega'$. Thus $(I + N)D\Theta = (hD + Dh)D\Theta = DhD\Theta$ i.e. $D(\Theta - (I + N)^{-1}hD\Theta) = 0$. The element $w(\Theta) := \Theta - (I + N)^{-1}hD\Theta$ still satisfies $r(w(\Theta)) = \theta$, and is a cocycle for D.

Similarly, we prove that r is injective: Let $\alpha \in \Omega$ be such that $D\alpha = 0$ and $r(\alpha) = d_\mathfrak{t}\theta$. Then $\alpha' := \alpha - D\Theta$ satisfies $D\alpha' = 0$ and $r\alpha' = 0$. Then $\alpha' = D(I + N)^{-1}h\alpha'$ is a boundary. This proves the proposition. ∎

We give below a more explicit way to construct a representative in $H(\Omega, D)$ of an element in $H_T^{-\infty}(M)$.

If $Y \in \mathfrak{t}$, we define as in section 4 the tensor product contraction $\iota_t(Y) = \iota(Y_M) + \iota_\Lambda(Y)$ on Ω. The horizontal space Ω_{hor} is then defined as

$$\Omega_{hor} = \{\alpha \in \Omega, \iota_t(Y)\alpha = 0 \,\text{for all}\, \mathrm{Y} \in \mathfrak{t}\}.$$

The space Ω_{hor} is stable by D. There is a canonical projection map (see Definition 28 of section 4) from Ω to Ω_{hor} given by

$$h = \prod_i (I - \epsilon_i \iota_t(E^i))$$

where ϵ_i denotes the multiplication by E_i on $\Lambda\mathfrak{t}'$.

We denote by $w : \mathcal{A}_T^{-\infty}(M) \to \Omega$ the map $w(\theta) = h(\Theta)$, where Θ is the lift of θ constant in Y.

We have

$$w(\theta) = \Theta + (-1)^{|\theta|} \sum_i \iota(E^i_M)\Theta \otimes E_i - \sum_{i<j} \iota(E^i_M)\iota(E^j_M)\Theta \otimes E_i \wedge E_j + \cdots$$

Lemma 99 *The map w satisfies: $wd_\mathfrak{t}\theta = Dw\theta$. Further w induces an isomorphism in cohomology, inverse to the map in cohomology induced by r.*

Proof: Both terms of this equation belong to Ω_{hor}. Thus, to prove that they are equal, we need only to compute their terms of zeroth exterior degree. The element $wd_{\mathfrak{t}}\theta$ has zero-exterior degree term equal to the lift of $(d_{\mathfrak{t}}\theta)(X) = d_M\theta(X) - \sum_i x_i\iota(E_M^i)\theta(X)$, constant in Y.

The element $Dw\theta$ has zero-exterior degree term

$$d_M\theta(X) - \sum_i y_i\iota(E_M^i)\theta(X) + \sum_{i,j}(y_i - x_i)\iota_\Lambda(E^i)(\epsilon_j(\iota(E_M^j)\theta(X)))$$

which is equal to

$$d_M\theta(X) - \sum_i x_i\iota(E_M^i)\theta(X).$$

It is clear that $rw = 1$. But since the map r induces an isomorphism in cohomology, we get that w also induces isomorphism in cohomology inverse to that of r. ∎

The complex (Ω, D) admits an increasing filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_x\}_{0\leq p\leq \dim \mathfrak{t}}$ by the exterior degree in $\Lambda\mathfrak{t}'$ i.e . $\mathcal{F}_p = \otimes_{k\leq p}\Omega^k$. This canonically gives rise to a convergent homology spectral sequence E^r converging to $H(\Omega, D)$.

Lemma 100 *Assume that T is compact* abelian *and M is a paracompact T-manifold, such that $H_T^*(M)$ is finite dimensional in each degree. Then*

$$E_p^1 = C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes H_T(M) \otimes \Lambda^p\mathfrak{t}'.$$

Proof: By definition

$$\begin{aligned} E_p^1 &= H(\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_{p-1}, D) \\ &= H(\mathcal{F}_p/\mathcal{F}_{p-1}, d_0) \qquad \text{since } j(\mathcal{F}_p) \subset \mathcal{F}_{p-1}, \\ &\cong H(C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}_T(M)) \otimes \Lambda^p\mathfrak{t}', d_0) \\ &\cong H(C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}_T(M)), \overline{d_{\mathfrak{t}}}) \otimes \Lambda^p\mathfrak{t}'. \end{aligned}$$

It is easy to see that $Ker(\overline{d}_{\mathfrak{t}}) = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, Z_T(M))$ and moreover $Im(\overline{d}_{\mathfrak{t}}) \subset C^{-\infty}(\mathfrak{t}, B_T(M))$. Further, by Theorem 117 (of the Appendix), we get a continuous splitting of the map

$$\mathcal{A}_T^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{\mathfrak{t}}} B_T^n(M),$$

and hence $Im(\overline{d}_{\mathfrak{t}}) = C^{-\infty}(\mathfrak{t}, B_T(M))$. Also $H_T^n(M)$ being finite dimensional, the projection $Z_T^n(M) \to H_T^n(M)$ admits a continuous splitting. From this we easily conclude that

$$H(C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}_T^*(M)), \overline{d}_{\mathfrak{t}}) \cong C^{-\infty}(\mathfrak{t}, H_T^*(M)).$$

This proves the lemma. ∎

Remark 101 *If T is compact and $H^*(M)$ is finite dimensional in each degree then so is $H_T^*(M)$. This follows from the Serre spectral sequence for the fibration $M \to E(T) \times_T M \to B(T)$. In particular, for compact M, $H_T^*(M)$ is finite dimensional in each degree.*

The differential $d^1 : E_p^1 \to E_{p-1}^1$ of degree -1 induced by $D = d_0 + j$ on $E^1 = C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes H_T(M) \otimes \Lambda\mathfrak{t}'$ is the Koszul differential j associated to the canonical $S(\mathfrak{t}')$-module stuctures on $C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ and $H_T(M)$. Hence, combining Proposition 98, Lemma 100 and Lemma 17 we obtain the main result of this section.

Theorem 102 *Let T be a compact abelian Lie group and let M be a manifold such that $H_T^*(M)$ is finite dimensional in each degree. Then the cohomology group $H_T^{-\infty}(M)$ has an increasing $\mathbb{Z}_+$-filtration H_p, and a convergent homology spectral sequence with*

$$E_p^2 = Tor_p^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M))$$

and

$$E_p^\infty = H_p/H_{p-1},$$

where $C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ and $H_T(M)$ have their canonical $S(\mathfrak{t}')$-module structures.

This spectral sequence is functorial with respect to the T-equivariant smooth maps. Further the total $\mathbb{Z}/2$-grading given by the standard $\mathbb{Z}_+$ degree on $H_T^*(M)$ together with the p index in Tor is compatible with the $\mathbb{Z}/2$-grading of $H_T^{-\infty}(M)$.

We obtain a number of corollaries:

Corollary 103 *Let M, N be T-manifolds such that $H_T^*(M)$ is finite dimensional in each degree, with a T- equivariant smooth map $f : M \to N$. Assume that the induced map $f^* : H_T^*(N) \to H_T^*(M)$ is an isomorphism in T- equivariant cohomology . Then the induced map*

$$f^* : H_T^{-\infty}(N) \to H_T^{-\infty}(M)$$

is also an isomorphism.

Proof: It follows immediately from the above spectral sequence. ∎

The following corollary was obtained in section 6 for compact T- manifolds as a consequence of Theorem 61 (cf. Corollary 64).

Corollary 104 *For any T-manifold M such that $H_T^*(M)$ is a projective finitely generated $S(\mathfrak{t}')$- module, the canonical map*

$$\beta_{T,M} : C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')} H_T(M) \to H_T^{-\infty}(M)$$

is an isomorphism.

Proof: Since $H_T(M)$ is $S(\mathfrak{t}')$-projective, the spectral sequence of Theorem 102 has $E_p^2 = 0$, unless $p = 0$. In particular the spectral sequence degenerates at the E^2-term itself. Also

$$E_0^2 = Tor_0^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M)) \approx C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')} H_T(M).$$

This proves the corollary. ∎

Let T be an abelian Lie group and let M be a T-manifold. The T-equivariant de Rham complex with generalized coefficients admits a graded subcomplex obtained by forming the algebraic tensor product

$$\tilde{\mathcal{A}}_T^{-\infty}(M) := C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes \mathcal{A}(M)^T.$$

This subcomplex is stable by the action of $S(\mathfrak{t}')$. We denote the cohomology of this subcomplex by $\tilde{H}_T^{-\infty}(M)$. We have the following comparison:

Proposition 105 *Let T be a compact abelian Lie group and let M be a T-manifold such that $H_T^*(M)$ is finite dimensional in each degree. Then the canonical map $\tilde{H}_T^{-\infty}(M) \to H_T^{-\infty}(M)$, induced from the inclusion $\tilde{\mathcal{A}}_T^{-\infty}(M) \to \mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$, is an isomorphism.*

Proof: Recall the definition of the complex (Ω, D) and define a subcomplex

$$\tilde{\Omega} := C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes \mathcal{A}(M)^T \otimes S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda \mathfrak{t}'.$$

The cochain map $r : \Omega \to C^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M)^T)$ restricts to a cochain map (denoted by) $\tilde{r} : \tilde{\Omega} \to C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes \mathcal{A}(M)^T$. By the same proof as that of Proposition 98, we can easily see that $\tilde{r}$ induces isomorphism in cohomology.

Thus the augmented complex

$$\tilde{\Omega} \xrightarrow{\tilde{r}} \tilde{\mathcal{A}}_T^{-\infty}(M)$$

maps by the natural inclusion i into the augmented complex

$$\Omega \xrightarrow{r} \mathcal{A}_T^{-\infty}(M).$$

The filtration $\{\mathcal{F}_p\}$ of Ω gives rise to the filtration $\{\tilde{\mathcal{F}}_p := \mathcal{F}_p \cap \tilde{\Omega}\}$ of $\tilde{\Omega}$. In particular, we get the induced map $\tilde{E}_p^r \to E_p^r$, where $\tilde{E}_p^r$ is the spectral sequence corresponding to the filtration $\{\tilde{\mathcal{F}}_p\}$. We have $\tilde{E}_p^1 = C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes H_T(M) \otimes \Lambda^p \mathfrak{t}'$. In particular, $\tilde{E}_p^1 \to E_p^1$ is an isomorphism, and hence the inclusion $\tilde{\Omega} \to \Omega$ induces isomorphism in cohomology. But then the map $i : \tilde{\mathcal{A}}_T^{-\infty}(M) \to \mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$ also induces an isomorphism in cohomology. ∎

The spectral sequence obtained in Theorem 102 may sometimes be used to determine the torsion groups $Tor^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M))$. For example, if K is a compact connected Lie group with maximal torus T and if M is a K-manifold such that $Tor_i^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M))$ is equal to zero except for $i = i_0$ (for some i_0), then from the degenerate spectral sequence of Theorem 102 and Theorem 70,

$$Tor_{i_0}^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M)) \cong S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} H_K^{-\infty}(M).$$

As we next show, this hypothesis is valid when M is homogeneous under K. Let U be a closed subgroup of K. Let us choose a maximal torus T_U of U and let T be a maximal torus of K containing T_U.

Proposition 106 *Let $M = K/U$, where K is a compact connected Lie group and U a closed subgroup. Let $\chi : U \to \pm 1$ be the character $\chi(u) := \det_{\mathfrak{k}/\mathfrak{u}} u$. Then the group*

$$Tor_i^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M)) = 0 \qquad \text{for}\, i \neq d := \dim(T/T_U)$$

and

$$Tor_d^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M)) \cong S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{k}')^K} C^{-\infty}(\mathfrak{u})^{\chi}.$$

Proof: Let $\mathfrak{t}_U$ be the Lie algebra of T_U. Let $W_U \subset GL(\mathfrak{t}_U)$ be the Weyl group of the pair (U, T_U) (i.e.$W_U = N_U(T_U)/T_U$). If $P \in S(\mathfrak{t}')^W$ is a W-invariant function, its restriction to $\mathfrak{t}_U$ is W_U invariant (to see this, use Chevalley's theorem to conclude that P is the restriction to $\mathfrak{t}$ of a K-invariant polynomial on $\mathfrak{k}$) . From Proposition 68 of section 7, we have $H_T(M) \cong S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}'_U)^{W_U}$. Thus

$$Tor^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M)) \cong Tor^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}'_U)^{W_U}).$$

Consider $N := S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}'_U)$ as a $(S(\mathfrak{t}'), W_U)$-module by the action of $S(\mathfrak{t}')$ on the left and the action of W_U on the right factor. Then $N^{W_U} = S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (S(\mathfrak{t}'_U)^{W_U})$. The space $Tor^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), N)$ thus carries a canonical structure of $(S(\mathfrak{t}'), W_U)$-module and moreover by the standard averaging process

$$Tor^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), H_T(M)) \cong Tor^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), N)^{W_U}.$$

Thus, to prove the vanishing part, we prove that $Tor_i^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), N) = 0$ except for $i = d$.

Let $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_U$, so that $\mathfrak{t}'_1 \subset \mathfrak{t}'$. Consider the partial Koszul complex $j_1 = j_{\mathfrak{t}_1} : S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda\mathfrak{t}'_1 \to S(\mathfrak{t}'_U)$. This gives a $S(\mathfrak{t}')$-free resolution of $S(\mathfrak{t}'_U)$. As $S(\mathfrak{t}')$ is free over $S(\mathfrak{t}')^W$, the complex $S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda\mathfrak{t}'_1)$ with differential $I \otimes j_1$ gives a $S(\mathfrak{t}')$-free resolution of $S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}'_U)$. Thus $Tor^{S(\mathfrak{t}')}(C^{-\infty}(\mathfrak{t}), N)$ is the homology of the complex

$$C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')} (S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda\mathfrak{t}'_1)) \cong C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda\mathfrak{t}'_1)$$

i.e. of the complex
(42)

$$0 \to C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda^d \mathfrak{t}'_1) \xrightarrow{j_1} C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (S(\mathfrak{t}') \otimes \Lambda^{d-1} \mathfrak{t}'_1)$$
$$\cdots \xrightarrow{j_1} C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (S(\mathfrak{t}') \otimes \mathfrak{t}'_1) \xrightarrow{j_1} C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}') \to 0.$$

Consider the isomorphism obtained in Proposition 66 of section 6

$$C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}') \cong C^{-\infty}(\mathfrak{t})$$

induced from the multiplication map. Hence, the map $P_1 \otimes F \otimes P_2 \mapsto P_1 \otimes F P_2$ gives an isomorphism of

$$S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} C^{-\infty}(\mathfrak{t})^\epsilon \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} S(\mathfrak{t}')$$

with

$$S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} C^{-\infty}(\mathfrak{t}).$$

Thus we obtain an isomorphism of the complex (42) with the complex

$$S(\mathfrak{t}') \otimes_{S(\mathfrak{t}')^W} (C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes \Lambda \mathfrak{t}'_1)$$

under the differential $I \otimes j_1^{-\infty}$. By Proposition 22 of section 3, the homology of the complex $(C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \otimes \Lambda \mathfrak{t}'_1, j_1^{-\infty})$ is non-zero only in degree d. As $S(\mathfrak{t}')$ is free over $S(\mathfrak{t}')^W$, we obtain the vanishing part of the proposition. Furthermore, by the remark just before this proposition and Theorem 46 of section 5, we obtain the assertion regarding Tor_d. ∎

11 Localization formula

Let T be a torus, i.e. a compact connected abelian Lie group, acting on a compact oriented manifold M. Let $\alpha \in H_T^{-\infty}(M)$. The integral $\Theta(X) := \int_M \alpha(X)$ of α is a generalized function on $\mathfrak{t}$. When $\alpha \in H_T^\infty(M)$, the localization formula (see [3], chapter 7) gives $\Theta(X)$ in terms of the restriction of α to the fixed submanifold M^T of M. As shown by Proposition 95 of section 9 (where M^T is empty but the map $\int_M$ is not zero), it is not possible to determine $\int_M \alpha$ in terms of $\alpha|M^T$ in the generalized case. The main reason for the difference between the $C^{\pm\infty}$-cases is that the space $H_T^{-\infty}(point) = C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ is not torsion free over $S(\mathfrak{t}')$. Indeed, for $\alpha \in H_T^{-\infty}(M)$, we will find a non-zero polynomial $P \in S(\mathfrak{t}')$ and determine $P(X) \int_M \alpha(X)$ in terms of $\alpha|M^T$, as in the C^∞-case.

The localization formula, we are going to give in the generalized case, involves choosing a T-equivariant embedding of M in a real representation space

V of T. This is always possible, see ([9], Chap 6, Theorem 4.1). Let V_0 be the subspace of T-fixed vectors and let

$$V = V_0 \oplus V_1$$

be the T-invariant decomposition. Thus $\det_{V_1}(X)$ is a non zero polynomial on $\mathfrak{t}$. The fixed submanifold $M_0 = M^T$ of M is given by $M \cap V_0$. The space V_1 is even dimensional. Let us choose an orientation on V_1. This orientation determines a polynomial square root of $\det_{V_1}(X)$. Using a T-invariant metric on V, we view the normal bundle $\mathcal{N}$ of M_0 in M as a T-equivariant subbundle of the trivial bundle $M_0 \times V_1$. The bundle $\mathcal{N}$ is T-orientable and is of even rank. Let us denote by $\mathcal{Q}$ the supplementary bundle:

$$M_0 \times V_1 = \mathcal{N} \oplus \mathcal{Q}.$$

The bundle $\mathcal{Q}$ is a T-equivariant bundle over M_0. We choose orientations of $V_1, \mathcal{N}, \mathcal{Q}$ in a compatible way. Let $u_{\mathcal{N}} \in H_{cpt,T}(\mathcal{N})$, $u_{\mathcal{Q}} \in H_{cpt,T}(\mathcal{Q})$ be the T-equivariant Thom classes (see Definition 10 section 2) of $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$ respectively. Let $\chi(\mathcal{N}) \in H_T(M_0)$ (resp.$\chi(\mathcal{Q})$) be the equivariant Euler class of the bundle $\mathcal{N} \to M_0$ (resp. $\mathcal{Q}$). By definition (we differ here from the definition of [3], chapter 7), the restriction of $u_{\mathcal{N}}$ (resp. $u_{\mathcal{Q}}$) to M_0 via the zero section is equal to $\chi(\mathcal{N})$ (resp. $\chi(\mathcal{Q})$). We have the following equality in $H_T(M_0)$:

$$(43) \qquad (-2\pi)^{-\dim V_1/2} \det{}_{V_1}^{1/2}(X) \cong \chi(\mathcal{N})(X)\chi(\mathcal{Q})(X).$$

Let us fix an orientation of M and consider the compatible orientation of M_0. Following is the localization formula in generalized cohomology.

Theorem 107 *Let T be a torus acting on a compact oriented manifold M. For $\alpha \in H_T^{-\infty}(M)$, we have the equality*

$$(-2\pi)^{-\dim V_1/2} \det{}_{V_1}^{1/2}(X) \int_M \alpha(X) = \int_{M^T} \alpha(X)\chi(\mathcal{Q})(X)$$

as elements of $C^{-\infty}(\mathfrak{t})$.

Proof: The proof is obtained by imitating the proof in the C^∞-case given in [2]. Consider the Thom class $u_1(X) \in H_{cpt,T}(V_1)$ of the T-vector space V_1, thought of as a T-equivariant vector bundle $q : V_1 \to$ *point*. We have

$$(-2\pi)^{-\dim V_1/2} q^*(\det{}_{V_1}^{1/2}(X)) \sim u_1(X)$$

as elements of $H_T(V_1)$. Consider the map $p : M \to V_1$ induced by the projection of $V = V_0 \oplus V_1$ to V_1. Thus

$$(-2\pi)^{-\dim V_1/2} \det{}_{V_1}^{1/2}(X) \int_M \alpha(X) = \int_M \alpha(X) p^* u_1(X).$$

We can take a representative of u_1 (as a cohomology class in $H_{cpt,T}(V_1)$) supported in a sufficiently small neighborhood of 0 in V_1. Thus we may assume that p^*u_1 is compactly supported in a T-stable tubular neighborhood U of $M_0 = p^{-1}(0)$. Let π be the T-equivariant projection of $U \to M_0$. Let i be the inclusion of M_0 in M. We have seen in section 2, Proposition 8, that the restriction $\alpha|U$ of α to U is equivalent to $\pi^*i^*\alpha$ in $H_T^{-\infty}(U)$. As p^*u_1 is compactly supported in U, we obtain

$$\begin{aligned}\int_M \alpha(X)p^*u_1(X) &= \int_U \alpha(X)p^*u_1(X)\\ &= \int_U \pi^*i^*\alpha(X)p^*u_1(X)\\ &= \int_{M_0} \alpha(X)\pi_*p^*u_1(X).\end{aligned}$$

Let $\beta = p^*u_1 \in H_{cpt,T}(U)$. It remains to show that $\pi_*\beta(X) = \chi(\mathcal{Q})(X)$ in $H_T(M_0)$.

The restriction of $\beta(X)$ to M_0 is equal to $(-2\pi)^{-\dim V_1/2}\det{}_{V_1}^{1/2}(X)$. The tubular neighborhood U of M_0 in M is T- equivariantly diffeomorphic to the normal bundle $\mathcal{N} \to M_0$. Let $u_{\mathcal{N}}$ be the equivariant Thom class of $\mathcal{N}$. Then, it is well known (see the proof of Proposition 11 of section 2) that $\beta = (\pi^*\pi_*\beta)u_{\mathcal{N}}$ in $H_{cpt,T}(U)$. By restricting this equality to M_0, we obtain

$$(-2\pi)^{-\dim V_1/2}\det{}_{V_1}^{1/2}(X) \cong \pi_*\beta(X)\chi(\mathcal{N})(X)$$

in $H_T(M_0)$. As $\det_{V_1}(X)$ is a non zero polynomial, $\chi(\mathcal{N})(X)$ is invertible on the open set $\det_{V_1}(X) \neq 0$. By Formula (43), we obtain the equality $\pi_*\beta(X) = \chi(\mathcal{Q})(X)$. This proves the theorem. ∎

Let us illustrate the localization formula in the simple example of $M = P_1(\mathbb{C})$.

Let p_1 be the point at infinity of M. Then $U = M - \{p_1\}$ is isomorphic to $\mathbb{C}$. We consider the action of $T = \{e^{i\theta}\}$ on $P_1(\mathbb{C})$ given by $z \mapsto e^{i\theta}z$. This action has two fixed points $p_0 = 0$ and $p_1 = \infty$. We write still p_0, p_1 for the injections of p_0 and p_1 in M.

We write an element of $\mathfrak{t}$ as $X = \theta J$, with $\exp 2\pi J = 1$. Let us first describe the T-equivariant cohomology of M. It is a free $S(\mathfrak{t}')$-module with two generators α, β. We can normalize these two generators, by requiring

$$p_0^*(\alpha) = 1, \qquad \int_M \alpha = 0$$

while

$$p_0^*(\beta) = 0, \qquad \int_M \beta = 1.$$

Identifying $X = \theta J$ with θ, some specific representatives of α and β are

$$\alpha = 1$$

$$\beta(\theta) = (2\pi)^{-1}(\theta|z|^2(1+|z|^2)^{-1} + i(1+|z|^2)^{-2}dz \wedge d\bar{z}).$$

The restriction maps $p_0^*, p_1^* : H_T(M) \to S(\mathfrak{t}')$ satisfy

$$2\pi(p_1^* - p_0^*) = \theta \int_M .$$

Consider now $H_T^{-\infty}(M)$. Let $\delta(\theta)$ be the δ function at 0. The element

$$v(\theta) = \delta(\theta)\beta(\theta)$$

is in $H_T^{-\infty}(M)$.

As $\theta\delta(\theta) = 0$, we have

$$v(\theta) = (-2i\pi)^{-1}\delta(\theta)(1+|z|^2)^{-2}dz \wedge d\bar{z}.$$

Thus, the element v does not have component in zero exterior degree, in particular its restriction to $M^T = \{p_0\} \cup \{p_1\}$ is zero. The integral $\int_M v(\theta)$ is equal to $\delta(\theta)$ and is supported at 0. This is compatible with the localization theorem which asserts that $\theta \int_M v(\theta) = 0$.

Let $P = p_0^* \oplus p_1^*$ be the map:

$$P : H_T^{-\infty}(M) \to C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \oplus C^{-\infty}(\mathfrak{t}).$$

Thus v is in the kernel of P.

In fact, we have the exact sequence

$$0 \to \mathbb{C}v \to H_T^{-\infty}(M) \to C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \oplus C^{-\infty}(\mathfrak{t}) \to 0.$$

The exactness of this sequence can be seen as follows: As $H_T(M)$ is free over $S(\mathfrak{t}')$, we have

$$H_T^{-\infty}(M) = C^{-\infty}(\mathfrak{t})\alpha + C^{-\infty}(\mathfrak{t})\beta.$$

Writing $\nu = f\alpha + g\beta$, we see that if $P\nu = 0$, then $f = 0$ and $\theta g = 0$. Thus ν is proportional to v. Let us see that P is surjective. The restriction maps $p_0^*, p_1^* : H_T^{-\infty}(M) \to C^{-\infty}(\mathfrak{t})$ still satisfy

$$(2\pi)(p_1^* - p_0^*) = \theta \int_M .$$

Thus we have $p_0^*\nu = f$ and $(2\pi)p_1^*\nu = \theta g + (2\pi)f$. As it is always possible to divide by θ in the space $C^{-\infty}(\mathfrak{t})$, we see that $P = p_0^* \oplus p_1^*$ is surjective.

12 Appendix – A splitting for $d_{\mathfrak{g}}$

Recall from section 1 that, for a manifold M, $\mathcal{A}^*(M)$ denotes the $\mathbb{Z}_+$-graded space of smooth forms on M and $d = d_M$ denotes the exterior derivative. Let $B^*(M)$ (resp. $Z^*(M)$) denote the space of exact (resp. closed) forms. As in the earlier part of this article, we assume M to be paracompact and equip $\mathcal{A}(M)$ with the C^∞-topology and $B(M), Z(M)$ are given the subspace topology. We make the following

Definition 108 *The exterior derivative d is said to admit a* continuous splitting *on M, if there exists a continuous graded linear map $s : B^*(M) \to \mathcal{A}^{*-1}(M)$ (of degree -1) such that $d \circ s = I$.*

Observe that, by virtue of Hodge theorem, d admits a continuous splitting on any compact manifold M. In fact, we will prove in an elementary way the following

Theorem 109 *Let M be any (paracompact) manifold. Then d admits a continuous splitting on M.*

Proof: The proof of the theorem will be broken into the following lemmas.

Lemma 110 *For any manifold M, $Z(M)$ and $B(M)$ are closed subspaces of $\mathcal{A}(M)$.*

Proof: Being the kernel of d, $Z(M) \subset \mathcal{A}(M)$ is clearly a closed subspace. By Poincaré duality, we have

$$B(M) = \{\alpha \in Z(M); \int_M \alpha\gamma = 0\}$$

for all $\gamma \in Z_{cpt}(M)_t$. Thus $B(M)$ is a closed subspace of $\mathcal{A}(M)$. ∎

Lemma 111 *Let M be any contractible manifold. Then d admits a continuous splitting on M.*

Proof: Choose a C^∞-contraction $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$, i.e. $\phi|_{\{0\}\times M} = I_M$ and $\phi|_{\{1\}\times M} = m_0$, for some fixed point $m_0 \in M$. Define the map $H : \mathcal{A}^*(M) \to \mathcal{A}^{*-1}(M)$ by

$$H(\omega) = \int_0^1 \phi^*\omega$$

for $\omega \in \mathcal{A}^*(M)$. Then H is a homotopy operator, i.e.

$$dH\omega + Hd\omega = \omega - \phi_1^*\omega$$

for $\omega \in \mathcal{A}^*(M)$, where $\phi_1 : M \to M$ is defined by $\phi_1 := \phi|_{\{1\}\times M}$. Now define $s : B^*(M) \to \mathcal{A}^{*-1}(M)$, by $s = H|_{B^*(M)}$. Then s gives a splitting for d. ∎

Lemma 112 *Let M be a manifold, and $W \subset U$ be two open subsets satisfying $\bar{W} \subset U$, where $\bar{W}$ is the closure of W. Let $[\omega] \in H(M)$ be a cohomology class such that $[\omega]_{|U} = 0$, as an element of $H(U)$. Then there exists a form $\tilde{\omega} \in Z(M)$ which satisfies:*

1. *$\tilde{\omega}|_W$ is identically zero, and*

2. *$[\tilde{\omega}] = [\omega]$ as elements of $H(M)$.*

Proof: Choose an open subset V of M such that $\bar{W} \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Write $\omega|_U = d\theta$, for some $\theta \in \mathcal{A}^*(U)$. Choose a C^∞-function f on M such that $f \equiv 1$ on $\bar{W}$ and $f \equiv 0$ on $M \backslash V$. Then $f\theta$ is a smooth form on the whole of M . Now set $\tilde{\omega} = \omega - d(f\theta)$. Then $\tilde{\omega}$ satisfies the requirements of the lemma. ∎

Lemma 113 *Let U and V be two open subsets of a manifold M, such that the exterior derivative d admits a continuous splitting on U, V and $U \cap V$. Assume further that $H(U \cap V)$ is finite dimensional. Then d admits a continuous splitting on the union $W := U \cup V$.*

Proof: Choose a continuous splitting s_1 (resp. s_2) of d on U (resp. V), and define a splitting $s : B^*(U) \oplus B^*(V) \to \mathcal{A}^{*-1}(U) \oplus \mathcal{A}^{*-1}(V)$ by $s = s_1 \oplus s_2$ (i.e., $s(\omega_1 + \omega_2) := s_1(\omega_1) + s_2(\omega_2)$, for $\omega_1 \in B^*(U)$ and $\omega_2 \in B^*(V)$).

Consider the commutative diagram (where the upper horizontal sequence is exact):

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^{*-1}(W) & \xrightarrow{\gamma_1} & \mathcal{A}^{*-1}(U) \oplus \mathcal{A}^{*-1}(V) & \xrightarrow{\gamma_2} & \mathcal{A}^{*-1}(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle d_W}\downarrow & & {\scriptstyle d_U}\downarrow{\scriptstyle d_V} & & {\scriptstyle d_{U\cap V}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B^*(W) & \xrightarrow{\hat{\gamma}_1} & B^*(U) \oplus B^*(V) & \xrightarrow{\hat{\gamma}_2} & B^*(U \cap V) & &
\end{array}$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \hat{\gamma}_1$ and $\hat{\gamma}_2$ are the canonical maps. From the commutativity of the above diagram, $\gamma_2 s \hat{\gamma}_1(\omega) \in Z^{*-1}(U \cap V)$, for any $\omega \in B^*(W)$; and moreover, from the definition of the coboundary map $\delta : H^{*-1}(U \cap V) \to H^*(W)$, we get $\delta[\gamma_2 s \hat{\gamma}_1(\omega)] = [\omega] = 0$. In particular, the cohomology class $[\gamma_2 s \hat{\gamma}_1(\omega)]$ lies in the image $F \subset H(U \cap V)$ of $H(U) \oplus H(V)$ under γ_2.

Now choose any linear map $\beta : F^{*-1} \to Z^{*-1}(U) \oplus Z^{*-1}(V)$ such that $[\gamma_2 \beta(x)] = x$, for all $x \in F^{*-1}$. Since F is finite dimensional ($H(U \cap V)$ being finite dimensional by assumption), any such β is automatically continuous. With the help of β, we define the continuous linear map

$$s_\beta : B^*(W) \longrightarrow \mathcal{A}^{*-1}(U) \oplus \mathcal{A}^{*-1}(V)\,,$$

by $s_\beta(\omega) = s\hat{\gamma}_1(\omega) - \beta[\gamma_2 s\hat{\gamma}_1(\omega)]$, for $\omega \in B^*(W)$. It can be easily seen that $\gamma_2 s_\beta(\omega) \in B^{*-1}(U \cap V)$. Choose a partition of unity $\{f_U, f_V\}$ subordinate to the cover $\{U, V\}$ of W and choose a continuous splitting s_3 of d on the intersection $U \cap V$. Then $f_V \cdot (s_3\gamma_2 s_\beta(\omega)) \in \mathcal{A}^{*-2}(U)$ and $f_U \cdot (s_3\gamma_2 s_\beta(\omega)) \in \mathcal{A}^{*-2}(V)$, for any $\omega \in B^*(W)$. Finally, define the continuous map $\theta : B^*(W) \to \mathcal{A}^{*-1}(U) \oplus \mathcal{A}^{*-1}(V)$ by

$$\theta(\omega) = s_\beta(\omega) - \Big(d_U(f_V \cdot (s_3\gamma_2 s_\beta(\omega))) \oplus d_V(-f_U \cdot (s_3\gamma_2 s_\beta(\omega)))\Big) ,$$

for $\omega \in B^*(W)$.

It is easy to see that $\gamma_2 \circ \theta = 0$, in particular, the map θ lifts to a (continuous) map $\bar{\theta} : B^*(W) \to \mathcal{A}^{*-1}(W)$ and moreover the map $\bar{\theta}$ provides a continuous splitting for d_W, i.e., $d_W \circ \bar{\theta} = I$. This completes the proof of the lemma. ∎

Let us now prove a stabilization lemma for splittings.

Proposition 114 *Let $\{V_i\}_{i=1,2,\ldots}$ be an open and locally finite cover of M. Set, for any $k = 1, 2, \ldots$,*

$$U_k = \bigcup_{i=1}^{k} V_i .$$

Also set $U_0 = \emptyset$. Assume that d admits a continuous splitting on V_k and $U_k \cap V_{k+1}$ and assume that $H(V_k)$ and $H(U_k \cap V_{k+1})$ are finite dimensional for all $k \geq 1$. Then d_M admits a continuous splitting.

Proof: We proceed as in the above lemma with the pair $U = U_k$ and $V = V_{k+1}$, but with a special choice of the map β. Mayer-Vietoris long exact sequence implies that $H(U_k)$ is finite dimensional. Let $F_k \subset H(U_k \cap V_{k+1})$ be the image of $H(U_k) \oplus H(V_{k+1})$ under the map $\gamma_2 := \gamma_2^k$. For $i \leq k$, let $H(U_k)_i$ be the subspace of elements of $H(U_k)$ which restrict to 0 in $H(U_i)$. We have the following

Lemma 115 *For any i, there exists $k(i) \geq i$ such that for all $k \geq k(i)$,*

$$\gamma_2 \left(H(U_k)_i \oplus H(V_{k+1})\right) = F_k.$$

Proof: For any $k \geq i$, let $R_k \subset H(U_i)$ be the image of $H(U_k)$ under the natural restriction. As $H(U_i)$ is finite dimensional, the decreasing sequence of subspaces R_k of $H(U_i)$ is stationary. Thus there exists an index $k(i)$ such that for $k \geq k(i)$, $R_k = R_{k(i)}$. Let us show that for $k \geq k(i)$, $\gamma_2 \left(H(U_k)_i \oplus H(V_{k+1})\right) = F_k$. Indeed let $\alpha = \nu - \kappa \in F_k$ where ν (resp. κ) is the restriction to $U_k \cap V_{k+1}$ of an element still denoted by $\nu \in H(U_k)$ (resp. $\kappa \in H(V_{k+1})$). As $R_k = R_{k+1}$, we may write $\nu = \nu_0 + \nu'|_{U_k}$, with $\nu_0 \in H(U_k)_i$ and $\nu' \in H(U_{k+1})$. Thus $\alpha = \nu_0 - (\kappa - \nu'|_{V_{k+1}})$ is in $\gamma_2(H(U_k)_i + H(V_{k+1}))$. ∎

We continue with the proof of Proposition 114. We fix an open refinement $\{W_i\}$ of $\{V_i\}$, i.e., $\bar{W}_i \subset V_i$ and $\cup_i W_i = M$. Let us choose more carefully the map $\beta_k : F_k \to Z(U_k) \oplus Z(V_{k+1})$. Let $b(k)$ be the largest integer $i \geq 0$ such that $\gamma_2(H(U_k)_i \oplus H(V_{k+1})) = F_k$ and choose $\beta_k = \beta_k^0 \oplus \beta_k'$ valued in $Z(U_k)_{b(k)} \oplus Z(V_{k+1})$, where $Z(U_k)_i$ is the space of closed differential forms θ on U_k such that $[\theta]|_{U_i} = 0$ as an element of $H(U_i)$. Furthermore with the help of Lemma 112, we can assume that for any $\omega \in F_k$ the component $\beta_k^0(\omega)$ vanishes identically on the open subset $\bigcup_{i=1}^{b(k)} W_i$.

With this choice of β_k, we get a continuous splitting s_{k+1} of d on the manifold U_{k+1}. This completes the inductive procedure to construct a splitting s_k of d on the manifold U_k, for all values of k. Now define a map $s : B^*(M) \to \mathcal{A}^{*-1}(M)$ by

$$s(\omega) = \lim_{k \to \infty} s_k(\omega_{|U_k}), \qquad \text{for } \omega \in B(M)\,.$$

Observe that for any relatively compact open subset V of M, there exists a large enough k_0 (depending only upon V) such that $(s_k(\omega_{|U_k}))_{|V} = (s_{k_0}(\omega_{|U_{k_0}}))_{|V}$ for all $k \geq k_0$. In particular, the map s is well defined and continuous. It is clear that s provides a splitting of d on the whole of M. ∎

To prove Theorem 109, it is then sufficient to prove the existence of a covering of M satisfying the conditions of Proposition 114.

Lemma 116 *Consider a locally finite covering of M by geodesically convex open subsets with respect to a fixed Riemannian metric on M, then this covering satisfies the conditions of Proposition 114.*

Proof: For any open subset U of M, let $n(U)$ be the smallest number of geodesically convex open subsets of U required to cover U (if no such finite cover exists, we decree $n(U) = \infty$). We first prove by induction on $n(U)$ that d_U admits a continuous splitting on any open subset $U \subset M$ with $n(U) < \infty$: The case $n(U) = 1$ is taken care of by Lemma 111. Observe that for any two convex open subsets of M, their intersection is also convex, so the general case follows by induction on $n(U)$ and Lemma 113 (together with [8], Chapter 1, Proposition 5.3.1). Thus a locally finite open cover $M = \bigcup V_i$, $i \geq 1$ by geodesically convex open subsets of M satisfies the hypothesis of Proposition 114. ∎

This completes the proof of Theorem 109. ∎

Let us generalize Theorem 109 to the equivariant case.

Theorem 117 *Let G be a compact Lie group acting on a paracompact manifold M. Then, for all $p \in \mathbb{Z}_+$, the subspaces $Z_G^p(M)$ and $B_G^p(M)$ are closed subspaces of $\mathcal{A}_G^p(M)$. Furthermore the equivariant de Rham differential $d_{\mathfrak{g}} : \mathcal{A}_G^p(M) \to B_G^{p+1}(M)$, where $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\ G$, admits a continuous splitting for all $p \geq 0$.*

Proof: We start with the following preliminary lemmas.

Lemma 118 *Let G be a compact group acting on a manifold M. If $H(M)$ is finite dimensional, then $H^p_G(M)$ is finite dimensional, for all $p \in \mathbb{Z}_+$.*

Proof: Consider the filtration of $\mathcal{A}_G(M)$ by the subspaces

$$\mathcal{A}_G(M)_k = \left(S(\mathfrak{g}') \otimes \sum_{i=0}^{k} \mathcal{A}^i(M)\right)^G$$

of $\mathcal{A}_G(M)$ consisting of equivariant differential forms of exterior degree less or equal to k. Consider the space $Z_G(M)_k$ of closed equivariant differential forms with exterior degree less or equal to k. It is easy to see (as in the proof of Proposition 5) that the map $\alpha \mapsto \alpha_{[k]}$ induces an injective map from $V_k = Z_G(M)_k/(Z_G(M)_{k-1} + (d_{\mathfrak{g}}\mathcal{A}_G(M)_{k-1}))$ to $(S(\mathfrak{g}') \otimes H^k(M))^G$. Clearly V_k surjects on $H_G(M)_k/H_G(M)_{k-1}$, where $H_G(M)_k$ is the subspace of $H_G(M)$ consisting of those cohomology classes with a representative in $Z_G(M)_k$. This, in particular gives that $H_G(M)_k$ is finite dimensional in each $\mathbb{Z}$-graded degree and for all k. This proves the lemma.

Lemma 119 *Let $f : V \to W$ be a continuous linear map between Fréchet spaces such that* $\operatorname{Im} f$ *is of finite codimension in W. Then* $\operatorname{Im} f$ *is a closed subspace of W.*

Proof: Let us take a vector space complement U of $\operatorname{Im} f$ in W, which is finite dimensional by assumption. Also let K be the kernel of f. Consider the direct sum $V \oplus U$ and define a continuous linear map $\hat{f} : V \oplus U \to W$ by $\hat{f}|_V = f$ and $\hat{f}|_U$ is the inclusion. It is a surjective linear map between Fréchet spaces, so it is an open map (by the open map theorem). In particular, the map $\hat{f}$ gives a (linear) homeomorphism $(V/K) \oplus U \to W$. But V/K is closed in the direct sum $(V/K) \oplus U$, and hence its image $\operatorname{Im} f$ is closed in W. ∎

Thus we obtain

Lemma 120 *If $H^p_G(M)$ is finite dimensional, the space $B^p_G(M) \subset \mathcal{A}^p_G(M)$ is a closed subspace, for all $p \in \mathbb{Z}_+$.*

Lemma 121 *Let $p : \mathcal{V} \to M$ be a G-equivariant real vector bundle over a G-manifold M. If $d_{\mathfrak{g}}$ has a continuous splitting on M, then $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on $\mathcal{V}$.*

Proof: Consider the map $\phi(t, v) = tv$ from $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ to $\mathcal{V}$. This map commutes with the action of G. Keeping the same notation for the operator H as in

Lemma 32, and denoting by i the inclusion of M as the zero section of $\mathcal{V}$, we obtain

$$\omega - p^*i^*\omega = (d_{\mathfrak{g}}H + d_{\mathfrak{g}}H)\omega$$

for all $\omega \in \mathcal{A}_G(\mathcal{V})$. Thus if s is a continuous splitting for $d_{\mathfrak{g}}$ on M, then $s_{\mathcal{V}} = (H + p^*si^*)|_{B_G(\mathcal{V})}$ is a continuous splitting for $d_{\mathfrak{g}}$ on $\mathcal{V}$. ∎

Lemma 122 *Let N be a contractible manifold. Let $K \subset G$ be a closed subgroup of G. Consider the G-manifold $M = (G/K) \times N$, where G acts by left action on the first factor and trivially on the second factor. Then $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on the G-manifold M.*

Proof: Note first that if $N = point$, i.e., $M = G/K$ is homogeneous, then (see section 5) $\mathcal{A}_G(M) \cong (S(\mathfrak{g}') \otimes \Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})')^K$ is finite-dimensional in each degree, thus $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on M. Proceeding as in Lemma 121, we obtain a continuous splitting for the product $(G/K) \times N$. ∎

We will also use the following equivariant analogue of Lemma 113, which follows by the same proof (using a G-invariant partition of unity, which exists since G is compact).

Lemma 123 *Let G be a compact Lie group and let M be a G-manifold with G-stable open subsets U and V. Assume that $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on U, V and $U \cap V$. Assume further that $H^p_G(U \cap V)$ is finite dimensional in each degree p. Then $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on the union $W := U \cup V$.*

Proposition 124 *Let G be a compact Lie group and let M be a G-manifold with a locally finite covering by G-stable open subsets V_i, $i \geq 1$. Let $U_k = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Assume that $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on V_k and $U_k \cap V_{k+1}$, for all $k \geq 1$. Assume further that $H^p_G(U_k \cap V_{k+1})$ and $H^p_G(V_k)$ are finite dimensional in each degree p. Then*

(1) $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on M,

(2) $B^p_G(M)$ is a closed subspace of $\mathcal{A}^p_G(M)$.

Proof: Mayer-Vietoris long exact sequence implies that $H^p_G(U_i)$ is finite-dimensional. We construct a continuous splitting s_i for $d_{\mathfrak{g}}$ on U_i as in the proof of Proposition 114. Then the splittings s_i stabilize to give rise to a continuous splitting s on M. Let us prove the assertion (2). Let $\alpha \in \overline{B^*_G(M)}$. Since $B_G(U_i)$ is a closed subspace of $\mathcal{A}_G(U_i)$ by Lemma 120, $\alpha|_{U_i} = d_{\mathfrak{g}}s_i(\alpha|_{U_i})$. By construction of s we see that $s_i(\alpha|_{U_i}) \in \mathcal{A}^{*-1}_G(U_i)$ stabilizes in an element $\beta \in \mathcal{A}^{*-1}_G(M)$ such that $d_{\mathfrak{g}}\beta = \alpha$. ∎

Lemma 125 *Let X be a G-manifold with exactly one orbit type. Then $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on X.*

Proof: Since G is compact, our assumption implies that the space of orbits $M := X/G$ is a manifold and that the quotient map $q : X \to X/G$ is a locally trivial fibration (see [9], Chapter 2, Theorem 5.8). Take a locally finite open covering of M by convex open subsets V_i (in particular V_i being contractible, q is trivial over V_i) and set $\tilde{V}_i := q^{-1}(V_i)$. Now take any $x_0 \in \tilde{V}_i$, then $\tilde{V}_i$ is G-diffeomorphic to $G \cdot x_0 \times V_i$, where G acts trivially on V_i and G acts canonically on the orbit $G \cdot x_0$. Thus $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on $\tilde{V}_i$ by Lemma 122. Arguing as in the proof of Lemma 116, we see that the covering $X = \bigcup_i \tilde{V}_i$ satisfies the hypothesis of Proposition 124. Thus we obtain our lemma. ∎

Let M be a compact G-manifold with boundary $\delta(M)$. Observe that $\delta(M)$ is automatically G-stable. Let $M^o = M \backslash \delta(M)$. We call M^o the interior of M.

Lemma 126 *Let M be a compact G-manifold possibly with boundary. Then $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on the interior M^o of M.*

Proof: By [9], chapter 8, Theorem 3.13, any compact manifold has finitely many orbit types. Let us assume by induction on the number of orbit types $\eta(M^o)$ of M^o that the lemma is true for all compact manifolds M (possibly with boundary) with $\eta(M^o) \leq n$ and take a compact manifold M with $\eta(M^o) = n+1$. The case where $\eta(M^o) = 1$ is taken care of by Lemma 125. Let G_1 be an isotropy subgroup such that G_1 is not properly contained in any other isotropy subgroup and let N be the set of all the elements of M^o with isotropy group G_1. Then $N = (M^o)^{G_1}$ by the maximality property of G_1. Thus N is a closed submanifold of M^o. Let K be the normalizer of G_1 in G. The map $(g, x) \mapsto g \cdot x$ induces an isomorphism of $G \times_K N$ on its image F. Thus F is a G-invariant closed submanifold of M^o. Cover M^o as $M^o = U \cup V$ where U is a G-stable open tubular neighborhood of F and $V = M^o \backslash F$. Clearly $\eta(V) = n$ and $\eta(F) = 1$. Also U, $U \cap V$ and V are interiors of compact G-manifolds with boundary. Further the existence of a continuous splitting for the operator $d_{\mathfrak{g}}$ on F (guaranteed by Lemma 125) gives rise to a splitting of $d_{\mathfrak{g}}$ on U, by Lemma 121. By induction hypothesis, $d_{\mathfrak{g}}$ admits a continuous splitting on V and $U \cap V$. Further $U \cap V$ being the interior of a compact manifold with boundary, $H(U \cap V)$ is finite dimensional and so is $H_G^p(U \cap V)$ for every p. Now the lemma follows by applying Lemma 123 to the open cover $M^o = U \cup V$. ∎

Let us now prove Theorem 117. Choose a G-invariant Morse function

$$f : M \to [0, \infty)$$

for the G-manifold M in the sense of ([22], par. 4). We further assume that f is a proper map. Let $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ be the complete list (possibly infinite) of critical values of f. Choose real numbers $\mu_i < \overline{\mu}_i$ such that $\lambda_i < \mu_i < \overline{\mu_i} < \lambda_{i+1}$. Define $V_i := f^{-1}(\mu_{i-1}, \overline{\mu}_i)$ (μ_0 is set as $-\infty$) and $U_k = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Then $V_k, U_k, U_k \cap V_{k+1}$ are interiors of compact G-manifolds with boundaries and the open cover V_i of M satisfies the hypothesis of Proposition 124. This completes the proof of Theorem 117. ∎

References

[1] ATIYAH, M.F. Elliptic operators and compact groups. *Lecture Notes in Mathematics 401. Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg- New-York,* 1974.

[2] ATIYAH,M.F. AND BOTT, R. The moment map and equivariant cohomology. *Topology,* **23** (1984), 1–28.

[3] BERLINE, N., GETZLER, E. AND VERGNE, M. Heat kernels and Dirac operators. *Grundlehren der math. Wissenschaft 298. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg -New-York,* 1991.

[4] BERLINE, N. AND VERGNE, M. Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation. *"Proceedings of the conference on representation theory of reductive groups". Progress in Mathematics 40. Birkhauser Boston,* 1983.

[5] BERLINE, N. AND VERGNE,M. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes. *Duke Math. Journal,* **50** (1983), 539-549.

[6] BOREL, A. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts. *Annals of Math.,* **57** (1953), 115–207.

[7] BOREL, A. Seminar on transformations groups. *Princeton University Press,* Princeton.1960

[8] BOTT, R. AND TU, L.W. Differential forms in algebraic topology. *Graduate Texts in Math. 82. Springer Verlag Berlin -Heidelberg- New-York,* 1982.

[9] BREDON, G.E. Introduction to compact transformations groups. *Academic Press,* London -New-York.1972

[10] CARTAN, H. Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie. In "Colloque de Topologie". *C.B.R.M., Bruxelles,* (1950), 15–27.

[11] CARTAN, H. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. In "Colloque de Topologie". *C. B. R. M., Bruxelles,* (1950), 57–71.

[12] DUFLO, M. AND VERGNE, M. Orbites coadjointes et cohomologie équivariante. In "The Orbit Method in Representation Theory". *Progress in Mathematics. Birkhauser Boston Basel Berlin,* 1990.

[13] DUFLO, M. AND VERGNE, M. Cohomologie équivariante et descente. In this volume.

[14] GINZBURG,V. Equivariant cohomology and Kähler geometry. *Functional analysis and its applications,* **21** (1987), 19–34.

[15] GODEMENT, R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. *Hermann Paris,* 1958.

[16] HSIANG, W.Y. Cohomology theory of topological transformation groups. *Springer-Verlag Berlin-Heidelberg -New York,* 1975.

[17] KOSTANT,B. AND KUMAR,S. T-equivariant K-theory of generalized flag varieties. *J.Diff. Geometry,* **32** (1990), 549–603.

[18] MATHAI,V. AND QUILLEN,D. Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. *Topology,* **25** (1986), 85–110.

[19] VASSEROT, E. Classes de Segre et multiplicité équivariante. *Bull. Soc. Math. Fr.,* **119** (1991), 463–477.

[20] VERGNE, M. Sur l'indice des opérateurs transversalement elliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **310** (1990), 329–332.

[21] VERGNE, M. Formule de Kirillov et indice de l'opérateur de Dirac. In "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", Warszawa.1983. *North Holland, Amsterdam New-York Oxford,* 1984.

[22] WASSERMAN A. G. Equivariant differential topology. *Topology,* **8** (1969), 127–150.

AST

Summary

Astérisque, tome 215 (1993), p. 205

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__205_0>

Summary

Let G be a real Lie group acting on a manifold M. H. Cartan introduced the equivariant de Rham complex and its cohomology $H_G^*(M)$. For a free action, $H_G^*(M)$ is the cohomology $H^*(G\backslash M)$ of the orbit space and if M is the point $\bullet$, $H_G^*(\bullet)$ is the algebra of invariant polynomial functions on the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G. To G-equivariant vector bundles on M, equipped with a G-invariant connection, are associated equivariant Chern classes. It became necessary to consider more general cohomological objects, like the algebra $H_G^\infty(M)$ of equivariant cohomology with C^∞-coefficients, which is an algebra over $H_G^\infty(\bullet) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$, and also the space $H_G^{-\infty}(M)$ of equivariant cohomology with $C^{-\infty}$-coefficients, which is a module for $H_G^\infty(M)$, and for which $H_G^{-\infty}(\bullet)$ is the space of invariant generalized functions $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$.

The first of the two articles of this volume, *Cohomologie équivariante et descente, by Michel Duflo and Michèle Vergne*, studies a generalization, denoted by $\mathcal{K}_G(M)$, of the cohomology $H_G^\infty(M)$. It is an algebra over $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$. It can be considered as a global analog of $H_G^\infty(M)$, and also as a de Rham version of the equivariant K-theory of M. The construction of $\mathcal{K}_G(M)$ uses the fixed point sets in M of the elements of G which are contained in compact subgroups of G. At least when G is compact, and under certain orientation assumptions, the "integral" over M of an element of $\mathcal{K}_G(M)$ is a G-invariant function on G.

The second article, *Equivariant cohomology with generalized coefficients, by Shrawan Kumar and Michèle Vergne*, undertakes a systematic study of the spaces $H_G^{-\infty}(M)$. Remarkable classes, with no analogs in the C^∞-theory, are discovered. In particular, for a free action, the integral over M of an element of $H_G^{-\infty}(M)$ is a generalized function on $\mathfrak{g}$ with support 0. When G is compact, a spectral sequence allows a comparison of $H_G^{-\infty}(M)$ with the equivariant cohomology $H_G^*(M)$.

The two articles have common motivations, but they can be read independently.