

# *Astérisque*

XAVIER BUFF

## **Ensembles de Julia de mesure positive**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 820, p. 7-39

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__7_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE POSITIVE**  
[d'après van Strien et Nowicki]

par **Xavier BUFF**

**CORRIGENDUM**

Nous avons malheureusement découvert après l'exposé, que le dernier lemme 11, est faux. La seule majoration qu'on puisse y obtenir est en  $C/n$ . Ce lemme est crucial, et nous n'avons pas réussi à le contourner. Le problème ne semble pas insurmontable, mais le théorème principal 1 n'est donc toujours pas démontré à ce jour.

Cependant tous les autres résultats restent valables, et consistent une avancée considérable dans l'étude des ensembles de Julia, et en particulier dans la recherche d'ensembles de Julia de mesure strictement positive.

**1. INTRODUCTION**

Comme l'a remarqué Sullivan, il existe une forte analogie entre les ensembles limites de groupes kleiniens de type fini, et les ensembles de Julia des applications rationnelles de  $\bar{\mathbb{C}}$ . Une conjecture attribuée à Ahlfors exprime que les ensembles limites de groupes kleiniens de type fini sont toute la sphère  $\bar{\mathbb{C}}$  ou ont une aire nulle. Cette conjecture a été démontrée dans de nombreux cas (cf [T], [C], ou [Bo]). Par analogie, on conjecturait que les ensembles de Julia des polynômes avaient une aire nulle. Ceci a été démontré en particulier dans le cas hyperbolique et le cas "géométriquement fini". Pour les polynômes cubiques ayant un point critique qui s'échappe et non renormalisables (tableau non périodique dans [BH]), McMullen a fait une démonstration qui est une variante du résultat de Branner et Hubbard : l'ensemble de Julia est un Cantor. Pour les polynômes quadratiques finiment renormalisables, Lyubich a montré que l'ensemble de Julia était de mesure nulle [L3], en adaptant la démonstration de connexité locale de Yoccoz. Les techniques utilisées pour ces deux derniers résultats ne s'étendent pas en degré supérieur : la méthode repose sur la divergence d'une série définie de façon combinatoire et il se trouve qu'en degré supérieur, ladite série converge.

En fait, la conjecture est fautive : van Strien et Nowicki ont exhibé des polynômes ayant

un ensemble de Julia de mesure de Lebesgue strictement positive. Ce sont des polynômes définis de manière combinatoire et appelés “polynômes de Fibonacci”.

**THÉORÈME 1.**—*Il existe un entier  $\ell_0$  tel que pour tout entier pair  $\ell \geq \ell_0$ ,*

- *il existe un unique polynôme de Fibonacci de la forme  $P(z) = z^\ell + c$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ , et*
- *la mesure de Lebesgue de son ensemble de Julia  $J(P)$ , est strictement positive.*

L'intérêt des polynômes de Fibonacci a été souligné par Branner et Hubbard [BH] pour les polynômes complexes cubiques, par Yoccoz [Y] pour les polynômes quadratiques, et par Hofbauer et Keller [HK] pour les fonctions unimodales. Dans [LM], Lyubich et Milnor étudient la restriction à l'axe réel dans le cas d'un polynôme de Fibonacci quadratique, et Lyubich élargit cette étude au plan complexe dans [L1] et [L2]. L'existence d'un polynôme de Fibonacci réel en degré  $\ell > 2$  est démontrée par Hoffbauer et Keller. Elle découle d'un argument combinatoire de Milnor et de Thurston. Dans [BKNS], Bruin, Keller, Nowicki et van Strien ont montré un résultat analogue au Théorème 1, dans le cadre réel, ce qui a été un point de départ pour l'étude complexe.

Enfin, remarquons que le théorème affirme que si le degré est suffisamment grand, alors il existe des polynômes ayant un ensemble de Julia de mesure strictement positive. Cependant, la démonstration ne donne pas une valeur explicite pour  $\ell_0$ , et pour en obtenir une, il reste un travail considérable. Signalons simplement que des expériences numériques de Lyubich et Sutherland suggèrent  $\ell_0 = 32$ .

Nous nous proposons d'exposer les grandes lignes de la démonstration de van Strien et Nowicki concernant la mesure positive, telle que nous la comprenons. Nous ne donnerons que l'énoncé des lemmes et propositions qui interviendront. Pour les démonstrations, le lecteur pourra consulter [SN] ou [Bu].

Nous aimerions remercier Adrien Douady et Marguerite Flexor pour l'aide qu'ils nous ont apportée tout au long de la préparation de cet exposé, et Sebastian van Strien pour les fructueuses discussions que nous avons eues avec lui.

## 2. IDÉE PRINCIPALE

Commençons par rappeler la définition des ensembles de Julia. Soit  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme. L'ensemble de Julia rempli  $K(P)$  de  $P$  est l'ensemble des points dont l'orbite sous l'action de  $P$  est bornée. Dans la suite,  $P^{(n)}$  désignera le  $n$ -ième itéré de  $P$ , par opposition à  $P^\ell$  qui désignera la puissance  $\ell$ -ième de  $P$ . L'ensemble de Julia rempli est un compact. On peut également le définir par :

$$K(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid P^{(n)}(z) \not\rightarrow \infty\}.$$

L'ensemble de Julia  $J(P)$  de  $P$ , est le bord de  $K(P)$ :

$$J(P) = \partial K(P).$$

Dans le cas qui nous intéresse,  $P$  sera un polynôme de Fibonacci réel. En particulier, il aura un unique point critique récurrent. En utilisant la classification de Fatou-Sullivan des composantes de l'intérieur de  $K(P)$ , nous montrerons que

$$J(P) = K(P).$$

L'idée de van Strien et Nowicki pour montrer que  $K(P)$  est de mesure de Lebesgue positive est d'utiliser un argument de marche aléatoire.

**DÉFINITION 1.**—Un jeu  $(X, \mu, \psi, g)$  est la donnée de :

- un espace  $X$  muni d'une mesure de probabilité  $\mu$ ,
- une application jeu,  $\psi : X \rightarrow X$ ,
- une fonction gain,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in X$  nous pouvons définir :

- la position après le  $n$ -ième coup :  $x_n = \psi^{(n)}(x)$ ,
- le gain au  $n$ -ième coup :  $g_n(x) = g(x_{n-1})$ , et
- le capital amassé après le  $n$ -ième coup :  $G_n(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$ .

Soit  $S$  l'ensemble des positions gagnantes, c'est-à-dire

$$S = \{x \in X \mid (\forall n \geq 1) G_n(x) > 0\}.$$

Nous dirons qu'un jeu est **gagnant** si et seulement si  $\mu(S) > 0$ . Il existe des critères probabilistes que nous mentionnerons plus loin, pour montrer qu'un jeu est gagnant.

Pour utiliser cet argument de marche aléatoire, le principe développé par van Strien et Nowicki est de construire un jeu gagnant, associé au polynôme de Fibonacci  $P$ , et dont l'ensemble  $S$  des positions gagnantes est inclus dans l'ensemble de Julia rempli  $K(P)$ . Pour cela ils commencent par définir une partition du plan complexe en anneaux emboîtés,  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- L'espace  $X = \bigcup_{k \geq 0} A_k$  est muni d'une mesure proportionnelle à la mesure de Lebesgue.
- L'application  $\psi$  est l'identité sur  $A_0 \cup A_1$ , et coïncide pour  $k \geq 2$  avec un itéré  $P^{(S_k)}$  de  $P$  sur  $A_k$  (où  $S_k \in \mathbb{N}$ ). Remarquons que si l'orbite d'un point rentre dans  $A_0$  ou dans  $A_1$ , le jeu est arrêté.
- Le gain  $g(z)$  est déterminé par les positions respectives de  $z$  et de  $\psi(z)$  : si  $z \in A_k$  et  $\psi(z) \in A_m$ , on pose  $g(z) = m - k$ .

Dans ces conditions, si  $z \in S$  est une position gagnante, alors  $G_n(z) > 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Par conséquent  $S \subset \bigcup_{k \geq 2} A_k$ . D'autre part, si  $z \in A_k \cap S$ , alors pour tout  $n \geq 1$ ,  $\psi^{(n)}(z) \in A_m$

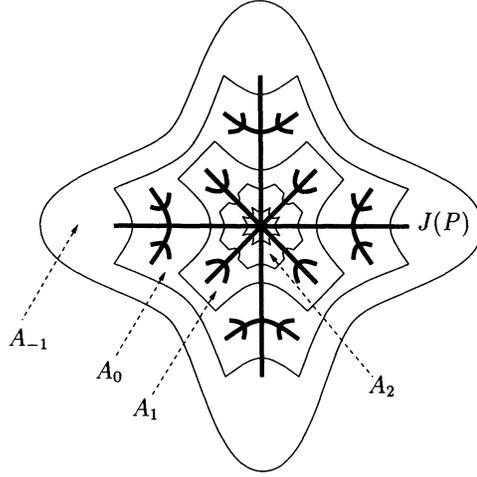


FIG. 1 -  $\psi|_{A_k} = P^{(S_k)}$  ;  $G|_{A_k} = k$  ;  $g = G \circ \psi - G$ .

avec  $m > k$ . Par suite, l'orbite sous  $\psi$  de  $z$  reste dans la composante bornée de  $\mathbb{C} \setminus A_k$ , et l'orbite de  $z$  sous l'action de  $P$  ne peut pas diverger vers l'infini. Par conséquent  $S \subset K(P) = J(P)$ . Ainsi, si nous montrons que le jeu est gagnant, la démonstration sera achevée. Toute la difficulté du travail de van Strien et Nowicki réside dans la construction d'un jeu gagnant du type précédent.

### 3. POLYNÔMES DE FIBONACCI

Dans cette partie, nous allons donner la définition réelle des polynômes de Fibonacci que van Strien et Nowicki utilisent. Nous exposerons ensuite quelques propriétés qui nous permettront de construire le jeu de Fibonacci.

#### 3.1. Définition

Van Strien et Nowicki abordent le problème avec des techniques réelles. Ils utilisent la définition de Lyubich et Milnor [LM], §4.

**DÉFINITION 2.**—Soit  $P(x) = x^\ell + c$  un polynôme réel ( $c \in \mathbb{R}$ ) de degré  $\ell$  pair. Soit  $S_k$  la suite de Fibonacci définie par

$$\begin{cases} S_{k+1} &= S_k + S_{k-1} \\ S_0 &= 1 \\ S_1 &= 2. \end{cases}$$

Soient  $c_0 = 0$  le point critique de  $P$  et  $c_n = P^{(n)}(c_0)$ . Nous dirons que  $P$  est un **polynôme**

de Fibonacci, si

- pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|c_{S_{k+1}}| < |c_{S_k}|$ , et
- $|c_3| < |c_4|$ .

Les propriétés réelles de ces polynômes ont été étudiées par Lyubich et Milnor dans [LM], dans le cas quadratique. Les propriétés combinatoires se généralisent aisément pour les degrés supérieurs. L'existence de polynômes de Fibonacci ne pose donc aucun problème : il suffit de reprendre les arguments de Lyubich et Milnor. En revanche, ce genre d'arguments ne permet plus de montrer qu'il existe un unique polynôme de Fibonacci pour chaque degré  $\ell$  pair, car les estimées géométriques qu'ils obtiennent ne sont plus valides. Nous ne reprendrons pas la démonstration de van Strien et Nowicki concernant l'unicité du polynôme de Fibonacci pour chaque degré  $\ell$  pair, qui repose sur des estimées obtenues dans [BKNS]. Nous allons maintenant exposer des résultats complexes concernant les polynômes de Fibonacci.

### 3.2. Propriétés complexes

Tout d'abord, la classification de Fatou-Sullivan des composantes de l'intérieur de  $K(P)$  permet de montrer que  $\overset{\circ}{K}(P) = \emptyset$ .

*LEMME 1.*—*Soit  $P(z) = z^\ell + c$  un polynôme réel ( $c \in \mathbb{R}$ ). Si l'intérieur de  $K(P)$  n'est pas vide, alors l'orbite du point critique 0 est attirée par un cycle périodique.*

Comme l'orbite du point critique d'un polynôme de Fibonacci se rapproche de 0 aux itérés de Fibonacci, elle ne peut pas être attirée par un cycle périodique. Par conséquent  $K(P)$  est d'intérieur vide, et

$$J(P) = K(P).$$

En ce qui concerne les propriétés complexes des polynômes de Fibonacci, Branner et Hubbard donnent des informations topologiques à l'aide de tableaux ([BH], page 131). Le résultat principal qui intéresse van Strien et Nowicki est traduit sur les figures 2 et 3. Le lecteur pourra trouver une démonstration complète dans [SN], Théorème 8.1, ou dans [Bu]. Il peut être énoncé de la manière suivante.

**PROPOSITION 1.**—*Soit  $P(z) = z^\ell + c$  un polynôme de Fibonacci réel. Il existe des disques topologiques  $D_k$ ,  $D_k^0$  et  $D_k^1$  pour  $k \geq 0$ , définis par récurrence à partir de  $D_0$  et  $D_1$ , tels que*

- $c_0 \in \overline{D_{k+2}} \subset D_k^0$ ,
- $\overline{D_{k+1}^1} \subset D_k^0$ ,
- $\overline{D_k^0} \subset D_k$ ,
- $P^{(S_{k-1})}$  envoie  $D_k^1$  sur  $D_k$  de manière isomorphe, et

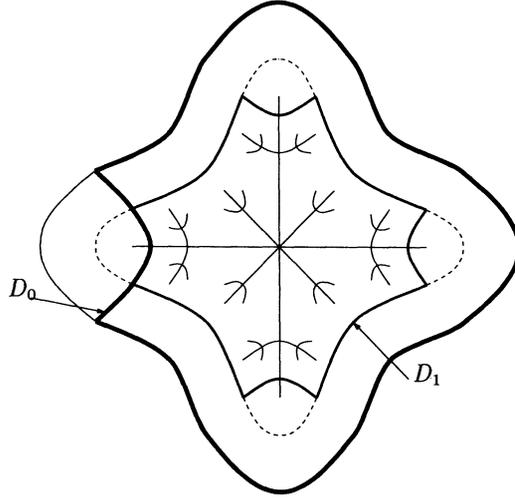


FIG. 2 – Les pièces  $D_0$  et  $D_1$  délimitées par des équipotentielles et des rayons externes.

- $P^{(S_k)}$  est un revêtement de degré  $\ell$ , ramifié en  $c_0$  de  $D_k^0$ ,  $D_{k+1}$  et  $D_{k+2}$  dans respectivement  $D_k$  et  $D_{k-1}$  et  $D_k^1$ .

Ces disques topologiques sont des pièces du puzzle de Yoccoz, délimitées par des équipotentielles et des rayons externes. Comme le polynôme est de la forme  $P(z) = z^\ell + c$ , les pièces qui contiennent  $c_0$  sont invariantes par rotation d'angle  $2\pi/\ell$ . Pour plus de renseignements concernant les puzzles de Yoccoz, le lecteur peut consulter [B], [BH], [H] ou [M]. Nous allons maintenant construire le jeu de Fibonacci que van Strien et Nowicki utilisent ([SN], §VI).

### 3.3. Jeu de Fibonacci

**DÉFINITION 3.**—Soit  $P$  un polynôme de Fibonacci, et soient  $D_k$  les disques de la proposition 1. Pour  $k \geq 0$ , nous pouvons définir les anneaux

$$A_k = D_{k+1} \setminus D_{k+2}.$$

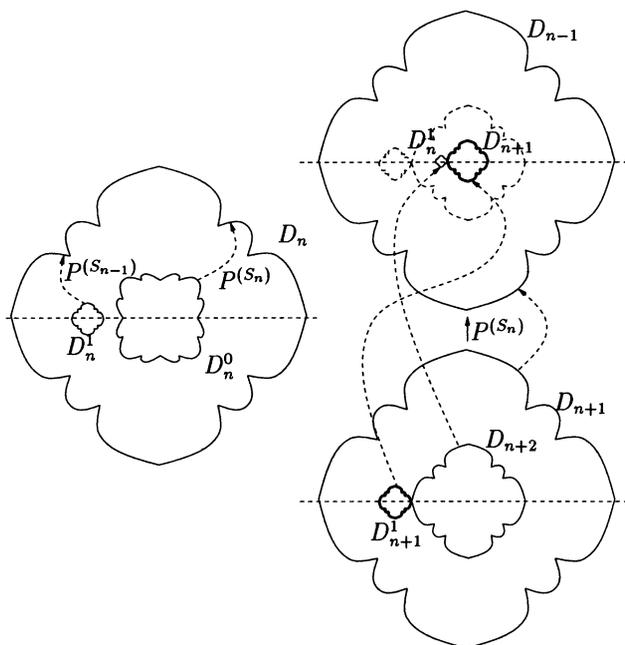
Le jeu de Fibonacci est défini par :

- l'espace  $X = D_1$  est la réunion des anneaux  $A_k$ ,  $k \geq 0$  ;
- la mesure de probabilité  $\mu$  est proportionnelle à la mesure de Lebesgue  $m$  :

$$\mu(\cdot) = \frac{m(\cdot)}{m(D_1)} ;$$

- l'application jeu  $\psi$  est définie par

$$\begin{aligned} \psi|_{A_k} &= P^{(S_k)} \quad \text{si } k \geq 2, \\ \psi|_{A_k} &= \text{Id} \quad \text{si } k = 0 \text{ ou } 1 ; \end{aligned}$$

FIG. 3 – Schémas de Fibonacci associés aux pièces  $D_k$ .

- le gain  $g$  est défini par  $g(z) = l - k$ , pour  $z \in A_k$  et  $\psi(z) \in A_l$ .

Pour se faire une idée de ce jeu, nous avons représenté topologiquement la situation sur la figure 4. Les anneaux  $A_k$  sont représentés comme des anneaux euclidiens. Les petits cercles concentriques délimitent les régions où le gain est constant et positif. Nous pouvons remarquer que le jeu dans l'anneau  $A_{k+1}$  ressemble au jeu dans l'anneau  $A_k$ . Nous précisons cette idée dans la partie 5. Pour le moment il nous faut montrer que le jeu de Fibonacci est un jeu gagnant. Pour cela, van Strien et Nowicki utilisent une version quantitative de la loi des grands nombres.

#### 4. L'ARGUMENT DE MARCHE ALÉATOIRE

Dans cette partie, nous allons exposer un argument de marche aléatoire qui permet de montrer que le jeu de Fibonacci est gagnant. Pour une démonstration complète des propositions, le lecteur pourra consulter [Bu].

##### 4.1. Jeu de pile ou face (équilibré)

*Si nous jouons à un jeu équitable, le gain au bout de  $n$  coups est négligeable devant  $n^\beta$  pour tout  $\beta > 1/2$ .*

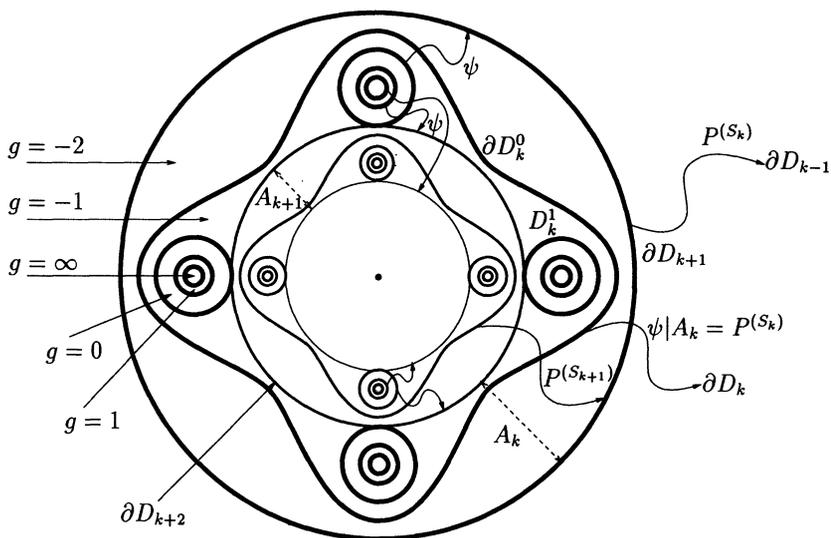


FIG. 4 – Le jeu de Fibonacci et les régions où le gain est constant.

Ici, l'espace  $X$  sera l'ensemble des suites de  $-1$  et de  $1$  :

$$X = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

La mesure de probabilité  $\mu$  est la mesure équilibrée. Dans un premier temps, nous allons jouer avec un jeu équilibré. Pour tout  $x = x_1 \dots x_n \dots \in X$ , le gain  $g$  vaut

$$g(x) = x_1,$$

et l'application de jeu n'est rien d'autre que le décalage (shift) :

$$\psi(x_1 x_2 \dots x_n \dots) = x_2 \dots x_n \dots,$$

de sorte que le gain au  $n$ -ième coup vaut  $g_n(x) = x_n$ . Un théorème classique de probabilité affirme que

**PROPOSITION 2.**—Pour tout  $\beta > 1/2$  et pour presque tout  $x \in X$ , la fonction qui à  $n$  associe le capital amassé en  $n$  coups, est un  $o(n^\beta)$  :

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) = o(n^\beta).$$

Remarquons que dans cette situation l'espérance de gain,  $E(g)$ , est nulle. Il existe une variante de ce théorème lorsque l'espérance n'est plus nulle.

#### 4.2. Jeu faussé

Si nous jouons avec un jeu faussé en notre faveur, et que nous bénéficions d'un crédit illimité, nous avons toutes les chances de devenir infiniment riches.

Supposons que le jeu n'est plus équilibré. C'est-à-dire que le gain  $g_n$  est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \alpha & \text{si } x_n &= +1 \\ g_n(x) &= \beta & \text{si } x_n &= -1 \end{aligned}$$

avec  $\alpha + \beta = 2E > 0$ .

**COROLLAIRE 1.**—Pour presque tout  $x \in X$ ,  $G_n(x) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

En effet  $g_n = E + g'_n$ , où  $g'_n$  est associé à un jeu d'espérance nulle. Alors le capital est  $G_n = nE + G'_n = nE + o(n^\beta)$  presque sûrement. Par conséquent  $G_n(x) \rightarrow +\infty$ .

#### 4.3. Modification du jeu (jeu avec crédit illimité)

Nous avons rappelé des résultats valides pour des jeux dont les coups sont indépendants. Dans le cas qui nous intéresse, les coups ne le sont pas. Cependant, nous pouvons adapter les résultats.

Soit  $X$  un espace, muni d'une mesure de probabilité  $\mu$ , soit  $\psi$  une application jeu et  $g$  une application gain. On suppose qu'il existe une partition  $\mathcal{A}_1 = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $X$  telle que  $g$  est constante sur chaque partie de  $\mathcal{A}_1$ . Définissons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la partition  $\mathcal{A}_n$  de  $X$  en parties

$$A_{i_0, \dots, i_{n-1}} = \{x \mid \psi^{(j)}(x) \in A_{i_j}, j = 0, \dots, n-1\},$$

ainsi que les fonctions "gain au  $n$ -ième coup",  $(g_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , constantes sur chaque partie de  $\mathcal{A}_{n+1}$ . Posons  $G_n = g_1 + \dots + g_n$ , le capital accumulé après  $n$  coups, et écrivons  $g_n = E_n + H_n$ , où  $E_n$  est constante sur chaque partie de  $\mathcal{A}_n$  et  $H_n$  est de moyenne nulle sur chaque partie de  $\mathcal{A}_n$ . Remarquons que si  $A \in \mathcal{A}_n$ , alors

$$E_n|_A = \frac{1}{\mu(A)} \int_A g_n d\mu(x)$$

est une espérance conditionnelle.

Pour un jeu dont les coups ne sont pas indépendants, l'analogie de la proposition 1 peut être énoncé de la manière suivante

**PROPOSITION 3.**—S'il existe un réel  $V \in \mathbb{R}$  tel que  $\int_X H_n^2 \leq V$ , alors pour presque tout  $x \in X$ , et pour tout  $\beta < 1/2$

$$\sum_{k=1}^n H_k(x) = o(n^\beta).$$

Nous en déduisons alors immédiatement l'analogie du corollaire 1.

**COROLLAIRE 2.**—*Supposons que :*

$$(1) \exists C_1 > 0 / (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in X) E_n(x) > C_1$$

$$(2) \exists C_2 < \infty / (\forall n \in \mathbb{N}) \int_X H_n^2 \leq C_2$$

Alors pour presque tout  $x \in X$ , et pour tout  $\beta > 1/2$ ,

$$G_n(x) > nC_1 + o(n^\beta).$$

Par conséquent, pour presque tout  $x \in X$ ,  $G_n(x) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La condition (1) exprime que l'espérance du jeu est positive, autrement dit que le jeu est faussé en notre faveur. La condition (2) signifie que la variance du jeu est finie.

#### 4.4. Jeu gagnant

*Un jeu déséquilibré en notre faveur est un jeu gagnant.*

**PROPOSITION 4.**—*Soit  $Y$  un espace, muni d'une mesure  $\mu$ , et  $Z$  une partie de  $Y$  : le cimetière. Soit  $\psi$  une application de  $Y$  dans  $Y$ , telle que  $\psi|_Z = \text{Id}$ . Posons  $X = \psi(Y \setminus Z)$ , et supposons que  $\mu(X) = 1$ . Soit  $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$  un capital majoré sur  $Z$ . Soit  $\Psi : Y \rightarrow Y$  une application telle que*

- pour tout  $y \in Y \setminus Z$ , tel que  $\psi^{(n-1)}(y) \in Y \setminus Z$ , les applications  $\psi$  et  $\Psi$  définissent le même gain au  $n$ -ième coup :

$$G \circ \Psi^{(n)}(y) - G \circ \Psi^{(n-1)}(y) = G \circ \psi^{(n)}(y) - G \circ \psi^{(n-1)}(y) = g_n(y),$$

- la préimage par  $\Psi$  d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Si pour  $\mu$ -presque tout  $y \in Y$ ,  $G(\Psi^{(n)}(y)) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors le jeu  $(X, \mu, \psi, g)$  est un jeu gagnant.

La première condition est satisfaite si  $\Psi = \psi$  sur  $Y \setminus Z$ , mais nous la présentons ainsi car par la suite nous serons amenés à modifier légèrement l'application  $\psi$  sur  $Y \setminus Z$ .

**PREUVE.** Pour presque tout  $y \in Y$ ,  $G(\Psi^{(n)}(y)) \rightarrow +\infty$ . Comme  $G$  est majorée sur  $Z$ , pour presque tout  $y \in Y$ , il existe un entier  $n_y$  tel que

$$\begin{cases} \forall k \geq 0, \Psi^{(n_y+k)}(y) \in Y \setminus Z \\ \forall k > 0, G(\Psi^{(n_y)}(y)) < G(\Psi^{(n_y+k)}(y)). \end{cases}$$

Autrement dit, si  $S$  désigne l'ensemble des positions gagnantes du jeu  $(X, \mu, \psi, g)$ , pour presque tout  $y \in Y$ , il existe un entier  $n_y$  tel que  $\psi^{(n_y)}(y) \in S$ . Par conséquent,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi^{(-n)}(S)\right) > 0.$$

Par hypothèse, si  $S$  était de mesure nulle, alors toutes ses préimages par  $\Psi$  seraient de mesure nulle. Or toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est toujours de mesure nulle, ce qui est impossible. Par conséquent  $\mu(S) > 0$ , et le jeu est gagnant. ■

## 5. VARIANTES DU JEU DE FIBONACCI

Pour appliquer la proposition 4, le problème est de bien prolonger le jeu de Fibonacci,  $(X, \mu, \psi, g)$ , construit dans la partie 3. Nous allons voir qu'il existe une manière naturelle de le prolonger, mais auparavant nous devons nous ramener à une situation invariante par homothétie. Nous savons déjà que les suites de gains  $g_n(z) = g(\psi^{(n)}(z))$ , et  $g_n(e^{2i\pi k/\ell}z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont égales terme à terme à cause de l'invariance par rotation d'angle  $2i\pi/\ell$ . Nous allons construire un jeu,  $(\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\psi}, \tilde{g})$ , conjugué au jeu de Fibonacci par une application quasi-conforme, tel que pour un réel  $\lambda \in ]0, 1[$ , les suites de gains  $\tilde{g}_n(z)$  et  $\tilde{g}_n(\lambda z)$  soient égales.

### 5.1. Jeu homothétique

Le travail de van Strien et Nowicki sur la limite des renormalisées des polynômes de Fibonacci permet de montrer la proposition suivante.

**PROPOSITION 5.**—*Soit  $P$  un polynôme de Fibonacci réel de degré  $\ell$  pair au moins égal à 4, et soient  $D_k$  les disques topologiques définis plus haut. Il existe*

- un réel  $\lambda \in ]0, 1[$ ,
- des disques topologiques  $\tilde{D}_k$ ,  $k \geq 1$ ,
- des applications  $\tilde{f}_k : \tilde{D}_{k+1} \rightarrow \tilde{D}_{k-1}$ ,  $k \geq 2$ ,
- une fonction  $\tilde{g} : \tilde{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , et
- un homéomorphisme quasi-conforme  $\phi : D_1 \rightarrow \tilde{D}_1$ ,

tels que

- $\phi$  est de la forme  $\phi(z) = \Phi(z^\ell)$ ,
- $(\forall k \geq 1) \phi(D_k) = \tilde{D}_k$ ,
- $(\forall k \geq 2) \tilde{f}_k = \phi \circ P^{(S_k)} \circ \phi^{-1}$ ,
- $\tilde{g} = g \circ \phi^{-1}$ ,
- $(\forall k \geq 1) \tilde{D}_{k+1} = \lambda \tilde{D}_k$ , et
- $(\forall k \geq 2) \tilde{f}_{k+1}(z) = (-1)^k \lambda \circ f_k \circ \lambda^{-1}$ .

En d'autres termes, il existe un homéomorphisme quasi-conforme  $\phi$ , qui preserve l'invariance par rotation d'angle  $2\pi/\ell$ , et qui conjugue le jeu  $(\psi, g)$  à un jeu  $(\tilde{\psi}, \tilde{g})$ , invariant par homothétie de rapport  $\lambda$ . Nous donnerons les idées de la démonstration dans la section suivante.

L'intérêt de nous être ramenés à une situation homothétique, c'est que nous pouvons prolonger le jeu à  $\mathbb{C}$  tout entier de manière naturelle. Pour cela il nous suffit de définir :

- $\tilde{A}_0 = \tilde{D}_1 \setminus \tilde{D}_2$ ,
- $\tilde{A}_k = \lambda^k \tilde{A}_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- le jeu  $\tilde{\Psi}|_{\tilde{A}_k} = \lambda^k \circ f_0 \circ \lambda^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

- le capital  $\tilde{G}|\tilde{A}_k = k$ .

Remarquons que nous avons légèrement modifié l'application de jeu sur  $A_k$  pour  $k \geq 0$ . Cependant, comme

- $\tilde{\Psi}(z) = \pm\tilde{\psi}(z)$ ,
- $\tilde{\psi}(-z) = \tilde{\psi}(z)$ , et
- $\tilde{G}(-z) = \tilde{G}(z)$ .

le gain au  $n$ -ième coup reste inchangé :

$$\tilde{G} \circ \tilde{\Psi}^{(n)} - \tilde{G} \circ \tilde{\Psi}^{(n-1)} = \tilde{G} \circ \tilde{\psi}^{(n)} - \tilde{G} \circ \tilde{\psi}^{(n-1)}.$$

Par conséquent, il suffit de montrer le lemme suivant.

*LEMME 2.*—Pour presque tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{G}(\tilde{\Psi}^{(n)}(z)) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Nous pourrions alors appliquer la proposition 4 pour en déduire que le jeu homothétique est gagnant. Ceci signifie que si  $S$  désigne l'ensemble des positions gagnantes du jeu de Fibonacci, alors  $\phi(S)$  est de mesure strictement positive. Le lemme suivant permet alors de conclure que le jeu de Fibonacci est gagnant.

*LEMME 3.*—Soit  $\phi : U \rightarrow V$  un homéomorphisme quasi-conforme, et soit  $S \subset U$ . Alors  $\phi(S)$  est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si  $S$  est de mesure de Lebesgue nulle.

## 5.2. Jeu quotient

Etant donnée l'invariance de la situation par homothétie de rapport  $\lambda$ , nous pouvons quotienter par la relation d'équivalence  $z \sim \lambda z$ . Nous allons introduire une nouvelle mesure  $\nu$  sur  $\mathbb{C}$  telle que

$$d\nu(z) = \frac{dzd\bar{z}}{|z|^2}.$$

Cette mesure est préservée par la transformation  $z \mapsto \lambda z$ , et elle est multipliée par  $\ell$  par la transformation  $z \mapsto z^\ell$ . Remarquons par ailleurs qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Le problème est donc réduit à l'étude du jeu défini par

- l'espace  $\widehat{X} = \mathbb{C}/\sim$ , dont un représentant est l'anneau  $\tilde{A}_0$ ,
- la projection  $\hat{\mu}$  sur  $\widehat{X}$ , de la mesure  $\nu$ ,
- la fonction gain :  $\hat{g} = \tilde{G} \circ \tilde{\Psi} - \tilde{G}$ , et
- l'application jeu : la projection sur  $\widehat{X}$  de l'application  $\tilde{\Psi}$ , qui peut être représentée par l'application  $\widehat{\Psi} : \tilde{A}_0 \rightarrow \tilde{A}_0$  définie par

$$\widehat{\Psi}(z) = \lambda^{-\hat{g}(z)} \tilde{f}_0(z).$$

Nous avons représenté topologiquement ce jeu sur la figure 5.

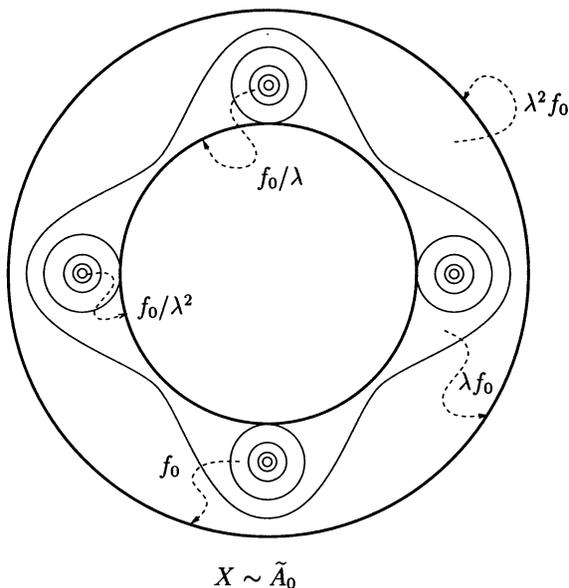


FIG. 5 – Le jeu une fois quotienté par la relation  $z \sim \lambda z$ .

Nous appliquerons alors la proposition 3 au jeu quotient  $(\widehat{X}, \widehat{\mu}, \widehat{g}, \widehat{\Psi})$  pour montrer que pour  $\widehat{\mu}$ -presque tout point  $x$  de  $\widehat{X}$ ,  $\widehat{g}(x) + \dots + \widehat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(x)) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Nous en déduisons donc que pour  $\nu$ -presque tout point  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\widehat{G}(\widehat{\Psi}^{(n)}(z)) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui démontre le lemme 2. En effet,  $\nu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

## 6. LIMITE DES RENORMALISÉES

Dans cette section nous allons expliquer dans les grandes lignes pourquoi il existe un modèle de jeu homothétique, et nous allons donner des premières informations le concernant. Les démonstrations se trouvent dans [Bu] et sont calquées sur le travail de van Strien et Nowicki. Quant aux premiers résultats concernant ce jeu homothétique, ils sont démontrés par Eckmann, Wittwer et Epstein dans [EW], [E1] et [E2].

### 6.1. La famille des L-applications

Lyubich [L3] introduit la notion d'application à allure polynômiale généralisée, qui étend celle introduite par Douady et Hubbard dans [DH]. Nous les appellerons L-applications. Les applications  $(P^{(S_k)} \cup P^{(S_{k-1})}) : (D_k^0 \cup D_k^1) \rightarrow D_k$  sont de telles applications.

**DÉFINITION 4.**—Une **L-application** est un revêtement ramifié

$$f : \bigcup_{i=0}^{k-1} U^i \rightarrow V$$

tel que :

- il y a un unique point critique  $c_0 \in U^0$ ,
- l'orbite de  $c_0$  est contenue dans la réunion des  $U^i$ , et si  $i < j$ , l'orbite de  $c_0$  visite  $U^i$  avant  $U^j$ ,
- chaque  $U^i$  contient au moins un point de l'orbite de  $c_0$ ,
- chaque  $U^i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  est un disque topologique ouvert relativement compact dans  $V$ ,
- les  $U^i$  sont deux à deux disjoints.

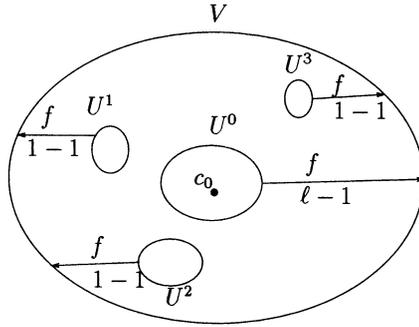


FIG. 6 – Une L-application  $f : \bigcup_{i=0}^3 U^i \rightarrow V$  ramifiée en  $c_0$ .

Nous avons tenu ici à ordonner les ouverts  $U^i$ , ce que ne fait pas Lyubich dans la définition qu'il donne des applications à allure polynômiale généralisées. Nous pouvons définir

$$K(f) = \{z \mid (\forall n \in \mathbb{N}) f^{(n)}(z) \in \bigcup_{i=0}^{k-1} U^i\}.$$

Remarquons que  $c_0$  est un élément de  $K(f)$ .

## 6.2. Applications de Fibonacci

Il est possible de définir une notion de L-application de Fibonacci. Cette définition est beaucoup plus proche de la définition des polynômes de Fibonacci donnée par Branner et Hubbard [BH] ou par Yoccoz [Y].

Nous allons commencer par définir le puzzle associé à une L-application  $f$ , en suivant la procédure exposée par Branner et Hubbard dans [BH]. Le puzzle de profondeur 0,  $\mathcal{P}_0(f)$  est constitué par les pièces  $U^i$ . Les pièces du puzzle de profondeur  $n$ ,  $\mathcal{P}_n(f)$ , sont les composantes connexes de  $f^{(-n)}(\mathcal{P}_0)$ . Pour chaque  $z \in K(f)$ ,  $P_n(z)$  désigne la pièce de

$\mathcal{P}_n(f)$  qui contient  $z$ . Nous nous intéressons particulièrement aux pièces qui contiennent  $c_0$ . Si  $n \geq 0$ ,  $C_n = P_n(c_0)$  est la **pièce critique** de profondeur  $n$ , et  $C_{-1} = V$ . Associée à ce puzzle, nous pouvons définir une notion de descendance: pour tout  $n \geq -1$ , les enfants de  $C_n$  sont les pièces critiques  $C_l$ , avec  $l > n$ , telles que  $f^{(l-n)}(C_l) = C_n$  et  $f^{(k)}(C_l)$  ne contient pas le point critique  $c_0$  pour  $0 < k < l - n$ . De plus, si  $m < n$ , nous dirons que la pièce critique  $C_m$  est plus vieille que la pièce  $C_n$ , ce qui revient à dire que  $C_n \subset C_m$ .

Nous pouvons maintenant définir les applications de Fibonacci.

**DÉFINITION 5.**—Une application de Fibonacci est une L-application

$$f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V,$$

telle que

- chaque pièce critique  $C_n$  a exactement deux enfants;
- les oncles sont plus vieux que leurs neveux;
- les enfants d'un fils aîné sont tous les deux plus vieux que ceux du fils cadet.

**PROPOSITION 6.**—Si  $P$  est un polynôme de Fibonacci, alors les L-applications  $(P^{(S_k)} \cup P^{(S_{k-1})}) : (D_k^0 \cup D_k^1) \rightarrow D_k$  sont des applications de Fibonacci.

### 6.3. Renormalisation pour les L-applications

Dans [L3], Lyubich introduit une notion de renormalisation généralisée pour les L-applications.

**DÉFINITION 6.**—Nous dirons qu'une L-application  $f$  est renormalisable, si nous pouvons trouver

- une collection de pièces de puzzle  $U_1^i$ ,  $i = 0, \dots, l - 1$ , une pièce  $V_1$  et
- des entiers  $n_i$ ,  $i = 0, \dots, l - 1$ , avec au moins un  $n_i > 1$ ,

tels que l'application  $g : \bigcup_{i=0}^{l-1} U_1^i \rightarrow V_1$  définie par  $g|U_1^i = f^{(n_i)}$  soit une L-application. Nous dirons alors que  $g$  est une renormalisée de  $f$ .

La proposition suivante s'obtient en examinant la figure 7, en utilisant la définition des applications de Fibonacci, et en remarquant que les relations généalogiques sont préservées par la renormalisation.

**PROPOSITION 7.**—Soit  $f$  une application de Fibonacci. Alors  $f$  est renormalisable et la renormalisée  $g : U_1^0 \cup U_1^1 \rightarrow V_1$  définie par

$$\begin{aligned} U_1^0 &= P_2(\omega), \\ U_1^1 &= P_1(f^2(\omega)), \\ V_1 &= P_0(\omega), \\ g|U_1^0 &= f \circ f \\ g|U_1^1 &= f \end{aligned}$$

est une application de Fibonacci.

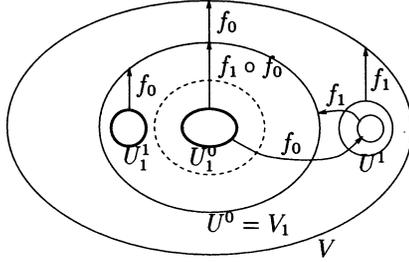


FIG. 7 – Renormalisation d’une application de Fibonacci.

Nous pouvons donc définir un opérateur de renormalisation  $\mathcal{R}$ , qui à une application de Fibonacci  $f$  associe l’application de Fibonacci  $\mathcal{R}(f) = \lambda^{-1} \circ g \circ \lambda$ , où  $\lambda = g(0) = f^{(2)}(0)$ . L’application  $\mathcal{R}(f)$  est normalisée de sorte que la valeur critique soit en 1.

#### 6.4. Agencement de l’orbite critique sur l’axe réel

Dans [LM], Lyubich et Milnor montrent que la suite de pétrissage (kneading sequence) d’un polynôme de Fibonacci réel  $P$ , est entièrement déterminée.

**PROPOSITION 8** [LM].—*Soit  $P$  un polynôme de Fibonacci ayant un point critique  $c_0$ . Soit  $c_n = P^{(n)}(c_0)$ . Alors :*

$$\begin{aligned} c_{S_k} &< 0 \text{ pour } k \equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ c_{S_k} &> 0 \text{ pour } k \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \text{sgn}(c_n) &= \text{sgn}(c_{n-S_k}) \text{ pour } S_k < n < S_{k+1}. \end{aligned}$$

Les applications de Fibonacci que nous considérerons par la suite seront réelles ( $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ ), et symétriques ( $f(z) = F(z^\ell)$ , où  $F$  est une application holomorphe, et où  $\ell$  est le degré du point critique de  $f$ ). Dans [Bu], nous utilisons les techniques de tableaux pour montrer la proposition suivante.

**PROPOSITION 9.**—*L’agencement, sur l’axe réel, de l’orbite critique d’une application de Fibonacci réelle,  $f$ , ne dépend que des positions relatives de  $c_0, c_1$  et  $c_2$ . D’autre part  $c_{S_{k-1}}$  et  $c_{S_{k+1}}$  sont toujours de signes opposés.*

Nous pouvons remarquer que  $f$  et  $\mathcal{R}(f)$  ont un point critique en 0 et une valeur critique en 1. Par conséquent les agencements de leurs orbites critiques sur  $\mathbb{R}$  ne dépendent que du signe de  $f^{(2)}(0)$  et  $[\mathcal{R}(f)]^{(2)}(0) = f^{(3)}(0)/f^{(2)}(0)$  qui sont justement de signes opposés. C’est pour cette raison que nous introduisons un opérateur de retournement qui à une application de Fibonacci  $f$  associe l’application  $\tilde{f} : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$  définie par  $\tilde{f}|_{U^0} = f$  et  $\tilde{f}|_{U^1} = -f$ .

**PROPOSITION 10.**—*Si  $f$  est une application de Fibonacci, alors  $\tilde{f}$  est encore une application de Fibonacci.*

L'opérateur  $\widetilde{\mathcal{R}}$  qui consiste à renormaliser puis à retourner, transforme donc une application de Fibonacci  $f$  en une application de Fibonacci  $\widetilde{\mathcal{R}}(f)$ . L'utilité de cette opération de retournement est :

**PROPOSITION 11.**—*Soit  $f$  une application de Fibonacci normalisée, c'est-à-dire telle que le point critique soit 0 et la valeur critique 1. L'agencement des orbites critiques de  $f$  et de  $\widetilde{\mathcal{R}}(f)$ , sur l'axe réel, sont identiques.*

### 6.5. Germes de L-applications

Nous dirons que deux L-applications  $f_1$  et  $f_2$  sont équivalentes si  $K(f_1) = K(f_2)$  et si les deux applications coïncident sur leur ensemble de Julia. Les classes d'équivalence, que nous noterons  $[f]$ , seront appelées les germes de L-applications. Nous pouvons munir cet espace de la topologie de Carathéodory ([McM]). Nous pouvons également projeter l'opérateur  $\widetilde{\mathcal{R}}$  sur l'espace des germes de L-applications. À un germe d'application de Fibonacci  $[f]$ , nous associons un germe  $\widetilde{\mathcal{R}}([f])$ , qui est un germe d'application de Fibonacci. Nous pouvons donc itérer ce procédé et construire ainsi une suite de germes de Fibonacci :  $\widetilde{\mathcal{R}}^{(n)}([f])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**PROPOSITION 12.**—*Soit  $P_k$  l'application de Fibonacci  $(P^{(S_k)} \cup P^{(S_{k-1})}) : (D_k^0 \cup D_k^1) \rightarrow D_k$ . Alors*

$$\mathcal{R}([P_{k-1}]) = [\lambda_k^{-1} \circ P_k \circ \lambda_k],$$

où  $\lambda_k = P_k(0)$ .

Dans [SN], van Strien et Nowicki montrent que deux applications de Fibonacci de même degré  $\ell > 2$ , dont les orbites critiques sont ordonnées identiquement sur l'axe réel, sont quasi-conformément conjuguées. La proposition 11 dit que c'est le cas des applications  $\widetilde{\mathcal{R}}^{(n)}(P_1)$ . En reprenant les arguments de van Strien et Nowicki ([SN] Théorème 7.2), et les estimées réelles de [BKNS], nous pouvons montrer la proposition suivante.

**PROPOSITION 13.**—*Pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , les applications  $\widetilde{\mathcal{R}}^{(m)}(P_1)$  et  $\widetilde{\mathcal{R}}^{(n)}(P_1)$  sont quasi-conformément conjuguées. De plus, il existe des représentants des germes  $\widetilde{\mathcal{R}}^{(m)}([P_1])$  et  $\widetilde{\mathcal{R}}^{(n)}([P_1])$ ,  $K$ -quasi-conformément conjugués, avec  $K$  indépendant de  $m$  et  $n$ .*

Van Strien et Nowicki adaptent alors les techniques de tours de McMullen développées dans [McM], pour montrer la proposition suivante.

**PROPOSITION 14** ([SN] Théorème 7.1).—*La suite  $\widetilde{\mathcal{R}}^{(n)}([P_1])$  a une limite quand  $n$  tend vers l'infini. C'est un germe d'application de Fibonacci, point fixe de  $\widetilde{\mathcal{R}}$ , dont tous les représentants sont quasi-conformément conjugués à  $P_1$ .*

Nous allons maintenant montrer que nous pouvons utiliser ce point fixe de renormalisation pour construire le jeu homothétique de la partie précédente.

## 7. ÉQUATION DE CVITANOVIĆ-FIBONACCI

### 7.1. L'équation fonctionnelle

Remarquons dans un premier temps que les points fixes de  $\widetilde{\mathcal{R}}$  sont associés à une équation fonctionnelle.

**PROPOSITION 15.**—*Soit  $f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$  une application de Fibonacci telle que  $\widetilde{\mathcal{R}}([f]) = [f]$ . Notons  $f_0 = f|_{U^0}$ ,  $f_1 = f|_{U^1}$  et  $\lambda = f^{(2)}(0)$ . Alors*

$$\begin{cases} f_0(z) = -1/\lambda^2 f_0(\lambda f_0(\lambda z)) \text{ et} \\ f_1(z) = -\lambda^{-1} f_0(\lambda z), \end{cases}$$

partout où les deux membres des inégalités sont simultanément définis.

Il s'agit juste ici d'écrire que  $f$  est un point fixe de  $\widetilde{\mathcal{R}}$ .

**DÉFINITION 7.**—*Ce que nous appellerons l'équation de Cvitanović-Fibonacci est le système de conditions suivant :*

$$\begin{cases} f(z) = -1/\lambda^2 f(\lambda f(\lambda z)), \\ 0 < \lambda < 1, \\ f(0) = 1 \text{ et} \\ f(z) = F(z^\ell), \text{ avec } F \text{ univalente et } \ell > 2 \text{ pair.} \end{cases}$$

### 7.2. Solutions de l'équation

Dans [E1], Epstein expose une théorie permettant d'interpréter l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Dans un premier temps, nous désirons étudier les solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci, telles que  $f$  et  $F$  soient des applications analytiques réelles sur un intervalle ouvert  $J$  contenant 0, et leur extension complexe. Par conséquent, soit  $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Définissons alors

$$\mathbb{C}(J) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \neq 0 \text{ ou } z \in J\} = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_- \cup J,$$

où

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} = -\mathbb{H}_-.$$

Les applications  $h$  holomorphes dans  $\mathbb{C}(J)$  telles que  $h(\bar{z}) = \overline{h(z)}$  et  $h(\mathbb{H}_+) \subset \mathbb{H}_+$  sont appelées applications Herglotz (et  $-h$  est une application anti-Herglotz). Nous allons étudier

les solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci, telles que  $F$  soit univalente dans un voisinage de 0, et que son inverse,  $F^{-1}$ , soit anti-Herglotz. Comme la limite des renormalisées est obtenue comme limite de polynômes ayant toutes leurs valeurs critiques dans  $\mathbb{R}$ , cette condition est automatiquement vérifiée.

Nous pouvons alors étudier le graphe de  $f$  sur l'axe réel. Il est dessiné sur la figure 8. Soit  $x_0$  la préimage positive de 0. En utilisant l'équation fonctionnelle, nous montrons :

- $f(\lambda x_0) = x_0/\lambda$ ,
- $f(\lambda) = -\lambda^2$ , et
- le premier point critique sur  $\mathbb{R}^+$  est  $x_0/\lambda$ , et  $f(x_0/\lambda) = -1/\lambda^2$ .

En particulier, nous obtenons ainsi la position relative de plusieurs points sur l'axe réel.

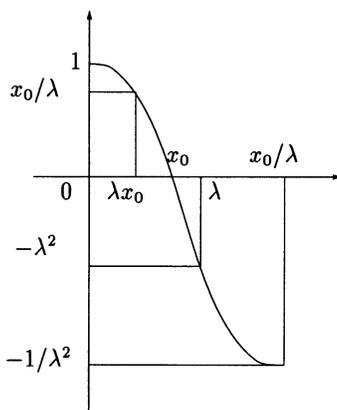


FIG. 8 – Le graphe de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Epstein étudie alors jusqu'où il peut étendre  $F^{-1}$ . Ses résultats sont les suivants (voir figure 9) :

- $F^{-1} \in -\mathbb{P}([-1/\lambda^2, 1/\lambda^4[)$ ,
- nous pouvons étendre  $F^{-1}$  continûment au bord de  $\mathbb{H}_+$ , et au bord de  $\mathbb{H}_-$ , et même analytiquement en dehors des points  $(-1/\lambda^2)^n$ ,  $n \geq 1$ , qui sont des points de branchements de type  $z^{1/\ell}$ ,
- les valeurs au bord ne sont jamais réelles en dehors de  $-1/\lambda^2$  et de  $1/\lambda^4$ ,
- l'extension de  $F^{-1}$  à la fermeture de  $\mathbb{H}_+$  (resp.  $\mathbb{H}_-$ ) est injective, et
- quand  $z$  tend vers l'infini dans  $\mathbb{H}_+$  (resp.  $\mathbb{H}_-$ ),  $F^{-1}(z)$  tend vers un point  $F^{-1}(i\infty) \in \mathbb{H}_-$  (resp.  $F^{-1}(-i\infty) \in \mathbb{H}_+$ ).

Maintenant, soit  $W = f^{-1}(\mathbb{C}([-1/\lambda^2, 1/\lambda^4[))$ . Par construction,

$$f : W \rightarrow \mathbb{C}([-1/\lambda^2, 1/\lambda^4[)$$

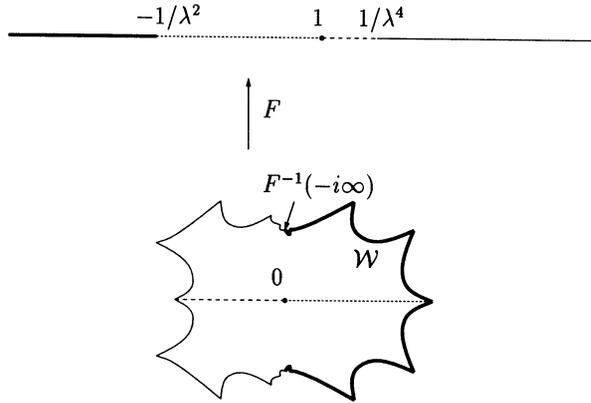


FIG. 9 -  $\mathcal{W} = F^{-1}(\mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^4])$ .

est un revêtement ramifié ayant un seul point critique en 0, de degré  $\ell$ , et  $W$  est invariant par rotation d'angle  $2i\pi/\ell$ . Nous avons dessiné un domaine possible pour un degré  $\ell = 4$  sur la figure 10.

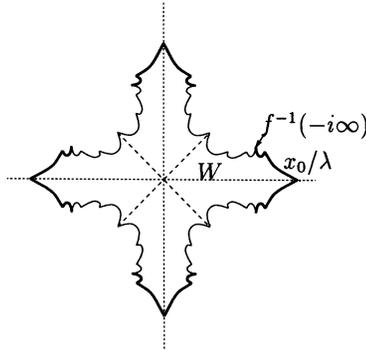


FIG. 10 - Un domaine  $W$  pour un degré  $\ell = 4$ .

Maintenant que nous connaissons le domaine de  $f$  ainsi que la position relative de certains points, nous pouvons en déduire la proposition suivante.

**PROPOSITION 16.**—*Soient*

- $f : W \rightarrow \mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^4]$ , une solution réelle de l'équation de Cvitanović-Fibonacci,
- $f_\lambda(z) = f(\lambda z)$ , et
- $f_{\lambda^2}(z) = f(\lambda^2 z)$ .

Alors  $f_{\lambda^2} : W/\lambda^2 \rightarrow \mathbb{C}[-1/\lambda^2, 1/\lambda^4]$  est une application à allure polynômiale ayant un point fixe attractif de multiplicateur  $-\lambda^2$ , et  $f_\lambda$  est un linéarisateur de  $f_{\lambda^2}$ .

PREUVE. Le fait que  $f_{\lambda^2}$  soit une application à allure polynômiale (voir [DH]) découle directement du fait que

$$\overline{W}/\lambda^2 \subset \mathbb{C}(-1/\lambda^2, 1/\lambda^2) \subset \mathbb{C}(-1/\lambda^2, 1/\lambda^4).$$

D'autre part, nous pouvons réécrire l'équation de Cvitanović-Fibonacci de la manière suivante:  $f_{\lambda}(z) = -1/\lambda^2 f_{\lambda}(f_{\lambda^2}(z))$ , ce qui signifie que  $f_{\lambda}$  semi-conjuge  $f_{\lambda^2}$  à  $z \mapsto -\lambda^2 z$  (c'est une conjugaison au voisinage de  $\alpha$ ). Le reste de la proposition vient aussitôt. De plus, si  $x_0$  désigne la préimage positive de 0 par  $f$ , alors le point fixe,  $\alpha$ , de  $f_{\lambda^2}$  vérifie  $x_0 = \lambda\alpha$ .

$$\begin{array}{ccc} \alpha = x_0/\lambda & \xrightarrow{f_{\lambda^2}} & \alpha = x_0/\lambda \\ f_{\lambda} \downarrow & & \downarrow f_{\lambda} \\ 0 & \xrightarrow{-\lambda^2 z} & 0 \end{array}$$

L'ensemble de Julia de  $f_{\lambda^2}$ ,  $K(f_{\lambda^2})$  est donc un disque topologique fermé, bordé par une courbe de Jordan. Revenons maintenant au point fixe de  $\widetilde{\mathcal{R}}$ . ■

**PROPOSITION 17.**—*Soit  $f_0$  une solution de l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Posons*

$$\begin{aligned} V &= \lambda \overset{\circ}{K}(f_{\lambda^2}), \\ U^0 &= f_0^{-1}(V), \\ U^1 &= f_0(\lambda^2 V). \end{aligned}$$

*Définissons par ailleurs  $f$ , par  $f|U^0 = f_0$  et  $f|U^1 = -\lambda^{-1} \circ f_0 \circ \lambda$ . Alors  $f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$  est une application de Fibonacci telle que  $\widetilde{\mathcal{R}}([f]) = [f]$ .*

Cette proposition traduit le fait qu'il existe une manière canonique de construire un représentant des points fixes de  $\widetilde{\mathcal{R}}$ , en utilisant l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Le résultat n'est pas immédiat. La partie technique consiste à montrer que les ouverts  $U^0$  et  $U^1$  sont bien relativement compacts et disjoints dans  $V$ .

### 7.3. Retour sur le jeu homothétique

Toute la construction du jeu de Fibonacci réalisée par van Strien et Nowicki pour le polynôme de Fibonacci  $P$  peut être faite à partir de l'application de Fibonacci construite dans la proposition 17. Ce travail est détaillé dans [Bu]. Le jeu ainsi construit est le jeu homothétique de la partie 5.1. En effet, d'après la proposition 14, il existe un homéomorphisme quasi-conforme,  $\phi : D_1 \rightarrow V$  qui conjugue  $P_1 = (P^{(2)} \cup P) : D_1^0 \cup D_1^1 \rightarrow D_1$  à  $f : U^0 \cup U^1 \rightarrow V$ . La proposition 5 (voir §5.1) découle directement de cette conjugaison et du fait que  $f$  est un point fixe de  $\widetilde{\mathcal{R}}$ . Les disques  $\widetilde{D}_1 = V$  et  $\widetilde{D}_k$  sont des homothétiques de l'ensemble de Julia  $K(f_{\lambda^2})$ , et les applications  $\tilde{f}_k$  des conjuguées de la solution  $f_0$  de l'équation de Cvitanović-Fibonacci.

## 8. ESPÉRANCE ET VARIANCE DU JEU DE FIBONACCI.

L'idée initiale de van Strien et de Nowicki était d'utiliser le corollaire 2 (§4.3) pour achever la démonstration du lemme 2 (§5.1). Pour cela, ils comptaient montrer les trois lemmes suivants :

*LEMME 4.*—Il existe une constante  $K_1 > 0$ , telle que pour tout  $k > 0$ , il existe un degré  $\ell(k)$  tel que pour tout degré pair  $\ell \geq \ell(k)$ ,

$$\frac{\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\})}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} \geq \frac{K_1}{k^2}.$$

*LEMME 5.*—Pour chaque degré  $\ell$ ,

$$\frac{\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\})}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} = \mathcal{O}(\lambda^{2k}),$$

où  $\lambda$  est le rapport du jeu en degré  $\ell$ .

*(LEMME 6).*—Soit  $\mathcal{A}_1$  la partition de  $\widehat{X}$  en régions où le gain est constant (figure 5). Rappelons que si  $A \in \mathcal{A}_n$ , alors  $\widehat{\Psi}^{(n)}(A) = \tilde{A}_0$ . Il existe un réel  $K_2$ , qui ne dépend pas du degré  $\ell$ , telle que

- pour tout  $n \geq 1$ ,
- pour toute partie  $A \in \mathcal{A}_n$ , et
- pour toute partie  $B \in \mathcal{A}_{n+1}$  contenue dans  $A$ ,

$$\frac{1}{K_2} \frac{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(B))}{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(A))} < \frac{\hat{\mu}(B)}{\hat{\mu}(A)} < K_2 \frac{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(B))}{\hat{\mu}(\widehat{\Psi}^{(n)}(A))}.$$

Le lemme 4 n'est pas très dur à démontrer une fois que nous avons compris le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci quand le degré  $\ell$  tend vers l'infini. Le lecteur pourra trouver une démonstration complète dans [SN], sous la désignation de *Big Jump Property*. Il permet de montrer que l'espérance au premier coup,  $E_1$ , tend vers l'infini quand le degré  $\ell$  tend vers l'infini.

Le lemme 5, quant à lui, est une conséquence directe du fait que

$$\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\} = f^{-1}(\lambda^k \tilde{A}_0),$$

où  $f$  est la solution de l'équation de Cvitanović-Fibonacci de degré  $\ell$ ; son jacobien au sens réel en  $x_0 = f^{-1}(0)$  est  $|f'(x_0)|^2$ . Il traduit le fait que pour chaque degré  $\ell$ , la variance du jeu quotient est finie.

Le (lemme 6) traduit une quasi-indépendance des coups. Il aurait permis de montrer directement que le jeu quotient vérifie les hypothèses du corollaire 2 (voir §4.3) si le degré  $\ell$  était suffisamment grand. Cependant il n'est pas juste tel quel, et nous serons amenés à travailler dans la partie suivante, de manière à récupérer l'indépendance des coups.

### 8.1. Espérance

Dans cette partie nous travaillons avec le jeu quotient,  $(\widehat{X}, \hat{\mu}, \hat{g}, \widehat{\Psi})$  (voir §5.2). Nous allons commencer par montrer que le lemme 4 entraîne la proposition suivante.

**PROPOSITION 18.**—*L'espérance du jeu quotient tend vers l'infini quand le degré  $\ell$  du polynôme de Fibonacci tend vers l'infini.*

PREUVE. Rappelons la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} E &= \int_{\widehat{X}} \hat{g}(x) d\hat{\mu}(x) \\ &= \frac{1}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} \int_{\tilde{A}_0} \hat{g}(x) d\hat{\mu}(x) \\ &= \frac{1}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} \sum_{k=-2}^{+\infty} k \hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\}). \end{aligned}$$

Il nous faut donc avoir une estimation de

$$\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\}) / \hat{\mu}(\tilde{A}_0).$$

Pour tout  $C \in \mathbb{R}$ , commençons par choisir un  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{k=1}^N K_1/k \geq C + 2.$$

et posons

$$\ell_0 = \sup_{k \leq N} \ell(k).$$

Alors, pour tout  $\ell \geq \ell_0$ ,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=-2}^{+\infty} k \frac{\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\})}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} \\ &\geq -2 + \sum_{k=1}^N k \frac{K_1}{k^2} > C. \end{aligned}$$

### 8.2. Comportement asymptotique des solutions

Ce que nous allons exposer dans cette partie a été démontré par Epstein. Il s'agit d'adapter les résultats d'Eckmann et Wittwer [EW] et d'Epstein [E2] concernant l'équation

de Feigenbaum-Cvitanović au cas de l'équation de Cvitanović-Fibonacci. Van Strien et Nowicki ont obtenu indépendamment des résultats équivalents ([SN], §V).

**PROPOSITION 19.**—*Soit  $f : W \rightarrow \mathbb{C}([-\lambda^{-2}, \lambda^{-4}])$  la solution de l'équation de Cvitanović-Fibonacci en degré  $\ell$ .  $f(z)$  est de la forme  $F(z^\ell)$ , où  $F$  est univalente sur*

$$\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{1/\ell} \in W\}.$$

*De toute suite de degrés pairs  $\ell_k$  qui tend vers l'infini quand  $k$  tend vers l'infini, nous pouvons extraire une sous-suite que nous noterons encore  $\ell_k$ , telle que,*

- $\lambda^{\ell_k}$  a une limite  $\tau \in ]0, 1[$ ,
- $x_0^{\ell_k}$  a une limite  $\omega$ ,
- les régions pointées  $(\mathcal{W}, 0)$  et  $(\mathcal{W}, \lambda^{\ell_k})$  ont des limites  $(\mathcal{W}_0, 0)$  et  $(\mathcal{W}_1, \tau)$ , avec  $\overline{\mathcal{W}_0} \cap \overline{\mathcal{W}_1} = \{\omega\}$ , et
- $F^{\ell_k}$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathcal{W}_0$  et de  $\mathcal{W}_1$  vers une application  $\mathcal{F}$ .

La topologie sur les régions pointées est la topologie de Carathéodory utilisée par McMullen [McM].

La proposition dit que lorsque  $\ell$  tend vers l'infini, l'ouvert  $\mathcal{W}$  se pince en  $\omega$ . Nous obtenons ainsi deux composantes connexes :  $\mathcal{W}_0$  et  $\mathcal{W}_1$  sur lesquelles  $F^\ell$  a une limite.

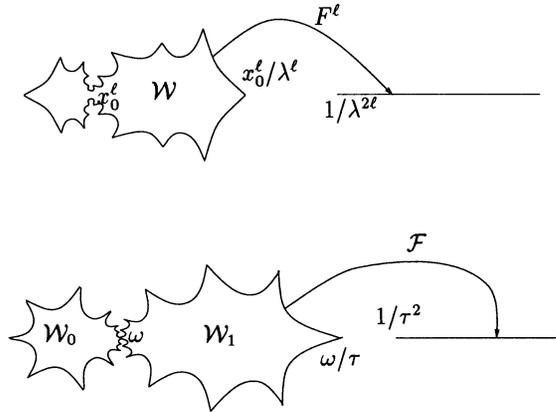


FIG. 11 – La limite  $\mathcal{F}$  de  $F^\ell$ , quand  $\ell$  tend vers l'infini

### 8.3. Les applications associées $\mathcal{F}_\tau$ et $\mathcal{F}_{\tau^2}$

De même que nous avons défini les applications  $f_\lambda$  et  $f_{\lambda^2}$ , il est naturel maintenant de prendre en compte les applications  $\mathcal{F}_\tau(z) = \mathcal{F}(\tau z)$  et  $\mathcal{F}_{\tau^2}(z) = \mathcal{F}(\tau^2 z)$ . Nous nous intéresserons également à l'ensemble de Julia rempli de  $\mathcal{F}_{\tau^2}$  :

$$\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\tau^2}) = \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall n \in \mathbb{N}) \mathcal{F}_{\tau^2}^{(n)}(z) \in \mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1 \cup \{\omega\}\}.$$

Remarquons alors que  $F^\ell$  ne s'annule qu'en  $x_0^\circ$ . En passant à la limite, comme  $\omega$  n'est pas dans le domaine limite  $\mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1$ , la fonction  $\mathcal{F}$  ne s'annule pas. D'autre part  $\mathcal{F}(0) = 1$ . Par conséquent, nous pouvons donc définir le logarithme  $\log(\mathcal{F})$  de sorte que  $\log(\mathcal{F})(0) = 0$ .

**PROPOSITION 20** (cf [EW] ou [SN], §9.1).— $\mathcal{F}_{\tau^2}$  a un point fixe,  $\omega/\tau = \beta$ , parabolique de multiplicateur  $-1$ . La coordonnée de Fatou,  $\Phi$ , de  $\mathcal{F}_{\tau^2} \circ \mathcal{F}_{\tau^2}$ , qui s'annule en 0, est  $\log(\mathcal{F}(\tau z))/\log(\tau^4)$ .

Nous pouvons donc décrire le comportement de  $\mathcal{F}$  au voisinage de sa singularité,  $\omega$ .

**COROLLAIRE 3.**—Il existe une constante  $C > 0$  et des ouverts  $V_0$  et  $V_1$  tels que,

- $V_i \subset \mathcal{W}_i$ ,  $i = 0, 1$ ,
- $\omega \in \partial V_i$ ,  $i = 0, 1$ ,
- l'image de chaque  $V_i$  par l'application  $z \mapsto -C/(z-\omega)^2$  contient un demi-plan gauche, et
- sur  $V_0 \cup V_1$ ,

$$\log(\mathcal{F})(z) = -C/(z-\omega)^2 + \mathcal{O}(1).$$

PREUVE. Il suffit pour cela de remarquer que la seule valeur asymptotique de  $\mathcal{F}_{\tau^2}$  est 0. Par conséquent,  $\mathcal{F}_{\tau^2} \circ \mathcal{F}_{\tau^2}$  a un cycle de deux pétales paraboliques attachés en  $\beta$ . La coordonnée de Fatou,  $\Phi$ , est donc de la forme  $K/(z-\beta)^2 + \mathcal{O}(1)$  dans des voisinages à gauche et à droite de  $\beta$ . ■

PREUVE DU LEMME 4. La démonstration découle des propriétés de continuité des ensembles de Julia, et du corollaire 3. En effet, nous pouvons alors en déduire que  $\{z \in \mathbb{C} \mid z^{1/\ell} \in \tilde{A}_0\}$  converge vers un ouvert

$$\mathcal{A} = \mathring{\mathcal{K}}(\mathcal{F}_{\tau^2}) \setminus \tau\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\tau^2}).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\} &= \{z \in \tilde{A}_0 \mid f(z) \in \lambda^k \tilde{A}_0\} \\ &= f^{-1}(\lambda^k \tilde{A}_0). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que  $\hat{\mu}$  est seulement multipliée par  $\ell$  quand on élève à la puissance  $\ell$ . Par conséquent, pour chaque  $k \geq 1$ ,

$$\frac{\hat{\mu}(\{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = k\})}{\hat{\mu}(\tilde{A}_0)} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\mu}(\mathcal{F}^{-1}(\tau^k \mathcal{A}))}{\hat{\mu}(\mathcal{A})}.$$

Nous connaissons le comportement de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $\omega$ . Un calcul simple nous permet alors de montrer que la quantité  $\hat{\mu}(\mathcal{F}^{-1}(\tau^k \mathcal{A})) / \hat{\mu}(\mathcal{A})$  est de l'ordre de  $K_1/k^2$ .  $\square$

## 9. INDÉPENDANCE DES COUPS

Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, le (lemme 6) traduit une certaine indépendance des coups, et nous permettrait de montrer que le jeu quotient vérifie les hypothèses du corollaire 2 (§4.3). Cependant certaines corrélations peuvent apparaître, et il nous faut donc étudier de plus près ce qui se passe. Nous pouvons définir des régions dites de **guigne** (jinx), telles que

- si l'orbite d'un point sort d'une de ces régions, l'indépendance est retrouvée,
- tant que l'orbite reste dans la même région de guigne, la corrélation peut augmenter, mais
- le temps moyen mis pour sortir d'une région de guigne est majoré par une constante  $T$ , indépendamment du degré  $\ell$ .

Comme le gain est minoré par  $-2$ , la perte moyenne entre deux coups indépendants (c'est-à-dire entre deux coups où l'orbite d'un point sort d'une des régions) est majorée par  $2T$ . Nous pouvons alors choisir le degré  $\ell$  de sorte que l'espérance de gain, à chaque fois que l'orbite sort d'une région de guigne, soit supérieure à  $E > 2T$  (Prop. 18, §8.1). La proposition 3 (§4.3) permettra alors de montrer que le jeu homothétique est ultimement gagnant : pour  $\hat{\mu}$  presque tout  $x \in \widehat{X}$ ,  $\hat{g}(x) + \dots + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(x)) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### 9.1. Lemme de distorsion

**DÉFINITION 8.**—*Nous dirons que  $f : U \rightarrow V$  a une distorsion bornée par  $K$  si et seulement s'il existe une constante  $K$  telle que pour tous sous-ensembles  $U_1$  et  $U_2$  de  $U$ ,*

$$\frac{1}{K} \frac{\mu(U_1)}{\mu(U_2)} < \frac{\mu(f(U_1))}{\mu(f(U_2))} < K \frac{\mu(U_1)}{\mu(U_2)},$$

où  $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue.

Le lemme crucial qui nous permet de contrôler l'indépendance des coups est le lemme de distorsion de Koebe.

**LEMME 7.**—*Soit  $f : U \rightarrow V$  une application univalente, où  $U$  est un domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$ . Soit  $U' \subset U$  un domaine simplement connexe relativement compact dans  $U$ . Il existe une constante  $K$  qui ne dépend que du module de l'anneau  $A = U \setminus \overline{U'}$ , telle que la distorsion sur  $U'$  est bornée par  $K$ .*

Nous pouvons adapter ce lemme de distorsion comme le font van Strien et Nowicki.

LEMME 8.—Soit  $f : U \rightarrow V$  un revêtement non ramifié. Soit  $V'$  un ouvert simplement connexe relativement compact dans  $V$  et  $U'$  sa préimage par  $f$ . Soit  $d$  la distance de  $V'$  au bord de  $V$  et  $\delta$  le diamètre de  $V'$ . Il existe une constante  $K$  qui ne dépend que du rapport  $\delta/d$  telle que la distorsion sur  $U'$  est bornée par  $K$ .

Supposons qu'il existe une constante  $K_2 \in \mathbb{R}$  telle que pour toute partie  $A \in \mathcal{A}_n$ ,  $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$  ait une distorsion bornée par  $K_2$ , Alors

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(z)) d\mu(z) \geq \frac{1}{K_2} \frac{1}{\mu(\widehat{\Psi}^{(n)}(A))} \int_{\widehat{\Psi}^{(n)}(A)} \hat{g}(z) d\mu(z) - 2,$$

car le gain est minoré par 2. La deuxième moitié de l'inégalité est l'espérance de gain sur  $\widehat{\Psi}^{(n)}(A)$ . Si cette espérance de gain est supérieure à  $3K_2$ , alors l'espérance conditionnelle

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(z)) d\mu(z)$$

est supérieure à 1. De plus nous pourrions également montrer que la condition (2) de variance du corollaire 2 (§4.3) serait vérifiée. Nous aurions alors terminé la démonstration.

Il nous faut donc connaître la distorsion de  $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$ .

### 9.2. Extension maximale de $\widehat{\Psi}^{(n)}$

Rappelons que sur chaque partie de  $\tilde{A}_0$ , où le gain  $\hat{g}$  vaut  $k$ ,  $\widehat{\Psi}$  est égale à  $\lambda^{-k} \tilde{f}_0$ , où  $f_0$  est la solution de l'équation de Fibonacci. Or  $f_0$  est un revêtement ramifié de  $W$  dans  $\mathbb{C} \setminus (-1/\lambda^2, 1/\lambda^4]$ , la seule valeur critique étant 1. Par récurrence nous pouvons montrer le lemme suivant, illustré sur la figure 12.

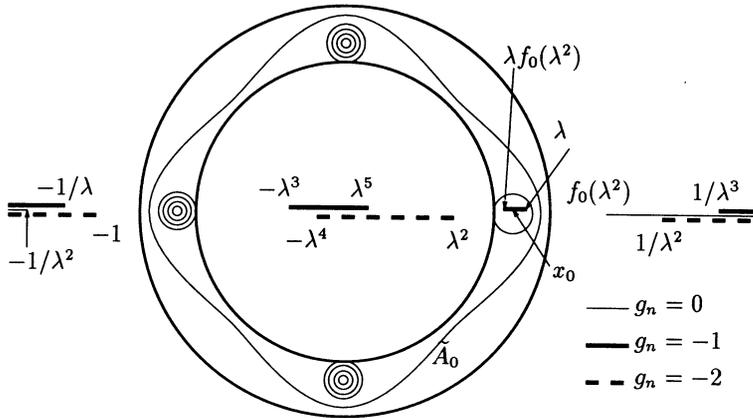


FIG. 12 – Les coupures en continu correspondent à une perte de 1, et celle en pointillés à une perte de 2.

LEMME 9 (cf [SN], Théorème 11.1).—Soit  $A$  une partie de  $\mathcal{A}_n$ . Le gain au  $n$ -ième coup,

$g_n = \hat{g} \circ \hat{\Psi}^{(n-1)}$ , est constant sur  $A$ . Il existe un ouvert  $U$  contenant  $A$  et tel que  $\hat{\Psi}^{(n)} : U \rightarrow \hat{\Psi}^{(n)}(U)$  est un revêtement non ramifié au dessus de

- si  $g_n \geq 0$ ,

$$\hat{\Psi}^{(n)}(U) = \mathbb{C} \left( ] - 1/\lambda^{2+g_n}, f_0(\lambda^2)/\lambda^{g_n}[ \right),$$

- si  $g_n = -1$ ,

$$\hat{\Psi}^{(n)}(U) = \mathbb{C} \left( ] - 1/\lambda, 1/\lambda^3[ \setminus \left( [-\lambda^3, \lambda^5] \cup [\lambda f_0(\lambda^2), \lambda] \right) \right),$$

- si  $g_n = -2$ ,

$$\hat{\Psi}^{(n)}(U) = \mathbb{C} \left( ] - 1, 1/\lambda^2[ \setminus [-\lambda^4, \lambda^2] \right).$$

Pour pouvoir appliquer le lemme 8, il ne nous reste plus qu'à avoir une estimation de la géométrie de l'anneau  $\tilde{A}_0$ .

### 9.3. Estimation géométrique sur l'anneau $\tilde{A}_0$ , partition raffinée

Nous pouvons obtenir des estimées sur la géométrie de l'anneau  $\tilde{A}_0$ , en utilisant le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Fibonacci quand le degré  $\ell$  tend vers l'infini. En effet, nous savons alors que, quitte à conjuguer par  $z \mapsto z^\ell$ , cet anneau tend vers

$$\mathcal{A} = \mathring{\mathcal{K}}(\mathcal{F}_{\tau^2}) \setminus \tau\mathcal{K}(\mathcal{F}_{\tau^2}).$$

Or  $\mathcal{F}_{\tau^2}$  a un point fixe parabolique  $\beta = \omega/\tau$  (Prop. 20). Nous pouvons donc constater que les anneaux  $\tilde{A}_0$  se pincent au voisinage de  $x_0$ ,  $\lambda x_0$  et de  $-\lambda x_0$  quand  $\ell$  tend vers l'infini. Or nous avons vu que si nous essayons de prolonger  $\hat{\Psi}^{(n)}$ , nous rencontrons des valeurs critiques au voisinage de ces points (voir figure 13). C'est pour cette raison que  $\hat{\Psi}^{(n)}$  n'a pas une distorsion bornée indépendamment de  $\ell$ .

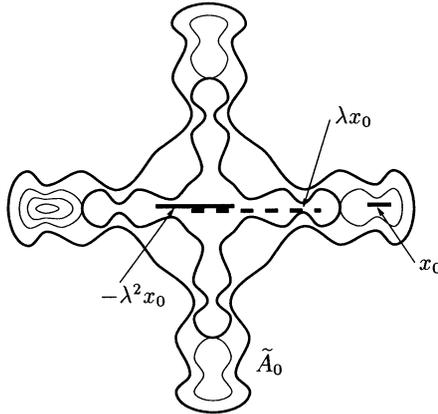


FIG. 13 – Les anneaux  $\tilde{A}_0$  se pincent au voisinage de certaines valeurs critiques de  $\hat{\Psi}^{(n)}$ .

Comme toutes les valeurs critiques de  $\widehat{\Psi}^{(n)}$  sont sur l'axe réel, c'est lorsque l'orbite d'un point reste près de l'axe réel que nous verrons des corrélations apparaître. Pour préciser cette idée, nous serons amenés à considérer une partition raffinée de  $\tilde{A}_0$ .

Commençons par définir la partition de  $\mathbb{C}$  en secteurs  $S_k$ , de sommet 0 et d'angle  $2\pi/\ell$ :

$$S_k = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/\ell + 2k\pi/\ell < \text{Arg}(z) \leq \pi/\ell + 2k\pi/\ell\}.$$

Les deux secteurs centrés sur l'axe réel sont  $S_0$  et  $S_\ell$ .

La partition  $\mathcal{A}_0^*$  est la partition de  $\tilde{A}_0$  induite par la partition  $(S_0, \dots, S_{2\ell-1})$  de  $\mathbb{C}$ . Nous allons maintenant montrer que le seul moyen d'augmenter la distorsion est de rester dans des régions que nous appelons des régions de guigne.

#### 9.4. Régions de guigne

**DÉFINITION 9.**—*Les régions de guigne sont des éléments de la partition  $\mathcal{A}_1^* = \widehat{\Psi}^{-1}(\mathcal{A}_0^*)$ .*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \left\{ z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = -1; \begin{array}{l} z \in S_0 \text{ et } \widehat{\Psi}(z) \in S_\ell, \text{ ou} \\ z \in S_\ell \text{ et } \widehat{\Psi}(z) \in S_0 \end{array} \right\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{z \in \tilde{A}_0 \mid \hat{g}(z) = -2; z \in S_0; \widehat{\Psi}(z) \in S_0\}. \end{aligned}$$

Elles sont hachurées sur la figure 14.

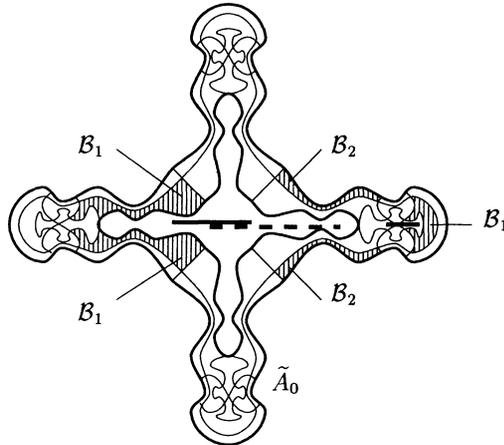


FIG. 14 – Les régions de guigne :  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .

Ces régions sont appelées régions de guigne, car le seul moyen d'accroître la distorsion, est d'y rester suffisamment longtemps. Autrement dit, dès que l'orbite d'un point sort d'une de ces régions, nous contrôlons la distorsion. Cette idée est traduite dans le lemme suivant.

**LEMME 10** (cf [SN], Théorème 12.1).—*Il existe une constante  $K_2$  indépendante de  $\ell$  telle que pour chaque partie  $A \in \mathcal{A}_n^*$ ,*

- *si  $\widehat{\Psi}^{(n-1)}(A) \neq \mathcal{B}_i$ ,  $i = 1, 2$ , alors  $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$  a une distorsion bornée par  $K_2$ , et*
- *si  $\widehat{\Psi}^{(n-2)}(A) \subset \mathcal{B}_i$  et  $\widehat{\Psi}^{(n-1)}(A) = \mathcal{B}_j$ , avec  $i \neq j$ , alors  $\widehat{\Psi}^{(n)} : A \rightarrow \widehat{\Psi}^{(n)}(A)$  a une distorsion bornée par  $K_2$ .*

PREUVE. La forme limite de l'anneau  $\widetilde{A}_0$  est contrôlée grâce au comportement asymptotique des solutions de l'équation de Fibonacci. Rappelons que  $\mathcal{F}_{\tau^2}$  a un point fixe parabolique,  $\beta$ , et que 0 est la seule valeur asymptotique. Une composante connexe de  $\mathring{\mathcal{K}}(\mathcal{F}_{\tau^2})$  est donc un pétale. Ce pétale contient le segment réel  $[0, \beta[$ , car  $\mathcal{F}_{\tau^2}$  est une application réelle. Ce résultat nous permet alors de contrôler le rapport entre le diamètre des parties de  $\mathcal{A}_0^*$  et leur distance aux coupures indiquées sur la figure 12. Le lemme de distorsion 8 nous permet alors de conclure.  $\square$

### 9.5. Temps moyen pour sortir des régions de guigne

Il ne reste plus qu'à contrôler la perte entre deux coups successifs où l'orbite de  $A$  quitte une région de guigne. Nous allons montrer qu'il existe une constante  $T$ , indépendante du degré  $\ell$ , telle que le temps moyen mis pour sortir des régions de guigne soit inférieur à  $T$ . Pour cela, il suffit d'estimer l'aire de

$$\mathcal{B}_{i,n} = \{z \in \mathcal{B}_i \mid (\forall k \in [0, n]) \widehat{\Psi}^{(k)}(z) \in \mathcal{B}_i\},$$

c'est-à-dire de l'ensemble des points dont l'orbite reste dans la région  $\mathcal{B}_i$  pendant au moins  $n$  coups.

En utilisant le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Cvitanović-Fibonacci quand le degré  $\ell$  tend vers l'infini, il est possible de montrer le lemme suivant.

**LEMME 11.**—*Il existe une constante  $C$  qui ne dépend pas du degré  $\ell$ , telle que*

$$\frac{\hat{\mu}(\mathcal{B}_{i,n})}{\hat{\mu}(\widetilde{A}_0)} \leq \frac{C}{n^2}.$$

*D'autre part, pour chaque degré  $\ell$ , il existe une constante  $0 < \rho < 1$  (qui dépend de  $\ell$ ) telle que*

$$\frac{\hat{\mu}(\mathcal{B}_{i,n})}{\hat{\mu}(\widetilde{A}_0)} = \mathcal{O}(\rho^{2n}).$$

PREUVE. Nous allons donner une idée de la démonstration pour  $i = 2$ . La démonstration pour  $i = 1$  est analogue. Rappelons que

$$\mathcal{B}_2 = \{z \in \widetilde{A}_0 \cap S_0 \mid \lambda^2 f_0 \in \widetilde{A}_0 \cap S_0\},$$

et que  $\widehat{\Psi}|_{\mathcal{B}_2} = \lambda^2 f_0$ . Par conséquent

$$\mathcal{B}_{2,n+1} = \mathcal{B}_2 \cap (\lambda^2 f_0)^{-1}(\mathcal{B}_{2,n}).$$

Or l'application  $\lambda^2 f_0$  a un point fixe attractif,  $\lambda x_0$ , et un cycle de deux points répulsifs de multiplicateur  $\rho$ , dans le bord de son ensemble de Julia. Comme

$$\mathcal{B}_{2,n} = (\lambda^2 f_0 | \mathcal{B}_2)^{(-n)}(\mathcal{B}_2),$$

nous pouvons obtenir la seconde estimée

$$\hat{\mu}(\mathcal{B}_{2,n}) \sim \rho^{2n} \hat{\mu}(\mathcal{B}_2).$$

La première partie du lemme 11 provient du comportement asymptotique quand le degré  $\ell$  tend vers l'infini. En effet, quitte à conjuguer par  $z \mapsto z^\ell$ , ces ensembles ont des limites,  $x_0^\ell$  tend vers  $\omega$ , et  $(\lambda^2 f_0)^\ell(z^{1/\ell})$  converge vers  $\tau^2 \mathcal{F}$ . Le cycle de deux points répulsifs se transforme en un point parabolique:  $\tau\omega$ . Il suffit alors d'utiliser les coordonnées de Fatou pour estimer l'aire des  $\mathcal{B}_{2,n}$  quand le degré  $\ell$  est suffisamment grand.  $\square$

PREUVE DU THÉORÈME. Pour tout  $x \in \widehat{X}$ , nous pouvons définir la variable

$$t_k = \inf\{n > t_{k-1} \mid \widehat{\Psi}^{(n)}(x) \text{ quitte une des régions } \mathcal{B}_i\}.$$

La première estimation permet de conclure que le temps moyen mis pour sortir de la région  $\mathcal{B}_i$ ,

$$E(t_1) = \frac{1}{\hat{\mu}(\widehat{A}_0)} \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{\mu}(\mathcal{B}_{i,n})$$

est majoré par  $C\pi^2/6$ . La deuxième estimation permet de conclure que la variance de la variable  $t_1$  est finie. Le lemme 10 dit que si l'orbite de  $A$  quitte  $\mathcal{B}_1$  ou  $\mathcal{B}_2$ , la distorsion est bornée par  $K_2$ . Par conséquent il existe une constante  $T$  qui ne dépend pas du degré  $\ell$  et une constante  $V$  qui dépend de  $\ell$  telles que, pour tout  $k$ ,

- l'espérance  $E(t_k)$  est majorée par  $T$ , et
- la variance de  $t_k$  est majorée par  $V$ .

Nous pouvons alors appliquer le corollaire 2 (§4.3), pour conclure que pour  $\hat{\mu}$ -presque tout point  $x \in \widehat{X}$ , et pour tout  $\beta > 1/2$ ,

$$t_k \leq kT + o(k^\beta).$$

D'autre part, le lemme 10 et la proposition 18 (§8.1) permettent de montrer que pour toute constante  $E$ , il existe un degré  $\ell_0$  tel que pour tout degré pair  $\ell \geq \ell_0$  et tout  $n \geq 1$ , l'espérance conditionnelle de gain au  $n$ -ième coup est supérieure à  $E$

$$E_n = \frac{1}{\hat{\mu}(A)} \int_A \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(z)) d\hat{\mu}(z) > E,$$

et qu'il existe une constante  $V'$  (qui dépend du degré  $\ell$ ), telle que pour tout  $n \geq 1$ , la variance du gain au  $n$ -ième coup soit majorée par  $V'$ :

$$\int_{\widehat{X}} (\hat{g} \circ \widehat{\Psi}^{(n)} - E_n)^2 < V'.$$

Par conséquent, pour  $\hat{\mu}$ -presque tout  $x \in \widehat{X}$ ,

$$\hat{g}(\widehat{\Psi}^{(t_1)}(x)) + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(t_2)}(x)) + \dots + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(t_k)}(x)) \geq kE + o(k^\beta).$$

En combinant les deux résultats, nous montrons que pour  $\hat{\mu}$ -presque tout  $x \in \widehat{X}$ , et pour tout  $n$  compris entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$ ,

$$\hat{g}(x) + \dots + \hat{g}(\widehat{\Psi}^{(n)}(x)) \geq kE - 2(k+1)T + o(k^\beta).$$

Si  $E > 2T$ , cette somme tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . ■

## BIBLIOGRAPHIE

- [B] B. BRANNER - *Puzzles and Parapuzzles of Quadratic and Cubic Polynomials*, Mathematical Institute, Technical University of Denmark, Mat-Report (1994).
- [BKNS] H. BRUIN, G. KELLER, T. NOWICKI & S. VAN STRIEN - *Absorbing Cantor sets in dynamical systems : Fibonacci maps*, Stony Brook IMS preprint 1994/2. To appear in *Annals of Mathematics*.
- [Bo] F. BONAHOON - *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, *Annals of Mathematics* **Vol. 124** (1986), 71-158.
- [Bu] X. BUFF - *Points fixes de renormalisation*, Thèse, Orsay (1996).
- [BH] B. BRANNER & J.H. HUBBARD - *The Iteration of Cubic Polynomials, Part II: Patterns and Parapatterns*, *Acta Mathematica* **Vol. 169** (1992), 229-325.
- [C] R. CANARY - *Ends of hyperbolic 3-manifolds*, *J. Amer. Math. Soc.* **Vol. 6** (1993), 1-25.
- [D] A. DOUADY - *Topological Entropy of Unimodal Maps*, *Proceedings of the NATO Adv. Study Inst. on Real and Complex Dynamical Systems*, NATO ASI Series **Vol. 464** (1993).
- [DH] A. DOUADY & J.H. HUBBARD - *On the Dynamics of Polynomial-like Mappings*, *Ann. Scient., Ec. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> serie* **Vol. 18** (1985) 287-343.
- [E1] H. EPSTEIN - *Notes for lectures in Lausanne* (1992).
- [E2] H. EPSTEIN - *New proofs of the existence of the Feigenbaum functions*, *Commun. Math. Phys.* **Vol. 106** (1986), 395-426.
- [EW] J.P. ECKMANN & P. WITTEWIT - *Computer methods and Borel summability applied to Feigenbaum's equation*, *Lecture Notes in Physics*, Heidelberg, New York : Springer **Vol. 227** (1985).

- [H] J.H. HUBBARD - *Local Connectivity of Julia Sets and Bifurcation Loci: Three Theorems of J.C. Yoccoz*, *Topological methods in Modern Mathematics*, Publish or Perish, (1993), 467-511.
- [HK] F. HOFBAUER & G. KELLER - *Some remarks on recent results about S-unimodal maps*, *Ann. Institut Henri Poincaré* **Vol. 53** (1990), 413-425.
- [L1] M. LYUBICH - *Geometry of Quadratic Polynomials: Moduli, Rigidity, and Local Connectivity*, preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1993).
- [L2] M. LYUBICH - *Teichmüller Space of Fibonacci Maps*, Preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1993).
- [L3] M. LYUBICH - *On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial*, Preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1991).
- [LM] M. LYUBICH & J. MILNOR - *The unimodal Fibonacci map*, *Journal of the A.M.S.* **Vol. 6** (1993), 425-457.
- [M] J. MILNOR - *Local Connectivity of Julia Sets: Expository Lectures*, preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1992).
- [McM] C.T. McMULLEN - *Renormalization and 3-manifolds which fibers over the circle*, Preprint, Berkeley, (1995).
- [SN] S. VAN STRIEN & T. NOWICKI - *Polynomial maps with a Julia set of positive Lebesgue measure: Fibonacci maps*, Preprint, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook, (1994). La version la plus récente peut être obtenue par ftp : anonymous ftp, ftp.fwi.uva.nl, directory: cd pub/mathematics/reports/Geometry\_and\_Dynamics/Dyn95-1
- [T] W. THURSTON - *Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton Univ. lectures notes (1969).
- [Y] J.C. YOCOZ - *Sur la Connexité Locale de M*, Manuscrit non publié, (1989).

Xavier BUFF

Université de Paris-Sud

URA 1169 du CNRS

Centre de Mathématiques

Bâtiment 425

F-91405 ORSAY CEDEX

E-mail : buff@topo.math.u-psud.fr

# Astérisque

MAXIM KONTSEVICH

**Product formulas for modular forms on  $O(2, n)$**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 821, p. 41-56

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__41_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## PRODUCT FORMULAS FOR MODULAR FORMS ON $O(2, n)$

[after R. Borcherds]

by Maxim KONTSEVICH

### 1. INTRODUCTION

#### 1.1. Product formulas

A few years ago, R. Borcherds found a remarkable multiplicative correspondence between classical modular forms with poles at cusps and meromorphic modular forms on complex varieties  $SO(n) \times SO(2) \backslash SO(n, 2) / \Gamma$ , where  $\Gamma$  is an arithmetic subgroup in the real Lie group  $SO(n, 2)$ . He was motivated by generalized Kac-Moody algebras, the Monster group and vertex operator algebras. The first proof of his formulas in completely classical terms (see [3]) was rather indirect and complicated.

In 1995 physicists J. Harvey and G. Moore wrote a paper on string duality where they found a new approach to Borcherds' identities (see [12]). They used divergent integrals, which look formally like integrals in the classical theta correspondence in the theory of automorphic forms. R. Borcherds recently wrote a preprint (see [5]) where he generalized his earlier results using the idea of Harvey and Moore. My exposition is based mainly on this new preprint.

Here is one of Borcherds' theorems:

**Theorem.** *Let  $\Lambda$  be an even unimodular lattice of signature  $(s + 1, 1)$  where  $s = 8, 16, \dots$  and  $v_0 \in \Lambda \otimes \mathbf{R}$  be a generic vector of negative norm. Let  $F = \sum_{-n_0}^{\infty} c(n)q^n \in \mathbf{Z}((q))$  be a meromorphic modular form of weight  $(-s/2)$  for the group  $SL(2, \mathbf{Z})$  with poles only at the cusp. Then there is a unique vector  $\rho \in \Lambda$  such that the function defined for  $v \in \Lambda \otimes \mathbf{C}$  close to  $itv_0$ ,  $t \gg 1$ , by the formula*

$$\Psi(v) = e^{2\pi i(\rho, v)} \prod_{\gamma \in L, (\gamma, v_0) > 0} \left(1 - e^{2\pi i(\gamma, v)}\right)^{c(-(\gamma, \gamma)/2)}$$

*can be analytically continued to a meromorphic modular form of weight  $c(0)/2$  for*

the group  $O(s + 2, 2; \mathbf{Z})^+$ . In particular, the analytic continuation of  $\Psi$  satisfies the equation  $\Psi(2v/(v, v)) = \pm ((v, v)/2)^{c(0)/2} \Psi(v)$ .

In my exposition I will formulate results only in examples. One reason for this is that what is now known is still far from the complete generality. Another reason is that I want to avoid heavy notations in order not to obscure the logic of the construction.

## 1.2. An elementary example of a product formula

Product formulas can be considered as statements about formal power series of algebro-geometric origin. The general proof uses analysis: integrals, infinite series and non-holomorphic functions. Here I will show a purely algebraic proof of a simple product formula. Both this formula and the proof are not new. They were discovered by D. Zagier many years ago. Analogous formulas can be found in [11].

We fix notations:  $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$  denotes the upper-half plane and  $j : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$  is the classical elliptic invariant which identifies the quotient space  $\mathcal{H}/SL(2, \mathbf{Z})$  with  $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbf{C}$ , the coarse moduli space of complex elliptic curves. We will compactify it to  $\overline{\mathcal{M}}_1 \simeq \mathbf{CP}^1$ . Function  $q = \exp(2\pi i\tau)$  can be considered as a holomorphic coordinate at a neighborhood of point  $j = \infty$ . We expand the meromorphic function  $j$  on  $\mathbf{CP}^1$  in the coordinate  $q$ :

$$j(q) = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n)q^n = q^{-1} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n .$$

**Theorem.** For  $0 < |p|, |q| \ll 1$  one has the equality

$$j(p) - j(q) = (p^{-1} - q^{-1}) \prod_{k,l=1}^{\infty} (1 - p^k q^l)^{c(kl)} .$$

From this equality follows an infinite sequence of algebraic identities between integer numbers  $c(k)$ ,  $k \geq 1$ . The first non-trivial identity is

$$c(4) = c(3) + \frac{c(1)^2 - c(1)}{2}, \quad 20245856256 = 864299970 + \frac{196884^2 - 196884}{2} .$$

For each integer  $n \geq 1$  there is an algebraic curve  $C_n \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ , the graph of the Hecke correspondence. In coordinates  $(q_1, q_2)$  at the neighborhood of the point  $(\infty, \infty) \in \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$  this curve is again algebraic and its branches are given by equations  $q_1^{d_1} = q_2^{d_2}$  where  $d_1 d_2 = n$ ,  $d_1, d_2 \geq 1$ . The Hecke operator  $T_n$  is defined in the usual way using the correspondence  $C_n$ . It acts on meromorphic functions on  $\mathbf{CP}^1$ , on meromorphic 1-forms (=modular forms of weight 2), etc.

The main object will be a meromorphic differential 2-form on  $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$

$$\Omega = d_{\text{along } j_1} d_{\text{along } j_2} (\log(j_1 - j_2)) = \frac{1}{(j_1 - j_2)^2} dj_1 \wedge dj_2$$

where  $(j_1, j_2)$  are coordinates on  $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ .

Let us write  $j(q_1) - j(q_2)$  as an infinite product  $(q_1^{-1} - q_2^{-1}) \times \prod_{k,l=1}^{\infty} (1 - q_1^k q_2^l)^{b(k,l)}$ . We want to prove that  $b(k, l) = c(kl)$ . Using symbols  $b(k, l)$  we can write an explicit formula for the  $q$ -expansion of  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{1}{(q_1 - q_2)^2} dq_1 \wedge dq_2 + \sum_{k,l=1}^{\infty} b(k, l) \frac{kl q_1^{k-1} q_2^{l-1}}{(1 - q_1^k q_2^l)^2} dq_1 \wedge dq_2 .$$

Now we calculate the following double residue for  $N, M \geq 1$ :

$$\text{Res}_{q_2=0} \text{Res}_{q_1=0} \left( j(q_1)j(q_2) \left[ T_N^{(1)} \circ T_M^{(2)}(\Omega) \right] \right) .$$

This expression is equal to 0 because  $\text{Res}_{q_1=0}(\dots)$  is a meromorphic 1-form on  $\mathbf{CP}^1$  with pole only at  $j_2 = \infty$ . We replace  $\Omega$  by the sum as above. In the first term

$$\text{Res}_{q_2=0} \text{Res}_{q_1=0} \left( j(q_1)j(q_2) \left[ T_N^{(1)} \circ T_M^{(2)} \left( \frac{1}{(q_1 - q_2)^2} dq_1 \wedge dq_2 \right) \right] \right)$$

we can substitute  $q_1^{-1}$  for  $j(q_1)$  because of the regularity at  $q_1 = 0$  of all other factors for generic  $q_2$ . Thus the first term can be expressed linearly in numbers  $c(n)$ . The second term is equal to

$$\text{Res}_{q_2=0} \text{Res}_{q_1=0} \left( j(q_1)j(q_2) \sum_{k,l=1}^{\infty} (\dots) \right) = \text{Res}_{q_2=0} \text{Res}_{q_1=0} \left( q_1^{-1} q_2^{-1} \sum_{k,l=1}^{\infty} (\dots) \right)$$

because of the regularity at zero of the double sum. This term can be expressed linearly in numbers  $b(k, l)$ . I leave to the reader the rest of the calculation.

## 2. STANDARD FACTS ABOUT AUTOMORPHIC FORMS

### 2.1. Definition of automorphic forms

Let  $G$  be a connected unimodular Lie group,  $K$  a maximal compact subgroup, and  $\Gamma$  a discrete subgroup of  $G$  of finite covolume. Let us fix a homomorphism

$\chi : \mathcal{Z}(U(\mathfrak{g})) \rightarrow \mathbf{C}$  from the center of the universal enveloping algebra of the Lie algebra  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$  to  $\mathbf{C}$ . Automorphic forms are complex-valued  $C^\infty$ -functions on  $G/\Gamma$  which are  $K$ -finite and annihilated by a finite power of the ideal  $\text{Ker}(\chi)$ . A more general definition is obtained if one considers not just functions but sections of a local system associated with a finite-dimensional representation  $\rho : \Gamma \rightarrow GL(N, \mathbf{C})$ . Any automorphic form is automatically real analytic because it satisfies an elliptic differential equation with real analytic coefficients.

Usually people consider functions satisfying certain growth conditions at cusps, i.e. they consider  $l^2$ -integrable functions or functions with polynomial growth at infinity. In the classical case of  $G = SL(2, \mathbf{R})$  and  $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z})$  automorphic forms include (anti)-holomorphic modular forms of weights  $k = 4, 6, \dots$  and Maass wave forms (eigenfunctions of the Laplace operator on  $\mathcal{H}/\Gamma = K \backslash G/\Gamma$ ). The standard growth condition can be formulated for holomorphic modular forms in terms of  $q$ -expansion as the absence of terms  $c(k)q^k$  with  $k < 0$ . One of reasons to ignore automorphic forms with exponential growth at cusps is that the algebra of Hecke operators acts “freely” on such forms.

## 2.2. Theta correspondence

Theta correspondence transforms automorphic forms from one Lie group  $G_1$  to another Lie group  $G_2$ , where  $G_1 \times G_2$  is a subgroup of the symplectic linear group (see [14]). The typical example is  $G_1 = Sp(V_1)$  and  $G_2 = SO(V_2)$  where  $(V_1, (\cdot, \cdot)_1)$  is a symplectic real vector space and  $(V_2, (\cdot, \cdot)_2)$  is a real vector space with a non-degenerate symmetric bilinear form. The tensor product  $V = V_1 \otimes V_2$  carries the natural symplectic structure  $(\cdot, \cdot)_1 \otimes (\cdot, \cdot)_2$ .

We denote by  $W = W(V)$  the Hilbert space of the Weil representation of the double covering  $\widetilde{Sp}(V)$  of the symplectic group  $Sp(V)$ . The space  $W$  can be naturally identified with the space of  $l^2$ -integrable functions on any Lagrangian subspace of  $V$ . Thus one can speak about the nuclear space  $W^{-\infty}$  consisting of distributions of moderate growth. Restricting the Weil representation of  $\widetilde{Sp}(V)$  to  $\widetilde{Sp}(V_1) \times \widetilde{SO}(V_2)$  one gets a partially defined correspondence between projective representations of  $G_1$  and  $G_2$ . R. Howe observed that this is a partial bijection in many cases.

Let  $\Lambda_1 \subset V_1$  and  $\Lambda_2 \subset V_2$  be integral lattices. Then  $\Lambda := \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  is an integral lattice in  $V$ . Denote by  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$  arithmetic subgroups of  $G_1, G_2, G = Sp(V)$  consisting of automorphisms of these lattices. The space of invariants  $(W^{-\infty})^\Gamma$  is finite-dimensional and consists of certain theta functions. Theta correspondence is

given by an integral operator from  $G_1/\Gamma_1$  to  $G_2/\Gamma_2$  with the kernel equal to a theta function. In the next section we will consider an important example.

### 2.3. Siegel theta function

Let  $(V_1, \Lambda_1)$  be  $(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$  with the standard symplectic form and  $\Lambda_2$  be an even unimodular lattice of signature  $(n_+, n_-)$ . We denote by  $Gr$  the set of orthogonal decompositions of  $V_2 := \Lambda_2 \otimes \mathbf{R}$  into the sum  $V_+ \oplus V_-$  of positive definite and negative definite subspaces.  $Gr$  can be considered as an open subset of the Grassmanian of  $n_-$ -dimensional subspaces in  $V_2$ . If  $p \in Gr$  is such a decomposition we denote by  $p_+, p_-$  projectors onto  $V_+, V_-$  respectively. The Siegel theta function (see [16]) is the restriction of the standard theta function for  $Sp(V_1 \otimes V_2)$  to the symmetric subspace  $\mathcal{H} \times Gr \subset Sp(V_1 \otimes V_2)/U(n_+ + n_-)$ . The explicit formula for it is

$$\begin{aligned} \Theta(\tau, p) &= \sum_{\lambda \in \Lambda_2} \exp \left( 2\pi i \left( \frac{(p_+(\lambda), p_+(\lambda))}{2} \tau + \frac{(p_-(\lambda), p_-(\lambda))}{2} \bar{\tau} \right) \right) = \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda_2} q^{\frac{(\lambda, \lambda)}{2}} |q|^{-(p_-(\lambda), p_-(\lambda))} . \end{aligned}$$

This function is invariant under the action of  $\Gamma_2 = Aut(\Lambda_2)$  on  $Gr$ . It transforms under the action of  $\Gamma_1 = SL(2, \mathbf{Z})$  on  $\tau \in \mathcal{H}$  as

$$\Theta \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, p \right) = \pm (c\tau + d)^{n_+/2} (c\bar{\tau} + d)^{n_-/2} \Theta(\tau, p) .$$

If  $F$  is a holomorphic modular form for  $\Gamma_1 = SL(2, \mathbf{Z})$  of weight  $\frac{n_- - n_+}{2}$ , or a Maass form for  $n_- = n_+$ , then the theta transform of  $F$  is defined as

$$\Phi(p) = \int_{\mathcal{H}/PSL(2, \mathbf{Z})} \Theta(\tau, p) F(\tau) y^{\frac{n_-}{2}} \frac{dx dy}{y^2} ,$$

where  $\tau = x + iy$ ,  $x, y, \in \mathbf{R}$ . This integral converges for parabolic  $F$ .

The image of theta transform satisfies differential equations. Namely, there is a homomorphism  $\alpha : \mathcal{Z}(U(\mathfrak{g}_2)) \rightarrow \mathcal{Z}(U(\mathfrak{g}_1))$  such that for any vector  $v$  in the Weil representation  $W(V_1 \otimes V_2)$  and any  $z \in \mathcal{Z}(U(\mathfrak{g}_2))$  one has  $z(v) = (\alpha(z))(v)$ . If we apply it to the theta function we get the formula for the annihilator of  $\Phi$  in  $\mathcal{Z}(U(\mathfrak{g}_2))$ .

The Siegel theta function also appears in string theory where it is the partition function of the torus  $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$  in the Narain model associated with the indefinite lattice  $\Lambda_2$  and the orthogonal decomposition  $p$ .

### 3. BORCHERDS-HARVEY-MOORE CONSTRUCTION

#### 3.1. Classical modular forms with poles at cusps

The main idea of Borchers-Harvey-Moore construction is a formal application of theta correspondence to modular forms for arithmetic subgroups in  $SL(2, \mathbf{R})$  with at most exponential growth at the cusps. In holomorphic case and for  $\Gamma_1 = SL(2, \mathbf{Z})$  any such form is meromorphic on  $\mathcal{H}/\mathbf{Z} \sqcup \{\infty\}$  with only pole at the cusp. It can be presented as  $\Delta(\tau)^{-k} F_0(\tau)$  where  $k \geq 0$ ,  $\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$ , and  $F_0$  is a parabolic holomorphic modular form. Unlike in the classical theory, holomorphic modular forms with poles at cusps can have negative weights. In the case of Maass forms for any  $\lambda \in \mathbf{C}$  there is an infinite-dimensional vector space of solutions of the equation  $\Delta F = \lambda F$  on  $\mathcal{H}/\Gamma_1$  with exponential growth at the cusp.

There are also other automorphic forms like  $E'_2(\tau) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1 - q^n} - \frac{3}{\pi y}$ , real analytic Eisenstein series, Siegel theta functions, etc.

All these forms have the following common property: there exists  $M \geq 0$  such that for any  $N \geq 0$  the form can be expanded in a neighborhood of the cusp as

$$o(y^{-N}) + \sum_{m: |m| < M} e^{2\pi(imx + |m|y)} \left( \sum_{j \in \text{finite set}} c_{m,j} (\log(y))^{k_{m,j}} y^{\sigma_{m,j}} + \epsilon_m(y) \right)$$

where  $k_{m,j} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $c_{m,j}$ ,  $\sigma_{m,j} \in \mathbf{C}$  and  $\epsilon_m(y) = o(y^{-N})$  depends on  $y$  only.

#### 3.2. Regularization of divergent integrals

Let us assume that  $F$  is a holomorphic modular form of weight  $(n_- - n_+)/2$  with poles at cusps. We want to make sense of the divergent integral

$$\Phi(p) = \int_{\mathcal{H}/PSL(2, \mathbf{Z})} \Theta(\tau, p) F(\tau) y^{\frac{n_-}{2}} \frac{dx dy}{y^2} .$$

After the expansion of  $\Theta(\tau, p)$  and  $F(\tau)$  at  $y = \text{Im } \tau \rightarrow +\infty$  there are only finitely many divergent terms of the form

$$\int_{x \in [0,1], y \geq \text{const}} \exp(2\pi imx + 2\pi|m|y - Ly) y^{n_-/2-2} dx dy ,$$

where  $L$  is a non-negative real-valued function on  $Gr$ .

If  $m \neq 0$  then we define the regularized value of this integral to be 0. It is the natural choice if we perform the integration along the variable  $x$  first. If  $m = 0$  and  $L > 0$  then the integral is absolutely convergent. The trouble arises only when  $m = L = 0$ . In this case we can subtract the divergent term  $y^k$  from the integral in domain  $y > y_0$ . The result will be a function of  $y_0$ .

In the more general case for non-holomorphic forms there are finitely many divergent components of the product  $F(\tau)\Theta(\tau, p)$  with frequency  $m = 0$  along coordinate  $x$ . All these components are of type  $(\log(y))^k y^\sigma$ . One can multiply  $F$  by  $y^{-s}$ , or (better) by a real analytic Eisenstein series. Then we can assign a value to the integral for  $\text{Re}(s) \gg 0$  and continue it to a meromorphic function for all  $s \in \mathbf{C}$ . The regularized integral can be defined as the constant term of the Laurent expansion at  $s = 0$ .

### 3.3. Automorphic forms with singularities at locally homogeneous submanifolds

Let us see what kind of divergences our integral has for holomorphic form  $F = \sum_n c(n)q^n$ . First of all, if the  $c(0) \neq 0$  then the constant term in the series for  $\Theta$  corresponding to the vector  $\lambda = 0$  produces troubles. This problem is independent of the point  $p$  in the Grassmanian, and we can resolve it in one way or another. The result is that we still can define  $F$  modulo an additive constant.

Other divergent terms appear when there is a *non-zero* lattice vector  $\lambda \in \Lambda_2$  such that  $\lambda$  belongs to the the positive subspace  $V_+$  and has a special length. Namely, a term  $q^{-(\lambda, \lambda)/2}$  should be present in the  $q$ -expansion of  $F$ .

Thus we see that the singular set of  $\Phi$  in  $X = Gr/\Gamma_2$  consists of a finite union of certain totally geodesic submanifolds of type  $X' = K' \backslash G'/\Gamma'$ . The same fact holds for non-holomorphic modular forms  $\Phi$  admitting an asymptotic expansion at infinity as in 3.1. Also, one can write explicitly the types of singularities of  $\Phi$ , i.e. functions  $\Phi'$  defined at a neighborhood of  $X'$  such that  $\Phi - \Phi'$  can be continued to a real-analytic function. These functions  $\Phi'$  are finite linear combinations of functions  $x \mapsto (\log(\text{dist}(x, X'))^k (\text{dist}(x, X'))^\sigma$  where  $\text{dist}(x, X')$  is the distance between  $x$  and  $X'$  in a natural metric.

The function  $\Phi$  on the domain of definition satisfies differential equations. If  $c(0) = 0$  then these will be homogeneous linear differential equations  $z(\Phi) = 0$  for some  $z \in \mathcal{Z}U(\mathfrak{g}_2)$  (see the end of 2.3). The divergent term  $c(0)q^0$  produces certain universal r.h.s. for these equations.

In the case  $n_+ = 1$  submanifolds  $X'$  are locally hyperplanes in the hyperbolic space. In the case  $n_+ = 2$  they are complex hypersurfaces. The same is true for  $G_2 = SU(N, 1)$ . If  $G_2 = SP(2g, \mathbf{R})$  and we consider  $G_1 = PSL(2, \mathbf{R})$  as the orthogonal group  $SO(2, 1)$  then subvarieties  $X'$  are complex subvarieties of codimension  $g$ .

If  $(G_2, \Gamma_2) = (SL(2, \mathbf{R}), SL(2, \mathbf{Z}))$  then the forms  $\Phi$  on  $\overline{\mathcal{M}}_1$  have singularities at Heegner points, i.e. moduli of elliptic curves with complex multiplication, or equivalently, points with the coordinate  $\tau$  in an imaginary quadratic field,  $\tau = x + iy$ , where  $x \in \mathbf{Q}$  and  $y^2 \in \mathbf{Q}$ .

### 3.4. Fourier expansions at cusps

In theta correspondence one can write an expansion of  $\Phi$  at cusps via Fourier coefficients of  $F$ . The usual trick (Rankin-Selberg method) consists in replacing of the integral over the fundamental domain of  $SL(2, \mathbf{Z})$  by an integral over the fundamental domain of  $\mathbf{Z}$  in  $\mathcal{H}$ . In the case of divergent integrals one should be cautious when interchanging infinite sums and integrals.

Let  $\lambda_0 \in \Lambda_2$  be a primitive null-vector,  $(\lambda_0, \lambda_0) = 0$ . Such vector always exists for indefinite lattices of sufficiently large rank, including all even unimodular lattices. We define smaller lattice  $\tilde{\Lambda}$  as  $\lambda_0^\perp / \mathbf{Z}\lambda_0$ . It is easy to see that any orthogonal decomposition  $p$  of  $V_2 = \Lambda_2 \otimes \mathbf{R}$  defines an orthogonal decomposition  $\tilde{p}$  of  $\tilde{V} = \tilde{\Lambda} \otimes \mathbf{R}$  using natural isomorphism between  $\tilde{V}$  and  $(\mathbf{R}p_+(\lambda_0) + \mathbf{R}p_-(\lambda_0))^\perp$ .

Using Poisson summation formula in direction  $\mathbf{Z}\lambda_0$  one can rewrite  $\Theta(\tau, p)$  as

$$\Theta(\tau, p) = \frac{1}{\sqrt{2y(p_+(\lambda_0), p_+(\lambda_0))}} \sum_{\lambda' \in \Lambda_2 / \mathbf{Z}\lambda_0} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \exp(\dots)$$

where  $\exp(\dots)$  is the exponent of an explicit algebraic expression.

Let us choose an additional lattice vector  $\lambda_1$  such that  $(\lambda_0, \lambda_1) = 1$ . Then we can embed  $\tilde{\Lambda}$  in  $\Lambda_2$  as  $(\mathbf{Z}\lambda_0 + \mathbf{Z}\lambda_1)^\perp$ . Moreover, we can parametrize  $\Lambda_2 / \mathbf{Z}\lambda_0$  by  $\tilde{\Lambda} \times \{k\lambda_1 | k \in \mathbf{Z}\}$ . The total sum becomes a sum over  $(k, l) \in \mathbf{Z}^2$  of certain twisted theta series associated with the lattice  $\tilde{\Lambda}$  and the orthogonal decomposition  $\tilde{p}$ . The total formula is quite cumbersome.

**Main Identity.** *Let  $F$  be a bounded measurable function on  $\mathcal{H}$  satisfying the equation*

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{\frac{n_- - n_+}{2}} F(\tau) .$$

Then the following identity holds:

$$\int_{\mathcal{H}/SL(2, \mathbf{Z})} \Theta(\tau, p) F(\tau) y^{\frac{n-}{2}} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \int_{\mathcal{H}/SL(2, \mathbf{Z})} \Theta(\tau, \tilde{p}) F(\tau) y^{\frac{n-}{2}-1} \frac{dx dy}{y^2} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{2\epsilon}} \sum_{n>0} \int_{\mathcal{H}/\mathbf{Z}} F(\tau) \exp\left(-\frac{\pi n^2}{2y\epsilon}\right) \sum_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} e^{2\pi i n(\tilde{\lambda}, \mu)} q^{(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})/2} |q|^{-(\tilde{p}-(\tilde{\lambda}), \tilde{p}-(\tilde{\lambda}))} y^{\frac{n-}{2}-1} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Here  $\epsilon = (p_+(\lambda_0), p_+(\lambda_0)) > 0$  and

$$\mu = (\lambda_1 + (p_+(\lambda_0) - p_-(\lambda_0))/2\epsilon) \bmod \mathbf{R}\lambda_0 \in \lambda_0^\perp / \mathbf{R}\lambda_0 = \tilde{\Lambda} \otimes \mathbf{R}.$$

Correspondence  $p \mapsto (\tilde{p}, \epsilon, \mu)$  can be considered as a local parametrization of  $Gr$ .

This identity follows from the formula for  $\Theta(\tau, p)$  as a sum over pairs of integers  $(k, l)$ . The first term comes from the term corresponding to  $k = l = 0$ . Any other pair of integers  $(k, l)$  can be presented as  $(nc, nd)$  where  $n > 0$  and  $c$  and  $d$  are coprime.

We identify in the usual way  $SL(2, \mathbf{Z}) / \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$  with the set of primitive vectors  $(c, d)$  in  $\mathbf{Z}^2$  and rewrite the sum over non-zero pairs  $(k, l)$  as the sum over  $n > 0$  and over the set of copies in  $\mathcal{H}/\mathbf{Z} = \{(x + iy \mid 0 < x \leq 1, 0 < y < +\infty)\}$  of the classical fundamental domain of  $SL(2, \mathbf{Z})$  in  $\mathcal{H}$ .

Now let us see what happens for functions  $F$  which admit an asymptotic expansion at the cusp as in 3.1. The divergence of the sum above as  $y \rightarrow \infty$  is of the same form as one of the original integral for  $\Phi$ . In the integral over  $\mathcal{H}/SL(2, \mathbf{Z})$  one might expect a priori divergences near cusps on  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ . In fact, the function  $F$  has exponential growth at these points. Nevertheless the integral near  $\mathbf{R}$  is absolutely convergent because of the factor  $\exp(-\pi/2\epsilon y)$  which makes the total integrand small enough, as  $\epsilon \ll 1$ . Thus the exchange of the order of the sum and of the integral is justified for small  $\epsilon = (p_+(\lambda_0), p_+(\lambda_0))$ .

One can calculate explicitly integrals over  $\mathcal{H}/\mathbf{Z}$  corresponding to individual terms in  $q$ -expansion of  $F$ . It reduces to classical integrals for Bessel functions

$$\int_{y>0} \exp(-\beta/y - \alpha y) y^{\nu-1} dy = 2(\beta/\alpha)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{\alpha\beta}).$$

### 3.5. Hyperbolic case

Let us consider the case of hyperbolic even unimodular lattices,  $n_- = 1$  and  $n_+ > 1$ . As in the previous section, we pick a primitive null-vector  $\lambda_0 \in \Lambda_2$ . The

additional vector  $\lambda_1$  such that  $(\lambda_0, \lambda_1) = 1$  is chosen now among null-vectors. Lattice  $\tilde{\Lambda} \simeq (\mathbf{Z}\lambda_0 + \mathbf{Z}\lambda_1)^\perp$  is considered as a sublattice of  $\Lambda$ . Thus we have a decomposition  $\Lambda_2 = \mathbf{Z}\lambda_0 + \mathbf{Z}\lambda_1 + \tilde{\Lambda}$ .

We identify the space  $Gr$  with the (half of the) hyperboloid

$$H = \{v \in \Lambda_2 \otimes \mathbf{R} \mid (v, v) = -1, (v, \lambda_0) > 0\} .$$

Projector  $p_-$  corresponding to  $v$  is the orthogonal projector to 1-dimensional space  $\mathbf{R}v$ . In terms of parameters  $(\epsilon, \mu) \in \mathbf{R}_+ \times (\tilde{\Lambda} \otimes \mathbf{R})$  from the previous section we have

$$v = v(\epsilon, \mu) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - \sqrt{\epsilon}(\mu, \mu)}{2} \lambda_0 + \sqrt{\epsilon} \lambda_1 + \sqrt{\epsilon} \mu .$$

Parameter  $\tilde{p}$  does not vary because  $\tilde{\Lambda}$  is positive definite and  $\tilde{G}r$  is a one point set.

Let  $F = \sum_n c(n)q^n \in \mathbf{C}((q))$  be a holomorphic modular form of weight  $\frac{1-n_+}{2}$ .

**Theorem.** *Theta transform  $\Phi$  of  $F$  is locally the restriction of a continuous piecewise linear function on  $\tilde{\Lambda} \otimes \mathbf{R}$  to the hyperboloid  $H$ .*

The rest of this section is devoted to the proof of this Theorem. Function  $\Phi$  has the following expansion as  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi(\epsilon, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{2}\epsilon} \int_{\mathcal{H}/SL(2, \mathbf{Z})} \Theta(\tau, \tilde{p}) F(\tau) \frac{dx dy}{y^2} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{2}\epsilon} \sum_{n>0} \int_{\mathcal{H}/\mathbf{Z}} F(\tau) \exp\left(-\frac{\pi n^2}{2y\epsilon}\right) \sum_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} e^{2\pi i n(\tilde{\lambda}, \mu)} q^{(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})/2} \frac{dx dy}{y^2} . \end{aligned}$$

Notice that each integral in this formula can be unambiguously regularized using rules from 3.2. We denote terms in this formula by  $\Phi_{(1)}$  and  $\Phi_{(2)}$ .

Term  $\Phi_{(1)}$  is proportional to  $(v, \lambda_0)^{-1}$  because  $(v, \lambda_0) = \sqrt{\epsilon}$ .

After the expansion of  $F$  into the series we see that in the term  $\Phi_{(2)}$  we have to calculate integrals

$$\int_{\mathcal{H}/\mathbf{Z}} q^{m + \frac{(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})}{2}} \exp\left(-\frac{\pi n^2}{2y\epsilon}\right) \frac{dx dy}{y^2} .$$

If  $m + \frac{(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})}{2} = 0$  then this integral is equal to  $2\epsilon/\pi n^2$ , otherwise it vanishes. Thus we see that the second term is

$$\Phi_{(2)} = \frac{4\pi\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \sum_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} c(-(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})/2) \sum_{n>0} \frac{e^{2\pi i n(\tilde{\lambda}, \mu)}}{n^2} .$$

Every vector  $\tilde{\lambda}$  appears in this formula together with the opposite vector  $-\tilde{\lambda}$ . It implies that we can replace in the formula from above exponent by the cosine. Now we use the formula

$$\sum_{n>0} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2} = \pi^2 \left( x^2 + \alpha(x)x + \frac{1}{6} \right), \quad x \in \mathbf{R}$$

where  $\alpha(x)$  is a locally constant function of  $x$ :  $\alpha(x) = -2n - 1$  for  $n \leq x < n + 1$ .

Finally, we get a formula for  $\Phi$  as a finite sum:

$$\Phi(\epsilon, \mu) = \Phi_{(1)} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} c(-(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})/2) \cdot 4\sqrt{\epsilon} \left\{ (\tilde{\lambda}, \mu)^2 + \alpha((\tilde{\lambda}, \mu))(\tilde{\lambda}, \mu) + \frac{1}{6} \right\}.$$

Terms (locally) proportional to  $\sqrt{\epsilon}(\tilde{\lambda}, \mu)$  are restrictions of linear functions  $v = v(\epsilon, \mu) \mapsto \text{const}(v, \tilde{\lambda})$ . Terms proportional to  $\sqrt{\epsilon}$  are restrictions of linear functions  $v \mapsto \text{const}(v, \lambda_0)$ . We claim that the rest is also the restriction of linear function (proportional to  $v \mapsto (v, \lambda_1)$  in fact).

Using the fact that  $\Phi_{(1)}(v) = \text{const}(v, v)/(v, \lambda_0)$  we see that

$$\Phi = \Phi(v) = (\text{piecewise linear function of } v) + \frac{1}{(v, \lambda_0)} (\text{quadratic polynomial of } v).$$

Applying the following automorphism of  $\Lambda_2$ :

$$\lambda_0 \mapsto \lambda_1, \quad \lambda_1 \mapsto \lambda_0, \quad \tilde{\lambda} \mapsto \tilde{\lambda} \text{ for } \tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$$

we see that

$$\Phi(v) = (\text{piecewise linear function of } v) + \frac{1}{(v, \lambda_1)} (\text{quadratic polynomial of } v).$$

Comparing two expressions for  $\Phi(v)$  as above we conclude that  $\Phi$  is a piecewise linear function of  $v$ .

This finishes the proof of the Theorem of this section. R. Borcherds calculated theta transform in a more general situation and obtained that  $\Phi$  is the restriction of a piecewise polynomial function on the hyperboloid  $H$ .

### 3.6. Product formulas for meromorphic forms

Now we consider the case when  $n_- = 2$  and  $F$  is a holomorphic modular form with pole at the cusp.

As in the previous section we fix decomposition  $\Lambda_2 = \mathbf{Z}\lambda_0 + \mathbf{Z}\lambda_1 + \tilde{\Lambda}$  where  $\tilde{\Lambda}$  is now a hyperbolic lattice. The space  $Gr$  is convenient to parametrize by vectors  $v \in \tilde{\Lambda} \otimes \mathbf{C}$  such that  $(Im(v), Im(v)) < 0$ . Projector  $p$  in  $\Lambda_2 \otimes \mathbf{R}$  and corresponding parameters  $(\tilde{p}, \epsilon, \mu)$  from the Section 3.4 are given by the following formulas:

$$p_-(\Lambda_2 \otimes \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot Re(u) + \mathbf{R} \cdot Im(u) \subset \Lambda_2 \otimes \mathbf{R} \quad \text{where} \quad u = -\frac{(v, v)}{2}\lambda_0 + \lambda_1 + v,$$

$$\tilde{p}_-(\tilde{\Lambda} \otimes \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot Im(v),$$

$$\epsilon = \frac{-1}{(Im(v), Im(v))}.$$

$$\mu = -Re(v) .$$

The integral over  $\mathcal{H}/SL(2, \mathbf{Z})$  in the first term of the formula for the Fourier expansion at cusps (Section 3.4) was evaluated in the pervious section. The result is that the first term has the form

$$\Phi_{(1)} = \Phi_{(1)}(v) = (W(v), Im(v))$$

where  $W(v)$  is a locally constant function on  $Gr$  with values in  $\tilde{\Lambda} \otimes \mathbf{C}$ .

Now we consider  $\Phi_{(2)}$ , the sum of integrals over  $\mathcal{H}/\mathbf{Z}$ .

The contribution of terms with  $\tilde{\lambda} = 0$  and  $n > 0$  is a divergent sum  $const + 2c(0) \sum_{n>0} 1/n$ . Nevertheless, if we use some regularization procedure, we obtain  $2c(0) \sum_{n>0} \epsilon^s/n^{2s+1}$  as  $s \rightarrow 0$ . An easy calculation shows that the regularized value is  $const + c(0)\log(\epsilon)$ .

The contribution of the term corresponding to  $\tilde{\lambda} \neq 0$  and  $n > 0$  is equal to

$$2c(-(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})/2) \frac{1}{n} e^{2\pi i n(\tilde{\lambda}, -Re(v))} \exp\left(-2\pi n \sqrt{\frac{-(\tilde{p}_-(\tilde{\lambda}), \tilde{p}_-(\tilde{\lambda}))}{\epsilon}}\right) .$$

Here we use the classical formula  $K_{-1/2}(z) = \sqrt{\pi/2z} \cdot \exp(-z)$ .

Elementary calculations show that  $\sqrt{\frac{-(\tilde{p}_-(\tilde{\lambda}), \tilde{p}_-(\tilde{\lambda}))}{\epsilon}} = |(\tilde{\lambda}, Im(v))|$ . The sum over  $n$  and two opposite vectors  $\pm\tilde{\lambda}$  gives

$$-4c(-(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})/2) \log |1 - \exp(2\pi i(\tilde{\lambda}_+, v))|$$

where  $\tilde{\lambda}_+$  is the one of two vectors  $(\tilde{\lambda}, -\tilde{\lambda})$  which has positive scalar product with  $Im(v)$ .

The resulting formula for  $\Phi$  is (up to an additive constant)

$$(W(v), \text{Im}(v)) + c(0)\log(\epsilon) - 4 \sum_{\tilde{\lambda}: (\tilde{\lambda}, \text{Im}(v)) > 0} c(-(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})/2) \log |1 - \exp(2\pi i(\tilde{\lambda}_+, v))| .$$

Notice that all terms here except  $c(0)\log(\epsilon)$  are locally sums of holomorphic and anti-holomorphic functions of  $v$ .

Let us now assume that the coefficients  $c(n)$  of  $F$  are integers. Denote by  $\mathcal{L}$  an equivariant complex line bundle over  $Gr$  whose total space is the complex cone

$$\{w \in \Lambda_2 \otimes \mathbf{C} \mid (w, w) = 0, (\text{Im}(w), \text{Im}(w)) < 0\} .$$

Projection  $\mathcal{L} \rightarrow Gr$  is  $w \mapsto u = w/(w, \lambda_0)$ . Bundle  $\mathcal{L}$  carries invariant hermitean scalar product  $\|w\| := \sqrt{-(w, \bar{w})}/2$ . We claim that there exists a meromorphic section  $\Psi$  of  $(\mathcal{L})^{\otimes(c(0)/2)}$  such that

$$\log \|\Psi\| = -\Phi/4 .$$

Locally, it follows from the expression for  $\Phi$  from above and from the identity

$$\epsilon = \frac{|(w, \lambda_0)|^2}{\|w\|^2} .$$

Globally, we use the information about singularities from 3.3. In general,  $\Psi$  is not  $\Gamma_2$ -equivariant and it gives a section on  $Gr/\Gamma_2$  of  $\mathcal{L}^{\otimes(c(0)/2)}$  twisted with a unitary character of  $\Gamma_2/[\Gamma_2, \Gamma_2]$ . In this way one obtains a proof of the Theorem from 1.1.

R. Borcherds proved more general product formulas for congruence subgroup in  $SL(2, \mathbf{Z})$ , non-unimodular lattices, and proposed to consider the case  $G_2 = SU(N, 1)$ . He also developed the formalism for generalized theta functions associated with harmonic polynomials.

#### 4. EXPLICIT EXAMPLES

I will present only 3 examples.

The simplest example of the product formula for the group  $SO(1, 2)$  is completely trivial:  $\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^1$  where all the exponents 1 are coefficients of  $q^{n^2}$  of a form of weight  $1/2$ , namely of the theta function  $1/2 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$ .

An example for  $SO(2, 2)$  is the product formula for  $j(p) - j(q)$  in 1.2.

The next example for the group  $SO(3, 2)$  is also very beautiful:

$$\sum_{m,n \in \mathbf{Z}} (-1)^{m+n} p^{m^2} q^{n^2} r^{mn} = \prod_{a+b+c>0} \left( \frac{1 - p^a q^c r^b}{1 + p^a q^c r^b} \right)^{f(ac-b^2)}$$

where  $\sum f(n)q^n = 1/(\sum_n (-1)^n q^{n^2}) = 1 + 2q + 4q^2 + 8q^3 + 14q^4 + \dots$

## 5. CONNECTIONS WITH OTHER PARTS OF MATHEMATICS

### 5.1. Generalized Kac-Moody algebras

There are many nice examples of so-called generalized Kac-Moody algebras constructed by R. Borcherds and later by V. Gritsenko and V. Nikulin. These Lie superalgebras are graded by a lattice, and the generating function for the dimensions of homogeneous components is essentially an automorphic form for  $O(n, 2)$ . The product formula is the Weyl-Kac-Borcherds denominator identity. The Weyl group for these algebras is often an arithmetic group generated by reflections. Also the Monster group appears as an automorphism group.

### 5.2. K3 surfaces, Mirror symmetry, string duality

Let  $\Lambda$  be an even hyperbolic sublattice of (unique) even unimodular lattice  $\Lambda_{3,19}$  of signature  $(3, 19)$ . We define  $\mathcal{M}_\Lambda$  as the moduli space of algebraic K3-surfaces  $X$  such that  $\Lambda \subset \text{Pic}(X) \subset H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq \Lambda_{3,19}$ . By the classification theorem for K3-surfaces we see that  $\mathcal{M}_\Lambda$  is of the type where Borcherds' products are defined. The image of  $\mathcal{M}_\Lambda$  under the period map is

$$\{w \in \Lambda^\perp \otimes \mathbf{C} \mid (w, w) = 0, (w, \bar{w}) < 0; \forall \lambda \in \Lambda_{3,19} \cap \Lambda^\perp \cap w^\perp \quad (\lambda, \lambda) \neq -2\} / \mathbf{C}^\times .$$

Thus Borcherds' results mean that for some  $\Lambda$  the standard line bundle over  $\mathcal{M}_\Lambda$  is a torsion element in  $\text{Pic}(\mathcal{M}_\Lambda)$ . One of such lattices is the one-dimensional lattice  $\Lambda = \mathbf{Z}\lambda$ ,  $(\lambda, \lambda) = 2$ . In general, product formulas produce linear relations between certain divisors in Shimura varieties.

Also one can consider the moduli space of Riemannian metrics on 4-dimensional manifolds, which are hyperkaehler metrics on K3-surfaces. This space is locally modeled by  $SO(19, 3)/SO(19) \times SO(3)$ . Borcherds' construction gives a certain real-analytic function on it. Presumably, it is related to the regularized determinant of the Laplace operator (see [15]).

Gritsenko-Nikulin, Jorgenson-Todorov and Harvey-Moore (see [9,13,15]) made conjectures about the relation between Kac-Moody algebras, K3-surfaces, Borchers' product formulas and mirror symmetry. One expects that certain numbers of curves of various genera on a generic element of the family  $\mathcal{M}_\Lambda$  coincide with exponents in a product formula associated with the dual family where  $\Lambda$  is equal to the lattice of transcendental cycles on a generic element.

In fact, J. Harvey and G. Moore tried to find a conceptual construction of the generalized Kac-Moody algebra associated with the K3-surface  $X$ . Conjecturally, it is the direct sum of all cohomology groups of all moduli spaces of stable coherent sheaves on  $X$ . The Lie bracket is given by a correspondence in the cube of the total (disconnected) moduli space. This correspondence is expected to consist of triples of sheaves from all possible short exact sequences.

The idea of the Harvey-Moore integral arose from a new duality in string theory relating elliptic curves on one manifold to numbers of all curves of all genera on another manifold. Thus the integral over the moduli space of elliptic curves appeared. In some cases we get in the formula for  $\Phi$  an infinite sum of 3-logarithm functions as in the usual mirror symmetry. R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde and H. Verlinde proposed a Borchers' type identity involving elliptic genera, see [7].

### 5.3. Hyperbolic case and Donaldson invariants

It is well-known that in Donaldson theory 4-dimensional manifolds  $X$  with the  $b_+ = 1$  are very special. The Donaldson invariant is a piecewise polynomial function on the cone  $\{x \mid x \cdot x < 0\}$  in the hyperbolic space  $H^2(X, \mathbf{R})$ . R. Borchers observed that in certain cases (like  $\mathbf{C}P^2$  blown up at 9 points) the Donaldson invariant coincides with one of the functions  $\Phi$  given by the theta correspondence.

## REFERENCES

- [1] R. Borchers - *Generalized Kac-Moody algebras*, J. of Algebra **115** (1988), 501-512.
- [2] R. Borchers - *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. Math. **109** (1992), 405-444.
- [3] R. Borchers - *Automorphic forms on  $O_{s+2,2}$  and infinite products*, Invent. Math. **120** (1995), 161-213.

- [4] R. Borcherds - *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, *Topology* **35** no. 3 (1996), 699-710.
- [5] R. Borcherds - *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, e-print alg-geom/9609022 (1996).
- [6] A. Borel, H. Jacquet - *Automorphic forms and automorphic representations*, *Proc. Symp. Pure Math.* **33** part 1 (1979), 189-202.
- [7] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, H. Verlinde - *Elliptic genera of symmetric products and second quantized strings*, e-print hep-th/9608096 (1996).
- [8] V. Gritsenko, V. Nikulin - *Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody algebras*, e-print alg-geom/9504006 (1995).
- [9] V. Gritsenko, V. Nikulin - *K3 surfaces, Lorentzian Kac-Moody algebras and Mirror Symmetry*, *Math. Res. Letters* **3** (1996), 211-229.
- [10] V. Gritsenko, V. Nikulin - *The Igusa modular forms and "the simplest" Lorentzian Kac-Moody algebras*, e-print alg-geom/9603010 (1996).
- [11] B. Gross, D. Zagier - *On singular moduli*, *Jour. für die Reine und ang. Math.* **355** (1985), 191-220.
- [12] J. Harvey, G. Moore - *Algebras, BPS states and strings*, e-print hep-th/9510182; *Nucl. Phys.* **B463** (1996), 315.
- [13] J. Harvey, G. Moore - *On the algebras of BPS states*, e-print hep-th/9609017
- [14] R. Howe -  *$\theta$ -series and invariant theory*, *Proc. Symp. Pure Math.* **33** part 1 (1979), 275-285.
- [15] J. Jorgenson, A. Todorov - *An analytic discriminant for polarized K3 surfaces*, preprint (1994).
- [16] S. Rallis - *On a relation between  $\widetilde{SL}_2$  cusp forms and automorphic forms on orthogonal groups*, *Proc. Symp. Pure Math.* **33** part 1 (1979), 297-314.

Maxim KONTSEVICH

I.H.E.S.

35, route de Chartres

F-91440 Bures-sur-Yvette

FRANCE

E-mail : maxim@ihes.fr

# *Astérisque*

FRANÇOIS LOESER

## **Exposants $p$ -adiques et théorèmes d'indice pour les équations différentielles $p$ -adiques**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 822, p. 57-81

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_57\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__57_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**EXPOSANTS  $P$ -ADIQUES ET THÉORÈMES D'INDICE POUR  
LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES  $P$ -ADIQUES**

[d'après G. Christol et Z. Mebkhout]

par François LOESER

## Introduction

Commençons par un bref rappel de résultats classiques. Soit  $P$  un opérateur différentiel algébrique à coefficients complexes, i.e. un élément de  $\mathbf{C}[x, \frac{d}{dx}]$ . Le comportement local de  $P$  en un point, disons l'origine, est bien compris, cf. l'exposé de D. Bertrand à ce même séminaire [Be]. Écrivons  $P$  sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^m a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

où les  $a_i$  sont des polynômes et  $a_m$  est non nul. Par le théorème de l'indice local (cf. [K],[Ma]) l'opérateur  $P$  est à indice dans l'anneau des germes de fonctions analytiques à l'origine d'indice égal à  $m - v(a_m)$  et il est également à indice dans l'anneau des séries formelles d'indice  $m - v(a_m) + \text{irr}_0(P)$  avec  $\text{irr}_0(P) = \sup(i - v(a_i) - (m - v(a_m)))$ . Ici  $v$  désigne la valuation à l'origine. Il y a également des théorèmes d'indice plus fins dus à Ramis [R] dans des espaces de Gevrey faisant intervenir les pentes du polygone de Newton de  $P$ .

Écrivons maintenant, quitte à multiplier par une puissance de  $x$ ,  $P$  sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^m b_i(x) \left(x \frac{d}{dx}\right)^i$$

avec  $b_i$  des polynômes et  $b_m$  non nul. Supposons que l'origine soit un point singulier de  $P$  (i.e.  $a_m(0) = 0$ ). Rappelons que les exposants de  $P$  à l'origine sont les racines du polynôme indicial  $\sum_{i=0}^m b_i(0)s^i$ . Si le polynôme indicial est de degré  $m$ , ce qui est équivalent à la relation  $\text{irr}_0(P) = 0$ , on dit que  $P$  est à singularité régulière à l'origine ou encore qu'il est fuchsien. Les solutions locales de  $P$  ont alors un développement de la forme

$$\sum \lambda_{\alpha,i} x^\alpha (\log x)^i$$

avec  $\alpha$  parcourant l'ensemble des exposants,  $i$  des entiers positifs  $\leq m-1$  et  $\lambda_{\alpha,i}$  des germes de fonctions méromorphes à l'origine. De plus les fonctions  $\lambda_{\alpha,i}$  convergent jusqu'à la singularité de  $P$  la plus proche.

Les énoncés précédents ne s'étendent pas tels quels aux corps  $p$ -adiques. Ainsi un opérateur aussi anodin que  $x \frac{d}{dx} - \alpha$  peut être sans indice dans les germes de fonctions analytiques si  $\alpha$  est un nombre de Liouville  $p$ -adique. Une échappatoire naturelle serait de décréter qu'on ne s'intéressera qu'aux opérateurs à exposants qui ne sont pas de Liouville. Cette solution est cependant illusoire comme le montre l'exemple de l'opérateur de Monsky

$$M_a = p(1-x) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} - a$$

avec  $a$  dans  $\mathbf{Z}_p$ . Algébriquement cet opérateur n'a pas de singularité dans le disque ouvert  $D(0, 1^-)$ . Néanmoins, les solutions de cet opérateur ne convergent pas assez pour qu'il soit analytiquement trivial sur tout le disque. Une explication superficielle est que, modulo  $p$ , l'opérateur est singulier à l'origine. De façon plus profonde, considérons l'opérateur

$$M'_a = x \frac{d^2}{dx^2} - (x^p + p - 2) \frac{d}{dx} - apx^{p-1}$$

que l'on obtient à partir de  $M_a$  par image inverse par le morphisme de Frobenius  $x \mapsto (x-1)^p$ . Les racines  $p$ -ièmes de l'unité sont des singularités  $p$ -adiques de  $M'_a$  qui ne se voient pas modulo  $p$  et n'apparaissent que dans son antécédent  $M_a$ . Dans la théorie de Christol et Mebkhout  $a$  apparaîtra effectivement comme exposant  $p$ -adique de  $M_a$ . Dans cet exemple on voit également en filigrane deux outils fondamentaux de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques : les antécédents de Frobenius et les propriétés de convergence des solutions, en particulier dans les disques génériques.

Contrairement au cas complexe, il ne suffit pas d'effectuer l'étude locale sur des disques, mais il convient de traiter également les couronnes, pour pouvoir recoller (i.e. pour avoir un bon recouvrement rigide). C'est dans les travaux de Dwork et de Robba qu'apparaît l'importance de la croissance du rayon de convergence des solutions dans les disques génériques. En particulier, Robba a compris (cf. [R5]) que l'analogue  $p$ -adique dans une couronne de la condition de régularité de Fuchs est que le rayon de convergence des solutions dans les disques génériques soit maximal (condition dite de Robba). Dans cette situation, Christol et Mebkhout sont récemment parvenus [C-M2] à définir des exposants  $p$ -adiques par un procédé d'approximation reposant sur les antécédents de Frobenius de Christol et Dwork [C-D]. Les exposants de Christol et Mebkhout ne sont pas en général des entiers  $p$ -adiques modulo  $\mathbf{Z}$ . Il y a une subtilité qui provient du fait que le groupe symétrique agit à chaque niveau du processus d'approximation. Cette finesse disparaît a posteriori quand les différences des exposants  $p$ -adiques ne sont pas de Liouville. Mais il est nécessaire de les définir avant de pouvoir demander que leurs différences ne soient pas de Liouville ! Sous l'hypothèse que les différences des exposants  $p$ -adiques ne sont pas de Liouville, Christol et Mebkhout obtiennent alors l'existence d'une forme normale de Fuchs sur la couronne, toujours par un procédé élaboré d'approximation utilisant les antécédents de Frobenius (théorème 3.3.1).

Il reste encore à comprendre la partie irrégulière des équations différentielles  $p$ -adiques. C'est ce que réalisent Christol et Mebkhout dans l'article [C-M3] en définissant la filtration par les pentes  $p$ -adiques d'un module soluble. Ces pentes  $p$ -adiques sont décrites par le comportement au bord de la couronne du rayon de convergence des solutions dans les disques génériques. Un résultat fondamental est alors le théorème de décomposition (théorème 4.3.2) qui permet de séparer un module différentiel soluble en une partie régulière et une partie totalement irrégulière.

Le plan de l'exposé est le suivant. Dans la première section, on présente les concepts et les résultats fondamentaux concernant les équations différentielles sur les couronnes qui sont utilisés de façon essentielle dans l'exposé : estimation de Dwork-Robba, rayons de convergence génériques, théorème de Christol-Dwork sur les antécédents de Frobenius, condition de Robba.

La seconde section est consacrée à l'étude des approximations des entiers  $p$ -adiques et à l'action du groupe symétrique sur ces approximations. Cette étude est fondamentale dans la construction des exposants  $p$ -adiques qui est présentée dans la section 3. Ici nous ne suivons pas la présentation initiale de Christol et Mebkhout [C-M2], mais donnons plutôt la présentation simplifiée découverte ultérieurement par Dwork [D9] (voir aussi [C-M4] dont nous nous sommes largement inspirés). Nous présentons aussi dans cette section l'analogue  $p$ -adique du théorème de Fuchs.

Les sections 4, 5, et 6 sont consacrées respectivement aux pentes  $p$ -adiques, à la finitude de l'indice et à la formule de l'indice local. Enfin dans la section 7, nous présentons une application remarquable de la théorie précédente, qui en était en fait une motivation importante. Il s'agit du théorème de finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer que Mebkhout [Me] a su déduire du théorème de finitude de l'indice pour les modules avec structure de Frobenius. Ce même énoncé a été également démontré par P. Berthelot [B1] en utilisant une approche toute différente basée sur les résultats de de Jong sur les altérations (cf. [B2]).

Faute de place, nous ne parlerons pas d'une autre application importante, à savoir de l'utilisation qu'ont fait Christol et Mebkhout de leur théorie pour construire une catégorie de coefficients  $p$ -adiques sur les courbes. Ils démontrent en particulier un théorème de prolongement local des faisceaux analytiques cohérents à connexion dont ils déduisent un théorème d'algébrisation d'une classe de fibrés analytiques  $p$ -adiques. Nous renvoyons à [C-M3] §9 pour plus de détails.

Le présent texte ne rend justice que très imparfaitement aux travaux fondateurs de Dwork et de Robba sur les équations différentielles  $p$ -adiques. Nous ne pouvons que recommander au lecteur leur étude et regretter qu'un exposé du séminaire n'ait pas déjà été consacré à ce sujet.

*Terminologie.* — Soit  $\mathcal{A}$  un anneau de fonctions d'une variable  $x$  sur lequel l'opérateur différentiel  $\frac{d}{dx}$  agit naturellement. On suppose que  $\mathcal{A}$  est une algèbre sur un corps  $K$ . Par définition un  $\mathcal{A}$ -module différentiel sera un  $\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]$ -module (à gauche)  $\mathcal{M}$  qui est libre de rang fini comme  $\mathcal{A}$ -module. On dira également que  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module à connexion.

Si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux  $\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]$ -modules, on dira que  $\mathcal{M}$  admet un indice dans  $\mathcal{N}$  si les  $K$ -espaces vectoriels  $\text{Hom}_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  sont de dimension finie. On pose alors

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \dim_K \text{Hom}_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) - \dim_K \text{Ext}_{\mathcal{A}[\frac{d}{dx}]}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

## 1. Équations différentielles sur les couronnes

### 1.1. Fonctions analytiques sur une couronne

Dans tout ce texte on appelle corps  $p$ -adique une extension  $K$  de  $\mathbf{Q}_p$  munie d'une norme  $|\cdot|$  prolongeant la norme usuelle de  $\mathbf{Q}_p$ . Soit  $K$  un tel corps. On supposera dans la suite que  $K$  est complet. On note  $\tilde{K}$  le complété d'une clôture algébrique de  $K$ . Pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}_+$  on note  $C(I)$  la couronne

$$C(I) = \{x \in \tilde{K} \mid |x| \in I\},$$

et  $\mathcal{A}_K(I)$  le  $K$ -espace vectoriel des séries de Laurent  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k x^k$  à coefficients dans  $K$  qui convergent dans la couronne  $C(I)$ . Si  $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k x^k \in \mathcal{A}_K(I)$ , on posera  $\|f\|_\rho = \sup |a_k| \rho^k$  pour  $\rho$  dans  $I$ . Comme la fonction  $\rho \mapsto \|f\|_\rho$  est logarithmiquement convexe (on dira qu'une fonction réelle  $F : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  a logarithmiquement une propriété si la fonction  $x \mapsto \log F(\exp x)$  a cette propriété), la topologie sur  $\mathcal{A}_K(I)$  définie par la famille des normes  $\|\cdot\|_\rho$  est celle de la convergence uniforme sur les sous-couronnes fermées. L'algèbre  $\mathcal{A}_K(I)$  est ainsi munie d'une structure d'espace de Fréchet. Les normes  $\|\cdot\|_\rho$  sont multiplicatives et se prolongent naturellement au corps des fractions de  $\mathcal{A}_K(I)$ , que l'on notera  $\mathcal{A}'_K(I)$ , ainsi qu'aux matrices à coefficients dans  $\mathcal{A}'_K(I)$ . Si  $r$  est un réel  $> 0$ , on notera  $\mathcal{A}_K(r)$  et  $\mathcal{A}'_K(r)$  pour  $\mathcal{A}_K([0, r])$  et  $\mathcal{A}'_K([0, r])$ .

On note  $\mathcal{R}_K(r)$  la limite inductive des algèbres de Fréchet  $\mathcal{A}_K(r - \varepsilon, r]$ , pour  $\varepsilon > 0$  et on définit l'algèbre  $\mathcal{H}_K^\dagger(r)$  par la suite exacte de  $\mathcal{A}_K(r)[\frac{d}{dx}]$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_K(r) \rightarrow \mathcal{R}_K(r) \rightarrow \mathcal{H}_K^\dagger(r) \rightarrow 0.$$

Soit  $\mathcal{H}_K(\infty, r - \varepsilon]$  l'algèbre de Fréchet des fonctions analytiques sur le disque  $\{x \mid |x| > r\} \cup \{\infty\}$  nulles à l'infini. L'algèbre  $\mathcal{H}_K^\dagger(r)$  s'identifie naturellement à la limite inductive des algèbres  $\mathcal{H}_K(\infty, r - \varepsilon]$  et de plus  $\mathcal{R}_K(r)$  est somme directe topologique de  $\mathcal{A}_K(r)$  et de  $\mathcal{H}_K^\dagger(r)$ .

### 1.2. Estimation de Dwork-Robba

La majoration suivante est essentielle. Une présentation agréable de la démonstration (élémentaire) de [D-R2] est donnée dans le livre [D-G-S].

**THÉORÈME 1.2** ([D-R2]). — Soit  $Y \in \text{GL}(m, \mathcal{A}'_K(r))$ .

On pose  $A_n = \frac{1}{n!} (\frac{d^n}{dx^n} Y) Y^{-1}$ . Alors

$$\|A_n\|_\rho \leq \rho^{-m} \{n, m - 1\}_p \sup_{0 \leq i \leq m-1} \rho^i \|i! A_i\|_\rho$$

pour  $\rho < r$ , avec

$$\{n, m-1\}_p = \sup \left\{ \frac{1}{|\lambda_1 \cdots \lambda_{m-1}|_p} \mid 1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{m-1} \leq n \text{ et } \lambda_i \in \mathbf{N}^\times \right\}.$$

En particulier  $\{n, m-1\}_p \leq n^{m-1}$ .

### 1.3. Rayon de convergence

On suppose  $K$  algébriquement clos et on considère une extension normée complète algébriquement close  $\Omega$  avec  $|\Omega| = \mathbf{R}_+$  de corps résiduel transcendant sur  $K$ . Soit  $r > 0$ . Un disque générique est un disque ouvert  $D(t_r, r^-)$  de  $\Omega$  avec  $|t_r| = r$  ne rencontrant pas  $\mathbf{C}_p$ . Il est possible de trouver  $\Omega$  tel qu'un tel  $t_r$  existe pour tout  $r$ .

Dans la suite on désignera par  $\mathcal{B}_K(]r, R[)$  l'un des deux anneaux  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$  ou  $\mathcal{A}'_K(]r, R[)$ . Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{B}_K(]r, R[)$ -module différentiel. Pour  $\rho$  dans  $]r, R[$ , on définit le rayon de convergence  $R_\rho(\mathcal{M})$  dans le disque générique de rayon  $\rho$  comme le minimum de  $\rho$  et du rayon de convergence des solutions de  $\mathcal{M}$  dans les disques génériques de rayon  $\rho$ . Plus concrètement, fixons une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}$  et notons  $G$  la matrice de  $\frac{d}{dx}$  dans cette base,  $G_i$  celle de  $(\frac{d}{dx})^i$ . On a la relation

$$G_{i+1} = \frac{d}{dx} G_i + G_i G.$$

De plus la matrice fondamentale du système  $\frac{d}{dx} - G$  au voisinage de  $t_r$  est donnée par la série

$$Y_G(t_r, x) = \sum_{i \geq 0} G_i(t_r) \frac{(x - t_r)^i}{i!}.$$

On en tire que  $R_\rho(\mathcal{M})$  est donné par formule suivante (ne faisant pas intervenir  $\Omega$ ) :

$$R_\rho(\mathcal{M}) = \inf(\rho, \liminf_{i \rightarrow \infty} \|G_i/i!\|_\rho^{-1/i}).$$

On déduit du théorème de Lutz que  $R_\rho(\mathcal{M})$  n'est pas nul.

PROPOSITION 1.3.1 ([C-D][Y]). — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{B}_K(]r, R[)$ -module différentiel.

(1) Si  $\mathcal{B}_K(]r, R[) = \mathcal{A}_K(]r, R[)$ , la fonction  $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$  est logarithmiquement concave sur l'intervalle  $]r, R[$ .

(2) On suppose que  $\mathcal{M}$  est de la forme

$$\mathcal{M} = \mathcal{B}_K(]r, R[) \left[ \frac{d}{dx} \right] / P \mathcal{B}_K(]r, R[) \left[ \frac{d}{dx} \right]$$

pour  $P = (x \frac{d}{dx})^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x \frac{d}{dx})^i$ , avec  $a_i$  dans  $\mathcal{B}_K(]r, R[)$ .

(a) Soit  $\rho$  dans  $]r, R[$ . Si, pour un indice  $i_0$ ,  $\|a_{i_0}\|_\rho > 1$ , alors

$$R_\rho(\mathcal{M}) = \rho p^{-1/(p-1)} \min_{0 \leq i \leq m-1} \|a_i\|_\rho^{-1/(i+1)}.$$

(b) Soit  $\rho$  dans  $]r, R[$ . Si, pour tout  $i$ ,  $\|a_i\|_\rho \leq 1$ , alors  $R_\rho(\mathcal{M}) \geq \rho p^{-1/(p-1)}$ .

On renvoie à [C-D] et [Y] pour la démonstration de cette proposition. L'énoncé (1) est conséquence du fait que  $\rho \mapsto \|f\|_\rho$  est logarithmiquement convexe et l'énoncé (2) est déjà dans des travaux anciens de Dwork; son analogue  $x$ -adique a été utilisé par Katz [Ka] dans sa démonstration du théorème de Turritin.

#### 1.4. Antécédents de Frobenius : le théorème de Christol-Dwork

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{B}_K(]r, R[)$ -module différentiel. Un antécédent de Frobenius de  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{B}_K(]r^p, R^p[)$ -module différentiel dont l'image inverse par le morphisme de Frobenius  $x \mapsto x^p$  est isomorphe à  $\mathcal{M}$ . On définit de même, en remplaçant  $p$  par  $p^h$ , les antécédents de Frobenius d'ordre  $h$ . Comme on le verra dans la suite de cet exposé, l'énoncé suivant est fondamental.

THÉORÈME 1.4.1 ([C-D]).

- (1) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel tel que  $R_\rho(\mathcal{M}) > p^{-\frac{1}{p}}\rho$  pour tout  $\rho$  dans l'intervalle  $]r, R[$ . Il existe un antécédent de Frobenius  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$  tel que  $R_{\rho^p}(\mathcal{N}) = R_\rho(\mathcal{M})^p$  pour tout  $\rho$  dans  $]r, R[$ . De plus un tel  $\mathcal{A}_K(]r^p, R^p[)$ -module différentiel est unique à isomorphisme près.
- (2) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel tel que  $R_\rho(\mathcal{M}) > p^{-\frac{1}{p-1}}\rho$  pour tout  $\rho$  dans l'intervalle  $]r, R[$ . Il existe un antécédent de Frobenius  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}'_K(]r, R[)$  tel que  $R_{\rho^p}(\mathcal{N}) = R_\rho(\mathcal{M})^p$  pour tout  $\rho$  dans  $]r, R[$ . De plus un tel  $\mathcal{A}'_K(]r^p, R^p[)$ -module différentiel est unique à isomorphisme près.

Remarques. —

- 1) Localement, un module différentiel possède en général  $p$  antécédents distincts. C'est la condition portant sur le rayon de convergence qui garantit l'unicité.
- 2) Dans (2) les singularités de l'antécédent  $\mathcal{N}$  sont au pire apparentes.

Différents résultats sur l'existence d'antécédents de Frobenius avaient déjà été obtenus dans des disques et des circonférences par Christol [C1], [C2], [C3]. Pour démontrer le théorème 1.4.1 Christol et Dwork commencent par démontrer, en raffinant les méthodes utilisées dans [C3] et en utilisant 1.2 et son analogue  $x$ -adique, que l'intervalle  $]r, R[$  est recouvert par de petits intervalles sur lesquels un antécédent de Frobenius existe. Ils parviennent ensuite à recoller les divers antécédents en utilisant leur unicité et l'analogie  $p$ -adique de la décomposition de Birkhoff. Une difficulté technique provient de l'utilisation du lemme du vecteur cyclique qui introduit des singularités apparentes.

Une situation où le théorème de Christol-Dwork prend une forme particulièrement agréable est celle où  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel tel que  $R_\rho(\mathcal{M}) = \rho$  pour tout  $\rho$  dans  $]r, R[$ . On dira alors que  $\mathcal{M}$  a la propriété de Robba. Cette condition a été mise en évidence par Robba, qui a été le premier à voir que cette condition est l'analogie  $p$ -adique de la régularité au sens de Fuchs (cf. [R5]).

COROLLAIRE 1.4.2. — L'image inverse par le morphisme de Frobenius  $x \mapsto x^p$  induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des  $\mathcal{A}_K(\lceil r^p, R^p \rceil)$ -modules différentiels vérifiant la condition de Robba et celle des  $\mathcal{A}_K(\lceil r, R \rceil)$ -modules différentiels vérifiant la condition de Robba.

## 2. Approximation des nombres $p$ -adiques

Dans cette section  $|\cdot|$  désignera la norme usuelle sur  $\mathbf{R}$  et  $|\cdot|_p$  la norme usuelle sur  $\mathbf{Z}_p$ . Pour tout réel  $x$ , on notera  $\langle x \rangle$  la distance de  $x$  à  $\mathbf{Z}$ . Les résultats de cette section sont dus à Christol et Mebkhout ([C-M2] § 4).

### 2.1. Approximation

On considère les sous-groupes  $\mathcal{N}$  (suites négligeables) et  $\mathcal{E}$  (suites cohérentes) de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  définis par

$$\mathcal{N} = \{a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \langle a_i \rangle = O(ip^{-i})\}$$

et

$$\mathcal{E} = \{a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \langle pa_{i+1} - a_i \rangle = O(p^{-i})\}.$$

Soit  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}_p$ . Une suite  $(\alpha_i)$  d'entiers avec  $\alpha_i$  congru à  $\alpha$  modulo  $p^i$  pour tout  $i$  sera appelée approximation de  $\alpha$ . Si  $(\alpha_i)$  est une approximation de  $\alpha$ , la suite  $(p^{-i}\alpha_i)$  appartient à  $\mathcal{E}$ . De plus si  $(\alpha'_i)$  est une autre approximation de  $\alpha$ , la suite  $(p^{-i}(\alpha_i - \alpha'_i))$  appartient à  $\mathcal{N}$ . D'autre part, si  $\alpha$  est entier, la suite  $(p^{-i}\alpha_i)$  appartient à  $\mathcal{N}$ , car  $\langle p^{-i}\alpha_i \rangle \leq p^{-i}|\alpha_i|$ . En associant à la classe de  $\alpha$  celle de la suite  $(p^{-i}\alpha_i)$ , on obtient donc un morphisme de groupes  $\theta : \mathbf{Z}_p/\mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{N} \cap \mathcal{E}$ .

THÉORÈME 2.1.1. — *Le morphisme  $\theta$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Soit  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}_p$ . On considère l'approximation  $(\alpha_i)$  telle que  $\alpha_i$  est dans l'intervalle  $]-\frac{p^i}{2}, \frac{p^i}{2}]$  pour tout  $i$ . Si  $\alpha$  n'est pas entier, on a  $\alpha_i \neq \alpha_{i-1}$  pour une infinité d'entiers  $i$ . Comme  $\alpha_i - \alpha_{i-1}$  est divisible par  $p^{i-1}$ , on a  $\langle p^{-i}\alpha_i \rangle \geq \frac{1}{2p}$  pour de tels entiers, ce qui démontre l'injectivité.

Pour la surjectivité, on commence par remarquer que pour tout réel  $c$  il existe un réel  $d$  tel que  $p(c - \frac{d}{p}) = \langle pc \rangle$ . Puis, pour  $a$  dans  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  une suite de réels, on construit par récurrence une suite d'entiers  $\alpha_i$  tels que

$$p^i \langle a_i - p^{-i}\alpha_i \rangle \leq \langle a_0 \rangle + \sum_{j=0}^{i-1} p^j \langle pa_{j+1} - a_j \rangle.$$

En effet, il suffit de prendre  $\alpha_0 = 0$ , et une fois construit  $\alpha_i$ , de poser  $\alpha_{i+1} = \alpha_i + dp^i$  avec  $d$  un entier tel que

$$p^{i+1} \langle a_{i+1} - p^{-i-1}\alpha_i - dp^{-1} \rangle \leq \langle a_0 \rangle + \sum_{j=0}^i p^j \langle pa_{j+1} - a_j \rangle,$$

dont l'existence est garantie par l'observation précédente. Notons  $\alpha$  la limite de la suite  $(\alpha_i)$ . Si  $a$  appartient à  $\mathcal{E}$ , on vérifie directement que l'image par  $\theta$  de la classe de  $\alpha$  est égale à celle de  $a$ .  $\square$

## 2.2. Nombres de Liouville

Un nombre  $\alpha$  de  $\mathbf{Z}_p \setminus \mathbf{Z}$  est dit de Liouville si

$$\liminf_{\substack{s \rightarrow \pm\infty \\ s \in \mathbf{Z}}} |s - \alpha|_p^{1/|s|} < 1.$$

C'est une propriété de la classe de  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z}$ . Par exemple les nombres algébriques sur  $\mathbf{Q}$  ne sont pas de Liouville. Une suite  $a$  de  $\mathcal{E}$  sera dite **(NL)** si elle appartient à  $\mathcal{N}$  ou si

$$\liminf(i^{-1}p^i\langle a_i \rangle) = \infty.$$

C'est une propriété de la classe de  $a$  dans  $\mathcal{E}/\mathcal{N} \cap \mathcal{E}$ . On vérifie facilement (cf. [C-M2 6.3]) que le morphisme  $\theta$  établit une bijection entre les classes non de Liouville et les classes **(NL)**. L'énoncé suivant est important.

**PROPOSITION 2.2.1.** — *Soit  $a$  une suite de  $\mathcal{E}$  qui est **(NL)** et soit  $b$  une suite de  $\mathcal{N}$ . Si  $a_i - b_i$  est entier pour une infinité de  $i$ , alors  $a$  appartient également à  $\mathcal{N}$ .*

*Démonstration.* — En effet, on a alors

$$\liminf(i^{-1}p^i\langle a_i \rangle) < \limsup(i^{-1}p^i\langle b_i \rangle) < \infty. \square$$

## 2.3. Action du groupe symétrique

On fixe ici un entier  $m \geq 2$ . On note  $\mathfrak{S}$  le groupe des permutations de  $\{1, \dots, m\}$  et on pose  $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}^{\mathbf{N}}$ . On considère la relation d'équivalence sur  $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^m$  donnée par  $a \sim b$  si il existe  $\sigma$  dans  $\mathfrak{G}$  tel que  $a - \sigma(b)$  appartienne à  $\mathcal{N}^m$ . Par restriction et passage au quotient on en déduit une relation d'équivalence, que l'on notera encore  $\sim$ , sur  $(\mathcal{E}/\mathcal{N} \cap \mathcal{E})^m$ , et donc, via l'isomorphisme  $\theta$ , également sur  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ . On appellera par abus de langage la classe d'équivalence pour  $\sim$  d'un élément de  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$  sa  $\mathfrak{G}$ -orbite.

Soit  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  un élément de  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ . En général, comme le montre l'exemple 2.3.2, la  $\mathfrak{G}$ -orbite de  $\alpha$  est plus grande que sa  $\mathfrak{S}$ -orbite. On a cependant l'énoncé suivant.

**PROPOSITION 2.3.1.** — *Soit  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  un élément de  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ . Si aucune différence  $\alpha^i - \alpha^j$  n'est de Liouville, alors la  $\mathfrak{G}$ -orbite de  $\alpha$  coïncide avec sa  $\mathfrak{S}$ -orbite.*

*Démonstration.* — Il s'agit de démontrer que si deux éléments de  $\mathcal{E}^m$ ,  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^m)$  et  $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^m)$  sont équivalents pour  $\sim$ , et si tous les  $a^i - a^j$  sont (NL), alors il existe une permutation  $\sigma$  telle que  $\sigma(\mathbf{b}) - \mathbf{a}$  appartienne à  $\mathcal{N}^m$ . Notons  $\simeq$  la relation "être congru modulo  $\mathcal{N}^m$ ". On déduit facilement des relations  $(p\mathbf{a}_{i+1}) \simeq \mathbf{a}$ ,  $(p\mathbf{b}_{i+1}) \simeq \mathbf{b}$  et  $(\sigma_i(\mathbf{b}_i)) \simeq \mathbf{a}$  que  $(\sigma_{i+1} \circ \sigma_i^{-1}(\mathbf{a}_i)) \simeq \mathbf{a}$ . Fixons des entiers  $i$  et  $j$ . En appliquant la proposition 2.2.1 aux suites  $a = \mathbf{a}^i - \mathbf{a}^j$  et  $b = (\mathbf{a}_h^{\sigma_{h+1} \circ \sigma_h^{-1}(i)} - \mathbf{a}_h^j)$ , on obtient que pour  $h$  assez grand, l'égalité  $\sigma_{h+1} \circ \sigma_h^{-1}(i) = j$  entraîne que  $\mathbf{a}^i - \mathbf{a}^j$  appartient à  $\mathcal{N}$ . Il existe donc un entier  $h_0$ , tel que pour  $h \geq h_0$  les permutations  $\sigma_{h+1} \circ \sigma_h^{-1}$  et  $\chi_h = \sigma_h \circ \sigma_{h_0}^{-1}$  fixent l'image de  $\mathbf{a}$  dans  $(\mathcal{E}/\mathcal{N} \cap \mathcal{E})^m$ . On a donc

$$\begin{aligned} \sigma_{h_0}(\mathbf{b}) - \mathbf{a} &\simeq \sigma_{h_0}(\mathbf{b}) - (\chi_h^{-1}(\mathbf{a}_h)) \\ &\simeq (\chi_h^{-1}(\sigma_h(\mathbf{b}_h) - \mathbf{a}_h)) \simeq 0. \square \end{aligned}$$

2.3.2. *Exemple.* — L'exemple suivant est dû à B.Dwork. Soit  $\gamma : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  une application croissante telle que  $\gamma(i+1)p^{-\gamma(i)} \geq \varepsilon > 0$ . On pose  $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} p^{\gamma(2i)}$  et  $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} p^{\gamma(2i+1)}$ . On peut vérifier (cf. [C-M2]) que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres de Liouville et que les classes de  $(\alpha, -\beta)$  et de  $(\alpha - \beta, 0)$  dans  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^2$  sont dans la même  $\mathfrak{G}$ -orbite bien qu'elles ne se déduisent pas par permutation dans  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^2$ .

### 3. Exposants $p$ -adiques et forme normale de Fuchs

#### 3.1. Transformée de Fourier de la matrice fondamentale

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(\lceil r, R \rceil)$ -module différentiel de rang  $m$ . On supposera dans toute la section 3 que  $K$  est algébriquement clos et complet et que  $\mathcal{M}$  vérifie la condition de Robba. On fixe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}$  et on note comme en 1.3.1  $G_i$  la matrice de  $\frac{d}{dx}$  dans cette base. La matrice fondamentale du système  $\frac{d}{dx} - G$  est donnée par la série

$$Y_G(x, t) = \sum_{i \geq 0} G_i(x) \frac{(t-x)^i}{i!}.$$

dont la condition de Robba garantit la convergence dès que  $r < |x| = |t| < R$  et  $|t-x| < |x|$ .

Pour tout entier  $h$  on notera  $\Gamma_h$  le groupe des racines  $p^h$ -ièmes de l'unité dans  $K$ . Pour  $a = (a_1, \dots, a_m)$  dans  $\mathbf{Z}_p^m$  et  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on notera  $\zeta^a$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $\zeta^{a_1}, \dots, \zeta^{a_m}$ . On considère les matrices

$$R_{a,h}(x) = p^{-h} \sum_{\zeta \in \Gamma_h} \zeta^{-a} Y(x, x\zeta).$$

qui sont des transformées de Fourier tordues de la matrice fondamentale. Pour  $a$  le vecteur nul, on retrouve la matrice de changement de base donnant l'antécédent de Frobenius d'ordre  $h$ .

PROPOSITION 3.1.1. — *Soit  $a$  dans  $\mathbf{Z}_p^m$  et soit  $h$  un entier.*

(1) La matrice  $R_{a,h}$  est à coefficients dans  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ .

(2) Pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on a la relation

$$\zeta^a R_{a,h}(x) = R_{a,h}(\zeta x) Y(x, \zeta x).$$

(3) Pour tout  $\rho$  dans  $]r, R[$ , il existe une constante  $c_\rho$  telle que

$$\|R_{a,h}\|_\rho \leq c_\rho p^{hm}.$$

(4) Soit  $\mathcal{R}$  un ensemble de représentants de  $\mathbf{Z}_p^m$  modulo  $p\mathbf{Z}_p^m$ . On a

$$\det(R_{a,h}) = \sum_{b \in \mathcal{R}} \det(R_{a+pb, h+1}).$$

*Remarque.* — Supposons que le système  $\frac{d}{dx} - G$  admette une solution du type de Fuchs  $U(x)x^A$ , avec  $U$  analytique inversible et  $A$  une matrice à coefficients dans  $\mathbf{Z}_p$ . On aurait alors

$$Y(x, t) = U(t)t^A x^{-A} U^{-1}(x),$$

et en particulier, pour  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ ,

$$\zeta^A U^{-1}(x) = U^{-1}(\zeta x) Y(x, \zeta x).$$

Autrement dit on retrouve la relation (2) pour  $a$  la partie semi-simple de  $A$ .

*Indication de démonstration.* — On déduit de l'estimation de Dwork-Robba 1.2 que

$$\|G_n/n!\|_\rho = O(n^{m-1} \rho^n).$$

On en tire aisément (1) et (3) en utilisant l'inégalité

$$|\zeta - 1| \leq p^{-1/(p-1)p^h}.$$

La relation (2) se vérifie par un calcul direct utilisant la relation

$$Y(x, t) = Y(y, t) Y(x, y)$$

pour  $|y - x| < |x|$  et  $|t - x| < |x|$ . Quant à (4), c'est une conséquence de la formule d'inversion de la transformation de Fourier (discrète).  $\square$

**COROLLAIRE 3.1.2.** — Pour tout  $\rho$  dans  $]r, R[$ , il existe  $a$  dans  $\mathbf{Z}_p^m$  tel que  $|\det(R_{a,h})|_\rho$  soit égal à 1 pour tout entier  $h$ .

*Démonstration.* — Cela résulte de la relation (4) par récurrence et approximations successives.  $\square$

### 3.2. Exposants $p$ -adiques

DÉFINITION 3.2.1. — On définit  $\mathcal{PE}(G, ]r, R[)$  comme l'ensemble des  $a$  de  $\mathbf{Z}_p^m$  tels qu'il existe une suite  $S_h$  de matrices analytiques sur la couronne  $C(]r, R[)$  telles que les conditions suivantes soient vérifiées.

(1) Pour tout  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ , on a la relation

$$\zeta^a S_h(x) = S_h(\zeta x) Y(x, \zeta x).$$

(2) Pour tout  $\rho$  dans  $]r, R[$ , il existe une constante  $c_\rho$  telle que

$$\|S_h\|_\rho \leq c_\rho p^{hm}.$$

(3) Il existe  $\rho$  dans  $]r, R[$  tel que, pour tout entier  $h$ ,  $|\det(S_h)|_\rho = 1$ .

On vérifie facilement que l'image de  $\mathcal{PE}(G, ]r, R[)$  dans  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$  est indépendante du choix de la base de  $\mathcal{M}$  et est une réunion de  $\mathfrak{G}$ -orbites. On notera cet ensemble  $\mathcal{E}(\mathcal{M}, ]r, R[)$ . C'est l'ensemble des exposants  $p$ -adiques de  $\mathcal{M}$  dans la couronne  $C(]r, R[)$ .

THÉORÈME 3.2.2. — L'ensemble  $\mathcal{E}(\mathcal{M}, ]r, R[)$  est la  $\mathfrak{G}$ -orbite d'un point.

Indication de démonstration. — Le fait que  $\mathcal{E}(\mathcal{M}, ]r, R[)$  ne soit pas vide résulte du corollaire 3.1.2.

LEMME 3.2.3. — Si  $a$  appartient à  $\mathcal{PE}(G, ]r, R[)$ , pour tout  $\rho$  dans  $]r, R[$ , il existe une suite  $S_h$  de matrices vérifiant (1), (2) et (3) pour ce  $\rho$ .

Indication de démonstration. — Partons d'une suite  $S_h$  vérifiant (1), (2) et (3) pour un certain  $\rho_0$ . La condition (1) impose que le nombre de zéros de  $\det S_h$  sur une circonférence est divisible par  $p^h$ . Les contraintes que cette propriété impose au polygone de Newton de  $\det S_h$  sont suffisamment fortes pour entraîner l'existence d'une suite de scalaires  $\delta_h$  telle que la suite des  $\delta_h S_h$  vérifie (1), (2) et (3) pour  $\rho$ .  $\square$

Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{PE}(G, ]r, R[)$  et soient  $S_h$  et  $T_h$  des suites de matrices vérifiant (1), (2) et (3) pour  $a$  et  $b$  respectivement. Le lemme précédent permet de supposer que  $S_h$  et  $T_h$  vérifient (3) pour le même  $\rho$ . On pose  $Q_h = S_h T_h^{-1}$ . Il résulte alors des hypothèses que  $Q_h$  vérifie (2) et (3) ainsi que la relation

$$\zeta^a Q_h(x) \zeta^{-b} = Q_h(\zeta x)$$

pour  $\zeta$  dans  $\Gamma_h$ . On déduit de la relation (3) pour  $Q_h$  qu'il existe une permutation  $\sigma_h$  telle que

$$\prod |(Q_h)_{i, \sigma_h(i)}| = 1.$$

On vérifie alors à l'aide des autres conditions que la classe de  $a$  est égale à l'image par  $\sigma = (\sigma_h) \in \mathfrak{G}$  de celle de  $b$ .  $\square$

### 3.3. Forme normale de Fuchs

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(\cdot|r, R)$ -module différentiel de rang  $m$  vérifiant la condition de Robba. D'après le théorème 3.2.2 l'ensemble des exposants  $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \cdot|r, R)$  est la  $\mathfrak{G}$ -orbite d'un point dans  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ . On dira que les différences des exposants de  $\mathcal{M}$  ne sont pas de Liouville si ce point est la  $\mathfrak{G}$ -orbite de  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  dans  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$  tel qu'aucune différence  $\alpha^i - \alpha^j$  ne soit de Liouville. D'après la proposition 3.1 la  $\mathfrak{G}$ -orbite de  $\alpha$  coïncide alors avec sa  $\mathfrak{S}$ -orbite. Autrement dit  $\alpha$  est un élément de  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$  bien défini à permutation près. Par abus de langage on dira alors que cet élément de  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$  est l'ensemble des exposants  $p$ -adiques de  $\mathcal{M}$ .

Pour l'énoncé qui suit on a besoin pour des raisons techniques que  $\mathcal{M}$  provienne après extension des scalaires d'un  $\mathcal{H}_K(\cdot|r, R)$ -module différentiel, avec  $\mathcal{H}_K(\cdot|r, R)$  l'anneau des éléments analytiques dans la couronne, i.e. le complété de l'anneau des fonctions rationnelles sans pôle dans la couronne  $C(\cdot|r, R)$  pour la convergence uniforme dans la couronne. Bien sûr on pourrait aussi ne pas imposer cette condition et énoncer le résultat sur les couronnes  $C(\cdot|r + \varepsilon, R - \varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 0$ .

**THÉORÈME 3.3.1.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(\cdot|r, R)$ -module différentiel de rang  $m$  vérifiant la condition de Robba et dont les différences des exposants ne sont pas de Liouville. On suppose que  $\mathcal{M}$  provient après extension des scalaires d'un  $\mathcal{H}_K(\cdot|r, R)$ -module différentiel. Il existe alors une base de  $\mathcal{M}$  dans laquelle la matrice de  $x \frac{d}{dx}$  soit une matrice constante dont la partie semi-simple a pour valeurs propres exactement l'ensemble des exposants  $p$ -adiques de  $\mathcal{M}$ .*

La démonstration de ce résultat est difficile et technique, que ce soit la démonstration originelle de Christol et Mebkhout [C-M2] utilisant les antécédents de Frobenius de Christol-Dwork ou celle donnée ultérieurement par Dwork [D9], qui repose sur une étude très fine du comportement asymptotique des suites  $S_{pj+1}S_{pj}^{-1}$ .

Pour  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}_p$  on note  $\mathcal{A}^\alpha$  le  $\mathcal{A}_K(\cdot|r, R)$ -module différentiel de rang 1 engendré par  $x^\alpha$ . La classe d'isomorphisme de ce module ne dépend que de la classe de  $\alpha$  modulo  $\mathbf{Z}$ .

**COROLLAIRE 3.3.2.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(\cdot|r, R)$ -module différentiel. On suppose que  $\mathcal{M}$  vérifie la condition de Robba et que les différences de ses exposants ne sont pas de Liouville. Le module  $\mathcal{M}$  est extension successive de modules  $\mathcal{A}^\alpha$ , les classes modulo  $\mathbf{Z}$  des  $\alpha$  parcourant exactement l'ensemble des exposants  $p$ -adiques de  $\mathcal{M}$ .*

*Remarque.* — Dans toute cette section le corps  $K$  était supposé algébriquement clos. Dans [C-M3] Christol et Mebkhout utilisent le théorème de Tate-Ax [A] pour descendre la décomposition donnée par le corollaire précédent de  $\mathbf{C}_p$  à un sous corps complet.

## 4. Pentas $p$ -adiques

### 4.1. La plus grande pente

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel. La fonction  $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$  étant logarithmiquement concave sur l'intervalle  $]r, R[$ , la limite  $R_{R^-}(\mathcal{M}) = \lim_{\rho \rightarrow R^-} R_\rho(\mathcal{M})$  existe et est  $\leq R$ . On dira que  $\mathcal{M}$  est soluble en  $R$  si  $R_{R^-}(\mathcal{M}) = R$ . Cette définition s'étend clairement aux  $\mathcal{R}_K(R)$ -modules différentiels.

Le résultat suivant est dû à Christol et Mebkhout.

**THÉORÈME 4.1.1** ([C-M3]). — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel soluble en  $R$ . Il existe un nombre rationnel  $\beta = \beta(\mathcal{M}) \geq 1$  tel que  $R_\rho(\mathcal{M}) = R(\frac{\rho}{R})^\beta$  pour  $\rho$  suffisamment proche de  $R$ .*

*Indication de démonstration.* — On peut supposer que  $\mathcal{M}$  n'a pas la propriété de Robba dans une petite couronne  $]R - \varepsilon, R[$ . Comme la fonction  $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$  est logarithmiquement concave, on a  $R_\rho(\mathcal{M}) < \rho$  pour  $\rho$  dans  $]R - \varepsilon, R[$ . Il existe donc une suite strictement croissante  $r_h$  de limite  $R$ , telle que dans l'intervalle  $]r_{h-1}, r_h[$ , on ait

$$\rho p^{-\frac{1}{p^h-1(p-1)}} < R_\rho(\mathcal{M}) < \rho p^{-\frac{1}{p^h(p-1)}}.$$

Soit  $\mathcal{N}_h$  l'antécédent de Frobenius d'ordre  $h$  de  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}'_K(]r_{h-1}, r_h[)$  obtenu en appliquant  $h$  fois le théorème de Christol-Dwork 1.4.1. On a en particulier  $R_\rho(\mathcal{N}_h) < \rho p^{-\frac{1}{p-1}}$  pour  $\rho$  dans  $]r_{h-1}^{p^h}, r_h^{p^h}[$ . En appliquant le lemme du vecteur cyclique à  $\mathcal{N}_h$ , on se retrouve dans la situation (2) (a) de la proposition 1.3.1, qui donne  $R_\rho(\mathcal{N}_h)$  explicitement. En particulier, la fonction  $R_\rho(\mathcal{N}_h)$  est par morceaux de la forme  $C_h \rho^{\beta_h}$  avec  $C_h$  une constante et  $\beta_h$  un rationnel dont le dénominateur est borné par le rang  $m$  de  $\mathcal{M}$ . On en déduit que  $R_\rho(\mathcal{M})$  est logarithmiquement linéaire par morceaux et que les dénominateurs des pentes sont bornés par  $m$ . Le résultat en découle aisément, en utilisant à nouveau le fait que la fonction  $\rho \mapsto R_\rho(\mathcal{M})$  est logarithmiquement concave.  $\square$

Le rationnel  $\beta(\mathcal{M})$  sera appelé la plus grande pente du module  $\mathcal{M}$  en  $R$  et noté  $pt(\mathcal{M})$ . On définit de même, en prenant un modèle sur une couronne convenable, la plus grande pente d'un  $\mathcal{R}_K(R)$ -module différentiel soluble en  $R$ .

Sur les petites couronnes où  $R_\rho(\mathcal{M})$  est de la forme  $R(\frac{\rho}{R})^\beta$  on a l'estimation suivante de la taille des matrices  $G_i$ .

**PROPOSITION 4.1.2** ([C-M3]). — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]R - \varepsilon, R[)$ -module différentiel tel que  $R_\rho(\mathcal{M}) = R(\frac{\rho}{R})^\beta$  avec  $\beta > 1$  pour  $\rho$  dans  $]R - \varepsilon, R[$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathcal{M}$ . Il existe alors une fonction  $c$  logarithmiquement concave et une fonction  $M$  qui vérifient, pour  $\rho$  dans  $]R - \varepsilon, R[$ , les inégalités*

$$\begin{aligned} \rho^i \|G_i/i!\|_\rho &\leq M(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)i} \quad \text{pour } i \geq 0 \\ \max_{0 \leq i \leq p^h} \rho^i \|G_i/i!\|_\rho &\geq c(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)p^h} \quad \text{pour } h \geq 1. \end{aligned}$$

Christol et Mebkhout en déduisent l'énoncé suivant, technique mais important pour la suite.

**THÉORÈME 4.1.3** ([C-M3]). — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(\]R - \varepsilon, R[)$ -module différentiel tel que  $R_\rho(\mathcal{M}) = R(\frac{\rho}{R})^\beta$  avec  $\beta > 1$  pour  $\rho$  dans  $\]R - \varepsilon, R[$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathcal{M}$ . Il existe alors des nombres  $\lambda_{i,h}$ , pour  $0 \leq i \leq p^h$ , ne prenant que la valeur 0 ou 1, une fonction  $c$  logarithmiquement concave et une fonction  $M$  tels que, si on note  $L_h$  la matrice dans  $\mathcal{B}$  de  $\sum_{i=0}^{p^h} \lambda_{i,h} x^i \frac{d^i}{dx^i}$ , on a les inégalités suivantes pour  $\rho$  dans  $\]R - \varepsilon, R[$ ,*

$$c(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)p^h} \leq \|L_h\|_\rho \leq M(\rho)(\rho/R)^{(1-\beta)p^h}.$$

## 4.2. Un peu de topologie

Pour tout entier  $k$  on pose  $\Delta^k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}$ . Soit  $P = \sum a_k \Delta^k$  avec  $a_k$  dans  $\mathcal{A}_K(I)$  un élément de  $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$ . Pour tout réel  $\gamma$  et tout  $\rho$  dans  $I$ , on pose

$$\|P\|_{\gamma,\rho} = \sup_k \|a_k\|_\rho \rho^{-\gamma k}.$$

On a ainsi une famille de semi-normes sur  $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$ . On note  $\mathcal{T}_\gamma$  la topologie définie par ces semi-normes, pour  $\gamma$  fixé, sur  $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$ . On note de même la topologie sur  $\mathcal{R}_K(r)[\frac{d}{dx}]$  limite inductive des  $\mathcal{T}_\gamma$  sur  $\mathcal{A}_K(\]r - \varepsilon, r[)$ . On définit de même, similairement à 1.1, une topologie  $\mathcal{T}_\gamma$  sur  $\mathcal{H}_K^\dagger(r)[\frac{d}{dx}]$  vu comme limite inductive des algèbres  $\mathcal{H}_K(\] \infty, r - \varepsilon[)$  telle que  $\mathcal{R}_K(r)[\frac{d}{dx}]$  soit somme directe topologique de  $\mathcal{A}_K(r)[\frac{d}{dx}]$  et de  $\mathcal{H}_K^\dagger(r)[\frac{d}{dx}]$ . Les algèbres  $\mathcal{A}_K(r)[\frac{d}{dx}]$  et  $\mathcal{H}_K^\dagger(r)[\frac{d}{dx}]$  ne sont en général pas complètes ni même limites inductives d'espaces complets.

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(I)[\frac{d}{dx}]$  ou  $\mathcal{R}_K(r)[\frac{d}{dx}]$ -module (à gauche) de type fini. Toute présentation de  $\mathcal{M}$  donne une topologie quotient sur  $\mathcal{M}$  dont on vérifie facilement qu'elle est indépendante de la présentation. On note cette topologie  $\mathcal{T}_\gamma$ . Elle n'est en général pas séparée.

Une extension valuée  $L/K$  d'un corps valué  $K$  est dite immédiate si  $L$  et  $K$  ont même groupe de valuation et même corps résiduel. Un corps valué est dit *maximalement complet* s'il n'a pas d'autre extension immédiate que lui-même. Une condition équivalente est que l'intersection d'une suite emboîtée de boules fermées soit non vide (cf. [L]). Un corps complet à valuation discrète est *maximalement complet*. Par contre  $\mathbb{C}_p$  ne l'est pas.

Il résulte du théorème de M.Lazard [L] sur les zéros des fonctions analytiques que si  $K$  est *maximalement complet* alors tout idéal de type fini des anneaux  $\mathcal{A}_K(I)$  et  $\mathcal{R}_K(r)$  est principal. En particulier, si  $K$  est *maximalement complet*, les anneaux  $\mathcal{A}_K(I)$  et  $\mathcal{R}_K(r)$  sont cohérents, i.e. leurs idéaux de type finis sont de présentation finie. On en déduit également l'énoncé suivant.

**PROPOSITION 4.2.1.** — *Si  $K$  est maximalement complet, tout sous-module de type fini d'un module libre de type fini sur les anneaux  $\mathcal{A}_K(I)$  et  $\mathcal{R}_K(r)$  est libre de type fini.*

On en déduit la conséquence importante suivante.

**COROLLAIRE 4.2.2.** — *On suppose que  $K$  est localement compact. La catégorie des  $\mathcal{A}_K(I)$ -modules (resp. des  $\mathcal{R}_K(r)$ -modules) libres de type fini munis d'une connexion est abélienne.*

Christol et Mebkhout déduisent également de la proposition 4.2.1 le théorème suivant.

**THÉORÈME 4.2.3 ([C-M3]).** — *On suppose que  $K$  est localement compact. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(I)$ -module libre de type fini à connexion. Alors, pour tout réel  $\gamma$ , l'adhérence  $\bar{0}_\gamma(\mathcal{M})$  de zéro dans  $\mathcal{M}$  pour la topologie  $\mathcal{T}_\gamma$  et le quotient  $\mathcal{M}/\bar{0}_\gamma(\mathcal{M})$  sont des  $\mathcal{A}_K(I)$ -modules libres de type fini à connexion.*

### 4.3. Décomposition par rapport à la plus grande pente

Christol et Mebkhout déduisent du théorème 4.1.3 l'énoncé suivant.

**PROPOSITION 4.3.1 ([C-M3]).** — *On suppose que le corps  $K$  est localement compact et que le réel  $R$  appartient au groupe des valeurs absolues. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel soluble en  $R$ . Alors, pour tout réel  $\gamma$  tel que  $1 \leq \gamma < pt(\mathcal{M})$ , la topologie  $\mathcal{T}_\gamma$  sur  $\mathcal{M}_{[R-\varepsilon, R[}$  n'est pas séparée pour  $\varepsilon > 0$  assez petit.*

Dans cet énoncé l'hypothèse que le corps  $K$  est localement compact est utilisée pour garantir que pour  $I$  un intervalle ouvert on peut extraire de toute suite bornée de fonctions de  $\mathcal{A}_K(I)$  une sous-suite convergente.

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel soluble en  $R$ . On dira que  $\mathcal{M}$  a toutes ses pentes  $> \gamma$  en  $R$ , si pour  $\varepsilon > 0$  assez petit toutes les solutions locales au point générique  $t_\rho$  ont toutes un rayon de convergence strictement plus petit que  $R(\rho/R)^\gamma$ , pour tout  $\rho$  dans  $]R - \varepsilon, R[$ . Cette définition s'étend aux  $\mathcal{R}_K(R)$ -modules différentiels solubles en  $R$ .

**THÉORÈME 4.3.2 ([C-M3]).** — *On suppose que le corps  $K$  est localement compact et que le réel  $R$  appartient à l'ensemble des valeurs absolues. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(R)$ -module différentiel soluble en  $R$ . On suppose que  $pt(\mathcal{M}) > 1$ . Pour tout réel  $\gamma$  vérifiant  $1 \leq \gamma < pt(\mathcal{M})$ , il existe une suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_{>\gamma} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{\leq\gamma} \rightarrow 0$$

de  $\mathcal{R}_K(R)$ -modules différentiels solubles en  $R$  telle que  $pt(\mathcal{M}_{\leq\gamma}) \leq \gamma$  et toutes les pentes de  $\mathcal{M}_{>\gamma}$  soient  $> \gamma$ .

*Indication de démonstration.* — On prend un représentant de  $\mathcal{M}$ , noté encore  $\mathcal{M}$ , sur une couronne  $C(]R - \varepsilon, R[)$  avec  $\varepsilon$  assez petit. On construit une suite  $\mathcal{M}_i$  de  $\mathcal{R}_K(R)$ -modules différentiels solubles en  $R$  en prenant  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$  et pour  $\mathcal{M}_{i+1}$  l'adhérence de 0 dans  $\mathcal{M}_i$  pour la topologie  $\mathcal{T}_\gamma$ . La suite est stationnaire car les modules sont libres de rang fini. On prend  $\mathcal{M}_{>\gamma} = \mathcal{M}_{i_0}$  avec  $i_0$  minimal vérifiant  $\mathcal{M}_{i_0} = \mathcal{M}_{i_0+1}$ . On déduit du théorème 4.3.1 que  $pt(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\gamma}) \leq \gamma$ . Le fait que les pentes de  $\mathcal{M}_{>\gamma}$  soient toutes  $> \gamma$  résulte du lemme qui suit.  $\square$

**LEMME 4.3.3.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ -module différentiel. Soit  $\gamma$  un réel tel que  $\{0\}$  soit dense dans  $\mathcal{M}$  pour  $\mathcal{T}_\gamma$ . Alors  $\mathcal{M}$  n'admet aucune solution non triviale dans les disques génériques  $D(t_\rho, R(\rho/R)^\gamma)$  pour  $\rho$  assez proche de  $R$ .*

#### 4.4. Pentas

On suppose ici que le corps  $K$  est localement compact et que  $R$  appartient à l'ensemble des valeurs absolues. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(R)$ -module différentiel soluble. Christol et Mebkhout déduisent de la proposition 4.1.2 que les  $\mathcal{M}_{>\gamma}$ ,  $1 \leq \gamma < pt(\mathcal{M})$ , forment une filtration décroissante de  $\mathcal{M}$  par des sous- $\mathcal{R}_K(R)$ -modules différentiels. Pour  $1 < \gamma < pt(\mathcal{M})$  on pose  $Gr_\gamma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_{>\gamma-\eta}/\mathcal{M}_{>\gamma}$  pour  $\eta$  assez petit et on dira que  $\gamma$  est une pente de  $\mathcal{M}$  si  $Gr_\gamma(\mathcal{M})$  n'est pas nul.

On dira que  $\mathcal{M}$  est purement de pente  $\gamma$ , si pour  $\varepsilon > 0$  assez petit toutes les solutions locales au point générique  $t_\rho$  sont de rayon de convergence  $R(\rho/R)^\gamma$ , pour tout  $\gamma$  dans  $]R - \varepsilon, R[$ , pour un modèle de  $\mathcal{M}$ .

On déduit alors du théorème 4.1.1 et de ce qui précède l'énoncé suivant.

**THÉORÈME 4.4.1.** — *Sous les hypothèses précédentes, soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(R)$ -module différentiel soluble en  $R$ . Les pentes de  $\mathcal{M}$  sont des nombres rationnels et si  $\gamma$  est une pente de  $\mathcal{M}$  alors  $Gr_\gamma(\mathcal{M})$  est purement de pente  $\gamma$ .*

Ainsi si  $\gamma_1 < \dots < \gamma_r$  sont les pentes de  $\mathcal{M}$  et  $m_i$  désigne le rang de  $Gr_{\gamma_i}(\mathcal{M})$ , on peut définir le polygone de Newton  $p$ -adique de  $\mathcal{M}$  en  $R$ , comme le polygone de Newton associé à la suite des couples  $(m_i, \gamma_i - 1)$ . Quand ni les exposants de  $\mathcal{M}$  en  $R$  ni leurs différences ne sont de Liouville, il résulte du théorème de l'indice 6.1, que les sommets de ce polygone sont entiers, ce qui constitue un analogue  $p$ -adique du théorème de Hasse-Arf.

## 5. Finitude de l'indice

### 5.1. Dualité et indice

On reprend les notations de 1.1. Ici  $K$  sera un sous-corps complet de  $\mathbf{C}_p$  et on omettra de faire figurer  $K$  en indice lorsque  $K = \mathbf{C}_p$ . On a un accouplement  $\mathcal{A}(r) \times \mathcal{H}^\dagger(r) \rightarrow \mathbf{C}_p$

donné par  $(f, g) \mapsto \text{Res}(fg)$ ,  $\text{Res}$  désignant l'application résidu. D'après le théorème de dualité de [M-S] cet accouplement est une dualité parfaite d'espaces topologique.

L'énoncé suivant, conséquence du théorème de dualité, est fondamental dans l'approche de Christol et Mebkhout.

**THÉORÈME 5.1.1** ([C-M1]). — *Soit  $u$  un endomorphisme  $\mathbb{C}_p$ -linéaire continu de  $\mathcal{A}(r)$ . L'endomorphisme  $u$  est à indice si et seulement si l'endomorphisme transposé  ${}^t u$  de  $\mathcal{H}^\dagger(r)$  est à indice. Si c'est le cas, les espaces vectoriels de dimension finie  $\text{Ker}({}^t u, \mathcal{H}^\dagger(r))$  et  $\text{Coker}(u, \mathcal{A}(r))$  (resp.  $\text{Ker}(u, \mathcal{A}(r))$  et  $\text{Coker}({}^t u, \mathcal{H}^\dagger(r))$ ) sont en dualité.*

La démonstration comporte une difficulté technique spécifique au  $p$ -adique (et déjà présente dans la preuve du théorème de dualité). Le théorème de Hahn-Banach n'étant valide que pour les corps maximalement complets, il ne peut être utilisé ici. Christol et Mebkhout contournent la difficulté en utilisant le théorème des homomorphismes pour les limites inductives d'espaces de Fréchet de Grothendieck [G] dont la démonstration reste valide sur les corps valués complets.

On déduit du théorème précédent l'énoncé suivant.

**THÉORÈME 5.1.2** ([C-M1]). — *Soit  $P \in \mathbb{C}_p[x, \frac{d}{dx}]$  un polynôme différentiel. Soit  $r_n$  une suite de réels positifs tendant par valeurs inférieures vers un réel  $r > 0$ . Si tous les indices  $\chi(P, \mathcal{A}(r_n))$  sont finis, alors  $\chi(P, \mathcal{A}(r))$  est fini, la suite des  $\chi(P, \mathcal{A}(r_n))$  est stationnaire et converge vers  $\chi(P, \mathcal{A}(r))$ .*

*Démonstration.* — Il est clair que l'espace vectoriel  $\text{Ker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r))$  est de dimension finie pour tout  $r$ . Par conséquent la suite  $\dim \text{Ker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n))$  est stationnaire et converge vers  $\dim \text{Ker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r))$ .

On déduit du théorème de dualité que les espaces  $\text{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n))$  sont de dimension finie. Comme  $\mathcal{H}^\dagger(r_n)$  est dense dans  $\mathcal{H}^\dagger(r_{n+1})$ , on obtient que le morphisme

$$\text{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n)) \rightarrow \text{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_{n+1}))$$

est surjectif en utilisant le théorème des homomorphismes de Grothendieck. La suite  $\dim \text{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r_n))$  est donc stationnaire et converge vers  $\dim \text{Coker}({}^t P, \mathcal{H}^\dagger(r))$ . On conclut en utilisant le théorème 5.1.1.  $\square$

*Remarque.* — Soit  $P \in \mathbb{C}_p[x, \frac{d}{dx}]$  un polynôme différentiel. On déduit de la suite exacte longue associée à

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_K(r) \rightarrow \mathcal{R}_K(r) \rightarrow \mathcal{H}_K^\dagger(r) \rightarrow 0$$

que la finitude de l'indice de  $P$  sur  $\mathcal{R}(r)$  est équivalente à la finitude de l'indice sur  $\mathcal{A}(r)$  et  $\mathcal{H}^\dagger(r)$ .

**COROLLAIRE 5.1.3** ([C-M1]). — *Soit  $P \in \mathbb{C}_p[x, \frac{d}{dx}]$  un polynôme différentiel. Soit  $r_n$  une suite de réels positifs tendant par valeurs inférieures vers un réel  $r > 0$ . Si tous les indices  $\chi(P, \mathcal{R}(r_n))$  sont nuls, alors  $\chi(P, \mathcal{R}(r))$  est nul.*

### 5.2. Indice des modules vérifiant la condition de Robba

Soit  $\alpha$  un élément de  $\mathbf{Z}_p$ . Comme dans la section 3 on note  $\mathcal{A}_\alpha$  le  $\mathcal{A}_K(\cdot|r, R[\cdot])$ -module différentiel engendré par  $x^\alpha$ . On vérifie facilement que l'indice  $\chi(\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{R}_K(R))$  est fini si et seulement si  $\alpha$  n'est pas de Liouville et qu'il est alors égal à zéro.

On déduit donc du corollaire 3.3.2 et de la remarque qui le suit l'énoncé suivant.

**THÉORÈME 5.2.1.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(\cdot|r, R[\cdot])$ -module différentiel. On suppose que  $\mathcal{M}$  vérifie la condition de Robba et que ni ses exposants ni les différences de ses exposants ne sont de Liouville. Alors l'indice  $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}_K(R))$  est nul.*

### 5.3. Le théorème de finitude

On note  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$  la limite inductive des anneaux d'éléments analytiques  $\mathcal{H}_K^\dagger(\cdot|r - \varepsilon, r[\cdot])$  définis en 3.3. C'est un sous-anneau de  $\mathcal{R}_K(r)$ . Un  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  sera dit soluble en  $r$  (resp. injectif en  $r$ ) si la dimension de l'espace de ses solutions analytiques dans le disque générique centré en  $t_r$  de rayon  $r$  est égale à son rang (resp. est égale à zéro). Remarquons que, d'après le théorème de continuité de Christol-Dwork [C-D],  $\mathcal{M}$  est soluble si et seulement si  $\mathcal{R}_K(r) \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger(r)} \mathcal{M}$  l'est.

D'après le théorème de décomposition de Dwork-Robba [D-R1], pour tout  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ -module différentiel  $\mathcal{M}$  on a une suite exacte de  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ -modules différentiels

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_{inj} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{sol} \rightarrow 0$$

avec  $\mathcal{M}_{inj}$  injectif et  $\mathcal{M}_{sol}$  soluble. D'autre part, d'après un théorème de Robba [R1], si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ -module différentiel injectif, alors pour  $\varepsilon$  positif ou nul assez petit, l'indice  $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}(r - \varepsilon))$  est bien défini et est nul.

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(r)$ -module différentiel soluble. On dira que  $\mathcal{M}$  vérifie la condition de Robba, si un représentant  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$  sur une petite couronne  $C(\cdot|r - \varepsilon, r[\cdot])$  vérifie la condition de Robba. On définit alors les exposants de  $\mathcal{M}$  par  $\mathcal{E}(\mathcal{M}, r) = \mathcal{E}(\mathcal{N}, \cdot|r - \varepsilon, r[\cdot])$ , qui est indépendant de  $\mathcal{N}$  d'après le lemme 3.2.3.

On suppose dans la suite de cette section que le corps  $K$  est localement compact et que  $r$  est une valeur absolue. Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{R}_K(r)$ -module différentiel soluble, le module  $\mathcal{M}^{\leq 1}$  vérifie la condition de Robba et on peut alors poser  $\mathcal{E}(\mathcal{M}, r) = \mathcal{E}(\mathcal{M}^{\leq 1}, r)$ . Si  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ -module différentiel, on définit les exposants de  $\mathcal{M}$  par

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}, r) = \mathcal{E}(\mathcal{R}_K(r) \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger(r)} \mathcal{M}_{sol}, r).$$

Enfin si  $P$  est un opérateur différentiel dans  $K[x][\frac{d}{dx}]$ , on définit l'ensemble des exposants de  $P$  en  $r$  comme  $\mathcal{E}(P, r) = \mathcal{E}(\mathcal{M}, r)$ , pour  $\mathcal{M}$  le  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ -module différentiel associé à  $P$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de finitude de l'indice de Christol et Mebkhout.

**THÉORÈME 5.3.1.** — *Soit  $P$  est un opérateur différentiel dans  $K[x][\frac{d}{dx}]$ , avec  $K$  un sous-corps localement compact de  $\mathbf{C}_p$ . Soit  $r > 0$  appartenant à l'ensemble des valeurs*

absolues de  $K$ . On suppose que ni les exposants de  $P$  en  $r$  ni leurs différences ne sont de Liouville. Alors les indices de  $P$  dans les anneaux  $\mathcal{R}_K(r)$  et  $\mathcal{R}(r)$  sont finis et égaux à zéro.

*Indication de démonstration.* — On va faire la démonstration de l'énoncé sur  $\mathcal{R}(r)$ , l'énoncé concernant  $\mathcal{R}_K(r)$  s'en déduisant.

Soit  $\mathcal{M}$  le  $\mathcal{E}_K^\dagger(r)$ -module différentiel associé à  $P$ . D'après le corollaire 5.1.3 il suffit de construire une suite de réels  $r_n < r$  de limite  $r$  telle que  $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}(r_n)) = 0$ . En utilisant les théorèmes de Dwork-Robba et de Robba, on se ramène au cas où  $\mathcal{M}$  est soluble. En utilisant encore le théorème de Robba et le corollaire 5.1.3 on obtient que  $\chi((\mathcal{R}_K(r) \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger(r)} \mathcal{M})_{>1}, \mathcal{R}(r))$  est nul. On est donc ramené au cas où  $\mathcal{M}$  vérifie la condition de Robba et l'énoncé résulte alors du théorème 5.2.1.  $\square$

**COROLLAIRE 5.3.2.** — *Sous les hypothèses précédentes, les indices de  $P$  dans les anneaux  $\mathcal{A}_K(r), \mathcal{H}_K^\dagger(r), \mathcal{A}(r)$  et  $\mathcal{H}^\dagger(r)$  sont finis et on a les égalités  $\chi(P, \mathcal{A}_K(r)) = -\chi(P, \mathcal{H}_K^\dagger(r))$  et  $\chi(P, \mathcal{A}(r)) = -\chi(P, \mathcal{H}^\dagger(r))$ .*

*Remarque.* — Par le lemme du vecteur cyclique, on a l'analogue du théorème 5.3.1 et du corollaire 5.3.2 pour les  $K[x][\frac{d}{dx}]$ -modules holonomes.

Le problème fondamental qui reste ouvert est celui d'avoir des critères garantissant que les hypothèses sur les exposants de  $P$  soient satisfaites. Un critère est l'existence d'une structure de Frobenius (cf. 5.4.1). Christol et Mebkhout conjecturent l'énoncé suivant d'algébricité des exposants  $p$ -adiques.

**CONJECTURE 5.3.3.** — *Si  $P$  est un opérateur différentiel dans  $\bar{\mathbf{Q}}[x][\frac{d}{dx}]$ , alors les exposants  $p$ -adiques de  $P$  en  $r$  se relèvent en des éléments de  $\bar{\mathbf{Q}}$ . De plus, quand  $r$  varie, il n'apparaît qu'un nombre fini d'éléments de  $\bar{\mathbf{Q}}$  modulo  $\mathbf{Z}$ .*

#### 5.4. Modules avec structure de Frobenius

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module différentiel. On dira que  $\mathcal{M}$  admet une structure de Frobenius d'ordre  $h$ , si  $\mathcal{M}$  est isomorphe à son image inverse par le morphisme  $x \mapsto x^{p^h}$ .

**PROPOSITION 5.4.1.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module différentiel de rang  $m$ . On suppose que  $\mathcal{M}$  vérifie la condition de Robba et admet une structure de Frobenius d'ordre  $h$ . Alors les exposants de  $\mathcal{M}$  se relèvent en des éléments de  $\frac{1}{1-p^{hm}}\mathbf{Z}$ . En particulier ils ne sont pas de Liouville, ainsi que leurs différences.*

*Démonstration.* — En effet si  $a$  est un représentant de l'exposant de  $\mathcal{M}$  dans  $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^m$ ,  $a$  et  $p^h a$  sont dans la même  $\mathfrak{G}$ -orbite. Comme le groupe symétrique est d'ordre  $m!$ , on en tire que  $a = p^{hm!}a$ .  $\square$

Si  $\mathcal{M}$  est un  $K[x, \frac{d}{dx}]$ -module différentiel on dira que  $\mathcal{M}$  admet une structure de Frobenius d'ordre  $h$  si  $\mathcal{R}_K(1) \otimes_{K[x]} \mathcal{M}$  en admet une. On peut maintenant énoncer le

théorème de finitude de l'indice pour les modules avec structure de Frobenius. En utilisant la proposition précédente, Christol et Mebkhout obtiennent, par une démonstration voisine de celle du théorème 5.3.1, le résultat suivant.

THÉORÈME 5.4.2. — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $K[x, \frac{d}{dx}]$ -module différentiel admettant une structure de Frobenius d'ordre  $h$ , avec  $K$  un sous-corps localement compact de  $\mathbf{C}_p$ . Alors les conclusions du théorème 5.3.1 et du corollaire 5.3.2 sont valides pour  $\mathcal{M}$ .*

## 6. La formule de l'indice

Dans toute la section 6 on supposera que  $K$  est un sous-corps localement compact de  $\mathbf{C}_p$ . Soit  $r$  un réel  $> 0$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}_+$ . On écrit  $I = I_+ \cap I_-$  avec  $I_+$  un intervalle contenant zéro et  $I_-$  un intervalle contenant  $\infty$ . On a la décomposition

$$\mathcal{A}_K(I) = \mathcal{A}_K(I_+) \oplus x^{-1}\mathcal{A}_K(I_-).$$

On note  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  (resp.  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ ) les projections (resp. injections) associées à cette décomposition.

Soit  $m$  un entier et  $u$  un endomorphisme de  $\mathcal{A}_K(I)^m$ . On définit les indices généralisés de  $u$  comme les indices

$$\tilde{\chi}(u, \mathcal{A}(I_+)) = \chi(\gamma^+ u \gamma_+, \mathcal{A}_K(I_+)^m)$$

et

$$\tilde{\chi}(u, x^{-1}\mathcal{A}(I_-)) = \chi(\gamma^- u \gamma_-, x^{-1}\mathcal{A}_K(I_-)^m).$$

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}_K(I)$ -module différentiel et soit  $G$  la matrice de  $x \frac{d}{dx}$  dans une base de  $\mathcal{M}$ . On peut vérifier (cf. [C-M3]) que les indices généralisés de  $x \frac{d}{dx} - G$  sont indépendants du choix de la base. On les notera  $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(I_+))$  et  $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, x^{-1}\mathcal{A}(I_-))$ . De plus ces indices généralisés sont additifs pour les suites exactes courtes. On définit de façon similaire les indices généralisés  $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(r))$  et  $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}_K^\dagger(r))$  pour les  $\mathcal{R}_K(r)$ -modules différentiels en utilisant la décomposition

$$\mathcal{R}_K(r) = \mathcal{A}_K(r) \oplus \mathcal{H}_K^\dagger(r).$$

Les démonstrations des propriétés précédentes de l'indice généralisé reposent sur le théorème des perturbations compactes. C'est pour cette raison que l'on a fait l'hypothèse que  $K$  localement compact.

On peut maintenant énoncer la formule de l'indice de Christol et Mebkhout.

THÉORÈME 6.1 ([C-M3]). — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(r)$ -module différentiel de rang  $m$  soluble en  $r$ . On suppose que  $r$  est une valeur absolue et que ni les exposants de  $\mathcal{M}$  en  $r$  ni leurs différences ne sont de Liouville. Alors  $\mathcal{M}$  admet des indices généralisés donnés par la formule*

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(r)) = -\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}_K^\dagger(r)) = \sum_{i>0} m_i(\beta_i - 1)$$

où les  $(m_i, m_i(\beta_i - 1))$  sont les sommets du polygone de Newton  $p$ -adique de  $\mathcal{M}$ .

*Indication de démonstration.* — D'après le théorème 4.3.2,  $\mathcal{M}$  est extension de  $\mathcal{M}^{\leq 1}$  par  $\mathcal{M}_{>1}$ . On déduit du corollaire 3.3.2 et de la remarque qui le suit que les indices généralisés de  $\mathcal{M}^{\leq 1}$  sont tous nuls. Par additivité de l'indice généralisé, on est ramené grâce au théorème 4.4.1 au cas où  $\mathcal{M}$  est purement de pente  $\beta$ . Par un argument de limite inductive il suffit alors de démontrer que pour  $\varepsilon$  assez petit

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(r - \varepsilon)) = -\tilde{\chi}(\mathcal{M}, x^{-1}\mathcal{A}_K(]r - \varepsilon, \infty)) = m(\beta - 1).$$

On peut alors supposer que  $R_\rho(\mathcal{M}) = r(\rho/r)^\beta$  pour  $\rho$  dans  $]r - \varepsilon, r[$ . On considère maintenant les modules  $\mathcal{N}_h$ , antécédents de Frobenius d'ordre  $h$ , introduits dans le démonstration du théorème 4.1.1 et on se ramène à vérifier que

$$\tilde{\chi}(\mathcal{N}_h, \mathcal{A}_K([0, \rho])) = -\tilde{\chi}(\mathcal{N}_h, x^{-1}\mathcal{A}_K([\rho, \infty])) = m(\beta - 1)$$

pour  $\rho$  dans  $]r_{h-1}^{p^h}, r_h^{p^h}[$ . Comme dans la preuve du théorème 4.1.1 on applique le lemme du vecteur cyclique à  $\mathcal{N}_h$ , ce qui permet de se retrouver dans la situation (2) (a) de la proposition 1.3.1. L'énoncé résulte alors du lemme suivant.  $\square$

LEMME 6.2 ([C-M3]). — Soit  $P(x, x\frac{d}{dx})$  un opérateur différentiel à coefficients dans  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$  et soit  $a$  une fonction dans  $\mathcal{A}_K(]r, R[)$ . Soit  $\rho$  dans l'intervalle  $]r, R[$  tel que  $\|P\|_{1,\rho} < \|a\|_\rho$ . Alors les indices généralisés  $\tilde{\chi}(P + a, \mathcal{A}_K([0, \rho]))$  et  $\tilde{\chi}(P + a, x^{-1}\mathcal{A}_K([\rho, \infty]))$  existent et sont donnés par

$$\tilde{\chi}(P + a, \mathcal{A}_K([0, \rho])) = -\frac{d \log^+(\|a\|_\rho)}{d \log(\rho)}(\rho)$$

et

$$\tilde{\chi}(P + a, x^{-1}\mathcal{A}_K([\rho, \infty])) = -\frac{d \log^-(\|a\|_\rho)}{d \log(\rho)}(\rho).$$

COROLLAIRE 6.3. — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(r)$ -module différentiel de rang  $m$  soluble en  $r$ . On suppose que  $r$  est une valeur absolue et que ni les exposants de  $\mathcal{M}$  en  $r$  ni leurs différences ne sont de Liouville. Alors les sommets du polygone de Newton  $p$ -adique de  $\mathcal{M}$  sont à coordonnées entières.

## 7. Application à la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer

Une application remarquable du théorème de finitude de l'indice est la preuve de la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer donnée par Mebkhout [Me]. Faute de place nous en donnons ici une présentation extrêmement succincte.

Soit  $K$  une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ . On note  $V$  l'anneau des entiers et  $k$  le corps résiduel. Soit  $A$  l'algèbre d'une variété algébrique affine  $X$  régulière et de type fini sur  $k$ . Par un théorème d'Elkik [E] il existe une  $V$ -algèbre de type fini et lisse  $\mathcal{A}$  de réduction  $A$ . Inspirés par les travaux de Dwork et par le théorème de comparaison de

Grothendieck sur la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro, Monsky et Washnitzer ont défini dans [M-W] des groupes de cohomologie  $p$ -adique  $H^i(X, V)$  à l'aide du complexe de de Rham du complété faible de  $\mathcal{A}$ . Ils ont également démontré que les groupes  $H^i(X, K) = H^i(X, V) \otimes_V K$  sont indépendants du relèvement et sont fonctoriels. (Pour les groupes  $H^i(X, V)$  il faut faire une hypothèse sur l'indice de ramification absolu.) Dans son article [Me], Mebkhout déduit du théorème de finitude de l'indice la finitude des  $K$ -espaces vectoriels  $H^i(X, K) = H^i(X, V) \otimes_V K$ . Comme il a été mentionné dans l'introduction, ce même énoncé a été également démontré par P. Berthelot [B1] en utilisant une approche toute différente basée sur les résultats de de Jong sur les altérations (cf. [B2]). L'approche de Mebkhout utilise la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules et consiste à ramener le problème de la finitude de la cohomologie de Monsky-Washnitzer à celui de la finitude de l'indice d'équations différentielles à une variable associées à des modules différentiels exponentiels de Dwork. Ces modules admettant une structure de Frobenius, on peut leur appliquer le théorème 5.4.2. Une telle approche avait été suggérée par Monsky [Mo], à la suite de sa démonstration de la finitude de la cohomologie de de Rham en caractéristique zéro, inspirée par les travaux de Dwork sur la fonction zêta des hypersurfaces [D1],[D2], [D3],[D4].

## Références

- [A] J. AX, *Zeroes of polynomial over local fields. The Galois action*, J. Algebra **15** (1970), 417–428.
- [B1] P. BERTHELOT, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, avec un appendice par A.J. De Jong, à paraître dans *Inventiones math.*
- [B2] P. BERTHELOT, *Altérations de variétés algébriques [d'après A.J. De Jong]*, Séminaire Bourbaki, exposé n°815 (1996).
- [Be] D. BERTRAND, *Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, in *Séminaire Bourbaki, année 1978/79*, exposé 538, Springer Lecture Notes **770** (1980), 228–243.
- [C1] G. CHRISTOL, *Modules différentiels et équations différentielles  $p$ -adiques*, Queen's Papers in Pure Math. **66**, Queen's University, Kingston (1983).
- [C2] G. CHRISTOL, *Systèmes différentiels  $p$ -adiques, structure de Frobenius faible*, Bull. Soc. math. France **109** (1981), 83–122.
- [C3] G. CHRISTOL, *Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers*, Astérisque **119-120** (1984), 151–168.
- [C-D] G. CHRISTOL, B. DWORK, *Modules différentiels sur des couronnes*, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), 663–701.

- [C-M1] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1545–1574.
- [C-M2] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II*, à paraître dans Annals of Math.
- [C-M3] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III*, preprint (1995).
- [C-M4] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, *Exposants p-adiques*, à paraître aux Annales de Clermont-Ferrand.
- [D1] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface*, Publ. Math. I.H.E.S. **12** (1963), 366–376.
- [D2] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface II*, Ann. of Math. **80** (1964), 227–299.
- [D3] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface III*, Ann. of Math. **83** (1966), 457–519.
- [D4] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface IV*, Ann. of Math. **90** (1969), 335–352.
- [D5] B. DWORK, *On p-adic differential equations*, Bull. Soc. math. France, Suppl., Mem. **39-40** (1974), 27–37.
- [D6] B. DWORK, *On p-adic differential equations II*, Ann. of Math. **98** (1973), 366–376.
- [D7] B. DWORK, *On p-adic differential equations III*, Inventiones math. **20** (1973), 35–45.
- [D8] B. DWORK, *On p-adic differential equations IV*, Ann. sci. Ecole norm. sup. **6** (1973), 295–316.
- [D9] B. DWORK, *On exponents of p-adic modules*, à paraître au Journal de Crelle.
- [D-G-S] B. DWORK, G. GEROTTO, F. SULLIVAN, *An introduction to G-functions*, Annals of Mathematics Studies, **133** (1994) Princeton University Press.
- [D-R1] B. DWORK, PH. ROBBA, *On ordinary linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **231** (1977), 1–46.
- [D-R2] B. DWORK, PH. ROBBA, *Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), 559–577.

- [E] R. ELKIK, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **6** (1973), 553–604.
- [G] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo (1954).
- [K] M. KASHIWARA, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Master Thesis, Tokyo, 1970, trad. anglaise Mém. Soc. Math. France **63** (1995).
- [Ka] N. KATZ, *Nilpotent connections and the Monodromy Theorem : application of a result of Turritin*, Publ. Math. I.H.E.S. **35** (1970), 175–232.
- [L] M. LAZARD, *Sur les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet*, Publ. Math. I.H.E.S. **14** (1962), 47–76.
- [M] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires*, Enseign. math. **20** (1974), 147–176.
- [Me] Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de finitude de la cohomologie  $p$ -adique d'une variété affine non singulière*, à paraître dans Amer. J. of Math.
- [Mo] P. MONSKY, *Finiteness of De Rham Cohomology*, Amer. J. of Math. **94** (1972), 237–247.
- [M-W] P. MONSKY, G. WASHNITZER, *Formal cohomology I*, Ann. of Math. **88** (1968), 51–62.
- [M-S] Y. MORITA, W. SCHIKHOF, *Duality of projective limit spaces and inductive limits over non spherical complete field*, Tohoku Math. J. **38** (1986), 387–397.
- [Ra] J.-P. RAMIS, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the A.M.S. **296** (1984).
- [R1] PH. ROBBA, *On the index of  $p$ -adic differential operators I*, Annals of Math. **101** (1975), 280–316.
- [R2] PH. ROBBA, *On the index of  $p$ -adic differential operators II*, Duke Math. J. **43** (1976), 19–31.
- [R3] PH. ROBBA, *On the index of  $p$ -adic differential operators III, applications to twisted exponential sums*, Astérisque **119-120** (1984), 191–266.
- [R4] PH. ROBBA, *Indice d'un opérateur différentiel  $p$ -adique IV. Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque*, Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 13–55.
- [R5] PH. ROBBA, *Conjectures sur les équations différentielles  $p$ -adiques*, G.E.A.U., 12e année, n°2, 8 pages (1984–85).

- [Y] P. YOUNG, *Radii of convergence and index for p-adic differential operators*,  
Trans. Am. Math. Soc. **333** (1992), 769–785.

François LOESER

Centre de Mathématiques  
Ecole Polytechnique  
F-91128 Palaiseau cedex  
URA 169 du C.N.R.S.  
loeser@math.polytechnique.fr

et

Institut de Mathématiques  
Université P. et M. Curie  
Case 247, 4 place Jussieu  
F-75252 Paris Cedex 05  
UMR 9994 du C.N.R.S.  
loeser@math.jussieu.fr

# *Astérisque*

PIERRE PANSU

**Volume, courbure et entropie**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki, exp. n° 823, p. 83-103

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_83\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__83_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**VOLUME, COURBURE ET ENTROPIE**  
[d'après G. Besson, G. Courtois et S. Gallot]

par Pierre PANSU

## 1. INTRODUCTION

1.1. Parmi toutes les métriques riemanniennes sur une variété compacte  $X$  dont la courbure sectionnelle varie entre  $-1$  et  $1$ , laquelle a le plus petit volume ? C'est M. Gromov qui, dans les années 1970, a révélé quelles richesses se cachent derrière cette question d'apparence anodine.

On appelle *volume minimal* de  $X$ , noté  $\text{MinVol}(X)$  la borne inférieure des volumes des métriques riemanniennes sur  $X$  dont la courbure varie entre  $-1$  et  $1$ .

Lorsque  $X$  est de dimension 2, son volume minimal est donné par

$$\text{MinVol}(X) = |2\pi\chi(X)|$$

où  $\chi(X)$  désigne la caractéristique d'Euler. Si  $\chi(X) \neq 0$ , le minimum est atteint exactement par les métriques à courbure constante égale à  $1$  ou  $-1$  suivant le signe de la caractéristique d'Euler. Cela résulte immédiatement de la formule de Gauss-Bonnet. Lorsque  $\chi(X) = 0$ , la borne inférieure n'est pas atteinte, mais approchée par exemple par des métriques à courbure nulle.

En dimension paire supérieure à 2, la formule de Gauss-Bonnet a une généralisation, due à Allendoerfer et Weil, qui permet d'estimer le volume en fonction de la caractéristique d'Euler et de la courbure sectionnelle. Toutefois, cette inégalité n'est pas optimale et on ne connaît pas la valeur du volume minimal de la 4-sphère (voir cependant [V]). En fait jusqu'aux travaux récents de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, le volume minimal n'était connu exactement pour aucune variété de dimension au moins 3 (à moins qu'il soit nul).

**THÉORÈME 1 [BCG2].**— Soit  $X$  une variété compacte de dimension au moins 3. Supposons que  $X$  admette une métrique riemannienne  $g_0$  à courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ . Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $X$  dont la courbure sectionnelle est partout  $\geq -1$ . Alors  $\text{Vol}(X, g) \geq \text{Vol}(X, g_0)$  et l'égalité n'a lieu que si  $g$  est isométrique à  $g_0$ .

Cet énoncé entraîne que  $g_0$  est la seule métrique à courbure sectionnelle  $-1$  sur  $X$  (à isométrie près). C'est le théorème de rigidité de G.D. Mostow, [M1].

La preuve consiste à construire une application homotope à l'identité qui diminue les volumes. On peut l'interpréter comme une version réelle du Lemme de Schwarz qui ne s'appliquerait qu'à des métriques  $g_0$  très particulières (modélées sur les espaces symétriques à courbure strictement négative, voir en 3.1). L'hypothèse sur la courbure sectionnelle de  $g$  n'intervient qu'à travers une majoration asymptotique du volume des boules.

**1.2. Définition.** Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte de revêtement universel  $\tilde{X}$ . Si  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ , on note  $B(\tilde{x}, R)$  la boule géodésique de centre  $\tilde{x}$  et de rayon  $R$  dans  $\tilde{X}$ . Alors la limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \text{Vol} B(\tilde{x}, R)$$

existe et ne dépend pas du choix de  $\tilde{x}$ . On l'appelle l'entropie volumique de la métrique  $g$ , et on la note  $h_{\text{vol}}(g)$ .

Le théorème 1 résulte immédiatement de la propriété isopérimétrique suivante, conjecturée par M. Gromov et A. Katok, qui a des conséquences très diverses.

**THÉORÈME 2 [BCG2].**— Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés compactes orientées de même dimension  $n \geq 3$ . On suppose que  $X$  admet une métrique riemannienne localement symétrique  $g_0$  de courbure strictement négative. Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $Y$  dont l'entropie volumique est égale à celle de  $g_0$  (on peut toujours se ramener à ce cas en multipliant  $g$  par une constante). Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application de degré  $d$ . Alors

$$(*) \quad \text{Vol}(g) \geq |d| \text{Vol}(g_0).$$

Si l'égalité a lieu, alors  $f$  est homotope à un revêtement isométrique.

D'après A. Katok [K], en dimension 2, sous les mêmes hypothèses, l'inégalité (\*) est vraie, et en cas d'égalité la métrique  $g$  est elle-même à courbure constante.

Ce théorème affine un résultat de M. Gromov qui a obtenu, dès la fin des années 70, l'inégalité (\*) à une constante multiplicative près. Le théorème de M. Gromov

est plus général. Il s'applique à des variétés quelconques. Le volume hyperbolique est remplacé par une sorte de volume topologique, le *volume simplicial*. Le théorème affiné repose sur des idées simples qui auront sans doute d'autres applications en géométrie riemannienne. La caractérisation de certains espaces localement symétriques fournie par le cas d'égalité a d'ores et déjà des conséquences en géométrie et au-delà.

**1.3. Organisation du texte.** Les premiers paragraphes rendent brièvement compte de l'approche de M. Gromov. Ensuite, on décrit quelques aspects de la preuve du théorème 2. Enfin, on en explique les conséquences pour une série de problèmes qui mêlent dynamique et géométrie.

## 2. VOLUME SIMPLICIAL

Le théorème 1 entraîne que, lorsqu'une métrique à courbure  $-1$  existe, son volume est un invariant différentiable. En fait, on sait depuis [G], [T] exprimer ce nombre de façon purement topologique.

**2.1. Définition** (M. Gromov). Soit  $X$  une variété compacte orientée. Sur le complexe des chaînes singulières à coefficients réels, on a une norme  $L^1$  naturelle,

$$\left\| \sum \lambda_j \sigma_j \right\| = \sum |\lambda_j|.$$

On note de la même façon la semi-norme quotient sur l'homologie réelle. On appelle *volume simplicial* de  $X$ , et on note  $\|X\|$  la norme de la classe fondamentale en homologie réelle.

Le volume simplicial fait penser au nombre minimum de simplexes d'une triangulation. Il s'en distingue, car, comme on travaille en homologie réelle, on a le droit par exemple de couvrir la variété deux fois en comptant chaque simplexe avec le coefficient  $\frac{1}{2}$ . Plus généralement,

- s'il existe une application  $f : Y \rightarrow X$  de degré  $d$ , alors  $\|Y\| \geq |d| \|X\|$ .

En particulier, si  $X$  admet des applications dans elle-même de degré  $\neq -1, 0, 1$ , alors  $\|X\| = 0$ . Le volume simplicial est donc nul pour les sphères et les tores. En revanche, il est non nul pour les variétés à courbure sectionnelle négative.

**2.2 THÉORÈME [T].-** Soit  $X$  une variété riemannienne de courbure sectionnelle  $K = -1$ , de dimension  $n$ , i.e., dont le revêtement universel est isométrique à l'espace hyperbolique  $H^n$ . Alors

$$\text{Vol}(X) = R_n \|X\|$$

où  $R_n$  est le volume d'un simplexe idéal régulier de  $H^n$ .

La constante  $R_n$  est la borne supérieure des volumes de tous les simplexes rectilignes de  $H^n$ . Étant donnés  $n + 1$  points  $x_0, \dots, x_n$  de l'espace hyperbolique  $H^n$ , le simplexe rectiligne de sommets  $x_0, \dots, x_n$  est l'application qui envoie le point du simplexe standard de coordonnées barycentriques  $p_0, \dots, p_n$  sur le barycentre de la mesure atomique  $\sum p_i \delta_{x_i}$ , i.e. le point où la fonction  $x \mapsto \sum p_i \text{dist}(x, x_i)$  atteint son minimum.

Il faut penser à  $H^n$  comme à l'intérieur d'une boule, équipé d'une métrique qui explose au bord. Lorsqu'on fait tendre ses sommets vers des points du bord, un simplexe rectiligne de  $H^n$  converge vers un simplexe dit idéal. U. Haagerup et M. Munkholm [HM] ont montré que  $R_n$  est le volume du simplexe idéal régulier, i.e. le plus symétrique.

La preuve de l'inégalité  $\text{Vol}(X) \leq R_n \|X\|$ , attribuée à W. Thurston, consiste à rectifier les simplexes de  $X$ . Redresser un simplexe singulier de  $X$ , c'est le relever à  $H^n$ , le remplacer par le simplexe rectiligne de mêmes sommets, qu'on projette dans  $X$ . Cette opération induit l'identité en homologie et montre que  $\text{Vol}(X) \leq R_n \|X\|$ .

La preuve de l'inégalité inverse  $\text{Vol}(X) \geq R_n \|X\|$ , due à M. Gromov, consiste à trianguler  $X$  par des simplexes idéaux réguliers. C'est possible en dimension 2, mais seulement rarement en dimensions supérieures. Cependant, si on admet des simplexes idéaux et des combinaisons de tels simplexes à coefficients mesures dans les calculs d'homologie singulière, alors la classe fondamentale de  $X$  est représentée par la chaîne étalée  $c$  suivante. On fixe un simplexe idéal régulier  $\sigma$ . Normalisons la mesure de Haar sur le groupe des isométries de  $H^n$  de sorte que la mesure de l'ensemble des isométries qui envoient un point fixé dans  $\sigma$  soit 1. Si  $\gamma$  est une isométrie de  $H^n$ , on note  $\text{signe}(\gamma)$  son effet sur l'orientation. On pose  $c = \int \text{signe}(\gamma) \pi(\gamma\sigma) d\gamma$  où on intègre sur l'espace compact  $\text{Isom}(H^n)/\pi_1(X)$ . Alors la norme  $L^1$  de  $c$  est exactement  $(R_n)^{-1} \text{Vol}(X)$ .

**2.3. Rigidité à la Mostow, d'après M. Gromov.** Soient  $X, Y$  des variétés compactes de dimension  $n \geq 3$  revêtues par l'espace hyperbolique  $H^n$ . On va montrer que toute équivalence d'homotopie  $f : Y \rightarrow X$  est homotope à une isométrie. Les groupes  $\pi_1(X)$  et  $\pi_1(Y)$  agissent par isométries sur  $H^n$  et par transformations conformes sur le bord  $\partial H^n$  de la boule. Une orbite de  $\pi_1(X)$  (resp.  $\pi_1(Y)$ ) dans  $H^n$  est un ensemble discret qui s'accumule en tout point du bord. Une équivalence d'homotopie  $f : Y \rightarrow X$  induit une bijection entre ces ensembles discrets.

**2.4 FAIT .-** Toute équivalence d'homotopie  $f : Y \rightarrow X$  se relève à  $H^n$ , et se prolonge par continuité en un homéomorphisme  $\partial f$  du bord de la boule.

Par conséquent,  $f$  agit sur les triangulations idéales. Supposons d'abord que  $X$  admette une triangulation par des simplexes idéaux réguliers  $\sigma_i$ . Alors  $\pm[X]$  est représenté par les chaînes singulières  $\sum \sigma_i$  et  $\sum f(\sigma_i)$ . D'après le paragraphe précédent, le nombre de simplexes est  $\|X\|$ . On a

$$\text{Vol}(X) = \sum \text{Vol}(f(\sigma_i)) \leq R_n \|X\|.$$

L'égalité 2.2 entraîne que  $\text{Vol}(f(\sigma_i)) = R_n$ , i.e. que  $f$  envoie des simplexes idéaux réguliers qui pavent  $H^n$  sur des simplexes idéaux réguliers. En l'absence de véritable triangulation, on remplace le représentant fini  $\sum \sigma_i$  par la chaîne étalée  $c$  et on conclut que  $f$  envoie presque tout simplexe idéal régulier sur un simplexe idéal régulier. On en déduit aisément que, sur le bord  $\partial H^n$ ,  $\partial f$  coïncide avec une isométrie. Celle-ci induit une isométrie de  $Y$  sur  $X$  homotope à  $f$ .

**2.5. Remarques.** Par cette méthode, W. Thurston a pu étendre le théorème de rigidité de Mostow à la situation  $f : Y \rightarrow X$  où  $X$  et  $Y$  sont des variétés hyperboliques de volume fini et  $f$  une application de degré non nul. Cette généralisation joue un rôle crucial dans la preuve du fait que les volumes des variétés hyperboliques de dimension 3 sont bien ordonnés, voir [T], [Gb]. À ce propos, la question de savoir quelle est la variété hyperbolique compacte de dimension 3 de plus petit volume est toujours ouverte, voir [ACCS] et les références qu'il contient.

Il est envisageable que la méthode de M. Gromov s'étende aux autres espaces symétriques. En effet, pour les quotients d'un même espace symétrique, le volume simplicial est proportionnel au volume (mais le coefficient de proportionnalité n'est connu que pour l'espace hyperbolique), [G].

En tout cas, D. Toledo a su en tirer un résultat de rigidité pour les actions isométriques de groupes de surfaces dans l'espace hyperbolique complexe  $\mathbf{CH}^m$ , [To].

### 3. VOLUME MINIMAL

#### 3.1. Entropie volumique, exemples

Si  $X$  est compacte, simplement connexe, le volume des boules est borné, donc l'entropie volumique est nulle. Plus généralement, l'entropie volumique de  $X$  est non nulle si et seulement si le groupe fondamental  $\pi_1(X)$  est à croissance exponentielle.

En coordonnées polaires, la métrique de  $H^n$  s'écrit  $dr^2 + (\text{sh } r)^2 d\theta^2$  où  $d\theta^2$  désigne la métrique canonique de la sphère  $S^{n-1}$ . Par conséquent, le volume de la boule de

rayon  $R$  est de l'ordre de  $e^{(n-1)r}$  et l'entropie volumique de tout quotient compact de  $H^n$  vaut  $n - 1$ .

Les espaces symétriques à courbure strictement positive sont les sphères et les espaces projectifs  $KP^m$  sur les corps  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$  et  $\mathbf{Ca}$  ( $m = 2$  seulement pour les octaves de Cayley  $\mathbf{Ca}$ ). De même, il y a un espace symétrique à courbure strictement négative  $KH^m$  pour chaque  $m$ , de sorte que  $H^n = \mathbf{R}H^n$ . Lorsque  $K \neq \mathbf{R}$ , chaque géodésique de  $KH^m$  est contenue dans une  $K$ -droite, sous-variété totalement géodésique de dimension  $k = \dim_{\mathbf{R}} K$  dans laquelle la croissance du volume est deux fois plus rapide. Par conséquent, l'entropie volumique de tout quotient compact de  $KH^m$  est  $k(m - 1) + 2(k - 1) = km + k - 2$ .

Enfin, lorsque la courbure est bornée inférieurement, on dispose d'un théorème de comparaison.

**3.2 THÉORÈME DE COMPARAISON (R. Bishop).**— *Dans une variété riemannienne  $X$  dont la courbure de Ricci est plus grande que celle de l'espace hyperbolique (c'est le cas en particulier si la courbure sectionnelle satisfait  $K \geq -1$ ), le volume des boules est inférieur à celui des boules hyperboliques de même rayon. En particulier,  $h_{vol}(X) \leq \dim X - 1$ .*

### 3.3. Volume simplicial et volume minimal

Volume simplicial et volume minimal sont des invariants de nature assez différente. Dans une certaine mesure, le volume simplicial ne dépend que du groupe fondamental  $\pi$  (précisément, de l'image de la classe fondamentale par l'application classifiante vers l'espace  $K(\pi, 1)$ ). Par exemple, il est nul pour toute variété simplement connexe, ou plus généralement si le groupe fondamental est moyennable. Toutefois, la classe des variétés de volume simplicial nul est difficile à cerner.

En revanche, toute variété qui possède un nombre caractéristique non nul (par exemple une sphère de dimension paire) a un volume minimal non nul. Voici des conditions suffisantes pour que le volume minimal de  $X$  soit nul :

- $X$  admet une action localement libre d'un tore ;
- $X$  possède des actions locales de tores (sur les ouverts d'un recouvrement) qui commutent sur les intersections ;
- un revêtement fini de  $X$  admet une action localement libre d'un tore.

La notion de  $F$ -structure de rang positif, due à J. Cheeger et M. Gromov, généralise ces trois familles d'exemples. C'est une condition nécessaire pour que  $\text{MinVol}(X) = 0$ , qui n'est pas si éloignée d'être suffisante, voir [CG].

**3.4. L'inégalité de M. Gromov**

Le résultat principal de [G] est l'inégalité suivante.

**3.5 THÉORÈME [G].**—*Il existe une constante  $c(n)$  telle que, pour tout variété riemannienne compacte  $X$  de dimension  $n$ .*

$$\|X\| \leq c(n)h_{vol}(X)^n \text{Vol}(X).$$

La constante  $c(n)$  n'est pas la meilleure possible. Avec l'inégalité 3.2, il vient

**3.6 COROLLAIRE .**— *Pour toute variété compacte  $X$  de dimension  $n$ ,*

$$\|X\| \leq (n-1)^n c(n) \text{MinVol}(X).$$

**3.7. Preuve du théorème 3.5.** Considérons l'espace  $\mathcal{M}$  des mesures de probabilité sur le revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$ . C'est une sorte de simplexe de dimension infinie. Le groupe fondamental  $\pi$  agit librement sur  $\mathcal{M}$ , et on peut penser au quotient  $\mathcal{M}/\pi$  comme à une réalisation du  $K(\pi, 1)$ . Le choix d'une famille de mesures de probabilité sur  $\tilde{X}$ , paramétrée par  $\tilde{X}$  et équivariante, définit une application classifiante  $X \rightarrow \mathcal{M}/\pi$ . Alors le volume simplicial est relié à la borne inférieure des volumes de ces applications classifiantes.

Pour le majorer, il suffit de construire une famille de mesures particulière. Etant donné une métrique riemannienne  $g$  sur  $X$ , un réel  $s > h_{vol}(g)$  et un point  $x \in \tilde{X}$ , l'intégrale

$$I(s, x) = \int_{\tilde{X}} e^{-s \text{dist}(x', x)} d_g x'$$

est finie. On pose

$$\mu_{s,x} = \frac{1}{I(s, x)} e^{-s \text{dist}(x', x)} d_g x'$$

et on obtient une majoration du volume simplicial en  $c(n)s^n \text{Vol}(X)$  avec une mauvaise constante  $c(n)$ .

**4. PREUVE DU THÉORÈME 2.**

On va d'abord se placer dans le cas où les variétés  $X$  et  $Y$  sont toutes les deux à courbure constante et l'application  $f : Y \rightarrow X$  est une équivalence d'homotopie. Comme en 2.2, l'idée est de rectifier des applications en utilisant la notion de barycentre, de majorer optimalement le volume de l'application rectifiée.

**4.1. Barycentre d'une mesure sur le bord de  $H^n$ .** Si  $\nu$  est une mesure finie sur un espace affine euclidien, dont le support est compact, son centre de gravité est le point où la fonction  $x \mapsto \int_{H^n} \text{dist}(x, z)^2 d\nu(z)$  atteint son minimum. Cette construction a été généralisée par E. Cartan aux variétés riemanniennes simplement connexes à courbure négative ou nulle, [C], note III.

On va utiliser une variante de cette notion. Si  $\nu$  est une mesure finie sur  $H^n$ , dont le support est compact mais n'est pas contenu dans une géodésique, la fonction  $x \mapsto \int_{H^n} \text{dist}(x, z) d\nu(z)$  est propre et strictement convexe, donc elle atteint son minimum en un point  $y$  unique appelé le *barycentre* de  $\nu$ .

Lorsque  $z$  tend vers l'infini en convergeant vers un point  $\theta$  de  $\partial H^n$ , la fonction distance à  $z$  convenablement normalisée converge. Fixons une fois pour toutes une origine  $O$ . La limite

$$B_\theta(x) = \lim_{z \rightarrow \theta} d(x, z) - d(O, z)$$

existe, et s'appelle *fonction de Busemann centrée en  $\theta$ , normalisée en  $O$* . Changer d'origine ajoute à chaque fonction de Busemann une fonction constante.

La notion de barycentre d'une mesure à support compact dans  $H^n$  se prolonge aux mesures sur  $\partial H^n$  comme suit.

**4.2 FAIT .-** *Fixons une origine  $O \in H^n$ . Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\partial H^n$  dont le support a plus de 2 points. Alors la fonction strictement convexe*

$$\beta_\nu(x) = \int_{\partial H^n} B_\theta d\nu(\theta)$$

*atteint son minimum en un unique point, indépendant du choix de  $O$  et appelé barycentre de  $\nu$ .*

**4.3. L'extension barycentrique.** Soient  $X, Y$  des variétés riemanniennes compactes de dimension  $n \geq 3$  dont les revêtements universels  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont isométriques à l'espace hyperbolique  $H^n$ , et  $f : Y \rightarrow X$  une équivalence d'homotopie. On va déformer  $f$  en une isométrie. On utilise le relèvement de  $f$  au revêtement universel et son prolongement au bord  $\partial f : \partial \tilde{Y} \rightarrow \partial \tilde{X}$ , 2.4.

Déformer  $f$ , c'est construire de façon naturelle sous les isométries de  $H^n$  une autre extension de  $\partial f$ . On est tenté de résoudre un problème de Dirichlet, i.e. chercher un prolongement qui minimise une fonctionnelle. Il existe une extension harmonique, [ES], qui a été utilisée pour prouver la rigidité à la Mostow pour tous les espaces symétriques sauf précisément l'espace hyperbolique, [S], [MSY].

G. Besson, G. Courtois et S. Gallot utilisent une idée plus fruste, qui remonte à H. Furstenberg, [Fu].

**4.4. Définition.** Soit  $\partial f : \partial\tilde{Y} \rightarrow \partial\tilde{X}$  un homéomorphisme. À tout point  $y \in \tilde{Y}$  correspond une mesure de probabilité  $\mu_y$  sur  $\partial\tilde{Y}$ , l'unique mesure invariante par les rotations qui fixent  $y$ . On transporte  $\mu_y$  à l'aide de  $\partial f$ , et on note  $F(y)$  le barycentre de la mesure  $(\partial f)_*\mu_y$ . On l'appelle *extension barycentrique* de  $\partial f$ .

A. Douady et C. Earle ont utilisé l'extension barycentrique en dimension 2. Dans [DE], ils montrent que l'extension barycentrique d'un homéomorphisme quasimétrique du cercle est un difféomorphisme quasiconforme du disque. Ce n'est plus vrai en dimensions supérieures à 2. En revanche, une propriété miraculeuse apparaît.

**PROPOSITION 3.** – Soit  $\partial f : \partial\tilde{Y} \rightarrow \partial\tilde{X}$  un homéomorphisme. Son extension barycentrique  $F : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  diminue le volume. Si en un point  $y \in \tilde{Y}$ ,  $d_y F$  préserve le volume, alors  $d_y F$  est une isométrie.

**4.5. Preuve de la proposition 3.** On suit [BCG3]. Fixons des origines dans  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$ . On notera  $B_{\theta'}^X$  (resp.  $B_{\theta}^Y$ ) les fonctions de Busemann dans  $\tilde{X}$  (resp.  $\tilde{Y}$ ). Pour  $x \in \tilde{X}$  et  $y \in \tilde{Y}$ , on pose

$$\beta(x, y) = \beta_y(x) = \int_{\partial\tilde{Y}} B_{\partial f(\theta)}^X(x) d\mu_y(\theta).$$

Par définition,  $F(y)$  est le point où  $\beta_y$  atteint son minimum. Il est caractérisé par l'équation implicite

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}(y, F(y)) = 0.$$

En dérivant cette équation, on trouve

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}(y, F(y)) \circ d_y F = -\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}(y, F(y)).$$

On calcule  $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ . En courbure  $-1$ , on connaît explicitement la mesure  $\mu_y$ , sa densité par rapport à  $\mu_O$  est la fonction

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_O}(\theta) = e^{-(n-1)B_{\theta}(y)}.$$

Il vient

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = -(n-1) \int_{\partial\tilde{Y}} B_{\partial f(\theta)}^X(x) d_y B_{\theta}^Y d\mu_y(\theta)$$

puis

$$-\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} = (n-1) \int_{\partial \tilde{Y}} d_{F(y)} B_{\partial f(\theta)}^X \otimes d_y B_\theta^Y d\mu_y(\theta).$$

C'est le produit scalaire  $L^2$  de deux fonctions sur  $\partial \tilde{Y}$ , à valeurs dans  $T_{F(y)}^* \tilde{X}$  et  $T_y^* \tilde{Y}$  respectivement. On définit donc  $\phi : T_y \tilde{Y} \rightarrow L^2(\partial \tilde{Y}, \mu_y)$  et  $\psi : T_{F(y)} \tilde{X} \rightarrow L^2(\partial \tilde{Y}, \mu_y)$  par

$$\phi(v) = (\theta \mapsto \sqrt{n} d_y B_\theta^Y(v)) \quad \text{et} \quad \psi(u) = (\theta \mapsto \sqrt{n} d_{F(y)} B_{\partial f(\theta)}^X(u)),$$

de sorte que

$$-\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} = \frac{n-1}{n} \langle \phi, \psi \rangle.$$

Le gradient d'une fonction de Busemann est un champ de vecteurs unitaire. Il en résulte que

$$\text{tr}(\psi^* \psi) = n \int_{\partial \tilde{Y}} \|d_{F(y)} B_{\partial f(\theta)}^X\|^2 d\mu_y(\theta) = n.$$

L'application  $\phi$  satisfait même plus :  $\phi^* \phi = 1$  et  $\phi$  est une injection isométrique.

Enfin, on calcule la forme quadratique  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$  sur  $T_{F(y)} \tilde{X}$ . En courbure  $-1$ , la dérivée seconde en  $x$  d'une fonction de Busemann centrée en  $\theta'$  est nulle le long de la géodésique de  $x$  à  $\theta$  et constante (égale à la métrique) dans les directions orthogonales, autrement dit,

$$d^2 B_{\theta'} = \langle \cdot, \cdot \rangle - dB_{\theta'} \odot dB_{\theta'}$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = \int_{\partial \tilde{Y}} d_{F(y)}^2 B_{\partial f(\theta)}^X d\mu_y(\theta) = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} - \frac{1}{n} \langle \psi, \psi \rangle.$$

L'équation qui détermine  $dF$  devient

$$(1 - \frac{1}{n} \psi^* \psi) dF = \frac{n-1}{n} \psi^* \phi.$$

Notons  $H = \frac{1}{n} \psi^* \psi$ . Comme  $\phi$  est isométrique, l'opérateur autoadjoint  $\phi \phi^*$  sur  $L^2(\partial \tilde{Y})$  satisfait  $\phi \phi^* \leq 1$  donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 dF(dF)^* &= (1-H)^{-1} \psi^* \phi \phi^* \psi (1-H)^{-1} \\ &\leq (1-H)^{-1} \psi^* \psi (1-H)^{-1} = n(1-H)^{-1} H (1-H)^{-1}. \end{aligned}$$

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $H$ . On conclut que le jacobien  $J_F$  est au plus égal à  $(\frac{n-1}{\sqrt{n}})^n \prod \sqrt{\lambda_i} / (1-\lambda_i)$ . Ne pas oublier qu'on a  $\sum \lambda_i = \frac{1}{n} \text{tr} \psi^* \psi = 1$ . Le lemme suivant est élémentaire.

LEMME 4. – Soient  $n$  un entier,  $n \geq 3$ , et  $\alpha$  un réel,  $1 < \alpha \leq n - 1$ . Sur le domaine de  $\mathbf{R}^n$  défini par les inéquations  $0 < \lambda_i < 1$  et  $\sum \lambda_i \leq 1$ , la fonction  $\prod \lambda_i / (1 - \lambda_i)^\alpha$  atteint un maximum absolu strict en  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ .

Cela prouve que  $J_F \leq 1$  en tout point, et que l'égalité  $J_F(y) = 1$  entraîne que la différentielle  $d_x F$  est une isométrie. Ceci achève la preuve du théorème 2 pour une équivalence d'homotopie entre variétés hyperboliques.

**4.6. Preuve du théorème 2, cas général.** Lorsque l'espace d'arrivée  $\tilde{X}$  est l'un des espaces symétriques  $\mathbf{KH}^m$ , l'expression de la dérivée seconde des fonctions de Busemann change. Par exemple, lorsque  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ , le terme  $1 - H$  est remplacé par  $1 - H - JHJ$  où  $J$  est la structure complexe de l'espace tangent. Toutefois, l'estimation du jacobien, grâce à une propriété de convexité, se ramène à nouveau au lemme 4, voir [BCG2].

Si la source  $\tilde{Y}$  est à courbure négative variable, on peut encore construire une famille équivariante naturelle sous les isométries de mesures de probabilité  $y \mapsto \mu_y$  sur le bord  $\partial\tilde{Y}$  qui satisfont

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_O}(\theta) = e^{-hB_\theta(y)},$$

où  $h = h_{vol}(Y)$ . Il s'agit des mesures dites de Bowen-Margulis ou de Patterson-Sullivan obtenues comme suit. On prend n'importe quelle limite faible des mesures  $\mu_{s,y}$  de 3.7, lorsque  $s$  tend vers  $h$ . Comme les intégrales  $I(s, y)$  tendent vers l'infini, toute limite faible est concentrée sur le bord  $\partial\tilde{Y}$ .

Enfin, pourquoi passer à la limite ? Soit  $F_s(y)$  le barycentre de la mesure  $f_*\mu_{s,y}$ . On peut majorer directement le jacobien de  $F_s$ , et cela permet d'étendre la méthode à des variétés  $Y$  et des applications  $f$  quelconques.

## 5. VOLUME SPHÉRIQUE

On donne un aperçu de la preuve initiale de [BCG2]. Elle met en valeur le lien avec le volume simplicial et permet de comprendre ce qui se passe en dimension 2.

Soit  $X$  une variété compacte orientée. Soit  $S_+$  l'ensemble des mesures de probabilité sur le revêtement universel  $\tilde{X}$  qui ont une densité lisse par rapport à la mesure de Lebesgue. On munit  $S_+$  d'une structure de variété riemannienne de dimension infinie comme suit. On fixe une forme volume  $\omega$  sur  $X$ , on la relève à  $\tilde{X}$  et on écrit toute mesure  $\mu \in S_+$  sous la forme  $\mu = \Phi^2\omega$  avec  $\Phi > 0$ .  $S_+$  devient un sous-ensemble de l'espace de Hilbert  $L^2(\tilde{X}, \omega)$ , on le munit de la métrique riemannienne induite.

Comme le groupe  $\pi_1(X)$  agit isométriquement sur  $S_+$ , on obtient sur l'espace total du fibré plat  $S_+X \rightarrow X$  une métrique riemannienne dégénérée dans la direction de  $X$ . À isométrie près, elle ne dépend pas du choix de  $\omega$ . La fibration  $S_+X \rightarrow X$  est une équivalence d'homotopie, donc on peut voir la classe fondamentale de  $X$  comme une classe d'homologie  $[X]_s$  de  $S_+X$ .

**5.1. Définition** [BCG1]. Le *volume sphérique* de  $X$ , noté  $\text{Sphere Vol}(X)$ , est la borne inférieure des volumes des cycles de  $S_+X$  qui représentent la classe  $[X]_s$ .

Cette définition est inspirée de la caractérisation du volume simplicial mentionnée en 3.7. On remplace simplement la norme  $L^1$  sur l'espace des mesures par une norme  $L^2$ . Ainsi, le volume sphérique est une variante du volume simplicial adaptée au problème d'améliorer l'inégalité 3.5.

**5.2. Majoration du volume sphérique.** Il suffit d'exhiber des cycles explicites qui représentent  $[X]_s$ , par exemple, des sections  $X \rightarrow S_+X$ .

PROPOSITION 5 .- Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte orientée de dimension  $n$ . On a

$$\text{Sphere Vol}(X) \leq (4n)^{-n/2} h_{\text{vol}}(g)^n \text{Vol}(g).$$

En effet, soit  $s > h_{\text{vol}}(g)$  et soit  $x \mapsto \mu_{s,x}$  la famille de mesures introduite en 3.7. L'image réciproque  $g_s$  de la métrique de  $S_+X$  par la section  $\sigma_s : X \rightarrow S_+X$  correspondante satisfait  $\text{tr}_g(g_s) \leq \frac{s^2}{4}$  donc son volume est au plus  $(4n)^{-n/2} s^n$ .

**5.3. Minoration du volume sphérique.** Lorsque la métrique  $g$  est localement symétrique à courbure strictement négative, l'inégalité  $\text{tr}_g(g_s) \leq \frac{s^2}{4}$  de 5.2 est asymptotiquement une égalité lorsque  $s$  tend vers l'entropie volumique. Cependant, ceci est loin de prouver que les sections  $\sigma_s$  minimisent asymptotiquement le volume dans leur classe d'homologie.

THÉORÈME 6 [BCG1].- Soit  $(X, g_0)$  une variété riemannienne compacte orientée localement symétrique à courbure négative. Alors

$$\text{Sphere Vol}(X) = (4n)^{-n/2} h_{\text{vol}}(g_0)^n \text{Vol}(g_0).$$

#### 5.4. Preuve du théorème 6.

Première étape. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\tilde{X}$ . La convolution avec le noyau de la chaleur définit un semi-groupe  $\mu \mapsto \mu_t$  de transformations de  $S_+$  qui

diminue le volume en dimension  $n$ . Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\mu_t$  converge vers une mesure  $\mu_\infty$  concentrée sur le bord  $\partial\tilde{X}$  (c'est la convolée avec le noyau de Poisson). Par conséquent, le problème est déplacé dans l'espace  $B_+X$  où  $B_+$  est l'ensemble des mesures de probabilité sur le bord  $\partial\tilde{X}$  qui ont une densité lisse par rapport à la mesure de Lebesgue.

Deuxième étape. L'application qui à une mesure sur  $B_+$  associe son barycentre dans  $\tilde{X}$  définit une seconde projection  $b : B_+X \rightarrow X$ . À une constante de normalisation près,  $b$  diminue le volume. C'est essentiellement ce qu'on a démontré en 4.5. Par conséquent, la section  $\sigma_0 : X \rightarrow B_+X$  définie par la famille de mesures  $\mu_x$  de 4.4 a un volume minimum dans sa classe d'homologie.

On peut formuler cet argument au moyen de calibrations. Si  $\omega_0$  est la forme volume riemannienne de  $X$ , posons  $\omega = (4n)^{-n/2} h_{vol}(g_0)^n b^* \omega_0$ . C'est une  $n$ -forme différentielle sur  $B_+X$  qui a les propriétés suivantes :

- $\omega$  est fermée ;
- sur une base orthonormée de tout espace tangent à la section  $\sigma_0$ , elle vaut 1 ;
- sur toute autre famille orthonormée de  $n$  vecteurs tangents à  $B_+X$ , elle prend une valeur inférieure ou égale à 1.

On dit que  $\omega$  calibre  $\sigma_0$ . Cela suffit pour montrer, au moyen de la formule de Stokes, que  $\sigma_0$  minimise le volume.

En dimension 2, l'application  $b$  ne diminue pas le volume. On doit trouver une autre calibration. L'espace  $B_+$  peut être vu comme une orbite coadjointe du groupe des difféomorphismes du cercle. Il porte une structure complexe (ainsi que  $B_+X$ ) pour laquelle la section  $\sigma_0$  est holomorphe. Sa métrique est kählérienne. La forme de Kähler détermine une 2-forme fermée sur  $B_+X$  dégénérée seulement dans la direction de  $X$ . On vérifie qu'elle calibre  $\sigma_0$ , mais aussi toutes les sections associées à d'autres métriques à courbure  $-1$  sur  $X$ .

## 6. RIGIDITÉ DU FLOT GÉODÉSIQUE

Le théorème 2 caractérise les métriques localement symétriques par une relation entre leur volume et leur entropie volumique. Ces deux quantités ne dépendent que du flot géodésique. Par conséquent, on peut reconnaître à son flot géodésique qu'une métrique est localement symétrique.

**6.1. Le flot géodésique.** Soit  $X$  une variété riemannienne. Une géodésique dans  $X$  est une courbe qui réalise le plus court chemin entre deux de ses points suffisamment proches. Les géodésiques parcourues à vitesse constante sont caractérisées par

une équation différentielle du second ordre. Autrement dit, une position  $x$  et une vitesse initiale (unitaire)  $u$  déterminent une géodésique  $c$  unique, parcourue à vitesse 1. Posons  $\phi_t(x, u) = (c(t), c'(t))$ . On obtient ainsi un groupe à un paramètre  $\phi_t$  de difféomorphismes du fibré  $UX$  des vecteurs tangents unitaires, appelé *flot géodésique*.

On considère que deux flots  $\phi_t$  et  $\psi_t$  sont indistinguables s'ils sont  $C^1$ -conjugués, i.e. s'il existe un difféomorphisme  $F$  tel que  $F \circ \phi_t = \psi_t \circ F$ .

Le problème de rigidité est un problème inverse : dans quelle mesure le flot géodésique détermine-t-il la métrique ?

**6.2 L'entropie topologique.** Lorsque  $X$  est une variété riemannienne compacte, son entropie volumique est intimement liée à un invariant du flot géodésique, son *entropie topologique*. Celle-ci mesure la complexité des orbites au moyen du volume de l'espace des morceaux d'orbites de longueur donnée.

**6.3 Définition.** Soit  $M$  un espace métrique compact,  $\Phi_t$  un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de  $M$ . Sur l'espace  $M_T$  des morceaux d'orbites de longueur  $T$  (qui s'identifie à  $M$ ), on a une distance naturelle

$$d_T(m_1, m_2) = \sup\{d(\Phi_t(m_1), \Phi_t(m_2)) ; 0 \leq t \leq T\}.$$

Fixons  $\delta > 0$  et définissons le "volume"  $\text{Vol}_\delta(M_T)$  comme le nombre minimum de boules de rayon  $\delta$  nécessaire pour couvrir  $M_T$ . Ce nombre croît souvent exponentiellement, avec un exposant

$$h_\delta = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \text{Vol}_\delta(M_T).$$

L'entropie topologique du flot  $\Phi_t$  est la limite de  $h_\delta$  quand  $\delta$  tend vers 0,

$$h_{top}(\Phi_t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} h_\delta.$$

Elle ne dépend pas de la distance choisie sur  $M$ . Par conséquent, l'entropie topologique est un invariant de conjugaison  $C^0$  (i.e. par des homéomorphismes).

Lorsque  $M$  est le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne compacte, et  $\phi_t$  le flot géodésique, l'espace  $M_T$  ressemble à une boule de rayon  $T$  du revêtement universel. La comparaison précise est due à E.I. Dinaburg et A. Manning.

**6.4 THÉORÈME [D], [Ma].**— Soit  $X$  une variété riemannienne compacte, de flot géodésique  $\phi_t$ . Alors  $h_{top}(\phi_t) \geq h_{vol}(X)$ . Si de plus la courbure de  $X$  est négative ou nulle,  $h_{top}(\phi_t) = h_{vol}(X)$ .

**6.5. Rigidité des flots géodésiques localement symétriques.** Certains flots géodésiques ne sont pas rigides. Il existe une grande famille de métriques sur la 2-sphère qui ont le même flot géodésique que la métrique canonique, les surfaces de Zoll, voir [B1]. En revanche, il semble que les flots géodésiques en courbure négative ou nulle soient plutôt rigides.

**COROLLAIRE 7.**— Soient  $X$  et  $Y$  des variétés riemanniennes compactes dont les flots géodésiques sont  $C^1$ -conjugués. On suppose que la métrique de  $X$  est localement symétrique à courbure strictement négative. Alors les métriques de  $X$  et  $Y$  sont isométriques.

On montre d'abord, suivant [Fo] et [CK], que  $\text{Vol}(X) = \text{Vol}(Y)$ . En fait, le volume s'interprète comme une classe caractéristique transverse au feuilletage de dimension 1 défini par le flot. Ensuite on montre que  $X$  et  $Y$  ont même type d'homotopie. Enfin, d'après le théorème 2,

$$h_{top}(Y)^n \text{Vol}(Y) \geq h_{vol}(Y)^n \text{Vol}(Y) \geq h_{vol}(X)^n \text{Vol}(X) = h_{top}(X)^n \text{Vol}(X).$$

Comme l'entropie topologique et le volume sont conservés, le cas d'égalité du théorème 2 est réalisé, donc  $X$  et  $Y$  sont isométriques.

**6.6. Feuilletage stable.** Il y a des situations naturelles où l'on rencontre le problème de rigidité du flot géodésique. La question de la différentiabilité du feuilletage stable en est une. On rencontrera une autre situation au paragraphe 8.

Soit  $X$  une variété à courbure sectionnelle strictement négative. Pour tout point  $p = (x, u)$  du fibré unitaire tangent  $UX$ , l'ensemble des points  $p' \in UX$  tels que la distance de  $\phi_t(p')$  à  $\phi_t(p)$  tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  est une sous-variété de  $UX$ . Ces variétés stables feuilletent  $UX$  (leurs projections dans  $X$  sont des surfaces de niveau de fonctions de Busemann). Le feuilletage stable est continu. On pense qu'en général il n'est pas de classe  $C^2$ . Un beau théorème de Y. Benoist, F. Labourie et P. Foulon affirme que si une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative a un feuilletage stable de classe  $C^\infty$ , alors son flot géodésique est  $C^\infty$ -conjugué à celui d'un espace localement symétrique, [BFL]. Il vient

**COROLLAIRE 8.**— Soit  $X$  une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative. Si son feuilletage stable est de classe  $C^\infty$ , alors la métrique de  $X$  est localement symétrique.

Cette propriété persiste en dimension 2. Dans ce cas, elle est due à E. Ghys [Gh], qui demande seulement que le feuilletage soit de classe  $C^2$ .

## 7. MÉTRIQUES D'EINSTEIN

Les équations d'Einstein sont des conditions linéaires sur le tenseur de courbure d'une métrique (pseudo)-riemannienne. Une métrique est d'Einstein si la courbure de Ricci, trace du tenseur de courbure de Riemann dans une direction, est constante. Cela signifie que, au second ordre, la croissance du volume est la même dans toutes les directions. En dimension 2 ou 3, toute métrique riemannienne d'Einstein est à courbure constante, donc localement isométrique à un espace modèle (sphère, espace euclidien ou espace hyperbolique). Ce n'est plus vrai en dimension 4. Dans cette dimension, la question de l'existence d'une métrique riemannienne d'Einstein change de nature. On connaît peu de conditions nécessaires. Toutes reposent sur les formules intégrales pour la caractéristique d'Euler  $\chi(X)$  et la signature  $\tau(X)$ . La plus connue est due à J. Thorpe et N. Hitchin.

**7.1 THÉORÈME** (voir [B2]).— *Si une variété compacte orientée  $X$  de dimension 4 porte une métrique riemannienne d'Einstein, alors  $\chi(X) \geq \frac{3}{2}\tau(X)$ . En cas d'égalité, la métrique est plate ou localement kählérienne et de courbure de Ricci nulle.*

Il y a pourtant des conditions nécessaires qui ne s'expriment pas seulement par des relations numériques. Voici un résultat récent d'A. Sambusetti.

**7.2 THÉORÈME** [Sa].— *Pour toute variété compacte  $X$  de dimension 4, il existe une variété compacte  $Y$  de dimension 4 qui a même caractéristique d'Euler et même signature que  $X$ , et qui ne porte aucune métrique d'Einstein.*

Voici un exemple qui montre comment un tel énoncé peut résulter du théorème 2. Soit  $X$  une variété hyperbolique compacte orientée de dimension 4, soit  $Y = X \# X$  la somme connexe de deux copies de  $X$ . Alors  $\chi(Y) = 2\chi(X) - 2$  et  $\tau(Y) = 0$ .  $Y$  a une application de degré 2 sur  $X$  mais n'est pas un revêtement de  $X$ . La proposition suivante montre que  $Y$  n'admet pas de métrique d'Einstein.

**PROPOSITION 9**.— *Soient  $X, Y$  des variétés compactes orientées de dimension 4. On suppose que  $X$  porte une métrique à courbure constante  $-1$  et  $Y$  une métrique d'Einstein. Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application de degré  $d$ . Alors  $\chi(Y) \geq |d|\chi(X)$ . En cas d'égalité,  $f$  est homotope à un revêtement homothétique.*

Normalisons la métrique de  $Y$  de sorte que sa courbure de Ricci  $Ric^Y$ , supposée constante, soit égale à celle de  $X$ . Comme  $Ric^Y$  est la trace du tenseur de courbure

$R^Y$ , et comme  $R^X$  est un multiple constant de l'identité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne  $\|R^Y\|^2 \geq \|R^X\|^2$ .

D'autre part, l'inégalité de R. Bishop 3.2 donne  $h_{vol}(Y) \leq h_{vol}(X)$ . Du théorème 2, il résulte que  $\text{Vol}(Y) \geq |d|\text{Vol}(X)$ .

Enfin, si  $V$  est un variété riemannienne compacte de dimension 4, sa caractéristique d'Euler est donnée par la formule (voir [B2] page 206)

$$\chi(V) = \frac{1}{8\pi^2} \int_V \|R\|^2 - 2\|Z\|^2,$$

où  $R$  est le tenseur de courbure, et  $Z$  le tenseur d'Einstein, qui s'annule exactement pour les métriques d'Einstein. Il vient

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_V \|R^Y\|^2 \\ &\geq \frac{1}{8\pi^2} \|R^X\|^2 \text{Vol}(Y) \\ &\geq |d| \frac{1}{8\pi^2} \|R^X\|^2 \text{Vol}(X) = |d|\chi(X) \end{aligned}$$

et l'égalité a lieu dans les mêmes conditions que pour le théorème 2.

**COROLLAIRE 10** [BCG2].— *Si une variété compacte de dimension 4 porte une métrique à courbure constante  $-1$ , elle ne porte aucune autre métrique d'Einstein.*

Les variétés hyperboliques réelles rejoignent donc la petite famille des variétés compactes de dimension 4 pour lesquelles toutes les métriques d'Einstein sont connues : les tores, la surface K3 et leurs quotients (en vertu du théorème 7.1) et les variétés hyperboliques complexes, [Le].

## 8. VARIÉTÉS RIEMANNIENNES HARMONIQUES

Une variété riemannienne est harmonique si les petites sphères géodésiques ont une courbure moyenne constante. Cela signifie que le volume croît exactement de la même façon dans toutes les directions. C'est donc une condition plus forte que celle d'Einstein. Jusqu'en dimension 4, ses conséquences infinitésimales (sur la courbure et ses dérivées) suffisent à conclure que la métrique est localement symétrique. En 1944, A. Lichnérowicz a posé la question de savoir si seuls les espaces localement symétriques peuvent être harmoniques, [L]. La réponse est non. E. Damek et F. Ricci ont trouvé des espaces homogènes non compacts qui sont harmoniques, [DR]. Leur courbure sectionnelle est strictement négative.

La version globale de la question d'A. Lichnérowicz (quelles sont les variétés harmoniques compactes) est encore ouverte. Z. Szabo a montré qu'une variété harmonique compacte et simplement connexe est symétrique, [Sz]. Combiné à un beau résultat de P. Foulon et F. Labourie, le théorème 2 résout le problème en courbure négative.

**COROLLAIRE 11** .– *Une variété riemannienne harmonique compacte à courbure sectionnelle strictement négative est localement symétrique.*

L'idée essentielle (due à P. Foulon, [FL]) est qu'en chaque point du fibré unitaire tangent, la direction de la variété stable est celle sur laquelle le jacobien du flot géodésique atteint son minimum. Par hypothèse, celui-ci est le même en tout point (il vaut  $-h_{vol}$ ). Sur un ouvert dense, cette direction varie donc de manière  $C^\infty$  avec le point. En estimant uniformément les dérivées, on peut oublier l'ouvert dense. On conclut à l'aide du corollaire 8.

## 9. QUESTIONS

Peut-on remplacer l'entropie (reliée à la courbure de Ricci) par une quantité plus souple, reliée à la courbure scalaire ? G. Besson, G. Courtois et S. Gallot ont fait un pas dans cette direction. Dans [BCG1] ils montrent que parmi les métriques de volume fixé voisines d'une métrique  $g_0$  localement symétrique l'intégrale de la courbure scalaire atteint un minimum en  $g_0$ .

Les résultats de D. Burago et S. Ivanov sur le volume asymptotique des tores, [BI], sont une sorte de pendant polynomial au théorème 2. Les estimations de volume en courbure de Ricci positive dans les travaux de T. Colding, [Co], présentent une parenté avec les précédents. Peut-on la préciser ?

Le volume sphérique est-il exactement proportionnel au volume simplicial ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [ACCS] J.W. ANDERSON, R. CANARY, M. CULLER, P. SHALEN, *Free Kleinian groups and volumes of hyperbolic 3-manifolds*, à paraître dans le J. Differen. Geom.
- [BFL] Y. BENOIST, P. FOULON ET F. LABOURIE, *Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables*, J. Amer. Math. Soc. **5**, 33-74 (1992).

- [B1] A.L. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, *Ergeb. der Math.* Bd 93, Springer (1978).
- [B2] A.L. BESSE, *Einstein Manifolds*, *Ergeb. der Math.* Bd 10, Springer (1987).
- [BCG1] G. BESSON, G. COURTOIS ET S. GALLOT, *Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques*, *Invent. Math.* **103**, 417-445 (1991).
- [BCG2] G. BESSON, G. COURTOIS ET S. GALLOT, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, *Geom. and Funct. Anal.* **5**, 731-799 (1995).
- [BCG3] G. BESSON, G. COURTOIS ET S. GALLOT, *Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems*, *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **16**, 623-649 (1996).
- [BI] D. BURAGO AND S. IVANOV, *On the asymptotic volume of tori*, *Geom. and Funct. Anal.* **5**, 800-808 (1995).
- [C] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris (1928).
- [CG] J. CHEEGER AND M. GROMOV, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded*, I, *J. Differen. Geom.* **23**, 309-346 (1986), II, *J. Differen. Geom.* **32**, 269-298 (1990).
- [Co] T. COLDING, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, *Invent. Math.* **124**, 193-214 (1996).
- [CK] C. CROKE AND B. KLEINER, *Conjugacy rigidity for manifolds with a parallel vector field*, *J. Differen. Geom.* **39**, 659-680 (1994).
- [DR] E. DAMEK AND F. RICCI, *A class of non-symmetric harmonic riemannian spaces*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **27**, 139-142 (1992).
- [D] E.I. DINABURG, *On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems*, *Izv. Mat. Nauk SSSR* **35**, 324-366 (1971), *Trad. Math. USSR Izv.* **5**, 337-378 (1971).
- [DE] A. DOUADY AND C. EARLE, *Conformally natural extensions of homeomorphisms of the circle*, *Acta Math.* **157**, 23-48 (1986).
- [ES] J. EELLS AND J. SAMPSON, *Harmonic maps of Riemannian manifolds*, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109-160.
- [Fo] P. FOULON, *Nouveaux invariants géométriques des systèmes dynamiques du second ordre : application à l'étude du comportement ergodique*, Thèse d'Etat, Ecole Polytechnique (1986).

- [FL] P. FOULON ET F. LABOURIE, *Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques*, Invent. Math. **109**, 97-111 (1992).
- [Fu] H. FURSTENBERG, *A Poisson formula for semi-simple Lie groups*, Ann. of Math. **77**, 335-386 (1963).
- [Gh] E. GHYS, *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. de Paris **20**, 251-270 (1987).
- [G] M. GROMOV, *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S. **56**, 213-307 (1981).
- [Gb] M. GROMOV, *Hyperbolic manifolds according to Jorgensen and Thurston*, Séminaire Bourbaki n° 546, novembre (1979).
- [HM] U. HAAGERUP AND M. MUNKHOLM, *Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space*, Acta Math. **1941**, 1-11 (1981).
- [K] A. KATOK, *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, Ergod. Th. Dynam. Syst. **8**, 139-152 (1988).
- [Le] C. LEBRUN, *Einstein metrics and Mostow rigidity*, Math. Res. Lett. **2**, 1-8 (1996).
- [L] A. LICHNÉROWICZ, *Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques*, Bull. Soc. Math. de France **72**, 146-169 (1944).
- [Ma] A. MANNING, *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. Math. **110**, 567-573 (1979).
- [MSY] N. MOK, Y.T. SIU AND S.K. YEUNG, *Geometric superrigidity*, Invent. Math. **113**, 57-83 (1993).
- [M1] G.D. MOSTOW, *Quasiconformal mappings in  $n$ -space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. Math. I.H.E.S. **34**, 53-104 (1967).
- [Sa] A. SAMBUSETTI, *An obstruction to the existence of Einstein metrics on 4-manifolds*, C.R. Acad. Sci. Paris **322**, 1213-1218 (1996).
- [S] Y.T. SIU, *Complex analyticity of harmonic maps, and strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. **112**, 73-111 (1980).
- [Sz] Z. SZABO, *The Lichnérowicz conjecture on harmonic manifolds*, J. Differen. Geom. **31**, 1-28 (1990).
- [T] W. THURSTON, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton (1978).

- [To] D. TOLEDO, *Representations of surface groups in  $PSU(n,1)$  with maximum characteristic number*, J. Differen. Geom. **29**, 125-134 (1989).
- [V] M. VILLE, *Sur le volume des variétés riemanniennes pincées*, Bull. Soc. Math. de France **115**, 127-139 (1987).

Pierre PANSU  
U.R.A. D1169 du C.N.R.S.  
Mathématiques  
Université Paris-Sud  
91405 Orsay Cédex  
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr

# *Astérisque*

MICHEL WALDSCHMIDT

**Sur la nature arithmétique des valeurs de  
fonctions modulaires**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 824, p. 105-140

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_105\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__105_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LA NATURE ARITHMÉTIQUE DES VALEURS DE FONCTIONS MODULAIRES

par Michel WALDSCHMIDT

### INTRODUCTION

La fonction modulaire  $j$  est définie dans le demi-plan supérieur et prend des valeurs algébriques quand l'argument  $\tau$  est quadratique. Les nombres quadratiques imaginaires sont les seuls nombres complexes tels que  $\tau$  et  $j(\tau)$  soient simultanément algébriques : cela a été prouvé par Schneider en 1937. La démonstration repose sur une variante elliptique de la méthode qui a permis à Gel'fond et Schneider de résoudre le septième problème de Hilbert.

Soit  $J$  la fonction, méromorphe dans le disque unité, définie par  $J(e^{2i\pi\tau}) = j(\tau)$ . La question, posée par Mahler, de la transcendance de  $J(q)$  quand  $q$  est un nombre algébrique satisfaisant  $0 < |q| < 1$ , a été résolue en 1995 par une équipe stéphanoise : Barré-Sirieix, Diaz, Gramain et Philibert. Ces derniers ont résolu en même temps le problème analogue  $p$ -adique, qui avait été posé par Manin.

La méthode de démonstration est inspirée de certains travaux de Mahler, et ouvre de nouvelles perspectives. En 1996, Nesterenko a démontré que pour tout nombre complexe  $q$  satisfaisant  $0 < |q| < 1$ , le degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$  du corps  $\mathbb{Q}(q, P(q), Q(q), R(q))$  est au moins égal à 3. Les fonctions  $P, Q, R$  (notations de Ramanujan) sont les séries d'Eisenstein de poids 2, 4 et 6 respectivement. On en déduit notamment l'indépendance algébrique des trois nombres  $\pi, e^\pi$  et  $\Gamma(1/4)$ , ainsi que la transcendance du nombre  $\sum_{n \geq 1} 2^{-n^2}$ .

### 1. TRANSCENDANCE

#### 1.1. La fonction modulaire $j$

La fonction  $j$  (encore appelée *invariant modulaire*) est analytique dans le demi-plan supérieur

$$\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C}; \Im m(\tau) > 0\}$$

et y vérifie

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau) \quad \text{pour} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

À une constante additive près, elle est caractérisée par cette propriété avec la normalisation suivante :  $j$  a un pôle simple à l'infini de résidu 1. Comme  $j(\tau + 1) = j(\tau)$ , il existe une fonction  $J$ , analytique dans le disque unité pointé  $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$ , telle que  $J(e^{2i\pi\tau}) = j(\tau)$  pour  $\tau \in \mathfrak{H}$ . Le développement de Laurent de la fonction  $J$  à l'origine s'écrit

$$J(z) = \frac{1}{z} + 744 + 196\,884z + 21\,493\,760z^2 + 864\,299\,970z^3 + \cdots + c(n)z^n + \cdots,$$

avec des entiers positifs  $c(n)$ . Cette série définit aussi, pour tout nombre premier  $p$ , une fonction analytique dans le disque unité pointé  $\{z \in \mathbb{C}_p; 0 < |z|_p < 1\}$  du complété  $\mathbb{C}_p$  d'une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ . On désignera dans la suite par  $\mathcal{C}$  soit le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, soit un corps  $\mathbb{C}_p$ ,  $p$  premier ; la valeur absolue sur  $\mathcal{C}$  sera notée  $|\cdot|$ .

La fonction modulaire  $j$  joue un rôle central dans la théorie de la multiplication complexe concernant l'arithmétique des corps quadratiques imaginaires. Si  $\tau \in \mathfrak{H}$  est algébrique de degré 2, alors le nombre  $j(\tau)$  est algébrique et le corps de nombres  $\mathbb{Q}(\tau, j(\tau))$  est le corps de classes de Hilbert du corps quadratique imaginaire  $\mathbb{Q}(\tau)$ . En 1937, Schneider [4] a montré que, pour  $\tau$  quadratique, ces nombres  $j(\tau)$  ("singular moduli"), sont les seules valeurs algébriques de la fonction  $j$  en des points algébriques :

**Théorème 1.** – Soit  $\tau \in \mathfrak{H}$ . Si  $\tau$  et  $j(\tau)$  sont tous deux algébriques, alors  $\tau$  est quadratique.

La seule démonstration connue de cet énoncé est celle de Schneider [4] qui utilise les fonctions elliptiques. Supposons que les nombres  $\tau$  et  $j(\tau)$  soient tous deux algébriques. On pose  $q = e^{2i\pi\tau}$ ,  $\omega_1 = 2\pi\Delta(q)^{1/12}$  et  $\omega_2 = \tau\omega_1$ , où  $\Delta(q)^{1/12}$  est une quelconque des racines douzièmes du nombre

$$\Delta(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Alors la fonction elliptique  $\wp$  de Weierstraß, attachée au réseau  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ , vérifie une équation différentielle

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

avec des invariants  $g_2$  et  $g_3$  algébriques. En effet, si on pose

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} (m + n\tau)^{-2k}, \quad (k > 1),$$

on a

$$g_2 = 60G_4(\tau)/\omega_1^4, \quad g_3 = 140G_6(\tau)/\omega_1^6,$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 1 \quad \text{et} \quad 1728g_2^3 = j(\tau).$$

Les fonctions  $f_1(z) = \wp(z)$  et  $f_2(z) = \wp(\tau z)$  prennent donc simultanément des valeurs algébriques au point  $z = \omega_1/2$  : le corps  $K = \mathbb{Q}(g_2, g_3, \tau, \wp(\omega_1/2), \wp(\omega_2/2))$  est un corps de nombres. Schneider utilise les propriétés suivantes :

- les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont méromorphes dans  $\mathbb{C}$ , chacune étant quotient de deux fonctions entières d'ordre fini ;
- l'anneau  $K[f_1, f_2, f_1', f_2']$  est laissé stable par la dérivation  $d/dz$ , et pour  $i = 1, 2$ , la dérivée  $f_i' = (d/dz)f_i$  de la fonction  $f_i$  est algébrique sur le corps  $K(f_i)$  ;
- les quatre fonctions  $f_1, f_2, f_1', f_2'$  prennent simultanément des valeurs dans  $K$  en une infinité de points, i.e. les points  $z = (m + 1/2)\omega_1$ , ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

Ces propriétés permettent à Schneider de conclure que les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont algébriquement dépendantes sur  $K$  (on déduit maintenant ce fait du *critère de Schneider-Lang* ; cf. [5] et [47]).

Le fait que les deux fonctions  $\wp(z)$  et  $\wp(\tau z)$  soient algébriquement dépendantes sur  $\mathbb{C}$  entraîne que la courbe elliptique associée à  $\wp$  possède des endomorphismes non triviaux, donc que  $\tau$  est quadratique.

Cette démonstration soulève une question, qui a été proposée par Schneider dans la liste des huit problèmes ouverts à la fin de son livre [5], et qui n'est toujours pas résolue :

**Deuxième problème de Schneider.** – *Démontrer le théorème sur la transcendance des valeurs de la fonction modulaire  $j(\tau)$  par une étude directe de cette fonction, et non par l'étude des  $\wp$ -fonctions.*

Bertrand [31] a remarqué que les résultats de Schneider peuvent aussi s'exprimer en termes de valeurs de fonctions modulaires. Ainsi de la transcendance de  $\omega/\pi$  (quand  $\omega$  est une période non nulle d'une fonction elliptique de Weierstraß d'invariants  $g_2$  et  $g_3$  algébriques) il déduit que pour  $q \in \mathbb{C}$  vérifiant  $0 < |q| < 1$ , l'une au moins des deux

séries d'Eisenstein  $E_4, E_6$  (qui seront définies et étudiées un peu plus loin : § 2.1) prend une valeur transcendante au point  $q$ . Si, de plus,  $J(q) \notin \{0, 1728\}$ , alors il en est de même de l'un au moins des deux nombres  $J(q)$  et  $qJ'(q)$ .

### 1.2. Le théorème stéphanois sur $J$

Le théorème suivant [1] répond à une question posée d'abord par Mahler (dans le cas complexe [6], [43]), puis par Manin ([7], §4.12, qui s'intéresse surtout au cas  $p$ -adique).

**Théorème 2.** – Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  un nombre algébrique vérifiant  $0 < |\alpha| < 1$ . Alors le nombre  $J(\alpha)$  est transcendant.

Dans le cas complexe, le théorème 2 montre qu'un déterminant de la forme

$$\det \begin{pmatrix} 2i\pi & \log \alpha \\ \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

(où  $\alpha$  est un nombre algébrique non nul,  $\log \alpha$  une détermination de son logarithme, et  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  un réseau attaché à des invariants  $g_2$  et  $g_3$  algébriques) ne s'annule pas. Il s'agit d'un des analogues elliptiques (pour trois périodes) du problème bien connu suivant :

**Conjecture des quatre exponentielles.** – On considère une matrice

$$\begin{pmatrix} \log \alpha_1 & \log \alpha_2 \\ \log \alpha_3 & \log \alpha_4 \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques. Si les deux lignes sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ , et si les deux colonnes sont aussi linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ , alors le déterminant ne s'annule pas.

Ce problème a été soulevé notamment par Schneider (c'est le premier problème de [5]) et par Lang [46], [47], ainsi que par Ramachandra [48]. Dans le cas  $p$ -adique, il a été proposé par Serre [49]. C'est un cas particulier du problème de l'indépendance algébrique de logarithmes de nombres algébriques (voir à ce sujet la conjecture de Schanuel p. 30 du Chap. III de [47]).

*Remarque.* Voici trois problèmes ouverts, proposés par Diaz dans [51].

1. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|z| = 1$  et  $z \neq \pm 1$ , le nombre  $e^{2i\pi z}$  est transcendant.
2. Si  $q$  est un nombre complexe algébrique satisfaisant  $0 < |q| < 1$ , tel que  $J(q)$  appartienne à l'intervalle réel  $[0, 1728]$ , alors  $q$  est réel.
3. La fonction  $J$  est injective sur l'ensemble des nombres algébriques  $\alpha$  du domaine  $0 < |\alpha| < 1$ .

Dans [51], Diaz montre que la troisième conjecture entraîne les deux autres, et qu'elle est elle-même conséquence aussi bien de la conjecture des quatre exponentielles que de la conjecture suivante de Bertrand ([36], conjecture 2) :

**Conjecture.** – Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux nombres algébriques multiplicativement indépendants dans le domaine  $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ , alors les deux nombres  $J(\alpha_1)$  et  $J(\alpha_2)$  sont algébriquement indépendants.

Cette conjecture contient le cas particulier de la conjecture des quatre exponentielles où deux des  $\alpha_i$  sont des racines de l'unité et les deux autres ont un module  $\neq 1$ .

Un autre analogue elliptique (mixte) du problème des quatre exponentielles intervient à la fin du §4.12 du texte de Manin [7], avec deux périodes au lieu de trois : il s'agit de vérifier  $\omega_1/\omega_2 \neq \log \alpha_1/\log \alpha_2$ .

Un analogue en caractéristique finie du théorème 2 a été démontré par Voloch ([83], théorème A ; voir aussi [82]). On peut noter que l'analogie en caractéristique nulle du théorème B de [83], proposé par Bertrand ([50] problème 2), n'est résolu que dans le cas CM ([50] corollaire 3) ; dans le cas général il s'énonce ainsi : quand on paramètre une courbe elliptique sur un corps de nombres par  $\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$ , si  $u \in \mathbb{C}^\times$  a pour image un point algébrique d'ordre infini, alors  $u$  est transcendant. C'est donc encore un analogue elliptique mixte du problème des quatre exponentielles avec deux périodes :  $v/\omega \neq \log \alpha/2i\pi$ , où  $u = \exp(2i\pi v/\omega)$ .

Le lien entre le théorème stéphanois et les différentes versions du problème des quatre exponentielles suggère de transposer le deuxième problème de Schneider :

**Problème.** – Démontrer le théorème 2 dans le cas complexe en utilisant les fonctions elliptiques.

Un raffinement du théorème 2 est conjecturé par Greenberg. Dans le cas complexe, il s'agit de démontrer la transcendance de  $J(q)$  pour  $q \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |q| < 1$ , sous la seule hypothèse que  $|q|$  est algébrique. Dans le cas  $p$ -adique, on prend un élément  $q$  de  $\mathbb{C}_p$ , algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ , avec  $0 < |q|_p < 1$ , dont la norme sur  $\mathbb{Q}_p$  est algébrique

sur  $\mathbb{Q}$  ; on demande encore de montrer que le nombre  $J(q)$  est transcendant (le cas important est celui où la norme de  $q$  est une puissance de  $p$ ).

Du théorème 2 on déduit que si  $q$  est un élément de  $\mathbb{C}_p$  satisfaisant  $0 < |q|_p < 1$  tel que le nombre  $J(q)$  soit algébrique, alors  $q$  n'appartient pas au noyau du logarithme  $p$ -adique d'Iwasawa (ce noyau est composé de nombres algébriques, à savoir les nombres  $\zeta p^r$  avec  $\zeta$  racine de l'unité et  $r \in \mathbb{Q}$ ). Le fait que  $\log_p q$  ne soit pas nul a des conséquences intéressantes [8] car il montre, par exemple, que la période multiplicative  $q \in \mathbb{C}_p^\times$  d'une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$  à réduction multiplicative en  $p$  n'est pas une norme universelle pour la  $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}_p$ . À la suite de travaux de Mazur, Manin en déduit : soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$  avec réduction multiplicative en  $p$  ; soit  $K$  l'extension infinie de  $\mathbb{Q}$  obtenue en adjoignant toutes les puissances  $p$ -ièmes des racines de l'unité, et soit  $G$  le groupe de Galois de  $K$  sur  $\mathbb{Q}$ . Désignons par  $S(\mathbb{Q})$  et  $S(K)$  les groupes de Selmer de  $E$  pour les corps  $\mathbb{Q}$  et  $K$  respectivement. Alors le noyau et le conoyau de l'application  $S(\mathbb{Q}) \rightarrow S(K)^G$  sont finis. La même conclusion vaut aussi pour le groupe de Selmer associé au carré symétrique du module de Tate pour la courbe  $E$ .

Greenberg a aussi déduit du théorème 2 les deux corollaires suivants :

- Si  $E$  est une courbe elliptique modulaire sur  $\mathbb{Q}$  avec réduction multiplicative en  $p$  et si la fonction  $L(E, s)$  ne s'annule pas au point  $s = 1$ , alors la fonction  $L$   $p$ -adique de  $E$  a un zéro simple en  $s = 1$ .
- La fonction  $L$   $p$ -adique associée au carré symétrique du module de Tate a un zéro simple en  $s = 1$  et  $s = 2$ .

Le premier corollaire utilise un résultat de Greenberg et Stevens sur la dérivée en  $s = 1$  de la fonction  $L$   $p$ -adique de  $E$ , tandis que le second utilise un résultat de Greenberg et Tilouine sur la non-annulation de la dérivée de la fonction  $L$   $p$ -adique du carré symétrique d'une courbe elliptique à réduction multiplicative en  $p$ . Ce résultat de Greenberg et Tilouine intervient crucialement dans la démonstration, par Hida, Tilouine et Urban [9], de la conjecture principale pour le groupe de Selmer du carré symétrique d'une courbe elliptique à réduction multiplicative en  $p$ .

### 1.3. Mesures de transcendance et approximation simultanée

Une version quantitative du théorème 1 a été donnée par Faisant et Philibert [52]. Pour énoncer cette estimation, on introduit la *hauteur absolue logarithmique* : si  $\gamma$  est un nombre algébrique de degré  $d$  et de polynôme minimal sur  $\mathbb{Z}$

$$a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + a_d = a_0(z - \gamma_1) \cdots (z - \gamma_d),$$

avec  $a_0 > 0$ , on pose

$$h(\gamma) = \frac{1}{d} \left( \log a_0 + \sum_{i=1}^d \log \max\{1, |\gamma_i|\} \right).$$

Voici l'énoncé principal de [52] : *il existe une constante absolue  $C > 0$  telle que, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres algébriques vérifiant  $\alpha \in \mathfrak{H}$  et  $j(\alpha) \neq \beta$ , alors*

$$|j(\alpha) - \beta| \geq \exp\{-CD^3(\log D + h(\alpha) + h(\beta))^3\},$$

où  $D = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$ .

De même, un analogue quantitatif du théorème 2 a été obtenu par Barré [54], [55] : *soit  $\eta$  un nombre réel,  $0 < \eta < 1/2$  ; il existe une constante  $C(\eta) > 0$  telle que, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres algébriques vérifiant  $\eta \leq |\alpha| \leq 1 - \eta$ , alors*

$$|J(\alpha) - \beta| \geq \exp\{-C(\eta)d(\alpha)d(\beta)^3 A^3 B L^3 (\log L)^4\},$$

avec

$$d(\alpha) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}], \quad d(\beta) = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}],$$

$$A = \max\{d(\alpha)h(\alpha), 1\}, \quad B = \max\{d(\beta)h(\beta), d(\beta)\}$$

et

$$L = \max\{e, \log d(\alpha), \log d(\beta), \log A, \log B\}.$$

#### 1.4. Démonstration du théorème 2.

Le premier outil invoqué dans la démonstration de [1] est une estimation, due à Mahler [44], pour la croissance des coefficients de Laurent de puissances de  $J$ .

Soit  $k$  un entier  $\geq 0$ . On écrit le développement de Taylor à l'origine de la fonction  $(zJ(z))^k$  sous la forme

$$(zJ(z))^k = \sum_{m=0}^{\infty} c_k(m) z^m.$$

Avec les notations du début de la section 1, les coefficients  $c(n)$  du développement de Laurent de  $J$  à l'origine sont donnés par  $c(n) = c_1(n+1)$ , ( $n \geq 0$ ).

Pour tout  $m \geq 0$  et tout  $k \geq 0$ ,  $c_k(m)$  est un entier rationnel  $\geq 0$ , et l'estimation donnée par Mahler [44] est

$$c_k(n) \leq 1200e^{4\sqrt{kn}}.$$

Philibert a noté une inexactitude dans la démonstration de [44], mais il l'a corrigée et peut même remplacer 1200 par 1.

Comme l'a suggéré Bertrand [36], nous remplaçons cette estimation par la suivante, dont la démonstration est plus facile :

**Lemme 1.** – Pour  $N$  et  $k$  entiers rationnels vérifiant  $0 \leq k \leq N$  et  $N \geq 1$ , on écrit le développement de Taylor de  $\Delta^{2N} J^k$  à l'origine :

$$\Delta(z)^{2N} J(z)^k = \sum_{m=1}^{\infty} c_{Nk}(m) z^m.$$

Alors, pour tout  $m \geq 1$ , le nombre  $c_{Nk}(m)$  est un entier rationnel de valeur absolue (usuelle) majorée par

$$|c_{Nk}(m)| \leq C^N m^{12N},$$

où  $C > 0$  est une constante absolue.

*Démonstration.*

Si on compose les fonctions  $\Delta^2$  et  $\Delta^2 J$  avec  $\tau \mapsto e^{2i\pi\tau}$ , on obtient des formes modulaires paraboliques de poids 24. On déduit ainsi le résultat pour  $N = 1$  d'un théorème de Hecke ([74], théorème 5, §4.3, Chap. VII). Le cas général se démontre par les mêmes arguments (cf. [55], lemme 2).

Le deuxième fait important pour la démonstration du théorème 2 est le suivant : si  $q$  est un élément de  $\mathcal{C}$  qui vérifie  $0 < |q| < 1$  et tel que  $J(q)$  soit algébrique, alors pour tout entier  $n \geq 1$  le nombre  $J(q^n)$  est encore algébrique. On peut le voir en supposant  $\mathcal{C} = \mathbb{C}$  (ce n'est pas restrictif) et en considérant les deux réseaux isogènes  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$  et  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}n\tau$ . On a aussi besoin d'estimer le degré et la hauteur de ce nombre algébrique  $J(q^n)$ . On le fait grâce au lemme suivant, concernant le polynôme modulaire, qui fait intervenir la fonction arithmétique

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Quand  $A$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , on note  $L(A)$  (longueur de  $A$ ) la somme des valeurs absolues (usuelles) de ses coefficients.

**Lemme 2.** – Il existe une constante absolue  $c > 0$  ayant la propriété suivante. Soit  $n$  un entier positif. Il existe un polynôme non nul  $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X, Y]$ , symétrique en  $X$  et  $Y$ , de degré  $\psi(n)$  en chaque variable, de longueur  $\leq n^{c\psi(n)}$ , tel que

$$\Phi_n(J(q), J(q^n)) = 0.$$

Mahler avait démontré cette estimation, mais avec une borne légèrement moins précise pour la longueur  $L(\Phi_n)$  : sa majoration [44] était  $e^{cn^{3/2}}$ , avec une constante absolue  $c > 0$ . Quand  $n$  est une puissance de 2, il avait obtenu une meilleure estimation [43] :

$$L(\Phi_n) \leq 2^{57n} n^{36n} \quad \text{si } n = 2^m,$$

et il avait précisé qu'une majoration de la forme

$$L(\Phi_n) \leq 2^{Cn} \quad \text{si } n = 2^m,$$

avec une constante absolue  $C > 0$ , lui permettrait de démontrer le théorème 2 (cf. [43], p. 97). La majoration du lemme 2 est due à Cohen [45] qui montre que son estimation est optimale : elle donne en fait un équivalent asymptotique du logarithme de la longueur de  $\Phi_n$ , dont elle déduit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)} \log L(\Phi_n) = 36\pi^{-2}e^\gamma,$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler, et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m2^m} \log L(\Phi_{2^m}) = 9 \log 2.$$

On peut noter cependant que, pour la démonstration du théorème 2, la borne  $e^{cn^{3/2}}$  de Mahler est suffisante.

*Démonstration du théorème 2.*

On commence par introduire des paramètres pour que les estimations qui vont suivre soient valides. On choisit deux entiers positifs suffisamment grands  $L$  et  $N$ . Un choix convenable consiste à prendre pour  $N$  un entier suffisamment grand, puis à définir  $L = [N^2/2]$ .

On montre ensuite l'existence d'un polynôme non nul  $A \in \mathbb{Z}[X, Y]$ , de degré  $\leq N$  par rapport à chaque variable, tel que la fonction analytique  $F(z) = \Delta(z)^{2N} A(z, J(z))$  ait un zéro à l'origine de multiplicité  $\geq L$ . L'existence de  $A$  est trivialement assurée par la condition  $N^2 > L$ . Grâce au lemme 1, un lemme de Thue et Siegel (dont la démonstration repose sur le principe des tiroirs) permet, en plus, de majorer la longueur d'un tel polynôme  $A$ , grâce à la condition  $N^2 \geq 2L$  :

$$L(A) \leq N^{25N}.$$

Les fonctions  $z$  et  $J(z)$  sont algébriquement indépendantes (cf. [1], lemme 4), donc la fonction  $F$  n'est pas identiquement nulle. On désigne par  $M = \text{ord}_0 F$  sa multiplicité à l'origine. D'après la construction du polynôme  $A$ , on a  $M \geq L$ .

Soit maintenant  $q \in \mathcal{C}$  vérifiant  $0 < |q| < 1$ . On suppose que  $N$  est suffisamment grand par rapport à  $q$ . En majorant les coefficients du développement de Taylor à l'origine de la fonction  $G(z) = z^{-M} F(z)$ , on établit la majoration, pour  $|z| \leq |q|$ ,

$$|F(z)| \leq \begin{cases} |z|^M M^{31N} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}, \\ |z|^M & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}_p. \end{cases}$$

Posons  $\gamma = 63(\log(1/|q|))^{-1}$ . On va montrer qu'il existe un entier  $S \geq 1$  satisfaisant la majoration  $S^2 \leq \gamma N \log M$  tel que  $F(q^S) \neq 0$ .

Pour cela on désigne par  $S$  le plus petit entier tel que  $F(q^S) \neq 0$ . L'existence de  $S$  vient du fait que la fonction  $F$  n'est pas identiquement nulle. Afin d'établir la majoration annoncée pour  $S$ , on pose  $r = (1+|q|)/2$ . On définit  $|H|_r = \sup_{|z|=r} |H(z)|$  quand  $\mathcal{C} = \mathbb{C}$ , ou encore quand  $\mathcal{C} = \mathbb{C}_p$  et que  $r$  est dans le groupe des valeurs. Sinon,  $|H|_r$  est la limite de  $|H|_\rho$ , pour  $\rho$  dans le groupe des valeurs et tendant vers  $r$ . On applique alors le principe du maximum  $|H(0)| \leq |H|_r$  à la fonction

$$H(z) = \begin{cases} \frac{F(z)}{z^M} \prod_{s=1}^{S-1} \frac{r^2 - z\bar{q}^s}{r(z - q^s)} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}, \\ \frac{F(z)}{z^M} \prod_{s=1}^{S-1} \frac{r}{z - q^s} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}_p. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on peut majorer  $|H|_r = r^{-M}|F|_r$  par  $M^{31N}$  dans le cas complexe, et par 1 dans le cas  $p$ -adique. D'un autre côté comme les coefficients de Laurent de  $J$  à l'origine sont des entiers rationnels, on a  $G(0) = (1/M!)F^{(M)}(0) \in \mathbb{Z}$ , donc

$$|H(0)| \geq \begin{cases} r^{S-1}|q|^{-S(S-1)/2} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}, \\ r^{S-1}M^{-25N} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}_p. \end{cases}$$

La majoration annoncée pour  $S^2$  en résulte.

On suppose enfin que notre nombre  $q \in \mathcal{C}$ , qui satisfait  $0 < |q| < 1$ , est algébrique, et que  $J(q)$  est aussi algébrique. En utilisant le lemme 2, ainsi que des estimations assez fines, on montre l'existence d'une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $q$ , telle que

$$|F(q^S)| \geq \exp\{-CSN(S + \log N) \log \log(3S)\}.$$

Mais, grâce à la majoration que nous avons établie pour  $S$ , on vérifie que la majoration de  $|F(q^S)|$  que nous avons obtenue plus haut, à savoir

$$|F(q^S)| \leq \begin{cases} |q|^{MS} M^{31N} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}, \\ |q|^{MS} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}_p \end{cases}$$

n'est pas compatible avec cette minoration. L'hypothèse que  $q$  et  $J(q)$  sont tous deux algébriques n'est donc pas réalisable.

## 2. INDÉPENDANCE ALGÈBRIQUE

### 2.1. Indépendance algébrique de deux nombres

Pour  $k$  entier positif on désigne par  $B_k$  le  $k$ -ième nombre de Bernoulli :

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} B_k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

de sorte que

$$B_1 = 1/6, \quad B_2 = 1/30 \quad \text{et} \quad B_3 = 1/42.$$

On considère la série d'Eisenstein de poids  $2k$ ,

$$E_{2k}(z) = 1 + (-1)^k \frac{4k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} z^n}{1 - z^n},$$

qui, pour  $k > 1$ , est le développement de Fourier de la fonction  $G_{2k}/(2\zeta(2k))$  (voir par exemple [74] Chap. VII, §4). On utilisera aussi les notations de Ramanujan [73] :

$$P(z) = E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{1 - z^n},$$

$$Q(z) = E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{1 - z^n},$$

$$R(z) = E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 z^n}{1 - z^n}.$$

Ces fonctions  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  sont reliées aux fonctions  $J$  et  $\Delta$  (introduites plus haut) par

$$\Delta = \frac{1}{1728} (Q^3 - R^2) \quad \text{et} \quad J = \frac{Q^3}{\Delta}.$$

L'énoncé suivant résulte, dans le cas complexe, des travaux de Chudnovsky [20], [21], [22] sur les périodes de fonctions elliptiques, et, dans le cas ultramétrique, de ceux de Bertrand [32], [33], [34] sur les valeurs de fonctions elliptiques  $p$ -adiques de Jacobi-Tate.

**Théorème 3.** – Soit  $q$  un élément de  $\mathcal{C}$  satisfaisant  $0 < |q| < 1$ . Alors le degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$  du corps

$$\mathbb{Q}(P(q), Q(q), R(q))$$

est supérieur ou égal à 2.

Dans le cas complexe, nous allons voir que le théorème 3 s'énonce de manière équivalente sous la forme suivante :

**Corollaire 1.** – Soient  $\wp$  une fonction elliptique de Weierstraß d'invariants  $g_2$  et  $g_3$ ,  $\omega$  une période non nulle de  $\wp$  et  $\eta$  la quasi-période correspondante de  $\zeta$  :

$$\zeta(z + \omega) = \zeta(z) + \eta.$$

Alors le degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$  du corps  $\mathbb{Q}(g_2, g_3, \omega/\pi, \eta/\pi)$  est supérieur ou égal à 2.

En particulier, si  $\omega$  est une période non nulle d'une fonction elliptique d'invariants  $g_2$  et  $g_3$  algébriques attachée à une courbe elliptique de type CM, alors les deux nombres  $\omega$  et  $\pi$  sont algébriquement indépendants. Comme la période fondamentale réelle de la courbe elliptique  $y^2 = 4x^3 - 4x$  est

$$2 \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 4t}} = \frac{1}{2} B(1/4, 1/2) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{8\pi}},$$

et que celle de la courbe  $y^2 = 4x^3 - 4$  est

$$2 \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 4}} = \frac{1}{3} B(1/6, 1/2) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi},$$

on déduit du corollaire 1 :

**Corollaire 2.** – Les deux nombres  $\pi$  et  $\Gamma(1/4)$  sont algébriquement indépendants, et il en est de même des deux nombres  $\pi$  et  $\Gamma(1/3)$ .

*Démonstration du corollaire 1.*

Quitte à remplacer la courbe elliptique par une courbe isogène, on peut supposer que le réseau des périodes de  $\wp$  est  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  avec  $\omega = \omega_1$ . En posant  $\eta_1 = \eta$ ,  $\tau = \omega_2/\omega_1$  et  $q = e^{2i\pi\tau}$ , on a (cf. [75], Chap. 4, §2, Prop. 4 et Chap. 18, §3) :

$$P(q) = 3 \frac{\omega_1}{\pi} \cdot \frac{\eta_1}{\pi}, \quad Q(q) = \frac{3}{4} \left( \frac{\omega_1}{\pi} \right)^4 g_2, \quad R(q) = \frac{27}{8} \left( \frac{\omega_1}{\pi} \right)^6 g_3.$$

Ces relations montrent que le corollaire 1 équivaut au cas complexe du théorème 3.

*Remarque.* On a encore

$$\Delta(q) = \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{12} (g_2^3 - 27g_3^2).$$

Les premiers résultats de transcendance de nombres reliés à des intégrales elliptiques sont antérieurs à la solution du septième problème de Hilbert [17]. En 1941, Schneider [18] a obtenu des énoncés généraux sur les périodes de variétés abéliennes dont il déduit des propriétés arithmétiques des valeurs de la fonction Bêta : *pour  $a$  et  $b$  rationnels non entiers tels que  $a + b$  ne soit pas entier, le nombre  $B(a, b)$  est transcendant.* Ce résultat se déduit d'un critère de Schneider-Lang en plusieurs variables pour des produits cartésiens [47], Chap. IV.

Une approche entièrement différente a été proposée par André [24], qui utilise les  $G$ -fonctions de Siegel pour démontrer l'indépendance algébrique des nombres  $\omega_1/2i\pi$  et  $\eta_1/2i\pi$ , périodes et quasi-périodes attachées à des formes différentielles sur une courbe elliptique  $y^2 = (x^2 - 1)(1 - \alpha x^2)$ , avec  $\alpha$  algébrique,  $0 < |\alpha| < 1$ . Il écrit ces deux nombres avec des fonctions hypergéométriques sous la forme  $iF(1/2, 1/2, 1; \alpha)$  et  $iF(-1/2, 1/2, 1; \alpha)$ . Ce point de vue vaut aussi bien dans le cas complexe qu'ultramétrique.

Le théorème 3 entraîne que pour  $J(q)$  algébrique, les deux nombres  $P(q)$  et  $\Delta(q)$  sont algébriquement indépendants. Il peut aussi s'exprimer en termes de valeurs des dérivées de la fonction  $J$  par rapport à l'opérateur  $z(d/dz)$  (voir §2.2).

Selon une conjecture de Lang ([35], p. 652) quand  $j'(\tau)$  n'est pas nul, les deux nombres  $j(\tau)$  et  $j'(\tau)$  ne sont pas simultanément algébriques. L'équation différentielle satisfaite par la fonction  $j$  :

$$j'(\tau) = \frac{18}{2i\pi} \cdot \frac{g_3(\tau)}{g_2(\tau)} \cdot j(\tau),$$

(où  $g_2(\tau)$ ,  $g_3(\tau)$  désignent les invariants de la fonction de Weierstraß de réseau  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ ), ramène cette question à celle de la transcendance de  $\omega^2/\pi$ , quand  $\omega$  est une période non nulle d'une fonction elliptique  $\wp$  de Weierstraß d'invariants  $g_2$  et  $g_3$  algébriques. Le théorème de Chudnovsky résout donc le cas de multiplication complexe. Plus précisément [32], pour  $\tau \in \mathfrak{H}$  avec  $j(\tau)$  algébrique distinct de 0 et 1728, les deux nombres

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} j''(\tau) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} j'(\tau)$$

sont algébriquement indépendants. De plus, si  $\tau$  est quadratique, les deux nombres  $\pi$  et  $j'(\tau)$  sont algébriquement indépendants.

Nous utiliserons plus loin une version quantitative du théorème 3, due à Philibert [53]. Un raffinement séparant degré et hauteur a été donné ensuite dans [70]. Une mesure d'indépendance algébrique légèrement plus précise (quand la hauteur est grande comparée au degré) avait été annoncée par Chudnovsky ; la démonstration, esquissée dans [22] Chap. 8, n'est pas convaincante, mais le résultat annoncé a été très récemment démontré par Philippon.

Pour un polynôme  $A$  à coefficients complexes, on définit  $t(A)$  comme la somme du degré total de  $A$  et du logarithme de sa longueur. Voici donc l'énoncé de Philibert :

**Proposition 1.** – *Sous les hypothèses du théorème 3, si  $J(q)$  est algébrique, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $C(\epsilon) > 0$  vérifiant la propriété suivante : si  $A \in \mathbb{Z}[X, Y]$  est un polynôme non nul, on a*

$$|A(P(q), \Delta(q))| > \exp\{-C(\epsilon)t(A)^{3+\epsilon}\}.$$

Enfin le problème de la transcendance de  $\Gamma(1/5)$  n'est toujours pas résolu. À la suite de la conjecture de Rohrlich, selon laquelle  $(2\pi)^{-1/2}\Gamma(z)$  est la distribution impaire universelle à valeurs dans des groupes où la multiplication par 2 est inversible, Lang (voir [26], Chap. 2, p. 66) pose la question d'indépendance algébrique : il n'y aurait pas de relation de dépendance entre les valeurs de la fonction  $\Gamma$  en des arguments rationnels, autre que celles qui résultent des relations fonctionnelles connues.

## 2.2. Indépendance algébrique de trois nombres

Voici le résultat principal de [2] et [3] :

**Théorème 4.** – *Soit  $q$  un élément de  $\mathbb{C}$  satisfaisant  $0 < |q| < 1$ . Alors le degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$  du corps*

$$\mathbb{Q}(q, P(q), Q(q), R(q))$$

*est supérieur ou égal à 3.*

Mahler a montré dans [41] que les trois fonctions  $P, Q, R$  sont algébriquement indépendantes sur le corps  $\mathbb{C}(z)$ . Elles vérifient d'autre part le système d'équations différentielles [73], [76] :

$$12 \frac{DP}{P} = P - \frac{Q}{P}, \quad 3 \frac{DQ}{Q} = P - \frac{R}{Q}, \quad 2 \frac{DR}{R} = P - \frac{Q^2}{R},$$

avec  $D = z(d/dz)$ . Ainsi la dérivation  $D$  laisse stable l'anneau  $\mathbb{Q}[P, Q, R]$ . On reconnaît là les hypothèses principales du critère de Schneider-Lang, et Serre m'avait suggéré dès 1972 qu'il serait intéressant de développer cette remarque.

On déduit de ces relations

$$\frac{DJ}{J} = -\frac{R}{Q}, \quad \frac{DJ}{J-1728} = -\frac{Q^2}{R},$$

et

$$6 \frac{D^2J}{DJ} = P - \frac{4R}{Q} - \frac{3Q^2}{R}.$$

Le théorème 4 résout donc une conjecture de Bertrand [32] : si  $q$  est un nombre algébrique vérifiant  $0 < |q| < 1$ , alors les trois nombres  $J(q)$ ,  $DJ(q)$ ,  $D^2J(q)$  sont algébriquement indépendants. Plus généralement, si  $q \in \mathbb{C}$  vérifie  $0 < |q| < 1$ ,  $J(q) \neq 0$  et  $J(q) \neq 1728$ , alors trois au moins des quatre nombres  $q$ ,  $J(q)$ ,  $DJ(q)$ ,  $D^2J(q)$  sont algébriquement indépendants.

Du théorème 4 on déduit aussi le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** – Soit  $q$  un nombre complexe vérifiant  $0 < |q| < 1$  et tel que  $J(q)$  soit algébrique. Alors les trois nombres  $q$ ,  $P(q)$ ,  $\Delta(q)$ , sont algébriquement indépendants.

Le théorème 4 a de nombreuses conséquences : en voici quatre. Les deux premières (qui résultent du corollaire 1) concernent les périodes d'intégrales elliptiques [2], la suivante les fonctions thêta [36], [37], la dernière les suites de Lucas [37].

**Corollaire 2.** – Soient  $\wp$  une fonction elliptique de Weierstraß d'invariants  $g_2$  et  $g_3$  algébriques,  $\omega$  une période non nulle de  $\wp$ ,  $\eta$  la quasi-période correspondante de la fonction  $\zeta$  de Weierstraß attachée à  $\wp$  et  $\tau \in \mathfrak{H}$  le quotient de deux périodes fondamentales de  $\wp$ . Alors les trois nombres

$$e^{2i\pi\tau}, \quad \omega/\pi \quad \text{et} \quad \eta/\pi$$

sont algébriquement indépendants.

Dans le cas CM, en utilisant le fait que les trois nombres  $\omega/\pi$ ,  $\eta/\pi$  et  $1/\omega$  sont linéairement dépendants sur le corps des nombres algébriques (voir [19], lemme 3.1 et appendice 1), on obtient l'indépendance algébrique des trois nombres

$$e^{2i\pi\tau}, \quad \omega \quad \text{et} \quad \pi.$$

Pour  $q = e^{-2\pi}$ , on a  $J(q) = j(i) = 1728$ , tandis que le choix  $q = -e^{-\pi\sqrt{3}}$  donne  $J(q) = j(\rho) = 0$  (où  $\rho$  est une racine primitive cubique de l'unité). On déduit du corollaire 2 :

**Corollaire 3.** – *Les trois nombres*

$$\pi, e^\pi, \Gamma(1/4) \quad (\text{resp. } \pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/3))$$

sont algébriquement indépendants. En particulier les deux nombres  $\pi$  et  $e^\pi$  sont algébriquement indépendants.

L'indépendance algébrique des deux nombres  $\pi$  et  $e^\pi$  n'était pas connue. On obtient plus généralement, quand  $D$  est un entier rationnel  $> 0$ , l'indépendance algébrique des trois nombres  $\pi$ ,  $e^{\pi\sqrt{D}}$  et  $\omega$ , où  $\omega$  est une période non nulle d'une courbe elliptique, définie sur le corps des nombres algébriques, dont l'anneau des endomorphismes est un ordre du corps quadratique imaginaire  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ .

On déduit du corollaire 3 que le produit canonique de Weierstraß associé au réseau  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ ,

$$\sigma(z) = z \prod_{\substack{\omega \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \\ \omega \neq 0}} (1 - z/\omega) e^{(z/\omega) + (z^2/2\omega^2)},$$

prend des valeurs transcendentes aux points de  $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$  qui ne sont pas dans  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ ; par exemple le nombre

$$\sigma(1/2) = 2^{5/4} \pi^{1/2} e^{\pi/8} \Gamma(1/4)^{-2}$$

est transcendant.

L'indépendance algébrique de  $\pi$  et  $e^\pi$  montre aussi que le nombre

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^4 - 1)^{-1} = \frac{7}{8} - \frac{\pi}{4} \coth \pi$$

est transcendant [40].

Le corollaire suivant fait intervenir les séries thêta de Jacobi (voir par exemple [77], Chap. V, §6, Th.6) :

$$\theta_2(z) = 2z^{1/4} \sum_{n \geq 0} z^{n(n+1)} = 2z^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{4n})(1 + z^{2n}),$$

$$\theta_3(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2n})(1 + z^{2n-1})^2,$$

$$\theta_4(z) = \theta_3(-z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n z^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2n})(1 - z^{2n-1})^2.$$

On peut formuler le théorème 4 de la façon suivante :

**Corollaire 4.** – Soient  $i, j$  et  $k$  trois indices  $\in \{2, 3, 4\}$  avec  $i \neq j$ . Soit  $q$  un nombre complexe,  $0 < |q| < 1$ . Alors chacun des deux corps

$$\mathbb{Q}(q, \theta_i(q), \theta_j(q), D\theta_k(q)) \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(q, \theta_k(q), D\theta_k(q), D^2\theta_k(q))$$

a un degré de transcendance  $\geq 3$  sur  $\mathbb{Q}$ .

Ainsi, pour  $q \in \mathbb{C}$  algébrique,  $0 < |q| < 1$ , le nombre  $\theta_3(q)$  est transcendant. Le problème de la transcendance du nombre  $\sum_{n \geq 0} \ell^{-n^2}$ , quand  $\ell$  est un entier rationnel  $> 1$ , était ouvert depuis que Liouville ([38] p. 140) avait remarqué que, pour ces nombres, l'argument lui ayant permis d'expliciter les premiers exemples de nombres transcendants donnait seulement un résultat d'irrationalité.

*Démonstration du corollaire 4.*

Les relations suivantes (cf. [36])

$$\begin{aligned} \theta_3^4 &= \theta_2^4 + \theta_4^4, \\ Q(z^2) &= 2^{-1}(\theta_2(z)^8 + \theta_3(z)^8 + \theta_4(z)^8), \\ \Delta(z^2) &= 2^{-8}(\theta_2(z)\theta_3(z)\theta_4(z))^8 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta_2^4 &= 4(D\theta_3/\theta_3 - D\theta_4/\theta_4), \\ \theta_4^4 &= 4(D\theta_2/\theta_2 - D\theta_3/\theta_3), \\ P(z^2) &= 4(D\theta_2/\theta_2 + D\theta_3/\theta_3 + D\theta_4/\theta_4)(z), \end{aligned}$$

montrent que les deux corps

$$\mathbb{Q}(q^2, P(q^2), Q(q^2), R(q^2)) \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(q, \theta_i(q), \theta_j(q), D\theta_k(q))$$

ont la même clôture algébrique. Ceci démontre la première partie du corollaire 4, tandis que la seconde, disons dans le cas  $k = 3$ , se déduit de la relation (cf. [36])

$$D^2\theta_3/\theta_3 - 3(D\theta_3/\theta_3)^2 = 2^{-3}\theta_2^4\theta_4^4.$$

Dans le cas particulier où  $q$  est algébrique, une démonstration différente de l'indépendance algébrique des trois nombres  $y(q), Dy(q), D^2y(q)$  (où  $y$  est l'une des trois fonctions thêta) est proposée dans [37]; elle repose sur un argument de spécialisation de Weil, combiné avec le fait que les trois fonctions  $y, Dy, D^2y$  sont algébriquement indépendantes [42].

Le dernier corollaire concerne les suites de Lucas.

**Corollaire 5.** – Soit  $\alpha$  un nombre complexe algébrique vérifiant  $0 < |\alpha| < 1$ . Soit  $\beta = \pm 1/\alpha$ . On pose, pour  $n \geq 1$ ,

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Alors le nombre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_n^2}$$

est transcendant.

En choisissant  $\alpha = (1 - \sqrt{5})/2$  et  $\beta = -1/\alpha$ , la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  ainsi obtenue est la suite de Fibonacci :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (n \geq 2),$$

et on obtient la transcendance de la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^2}.$$

Il est intéressant de noter (cf. [37]) que certaines séries analogues ont pour sommes des nombres algébriques, quelquefois même rationnels :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1.$$

*Démonstration du corollaire 5.*

On se contente de traiter le cas  $\beta = 1/\alpha$ . La dérivée logarithmique de la fonction  $\Delta$  pour l'opérateur  $D = z(d/dz)$  est

$$\frac{D\Delta(z)}{\Delta(z)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{1 - z^n} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1 - z^n)^2}.$$

En posant  $z = \alpha^2$ , on trouve

$$\frac{D\Delta(\alpha^2)}{\Delta(\alpha^2)} = 1 - \frac{24}{(\beta - \alpha)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_n^2}.$$

### 2.3. Mesures d'indépendance algébrique

Nesterenko [2], [3] et Philippon [56] ont établi des raffinements quantitatifs du théorème 4. Dans l'exemple qui suit, tiré de [56], on utilise la même notation  $t(A)$  que dans la proposition 1 (pour désigner la somme  $\deg A + \log L(A)$  du degré total de  $A$  et du logarithme de la longueur de  $A$ ) ; mais on pourrait aussi séparer degré et hauteur.

Soit  $q \in \mathcal{C}$  satisfaisant  $0 < |q| < 1$ , tel que le corps

$$\mathbb{Q}(q, P(q), Q(q), R(q))$$

ait un degré de transcendance égal à 3 sur  $\mathbb{Q}$ . Choisissons une base de transcendance  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Il existe alors une constante  $\gamma > 0$ , dépendant de  $q, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  (et de  $p$  quand  $\mathcal{C} = \mathbb{C}_p$ ), telle que, pour tout polynôme non nul  $A \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$  on ait

$$|A(\theta_1, \theta_2, \theta_3)| > \exp\{-\gamma T^4 (\log T)^{16}\},$$

avec  $T = \max\{e, t(A)\}$ .

Cette estimation s'applique en particulier aux triplets

$$(\pi, e^\pi, \Gamma(1/4)) \quad \text{et} \quad (\pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/3)),$$

fournissant ainsi des mesures d'indépendance algébriques très précises (l'exposant 4 pour  $T$  est optimal).

Les résultats quantitatifs de [56] sont plus généraux : ils concernent des idéaux de polynômes de différentes codimensions. Par exemple Philippon donne aussi des mesures d'approximations simultanées des nombres  $q, P(q), Q(q)$  et  $R(q)$  par des nombres algébriques.

Malgré ces progrès on ne sait pas encore montrer que le nombre  $e^\pi$  n'est pas un nombre de Liouville.

### 2.4. Démonstration directe du corollaire 1 du théorème 4.

La démonstration que nous allons donner du corollaire 1 est inspirée par le travail de Philippon [56]. Elle est nettement plus simple que celle de [2], et utilise la mesure d'indépendance algébrique due à Philibert (proposition 1 ci-dessus - voir [53]).

Le but de l'argument transcendant est d'établir le résultat suivant :

**Proposition 2.** – Soit  $q \in \mathcal{C}$ ,  $0 < |q| < 1$ . Il existe deux constantes positives  $c$  et  $\kappa$ , (dépendant de  $|q|$ ), ayant la propriété suivante : pour tout entier  $N$  suffisamment

grand, il existe un entier  $M \geq N^4$  et un polynôme non nul  $A_N \in \mathbb{Z}[z, X_1, X_2, X_3]$  tel que

$$\deg A_N \leq cN \log M, \quad \log H(A_N) \leq cN(\log M)^2,$$

et

$$0 < |A_N(q, P(q), Q(q), R(q))| \leq e^{-\kappa M}.$$

*Démonstration.*

On désigne par  $N$  un entier suffisamment grand, et on pose  $L = [N^4/2]$ . Il existe un polynôme non nul  $A \in \mathbb{Z}[z, X_1, X_2, X_3]$ , de degré  $\leq N$  par rapport à chacune des quatre variables, tel que la fonction  $F(z) = A(z, P(z), Q(z), R(z))$  ait, à l'origine, un zéro de multiplicité  $\geq L$ . Le lemme de Thue-Siegel montre l'existence d'un tel polynôme dont la longueur est majorée par :

$$L(A) \leq N^{85N}.$$

Soit  $M = \text{ord}_0 F$  l'ordre de  $F$  en  $z = 0$ . La construction de  $A$  donne  $M \geq L$ . Un point essentiel de la démonstration de Nesterenko consiste à établir l'inégalité  $M \leq C_0 L$ , où  $C_0$  est une constante absolue. Cette majoration ("lemme de multiplicités" ou "lemme de zéros") est décrite dans la section suivante (théorème 5). Dans cette démonstration, nous ne l'utiliserons pas.

On pose  $r = \min\{(1 + |q|)/2, 2|q|\}$  et on suppose  $N$  suffisamment grand par rapport à  $q$ . La fonction  $F$  a un zéro de multiplicité  $M$  à l'origine. En majorant les coefficients de Taylor de la fonction  $G(z) = z^{-M} F(z)$  à l'origine, on obtient, pour  $|z| \leq r$  (cf. [2] lemme 2.2)

$$|F(z)| \leq \begin{cases} |z|^M M^{48N} & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}, \\ |z|^M & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}_p. \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à montrer que le nombre  $T = \text{ord}_q F$  est majoré par  $T \leq \gamma N \log M$ , avec  $\gamma = 48(\log(r/|q|))^{-1}$ . Pour cela on applique le principe du maximum  $|H(0)| \leq |H|_r$  à la fonction

$$H(z) = \begin{cases} \frac{F(z)}{z^M} \cdot \left( \frac{r^2 - \bar{q}z}{r(z - q)} \right)^T & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}, \\ \frac{F(z)}{z^M} \cdot \left( \frac{r}{z - q} \right)^T & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}_p. \end{cases}$$

Le nombre  $G(0) = (1/M!)F^{(M)}(0)$  est entier et n'est pas nul. On minore sa valeur absolue par 1 dans le cas complexe, et on minore sa valeur absolue  $p$ -adique en majorant sa valeur absolue ordinaire quand  $\mathcal{C} = \mathbb{C}_p$ . On trouve

$$|H(0)| \geq \begin{cases} (r/|q|)^T & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}, \\ M^{-17N}(r/|q|)^T & \text{si } \mathcal{C} = \mathbb{C}_p. \end{cases}$$

La majoration de  $|H|_r = r^{-M}|F|_r$  par  $M^{48N}$  dans le cas complexe et par 1 dans le cas  $p$ -adique fournit l'estimation annoncée pour  $T$ .

On introduit l'opérateur de dérivation

$$D = z \frac{d}{dz} + \frac{1}{12}(X_1^2 - X_2) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{3}(X_1 X_2 - X_3) \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2}(X_1 X_3 - X_2^2) \frac{\partial}{\partial X_3}$$

sur l'anneau  $\mathcal{C}[z, X_1, X_2, X_3]$ , de telle sorte que

$$z \frac{d}{dz} F(z) = (DA)(z, P(z), Q(z), R(z)).$$

On pose

$$A_N(z, X_1, X_2, X_3) = (12z)^T (z^{-1}D)^T A(z, X_1, X_2, X_3).$$

On vérifie

$$\deg A_N \leq 4N + T \leq (\gamma + 1)N \log M,$$

$$L(A_N) \leq N^{85N} 5^{4N} (48N + 24T)^T \leq \exp\{2\gamma N (\log M)^2\},$$

et

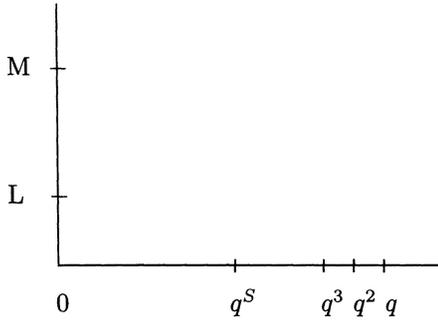
$$|A_N(q, P(q), Q(q), R(q))| \leq 12^T T! (r - |q|)^{-T} r^M M^{48N} \leq e^{-\kappa M}.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.

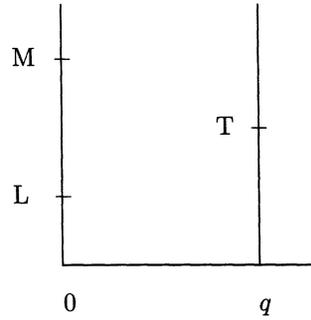
Pour déduire le corollaire 1 des propositions 1 et 2, on suppose  $q \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |q| < 1$ ,  $J(q)$  algébrique, et les trois nombres  $q$ ,  $P(q)$ ,  $\Delta(q)$  algébriquement dépendants. Alors chacun des quatre nombres  $q$ ,  $P(q)$ ,  $Q(q)$ ,  $R(q)$  est racine d'un polynôme  $f_i(X_i, \omega/\pi, \eta/\pi)$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), avec  $f_i \in \mathbb{Z}[X_i, Y_1, Y_2]$ . On élimine, dans l'anneau de polynômes en 6 variables  $\mathbb{Z}[X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2]$ , les 4 variables  $X_0, X_1, X_2, X_3$  entre les 5 polynômes  $A, f_0, f_1, f_2, f_3$ . On voit ainsi que les estimations données par les propositions 1 et 2 ne sont pas compatibles.

Les deux démonstrations que nous venons de présenter (théorème 2 et proposition 2) sont schématisées par les deux diagrammes suivants : on construit à chaque fois une

fonction auxiliaire ayant un zéro de multiplicité au moins  $L$  en l'origine, on désigne par  $M$  cette multiplicité, et on considère soit une valeur non nulle  $F(q^S)$  de  $F$  en un point ( $q^S$  figure sur l'axe horizontal), soit une dérivée  $F^{(T)}(q) \neq 0$  de  $F$  au point  $q$  (l'ordre de dérivation  $T$  est porté sur un axe vertical).



**Théorème 2**



**Proposition 2**

Les structures de démonstrations sont donc semblables ; les Stéphanais ne pouvaient pas utiliser les dérivées de la fonction auxiliaire au point  $q$  car l'équation différentielle satisfaite par la fonction  $J$  est d'ordre 3.

Ce type de démonstration (avec construction d'une fonction auxiliaire, recherche d'une valeur non nulle, majoration et minoration) est essentiellement la seule méthode dont on dispose actuellement. C'est Hermite en 1873 qui a introduit le premier ce type d'argument pour démontrer la transcendance de  $e$ , suivi par Siegel en 1929 (qui introduit les  $E$ - et  $G$ -fonctions), puis Mahler en 1930 [10], suivi de Gel'fond et Schneider qui résolvent le septième problème de Hilbert en 1934. L'utilisation du principe des tiroirs pour la construction de la fonction auxiliaire, qui était une des caractéristiques de toutes ces méthodes, peut être évitée, comme l'a montré Laurent ; une démonstration des théorèmes 2 et 4 à l'aide de déterminants d'interpolation de Laurent se trouve dans [57].

L'utilisation d'une mesure de transcendance pour établir un résultat d'indépendance algébrique avait été suggérée par Lang ([47], Chap. VI, historical note), comme premier pas d'un processus inductif. La "rigidité absolument fantastique" dont il est question dans cette note historique n'est plus ce qu'elle était.

## 2.5. Démonstration du théorème 4.

La démonstration de Nesterenko diffère de la précédente, car elle utilise, comme nous

l'avons dit, une majoration de  $M/L$ . Une autre différence apparaît dans le choix de  $T$  : au lieu de définir  $T$  comme l'ordre en  $q$  de la fonction  $F$ , il montre dans [2] qu'il existe un entier  $T$  dans l'intervalle  $0 \leq T \leq \gamma N \log N$  tel que

$$|D^T F(q)| \geq \left(\frac{1}{2}|q|\right)^{2M}.$$

L'existence de cet entier  $T$  repose sur une formule d'interpolation (c'est ce que Philippon appelle un "lemme de Schwarz approché" ; cf.[57]) que nous énonçons dans le cas complexe.

**Lemme 3.** – Soient  $M$  et  $T$  deux entiers  $\geq 0$ ,  $r$  un nombre réel et  $q$  un nombre complexe vérifiant  $0 < |q| \leq r$ . Soit  $F$  une fonction analytique dans un ouvert contenant le disque  $|z| \leq r$  du plan complexe, ayant un zéro de multiplicité  $\geq M$  à l'origine. Alors

$$\frac{r^M}{M!} |F^{(M)}(0)| \leq \left(\frac{r}{|q|}\right)^{-T} |F|_r + 2^{M+T} \left(\frac{r}{|q|}\right)^M \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{|q|}{2}\right)^t \frac{1}{t!} |F^{(t)}(q)|.$$

On obtient ainsi l'énoncé suivant, plus précis que la proposition 2 :

**Proposition 3.** – Soit  $q \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |q| < 1$ . Il existe des constantes  $c$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  positives (dépendant de  $|q|$ ) et il existe une suite  $(A_N)_{N \geq 2}$  de polynômes non nuls de l'anneau  $\mathbb{Z}[z, X_1, X_2, X_3]$ , vérifiant, pour tout  $N \geq 2$ ,

$$\deg A_N \leq cN \log N, \quad \log H(A_N) \leq cN(\log N)^2,$$

et

$$\exp\{-\kappa_2 N^4\} \leq |A_N(q, P(q), Q(q), R(q))| \leq \exp\{-\kappa_1 N^4\}.$$

Le lemme 2.4 de [2] explicite les constantes  $c$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  en fonction de  $|q|$  dans le cas  $\mathbb{C} = \mathbb{C}$  : en gardant la notation  $r = \min\{(1 + |q|)/2, 2|q|\}$ , on peut prendre

$$c = 380(\log(r/|q|))^{-1}, \quad \kappa_1 = (1/4)\log(1/r), \quad \kappa_2 = 6 \cdot 10^{45} \log(2/|q|).$$

Enfin, pour déduire le théorème 4 de la proposition 3, il ne reste plus qu'à utiliser le critère d'indépendance algébrique de Philippon [69] :

**Proposition 4.** – Soient  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des éléments de  $\mathbb{C}$ ,  $t$  un entier  $\geq 0$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $R$  des fonctions croissantes de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ , non bornées, telles que  $\lambda/\sigma^t$  soit croissante et

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \lambda(N)/R(N+1) > 0, \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \lambda(N)/\sigma(N+1)^t = \infty.$$

On suppose qu'il existe une suite  $(A_N)_{N \geq 0}$  de polynômes non nuls de  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  vérifiant, pour tout  $N$  suffisamment grand,

$$\deg A_N \leq \sigma(N), \quad \log H(A_N) \leq \sigma(N),$$

et

$$|A_N(\theta_1, \dots, \theta_n)| \leq e^{-\lambda(N)}.$$

On suppose de plus que  $A_N$  ne s'annule pas dans la boule  $\max_{1 \leq i \leq n} |z_i - \theta_i| \leq e^{-R(N)}$  de  $\mathbb{C}^n$ . Alors le corps  $\mathbb{Q}(\theta_1, \dots, \theta_n)$  a un degré de transcendance  $\geq t$  sur  $\mathbb{Q}$ .

Dans la situation de la proposition 3, on applique ce critère avec  $n = 4$ ,  $t = 1$ ,  $\lambda(N) = \kappa_1 N^4$ ,  $R(N) = 2\kappa_2 N^4$ ,  $\sigma(N) = cN(\log N)^2$ . La minoration de  $|A_N(\theta_1, \dots, \theta_n)|$  garantit que  $A_N$  ne s'annule pas dans un voisinage convenable du point  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ .

*Remarque.* Les démonstrations des estimations diophantiennes de Nesterenko raffinant le théorème 4 de façon quantitative reposent encore sur la proposition 3, mais la proposition 4 est remplacée par le critère d'Abyl [71]. Les estimations de [56] demandent un peu plus de travail car degré et hauteur sont séparés (Philippon utilise les critères de Jabbouri [70] et Jadot [72]).

### 3. LEMMES DE ZÉROS

#### 3.1. Énoncés

Un des points importants de la démonstration de Nesterenko était la majoration de la multiplicité en l'origine de la fonction auxiliaire  $F$ . Il établit pour cela le résultat suivant [2], Théorème 3 :

**Théorème 5.** – Soient  $L_0$  et  $L$  des entiers positifs,  $A \in \mathbb{C}[z, X_1, X_2, X_3]$  un polynôme non nul, de degré  $\leq L_0$  en  $z$  et  $\leq L$  en chacune des trois autres variables  $X_1, X_2, X_3$ . Alors la multiplicité du zéro à l'origine de la fonction analytique

$$A(z, P(z), Q(z), R(z))$$

est majorée par  $cL_0L^3$ , avec  $c = 2 \cdot 10^{45}$ .

Ce théorème 5 est un exemple de *lemmes de zéros* que Nesterenko a établis pendant ces 20 dernières années [59], [60], [65], [66], [67].

La démonstration, qui repose sur des arguments d'algèbre commutative, se fait par récurrence sur le rang d'un idéal. Pour cela il est nécessaire d'établir un énoncé

plus général : on ne se contente pas de majorer la multiplicité en l'origine d'une fonction  $A(z, P(z), Q(z), R(z))$ , mais on considère un idéal homogène  $\mathcal{J}$  de l'anneau de polynômes  $\mathcal{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ , où  $\mathcal{R} = \mathcal{C}[z]$ . Pour un tel idéal on va définir, à l'aide des formes de Chow, des quantités  $B(\mathcal{J})$ ,  $N(\mathcal{J})$  et  $\text{ord}\mathcal{J}(\bar{f})$ , qui satisferont la condition suivante : si  $\mathcal{J}$  est l'idéal principal engendré par un polynôme homogène  ${}^h A(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^{\deg A} A(X_1/X_0, X_2/X_0, X_3/X_0)$ , alors

$$B(\mathcal{J}) = \deg_z A, \quad N(\mathcal{J}) = \deg A \quad \text{et} \quad \text{ord}\mathcal{J}(\bar{f}) \geq \text{ord}_0 A(z, P(z), Q(z), R(z)).$$

L'énoncé suivant contiendra donc le théorème 5 (qui correspond au cas particulier  $r = 3$ ).

**Théorème 6.** – Soit  $\mathcal{J}$  un idéal homogène dans l'anneau  $\mathcal{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ , pur de rang  $4 - r$  avec  $r \in \{1, 2, 3\}$ . Alors

$$\text{ord}\mathcal{J}(\bar{f}) \leq \varrho^{2r-1} (B(\mathcal{J})N(\mathcal{J})^{r/(4-r)} + N(\mathcal{J})^{3/(4-r)}),$$

avec  $\varrho = 10^9$ .

### 3.2. Formes de Chow

Voici la définition de  $B(\mathcal{J})$ ,  $N(\mathcal{J})$  et  $\text{ord}\mathcal{J}(\bar{f})$ .

On désigne toujours par  $\mathcal{R}$  l'anneau  $\mathcal{C}[z]$ . Soient  $m$  un entier positif et  $\mathcal{J}$  un idéal homogène de  $\mathcal{R}[X_0, \dots, X_m]$ , pur de rang  $m+1-r \geq 1$ . On introduit  $r$  formes linéaires "génériques"  $L_i(X) = \sum_{j=0}^m U_{ij} X_j$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), ce qui signifie que  $U_{ij}$ , ( $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq m$ ) sont des variables indépendantes. L'idéal  $U$ -éliminant  $\bar{\mathcal{J}}$  de  $\mathcal{J}$  est l'idéal de l'anneau des polynômes à coefficients dans  $\mathcal{R}$  en les  $r(m+1)$  variables  $U_{ij}$  formé des  $G$  pour lesquels il existe un entier  $M \geq 1$  vérifiant

$$GX_i^M \in (\mathcal{J}, L_1, \dots, L_r) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq m.$$

Grâce au choix de  $r$ , l'idéal  $\bar{\mathcal{J}}$  est principal et non nul. Une forme de Chow de  $\mathcal{J}$  est un générateur  $F_{\mathcal{J}}$  de  $\bar{\mathcal{J}}$ . Si on pose  $\underline{U}_i = (U_{0i}, \dots, U_{mi})$ , ce polynôme  $F_{\mathcal{J}}$  est symétrique en  $\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_r$ , et son degré en  $\underline{U}_1$  est noté  $N(\mathcal{J})$ . Le degré de  $F_{\mathcal{J}}$  en  $z$  est noté  $B(\mathcal{J})$ .

Soient  $f_0, \dots, f_m$  des séries formelles en  $z$  à coefficients complexes vérifiant  $\min_{0 \leq i \leq m} \text{ord}_0 f_i = 0$ . On note  $\bar{f} \in (\mathcal{C}[[z]])^{m+1}$  le vecteur colonne de composantes  $(f_0, \dots, f_m)$ . Pour définir  $\text{ord}\mathcal{J}(\bar{f})$ , on introduit encore  $r$  matrices antisymétriques "génériques"  $S^{(1)}, \dots, S^{(r)}$ , avec  $S^{(i)} = (S_{kj}^{(i)})_{0 \leq k, j \leq m}$ , ce qui veut dire que  $S_{kj}^{(i)}$ ,

$(1 \leq i \leq r, 0 \leq k, j \leq m)$  sont de nouvelles variables, liées par les seules relations  $S_{kj}^{(i)} + S_{jk}^{(i)} = 0$ . Quand  $F_{\mathcal{J}}$  est une forme de Chow de  $\mathcal{J}$ , on définit une série formelle

$$\mathfrak{S}(F_{\mathcal{J}}) = F_{\mathcal{J}}(S^{(1)}\bar{f}, \dots, S^{(r)}\bar{f}),$$

et on pose

$$\text{ord}\mathcal{J}(\bar{f}) = \text{ord}_0\mathfrak{S}(F_{\mathcal{J}}).$$

Dans la suite, on utilisera ces définitions avec  $m = 3$  et  $\bar{f} = (1, P, Q, R)$ .

Quand  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier homogène de  $\mathcal{R}[X_0, \dots, X_m]$  de rang  $m + 1 - r$  tel que  $\mathfrak{p} \cap \mathcal{R} = \{0\}$ , on montre qu'il existe un polynôme homogène non nul dans  $\mathfrak{p}$ , de degré (en les variables  $X_0, \dots, X_m$ ) majoré par  $1 + c(m)N(\mathfrak{p})^{1/(m-r+1)}$ , et de degré en  $z$  majoré par  $c(m)B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-(m-r)/(m-r+1)}$  (avec une constante explicite  $c(m) > 0$  ne dépendant que de  $m$ ). Si, de plus,  $X_0 \notin \mathfrak{p}$ , et si  $Q \in \mathcal{R}[X_0, \dots, X_m]$  est un polynôme homogène qui n'appartient pas à  $\mathfrak{p}$ , alors l'idéal  $\mathcal{J} = (\mathfrak{p}, Q)$  vérifie

$$B(\mathcal{J}) \leq B(\mathfrak{p}) \deg_X Q + N(\mathfrak{p}) \deg_z Q, \quad N(\mathcal{J}) \leq N(\mathfrak{p}) \deg_X Q.$$

De plus on peut aussi minorer  $\text{ord}\mathcal{J}(\bar{f})$  en fonction de  $\text{ord}\mathfrak{p}(\bar{f})$ ,  $B(\mathfrak{p})$ ,  $N(\mathfrak{p})$ ,  $\deg_X Q$  et  $\deg_z Q$ .

L'opérateur  $D$  introduit plus haut doit être rendu homogène. Comme l'a remarqué Gaudron, il convient de poser

$$\mathfrak{D} = zX_0 \frac{d}{dz} + \frac{1}{12}(X_1^2 - X_0X_2) \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{3}(X_1X_2 - X_0X_3) \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2}(X_1X_3 - X_2^2) \frac{\partial}{\partial X_3}.$$

### 3.3. Indications sur la démonstration du théorème 6.

Il n'y a pas de restriction à supposer  $\mathcal{J} \cap \mathcal{R} = \{0\}$ . On procède par récurrence sur  $r$ . On commence par se ramener au cas où l'idéal  $\mathcal{J}$  est premier de la façon suivante : on considère une décomposition primaire réduite  $\mathcal{J} = \mathfrak{Q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{Q}_t$  de  $\mathcal{J}$ , où  $\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_t$  sont ordonnés de telle sorte que

$$\mathfrak{Q}_i \cap \mathcal{R} = \{0\}, \quad (1 \leq i \leq s), \quad \mathfrak{Q}_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{Q}_t \cap \mathcal{R} = (\gamma),$$

avec  $\gamma \in \mathcal{R}$ ,  $\gamma \neq 0$ . Soient  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_t$  les idéaux premiers associés à  $\mathcal{J}$  et  $e_1, \dots, e_t$

leurs exposants. On a (cf. [65] ou [66])

$$B(\mathfrak{J}) = \deg_z \gamma + \sum_{i=1}^s e_i B(\mathfrak{P}_i),$$

$$N(\mathfrak{J}) = \sum_{i=1}^s e_i N(\mathfrak{P}_i),$$

$$\text{ord} \mathfrak{J}(\bar{f}) = \text{ord}_0 \gamma + \sum_{i=1}^s e_i \text{ord} \mathfrak{P}_i(\bar{f}).$$

On part d'un idéal premier homogène  $\mathfrak{P}$ . Si on peut construire un idéal de la forme  $(\mathfrak{P}, Q)$ , avec  $Q = \mathfrak{D}P$ ,  $P \in \mathfrak{P}$  et  $Q \notin \mathfrak{P}$ , dont le rang est strictement inférieur au rang de  $\mathfrak{P}$ , alors on peut utiliser l'hypothèse de récurrence. Sinon, on montre qu'il existe un idéal premier  $\mathfrak{p}$ , contenu dans  $\mathfrak{P}$ , qui est stable par  $\mathfrak{D}$ . Le point essentiel de la démonstration consiste à déterminer ces idéaux stables. C'est le "lemme de stabilité" suivant :

**Lemme 4.** — Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier non nul de  $\mathcal{C}[z, X_0, X_1, X_2, X_3]$ , homogène dans  $\mathcal{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ , qui s'annule en  $(0, 1, 1, 1, 1)$ , et tel que  $\mathfrak{D}\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ . Alors  $z(X_2^3 - X_0X_3^2) \in \mathfrak{p}$ .

La relation  $D\Delta = \Delta P$  montre que l'idéal principal engendré par  $X_2^3 - X_0X_3^2$  est stable sous  $\mathfrak{D}$ .

Pour terminer la démonstration du théorème 5, on utilise le fait que, pour un tel idéal premier  $\mathfrak{p}$  contenant  $X_2^3 - X_0X_3^2$ , on a

$$\text{ord} \mathfrak{p}(\bar{f}) \leq 3N(\mathfrak{p}) + B(\mathfrak{p}).$$

La démonstration du lemme 4 distingue plusieurs cas suivant la dimension de l'idéal  $\mathfrak{p} \cap \mathcal{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ . Si cette dimension est nulle, on applique le théorème des zéros de Hilbert. Si elle vaut 1, on paramètre (Puiseux) une courbe algébrique contenue dans la variété des zéros de  $\mathfrak{p} \cap \mathcal{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$  par  $(1 : x : f(x) : g(x))$ . On montre qu'il existe des polynômes non nuls  $A \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{R}[X_0, X_1, X_2]$  et  $B \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{R}[X_0, X_1, X_3]$ . En dérivant  $A(1, x, f(x), g(x))$  et  $B(1, x, f(x), g(x))$ , on obtient un système différentiel satisfait par  $f$  et  $g$ , dont on montre que la seule solution est  $(f, g) = (x^2, x^3)$ .

Si  $\mathfrak{p} \cap \mathcal{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$  est de dimension 2, cet idéal est principal. On en choisit un générateur  $A$ , et on écrit  $\mathfrak{D}A \in \mathfrak{p}$ . On montre ainsi que  $u(z) = A(z, 1, P(z), Q(z), R(z))$  satisfait une équation différentielle  $zu'(z) = (aP(z) + b)u(z)$ ,

avec deux nombres  $a$  et  $b$  complexes. On vérifie ensuite que  $a$  et  $b$  sont des entiers rationnels, et on en conclut  $A = cz^b(X_2^3 - X_3^2 X_0)^a$ .

Enfin le cas où  $\mathfrak{p} \cap \mathcal{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$  est de dimension 3 est facile : on a  $\mathfrak{p} \cap \mathcal{R} \neq \{0\}$ , donc  $z \in \mathfrak{p}$ .

Il est intéressant de comparer le théorème 5 avec le lemme de zéros obtenu par Philibert [68] :

Soient  $L_1 \geq 0$  et  $L_2 \geq 1$  deux entiers et  $P \in \mathcal{C}[X, Y]$  un polynôme non nul vérifiant  $\deg_X P \leq L_1$  et  $\deg_Y P \leq L_2$ . Alors

$$\text{ord}_0 P(z, J(z)) \leq 9L_1 L_2 + \frac{3}{2}L_2 - \frac{1}{2}.$$

Cet énoncé permet de majorer  $M$  par  $37L$  dans la démonstration du théorème 2. Il joue un rôle crucial dans les travaux de Barré [54] et [55].

Un énoncé conjectural, contenant à la fois ce résultat de Philibert et le théorème 5, a été proposé par Bertrand [36]. On peut être encore plus ambitieux en proposant le problème suivant : pour tout polynôme non nul  $A \in \mathcal{C}[z, X_1, X_2, X_3]$ , de degré  $\leq L_0$  en  $z$  et  $\leq L_i$  en  $X_i$ , avec  $L_i \geq 1$ , ( $0 \leq i \leq 3$ ), et pour toute base de transcendance  $\{f, g, h\}$  du corps  $K = \mathbb{Q}(P, Q, R)$ , montrer que la multiplicité du zéro à l'origine de la fonction analytique

$$A(z, f(z), g(z), h(z))$$

est majorée par  $cL_0 L_1 L_2 L_3$ , avec une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $f, g, h$ .

*S'il reste encore des erreurs dans ce texte, je m'en excuse auprès de tous ceux qui en ont corrigé une version préliminaire.*

## BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

Les deux principaux articles à la base de cet exposé sont les suivants :

- [1] K. BARRÉ-SIRIEIX, G. DIAZ, F. GRAMAIN, G. PHILIBERT - *Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin*, Invent. Math. **124** (1996), 1–9.
- [2] Yu.V. NESTERENKO - *Modular functions and transcendence questions*, Mat. Sb., **187** N° 9 (1996), 65–96. Engl. Transl., Sbornik Math., **187** N° 9 (1996), 1319–1348.

Les résultats de ce second article ont été annoncés dans une note aux Comptes Rendus :

- [3] Yu.V. NESTERENKO - *Modular functions and transcendence problems - Un théorème de transcendance sur les fonctions modulaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. 1 **322** (1996), 909–914.

Le théorème de Schneider sur la transcendance de  $j(\tau)$  date de 1937 :

- [4] Th. SCHNEIDER - *Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale*, Math. Ann. **113** (1937), 1–13.

La démonstration se trouve aussi dans son livre :

- [5] Th. SCHNEIDER - *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer-Verlag 1957 (en allemand); trad. franç. : *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars 1959.

Le théorème stéphanois répond à une question posée par Mahler dans le cas complexe et par Manin dans le cas général :

- [6] K. MAHLER - *Remarks on a paper by W. Schwarz*, J. Number Theory **1** (1969), 512–521.  
[7] Yu. MANIN - *Cyclotomic fields and modular curves*, Usp. Mat. Nauk **26** N°6 (1971), 7–71 (en russe); trad. angl. : Russian Math. Surveys **26** (1971), 7–78.

Voir aussi, pour le cas  $p$ -adique,

- [8] B. MAZUR, J. TATE and J. TEITELBAUM - *On  $p$ -adic analogs of the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **84** (1986), 1–48.  
[9] H. HIDA, J. TILOUINE, E. URBAN - *Adjoint modular Galois representations and their Selmer groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **94** (1997), 4249–4252.

Dans [6], Mahler développe la méthode de transcendance qu'il avait élaborée une quarantaine d'années plus tôt.

- [10] K. MAHLER - *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzender Funktionen*, Math. Z. **32** (1930), 545–585.

Après la parution de [6], de nombreux auteurs ont développé la méthode de Mahler, notamment J. Loxton, A.J. van der Poorten, K.K. Kubota, Kumiko Nishioka, P.G. Becker, T. Töpfer :

- [11] K. NISHIOKA - *Mahler's functions and transcendence*, Lecture Notes in Math. **1631** Springer-Verlag (1996).

La méthode de Gel'fond-Schneider a aussi été appliquée par plusieurs auteurs à l'étude de fonctions analytiques dans un disque. En plus de la conjecture de Mahler-Manin, une des motivations de ces recherches est le deuxième problème de Schneider [5].

- [12] P. BUNDSCHUH - *Quelques résultats arithmétiques sur les fonctions thêta de Jacobi*, Groupe d'Etude sur les Problèmes Diophantiens, 1983-84, fasc. 1, Publ. Univ. P. et M. Curie **64** (1984), n°1, 15 pp.
- [13] F. GRAMAIN, M. MIGNOTTE et M. WALDSCHMIDT - *Valeurs algébriques de fonctions analytiques*, Acta Arith. **47** (1986), 97-121.
- [14] I. WAKABAYASHI - *Algebraic values of functions on the unit disk*, Proc. Prospects of Math. Sci., World Sci. Pub. (1988), 235-266.
- [15] P. BUNDSCHUH et M. WALDSCHMIDT - *Irrationality results for theta functions by Gel'fond-Schneider's method*, Acta Arith. **53** (1989), 73-91 et **78** (1996), 99.

Le critère de Schneider-Lang, qui permet de démontrer la transcendance de valeurs de fonctions satisfaisant des équations différentielles, peut être étendu en un énoncé donnant des résultats d'indépendance algébrique :

- [16] G. WÜSTHOLZ - *Algebraische Unabhängigkeit von Werten von Funktionen, die gewissen Differentialgleichungen genügen*, J. reine angew. Math. **317** (1980), 102-119.

Les premiers résultats de transcendance concernant les fonctions elliptiques ou abéliennes ont été obtenus par Siegel et Schneider :

- [17] C.L. SIEGEL - *Über die Perioden elliptischer Funktionen*, J. reine angew. Math. **167** (1932), 62-69.
- [18] Th. SCHNEIDER - *Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale*, J. reine angew. Math. **183** (1941), 110-128.

Quand  $g_2$  et  $g_3$  sont algébriques, l'espace vectoriel engendré sur le corps des nombres algébriques par  $1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$  a pour dimension 4 dans le cas CM, et 6 sinon.

- [19] D.W. MASSER - *Elliptic functions and transcendence*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. **437** (1975).

La transcendance de  $\Gamma(1/4)$  a été démontrée il y a vingt ans :

- [20] G.V. CHUDNOVSKIJ - *Algebraic independence of constants connected with exponential and elliptical functions*, Dokl. Ukr. SSR Ser. A **8** (1976), 698-701 (en russe) ; résumé angl. p. 767.
- [21] G.V. CHUDNOVSKY - *Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions*, Proc. Intern. Cong. Math. Helsinki **1** (1978), 339-350.
- [22] G.V. CHUDNOVSKY - *Contributions to the theory of transcendental numbers*, Math. Surveys and Monographs N°19, Amer. Math. Soc., 1984, 450 pp.
- [23] M. WALDSCHMIDT - *Les travaux de G. V. Čudnovskiï sur les nombres transcendants*, Sémin. Bourbaki 28ème année (1975/76), N° 488 ; Springer-Verlag, Lecture

Notes in Math. **567** (1977), 274–292.

Un analogue  $p$ -adique du théorème de Chudnovsky sur l'indépendance algébrique de périodes et quasi-périodes attachées à des formes différentielles elliptiques a été établi par André, en utilisant une approche entièrement différente de celle de [20] :

[24] Y. ANDRÉ - *G-fonctions et transcendance*, J. reine angew. Math. **476** (1996), 95–125.

Les nombres rationnels dans l'intervalle  $]0, 1[$ , où on sait montrer que la fonction  $\Gamma$  prend des valeurs transcendentes, sont  $\{1/6, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 5/6\}$ . Ce sont précisément ces valeurs pour lesquelles un algorithme de calcul rapide est connu, utilisant la moyenne arithmético-géométrique :

[25] J.M. BORWEIN and I.J. ZUCKER - *Fast evaluation of the gamma function for small rational fractions using complete elliptic integrals of the first kind*, IMA Journal of Numerical Analysis **12** (1992), 519–526.

Les auteurs de [25] qualifient de “surprenante” la formule

$$\frac{\Gamma(1/24)\Gamma(11/24)}{\Gamma(5/24)\Gamma(7/24)} = \sqrt{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

La conjecture de Rohrlich donne un algorithme (conjectural) pour trouver toutes les relations de ce type :

[26] S. LANG - *Cyclotomic Fields*, Graduate Texts in Math. **59** Springer-Verlag 1978.

Pour étudier la transcendance de nombres tels que  $\Gamma(1/5)$ , on est amené à considérer des formes différentielles sur des courbes de genre  $\geq 2$ , et à utiliser la formule de Chowla et Selberg :

[27] S. CHOWLA and A. SELBERG - *On Epstein's zeta function*, J. reine angew. Math. **227** (1966), 97–110.

[28] B. GROSS - *On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg*, Invent. Math. **45** (1978), 193–208.

[29] N. KOBLITZ and D.E. ROHRLICH - *Simple factors in the Jacobian of a Fermat curve*, Canad. J. Math. **30** (1978), 1183–1205.

[30] N. KOBLITZ - *Gamma function identities and elliptic differentials on Fermat curves*, Duke Math. J. **45** (1978), 87–99.

Les premiers résultats de transcendance concernant les valeurs de fonctions modulaires ont été déduits par Bertrand, d'abord des énoncés de Schneider :

[31] D. BERTRAND - *Séries d'Eisenstein et transcendance*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 309–321.

puis de ceux de Chudnovsky :

- [32] D. BERTRAND - *Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres) 19ème année (1977/78), n°36, 11 pp.
- [33] D. BERTRAND - *Modular functions and algebraic independence*, Proc. Conf. *p*-adic analysis, Nijmegen 1978, Kath. Univ. Report n°7806.
- [34] D. BERTRAND - *Fonctions modulaires et indépendance algébrique II*, Journées Arithmétiques Luminy, Soc. Math. France, Astérisque **61** (1979), 29–34.

Ces travaux de Bertrand fournissent aussi des analogues ultramétriques des résultats de Schneider et de Chudnovsky.

La conjecture sur la transcendance de  $j'(\tau)$ , quand  $j(\tau)$  est algébrique différent de 0 et 1728, est discutée dans le §4 de :

- [35] S. LANG - *Transcendental numbers and diophantine approximations*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 635–677.

Plusieurs conséquences du théorème de Nesterenko ont été obtenues récemment :

- [36] D. BERTRAND - *Theta functions and transcendence*, Madras Number Theory Symposium 1996, The Ramanujan J., **1** (1997), 339–350.
- [37] D. DUVERNEY, K. NISHIOKA, K. NISHIOKA and I. SHIOKAWA - *Transcendence of Jacobi's theta series*, Proc. Japan. Acad. Sc., **72**, Sér. A (1996), 202–203 ; *Transcendence of Jacobi's theta series and related results*, in “Number Theory – Diophantine, Computational and Algebraic Aspects”, K.Györy, A.Pethő and V.T.Sós, eds., Proc. Conf. Number Theory Eger 1996, W. de Gruyter, à paraître ; *Transcendence of Roger-Ramanujan continued fraction and reciprocal sums of Fibonacci numbers*, Proc. Japan. Acad. Sc., à paraître.

Les nombres  $\sum_{n \geq 1} \ell^{-n^2}$  ( $\ell > 1$  entier), considérés par Liouville en 1851 :

- [38] J. LIOUVILLE - *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, J. Math. Pures App. **16** (1851), 133–142

ne sont pas des “nombres de Liouville” (!) ; cela a été montré par Bundschuh en 1970, utilisant les fonctions de Tschakaloff  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n(n-1)/2}$  :

- [39] P. BUNDSCHUH - *Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsausagen*, Invent. Math. **9** (1970), 175–184.

La fonction de Golomb est  $\gamma(n) = \text{Card}\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 ; a^b = n\}$ . Sa série de Dirichlet génératrice est  $\sum_{n=2}^{\infty} \gamma(n)n^{-s} = \sum_{n=2}^{\infty} (n^s - 1)^{-1}$  qui converge pour  $\Re(s) > 1$  :

- [40] P. BUNDSCHUH - *Zwei Bemerkungen über transzendente Zahlen*, Mh. Math. **88** (1979), 293–304.

L'indépendance algébrique des fonctions  $z$ ,  $P(z)$ ,  $Q(z)$  et  $R(z)$  est établie dans :

- [41] K. MAHLER - *On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions*, J. Austral. Math. Soc. **10** (1969), 445–450.

Dans cet article, Mahler donne des résultats plus généraux d'indépendance algébrique de fonctions, et pose un problème qui a été résolu par Keiji Nishioka ; par exemple les fonctions thêta de Jacobi ne satisfont pas d'équation différentielle d'ordre inférieur à 3 sur  $\mathbb{C}(q)$  :

- [42] K. NISHIOKA - *A conjecture of Mahler on automorphic functions*, Arch. Math. **53** (1989), 46–51.

C'est encore Mahler qui, le premier, a étudié la croissance de la longueur des polynômes modulaires :

- [43] K. MAHLER - *On the coefficients of the  $2^n$ -th transformation polynomial for  $j(\omega)$* , Acta Arith. **21** (1972), 89–97.

- [44] K. MAHLER - *On the coefficients of transformation polynomials for the modular function*, Bull. Austral. Math. Soc. **10** (1974), 197–218.

- [45] P. COHEN - *On the coefficients of the transformation polynomials for the elliptic modular function*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **95** (1984), 389–402.

Le problème des quatre exponentielles est posé dans [5], ainsi que dans :

- [46] S. LANG - *Nombres transcendants*, Sémin. Bourbaki 18ème année (1965/66), N° 305.

- [47] S. LANG - *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley series in Math., Addison-Wesley 1966.

- [48] K. RAMACHANDRA - *Contributions to the theory of transcendental numbers (I)*, Acta Arith. **14** (1968), 65–72 ; *(II)*, id., 73–88.

- [49] J-P. SERRE - *Dépendance d'exponentielles  $p$ -adiques*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres) 7ème année (1965/66), n°15.

- [50] D. BERTRAND - *Valeurs de fonctions thêta et hauteurs  $p$ -adiques*, Sémin. Th. Nombres, Paris 1980–81, (Séminaire Delange-Pisot-Poitou), Progress in Math. **22**, Birkhäuser Verlag (1982), 1–11.

- [51] G. DIAZ - *La conjecture des quatre exponentielles et les conjectures de D. Bertrand sur la fonction modulaire*, J. Th. Nombres Bordeaux, **9** (1997), 229–245.

Des énoncés d'approximation (mesures d'approximation, de transcendance, d'indépendance algébrique) apportent des raffinements quantitatifs aux théorèmes de transcendance :

- [52] A. FAISANT et G. PHILIBERT - *Quelques résultats de transcendance liés à l'invariant modulaire  $j$* , J. Number Theory **25** (1987), 184–200.
- [53] G. PHILIBERT - *Une mesure d'indépendance algébrique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **38** (1988), 85–103.
- [54] K. BARRÉ - *Mesures de transcendance pour l'invariant modulaire*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. 1 **323** (1996), 447–452.
- [55] K. BARRÉ - *Mesure d'approximation simultanée de  $q$  et  $J(q)$* , J. Number Theory, à paraître.

Comme le note Bertrand [36], en transcendance, une hiérarchie des fonctions est donnée par la croissance de la hauteur des coefficients de leur série de Taylor à l'origine : pour les  $G$ -fonctions, la croissance est  $c^n$  ; pour les fonctions modulaires, l'estimation de Mahler sur les coefficients de  $J$ , qui donne  $O(\exp(4\sqrt{n}))$ , est un exemple typique ; pour les formes modulaires de poids  $k$ , la croissance est  $n^k$  ; enfin, pour les  $E$ -fonctions, la valeur absolue des coefficients de Taylor croît comme  $c^n/n!$ , mais leur hauteur comme  $c^n n!$ . Cela peut être formalisé :

- [56] P. PHILIPPON - *Indépendance algébrique et  $K$ -fonctions*, J. reine angew. Math., à paraître.
- [57] P. PHILIPPON - *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques*, J. Number Theory, **64** (1997), 291–338.

Un rapport sur les progrès récents concernant l'indépendance algébrique (incluant des travaux de D. Roy, G. Diaz, M. Laurent, P. Philippon et d'autres) vient d'être rédigé :

- [58] M. LAURENT - *New methods in algebraic independence*, Proc. Conf. Number Theory Eger 1996, à paraître.

Voici maintenant quelques références concernant les lemmes de zéros :

- [59] Yu.V. NESTERENKO - *Estimates of the orders of zeros of analytic functions of a certain class and their application to the theory of transcendental numbers*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **205** (1972) ; trad. angl. Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 938–942.
- [60] Yu.V. NESTERENKO - *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and application in the theory of transcendental numbers*, Izv. Akad. Nauk SSSR **41** (1977) ; trad. angl. Math. USSR Izv. **11** (1977), 239–270.

- [61] D.W. MASSER - *A vanishing theorem for power series*, Invent. Math. **67** (1982), 275–296.
- [62] D.W. MASSER - *Zero estimates on group varieties*, Proc. Intern. Cong. Math. Warszawa (1983), 493–502.
- [63] P. PHILIPPON - *Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 355–383, et **115** (1987), 397–398.
- [64] D. BERTRAND - *Lemmes de zéros et nombres transcendants*, Sémin. Bourbaki, 38ème Année 1985–86, N° 652 ; Soc. Math. France, Astérisque, **145–146** (1987), 21–44.
- [65] Yu.V. NESTERENKO - *Estimates for the number of zeros of certain functions*, in *New Advances in Transcendence Theory*, Proc. Conf. Durham 1986, ed. A. Baker, Cambridge Univ. Press (1988), 263–269.
- [66] Yu.V. NESTERENKO - *Bounds for the number of zeroes of functions of a certain class*, Acta Arith. **53** (1989), 29–46 (en russe).
- [67] Yu.V. NESTERENKO - *Algebraic independence of values of analytic functions*, Proc. Intern. Cong. Math. Kyoto (1990), 447–457.
- [68] G. PHILIBERT - *Un lemme de zéros pour l'invariant modulaire*, J. Number Theory, à paraître.

Le critère d'indépendance algébrique de Philippon :

- [69] P. PHILIPPON - *Critères pour l'indépendance algébrique*, Inst. Hautes Et. Sci. Publ. Math. **64** (1986), 5–52.

a été raffiné pour obtenir des résultats d'approximation diophantienne, par Jabbouri (qui sépare degré et hauteur), par Ably (qui obtient ainsi des mesures d'indépendance algébrique dans des groupes algébriques), et plus récemment par Jadot :

- [70] E.M. JABBOURI - *Sur un critère pour l'indépendance algébrique de P. Philippon*, Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1990, éd. P. Philippon, W. De Gruyter, 1992, 285–307.
- [71] M. ABLY - *Résultats quantitatifs d'indépendance algébrique pour les groupes algébriques*, J. Number Theory **42** (1992), 194–231.
- [72] C. JADOT. - *Critères pour l'indépendance algébrique et linéaire*, Thèse, Univ. P. et M. Curie (Paris VI), 1996.

On trouvera des informations sur les fonctions modulaires, elliptiques et thêta dans les références suivantes :

- [73] S. RAMANUJAN - *On certain arithmetical functions*, Trans. Camb. Phil. Soc. **22** (1916), 159–184 ; Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Chelsea Publ., N.Y. 1927, N°18, 136–162.

- [74] J-P. SERRE - *Cours d'arithmétique*, Coll. SUP, Presses Univ. France, 1970 ; trad. angl. : *A course in arithmetic*, Graduate Texts in Math. 7 Springer-Verlag 1973.
- [75] S. LANG - *Elliptic functions*, Springer-Verlag 1973.
- [76] S. LANG - *Introduction to modular forms*, Springer-Verlag 1976.
- [77] K. CHANDRASEKHARAN - *Elliptic functions*, Grund. der math. Wiss. 281 Springer-Verlag 1985.

Une formule donnant les valeurs des coefficients  $c(n)$  (dans le développement de Laurent de  $J$  à l'origine) en termes de valeurs en des points CM (sans faire intervenir de sommes infinies comme chez Petersson et Rademacher) a été déduite par Kaneko d'un travail de Zagier :

- [78] M. KANEKO - *The Fourier coefficients and the singular moduli of the elliptic modular function  $j(\tau)$* , Mem. Fac. Engin. Design Kyoto Inst. Tech. 44 (1996), 1-5.

Une extension du théorème 1 en dimension supérieure a fait l'objet de plusieurs travaux

- [79] Y. MORITA - *On transcendence of special values of arithmetic automorphic functions*, J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 268-274.
- [80] H. SHIGA et J. WOLFART - *Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions*, J. reine angew. Math. 463 (1995), 1-25.
- [81] P. BEAZLEY COHEN - *Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions*, Rocky Mountain J. Math. 26 (1996), 987-1002.

L'analogue en caractéristique finie du théorème stéphanois a été démontré juste avant le cas classique (complexe ou  $p$ -adique) :

- [82] D. THAKUR - *Automata style proof of Voloch's result on transcendence*, J. Number Theory 58 (1996), 60-63.
- [83] J.F. VOLOCH - *Transcendence of elliptic modular functions in characteristic  $p$* , J. Number Theory 58 (1996), 55-59.

Michel WALDSCHMIDT  
Institut de Mathématiques de Jussieu  
UMR 9994 du CNRS  
Problèmes Diophantiens  
Case 247  
4, place Jussieu  
F-75252 PARIS CEDEX 05  
miw@math.jussieu.fr

# *Astérisque*

AHMED ABBES

## **Hauteurs et discrétude**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 825, p. 141-166

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_141\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__141_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**HAUTEURS ET DISCRÉTUDE**  
[d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang]

par Ahmed ABBES

## 1 INTRODUCTION

Soit  $A$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $K$ . Fixons une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$  et une hauteur de Néron–Tate  $h : A(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  associée à un faisceau inversible ample et symétrique sur  $A$ . Soit  $X$  une sous-variété de  $A$  définie sur une extension finie  $L$  de  $K$  (i.e. un sous-schéma fermé intègre et géométriquement connexe de  $A \times_K L$ ). On définit pour tout réel  $\varepsilon \geq 0$ , l'ensemble

$$X\{\varepsilon\} = \{x \in X(\bar{K}) \mid h(x) \leq \varepsilon\} \subset X(\bar{K}).$$

**DÉFINITION 1.1** .— *Une sous-variété  $X$  de  $A$  est dite de torsion si elle est translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.*

L'objet principal de cet exposé est de rapporter sur les travaux récents qui ont permis de démontrer la conjecture suivante due à Bogomolov :

**THÉORÈME 1.2 (CONJECTURE DE BOGOMOLOV)** .— *Soit  $X$  une sous-variété de  $A$  qui n'est pas de torsion. Alors, il existe une constante  $\varepsilon > 0$  tel que l'ensemble  $X\{\varepsilon\}$  ne soit pas Zariski-dense dans  $X$ .*

La conjecture originelle de Bogomolov [5] se limite au cas d'une courbe plongée dans une variété abélienne. Elle a été démontrée dans ce cas par E. Ullmo [43]. La généralisation aux dimensions supérieures est due à S. Zhang [44]. Ces deux travaux font suite à une collaboration entre ces deux auteurs et L. Szpiro [42] dans laquelle ils ont mis en évidence un phénomène d'équidistribution des petits points d'une variété abélienne. Ces résultats sont fondamentalement basés sur des techniques arakeloviennes dont L. Szpiro était l'initiateur. Il était en particulier le premier à voir le lien entre la conjecture de Bogomolov et des énoncés de positivité en théorie d'Arakelov [36, 39].

Avant d'esquisser les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.2 et par suite celle de l'exposé, nous signalons le corollaire suivant dont l'énoncé a été conjecturé par S. Lang et démontré par M. Raynaud [31, 32] (voir aussi l'exposé d'Oesterlé dans ce séminaire [28]).

**COROLLAIRE 1.3** .— *Soit  $X$  une sous-variété de  $A$  qui n'est pas de torsion. Alors, l'ensemble  $X(\overline{K}) \cap A(\overline{K})_{\text{tor}}$  des points de  $X(\overline{K})$  qui sont de torsion dans  $A$  n'est pas Zariski-dense dans  $X$ .*

Un point de torsion sur une variété abélienne, définie sur un corps de nombres, est caractérisé par la nullité d'une (et de toute) hauteur de Néron–Tate associée à un faisceau inversible ample et symétrique. On construit grâce à la théorie des intersections arithmétique d'Arakelov de Gillet et Soulé [18, 19] une théorie des hauteurs pour les sous-variétés d'une variété arithmétique. Quand la variété ambiante est abélienne, on peut normaliser ces hauteurs par rapport aux isogénies multiplication par des entiers par un procédé limite analogue à celui de Tate. On retrouve en particulier pour les points la hauteur de Néron–Tate. La conjecture de Bogomolov, désignée dans la suite par (B), peut s'interpréter comme un analogue en dimensions supérieures de la caractérisation précédente des points de torsion, désignée par (T), à savoir : *une sous-variété d'une variété abélienne est de torsion si et seulement si sa hauteur normalisée est nulle.* Cette caractérisation des sous-variétés de torsion a été conjecturée pour la première fois par P. Philippon [30]-I. Dans un travail récent et indépendant des travaux cités plus haut, S. David et P. Philippon [11] prouvent la conjecture de Bogomolov en minorant effectivement la hauteur d'une sous-variété qui n'est pas de torsion.

La démonstration générale de la conjecture de Bogomolov ne suit pas l'approche précédente. Elle est plutôt un raffinement de la preuve de l'équivalence (B) $\leftrightarrow$ (T) qu'un corollaire de celle-ci. Plus précisément, nous introduisons une deuxième notion de hauteur d'une sous-variété d'une variété abélienne pour laquelle l'équivalence (B) $\leftrightarrow$ (T) est automatique. Pour déduire cette équivalence pour la première hauteur, on la comparera à la seconde. On prouvera en particulier que la première hauteur est plus petite que la deuxième. Comment caractériser les sous-variétés pour lesquelles les deux hauteurs coïncident? C'est en particulier le cas des sous-variétés  $X$  tel que  $X\{\varepsilon\}$  est dense pour tout  $\varepsilon > 0$ . La réponse à cette question est apportée par Szpiro, Ullmo et Zhang [42]. La décrire précisément alourdirait l'introduction par beaucoup de notations. Disons simplement que l'égalité des hauteurs force un phénomène d'équirépartition de certaines suites de points. Il est alors plus accessible de contredire ce phénomène d'équirépartition pour une sous-variété qui n'est pas de torsion que de contredire la simple densité de ces suites de points. Pour cela, on considérera un morphisme entre deux puissances de la variété abélienne et on appliquera l'équirépartition à la source et à l'aboutissement de ce morphisme.

Nous introduisons la théorie des hauteurs et celle des hauteurs normalisées dans les deux premiers chapitres. L'équirépartition des petits points est introduite à la fin de chacun de ces chapitres. La démonstration du théorème 1.2 est donnée dans le troisième chapitre. Le dernier chapitre est consacré au cas des courbes. Nous avons réuni dans deux appendices les pré-requis de théorie d'Arakelov nécessaires à la preuve de la conjecture de Bogomolov. À part ces deux appendices, le texte de la preuve se veut “self-contained” ou presque.

*Notations* : On désigne par  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$  et par  $S$  l'ensemble des places infinies de  $K$  modulo la conjugaison complexe. Pour chaque place  $\sigma \in S$ , on fixe  $\bar{\sigma}$  un plongement de  $\bar{K}$  dans  $\mathbb{C}$  qui prolonge  $\sigma$ . On pose  $\varepsilon_\sigma = 1$  et  $K_\sigma = \mathbb{R}$  si  $\sigma$  est réelle et  $\varepsilon_\sigma = 2$  et  $K_\sigma = \mathbb{C}$  si  $\sigma$  est complexe. Le groupe de Galois de  $\bar{K}$  sur  $K$  est noté  $G$ .

*Terminologie* : Un point désigne toujours un point fermé. Une suite  $(x_n)$  de points d'un schéma intègre  $X$  est dite *générique* si elle converge pour la topologie de Zariski vers le point générique de  $X$ . Autrement dit, si pour tout  $Y$  sous-schéma fermé strict de  $X$ , il existe  $n_0$  tel que  $x_n \notin Y$  pour  $n \geq n_0$ .

Une suite  $(x_n)$  de points d'une variété abélienne est une suite de petits points si la suite  $h(x_n)$  converge vers zéro pour une hauteur  $h$  de Néron–Tate associée à un faisceau inversible ample et symétrique sur  $A$ .

## 2 HAUTEUR D'UNE SOUS-VARIÉTÉ D'UNE VARIÉTÉ ARITHMÉTIQUE

Nous présentons deux notions de hauteur d'une sous-variété d'une variété arithmétique relativement à un faisceau inversible ample métrisé. La première, inspirée par la géométrie algébrique, est basée sur la théorie des intersections arithmétiques de Gillet et Soulé. La deuxième consiste à coder les hauteurs, relativement au faisceau ample, des points de la sous-variété. Le théorème principal de cette section consiste à les comparer.

On se fixe dans la suite une variété arithmétique  $\mathfrak{X}$  sur  $\mathcal{O}_K$ . C'est-à-dire un schéma intègre propre et plat sur  $\mathcal{O}_K$  dont la fibre générique  $X$  est lisse sur  $K$ . On se fixe aussi un faisceau inversible ample  $\mathcal{L}$  sur  $\mathfrak{X}$  qu'on munit en chaque place  $\sigma \in S$  d'une métrique hermitienne à courbure  $c_1(\mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_\sigma)$  positive. On désigne par  $\hat{c}_1(\mathcal{L})$  la première classe de Chern arithmétique du faisceau métrisé  $(\mathcal{L}, (\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma \in S})$ . Soit  $Y$  une sous-variété de  $X$  de dimension  $d$  (dans ce chapitre et dans le suivant, une sous-variété de  $X$  désigne un sous-schéma intègre fermé de  $X$ ).

*Première notion* : Une désingularisation générique de  $Y$  notée  $D(Y, \tilde{Y}, f)$  est la donnée d'une désingularisation  $\tilde{Y}$  de  $Y$ , d'un modèle  $\tilde{Y}$  propre et plat de  $\tilde{Y}$  sur  $\mathcal{O}_K$  et d'une application  $f : \tilde{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  prolongeant l'application naturelle  $\tilde{Y} \rightarrow X$ .

**PROPOSITION-DÉFINITION 2.1** .— *Soient  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  deux faisceaux inversibles métrisés sur  $\mathfrak{X}$  et  $i$  un entier compris entre 0 et  $d+1$ . Alors, le nombre réel  $\hat{c}_1(f^*\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(f^*\mathcal{L}_2)^{d+1-i}$  ne dépend pas de la désingularisation générique  $D(Y, \tilde{Y}, f)$ .*

*On le note  $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i} | Y)$  et on prolonge par additivité cette définition aux cycles. On définit la hauteur de  $Y$  relativement au faisceau ample  $\mathcal{L}$  par*

$$h_{\mathcal{L}}(Y) = \frac{(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1} | Y)}{(d+1)[K : \mathbb{Q}] \deg_{\mathcal{L}}(Y)}$$

où  $\deg_{\mathcal{L}}(Y) = \deg c_1(\mathcal{L}_K)^d \cap [Y]$ .

Cette proposition représente le point de départ de l'exposé. Nous avons choisi de ne pas remonter plus haut dans les fondements de la théorie d'Arakelov de Gillet et Soulé. Nous renvoyons le lecteur aux papiers originaux de cette théorie. La proposition 2.1

est démontrée précisément dans [47] et [9]. Pour la commodité du lecteur, nous avons réuni dans l'appendice A les principales propriétés de cette hauteur que nous utiliserons dans la suite. Il existe deux façons alternatives de définir les hauteurs. D'une part la théorie d'Elkik [14, 15], inspirée par la philosophie de Deligne [12], associe à des fibrés inversibles métrisés sur un schéma arithmétique un fibré intersection métrisé sur la base dont le degré redonne le nombre d'intersection des fibrés de départ. D'autre part, Philippon introduit dans [30]-I des hauteurs qui généralisent les hauteurs des points à la Weil. La compatibilité de ces hauteurs avec celles introduites plus haut est démontrée dans [33] et [30]-I.

EXEMPLE.— L'application ainsi définie sur  $X(\overline{K})$  est une hauteur de Weil associée à  $\mathcal{L}_K$ .

*Deuxième notion* : On définit

$$e_{\mathcal{L}}(Y) = \sup_{\substack{Z \subset Y \\ \text{codim } Z = 1}} \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\mathcal{L}}(x)$$

a priori dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , mais nous montrons que cet invariant est fini. Pour tout réel  $a$ , on désigne par  $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$  l'ensemble  $\{x \in Y(\overline{K}) \mid h_{\mathcal{L}}(x) \leq a\}$ . L'invariant  $e_{\mathcal{L}}(Y)$  vérifie les deux propriétés suivantes :

(H1) Si  $a > e_{\mathcal{L}}(Y)$ , alors  $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$  est Zariski-dense dans  $Y$ .

(H2) Si  $a < e_{\mathcal{L}}(Y)$ , alors  $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$  n'est pas Zariski-dense dans  $Y$ .

Nous avons besoin d'introduire les notations suivantes : soit  $\mathcal{Y}$  la fermeture schématique de  $Y$  dans  $\mathfrak{X}$ . Le plongement canonique

$$\Gamma = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}|_{\mathcal{Y}}) \longrightarrow V = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}|_{\mathcal{Y}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

fait de  $\Gamma$  un réseau dans  $V$ . En outre, on a l'identification canonique

$$V \simeq \bigoplus_{\sigma \in S} H^0(Y, \mathcal{L}|_Y) \otimes_{\sigma} K_{\sigma}.$$

La norme sup sur  $V$  est définie comme le maximum des normes sup de ses composantes et pour  $s \in H^0(Y, \mathcal{L}|_Y) \otimes_{\sigma} K_{\sigma} \subset H^0(Y_{\sigma}, \mathcal{L}|_{Y_{\sigma}})$ ,

$$\|s\|_{\text{sup}} = \sup_{P \in Y_{\sigma}(\mathbb{C})} (|s(P)|),$$

où  $Y_{\sigma} = Y \times_{\sigma} \mathbb{C}$ .

PROPOSITION 2.2 .— *Pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$ , l'invariant  $e_{\mathcal{L}}(Y)$  est fini.*

PREUVE.— En vue de la propriété (H1), il suffit de démontrer qu'il existe un nombre réel  $a$  tel que  $Y_{\mathcal{L}}\{a\}$  soit Zariski-dense. Pour cela on se ramène, en considérant une puissance

de  $\mathcal{L}$ , au cas  $\mathfrak{X} = \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$  et  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ . Comme par le lemme A.3 deux métriques de  $\mathcal{O}(1)$  induisent des hauteurs comparables, on suppose que  $\mathcal{O}(1)$  est muni en chaque place  $\sigma \in S$  de la métrique de Fubini–Study qui donne pour toute section  $s \in H^0(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(1))$  la norme :

$$\|s\|(x_0 : \dots : x_N) = \frac{1}{2} \frac{|s(x_0 : \dots : x_N)|}{\sqrt{x_0^2 + \dots + x_N^2}}.$$

Soit  $Y$  une sous-variété de  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$  de dimension  $d$ . Supposons que  $Y_{\mathcal{L}}\{(d+1)h_{\mathcal{L}}(Y)\}$  n'est pas Zariski-dense. Soit  $Z$  un diviseur de Cartier de  $Y$  qui contient cet ensemble. On prouvera dans la suite qu'on peut trouver des entiers positifs  $n_1, \dots, n_d$  et des sections  $s_1, \dots, s_d$  avec  $s_i \in H^0(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(n_i))$  tels que

- i)  $Z \cap \bigcap_{i=1}^d \operatorname{div}((s_i)_K) = \emptyset$ ,
- ii)  $\dim(Y \cap \bigcap_{i=1}^d \operatorname{div}((s_i)_K)) = 0$ ,
- iii)  $\|s_i\|_{\sup} \leq 1$  pour tout  $i$ .

L'intersection  $[Y \cdot \operatorname{div}((s_1)_K) \dots \operatorname{div}((s_d)_K)]$  est représentée par un cycle effectif  $Y'$  à support dans  $Y \cap \bigcap_{i=1}^d \operatorname{div}((s_i)_K)$ . Le corollaire A.2 implique que

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L})|Y') \leq (\hat{c}_1(\mathcal{L}) \cdot \hat{c}_1(\mathcal{L}^{n_1}) \dots \hat{c}_1(\mathcal{L}^{n_d})|Y).$$

Comme  $\deg_{\mathcal{L}}(Y') = n_1 \dots n_d \deg_{\mathcal{L}}(Y)$ , on obtient que

$$(1) \quad h_{\mathcal{L}}(Y') \leq (d+1)h_{\mathcal{L}}(Y)$$

Choisissons un point  $y$  de  $Y'$  tel que  $h_{\mathcal{L}}(y) \leq h_{\mathcal{L}}(Y')$ . Ce point appartient à  $Z$  à cause de (1) mais ceci n'est pas possible car  $Y' \cap Z = \emptyset$ . Il reste à justifier l'existence des sections  $s_i$  vérifiant i), ii) et iii). Comme  $Z$  est un diviseur de Cartier sur  $Y$ , la condition i) implique la condition ii). La construction de ces sections se fait par récurrence sur  $i$ . On suppose construit  $s_1, \dots, s_i$  avec  $i < d$  tel que

$$\dim(Z \cap \operatorname{div}((s_1)_K) \cap \dots \cap \operatorname{div}((s_i)_K)) = d - i - 1.$$

On fixe un point dans chaque composante irréductible de  $Z \cap \operatorname{div}((s_1)_K) \cap \dots \cap \operatorname{div}((s_i)_K)$ . Le lemme qui suit nous permet de trouver une section  $s_{i+1}$  de norme  $\sup \leq 1$  qui ne s'annule en aucun des points fixés. Il découle alors que

$$\dim(Z \cap \operatorname{div}((s_1)_K) \cap \dots \cap \operatorname{div}((s_{i+1})_K)) = d - i - 2$$

si  $i+1 < d$  et que cet ensemble est vide si  $i+1 = d$ .

**LEMME 2.3** .— Soient  $r \geq 1$  un entier et  $\varepsilon > 0$  un réel. Alors, il existe un entier  $n \geq 0$  tels que pour tout ensemble  $P_1, \dots, P_r$  de  $r$  points distincts de  $\mathbb{P}^N(\overline{K})$ , il existe une section  $s \in H^0(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(n))$  vérifiant  $\|s\|_{\sup} \leq \varepsilon$  et  $s(P_i) \neq 0$  pour tout  $i$ .

PREUVE.— Elle se fait par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 1$ , il existe une section  $t$  parmi  $X_0, \dots, X_N$  qui ne s'annule pas en  $P_1$ . On prend  $s = t^n$  où  $n$  est fixé tel que  $(0.5)^n < \varepsilon$ . Supposons le lemme prouvé pour tout choix de  $r$  points et considérons  $P_1, \dots, P_{r+1}$  ( $r+1$ ) points. Par hypothèse de récurrence, on trouve un entier  $n$  tels que pour tout  $1 \leq i \leq r+1$ , il existe une section  $s_i \in H^0(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(n))$  vérifiant  $\|s_i\|_{\text{sup}} \leq \varepsilon$  et  $s_i(P_j) \neq 0$  pour tout  $j \neq i$ . On suppose que pour tout  $i$ ,  $s_i(P_i) = 0$  (sinon la preuve est terminée). On prend

$$s = \sum_{i=1}^{r+1} \prod_{j \neq i} s_j \in H^0(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(rn)).$$

Il est clair que  $s(P_i) = \prod_{j \neq i} s_j(P_i) \neq 0$  et que  $\|s\|_{\text{sup}} \leq (r+1)\varepsilon^r$ . Ce qui termine la récurrence. □

Le résultat principal dans cette section est la comparaison de ces deux notions de hauteur. Posons

$$m_{\mathcal{L}}(Y) = \inf_{x \in Y(\overline{K})} h_{\mathcal{L}}(x).$$

THÉORÈME 2.4 .— *Pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$ , on a*

$$m_{\mathcal{L}}(Y) \leq h_{\mathcal{L}}(Y) \leq e_{\mathcal{L}}(Y).$$

PREUVE.— L'ingrédient de base dans cette démonstration est le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique et son corollaire sur l'existence de petites sections (voir appendice B). Commençons par l'inégalité  $h_{\mathcal{L}}(Y) \leq e_{\mathcal{L}}(Y)$ . Pour tout réel  $a$ , on désigne par  $\mathcal{L}(a)$  le faisceau  $\mathcal{L}$  sur  $\mathfrak{X}$  muni des métriques  $\|\cdot\|'_\sigma = \|\cdot\|_\sigma e^{-a}$ . Il est facile de voir que  $h_{\mathcal{L}(a)}(Y) = h_{\mathcal{L}}(Y) + a$ . Prenons  $a = -h_{\mathcal{L}}(Y) + \varepsilon$  où  $\varepsilon > 0$ . Alors,  $h_{\mathcal{L}(a)}(Y) = \varepsilon > 0$ . Le corollaire B.2 permet donc de trouver pour  $n$  assez grand une section  $s$  non nulle de  $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}(a)^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}})$  tel que  $\|s\|_{\text{sup}} < 1$ . Soient  $s_K \in H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes n}|_Y)$  la section induite par  $s$  sur la fibre générique  $Y$  de  $\mathcal{Y}$  et  $Z$  le diviseur de  $s_K$ . Pour tout point  $x \in (Y - Z)(\overline{K})$ ,  $h_{\mathcal{L}(a)}(x) \geq 0$ . On en déduit que :

$$e_{\mathcal{L}}(Y) \geq \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\mathcal{L}}(x) = \inf_{x \in (Y-Z)(\overline{K})} h_{\mathcal{L}(a)}(x) + h_{\mathcal{L}}(Y) - \varepsilon \geq h_{\mathcal{L}}(Y) - \varepsilon.$$

Ceci termine la preuve de la première inégalité. En multipliant les métriques de  $\mathcal{L}$  par  $\exp(m_{\mathcal{L}}(Y))$ , on ramène la deuxième inégalité au lemme suivant :

LEMME 2.5 .— *Si pour tout  $x \in Y(\overline{K})$   $h_{\mathcal{L}}(x) \geq 0$ , alors  $h_{\mathcal{L}}(Y) \geq 0$ .*

PREUVE.— C'est une récurrence sur la dimension  $d$  de  $Y$ . Pour  $d = 0$  le lemme est trivial. Supposons qu'il soit prouvé pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$  de dimension  $< d$ . Considérons une sous-variété  $Y$  de  $X$  de dimension  $d$  et désignons par  $\mathcal{Y}$  sa fermeture schématique dans  $\mathfrak{X}$ .

LEMME 2.6 .— *Il existe sur  $\mathfrak{X}$  un faisceau inversible ample  $\mathcal{M}$  muni à l'infini de métriques hermitiennes positives et des sections  $s_1, \dots, s_{d+1}$  de  $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{M}|_{\mathcal{Y}})$  tels que*

$\|s_i\|_{\text{sup}} < 1$  pour  $1 \leq i \leq d+1$  et si  $(s_i)_K$  désigne la restriction de  $s_i$  à la fibre générique  $Y$ , alors  $\bigcap \text{div}((s_i)_K) = \emptyset$ . Pour un tel faisceau, on a

- i)  $(\hat{c}_1(\mathcal{M})^{d+1}|Y) > 0$ ,  
 ii) pour tout entier  $1 \leq i \leq d$ , il existe des sous-variétés  $Z_{i,k}$  de codimension  $i$  dans  $Y$  et des entiers  $m_{i,k} > 0$  tels que

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{M})^i | Y) \geq \sum_k m_{i,k} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-i} | Z_{i,k}).$$

On termine la récurrence modulo la preuve de ce lemme. Supposons que  $(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y) < 0$ . On considère un faisceau  $\mathcal{M}$  sur  $\mathfrak{X}$  comme dans le lemme 2.6 et on pose

$$p(t) = ((\hat{c}_1(\mathcal{L}) + t\hat{c}_1(\mathcal{M}))^{d+1}|Y) = a_{d+1} + a_d t + \dots + a_0 t^{d+1}.$$

On a donc  $a_{d+1} = (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y)$ ,  $a_d = (d+1)(\hat{c}_1(\mathcal{L})^d \hat{c}_1(\mathcal{M})|Y)$  ...  $a_0 = (\hat{c}_1(\mathcal{M})^{d+1}|Y)$ . Par le lemme 2.6,  $a_0 > 0$  et par notre hypothèse  $a_{d+1} < 0$ . Il existe donc un réel  $t_0 > 0$  tels que  $p(t_0) = 0$  et  $p(t) > 0$  pour  $t > t_0$ . Soient  $a$  et  $b$  deux entiers positifs tels que  $b/a > t_0$ . Posons  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^{\otimes a} \otimes \mathcal{M}^{\otimes b}$ . On a  $(\hat{c}_1(\mathcal{L}')^{d+1}|Y) = a^{d+1} p(\frac{b}{a}) > 0$ . Le corollaire B.2 nous permet alors de trouver, pour  $n$  assez grand, une section  $s$  non nulle de  $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}'^{\otimes n}|_{\mathcal{Y}})$  de norme sup  $< 1$ . On en déduit, en utilisant le corollaire A.2 et l'hypothèse de récurrence, que  $(\hat{c}_1(\mathcal{L})^d \hat{c}_1(\mathcal{L}')|Y) \geq 0$ . D'où

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y) + \frac{b}{a} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^d \hat{c}_1(\mathcal{M})|Y) \geq 0.$$

Comme ce résultat est valable pour tout  $b/a > t_0$ , on obtient que

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y) + t_0 (\hat{c}_1(\mathcal{L})^d \hat{c}_1(\mathcal{M})|Y) \geq 0.$$

Mais  $p(t_0) = 0$ , donc  $\frac{d}{d+1} a_d t_0 + \dots + a_0 t_0^{d+1} \leq 0$ . Ceci est impossible car  $t_0 > 0$ ,  $a_0 > 0$  (par le lemme 2.6) et  $a_i \geq 0$  pour  $1 \leq i \leq d$  (par le lemme 2.6-ii) et l'hypothèse de récurrence). □

PREUVE du lemme 2.6.— On se donne un faisceau  $\mathcal{M}$  vérifiant les propriétés du lemme. On prouvera d'abord le ii). En appliquant ensuite ii) à  $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ , on trouve des sous-variétés  $Z_{d,k}$  de  $Y$  de dimension 0 et des entiers  $m_{d,k} > 0$  tels que  $(\hat{c}_1(\mathcal{M})^{d+1}|Y) \geq \sum_k m_{d,k} h_{\mathcal{M}}(Z_{d,k})$ . Pour tout  $k$ ,  $h_{\mathcal{M}}(Z_{d,k}) > 0$ . En effet,  $Z_{d,k}$  est une somme des conjugués d'un point  $P_{d,k}$  dans  $Y$  par le groupe de Galois de  $\bar{K}/K$ . Donc  $h_{\mathcal{M}}(Z_{d,k}) = h_{\mathcal{M}}(P_{d,k})$ . Par ailleurs, il existe une section  $s_i$  non nulle sur  $P_{d,k}$ . Comme  $\|s_i\|_{\text{sup}} < 1$ , alors  $h_{\mathcal{M}}(P_{d,k}) > 0$ . Ceci donne i). On prouve maintenant ii). La construction des  $Z_{i,k}$  se fait par récurrence. Pour  $i = 1$ , on prend  $\sum_k m_{1,k} Z_{1,k} = \text{div}((s_1)|_Y)$ . Le corollaire A.2 implique pour tout  $1 \leq j \leq d+1$

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j} \hat{c}_1(\mathcal{M})^j | Y) \geq \sum_k m_{1,k} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j} \hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-1} | Z_{1,k}).$$

On suppose construits les  $Z_{i,k}$  tels que pour tout  $i \leq j \leq d + 1$ ,

$$(2) \quad (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j} \hat{c}_1(\mathcal{M})^j | Y) \geq \sum_k m_{i,k} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j} \hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-i} | Z_{i,k}).$$

Il existe pour chaque  $k$  une section de  $\{s_1, \dots, s_{d+1}\}$  non identiquement nulle sur  $Z_{i,k}$ . Choisissons-en une qu'on note  $s_{i,k}$ . On définit les  $Z_{i+1,k'}$  par la relation

$$\sum_k m_{i,k} \operatorname{div}((s_{i,k})|_{Z_{i,k}}) = \sum_{k'} m_{i+1,k'} Z_{i+1,k'}.$$

Le corollaire A.2 implique pour tout  $i + 1 \leq j \leq d + 1$ ,

$$\begin{aligned} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j} \hat{c}_1(\mathcal{M})^j | Y) &\geq \sum_k m_{i,k} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j} \hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-i} | Z_{i,k}) \\ &\geq \sum_{k'} m_{i+1,k'} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-j} \hat{c}_1(\mathcal{M})^{j-i-1} | Z_{i+1,k'}). \end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence. En prenant dans (2)  $i = j$ , on trouve les inégalités du *ii*). Il reste à trouver un faisceau satisfaisant les propriétés du lemme 2.6. On prend un faisceau  $\mathcal{M}$  très ample sur  $\mathfrak{X}$  et  $(d + 1)$  sections  $s_1, \dots, s_{d+1}$  de  $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{M}|_{\mathcal{Y}})$  qui ne s'annulent pas en même temps sur  $Y$ . On équipe  $\mathcal{M}$  en chaque place  $\sigma \in S$  d'une métrique positive qui donne  $\|s_i\|_{\sup} < 1$  pour tout  $i$ .  $\square$

Le théorème 2.4 compare les deux notions de hauteur dans un seul sens. Il est toutefois suffisant pour la preuve de la conjecture de Bogomolov. Le théorème qui suit établit la comparaison dans l'autre sens, nous l'énonçons sans démonstration.

**THÉORÈME 2.7 .—** *Pour toute sous-variété  $Y$  de dimension  $d$  de  $X$ , on a*

$$\frac{1}{d+1} e_{\mathcal{L}}(Y) + \frac{d}{d+1} m_{\mathcal{L}}(Y) \leq h_{\mathcal{L}}(Y) \leq e_{\mathcal{L}}(Y).$$

**REMARQUE.—** La preuve du lemme 2.2 donne une démonstration de ce théorème pour des sous-variétés d'un espace projectif relativement au fibré  $\mathcal{O}(1)$  muni d'une métrique de Fubini-Study. La preuve dans le cas général suit les mêmes idées sauf qu'il est beaucoup plus difficile de trouver les sections  $s_1, \dots, s_d$  (voir preuve du lemme 2.2 pour les notations). L'existence de ces sections est assurée par le théorème de Nakai-Moishezon arithmétique ([47] théorème 4.2).

On déduit du théorème 2.4 que  $h_{\mathcal{L}}(Y)$  vérifie la propriété (H2), c'est-à-dire :

**COROLLAIRE 2.8 .—** *Soit  $Y$  une sous-variété de  $X$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $Y_{\mathcal{L}}\{h_{\mathcal{L}}(Y) - \varepsilon\}$  n'est pas Zariski-dense dans  $Y$ . Par conséquent, toute suite générique  $(x_n)$  de points de  $Y(\bar{K})$  vérifie :*

$$\liminf h_{\mathcal{L}}(x_n) \geq h_{\mathcal{L}}(Y).$$

On se propose maintenant de caractériser les suites génériques  $(x_n)$  pour lesquelles  $h_{\mathcal{L}}(x_n)$  converge vers  $h_{\mathcal{L}}(Y)$ . Notons que l'existence d'une telle suite est équivalente à

l'égalité  $h_{\mathcal{L}}(Y) = e_{\mathcal{L}}(Y)$ . Introduisons les notations suivantes : pour tout point  $x \in X(\overline{K})$ ,  $O(x)$  désigne l'orbite sous le groupe de Galois  $G$  du point  $x$  dans  $X(\overline{K})$ . Pour toute place  $\sigma \in S$ ,  $\mu(\sigma, x)$  désigne la distribution de  $X_{\sigma}(\mathbb{C})$  définie par

$$\mu(\sigma, x) = \frac{1}{\#O(x)} \sum_{y \in O(x)} \delta_y$$

où  $\delta_y$  est la distribution de Dirac en  $y$  (l'ensemble  $O(x)$  est considéré comme sous-ensemble de  $X_{\sigma}(\mathbb{C})$  au moyen de  $\bar{\sigma}$ ). Nous disons qu'une suite  $(x_n)$  de points de  $Y(\overline{K})$  est équidistribuée dans  $Y_{\sigma}(\mathbb{C})$  par rapport à une mesure  $\mu$ , si pour toute fonction  $f$  continue sur  $Y_{\sigma}(\mathbb{C})$ , la suite  $\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y)$  converge vers  $\int_{Y_{\sigma}(\mathbb{C})} f(y) \mu$ .

PROPOSITION 2.9. — Soient  $Y$  une sous-variété de  $X$  de dimension  $d$  et  $(x_n)$  une suite générique de points de  $Y(\overline{K})$  tels que  $h_{\mathcal{L}}(x_n)$  converge vers  $h_{\mathcal{L}}(Y)$ . Alors, pour toute place  $\sigma \in S$ , la suite  $(x_n)$  est équidistribuée dans  $Y_{\sigma}(\mathbb{C})$  par rapport à la mesure

$$\mu_{\sigma} = \frac{c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})^d}{\deg_{\mathcal{L}}(Y)}|_{Y_{\sigma}(\mathbb{C})}.$$

PREUVE. — Remarquons d'abord que toute fonction continue sur  $Y_{\sigma}(\mathbb{C})$  est limite uniforme de fonctions  $C^{\infty}$  sur  $X_{\sigma}(\mathbb{C})$  (voir par exemple [44] lemme 2.2). Soit  $f$  une fonction  $C^{\infty}$  de  $X_{\sigma}(\mathbb{C})$  telle que la suite

$$u_n = \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) - \int_{Y_{\sigma}(\mathbb{C})} f(y) \frac{c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})^d}{\deg_{\mathcal{L}}(Y)}$$

ne converge pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $u_n$  converge vers une limite  $C \neq 0$ . Pour tout réel  $\lambda$ , notons  $\mathcal{L}(\lambda f)$  le faisceau  $\mathcal{L}$  muni des métriques initialement fixées sur  $\mathcal{L}$  en toutes les places  $\tau \in S$  différentes de  $\sigma$  et de la métrique  $\|\cdot\|'_{\sigma}$  en la place  $\sigma$  définie par  $\|\cdot\|'_{\sigma} = \|\cdot\|_{\sigma} \exp(-\lambda f)$  où  $\|\cdot\|_{\sigma}$  est la métrique originale sur  $\mathcal{L}$ . Pour  $\lambda$  assez petit, la courbure de  $\mathcal{L}(-\lambda f)_{\sigma}$  est positive. On en déduit par le corollaire 2.8 que

$$(3) \quad h_{\mathcal{L}(\lambda f)}(Y) \leq \liminf h_{\mathcal{L}(\lambda f)}(x_n).$$

Pour tout point  $x$ ,

$$h_{\mathcal{L}(\lambda f)}(x) = h_{\mathcal{L}}(x) + \varepsilon_{\sigma} \frac{\lambda}{[K : \mathbb{Q}] \#O(x)} \sum_{y \in O(x)} f(y).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\hat{c}_1(\mathcal{L}(\lambda f))^{d+1}|_Y) &= \sum_{i=0}^{d+1} \binom{d+1}{i} (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{O}(\lambda f))^i|_Y) \\ &= (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|_Y) + (d+1)\lambda\varepsilon_{\sigma} \int_{Y_{\sigma}(\mathbb{C})} f(y) c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})^d + P(\lambda) \end{aligned}$$

où  $P(\lambda) = a_2\lambda^2 + \dots + a_{d+1}\lambda^{d+1}$ . Ce calcul se fait grâce à la proposition A.1 en considérant la section 1 de  $\mathcal{O}(\lambda f)$ . On déduit de (3) et de l'égalité  $\lim h_{\mathcal{L}}(x_n) = h_{\mathcal{L}}(Y)$  que

$$\lambda C\varepsilon_\sigma \geq \frac{P(\lambda)}{(d+1)\deg_{\mathcal{L}}(Y)},$$

ce qui est absurde. Ceci achève la preuve.  $\square$

### 3 HAUTEUR NORMALISÉE D'UNE SOUS-VARIÉTÉ D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE

Soit  $A$  une variété abélienne sur  $K$ . Pour tout entier  $n \neq 0$ ,  $[n] : A \rightarrow A$  désigne l'isogénie multiplication par  $n$ . On associe à tout faisceau inversible ample et symétrique  $L$  sur  $A$  (i.e.  $[-1]^*L \simeq L$ ) une hauteur normalisée  $\hat{h}_L : A(\overline{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  appelée hauteur de Néron-Tate. C'est l'unique hauteur de Weil associée à  $L$  qui satisfait la relation  $\hat{h}([n]x) = n^2\hat{h}(x)$  pour tout point  $x$  de  $A(\overline{K})$ . Les objectifs de cette section sont d'une part la réalisation de la hauteur de Néron-Tate comme une hauteur arakelovienne et d'autre part la définition d'une hauteur normalisée d'une sous-variété de  $A$  qui généralise la hauteur de Néron-Tate sur les points. Il n'est pas toujours possible de réaliser la hauteur de Néron-Tate comme une hauteur arakelovienne. Toutefois, on montrera qu'elle est une limite de telles hauteurs. Nous définissons alors la hauteur normalisée d'une sous-variété par le même procédé limite. Nous étendons enfin les résultats de la section précédente à cette hauteur normalisée.

*Métriques du cube* : Soient  $A$  une variété abélienne sur  $\mathbb{C}$  et  $L$  un faisceau inversible sur  $A$ . Soit  $\mathcal{D}_3(L)$  le faisceau inversible sur  $A^3$  défini par

$$\mathcal{D}_3(L) = p_{1,2,3}^*L \otimes p_{1,2}^*L^{-1} \otimes p_{2,3}^*L^{-1} \otimes p_{1,3}^*L^{-1} \otimes p_1^*L \otimes p_2^*L \otimes p_3^*L$$

où  $p_I : A^3 \rightarrow A$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \sum_{i \in I} x_i$  pour tout  $I \subset \{1, 2, 3\}$ . Le théorème du cube affirme que  $\mathcal{D}_3(L)$  est trivial. Toute métrique de  $L$  qui induit une métrique constante sur  $\mathcal{D}_3(L) \simeq \mathcal{O}_{A^3}$  est appelée *métrique du cube*. On montre que les métriques du cube sont toutes multiples de l'une d'entre elles et qu'elles sont les seules métriques à courbure invariante par translation [26].

*Bonne réduction* : Soient  $\mathcal{A}$  un schéma abélien sur  $\mathcal{O}_K$  (i.e. un schéma en groupes propre et lisse sur  $\mathcal{O}_K$ ) et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible ample et symétrique sur  $\mathcal{A}$ . Par le théorème du cube,  $\mathcal{D}_3(\mathcal{L})$  est trivial. Fixons un isomorphisme  $\varphi : \mathcal{O}_{A^3} \rightarrow \mathcal{D}_3(\mathcal{L})$ . On munit  $\mathcal{L}_\sigma$  pour toute place  $\sigma \in S$  de la métrique du cube  $\|\cdot\|_\sigma$  qui induit par  $\varphi$  la métrique triviale sur  $\mathcal{O}_{A^3}$ . Remarquons qu'un autre choix de l'isomorphisme  $\varphi$  aurait multiplié les métriques  $\|\cdot\|_\sigma$  par  $|l|_\sigma$  où  $l$  est une unité de  $\mathcal{O}_K$ . Grâce à la formule du produit, les hauteurs définies par  $\mathcal{L}$  ainsi métrisé ne dépendent pas du choix de  $\varphi$ . D'autre part, on peut choisir un isomorphisme  $\psi : [-1]^*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  qui soit une isométrie en chaque place  $\sigma \in S$ . Il découle de l'existence des isométries  $\varphi$  et  $\psi$  que la hauteur définie par  $\mathcal{L}$  est quadratique. C'est donc la hauteur de Néron-Tate associée à  $\mathcal{L}_K$ .

*Cas général* : On se donne une variété abélienne  $A$  définie sur  $K$  et  $L$  un faisceau inversible ample et symétrique sur  $A$ . Fixons un modèle  $\mathcal{A}$  de  $A$  propre et plat sur

$\mathcal{O}_K$ , un faisceau  $\mathcal{L}$  inversible ample sur  $\mathcal{A}$  qui étend  $L$  et pour chaque place  $\sigma \in S$ , une métrique hermitienne à courbure positive sur  $L_\sigma$ .

LEMME 3.1. — *Pour tout entier positif  $m$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute sous-variété  $Y$  de  $A$  de dimension  $d$ , on ait*

$$|h_{\mathcal{L}}([m]_*[Y]) - m^2 h_{\mathcal{L}}(Y)| \leq C .$$

PREUVE.— Soit  $\mathcal{A}'$  la normalisation de  $\mathcal{A}$  par le morphisme  $[m] : A \rightarrow A$  de telle sorte qu'on ait le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}' & \longleftarrow & A \\ [m] \downarrow & & \downarrow [m] \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & A \end{array}$$

On dispose de deux modèles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  de  $A$  et de deux faisceaux inversibles métrisés  $\mathcal{L}^{\otimes m^2}$  et  $[m]^*\mathcal{L}$  qui étendent le même faisceau  $L^{\otimes m^2}$  respectivement à  $\mathcal{A}$  et à  $\mathcal{A}'$ . Le lemme A.3 donne par suite une constante  $C > 0$  tel que

$$|h_{[m]^*\mathcal{L}}(Y) - h_{\mathcal{L}^{\otimes m^2}}(Y)| \leq C .$$

Le lemme 3.1 en découle en remarquant que  $h_{[m]^*\mathcal{L}}(Y) = h_{\mathcal{L}}([m]_*[Y])$  et  $h_{\mathcal{L}^{\otimes m^2}}(Y) = m^2 h_{\mathcal{L}}(Y)$ . □

PROPOSITION-DÉFINITION 3.2. — *La suite  $\frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*[Y])$  converge uniformément vers une limite finie appelée hauteur normalisée de  $Y$  et notée  $\hat{h}_L(Y)$ . Cette limite ne dépend pas des choix de  $\mathcal{A}$ , de  $\mathcal{L}$  et de ses métriques. Elle coïncide sur les points de  $A(\bar{K})$  avec la hauteur de Néron-Tate de  $L$ .*

PREUVE.— Par le lemme 3.1, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute sous-variété  $Y$  de  $A$ ,  $|h_{\mathcal{L}}([2]_*[Y]) - 4h_{\mathcal{L}}(Y)| \leq C$ . On applique cette inégalité au cycle  $[2^n]_*[Y]$  (elle est en fait valable pour tout cycle qui est un multiple entier d'un cycle intègre vu la normalisation de la hauteur). On obtient

$$\left| \frac{1}{4^{n+1}} h_{\mathcal{L}}([2^{n+1}]_*[Y]) - \frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*[Y]) \right| \leq \frac{C}{4^n} .$$

La convergence uniforme de  $\frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*[Y])$  s'ensuit. Le lemme A.3 permet de voir que la limite est indépendante des choix du modèle, du faisceau et des métriques. □

Il est plus commode pour la suite de fixer les données et de réécrire la proposition 3.2 comme suit : Fixons un isomorphisme  $\psi : [2]^*L \rightarrow L^{\otimes 4}$ . Il existe pour toute place  $\sigma \in S$  une seule métrique du cube  $\|\cdot\|_\sigma$  sur  $L_\sigma$  qui fait de  $\psi_\sigma$  une isométrie. Soient  $\mathcal{A}$  un modèle propre et plat sur  $\mathcal{O}_K$  de  $A$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible ample sur  $\mathcal{A}$  qui étend  $L$ . On définit une suite  $\mathcal{A}_n$  de  $\mathcal{O}_K$ -modèles propres et plats de  $A$  et de faisceaux inversibles amples  $\mathcal{L}_n \in \text{Pic}(\mathcal{A}_n) \otimes \mathbb{Q}$  qui étendent  $L$ , par :  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$  et, pour

$n > 0$ ,  $\mathcal{A}_n$  est la normalisation de  $\mathcal{A}$  par le morphisme  $[2^n] : A \rightarrow A$  de telle sorte qu'on ait le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longleftarrow & A \\ [2^n] \downarrow & & \downarrow [2^n] \\ \mathcal{A} & \longleftarrow & A \end{array}$$

et  $\mathcal{L}_n = \frac{1}{4^n} [2^n]^* \mathcal{L} \in \text{Pic}(\mathcal{A}_n) \otimes \mathbb{Q}$ . La fibre générique de  $\mathcal{L}_n$  s'identifie au moyen de l'isomorphisme  $\psi$  à  $L$ . Le faisceau  $\mathcal{L}_n$  est donc muni aux places infinies de  $K$  des métriques du cube précédemment fixées sur  $L$ . La proposition 3.2 peut se réécrire sous la forme suivante : pour toute sous-variété  $Y$  de  $A$ ,

$$\hat{h}_L(Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{\mathcal{L}_n}(Y).$$

En effet,  $\frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}([2^n]_*[Y]) = h_{\mathcal{L}_n}(Y)$ . On définit aussi

$$\hat{e}_L(Y) = \sup_{\substack{Z \subset Y \\ \text{cod} Z = 1}} \inf_{x \in (Y-Z)(\bar{K})} \hat{h}_L(x).$$

**THÉORÈME 3.3** .— *Pour toute sous-variété  $Y$  de  $A$ , on a*

$$0 \leq \hat{h}_L(Y) \leq \hat{e}_L(Y).$$

**PREUVE.**— Les notations  $h_{\mathcal{L}_n}(Y)$ ,  $e_{\mathcal{L}_n}(Y)$  et  $m_{\mathcal{L}_n}(Y)$  désignent les invariants de  $Y$  définis dans la section précédente relativement à la variété arithmétique  $\mathcal{A}_n$  et au faisceau  $\mathcal{L}_n$ . Remarquons que  $\mathcal{L}_n$  est ample car la normalisation  $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}$  est finie et  $\mathcal{L}$  est ample. Par conséquent, le théorème 2.4 implique que

$$m_{\mathcal{L}_n}(Y) \leq h_{\mathcal{L}_n}(Y) \leq e_{\mathcal{L}_n}(Y).$$

Comme la convergence des hauteurs  $h_{\mathcal{L}_n}$  est uniforme,  $e_{\mathcal{L}_n}(Y)$  converge vers  $\hat{e}_L(Y)$  et  $m_{\mathcal{L}_n}(Y)$  converge vers  $\inf_{x \in Y(\bar{K})} \hat{h}_L(x)$ . Pour achever la preuve du théorème, il suffit de remarquer que la hauteur de Néron–Tate est positive sur les points.  $\square$

Le théorème suivant prolonge la comparaison du théorème 2.7 aux hauteurs normalisées :

**THÉORÈME 3.4** .— *Pour toute sous-variété  $Y$  de  $A$  de dimension  $d$ , on a*

$$\frac{1}{d+1} \hat{e}_L(Y) \leq \hat{h}_L(Y) \leq \hat{e}_L(Y).$$

Ce théorème, qui ne sera pas utilisé dans la preuve de la conjecture de Bogomolov, implique l'équivalence (B) $\leftrightarrow$ (T) annoncée dans l'introduction : la conjecture de Bogomolov est équivalente à la caractérisation suivante des sous-variétés de torsion : *soit  $Y$  une sous-variété de  $A$ , alors  $\hat{h}_L(Y) = 0$  si et seulement si  $Y$  est une sous-variété de torsion.*

Le dernier résultat de cette section est l'analogue de la proposition 2.9 pour les hauteurs normalisées. Il s'agit de caractériser le cas d'égalité  $\hat{h}_L(Y) = \hat{e}_L(Y)$ . On rappelle

que pour toute sous-variété  $Y$  de  $A$  et tout réel positif  $a$ ,  $Y_L\{a\}$  désigne l'ensemble  $\{x \in Y(\overline{K}) \mid \hat{h}_L(x) \leq a\}$ . On pose pour chaque place  $\sigma \in S$ ,  $\omega_\sigma = c_1(L_\sigma, \|\cdot\|_\sigma)$  la courbure de la métrique du cube fixée sur  $L_\sigma$ . C'est aussi la courbure de toute autre métrique du cube sur  $L_\sigma$ .

PROPOSITION 3.5. — Soit  $Y$  une sous-variété de  $A$  de dimension  $d$ .

i) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $Y_L\{\hat{h}_L(Y) - \varepsilon\}$  n'est pas Zariski-dense. Par conséquent, toute suite générique  $(x_n)$  de points de  $Y(\overline{K})$  vérifie

$$\liminf \hat{h}_L(x_n) \geq \hat{h}_L(Y).$$

ii) Soit  $(x_n)$  une suite générique de  $Y(\overline{K})$  telle que la suite  $\hat{h}_L(x_n)$  converge vers  $\hat{h}_L(Y)$ . Alors, pour toute place  $\sigma \in S$ , la suite  $(x_n)$  est équidistribuée dans  $Y_\sigma(\mathbb{C})$  par rapport à la mesure  $\mu_\sigma = \frac{\omega_\sigma^d}{\deg_L(Y)}|_{Y_\sigma(\mathbb{C})}$ .

PREUVE.— Le premier point découle, comme dans la section précédente, de l'inégalité  $\hat{h}_L(Y) \leq \hat{e}_L(Y)$  établie dans le théorème 3.3. La démonstration du ii) ne découle pas directement de son analogue de la section précédente. Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  de  $A_\sigma(\mathbb{C})$  telle que la suite

$$u_n = \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) - \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y) \frac{\omega_\sigma^d}{\deg_L(Y)}$$

ne converge pas vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $u_n$  converge vers une limite  $C \neq 0$ . On introduit les faisceaux  $\mathcal{L}_m(\lambda f)$  comme dans la preuve de 2.9. Ces faisceaux coïncident sur les fibres génériques des  $\mathcal{A}_m$  avec  $L(\lambda f)$ . Ils sont par suite à courbure positive pour  $\lambda$  assez petit. Il découle aussi l'existence d'un polynôme  $P(\lambda) = a_2\lambda^2 + \dots + a_{d+1}\lambda^{d+1}$  indépendant de  $m$  tel que

$$(\hat{c}_1(\mathcal{L}_m(\lambda f))^{d+1}|Y) = (\hat{c}_1(\mathcal{L}_m)^{d+1}|Y) + \lambda \varepsilon_\sigma (d+1) \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y) \omega_\sigma^d + P(\lambda).$$

La convergence uniforme de  $h_{\mathcal{L}_m}$  vers la hauteur normalisée donne pour tout  $\varepsilon > 0$  un entier  $N$  tel que pour tout  $m \geq N$ ,

$$* \quad \sup_{x \in A(\overline{K})} |h_{\mathcal{L}_m}(x) - \hat{h}_L(x)| \leq \varepsilon$$

$$* \quad \left| h_{\mathcal{L}_m(\lambda f)}(Y) - \hat{h}_L(Y) - \frac{\lambda \varepsilon_\sigma}{[K : \mathbb{Q}]} \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y) d\mu_\sigma(y) - \frac{P(\lambda)}{(d+1)[K : \mathbb{Q}] \deg_L(Y)} \right| \leq \varepsilon.$$

La proposition 2.8 implique que  $\liminf h_{\mathcal{L}_N(\lambda f)}(x_n) \geq h_{\mathcal{L}_N(\lambda f)}(Y)$ . Comme  $\lim \hat{h}_L(x_n) = \hat{h}_L(Y)$ , on obtient l'inégalité :

$$\liminf \frac{\lambda \varepsilon_\sigma}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) \geq \lambda \varepsilon_\sigma \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} f(y) d\mu_\sigma(y) + \frac{P(\lambda)}{(d+1) \deg_L(Y)} - 2\varepsilon [K : \mathbb{Q}].$$

D'où  $\lambda C\varepsilon_\sigma \geq \frac{P(\lambda)}{(d+1)\deg_L(Y)} - 2\varepsilon[K : \mathbb{Q}]$ . Cette relation est valable pour tout  $\varepsilon > 0$ , elle implique par suite que  $\lambda C\varepsilon_\sigma \geq \frac{P(\lambda)}{(d+1)\deg_L(Y)}$ , ce qui n'est pas possible. Ceci achève la preuve de la proposition.  $\square$

REMARQUE.— Les hauteurs normalisées sur les variétés abéliennes sont construites indépendamment par Zhang [48], Philippon [30] et Gubler [21].

#### 4 PREUVE DE LA CONJECTURE DE BOGOMOLOV

La preuve du théorème 1.2 est divisée en deux parties. La première est algébrique. Elle consiste à traduire pour une sous-variété le fait de ne pas être de torsion en terme de birationalité d'un certain morphisme. La deuxième partie, qualifiée d'arithmétique, est une application des résultats de la section précédente à la source et à l'aboutissement de ce morphisme. Ces derniers sont des sous-variétés de deux puissances de la variété abélienne.

Soient  $A$  une variété abélienne sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et  $X$  une sous-variété de  $A$ . On définit le groupe algébrique  $G(X)$  comme le fixateur de  $X$  dans  $A$ . C'est-à-dire, le sous-groupe des éléments  $a \in A$  tel que  $a + X = X$ . Considérons pour tout entier  $m \geq 2$  l'application

$$\begin{aligned} \alpha_m : X^m &\longrightarrow A^{m-1} \\ (x_1, \dots, x_m) &\longrightarrow (x_2 - x_1, \dots, x_m - x_{m-1}) \end{aligned}$$

et notons  $Y_m = \alpha_m(X^m)$  l'image de  $X^m$ .

LEMME 4.1. — *Soit  $X$  une sous-variété de  $A$  dont le fixateur  $G(X)$  est trivial. Alors, pour  $m$  assez grand, l'application  $\alpha_m : X^m \rightarrow Y_m$  est birationnelle.*

PREUVE.— Elle se fait en trois étapes.

a) Pour  $m$  suffisamment grand,  $\alpha_m : X^m \rightarrow Y_m$  est génériquement finie. Il suffit pour cela de trouver une fibre de  $\alpha_m$  réduite à un point. Pour tout point  $x \in X$ , soit  $G(x)$  le sous-schéma fermé de  $A$  formé par les points  $a$  tels que  $a + x \in X$ . On a

$$\bigcap_{x \in X} G(x) = G(X) = 1.$$

Il s'ensuit que, pour  $m$  assez grand, il existe  $(x_1, \dots, x_m) \in X^m$  tel que  $G(x_1) \cap \dots \cap G(x_m) = 1$ . Le résultat annoncé en découle en remarquant que la fibre de  $\alpha_m : X^m \rightarrow Y_m$  qui contient  $(x_1, \dots, x_m)$  est isomorphe à  $G(x_1) \cap \dots \cap G(x_m)$ .

b) On fixe  $m_0$  suffisamment grand pour satisfaire a). Il existe un ouvert non vide  $U$  de  $X^{m_0}$  tel que  $\alpha_{m_0} : U \rightarrow Y_{m_0}$  soit lisse. Cette application est étale à cause de a). De plus, pour tout  $m \geq m_0$ , l'application  $\alpha_m : U \times X^{m-m_0} \rightarrow Y_m$  est aussi étale.

c) Soit  $(x_1, \dots, x_{m_0})$  un point de  $U$ . Il existe  $n \geq 0$  et des points  $(y_1, \dots, y_n) \in X^n$  tels que

$$G(x_1) \cap \dots \cap G(x_{m_0}) \cap G(y_1) \cap \dots \cap G(y_n) = 1.$$

Par suite, la fibre de  $\alpha_{m_0+n} : X^{m_0+n} \rightarrow Y_{m_0+n}$  qui contient  $(x_1, \dots, x_{m_0}, y_1, \dots, y_n)$  est réduite à ce point. On en déduit par b) que, pour  $m \geq m_0 + n$ , l'application  $\alpha_m : U \times X^{m-m_0} \rightarrow Y_m$  est birationnelle car elle est étale et possède une fibre réduite à un élément.  $\square$

On fixe maintenant une variété abélienne  $A$  sur  $K$  et  $L$  un faisceau inversible ample et symétrique sur  $A$ . On fixe aussi un isomorphisme  $\psi : [2]^*L \rightarrow L^{\otimes 4}$  et pour chaque place  $\sigma \in S$ , la métrique du cube  $\| \cdot \|_\sigma$  sur  $L_\sigma$  qui fait de  $\psi_\sigma$  une isométrie. On note  $\omega_\sigma = c_1(L_\sigma, \| \cdot \|_\sigma)$  la courbure de  $(L_\sigma, \| \cdot \|_\sigma)$ . Soit  $\hat{h}$  la hauteur normalisée associée à  $L$ . Soit  $m \geq 2$  un entier. On désigne par  $\pi_i : A^m \rightarrow A$  la  $i$ -ième projection de  $A^m$  dans  $A$  et par  $L_m$  le faisceau inversible sur  $A^m$  donné par  $L_m = \otimes_i \pi_i^* L$ . On fixe d'une part l'isomorphisme  $\psi_m : [2]^*L_m \rightarrow L_m^{\otimes 4}$  induit par  $\psi$ , et d'autre part les métriques du cube  $\| \cdot \|_{m,\sigma}$  sur  $L_m$  induites par celles de  $L$ . Alors, l'isomorphisme  $\psi_m$  est une isométrie et la courbure  $\omega_{m,\sigma}$  de  $(L_m, \| \cdot \|_{m,\sigma})$  est donnée par  $\omega_{m,\sigma} = \sum_{i=1}^m \pi_i^* \omega_\sigma$ . On note  $\hat{h}_m$  la hauteur normalisée sur  $A^m$  définie par  $L_m$ . Elle est donnée par  $\hat{h}_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \hat{h}(x_i)$ .

La preuve de la conjecture de Bogomolov se fait par l'absurde. Soit  $X$  une sous-variété de  $A$  qui n'est pas de torsion et qui contient une suite  $(x_n)$  de petits points Zariski-denses. Quitte à élargir le corps de base, on suppose que  $X$  est définie sur  $K$ .

*Première étape* : Soit  $G = G(X)$  le sous-groupe algébrique de  $A$  qui fixe  $X$ . On définit les deux variétés abéliennes  $A' = A/G$  et  $A''$  la composante connexe réduite de  $G$  contenant le neutre. Le quotient  $X' = X/G$  est une sous-variété de  $A' = A/G$  de fixateur trivial. Deux cas se présentent : soit  $X'$  est un point, il n'est pas alors de torsion car  $X$  n'est pas de torsion dans  $A$ . Soit  $X'$  est de dimension  $> 0$ , et dans ce cas  $X'$  n'est pas une sous-variété de torsion dans  $A'$  car son fixateur est trivial. Dans les deux cas,  $X'$  n'est pas une sous-variété de torsion de  $A'$ .

Fixons une isogénie  $s : A \rightarrow A' \times A''$ . La conjecture de Bogomolov ne dépend pas du choix du faisceau  $L$  sur  $A$ . On peut donc supposer que  $L = s^*(\text{pr}_1^* L' \otimes \text{pr}_2^* L'')$  où  $L'$  et  $L''$  sont deux faisceaux inversibles amples et symétriques sur respectivement  $A'$  et  $A''$ . L'image de la suite dense des petits points  $(x_n)$  de  $X(\bar{K})$  dans  $X'(\bar{K})$  est une suite dense de petits points. La sous-variété  $X'$  de  $A'$  fournit par suite un contre-exemple à la conjecture de Bogomolov dont le fixateur est trivial.

*Deuxième étape* : On suppose  $G(X)$  trivial et on fixe  $m$  assez grand pour satisfaire la conclusion du lemme 4.1. Par suite, il existe un ouvert non vide  $V_m$  de  $Y_m$  tel que, si  $U_m = \alpha_m^{-1}(V_m)$  désigne l'image inverse de  $V_m$ , alors  $\alpha_m : U_m \rightarrow V_m$  est un isomorphisme. Ces ouverts peuvent être pris rationnels sur  $K$ .

LEMME 4.2. — *Il existe des sous-suites  $(x_{i_n})$  de  $(x_n)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) telles que la suite  $u_n = (x_{1_n}, \dots, x_{m_n})$  appartienne à  $U_m$  et soit générique dans  $X^m$ .*

PREUVE.— Les sous-variétés strictes de  $X^m$  sont dénombrables, on les fixe dans une suite  $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ . La construction des sous-suites  $(x_{i_n})$  se fait par récurrence. On suppose construit l'élément  $u_{n-1} \in U_m$ . La suite des points  $(x_{i_n})_{1 \leq i \leq m} \in X^m(\bar{K})$  est dense dans  $X^m$ . Il existe par suite un élément  $u_n = (x_{1_n}, \dots, x_{m_n}) \in U_m$  tel que  $u_n \notin \bigcup_{1 \leq j \leq n} Z_j$  et  $1_n > 1_{n-1}, \dots, m_n > m_{n-1}$ . La suite  $u_n$  ainsi construite est générique dans  $X^m$ .  $\square$

Il découle donc du lemme 4.2, de la proposition 3.5-*i*) et du théorème 3.3 que

$$0 \leq \hat{h}_m(X^m) \leq \lim_n \hat{h}_m(u_n) = 0.$$

D'où  $\hat{h}_m(X^m) = \lim_n \hat{h}_m(u_n) = 0$ . La proposition 3.5-*ii*) implique par conséquent que pour toute place  $\sigma \in S$ , la suite des distributions  $\mu(\sigma, u_n)$  converge sur  $X_\sigma^m(\mathbb{C})$  vers la mesure

$$\mu_\sigma = \frac{(\omega_{m,\sigma})^{dm}}{\deg_{L_m}(X^m)}|_{X_\sigma^m(\mathbb{C})}.$$

La suite  $\alpha_m(u_n)$  est aussi générique dans  $Y_m$ . Il découle donc de la proposition 3.5-*i*) que

$$0 \leq \hat{h}_{m-1}(Y_m) \leq \lim_n \hat{h}_{m-1}(\alpha_m(u_n)) = 0.$$

On obtient comme précédemment que, pour toute place  $\sigma \in S$ , la suite des distributions  $\mu(\sigma, \alpha_m(u_n))$  converge sur  $Y_{m,\sigma}(\mathbb{C})$  vers la mesure

$$\nu_\sigma = \frac{(\omega_{m-1,\sigma})^{dm}}{\deg_{L_{m-1}}(Y_m)}|_{Y_{m,\sigma}(\mathbb{C})}.$$

Comme  $\alpha_m : U_m \rightarrow V_m$  est un isomorphisme et  $u_n \in U_m$  ainsi que son orbite sous le groupe de Galois  $G$ , l'égalité  $\alpha_m^* \mu(\sigma, \alpha_m(u_n)) = \mu(\sigma, u_n)$  s'établit entre distributions sur  $U_m$ . On en déduit l'égalité  $\alpha_m^* \nu_\sigma = \mu_\sigma$  des distributions limites sur  $U_m$ . C'est aussi une égalité entre formes différentielles aux signes près d'abord sur  $U_m$  et par suite sur  $X_\sigma^m(\mathbb{C})$ . Soit  $x$  un point lisse de  $X_\sigma(\mathbb{C})$ . La forme  $\mu_\sigma$  est non nulle en le point  $(x, x \dots, x) \in X_\sigma^m(\mathbb{C})$ . Par ailleurs, l'application  $\alpha_m$  envoie la diagonale de  $X^m$  sur 0.

Il s'ensuit que  $\alpha_m^* \nu_\sigma$  s'annule en  $(x, x \dots, x)$ . C'est la contradiction qui termine la preuve du théorème 1.2.  $\square$

Nous terminons cette section par quelques résultats liés à la conjecture de Bogomolov. Le premier est une reformulation du théorème 1.2. À toute sous-variété  $X$  de  $A$ , on associe l'ensemble  $T(X)$  de ses sous-variétés de torsion maximales.

**THÉORÈME 4.3** .— *Soit  $X$  une sous-variété de  $A$ . Alors,*

*i)  $T(X)$  est fini, et*

*ii) il existe une constante  $\varepsilon > 0$  telle qu'on ait  $X\{\varepsilon\} = \bigcup_{Y \in T(X)} Y\{\varepsilon\}$ .*

*En particulier, si  $X$  ne contient aucune sous-variété de torsion, alors il existe une constante  $\varepsilon > 0$  telle que  $X\{\varepsilon\}$  soit vide.*

**PREUVE.**— On utilise une récurrence sur  $d$  la dimension de  $X$ . Le théorème 4.3 est évident pour  $d = 0$ . On suppose qu'il est démontré pour les sous-variétés de dimension  $\leq d$ . Soit  $X$  une sous-variété de dimension  $d + 1$ . L'énoncé 4.3 est trivialement vérifié si  $X$  est de torsion. Supposons donc que  $X$  ne soit pas de torsion. Par le théorème 1.2, il existe  $\varepsilon > 0$  et  $Z$  un fermé strict de  $X$  tels que  $X\{\varepsilon\} = Z\{\varepsilon\}$ . Soient  $Z_1, \dots, Z_r$  les composantes irréductibles de  $Z$ . L'hypothèse de récurrence implique que les ensembles  $T(Z_i)$  sont finis et que  $X\{\varepsilon'\} = \bigcup_{Y \in \cup_i T(Z_i)} Y\{\varepsilon'\}$  pour  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ . On en déduit que

$$\bigcup_{Y \in T(X)} Y\{\varepsilon'\} = X\{\varepsilon'\} = \bigcup_{Y \in \cup_i T(Z_i)} Y\{\varepsilon'\}.$$

La propriété *ii*) en découle ainsi que l'égalité  $T(X) = \cup_i T(Z_i)$  qui donne le premier point. □

**COROLLAIRE 4.4** .— *Soit  $(x_n) \in A(\overline{K})$  une suite de petits points.*

*i) Alors,  $(x_n)$  est Zariski-dense dans une sous-variété de torsion de  $A$ .*

*ii) Si de plus aucune sous-suite de  $(x_n)$  n'est contenue dans une sous-variété stricte de torsion de  $A$ . Alors pour toute place  $\sigma \in S$ , la suite  $(x_n)$  est équilibrée dans  $A_\sigma(\mathbb{C})$  par rapport à la mesure de Haar  $\mu_\sigma$ .*

**PREUVE.**— Le premier point est une reformulation du théorème 1.2. Pour prouver *ii*), on montrera d'abord que  $(x_n)$  est générique. Pour qu'une suite soit générique dans  $A$ , il faut et il suffit que toute sous-suite soit Zariski-dense dans  $A$ . Sous les hypothèses de *ii*), aucune sous-suite de  $(x_n)$  n'est contenue dans une sous-variété stricte de torsion. On obtient donc par *i*) que toutes les sous-suites de  $(x_n)$  sont Zariski-denses dans  $A$ . Si on remarque de plus que

$$\hat{h}_L(A) = \lim_n \hat{h}_L(x_n) = 0,$$

on obtient grâce à la proposition 3.5-*ii*) l'équidistribution recherchée. □

**REMARQUE.**— Nous ne pouvons pas fournir un seul exemple de sous-variété  $Y$  de  $A$  non isomorphe à une sous-variété abélienne pour laquelle  $\hat{e}_L(Y) = \hat{h}_L(Y)$ . Ceci limite l'application de la proposition 3.5 sur l'équirépartition des petits points aux variétés abéliennes. La question suivante reste ouverte : étant donné  $(\mathfrak{X}, \mathcal{L})$  comme au début de la section 2. Quelles sont les sous-variétés de  $\mathfrak{X}$  pour lesquelles  $h_{\mathcal{L}}$  et  $e_{\mathcal{L}}$  coïncident?

**REMARQUE.**— David et Philippon [11] prouvent la conjecture de Bogomolov de façon effective : pour des variétés abéliennes qui sont plongées comme des sous-variétés projectivement normales d'espaces projectifs par des diviseurs symétriques, les deux auteurs donnent une borne inférieure effective de la hauteur d'une sous-variété qui n'est pas translatée d'une sous-variété abélienne. Des résultats partiels sur la conjecture de Bogomolov sont dûs à Zhang [48], Philippon pour des produits de courbes elliptiques [30]–III et Bombieri–Zannier [7] et David–Philippon [11] pour les variétés abéliennes à multiplications complexes. Ces derniers ont aussi un aspect plus effectif que le résultat général. L'analogie de la conjecture de Bogomolov pour les tores  $(\mathbb{G}_m)^n$  a été résolu par Zhang [47] et Bombieri–Zannier [6] et l'analogie de l'équirépartition est démontré par Bilu [3]. Nous donnerons dans le chapitre suivant d'autres références relatives au cas des courbes.

## 5 DUALISANT RELATIF DES COURBES

La conjecture de Bogomolov a été d'abord formulée pour une courbe plongée dans sa jacobienne. Ce cas a suscité beaucoup de travaux que nous résumons dans cette section. Soient  $C$  une courbe propre, lisse et géométriquement connexe de genre  $g \geq 2$  sur le

corps de nombres  $K$  et  $J$  sa jacobienne. À tout diviseur  $D$  de  $C$  de degré 1, on associe  $\varphi_D$  le plongement de la courbe dans sa jacobienne donné par

$$\begin{aligned} \varphi_D : C &\longrightarrow J \\ x &\longrightarrow \text{cl}(x - D). \end{aligned}$$

Nous considérons en particulier des diviseurs  $D$  dont le multiple  $(2g-2)D$  est un diviseur canonique de la courbe. Soit  $D_0$  un tel diviseur.

Il existe sur  $J$  une polarisation principale canonique définie par le diviseur théta. On désigne par  $h$  la hauteur normalisée associée à cette polarisation et construite dans la section 3. Le théorème 1.2 affirme que pour tout diviseur  $D$  de degré 1, il existe une constante  $\varepsilon > 0$  telle que l'ensemble  $\{x \in X(\overline{K}) \mid h(\text{cl}(x - D)) \leq \varepsilon\}$  soit fini. Comme nous l'avons remarqué dans la section 3, ce résultat est équivalent à la proposition suivante :

**PROPOSITION 5.1** .— *Soient  $C$  une courbe propre, lisse et géométriquement connexe de genre  $g \geq 2$  sur le corps  $K$  et  $D$  un diviseur de degré 1 de  $C$ . Alors,  $h(\varphi_D(C)) > 0$ .*

On se propose de redéfinir la hauteur  $h(\varphi_D(C))$  comme invariant arakelovien de la courbe ne faisant pas intervenir sa jacobienne. Nous introduisons pour cela l'auto-intersection en théorie d'Arakelov du dualisant relatif de la courbe. Nous déduisons ensuite de la proposition 5.1 la stricte positivité de ce nombre.

Soit  $\mathcal{C}$  le modèle régulier minimal de  $C$  sur  $\mathcal{O}_K$ . Le dualisant relatif  $\omega$  du morphisme  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$  est un faisceau inversible. Pour en faire un faisceau arakelovien, nous l'équiperons de métriques hermitiennes à l'infini. Il suffit pour cela de considérer une courbe  $C$  sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Le faisceau  $\omega$  coïncide alors avec le faisceau des formes différentielles holomorphes  $\Omega_{C/\mathbb{C}}^1$ . Soit  $\nu_1, \dots, \nu_g$  une base de  $H^0(C, \Omega_{C/\mathbb{C}}^1)$  orthonormée pour le produit hermitien défini par  $\frac{i}{2} \int_{C(\mathbb{C})} \alpha \wedge \bar{\beta}$ . On définit la métrique d'Arakelov sur  $C$  par

$$\mu = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g \nu_i \wedge \bar{\nu}_i.$$

Nous appelons métrique permise sur un faisceau inversible toute métrique hermitienne dont la courbure est proportionnelle à  $\mu$ . Deux telles métriques sur le même faisceau diffèrent par la multiplication par une constante [26]. La théorie originelle d'Arakelov se limite à définir le produit d'intersection de deux faisceaux inversibles sur  $\mathcal{C}$  munis de métriques permises [2]. Le faisceau  $\Omega_{C/\mathbb{C}}^1$  est canoniquement équipé d'une métrique permise définie comme suit :

1) Pour tout point  $P \in C(\mathbb{C})$ , le faisceau  $\mathcal{O}_C(P)$  est canoniquement muni d'une métrique permise donnée par

$$\|s\|(Q) = \exp(g_{Ar}(P, Q))$$

où  $s$  est la section canonique de  $\mathcal{O}_C(P)$  et  $g_{Ar}(P, Q)$  est la fonction de Green-Arakelov : c'est l'unique fonction réelle de  $C(\mathbb{C}) \times C(\mathbb{C})$  privé de sa diagonale, vérifiant [13]

i)  $\partial_z \bar{\partial}_z g_{Ar}(z, w) = i\pi(\mu(z) - \delta_w)$  où  $\delta_w$  est la distribution de Dirac en  $w$ ,

ii)  $\int_{C(\mathbb{C})} g_{Ar}(z, w)\mu(z) = 0$  pour tout  $w$ .

2) On considère sur  $\Omega_{C/\mathbb{C}}^1$  la métrique hermitienne qui fait de l'isomorphisme résidu pour tout point  $P \in C(\mathbb{C})$

$$\text{Res}_P : \Omega_{C/\mathbb{C}}^1(P)|_P \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

une isométrie quand  $\mathcal{O}_C(P)$  est muni de sa métrique du 1) et  $\mathbb{C}$  de sa métrique canonique. La métrique ainsi définie sur  $\Omega_{C/\mathbb{C}}^1$  est permise.

On note  $(\omega, \omega)$  l'auto-intersection du faisceau  $\omega$  ainsi métrisé.

THÉORÈME 5.2. — *On suppose que  $\mathcal{C}$  est lisse sur  $\mathcal{O}_K$ . Alors*

$$h(\varphi_D(C)) = \frac{1}{8(g-1)[K:\mathbb{Q}]}(\omega, \omega) + (1 - \frac{1}{g})h(\text{cl}(D - D_0))$$

où  $D_0$  est un diviseur sur la courbe  $C$  dont le multiple  $(2g-2)D_0$  est un diviseur canonique.

PREUVE.— Les deux membres de cette égalité sont invariants par extension du corps de base. C'est évident pour les deux hauteurs. Soient  $L$  une extension finie de  $K$  et  $\mathcal{O}_L$  son anneau d'entiers. Le schéma  $\mathcal{C} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$  est lisse sur  $\mathcal{O}_L$ . C'est donc le modèle régulier minimal de  $\mathcal{C} \times_K L$  sur  $\mathcal{O}_L$ . Le dualisant relatif de  $\mathcal{C} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$  sur  $\mathcal{O}_L$  est le pull-back de  $\omega$ . L'invariance de  $\frac{(\omega, \omega)}{[K:\mathbb{Q}]}$  s'ensuit. On peut donc supposer que  $D$  et  $D_0$  sont  $K$ -rationnels. On choisit deux diviseurs sur  $\mathcal{C}$  qui prolongent  $D$  et  $D_0$ . On les note aussi  $D$  et  $D_0$ . À tout point  $P \in C(K)$ , on associe la section  $E_P$  de  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$  qui le prolonge. Le faisceau  $\mathcal{O}_C(E_P)$  est muni de ses métriques permises du 1). Pour ce choix, la formule d'adjonction suivante vaut :

$$(E_P, E_P) = (\mathcal{O}_C(E_P), \mathcal{O}_C(E_P)) = -(\omega, \mathcal{O}_C(E_P)) = -(\omega, E_P).$$

La lissité de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{O}_K$  intervient dans les trois points suivants :

a) Le foncteur de Picard relatif  $\text{Pic}_n(\mathcal{C}/\mathcal{O}_K)$ , paramétrisant les classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur  $\mathcal{C}$  de degré  $n$  sur les fibres, est représentable par un schéma  $\mathcal{J}_n$  propre et lisse sur  $\mathcal{O}_K$  [26]. En particulier, le schéma abélien  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$  fournit un modèle de  $J$ . Soit  $\Theta$  le diviseur thêta canonique sur  $\mathcal{J}_{g-1}$  ; posons

$$\Theta^{(D)} = \Phi_D^* \mathcal{O}_{\mathcal{J}_{g-1}}(\Theta)$$

où  $\Phi_D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}_{g-1}$  est l'isomorphisme translation par  $\mathcal{O}_C((g-1)D)$ . Le faisceau inversible symétrique  $\mathcal{L} = \Theta^{(D)} \otimes [-1]^* \Theta^{(D)}$  induit sur la fibre générique  $J$  de  $\mathcal{J}$  le double du diviseur thêta. Par suite, la hauteur  $h$  coïncide avec la moitié de la hauteur  $h_{\mathcal{L}}$  définie par  $\mathcal{L}$  (voir début de la section 3).

b) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau inversible sur  $\mathcal{C}$  dont le degré sur la fibre générique est nul. On munit  $\mathcal{F}$  de métriques permises et on lui associe l'intersection  $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ . Ce nombre

ne dépend pas des métriques permises choisies à cause du degré nul de  $\mathcal{F}$ . Faltings et Hriljac [16, 22] ont établi la relation

$$(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = -2[K : \mathbb{Q}]h(\text{cl}(\mathcal{F}_K))$$

où  $\text{cl}(\mathcal{F}_K)$  est la classe de  $\mathcal{F}_K$  dans la jacobienne  $J$ .

c) Le morphisme  $\varphi_D : C \rightarrow J$  se prolonge par propriété universelle des modèles de Néron en un unique morphisme  $\varphi_D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{J}$ .

Il est possible de munir  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D)$  de métriques permises à l'infini de telle sorte que  $(D, D) = 0$  car le degré de  $D$  sur la fibre générique est non nul. On a alors pour tout point  $P \in C(K)$  :

$$\begin{aligned} -2[K : \mathbb{Q}]h(\text{cl}(P - D)) &= (E_P - D, E_P - D) \\ &= (E_P, E_P) - 2(E_P, D) + (D, D) \\ (4) \qquad \qquad \qquad &= -(E_P, \omega + 2D) \end{aligned}$$

Considérons le faisceau inversible métrisé sur  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{E} = \varphi_D^*(\mathcal{L}^*) \otimes \omega \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(2D)$$

où  $\mathcal{L}^*$  est le dual de  $\mathcal{L}$ . Le pull-back d'une métrique du cube par  $\varphi_D$  est une métrique permise [26]. Les métriques de  $\mathcal{E}$  sont par suite permises.

Un faisceau inversible  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{C}$  muni à l'infini de métriques permises est dit numériquement équivalent à zéro si pour tout faisceau inversible  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{C}$  muni à l'infini de métriques permises, on a  $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$ .

LEMME 5.3 .— *Le faisceau  $\mathcal{E}$  est numériquement équivalent à zéro.*

PREUVE.— On suppose, quitte à élargir le corps de base, que le faisceau  $\mathcal{F}$  est associé à un diviseur de la forme  $\sum_i \alpha_i E_{P_i}$ , où les  $P_i$  sont des points  $K$ -rationnels. Comme le degré de  $\mathcal{E}$  sur la fibre générique est nul, on peut supposer que  $\mathcal{F}$  est équipé de la métrique permise induite par le diviseur  $\sum_i \alpha_i E_{P_i}$ . Dans ce cas,  $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \sum_i h_{\mathcal{E}}(P_i) = 0$  par la relation (4).  $\square$

On peut maintenant terminer la preuve du théorème 5.2. On tire du lemme 5.3 les deux relations  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$  et  $(\varphi_D^*(\mathcal{L}), \mathcal{E}) = 0$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} (\varphi_D^*(\mathcal{L}), \varphi_D^*(\mathcal{L})) &= \omega^2 + 4(\omega, D) \\ &= \frac{g}{g-1}\omega^2 + 4(1-g)(D - \frac{\omega}{2g-2})^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} h(\varphi_D(C)) &= \frac{1}{2}h_{\mathcal{C}}(\varphi_D(C)) = \frac{(\varphi_D^*(\mathcal{L}), \varphi_D^*(\mathcal{L}))}{8[K : \mathbb{Q}]g} \\ &= \frac{1}{8(g-1)[K : \mathbb{Q}]} \omega^2 + (1 - \frac{1}{g})h(\text{cl}(D - D_0)) \end{aligned}$$

$\square$

COROLLAIRE 5.4. — Si  $\mathcal{C}$  est lisse sur  $\mathcal{O}_K$  alors  $(\omega, \omega) > 0$ .

PREUVE.— Il suffit de prendre dans le théorème 5.2  $D = D_0$  et d'appliquer la proposition 5.1.  $\square$

REMARQUE.— Comment changent ces résultats si  $\mathcal{C}$  n'est pas lisse sur  $\mathcal{O}_K$ ?

Quand  $\mathcal{C}$  a réduction semi-stable sur  $\mathcal{O}_K$  (i.e. les fibres fermées de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{O}_K$  sont réduites avec au plus des points doubles ordinaires comme points singuliers), Zhang [45] introduit un accouplement, dit *accouplement admissible*, qui raffine l'intersection d'Arakelov. Il diffère de cette dernière seulement en les mauvaises places. Le théorème 5.2 est alors valable si on remplace  $(\omega, \omega)$  par l'intersection admissible  $(\omega_a, \omega_a)$  du dualisant relatif  $\omega_a$  défini dans cette théorie. Il découle alors de la proposition 5.1 que  $(\omega_a, \omega_a) > 0$ . Par ailleurs, Zhang [45] prouve que  $\omega^2 \geq \omega_a^2$  et que l'égalité s'établit si et seulement si  $\mathcal{C}$  est elliptique ou a bonne réduction partout. Ceci implique la stricte positivité de  $(\omega, \omega)$  dans le cas de mauvaise réduction.

REMARQUE.— La positivité de  $\omega^2$  a été établie par Faltings [16]. L'équivalence entre la stricte positivité de  $\omega^2$  et la conjecture de Bogomolov dans le cas lisse a été établie par Szpiro ([36] et [39] théorème 3) et ceci modulo une question de parties fixes dans les puissances du dualisant relatif. Cette dernière a été indépendamment résolue par Kim [23] et Zhang [46]. Ainsi, pour démontrer la conjecture de Bogomolov pour les courbes, la stratégie a été pour longtemps la démonstration de la stricte positivité de  $\omega^2$ . Cet objectif a été réalisé par Burnol [10] pour les courbes lisses dont la jacobienne est à multiplication complexe et par Zhang [45] pour d'autres cas.

Une borne supérieure de  $\omega^2$  est liée au problème de Mordell effectif [27, 29]. Il est connu que de telles bornes conjecturales sont équivalentes à une variante de la conjecture des petits points de Szpiro énoncée dans [40] (voir [39] et [27] corollaire 3.5). Des liens avec d'autres conjectures arithmétiques (conjecture de Szpiro sur le discriminant des courbes elliptiques, conjecture abc...) sont établis dans [27]. Soulé [35] a prouvé un théorème d'annulation pour les surfaces arithmétiques conjecturé par Szpiro, dont une conséquence est une borne supérieure de  $\omega^2$  en fonction de la norme d'une certaine section dans un groupe de cohomologie ([35] théorème 3). Ces résultats ouvrent des perspectives dans la direction des conjectures citées plus haut, analogues à ceux développés dans le cadre géométrique [41].

## A NOMBRES D'INTERSECTION

Soient  $\mathfrak{X}$  une variété arithmétique,  $X$  sa fibre générique et  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  deux faisceaux inversibles métrisés sur  $\mathfrak{X}$ . Bost, Gillet et Soulé définissent dans [9] un accouplement qui permet d'associer à tout cycle  $\mathcal{Z}$  de dimension  $d + 1$  de  $\mathfrak{X}$  et tout entier  $i$  compris entre 0 et  $d + 1$  le nombre d'intersection  $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i} | \mathcal{Z})$ . Leur proposition 2.3.1 donne trois façons équivalentes de définir ces nombres, dont celle que nous avons choisie. Soient  $Y$  une sous-variété de  $X$  de dimension  $d$  et  $\mathcal{Y}$  sa fermeture schématique dans

$\mathfrak{X}$ . Le nombre  $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i} | \mathcal{Y})$ , introduit dans la proposition 2.1, coïncide dans les notations de [9] avec  $(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^i \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{d+1-i} | \mathcal{Y})$ . La proposition suivante donne quelques propriétés de cet accouplement qui sont utilisées dans cet exposé.

PROPOSITION A.1 ([9] PROPOSITION 2.3.1) .—

i) Soient  $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  un morphisme de variétés arithmétiques sur  $\mathcal{O}_K$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible métrisé sur  $\mathfrak{X}$ . Pour tout cycle  $\mathcal{Z}$  de dimension  $d + 1$  de  $\mathfrak{X}'$ , on a

$$(\hat{c}_1(f^* \mathcal{L})^{d+1} | \mathcal{Z}) = (\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1} | f_*[\mathcal{Z}]).$$

ii) Soient  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  deux faisceaux inversibles métrisés sur  $\mathfrak{X}$  et  $\mathcal{Z}$  une sous-variété de dimension  $d + 1$  de  $\mathfrak{X}$ . Soient  $n$  un entier et  $s$  une section non nulle de  $\mathcal{L}_2^{\otimes n}$  sur  $\mathcal{Z}$ . Alors, pour tout entier  $1 \leq i \leq d + 1$ , on a :

$$\begin{aligned} n(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^i | \mathcal{Z}) &= (\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{i-1} | \text{div}(s)) \\ &- \sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \int_{\mathcal{Z}_\sigma(\mathbb{C})} \log \|s\|_\sigma c_1(\mathcal{L}_{1,\sigma}, \| \cdot \|_{1,\sigma})^{d+1-i} c_1(\mathcal{L}_{2,\sigma}, \| \cdot \|_{2,\sigma})^{i-1}. \end{aligned}$$

Avec les notations de cet exposé, on tire :

COROLLAIRE A.2 .— On reprend les hypothèses de la proposition A.1-ii) et on suppose de plus que  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont amples. Soient  $Y$  une sous-variété de  $X$  de dimension  $d$  et  $\mathcal{Y}$  sa fermeture schématique dans  $\mathfrak{X}$ . Soient  $s$  une section non nulle de  $\mathcal{L}_2^{\otimes n}$  sur  $\mathcal{Y}$  et  $s_K$  sa restriction à la fibre générique  $Y$ . Alors, pour tout entier  $1 \leq i \leq d + 1$ ,

$$\begin{aligned} n(\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^i | \mathcal{Y}) &\geq (\hat{c}_1(\mathcal{L}_1)^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{L}_2)^{i-1} | \text{div}(s_K)) \\ &- \sum_{\sigma \in S} \varepsilon_\sigma \int_{Y_\sigma(\mathbb{C})} \log \|s\|_\sigma c_1(\mathcal{L}_{1,\sigma}, \| \cdot \|_{1,\sigma})^{d+1-i} c_1(\mathcal{L}_{2,\sigma}, \| \cdot \|_{2,\sigma})^{i-1}. \end{aligned}$$

PREUVE.— Le corollaire découle de la proposition A.1-ii) en remarquant que les composantes verticales de  $\text{div}(s)$  donnent des contributions positives car  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont amples.  $\square$

LEMME A.3 ([9] PROPOSITION 3.2.2) .— Soient  $\mathfrak{X}_1$  et  $\mathfrak{X}_2$  deux modèles propres et plats sur  $\mathcal{O}_K$  de  $X$  et  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  deux faisceaux inversibles amples sur respectivement  $\mathfrak{X}_1$  et  $\mathfrak{X}_2$  qui sont isomorphes sur la fibre générique  $X$ . On munit  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  à l'infini de métriques hermitiennes à courbures positives. Alors, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$ , on ait

$$|h_{\mathcal{L}_1}(Y) - h_{\mathcal{L}_2}(Y)| \leq C .$$

## B THÉORÈME DE HILBERT-SAMUEL ARITHMÉTIQUE

Soient  $\mathfrak{X}$  une variété arithmétique,  $X$  sa fibre générique et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible ample sur  $\mathfrak{X}$  muni en chaque place  $\sigma \in S$  d'une métrique hermitienne  $\| \cdot \|_\sigma$  à courbure  $c_1(\mathcal{L}_\sigma, \| \cdot \|_\sigma)$  positive. Soient  $Y$  une sous-variété de  $X$  de dimension  $d$  et  $\mathcal{Y}$  sa fermeture schématique dans  $\mathfrak{X}$ . Le plongement canonique de  $\Gamma_n = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n} |_{\mathcal{Y}})$  dans  $V_n = H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n} |_{\mathcal{Y}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  fait du premier un réseau dans le second. On désigne par  $B_n$  la boule unité de  $V_n$  pour sa norme sup.

THÉORÈME B.1 .— Avec les hypothèses et notations précédentes, on a

$$\chi_{\text{sup}}(\Gamma_n) = -\log(\text{vol}(V_n/\Gamma_n)) + \log(\text{vol}(B_n)) = n^{d+1} \frac{(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y)}{(d+1)!} + o(n^{d+1}).$$

En utilisant le théorème de Minkowski, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE B.2 .— Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , il existe une section non nulle  $l \in H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{L}^{\otimes n}|_Y)$  avec

$$\|l\|_{\text{sup}} \leq \exp(n\varepsilon - n \frac{(\hat{c}_1(\mathcal{L})^{d+1}|Y)}{(d+1) \deg_{\mathcal{L}}(Y)}).$$

Le théorème B.1 a été d'abord considéré pour la variété tout entière  $Y = X$ . On dispose dans ce cas de deux démonstrations. La première est due à Gillet et Soulé [17] (voir aussi l'exposé de Bost dans ce séminaire [8]). Le théorème B.1 est un corollaire à une forme faible de leur théorème de Riemann–Roch arithmétique [20] et d'un résultat d'analyse de Bismut–Vasserot [4] sur le développement de la torsion analytique d'une puissance d'un faisceau inversible. Nous avons ensuite donné avec T. Bouche [1] une preuve directe du théorème de Hilbert–Samuel arithmétique qui ne passe pas par le théorème de Riemann–Roch arithmétique. Le théorème de Hilbert–Samuel arithmétique pour toute sous-variété  $Y$  de  $X$  est démontré par Zhang ([48] théorème 1.4). Il considère pour cela une désingularisation générique de la sous-variété et se ramène au cas précédent. Enfin, deux autres résultats établissent l'existence d'un développement asymptotique de  $\chi_{\text{sup}}(\Gamma_n)$  sous la forme de  $cn^{d+1} + o(n^{d+1})$  mais sans donner de lien entre  $c$  et la hauteur de  $Y$  relativement à  $\mathcal{L}$ . Le premier est celui de Lau, Rumely et Varley [25] qui est valable sous des conditions plus faibles que celles du théorème B.1. Le second est prouvé par Laurent [24] mais pour d'autres métriques.

## References

- [1] A. ABBES, T. BOUCHE, *Théorème de Hilbert–Samuel “arithmétique”*, Ann. de l'Inst. Fourier Tome **45** (1995), 375–401.
- [2] S. JU. ARAKELOV, *Intersection theory of divisors on arithmetic surface*, Math. USSR Izvestija, Vol. **8** (1974) N° 6, 1167–1180.
- [3] Y. BILU, *Limit distribution of small points on algebraic tori*, preprint (1996).
- [4] J.-M. BISMUT, E. VASSEROT, *Comportement asymptotique de la torsion analytique associée aux puissances d'un fibré en droites*, C. R. Acad. Sci. Paris, **307** (1988), 799–781.
- [5] F. A. BOGOMOLOV, *Points of finite order on an abelian variety*, Math. USSR Izv. **17** (1981).

- [6] E. BOMBIERI, U. ZANNIER, *Algebraic points on subvarieties of  $(\mathbb{G}_m)^n$* , Internat. Math. Res. Notices, t. **7** (1995), 333–347.
- [7] E. BOMBIERI, U. ZANNIER, *Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties*, prépublication (1996).
- [8] J.-B. BOST, *Théorie d'intersection et théorème de Riemann–Roch arithmétiques*, Séminaire Bourbaki, exp. N° 731 (1990–91), Astérisque **201–202–203** (1991), 43–88.
- [9] J.-B. BOST, H. GILLET, C. SOULÉ, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. of the AMS, vol **7** (1994), 903–1027.
- [10] J.-F. BURNOL, *Weierstrass points on arithmetic surfaces*, Invent. Math. **107** (1992), 421–432.
- [11] S. DAVID, P. PHILIPPON, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes*, prépublication 88 de l'Univ. Paris VI (1996).
- [12] P. DELIGNE, *Le déterminant de la cohomologie*, dans Current trends in arithmetical algebraic geometry (K. Ribet ed.), Contemporary Math. **67** (1987), 93–177.
- [13] R. ELKIK, *Fonctions de Green, Volumes de Faltings, Application aux surfaces arithmétiques*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 89–112.
- [14] R. ELKIK, *Fibrés d'intersections et intégrales de classes de Chern*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **22** (1989), 195–226.
- [15] R. ELKIK, *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke **61** (1990), 303–328.
- [16] G. FALTINGS, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **119** (1984), 387–424.
- [17] H. GILLET, C. SOULÉ, *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **307** (1988), 887–890.
- [18] H. GILLET, C. SOULÉ, *Arithmetic intersection theory*, Publ. IHES, **72** (1990), 94–174.
- [19] H. GILLET, C. SOULÉ, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics I, II*, Ann. of Math. **131** (1992), 163–203 et 205–238.
- [20] H. GILLET, C. SOULÉ, *An arithmetic Riemann–Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), 473–543.
- [21] W. GUBLER, *Hohentheorie*, Math. Ann. **298** (1994), 427–455.
- [22] P. HRILJAC, *Heights and Arakelov's intersection theory*, Amer. J. of Math. **107** (1985), 23–38.

- [23] M. KIM, *Small points on constant arithmetic surfaces*, Duke. Math. J. **61** (1990), 828–833.
- [24] M. LAURENT, *Hauteur de matrices d'interpolation*, dans Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy 1990, 215–239.
- [25] C. F. LAU, R. RUMELY, R. VARLEY, *Existence of sectional capacity*, University of Georgia, Mathematics preprint series N. 25, vol I (1993).
- [26] L. MORET-BAILLY, *Métriques permises*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 29–87.
- [27] L. MORET-BAILLY, *Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques*, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de “Mordell effectif”), éditeur L. Szpiro, Astérisque **183** (1990), 37–57.
- [28] J. OESTERLÉ, *Courbes sur une variété abélienne (d'après M. Raynaud)*, Séminaire Bourbaki, exposé N° 625 (1983), Astérisque **121–122** (1985), 213–224.
- [29] A. N. PARSHIN, *The Bogomolov–Miyaoka–Yau inequality for arithmetical surfaces and its applications*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1986–87. Progress in Math. Birkhäuser vol. **75**.
- [30] P. PHILIPPON, *Sur les hauteurs alternatives I; II; III*, Math. Ann., t. **289** (1991), 255–283; Ann. Inst. Fourier, t. **44** (1994), 1043–1065; J. Math. Pures Appl., t. **74** (1995), 345–365.
- [31] M. RAYNAUD, *Courbes sur une variété abélienne et points de torsion*, Invent. Math. **71** (1983), 207–233.
- [32] M. RAYNAUD, *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion*, dans Arithmetic and Geometry 1, éditeurs: J. Coates et S. Helgason, Birkhauser (1983).
- [33] C. SOULÉ, *Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants*, J. Arithmétiques de Luminy (17–21 Juillet 1989), Astérisque **198–200** (1991), 355–371.
- [34] C. SOULÉ, *Géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques*, Séminaire Bourbaki exposé N° 713 (1988–89), Astérisque **177–178** (1989), 327–343.
- [35] C. SOULÉ, *A vanishing theorem on arithmetic surfaces*, Invent. Math. **116** (1994), 577–599.
- [36] L. SZPIRO, *Small points and torsion points*, Contemporary Mathematics **58** (1986), 251–260.
- [37] L. SZPIRO, *Présentation de la théorie d'Arakelov*, Contemporary Mathematics **67** (1987).

- [38] L. SZPIRO, *Degré, Intersections, Hauteurs*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 11–28.
- [39] L. SZPIRO, *Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique*, dans le Grothendieck Festschrift, Vol **3** (1990), Basel Boston Berlin, Birkhauser, 229–246.
- [40] L. SZPIRO, *Un peu d'effectivité*, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985), 275–287.
- [41] L. SZPIRO, *Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif*, dans Séminaire de courbes de genre au moins deux, Astérisque **86** (1981), 44–77.
- [42] L. SZPIRO, E. ULLMO, S. ZHANG, *Équidistribution des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), 337–347.
- [43] E. ULLMO, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, preprint (1996), à paraître dans Ann. of Math..
- [44] S. ZHANG, *Equidistribution of small points on abelian varieties*, preprint (1996), à paraître dans Ann. of Math..
- [45] S. ZHANG, *Admissible pairing on a curve*, Invent. Math. **112** (1993), 171–193.
- [46] S. ZHANG, *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **136** (1992), 569–587.
- [47] S. ZHANG, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. of the AMS, Vol **8** (1995), 187–221.
- [48] S. ZHANG, *Small points and adelic metrics*, J. of Alg. Geom. **4** (1995), 281–300.

Ahmed ABBES

Université de Paris–Nord

URA 742 du CNRS

Institut Galilée

Département de Mathématiques

F–93430 VILLETANEUSE

E–mail : abbes@math.univ-paris13.fr

# *Astérisque*

NICOLAS BURQ

## **Mesures semi-classiques et mesures de défaut**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 826, p. 167-195

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_167\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__167_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MESURES SEMI-CLASSIQUES ET MESURES DE DÉFAUT

par Nicolas BURQ

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^d$  et  $(u_k)$ , une suite bornée dans  $L^2(\Omega)$ . On peut toujours, quitte à extraire une sous-suite, supposer que cette suite converge au sens des distributions vers une limite  $u \in L^2(\Omega)$ , ce qu'on note  $(u_k) \rightharpoonup u$ . Les mesures de défaut micro-locales ont été introduites dans la littérature afin de décrire la perte de compacité forte dans ce passage à la limite. L'objet *a priori* le plus simple associé à la suite  $(u_k)$ , qui est à la base de l'étude par P.L. Lions [29, 30] de problèmes variationnels elliptiques avec perte de compacité, est la mesure de Radon,  $\nu$ , définie comme la limite vague au sens des mesures de la suite bornée dans  $L^1$  :

$$\nu_k = |u_k(x) - u(x)|^2$$

qu'on appelle mesure de défaut de la suite  $(u_k)$ . Deux exemples permettent d'illustrer cette notion :

1. Concentration :  $u_k(x) = k^{d/2}\varphi(k(x - x_0))$  avec  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ ,  $\int |\varphi|^2 = 1$ , alors  $(u_k) \rightharpoonup 0$  et  $\nu = \delta_{x_0}$  la mesure de Dirac au point  $x_0$ .
2. Oscillation :  $u_k = \varphi(x)e^{ikx \cdot \xi}$  alors  $(u_k) \rightharpoonup 0$  et  $\nu = |\varphi(x)|^2 dx$ , où  $dx$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^d$ .

Le deuxième exemple montre que ces mesures de défaut ne permettent pas de distinguer entre les différentes directions d'oscillation,  $\xi \in \mathbf{R}^d$ , qui interviennent dès qu'on n'étudie plus seulement des problèmes elliptiques.

La définition des mesures de défaut micro-locales semble être due à Wigner [43] dans le contexte de la mécanique semi-classique. Plus récemment A. Shnirelman [40], Y. Colin de Verdière [10], B. Helffer-A. Martinez-D. Robert [24] développèrent cette notion pour étudier la répartition asymptotique des fonctions propres du Laplacien sur une variété Riemannienne à bord. Enfin, à la fin des années 80, P. Gérard [15] et L. Tartar [41] dégagèrent indépendamment une notion générale, les H-mesures ou mesures de défaut micro-locales, tandis que les versions semi-classiques connaissaient un regain d'intérêt avec les travaux de P. Gérard [16], P.L. Lions-T. Paul [31],

P. Markowitch-N. Mauser-F. Poupaud [32] . . . Dans la première partie de cet exposé on présentera le cadre mathématique et on exposera la construction et les principales propriétés de ces mesures. Dans les parties suivantes on présentera quelques exemples récents d'applications de ces notions dans les domaines de l'homogénéisation, du contrôle des équations aux dérivées partielles et de l'optique géométrique non linéaire. Ces exemples ne prétendent pas être exhaustifs, nous les avons choisis car ils nous semblent bien illustrer à la fois la variété des applications possibles et l'intérêt de cette approche.

Je remercie vivement P. Gérard pour l'aide qu'il m'a apportée dans la préparation de cet exposé.

## 1. MESURES MICRO-LOCALES ET SEMI-CLASSIQUES

**1.1. Notations.** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable dont on note  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$  le produit scalaire.

1) On note  $L^2(\Omega; \mathcal{H})$  l'espace des fonctions à valeurs dans  $\mathcal{H}$ , de classe  $L^2$  sur  $\Omega$  muni de son produit scalaire naturel noté  $(\cdot, \cdot)$ ,  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  (respectivement  $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ ) l'espace des opérateurs compacts sur  $\mathcal{H}$  (respectivement à trace). On note aussi  $S^*\Omega$  le fibré cotangent en sphères de  $\Omega$  ( $S^*\Omega = T^*\Omega \setminus \{0\}/\mathbf{R}_+$ ) et  $\mathcal{M}_+(T^*\Omega; \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$  (respectivement  $\mathcal{M}_+(S^*\Omega; \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$ ) l'espace des mesures de Radon positives sur  $T^*\Omega$  (respectivement sur  $S^*\Omega$ ), à valeurs opérateurs à trace sur  $\mathcal{H}$ .

2) On note  $H^s(\Omega; \mathcal{H})$  l'espace de Sobolev des distributions de classe  $H^s$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$ ,  $H^s_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{H})$  le sous espace formé des distributions à support compact et  $H^s_{\text{loc}}(\Omega; \mathcal{H})$  l'espace des distributions  $u$  telles que pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi u \in H^s(\Omega; \mathcal{H})$ .

3) On note  $\Psi^m_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$  (respectivement  $\Psi^m_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ ) l'espace des opérateurs pseudo-différentiels polyhomogènes d'ordre  $m$  sur  $\Omega$  à valeurs  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  (respectivement  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ), dont le noyau distribution est à support compact dans  $\Omega \times \Omega$ . Ce sont des opérateurs du type

$$Au(x) = a(x, D_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega \times \mathbf{R}^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi,$$

où  $a(x, \xi) \in S^m_{\text{comp}}(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$  est un symbole polyhomogène d'ordre  $m$  (voir [25], chap. 18.1). On rappelle que si  $\chi$  est un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\Omega$  alors, pour

tout  $a \in S_{\text{comp}}^m(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ , on a la formule de changement de variables

$$(1) \quad a(x, D_x)u(\chi(x)) = \chi^*(a(x, D_x)u) = \chi^*(a)(x, D_x)(\chi^*u) + R(\chi^*u)$$

où  $\chi^*(a)(x, \xi) = a(\chi(x), {}^t\chi'^{-1}\xi)$  et  $R \in \Psi_{\text{comp}}^{m-1}(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ .

4) On note  $\sigma_m(A) \in C_0^\infty(S^*\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ , le symbole principal d'ordre  $m$  de l'opérateur  $A$  dont on rappelle les principales propriétés :

- i) L'application  $\sigma_m : A \in \Psi_{\text{comp}}^m(\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H})) \mapsto \sigma_m(A) \in C_0^\infty(S^*\Omega; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$  est surjective et il en est de même si on remplace  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  par  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ .
- ii) Pour tout  $A \in \Psi_{\text{comp}}^m$ ,  $\sigma_m(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \Psi_{\text{comp}}^{m-1}$ .
- iii) Pour tout  $A \in \Psi_{\text{comp}}^m$ ,  $\sigma_m(A^*) = \sigma_m(A)^*$  où la première étoile désigne l'adjoint au sens des opérateurs et la deuxième l'adjoint au sens des éléments de  $\mathcal{H}$ .
- iv) Pour tous  $Q \in \Psi_{\text{comp}}^q$ ,  $P \in \Psi_{\text{comp}}^p$ , l'opérateur  $P \circ Q$  appartient à l'espace  $\Psi_{\text{comp}}^{p+q}$  et
 
$$\sigma_p(P)\sigma_q(Q) = \sigma_{p+q}(P \circ Q).$$
- v) Si  $\mathcal{H} = \mathbf{C}$  alors pour tous  $Q \in \Psi_{\text{comp}}^q$ ,  $P \in \Psi_{\text{comp}}^p$ , l'opérateur  $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$  appartient à l'espace  $\Psi_{\text{comp}}^{p+q-1}$  et

$$(2) \quad \sigma_{p+q-1}([P, Q]) = \frac{1}{i} \{ \sigma_p(P), \sigma_q(Q) \},$$

où  $\{f, g\} = \sum_{1 \leq i \leq d} \partial_{\xi_i} f \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{\xi_i} g$  désigne le crochet de Poisson des fonctions  $f$  et  $g$ .

5) On rappelle que si  $P \in \Psi_{\text{comp}}^m$  alors l'opérateur  $P$  est continu de l'espace de Sobolev  $H_{\text{loc}}^s(\Omega; \mathcal{H})$  dans  $H_{\text{comp}}^{s-m}(\Omega; \mathcal{H})$ . En particulier, pour  $m < 0$ ,  $P \in \Psi_{\text{comp}}^m$  est compact sur  $L^2(\Omega; \mathcal{H})$ .

6) On note pour  $h \in ]0, h_0[$ ,  $h_0 > 0$  et  $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$  (la classe de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, à valeurs opérateurs bornés),  $a(x, hD_x)$  l'opérateur  $h$ -pseudo-différentiel défini par

$$a(x, hD_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, h\xi) u(y) dy d\xi.$$

On rappelle les propriétés suivantes vérifiées par ces opérateurs :

- i) Pour tout  $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ , l'opérateur  $a(x, hD_x)$  est continu sur  $L^2(\mathbf{R}^d; \mathcal{H})$  uniformément par rapport au paramètre  $h \in ]0, h_0[$ .
- ii) Pour tout  $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ , on a

$$a(x, hD_x)^* = a^*(x, hD_x) + hR_1(h),$$

où  $R_1(h)$  est uniformément borné sur  $L^2(\mathbf{R}^d; \mathcal{H})$ .

- iii) Pour tous  $a, b \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ , on a

$$a(x, hD_x) \circ b(x, hD_x) = ab(x, hD_x) + hR_2(h),$$

avec  $R_2(h)$  uniformément borné sur  $L^2(\mathbf{R}^d; \mathcal{H})$ .

iv) Pour tous  $a, b \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2d}; \mathbf{C})$ , on a

$$(3) \quad [a(x, hD_x), b(x, hD_x)] = \frac{h}{i} \{a, b\}(x, hD_x) + h^2 R_3(h),$$

avec  $R_3(h)$  uniformément borné sur  $L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ .

v) Si  $\chi$  est un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^d$  on a la formule de changement de variables :

$$(4) \quad a(x, hD_x)u(\chi(x)) = \chi^*(a(x, hD_x)u) = \chi^*(a)(x, hD_x)(\chi^*u) + hR_4(h)(\chi^*u),$$

avec  $R_4(h)$  uniformément borné sur  $L^2(\mathbf{R}^d; \mathcal{H})$ .

**1.2. Définition des mesures.** On considère  $(u_k) \in L^2_{loc}(\Omega; \mathcal{H})$  une suite localement bornée dans  $L^2$ . On suppose que  $(u_k) \rightarrow u$  au sens des distributions, c'est-à-dire que pour toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathcal{H})$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k, \varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_k(x), \varphi(x))_{\mathcal{H}} dx = \int_{\Omega} (u(x), \varphi(x))_{\mathcal{H}} dx.$$

Les principaux résultats d'existence des mesures peuvent être résumés par les deux énoncés suivants :

**THÉORÈME 1** (P. Gérard et L. Tartar).— *Il existe une sous-suite  $(u_{k_n})$  de la suite  $(u_k)$  et une mesure  $\mu \in \mathcal{M}_+(S^*\Omega, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$  telles que pour tout  $A \in \Psi_{\text{comp}}^0(\Omega, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ ,*

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (A(u_{k_n} - u), u_{k_n} - u) = \int_{S^*\Omega} \text{tr}(a(x, \xi)\mu(dxd\xi)),$$

où  $a = \sigma_0(A)$  est le symbole principal de l'opérateur  $A$ . On dit que  $\mu$  est une mesure de défaut micro-locale (ou une  $H$ -mesure) associée à la suite  $(u_k)$ . S'il y a unicité de la "mesure limite", on dit que la suite  $(u_k)$  est pure et on note  $\mu = M_m(u_k)$ .

**THÉORÈME 2** (P. Gérard, P.L. Lions-T. Paul).— *Pour toute suite  $(h_k)$  de réels strictement positifs tendant vers 0 (qu'on appelle une suite d'échelles), il existe une sous-suite  $(u_{k_n})$  de la suite  $(u_k)$  et une mesure  $\nu \in \mathcal{M}_+(T^*\Omega, \mathcal{L}^1(\mathcal{H}))$  telles que pour tout  $a \in C_0^\infty(T^*\Omega, \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ ,*

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a(x, h_{k_n} D_x)(u_{k_n}), u_{k_n}) = \int_{T^*\Omega} \text{tr}(a(x, \xi)\nu(dxd\xi)).$$

On dit que  $\nu$  est une mesure de défaut semi-classique (ou une mesure de Wigner) associée à la suite  $(u_k)$ . S'il y a unicité de la "mesure limite", on dit que la suite  $(u_k)$  est pure et on note  $\nu = M_{\text{sc}}(u_k)$ .

**Remarques :**

1. La mesure limite,  $\nu$ , dépend évidemment du choix de la suite d'échelles  $(h_k)$ . L'introduction d'une telle suite peut sembler artificielle, néanmoins dans la plu-

part des applications et en particulier pour tous les problèmes liés à la limite semi-classique de la mécanique quantique, cette suite  $(h_k)$  est donnée naturellement par l'énoncé du problème étudié.

2. Bien que nécessitant l'existence d'une suite  $(h_k)$  adaptée au problème, les mesures semi-classiques sont d'une certaine manière plus précises que les mesures micro-locales qui vivent sur le quotient,  $S^*\Omega$ , de l'espace  $T^*\Omega$ .
3. Si l'espace  $\mathcal{H}$  est de dimension finie, alors la nullité de la mesure de défaut microlocale associée à une suite  $(u_k)$  convergeant faiblement vers  $u$  est équivalente à la convergence forte sur tout compact de  $\Omega$  de la suite  $(u_k)$ . Si l'espace  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie, alors cette nullité est équivalente à la convergence forte pour tout  $v \in \mathcal{H}$  de  $(u_k, v)_{\mathcal{H}}$  sur tout compact de  $\Omega$ , ce qui correspond par exemple si  $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}_y^{d'})$  à des résultats de compacité pour des moyennes en  $y$  d'une suite de fonctions  $u_k \in L^2(\mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_y^{d'})$ . On pourra consulter P. Gérard [17] et P. Gérard-F. Golse-B. Wennberg [20] pour des applications de cette remarque.

Démontrons le théorème 1 dans le cas le plus simple où  $\mathcal{H} = \mathbf{C}$ . La démonstration dans le cas général, ainsi que celle du théorème 2, est essentiellement la même. Le point crucial est le résultat suivant :

**LEMME 3** (Inégalité de Gårding).— *Pour tout opérateur  $A \in \Psi_{\text{comp}}^0(\Omega)$  de symbole principal,  $a = \sigma_0(A)$  positif, et toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  telle que  $\varphi(x)\varphi(y) = 1$  sur le support du noyau distribution de  $A$  il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $u \in L^2(\Omega)$*

$$(7) \quad |\mathbf{Im}(A(u), u)| \leq C \|\varphi u\|_{H^{-1/2}(\Omega)}^2$$

$$(8) \quad \mathbf{Re}(A(u), u) \geq -C \|\varphi u\|_{H^{-1/2}(\Omega)}^2.$$

D'après le calcul symbolique (3.iii), puisque  $a$  est réel,  $A - A^* \in \Psi_{\text{comp}}^{-1}(\Omega)$ , ce qui implique la relation (7). Nous allons démontrer une version affaiblie de (8) suffisante pour notre propos : si la suite  $(u_k)$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2(\Omega)$  alors

$$(8') \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{Re}(A(u_k), u_k) \geq 0.$$

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  comme dans l'énoncé. On fixe  $\varepsilon > 0$  et on note  $b = \varphi\sqrt{\varepsilon + a} = \varphi\varepsilon^{1/2} + b'$  avec  $b' \in S_{\text{comp}}^0(\Omega)$ . Le calcul symbolique montre que  $b(x, D_x)b(x, D_x)^* - |\varphi|^2(\varepsilon\text{Id} + A) \in \Psi_{\text{comp}}^{-1}(\Omega)$  ce qui implique (si  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\Psi\varphi = \varphi$ )

$$(9) \quad \varepsilon \|\varphi u_k\|_{L^2}^2 + \mathbf{Re}(A(u_k), u_k) \geq -C \|\Psi u_k\|_{H^{-1/2}(\Omega)}^2.$$

Le terme de droite converge vers 0, donc par passage à la limite on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{Re}(A(u_k), u_k) \geq -\varepsilon \limsup_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi u_k\|_{L^2}^2,$$

d'où la relation (8').

On peut donc pour tout  $a \in C_0^\infty(S^*\Omega)$  extraire une sous-suite  $u_{k_n}$  telle que, si  $A \in \Psi_{\text{comp}}^0(\Omega)$  vérifie  $\sigma_0(A) = a$ , la suite  $(Au_k, u_k)$  a une limite quand  $k \rightarrow +\infty$  (qui ne dépend que de  $a$ ). Par extraction diagonale on peut, puisque l'espace  $C_0^\infty(S^*\Omega)$  est séparable, supposer que la sous-suite est la même pour tout  $a$  dans un ensemble dense dénombrable dans  $C_0^\infty(S^*\Omega)$ . Les relations (7) et (8') montrent que cette limite est une fonctionnelle positive définie sur un sous espace dense de  $C_0^\infty(S^*\Omega)$  bornée pour la topologie de  $C_0(S^*\Omega)$ , donc se prolonge de manière unique en une mesure sur  $S^*\Omega$  qui vérifie (5).

Calculons les mesures de défaut micro-locales obtenues pour les deux exemples de l'introduction :

1. Concentration :  $u_k(x) = k^d \varphi(-k(x - x_0))$ , alors  $\mu = \delta_{x_0} \otimes \int_{\lambda > 0} |\widehat{\varphi}(\lambda \xi)|^2 \lambda^{d-1} \frac{d\lambda}{2\pi^d}$ .
2. Oscillation :  $u_k = \varphi(x) e^{ikx \cdot \xi_0}$  avec  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ ,  $\mu = |\varphi(x)|^2 dx \otimes \delta_{\xi = \frac{\xi_0}{|\xi_0|}}$ .

**1.3. Quelques propriétés des mesures.** Le résultat suivant donne un lien entre les mesures micro-locales et semi-classiques :

**PROPOSITION 4.** — *On suppose que la suite  $(u_k)$  bornée sur  $L^2(\mathbf{R}^d)$  est pure de mesure semi-classique  $\nu$  et vérifie les estimations suivantes :*

$$(10) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq R} |u_k(x)|^2 dx = C(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \quad ((u_k) \text{ est compacte à l'infini})$$

$$(11) \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \geq R/h_k} |\widehat{u}_k(\xi)|^2 dx = D(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \quad ((u_k) \text{ est } (h_k)\text{-oscillante})$$

(la première estimation dit que l'énergie de la suite ne part pas à l'infini et la deuxième que les fréquences caractéristiques de chaque terme de la suite  $(u_k)$  sont d'ordre au plus  $h_k^{-1}$ .)

On a alors  $\|u_k\|^2 \rightarrow \nu(T^*\mathbf{R}^d)$  et si  $\nu\{\xi = 0\} = 0$  (c'est-à-dire si la suite  $(h_k)$  ne tend pas trop vite vers 0) alors la suite  $(u_k)$  converge faiblement vers 0 et a pour mesure de défaut microlocale la mesure  $\mu$  donnée par

$$\langle \mu, a \rangle = \int a(x, \frac{\xi}{|\xi|}) d\nu(x, \xi).$$

**Remarque :** Ce résultat semble indiquer que les mesures semi-classiques sont plus précises que les mesures micro-locales, néanmoins comme le montre P. Gérard [19], il n'existe pas toujours une suite d'échelles  $(h_k)$  telle qu'on ait (11) et  $M_{\text{sc}}(u_k)\{\xi = 0\} = 0$ . Il suffit en effet de prendre la suite  $(u_k)$  donnée par  $\widehat{u}_k(\xi) = \frac{1}{\log(k)^{1/2}} (1 + |\xi|^2)^{-d/4} \widehat{\psi}(\xi/k)$  avec  $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  vérifiant  $\int \psi = 1$ . On peut alors montrer que

$$\|f_k\|_{L^2} \rightarrow (2\pi)^{-d} |S^{d-1}| \left| \int \psi \right|^2$$

et  $\forall 0 < a < b < +\infty$

$$\int_{a \leq h_k \leq b} |\widehat{f}_k(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{C}{\log k} \int_{a \leq h_k \leq b} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{d/2}} \leq \frac{C'}{\log k} \log(b/a).$$

Toute mesure semi-classique associée à la suite  $(u_k)$  est donc supportée par l'ensemble  $\{\xi = 0\}$  alors que la mesure de défaut de  $(u_k)$  est  $\mu_0 = |\int \psi|^2 \delta_{x=0} \otimes d\sigma(\xi)$  ( $d\sigma(\xi)$  est la mesure de Lebesgue sur la sphère  $S^{d-1}$ ). On pourrait plus généralement montrer qu'on peut obtenir ainsi comme mesure de défaut microlocale une mesure arbitraire.

Le comportement des mesures par changement de variables est décrit par le résultat suivant :

**PROPOSITION 5.** — Soient  $\theta$  un difféomorphisme  $C^1$  de  $\Omega$  dans lui-même et  $\Theta = (\theta, {}^t\theta'^{-1})$  la transformation canonique associée sur  $T^*\Omega$ . Si la suite  $u_k$  bornée dans  $L^2_{\text{loc}}$  est pure de mesure de défaut microlocale  $\mu$  (respectivement de mesure semi-classique  $\nu$ ) alors il en est de même de la suite  $v_k = u_k \circ \theta$  et

$$M(v_k) = |\det\theta'|^{-1} \Theta^{-1}(M(u_k)).$$

**Remarque :** Ce résultat est très simple à démontrer si  $\theta$  est de classe  $C^\infty$  (c'est alors une conséquence de (1) ou (4)) ou dans le cas des mesures semi-classiques; il est beaucoup plus difficile à obtenir pour les mesures micro-locales (voir Tartar [41]). Il permet de définir des mesures micro-locales ou semi-classiques sur une variété.

Les théorèmes de régularité elliptique micro-locale se traduisent aussi en termes de mesures : on considère  $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ ;  $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$  un opérateur différentiel et  $p = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$  son symbole principal.

**PROPOSITION 6** (régularité elliptique). — Soient  $(h_k)$  une suite d'échelles et  $(u_k)$  une suite bornée dans  $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ , pure, de mesure de défaut microlocale  $\mu$  (respectivement de mesure semi-classique  $\nu$ ). Si  $P(u_k)$  est compacte dans  $H^{-m}_{\text{loc}}(\Omega)$  (respectivement si  $h_k^m P(u_k)$  converge fortement vers 0 dans  $L^2_{\text{loc}}$ ) alors on a

$$p\mu = 0 \quad (\text{respectivement } p\nu = 0).$$

Enfin on a un résultat d'orthogonalité :

**PROPOSITION 7** (orthogonalité). — Soient  $(u_k)$  et  $(v_k)$  deux suites bornées dans  $L^2(\Omega; \mathbf{C})$ , pures, convergeant faiblement vers  $u$  et  $v$  respectivement, de mesures micro-locales  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Si les mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont mutuellement singulières ( $\mu_1 \perp \mu_2$ ) alors  $(u_k, v_k)_{\mathbf{C}}$  converge vers  $(u, v)_{\mathbf{C}}$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Soient  $(h_k)$  une suite d'échelles,  $(u_k)$  et  $(v_k)$  deux suites bornées dans  $L^2(\Omega; \mathbf{C})$ , pures, de mesures semi-classiques  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Si les mesures  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont mutuellement singulières ( $\nu_1 \perp \nu_2$ ) alors la suite  $(u_k + v_k)$  est pure, de mesure semi-classique

$$M_{\text{sc}}(u_k + v_k) = \nu_1 + \nu_2.$$

## 2. MESURES ET HOMOGENÉISATION

Les H-mesures ont été définies à l'origine par L. Tartar [41,42] pour étudier des problèmes d'homogénéisation délicats. Nous allons ici présenter d'autres résultats d'homogénéisation où les mesures semi-classiques permettent de décrire l'évolution d'un système gouverné par une équation aux dérivées partielles.

**2.1.** On s'intéresse dans cette partie au comportement quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  des solutions d'équations du type

$$(1) \quad \left( -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta + V \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \Psi^\varepsilon(t, x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^d,$$

$$(2) \quad \Psi^\varepsilon(t = 0, x) = \Psi_0^\varepsilon(x),$$

où  $V$  est un potentiel réel,  $2\pi\mathbf{Z}^d$  périodique. Ce système modélise le comportement d'électrons se déplaçant dans un réseau cristallin.

L'éclatement  $(x, \frac{x}{\varepsilon}) \mapsto (x, y)$  transforme l'opérateur  $\left( -\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta + V \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right)$  en

$$\frac{1}{2}(\varepsilon D_x + D_y)^2 + V(y) = A(\varepsilon D_x, D_y, y),$$

avec  $A(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + D_y)^2 + V(y)$ . On suppose  $V \in C^\infty$  (d'après [32],  $L^\infty$  est suffisant). L'opérateur  $A(\xi)$  est pour tout  $\xi$  elliptique autoadjoint sur  $\mathbf{T}^d$  et il existe donc une base Hilbertienne de  $L^2(\mathbf{T}^d)$ ,  $\varphi_j(y, \xi)$  (les fonctions de Bloch) formée de vecteurs propres de  $A(\xi)$  associés aux valeurs propres :

$$\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \dots \leq \lambda_j(\xi) \leq \dots$$

**LEMME 8** (Wilcox [44], voir aussi C. Gérard [13]).— *Les fonctions  $\lambda_j(\xi)$  sont Lipschitziennes et analytiques en dehors d'un fermé de mesure nulle,  $F_j$ , et les fonctions  $\varphi_j(y, \xi)$  sont mesurables, analytiques pour  $\xi \notin F_j$ .*

On suppose que la donnée initiale  $\Psi^\varepsilon$  est  $\varepsilon$ -oscillante, pure de mesure semi-classique,  $\mu_0$ , ne chargeant pas l'ensemble  $\mathbf{R}_x^d \times \cup_j F_j$  (qui est de mesure de Lebesgue nulle).

On travaille avec la suite d'échelles  $(\varepsilon)$ . On définit, comme dans V. Buslaev [9] et C. Gérard-A. Martinez-J. Sjöstrand [14],  $u^\varepsilon(t, x, y)$  solution de

$$(3) \quad \left( \varepsilon D_t + \frac{1}{2}(\varepsilon D_x + D_y)^2 + V(y) \right) u^\varepsilon = 0 \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^d \times \mathbf{T}_y^d$$

$$(4) \quad u^\varepsilon(t = 0, x, y) = u_0^\varepsilon(x, y),$$

où on a construit une donnée initiale  $u_0^\varepsilon(x, y)$  de telle façon que d'une part

$$\Psi_0^\varepsilon(x) = u_0^\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

et que d'autre part il existe  $B$  une zone de Brillouin, c'est-à-dire une cellule fon-

damentale du réseau  $\mathbf{Z}^d$  (le dual de  $2\pi\mathbf{Z}^d$ ) telle que pour tout  $k \in \mathbf{Z}^d$  la mesure semi-classique de

$$\widehat{u}_0^\varepsilon(x, k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{T}^d} e^{-iy \cdot k} u_0^\varepsilon(x, y) dy$$

est supportée dans  $\mathbf{R}_x^d \times B_\xi$  et ne charge pas son bord,  $\mathbf{R}_x^d \times \partial B_\xi$ . On retrouve alors

$$\Psi_0^\varepsilon(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} e^{ikx/\varepsilon} \widehat{u}_0^\varepsilon(x, k).$$

Les mesures semi-classiques des termes de droite sont donc de la forme

$$M_{sc}(e^{ikx/\varepsilon} \widehat{u}_0^\varepsilon(\cdot, k))(x, \xi) = M_{sc}(\widehat{u}_0^\varepsilon(\cdot, k))(x, \xi - k)$$

et sont donc deux à deux orthogonales puisque de support disjoints. Pour calculer la mesure semi-classique de  $\Psi_0^\varepsilon$ , il suffit donc d'après la proposition 7 de calculer celle de chacun des termes de droite. On note  $\mathcal{M}_0(x, \xi)$  la mesure semi-classique de la suite  $u_0^\varepsilon(x, y) \in L^2(\mathbf{R}_x^d, \mathcal{H})$  avec  $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{T}^d)$ .

**THÉORÈME 9** (P. Gérard [16]). — *La solution  $\Psi^\varepsilon(t, \cdot)$  de l'équation (1) admet une mesure semi-classique,  $\mu(t)$  continue en temps vérifiant*

$$(5) \quad \mu(t) = \sum_{1 \leq j} \mu_j(t)$$

$$(6) \quad \partial_t \mu_j + \lambda_j'(\xi) \cdot \nabla_x \mu_j = 0$$

$$(7) \quad \mu_j(t=0, x, \xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \left| \int \varphi_j(y, \xi) e^{iky} \frac{dy}{(2\pi)^d} \right|^2 \langle \mathcal{M}_0(x, \xi - k) \varphi_j(\xi), \varphi_j(\xi) \rangle$$

et la mesure semi-classique de  $\Psi$  est

$$(8) \quad \mu = \sum_{1 \leq j} \mu_j(t) dt \otimes \delta_{\tau = -\lambda_j(\xi)}.$$

### Remarques :

- 1) Un résultat analogue a été démontré par une méthode très proche par P. Markowich-N. Mauser-F. Poupaud [32] qui s'inspirent pour ce faire de l'approche de P.L. Lions-T. Paul [31] pour la définition des mesures semi-classiques (les mesures de Wigner) et développent en particulier une théorie des mesures semi-classiques adaptée aux problèmes périodiques (les séries de Wigner).
- 2) L'équation (6) montre d'une part que la mesure  $\mu$  est complètement déterminée par la mesure initiale et d'autre part que les contributions de chaque Hamiltonien  $H_j = \lambda_j(\xi)(\cdot, \varphi_j) \varphi_j$  évoluent sans interaction.
- 3) P. Gérard [19] a récemment résolu le même problème dans le cas beaucoup plus difficile où on considère un potentiel du type  $V(\frac{x}{\varepsilon}) + U(x)$ , mais sous l'hypothèse restrictive (génériquement vérifiée en dimension  $d = 1$ ) que les valeurs propres

$\lambda_j(\xi)$  sont simples (ou de multiplicité constante).

**2.2. Schéma de la démonstration du théorème.** On note

$$u_j^\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{T}^d} \bar{\varphi}_j(\varepsilon D_x, y) u^\varepsilon(x, y) dy.$$

D'après la propriété de base Hilbertienne de la suite  $\varphi_j(\xi)(\cdot)$ , on retrouve

$$u^\varepsilon(x, y) = \sum_j \varphi_j(\varepsilon D_x, y) (u_j^\varepsilon(x)).$$

Pour tout  $j$  la suite  $u_j^\varepsilon$  vérifie donc

$$(\varepsilon D_t + \lambda_j(\varepsilon D_x)) u_j^\varepsilon = 0.$$

**PROPOSITION 10.**— *On suppose que la fonction  $\lambda(\xi)$  est bornée et de classe  $C^1$  en dehors d'un fermé  $F$ . On note  $v^\varepsilon$  la suite des solutions du système*

$$(9) \quad (\varepsilon D_t + \lambda(\varepsilon D_x)) v^\varepsilon = 0, \quad v^\varepsilon(t = 0, x) = v_0^\varepsilon.$$

*Si la suite  $v_0^\varepsilon$  est  $\varepsilon$ -oscillante compacte à l'infini, pure et si  $M_{\text{sc}}(v_0^\varepsilon)$  ne charge pas  $\mathbf{R}^d \times F$  alors pour tout  $t$  il en est de même pour la suite  $v^\varepsilon(t)$  et on a*

$$(10) \quad \partial_t M_{\text{sc}}(v^\varepsilon) + \nabla_\xi \lambda(\xi) \cdot \nabla_x M_{\text{sc}}(v^\varepsilon) = 0,$$

*ie.  $M_{\text{sc}}(v^\varepsilon)(t, x, \xi) = M_{\text{sc}}(v_0^\varepsilon)(x - t \nabla_\xi \lambda(\xi), \xi)$ .*

*Enfin la suite  $v^\varepsilon$  a pour mesure semi-classique la mesure  $M_{\text{sc}}(v^\varepsilon) dt \otimes \delta_{\tau = -\lambda(\xi)}$ .*

La suite  $v^\varepsilon$  est  $\varepsilon$ -oscillante, compacte à l'infini. D'après l'équation (9), pour tout  $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}_s^d \times F^c)$  la suite  $(a(x, \varepsilon D_x) v^\varepsilon, v^\varepsilon)(t)$  est équicontinue sur  $\mathbf{R}_t$ . Le théorème d'Ascoli permet donc d'extraire une sous-suite,  $(\varepsilon_k)$ , telle que pour tout  $t$  la suite  $v^{\varepsilon_k}(t)$  est pure. Si la fonction  $\lambda$  était de classe  $C^1$  partout, l'équation (10) serait conséquence du calcul symbolique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\varepsilon} ([\lambda(\varepsilon D_x), a(x, \varepsilon D_x)] v^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \frac{1}{i\varepsilon} (a(x, \varepsilon D_x) \varepsilon D_t v^\varepsilon, v^\varepsilon) + \frac{1}{i\varepsilon} (a(x, \varepsilon D_x) v^\varepsilon, -\varepsilon D_t v^\varepsilon) \\ &= \frac{1}{i} D_t (a(x, \varepsilon D_x) v^\varepsilon, v^\varepsilon); \end{aligned}$$

le terme de droite est égal à  $-\partial_t \langle \mu, a \rangle + o(\varepsilon)$  et le terme de gauche à

$$((\nabla_x a)(x, \varepsilon D_x) \cdot \nabla_\xi \lambda(\varepsilon D_x) v^\varepsilon, v^\varepsilon) + o(\varepsilon)$$

et converge donc vers  $\langle \mu, (\nabla_x a)(x, \xi) \nabla_\xi \lambda(\xi) \rangle$ . On obtient donc que toute mesure semi-classique de la suite  $v^\varepsilon$  vérifie (10), donc est égale à l'unique solution de cette équation. Pour conclure dans le cas où  $\lambda$  est moins régulière, on utilise que l'équation (10) est vérifiée en dehors de  $F$  et que la donnée initiale ne charge pas  $F$ , donc pour tout  $t$  la contribution de  $\mathbf{R}_x^d \times F^c$  donne d'après (10) toute l'énergie initiale, la conservation de l'énergie implique donc que la mesure  $\mu(t)$  ne charge pas non plus  $F$  ce qui démontre et donne un sens à (10), sur  $\mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_\xi^d$ . On déduit de la proposition 10,

puisque  $M_{\text{sc}}(u_j^\varepsilon |_{t=0}) = \langle \mathcal{M}_0(x, \xi) \varphi_j(\xi)(y), \varphi_j(\xi)(y') \rangle$  que la suite  $u_j^\varepsilon(t)$  est pure de mesure semi-classique de l'équation

$$\partial_t M_{\text{sc}}(u_j^\varepsilon) + \nabla_\xi \lambda(\xi) \cdot \nabla_x M_{\text{sc}}(u_j^\varepsilon) = 0$$

et la mesure semi-classique de  $u_j^\varepsilon$  est  $M_{\text{sc}}(u_j^\varepsilon) dt \otimes \delta_{\tau = -\lambda_j(\xi)}$ . On peut alors en utilisant encore des arguments d'orthogonalité obtenir la relation (7).

**Remarque :** Si on considère la mesure  $\mu'_j(x, t, \xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mu_j(x, t, \xi + k)$  comme dans [32] (ce qui revient à considérer une série de Wigner), alors la relation (7) se simplifie encore puisqu'en utilisant que  $\varphi_j(\xi + k, y) = e^{iky} \varphi_j(\xi, y)$ ,  $\lambda_j(\xi + k) = \lambda_j(\xi)$ , on obtient que les mesures  $\mu'_j$  sont les solutions de l'équation (6) associées aux données initiales

$$\mu'_{0,j} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \langle \mathcal{M}_0(x, \xi + l) \varphi_j(\xi)(y), \varphi_j(\xi)(y') \rangle.$$

### 3. MESURES ET ÉQUATIONS D'ONDES

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement en grand temps des solutions de l'équation des ondes. Les mesures de défaut micro-locales seront utilisées ici pour obtenir des estimations d'énergie. On montrera en particulier comment elles permettent de démontrer des résultats de contrôlabilité exacte, d'observation et de stabilisation. L'idée d'utiliser les mesures de défaut micro-locales dans ce cadre est due à G. Lebeau [27]. On pourra, pour d'autres utilisations des H-mesures dans le cadre de l'homogénéisation de l'équation des ondes, où les mesures de défaut micro-locales interviennent pour décrire la concentration de l'énergie dans le passage à la limite, consulter par exemple L. Tartar [41,42], S. Brahim-Otsmane-G. Francfort-F. Murat [6] et G. Francfort-F. Murat [12]. On pourra aussi consulter pour des développements de la notion de mesure de défaut (mesures à deux échelles, mesures deux-microlocales) et leurs applications à l'étude d'équations d'évolution, les travaux récents de G. Allaire [1], C. Fermanian [11], L. Miller [36] et F. Nier [38].

**3.1. Notations.** Soient  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  un ouvert borné connexe de classe  $C^\infty$ ,  $a \in C^0(\overline{\Omega})$ , une fonction positive. On note  $A = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ \Delta & -2a \end{pmatrix}$ , l'opérateur non borné sur  $H = H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ , avec pour domaine  $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)$ . On fixe  $\Theta \in C_0^0(\mathbf{R}_+^* \times \partial\Omega)$ . On note

$$E(u)(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

$$F(u) = \int_{\mathbf{R}} \int_G \Theta^2 \left| \frac{\partial u}{\partial n}(y, s) \right|^2 d\sigma ds$$

et on vérifie facilement que pour tout  $u \in \mathcal{H}$ , si on note  $u(t) = (u_1, u_2)(t) = e^{tA}u$  ( $t \geq 0$ ) alors

$$E(u)(t) = E(u)(0) - \int_0^t \int_{\Omega} a(x) |u_2(s, x)|^2 dx ds.$$

On note  $M = \mathbf{R}_t \times \Omega$ ,  $T_b^*M = T^*M \setminus \{0\} \cup T^*\partial M \setminus \{0\}$  et  $S_b^*M = T_b^*M/\mathbf{R}^+$ , le fibré cotangent en sphère jusqu'au bord de  $M$ . On a une application naturelle de restriction,  $\pi : T^*\mathbf{R}^{d+1} \big|_{\overline{M}} \rightarrow T_b^*M$  et on munit ce dernier espace de la topologie induite par cette application. On note  $P = \Delta - \partial_t^2$ ,  $p = \tau^2 - |\eta|^2$  son symbole principal  $H_p = 2\tau\partial_t - 2\eta \cdot \partial_y$ , son champ Hamiltonien et  $\Sigma_b$  la projection sur  $T_b^*M$  de la variété caractéristique,  $\mathcal{C}$ , d'équation  $p = 0$ . Enfin on note, pour  $x \in \partial M$ ,  $n(x)$  la normale extérieure au bord au point  $x$ .

**DÉFINITION 11.** — On dit que  $\zeta \in T^*\partial M \setminus \{0\}$  est

- 1) *Hyperbolique* si  $\#\{\pi^{-1}(\zeta) \cap \{p = 0\}\} = 2$  (et on note  $\zeta \in \mathcal{H}$ ),
- 2) *Glancing* si  $\#\{\pi^{-1}(\zeta) \cap \{p = 0\}\} = 1$  (et on note  $\zeta \in \mathcal{G}$ ),
- 3) *Elliptique* sinon, c'est-à-dire si  $\zeta \notin \Sigma_b$  (et on note  $\zeta \in \mathcal{E}$ ).

On peut identifier  $\mathcal{G}$  avec  $\pi^{-1}(\mathcal{G})$ , donc considérer que  $\mathcal{G}$  est inclus dans  $T^*\mathbf{R}^{d+1}$ . Dans toute la suite, quand on étudiera un voisinage d'un point du bord, on se placera dans un système de coordonnées géodésiques,  $\varrho = (x_n, \xi_n, x', \xi')$ , c'est-à-dire que dans ce système  $M$  est donné par l'équation  $x_n = 0$  et l'opérateur  $\partial_t^2 - \Delta$  s'écrit  $-\partial_{x_n}^2 - R(x_n, x', D_{x'})$ . On note  $r(x_n, x', \xi')$  le symbole principal de l'opérateur  $R$  et

$$r_0(x', \xi') = r|_{x_n=0}.$$

Les points glancing sont les points du bord  $(x_n, \xi_n, x', \xi')$  qui vérifient  $p = H_p(x_n) = 0$ , c'est-à-dire  $x_n = \xi_n = r(0, x', \xi') = 0$ .

**DÉFINITION 12.** —

- i) On dit que le point  $\zeta \in \mathcal{G}$  est non strictement glissant (et on note  $\zeta \in \mathcal{G}_{nsg}$ ) si

$$\partial_{x_n}(r)(\zeta) \geq 0.$$

- ii) On dit que le point  $\zeta \in \mathcal{G}$  est strictement glissant (et on note  $\zeta \in \mathcal{G}_{sg}$ ) si

$$\partial_{x_n}(r)(\zeta) < 0.$$

- iii) On dit que le point  $\zeta \in \mathcal{G}$  est diffractif (et on note  $\zeta \in \mathcal{G}_d$ ) si

$$\partial_{x_n}(r)(\zeta) > 0.$$

- iv) On dit que le point  $\zeta \in \mathcal{G}$  est glissant d'ordre  $k$  (et on note  $\zeta \in \mathcal{G}^k$ ) si

$$H_{r_0}^j(\partial_{x_n}(r)|_{x_n=0}(\zeta)) = 0, \quad j < k - 2 \quad \text{et} \quad H_{r_0}^{k-2}(\partial_{x_n}(r)|_{x_n=0}(\zeta)) \neq 0.$$

On supposera par la suite que  $\mathcal{G} = \cup_{k \in \mathbf{N}^*} \mathcal{G}^k$  (on dit alors que  $\Omega$  n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes).

**DÉFINITION 13.** — On appelle bicaractéristique généralisée toute application continue,  $\gamma$ , de  $\mathbf{R}$  dans  $T_b^*M$  telle qu'en dehors d'un ensemble de points isolés,  $I$ ,  $\gamma(s) \in T^*M \cup \mathcal{G}$ , si  $s \in I$ , on a  $\gamma(s) \in \mathcal{H}$  et si  $s \notin I$ ,  $\gamma$  est différentiable (comme application à valeurs dans  $T^*\mathbf{R}^{d+1}$ ) avec

- 1)  $\frac{d\gamma}{ds}(s) = H_p(\gamma(s))$  si  $\gamma(s) \in T^*M \cup \mathcal{G}_d^f$ ,
- 2)  $\frac{d\gamma}{ds}(s) = H_p(\gamma(s)) - \partial_{x_n}(r)\partial_{\xi_n}$  si  $\gamma(s) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_d^f$ .

Il est classique que les définitions que nous avons exprimées en coordonnées sont intrinsèques et que si  $\Omega$  n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes, par tout point  $\varrho_0$  de  $T_b^*M \cap \Sigma_b$  il passe une et une seule bicaractéristique généralisée telle que  $\gamma(0) = \varrho_0$ . On la notera  $\gamma(s, \varrho_0)$ .

**3.2. Mesures pour l'équation des ondes.** On considère  $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in H$  une suite bornée d'éléments de  $H$  qu'on identifie avec  $(u_k)(t) = (e^{tA}u_k)$ . On suppose que la suite  $(u_k)$  converge faiblement vers 0 et on note  $\underline{u}_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_t^+)$  le prolongement par 0 de  $u_{k,1}$  à l'extérieur de l'ouvert  $M$ . On peut donc, quitte à extraire une sous-suite lui associer une mesure positive sur  $S^*\mathbf{R}^{d+1}$ ,  $\mu$ , vérifiant pour tout  $A \in \Psi_{\text{comp}}^2(\mathbf{R}^{d+1})$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle A(\underline{u}_k), \underline{u}_k \rangle = \langle \mu, \sigma_2(A)(z, \zeta) \rangle,$$

où on a identifié  $S^*\mathbf{R}^{d+1}$  avec  $T^*\mathbf{R}^{d+1} \cap \{|\zeta|^2 = 2\}$  et les fonctions homogènes d'ordre  $m$  avec leurs restrictions à cette sphère, la métrique choisie sur  $T^*M$  étant celle qui est naturellement associée à la métrique  $dt^2 + g$  sur  $M$  ( $g$  est la métrique associée au Laplacien qu'on considère, ici  $g = dx^2$ ). Dans la suite on identifiera donc les points de  $\mathcal{C} \cap \{\tau^2 = 1\}$  avec leur classe dans  $S^*\mathbf{R}^{d+1}$  et on identifiera aussi les points de  $\Sigma_b \cap T^*\partial M \cap \{\tau^2 = 1\}$  avec leur classe dans  $S^*\partial M$ . On remarquera que cette dernière identification n'est pas celle qui est naturellement associée à la métrique induite sur  $\partial M$ .

**Remarque :** Compte tenu de cette identification, le long d'une bicaractéristique généralisée on a  $\frac{dt}{ds} = 2\tau = \pm 2$ .

**DÉFINITION 14.** — On note  $\phi$  l'application de  $\mathcal{C}$  dans lui-même définie par

$$\phi(s)(\varrho) = \gamma(s - 0, \pi(\varrho)) \in T^*\mathbf{R}^{d+1}$$

( $\gamma(s - 0) = \gamma(s)$  si  $\gamma(s) \notin \mathcal{H}$  et  $\gamma(s - 0) \in T^*\mathbf{R}^d$  est la limite de  $\gamma(t)$  quand  $t \rightarrow s$  par valeurs négatives.) Modulo l'identification précédente,  $\phi(s)$  définit aussi une application de  $\mathcal{C} \cap S^*\mathbf{R}^{d+1} |_{\overline{M}}$  dans lui-même qu'on note  $\Phi(s)$ .

Il est standard que la suite  $(\frac{\partial}{\partial n} u_{k,1} |_{\partial M})$  est bornée dans  $L_{\text{loc}}^2(\partial M)$ . Quitte à extraire encore une sous-suite on peut, d'après la proposition 5 supposer que cette suite a une mesure de défaut micro-locale,  $\nu$ , sur  $S^*\partial M$ .

**THÉORÈME 15.**— *Les mesures  $\mu$  et  $\nu$  vérifient les propriétés suivantes :*

- i) *Le support de la mesure  $\mu$  est inclus dans l'intersection de la variété caractéristique de l'équation des ondes,  $\mathcal{C}$ , d'équation  $\tau^2 = |\xi|^2$  avec  $S^*\mathbf{R}^{d+1} \big|_{\overline{M}}$  qu'on note encore  $\mathcal{C}$ .*
- ii) *Pour tout point  $\varrho \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$  on note  $\varrho^+ = (x, \xi^+)$  et  $\varrho^- = (x, \xi^-)$  les deux points éventuellement confondus de  $\{\pi^{-1}(\varrho)\}$  et  $n(x(\varrho))$  la normale extérieure à  $\partial M$  au point  $x(\varrho)$ . Les mesures  $\mu$  et  $\nu$  vérifient (au sens des distributions) l'équation*

$$(1) \quad H_p(\mu) + 4a(x)\tau\mu = \int_{\rho \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}} \frac{\delta(\xi - \xi_+(\rho)) - \delta(\xi - \xi_-(\rho))}{\langle \xi_+ - \xi_-, n(x(\rho)) \rangle} \nu(d\rho),$$

*c'est-à-dire que pour toute fonction  $b$  de classe  $C^1$ , homogène d'ordre 1 sur  $T^*\mathbf{R}^{d+1}$ ,*

$$(2) \quad \langle \mu, 4a\tau b - H_p(b) \rangle = \int_{\mathcal{H} \cup \mathcal{G}} \frac{b(x, \xi^+) - b(x, \xi^-)}{\langle \xi^+ - \xi^-, n(x) \rangle} d\nu(\rho).$$

*(Compte tenu de notre choix de métrique sur  $T^*\mathbf{R}^{d+1}$ , l'action du champ  $H_p$  commute à la restriction sur la sphère  $|\xi|^2 = 2$ .)*

- iii) *La mesure  $\mu$  ne charge pas l'ensemble des points de  $T^*\mathbf{R}^{d+1} \cap \partial M$  dont la projection sur  $T^*\partial M$  est un point hyperbolique et la mesure  $\nu$  ne charge pas l'ensemble des points non strictement glissants de  $T^*\partial M$ .*
- iv) *Compte tenu de i), la transformation  $\Phi(s)$  est, pour tout  $s$ ,  $\mu$  presque partout définie et vérifie d'après iii)  $\Phi(s) \circ \Phi(-s) = \text{Id}$ ,  $\mu$  presque partout. Pour tout  $s \in \mathbf{R}$  on a  $\Phi(s)^*(\mu) = \exp(-\int_0^s 4\tau a(\gamma(s, \pi(\varrho))))\mu$ . En d'autres termes, pour tout borélien  $\omega \subset Z$ ,*

$$(3) \quad \mu(\Phi(s)(\omega)) = \int_{\omega \cap \mathcal{C}} \exp(-\int_0^s 4\tau a(\gamma(s, *pi(\varrho)))) d\mu(\varrho).$$

Les parties i) et ii) de ce résultat ont été démontrées dans un cadre très proche par P. Gérard et E. Leichtnam [21] pour étudier la répartition asymptotique des fonctions propres du Laplacien avec des conditions au bord de Dirichlet, la partie iii) est due à P. Gérard et l'auteur [7] et la partie iv) a été démontrée par G. Lebeau [27] en utilisant le théorème de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand [33].

Pour démontrer le point i), il suffit de remarquer que la suite  $\underline{u}_k$  vérifie l'équation

$$(\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t) \underline{u}_k = \frac{\partial u_k}{\partial n} \otimes \delta_{\partial M} \in H^{-1/2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

et d'utiliser le théorème de régularité elliptique. Le point ii) se démontre en étudiant le commutateur  $[Q, P]$  où  $Q \in \Psi_{\text{comp}}^1(\Omega)$ . La première partie du point iii) se démontre en utilisant que la mesure  $\mu$  est solution d'une équation de transport  $(H_p + 4a\tau)\mu = g$  où le second membre est, sur  $\mathcal{H}$ , une mesure. La deuxième partie du point iii) correspond

à démontrer la relation :

$$(4) \quad \langle \nu, 1_{r_0=0}, \partial_{x_n} r |_{x_n=0} \geq 0 \rangle = 0.$$

Soit  $\varrho_0 \in \mathcal{G}_{nsg}$ , pour tout  $q_1 = \xi_n q_0(x_n, x', \xi')$ , homogène d'ordre 1 à support dans un voisinage de  $\varrho_0$  on a

$$\langle \mu, -4a(x)\tau q_0 + \xi_n^2 \partial_n q_0 - \xi_n H'_r q_0 + \partial_{x_n} r q_0 \rangle = -\langle \nu, q_0 \rangle,$$

où on note  $H'_r = \partial_{\xi'} r \partial_{x'} - \partial_{x'} r \partial_{\xi'}$ . Comme  $\partial_r r |_{x_n=0} \neq 0$ , on peut compléter  $r |_{x_n=0} = r_0$  en un système coordonnées (non symplectique) sur  $S^* \partial M$ ,  $r_0, z$  et choisir dans la relation précédente  $q_0^\varepsilon(x_n, x', \xi') = t(\frac{x_n}{\sqrt{\alpha}}, \frac{r_0}{\alpha}, z) \chi(\frac{\partial_{x_n} r}{\sqrt{\alpha}})$  avec  $\chi$  de classe  $C^1$  égale à 1 sur  $[0, +\infty[$  et à 0 sur  $] -\infty, 1/2[$ . Par convergence dominée et en utilisant que sur le support de  $\mu$  on a  $\xi_n^2 = r$ , on obtient

$$\langle \mu, \partial_{x_n} r 1_{x_n=0}, r_0=0, \partial_{x_n} r |_{x_n=0} \geq 0 q_0 \rangle = -\langle \nu, 1_{r_0=0} q_0 \rangle.$$

Les deux termes sont de signes opposés donc tous les deux nuls, ce qui est exactement (4).

Nous donnons en appendice une démonstration élémentaire s'inspirant d'une idée de C. Bardos et T. Masrour [4] d'un résultat a priori plus faible que iv) mais qui est le point crucial de la démonstration de iv) et l'équivalent, en termes de mesures du théorème de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand [33] :

*iv') Si le point  $\varrho$  n'appartient pas au support de la mesure  $\mu$ , alors l'image réciproque par  $\pi$  de la bicaractéristique issue de  $\pi(\varrho_0)$  ne rencontre pas non plus ce support.*

**3.4. Stabilisation de l'équation des ondes.** On suppose ici que  $a \neq 0$ . L'énergie  $E(u)(t)$  est donc décroissante. On s'intéresse à son taux de décroissance. D'après le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques d'ordre 2,  $\lambda \in \text{sp}(A) \Rightarrow \text{Re} \lambda < 0$ , ce qui implique, puisque l'espace engendré par les fonctions propres est, d'après I. Gohberg-M. Krein [23], dense dans  $\mathcal{H}$  que pour tout  $u \in \mathcal{H}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(u, t) = 0$ .

On note  $D(x) = \sup\{\text{Re} \lambda; \lambda \in \text{sp}(A), |\lambda| \geq x\}$ . Pour  $\varrho_0 = (x_0, \xi_0) \in \Sigma_b$  on note  $\gamma(s, \varrho_0)$  l'unique bicaractéristique issue du point  $\varrho_0$  pour  $s = 0$ . Pour  $t > 0$ , on pose

$$(5) \quad C(t) = \inf_{\varrho_0} \frac{1}{t} \int_0^t a(x(\gamma(s, \varrho_0))) ds.$$

On a  $0 \leq C(t) \leq \|a\|_{L^\infty}$ . On note  $C(\infty)$  sa limite (qui existe) quand  $t$  tend vers l'infini.

**THÉORÈME 16** (C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [3]) . — *On a l'alternative suivante :*

1) *Soit il existe  $T > 0$  tel que toute bicaractéristique généralisée rencontre l'ensemble*

$\{a(x) > 0\} \cap [0, T]$  et alors il existe  $C, \alpha > 0$  tels que pour tout  $u \in \mathcal{H}$ ,

$$E(u, t) \leq Ce^{-\alpha t} E(u, 0).$$

2) Soit pour tout  $T > 0$  il existe une bicaractéristique généralisée ne rencontrant pas l'ensemble  $\{a(x) > 0\} \cap [0, T]$  et alors pour tout  $t > 0$

$$\sup_{u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{E(u, t)}{E(u, 0)} = 1.$$

De plus, (G. Lebeau [27])  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} D(x) \geq C(\infty)$ ,  $C(\infty) > 0$  dans le cas 1) ce qui implique  $D(0) > 0$  et la meilleure constante possible  $\alpha$  dans 1) est donnée par

$$\alpha_0 = 2 \min\{-D(0), C(\infty)\}.$$

Enfin ce dernier résultat est optimal.

L'idée de la démonstration dans le cas 2) consiste à accumuler de l'énergie sur une bicaractéristique qui ne rencontre pas l'ensemble  $\{a > 0\} \cap [0, T]$   $\gamma$ . Pour cela si  $\gamma \cap \{t = 0\} = (t = 0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ , on construit une suite de données initiales dont la mesure de défaut microlocale est  $\delta_{x_0, \xi_0}$  et le théorème 15, iv) montre que, pour la suite de solutions de l'équation des ondes associée, le support de la mesure de défaut microlocale est cette bicaractéristique donc que cette mesure est invariante par le flot  $\Phi(s)$ . Comme

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_1} E(s, u_k) ds = \langle \mu, 1_{t \in [t_0, t_1]} \rangle,$$

la suite  $(u_k)$  vérifie pour tout  $0 < t < T$

$$\langle \delta_{x_0, \xi_0}, 1 \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} E(0, u_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} E(t, u_k).$$

Pour démontrer le cas 1), on procède par l'absurde : on fixe  $\alpha < \alpha_0$  et on suppose que

$$E(u, t) \not\leq Ce^{-\alpha t} E(u, 0).$$

On pourrait alors construire une suite  $(u_k)$  telle que  $E(0, u_k) = 1$  et  $E(t_k, u_k) > ke^{-\alpha t_k}$ ,  $t_k \rightarrow +\infty$ . Comme  $\alpha < -D(0)$ , la suite  $(u_k)$  convergerait faiblement vers 0, et comme  $\alpha < C(\infty)$ , on aurait, pour toute mesure de défaut microlocale associée à une suite extraite de  $(u_k)$ ,

$$\Phi(t)^* \mu \leq e^{-(\alpha_0 - \varepsilon)t} \mu,$$

ce qui, d'après le théorème 15, donne une contradiction pour  $t$  grand et montre que la meilleure constante possible est au moins  $\alpha_0$ . Pour montrer que c'est effectivement la meilleure, G. Lebeau construit des exemples explicites.

**3.5. Observation et contrôle de l'équation des ondes.** On suppose ici que  $a \equiv 0$ . L'énergie  $E(u)$  est donc indépendante du temps. Soit  $\Theta \in C_0^0(\partial\Omega \times ]0, T[)$ . Peut-on

alors, pour  $(v_0, v_1) \in L^2 \times H^{-1}$  trouver  $g \in L^2(\partial\Omega \times \mathbf{R}_t)$  tel que la solution du système

$$(\partial_t^2 - \Delta)v = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbf{R}_t,$$

$$v|_{\partial\Omega \times \mathbf{R}_t} = \Theta g,$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1,$$

vérifie  $v \equiv 0$  pour  $t > T$ ? En d'autres termes, peut-on en agissant uniquement sur une partie du bord et pendant un temps fini (le support de  $\Theta$ ) amener le système à l'équilibre?

Si la réponse à cette question est affirmative pour toutes les données  $(v_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  on dit que  $\Theta$  contrôle exactement le système.

**DÉFINITION 17.** — *On dit que  $\Theta$  contrôle géométriquement le système si tout rayon bicaractéristique rencontre l'ensemble  $\Theta > 0$  en un point hyperbolique ou strictement glissant.*

**THÉORÈME 18** (C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [3], complété par N. Burq et P. Gérard [7]). — *On a équivalence entre :*

- i) La fonction  $\Theta$  contrôle exactement le système.*
- ii) La fonction  $\Theta$  contrôle géométriquement le système.*

**Remarques :**

- 1) Le résultat original de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch donnait des conditions suffisantes et des conditions nécessaires fortes, c'est l'utilisation des mesures de défaut micro-locales qui a permis à P. Gérard et l'auteur et de donner une condition nécessaire et suffisante.
- 2) Le résultat de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch est également vrai pour essentiellement toutes les conditions au bord pour lesquelles le problème est bien posé. Il repose sur le théorème de propagation des singularités de R. Melrose et J. Sjöstrand [33]. Le problème analogue en termes de mesures (c'est-à-dire sans recours au théorème de propagation des singularités) est essentiellement ouvert, en particulier dans le cas où les conditions au bord ne vérifient plus les conditions de Lopatinski uniformes (cas de la condition de Neumann par exemple).
- 3) Le théorème 18 reste vrai pour un Laplacien à coefficients variables de classe  $C^2$  et un ouvert  $\Omega$  de classe  $C^3$  (voir [3] pour le cas  $C^\infty$  et [8] pour le cas peu régulier).

Pour démontrer ce résultat on utilise d'abord un argument de dualité (la méthode H.U.M.) de J. L. Lions [28] qui permet de montrer que la contrôlabilité exacte est

équivalente à l'inégalité d'observation suivante :

$$(5) \quad \exists C > 0; \forall u \in H, E(u) \leq C \int_{\mathbf{R}_t \times \partial\Omega} \Theta^2 \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt = CF(u).$$

Pour démontrer cette inégalité on procède par l'absurde, ce qui permet de construire une suite  $(u_k)$  telle que  $E(u_k) = 1$  et  $F(u_k) \rightarrow 0$ . La limite faible de la suite  $(u_k)$  est solution de  $Pu = 0$ ,  $\Theta \frac{\partial}{\partial n} u|_{\partial M} = 0$  et un argument d'unicité permet de montrer que  $u = 0$ . On peut donc associer deux mesures de défaut micro-locales aux suites  $(u_k)$  et  $(\partial_n u_k|_{\partial M})$ ,  $\mu$  et  $\nu$ . Le support de la mesure  $\mu$  est donc réunion de bicaractéristiques généralisées et au voisinage de tout point  $\varrho_0$  de  $T_b^*M \cap \{\Theta > 0\}$  on a  $\nu = 0$  (car  $F(u_k) \rightarrow 0$ ) donc  $H_p \mu = 0$  d'après (1), donc la mesure  $\mu$  est localement invariante par le flot de  $H_p$  dans  $\mathbf{R}^{d+1}$ . Si  $\varrho_0$  est strictement glissant son image par ce flot sort de  $\overline{M}$  donc rentre d'après le théorème 15 i) dans une région où  $\mu = 0$ . Donc  $\varrho_0 \notin \text{supp}(\mu)$ . L'hypothèse de contrôle géométrique assure donc que toute bicaractéristique contient un point qui n'appartient pas au support de  $\mu$ , donc, d'après le théorème 15, iv'),  $\mu \equiv 0$ , ce qui est contradictoire avec  $E(u_k) = 1 \not\rightarrow 0$ .

Réciproquement, s'il existe une bicaractéristique généralisée ne rencontrant l'ensemble  $\{\Theta > 0\}$  qu'en des points non strictement glissants, on peut construire une suite  $(u_k)$  d'énergie égale à 1 et dont la mesure  $\mu$  a pour support cette bicaractéristique. Le support de la mesure  $\nu$  est inclus dans  $\pi(\text{supp}(\mu))$ , il ne rencontre donc l'ensemble  $\{\Theta > 0\}$  qu'en des points non strictement glissants donc des points que la mesure  $\nu$  ne charge pas. On obtient donc, d'après (4),

$$0 = \langle \nu, \Theta^2 \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} F(u_k)$$

ce qui montre (puisque  $E(u_k) = 1$ ) que l'inégalité (5) ne peut pas être satisfaite.

#### 4. COMPACTITÉ PAR COMPENSATION

Nous allons montrer dans cette partie comment les mesures de défaut micro-locales permettent de passer à la limite dans certaines expressions non linéaires pour des solutions d'équations aux dérivées partielles.

**4.1 Compacité par compensation.** On considère  $\mathcal{H}_i, i = 1, 2$ , deux espaces de Hilbert,  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  et  $P \in \Psi_{\text{comp}}^m(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$ . On se donne  $(u_k) \rightharpoonup u$  une suite pure de  $L_{\text{loc}}^2(\Omega; \mathcal{H}_1)$  de mesure de défaut microlocale  $\mu$  et on suppose que pour un ensemble dense  $D$  de  $\mathcal{H}_2$  la suite  $(Pu_k, h)_{\mathcal{H}_2}$  est relativement compacte dans  $H_{\text{loc}}^{-m}(\Omega)$ .

Le résultat suivant de P. Gérard [15] généralise le lemme du “div-rot” de Murat et Tartar [37], [42].

**THÉORÈME 19** (Compacité par compensation) .—

i) La mesure  $\mu$  vérifie  $\sigma_m(p)(x, \xi)\mu = 0$  (régularité elliptique).

ii) Pour tout  $q \in \Psi_{\text{comp}}^0(\Omega; \mathcal{K}(\mathcal{H}_1))$  tel que

$$\forall (x, \xi, h) \in S^*\Omega \times \mathcal{H}_1, \quad p(x, \xi)h = 0 \Rightarrow (q(x, \xi)h, h)_{\mathcal{H}_1} \geq 0$$

alors pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  positive

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(x)(q(x, D_x)u_k, u_k)_{\mathcal{H}_1} dx \geq \int_{\Omega} \varphi(x)(q(x, D_x)u, u)_{\mathcal{H}_1} dx.$$

En particulier si

$$\forall (x, \xi, h) \in S^*\Omega \times \mathcal{H}_1, \quad p(x, \xi)h = 0 \Rightarrow (q(x, \xi)h, h)_{\mathcal{H}_1} = 0,$$

alors  $(q(x, D_x)u_k, u_k)_{\mathcal{H}_1}$  converge vers  $(q(x, D_x)u, u)_{\mathcal{H}_1}$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**4.2 Compacité par compensation trilinéaire et optique géométrique non linéaire.** Nous allons donner dans cette partie un exemple d'utilisation des idées de compacité par compensation. Pour d'autres exemples, en particulier dans le cadre de l'homogénéisation on renvoie à F. Murat [37] et L. Tartar [41].

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et  $X_j = \partial_t + c_j(t, x)\partial_x$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $(t, x) \in \Omega$ ,  $N$  champs de vecteurs sur  $\Omega$ . On considère  $u_j$  solutions bornées dans  $L^\infty(\Omega)$  de

$$(1) \quad X_j u_j = F_j(t, x, u_1, \dots, u_N), \quad j = 1, \dots, N,$$

un système d'équations d'évolutions. On peut, quitte à extraire des sous-suites, associer à toute famille  $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \dots, u_N^\varepsilon)$  une famille mesurable  $\mu_{t,x}$  (respectivement  $\mu_{j,t,x}$ ) de densités de probabilités sur  $\mathbf{R}^N$  (respectivement sur  $\mathbf{R}$ ), qu'on appelle mesures de Young, telles que pour tout  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$  (respectivement  $\Phi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ )

$$\Phi(u^\varepsilon) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(\lambda) \mu_{t,x}(\lambda) \quad \left( \text{respectivement } \Phi_j(u_j^\varepsilon) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \int_{\mathbf{R}} \Phi_j(\lambda) \mu_{t,x}(\lambda) \right).$$

On s'intéresse à la question de savoir si les mesures  $\mu_j$  déterminent la mesure  $\mu$ . En particulier a-t-on

$$(2) \quad \mu_{t,x}(d\lambda) = \mu_{1,t,x}(d\lambda) \otimes \dots \otimes \mu_{N,t,x}(d\lambda) \quad \text{pour presque tout } (t, x)?$$

En considérant des fonctions  $\Phi$  de la forme  $\Phi(\lambda) = \Phi_1(\lambda_1) \times \dots \times \Phi_N(\lambda_N)$  et les fonctions  $v_j^\varepsilon = \Phi_j(u_j^\varepsilon)$  solutions de

$$X_j v_j^\varepsilon = \Phi_j'(u_j^\varepsilon) F_j(t, x, u_1^\varepsilon, \dots, u_N^\varepsilon),$$

on voit facilement que la relation (1) est équivalente à la propriété

$$(3) \quad \forall (\Phi_1, \dots, \Phi_N), \quad \lim_{\mathcal{D}'} (v_1^\varepsilon \times \dots \times v_N^\varepsilon) = \lim_{\mathcal{D}'} (v_1^\varepsilon) \times \dots \times \lim_{\mathcal{D}'} (v_N^\varepsilon),$$

où  $v_j^\varepsilon = \Phi_j(u_j^\varepsilon)$ .

La réponse pour  $N = 2$  est une conséquence simple du théorème de compacité par compensation ou encore plus simplement des propositions 6 et 7 : On note

$$\mathcal{W}(\Omega; X) = \{u \in L^2_{\text{loc}}; Xu \in L^2_{\text{loc}}\}.$$

**THÉORÈME 20.** — *Soient  $X_1, X_2$ , deux champs de vecteurs sur  $\Omega$  partout indépendants, alors l'application  $(u_1, u_2) \mapsto u_1 u_2$  est continue de l'espace  $\mathcal{W}(\Omega; X_1) \times \mathcal{W}(\Omega; X_2)$  dans  $L^2(\Omega)$  pour les topologies faibles.*

La preuve de ce résultat est très simple. Soient  $(u_j^\varepsilon)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{W}(\Omega; X_j)$  convergeant faiblement vers  $u_j$ . On va montrer que  $(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon) \rightharpoonup u_1 u_2$ . Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que  $u_1^\varepsilon$  a une mesure de défaut microlocale,  $\mu_1$  et  $\bar{u}_2^\varepsilon$  a une mesure de défaut microlocale,  $\mu_2$ . D'après la proposition 6,  $\mu_j$  est supportée par l'ensemble  $\sigma_1(X_i) = 0$ . Comme l'intersection de ces deux ensembles est réduite à  $\{(t, x, \tau, \xi); \tau = \xi = 0\}$  (puisque les deux champs sont indépendants), les deux mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont mutuellement singulières donc  $M(u_1^\varepsilon + \bar{u}_2^\varepsilon) = \mu_1 + \mu_2$  donc

$$\lim \operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} \varphi(u_1^\varepsilon - u_1)(u_2^\varepsilon - u_2) \right) = 0$$

et  $M(u_1^\varepsilon + i\bar{u}_2^\varepsilon) = \mu_1 + \mu_2$ , soit

$$\lim \operatorname{Im} \left( \int_{\Omega} \varphi(u_1^\varepsilon - u_1)u_2^\varepsilon - u_2 \right) = 0,$$

on en déduit que  $(u_1^\varepsilon - u_1)u_2^\varepsilon - u_2 \rightharpoonup 0$  donc  $(u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon) \rightharpoonup 0$ .

Pour  $N \geq 3$  le problème est plus complexe puisqu'il peut apparaître des phénomènes de résonances.

**DÉFINITION 21.** — *On appelle résonance sur un ouvert  $\Omega$ , la donnée d'un ouvert  $\omega \subset \Omega$  et de  $N$  fonctions  $\varphi_j$  tels que*

$$(4) \quad X_j \varphi_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^3 d\varphi_j = 0, \quad \exists k; d\varphi_k(x, t) \neq 0 \quad \text{sur } \omega.$$

Si'il existe une résonance on peut supposer que  $\sum_j \varphi_j = 0$  sur  $\omega$ , on choisit alors  $a_j \in C_0^\infty(\omega)$  telles que  $a_1 \times \cdots \times a_3 \neq 0$  et on vérifie facilement que les fonctions  $u_j = a_j(x, t)e^{i\varphi_j(x, t)}$  convergent faiblement vers 0 tandis que ce n'est pas le cas de leur produit. Si les champs sont à coefficients constants (et  $N \geq 3$ ) il est facile de voir qu'il existe toujours une résonance.

On se place dans toute la suite dans le cas  $N = 3$ . On suppose que les champs  $X_j$  sont deux à deux linéairement indépendants. Chaque champ  $X_j$  définit un feuilletage  $\mathcal{F}_j$  de  $\Omega$  par les courbes intégrales de  $X_j$ . La donnée de ces trois feuilletages

est appelée un 3-tissu. L'existence de résonances ne dépend que du 3-tissu. On peut définir une notion de courbure du 3-tissu (voir W. Blaschke et G. Bol [5]) et montrer que l'existence d'une résonance sur  $\omega$  est équivalente à l'annulation sur  $\omega$  de cette courbure. Il est tout à fait remarquable que cet invariant géométrique décrit l'obstruction à la convergence faible (3) comme le montre le résultat suivant :

**THÉORÈME 22** (J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [26]).— *Soient  $X_i, i = 1, 2, 3$ , trois champs de vecteurs deux à deux indépendants sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^2$ , tels que la courbure du 3-tissu associé ne s'annule en aucun point de  $\Omega$ . Alors il existe un voisinage  $\omega$  de  $y$  dans  $\Omega$  tel que l'application  $(u_1, u_2, u_3) \mapsto u_1 u_2 u_3$  est continue de l'espace  $\mathcal{W}(\Omega; X_1) \times \mathcal{W}(\Omega; X_2) \times \mathcal{W}(\Omega; X_3)$  dans  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  pour les topologies faibles. En particulier la relation (3) est vérifiée sur  $\omega$ .*

On peut alors déduire de ce résultat le théorème suivant sur les mesures de Young :

**THÉORÈME 23** (J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [26]).— *Soient  $X_i, i = 1, 2, 3$ , trois champs de vecteurs deux à deux indépendants sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^2$ , tels que la courbure du 3-tissu associé ne s'annule en aucun point de  $\Omega$ . Soit  $u^\varepsilon$  une suite de solutions de (1), bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ . On note  $\mu_j$  les mesures de Young d'une sous-suite des  $u_j^\varepsilon$ . Alors  $(\mu_j)$  vérifie sur  $\Omega \times \mathbf{R}$*

$$(5) \quad X_j(t, x, \partial_t, \partial_x)(\mu_j) - \partial_{\lambda_j}(A_j(t, x, \lambda_j)\mu_j) = 0,$$

avec

$$A_1(t, x, \lambda_1) = \int F_1(t, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mu_{2,t,x}(d\lambda_2) \mu_{3,t,x}(d\lambda_3)$$

et des définitions similaires pour  $A_2$  et  $A_3$

**Remarques :**

- 1) Les solutions de (5) sont déterminées par leurs données de Cauchy.
- 2) Le cas de  $N$  champs ( $N > 3$ ) est essentiellement ouvert.
- 3) Le cas de 3 champs résonants a été récemment complètement résolu par G. Métivier et S. Schochet [34,35].

**4.3 Quelques éléments de la preuve du théorème 22.** On se ramène par un choix convenable de coordonnées au cas où  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_x$  et  $X_3 = \partial_t + a(t, x)\partial_x$ . La courbure du 3-tissu associé est alors  $\kappa = a^{-1}\partial_t\partial_x \log(|a|)$ . On peut aussi supposer que les  $u_j^\varepsilon$  sont à supports compacts dans  $\omega$  un ouvert où  $\kappa$  ne s'annule pas. On veut alors montrer que

$$(6) \quad \int_{\omega} u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon u_3^\varepsilon \rightarrow \int_{\omega} u_1 u_2 u_3.$$

Soit  $1 = \Delta_0(\eta) + \sum_{j=1}^{+\infty} \Delta(2^j\eta)$ , avec  $\Delta$  à support dans la couronne  $1/2 < |x| < 2$  une

partition de l'unité dyadique. On a donc, si on note pour  $k \geq 1$   $\Delta_k(\cdot) = \Delta(2^k \cdot)$ ,

$$u_j^\varepsilon = \sum_{k \in \mathbf{N}} \Delta_k(\varepsilon D_x) u_j.$$

Introduisant cette décomposition dans le terme de gauche de (6), on obtient une somme de termes du type

$$\int_{\omega} \Delta_i u_1^\varepsilon \Delta_j u_2^\varepsilon \Delta_k u_3^\varepsilon.$$

On remarque ensuite que si  $i \geq j + 2$ ,  $i \geq k + 2$  alors l'intégrale correspondante est nulle, il suffit donc d'étudier une somme finie de termes de type

$$(7) \quad \sum_j \int_{\mathbf{R}^2} \Delta_j u_1^\varepsilon \Delta_{j+\alpha} u_2^\varepsilon \sum_{k \leq j+\beta} \Delta_k u_3^\varepsilon,$$

avec  $|\alpha| \leq 2, |\beta| \leq 2$ .

Pour simplifier on étudie seulement le cas  $\alpha = \beta = 0$ . La convergence faible de  $u_j^\varepsilon$  implique la convergence forte de  $\Delta_k u_j^\varepsilon$ , chacun des termes de la série (7) est donc continu pour la convergence faible. Il suffit donc pour pouvoir conclure de montrer que la série converge uniformément. Le point crucial pour ce passage à la limite est le suivant :

**PROPOSITION 24** .— Il existe une suite  $\delta_j$  qui tend vers 0 telle que pour tout  $u_k \in \mathcal{W}_k$  à support compact dans  $\omega$  on a

$$(8) \quad \left| \int \Delta_j u_1^\varepsilon \Delta_j u_2^\varepsilon \sum_{k \leq j} \Delta_k u_3^\varepsilon \right| \leq \delta_j \prod_{1 \leq i \leq 3} \|u_i\|_{\mathcal{W}_i}.$$

Ce résultat se démontre par l'absurde : si cette estimation est fautive, alors il existe  $\delta > 0$ , une suite  $h_k = 2^{-j_k} \rightarrow +\infty$  et trois suites  $u_i^k$  bornées dans  $\mathcal{W}_i$  et à support compact dans  $\omega$  tels que

$$(9) \quad \left| \int \Delta(h_k D) u_1^k \Delta(h_k D) u_2^k \sum_{2^p \leq h_k^{-1}} \Delta_p u_3^k \right| > \delta.$$

On considère les mesures semi-classiques des suites  $u_3^k$  et  $\Delta(h_k D) u_1^k \Delta(h_k D) u_2^k$ . De l'équation vérifiée par  $u_3^k$  on déduit :

**LEMME 25** .— Soit  $\mu$  une mesure semi-classique de la suite  $u_3^k$ , alors son support est inclus dans  $\{\tau + a(x, t)\xi = 0\} \cap T^*\omega$  et toute hypersurface transverse au champ  $X_3$  est de  $\mu$  mesure nulle. En particulier si on note pour tout  $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) \in T^*\omega$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{x, \xi} &= \{(t, \tau, x, \xi); (t, \tau) \in T^*\mathbf{R}\}, \\ \Gamma^{t, \tau} &= \{(t, \tau, x, \xi); (x, \xi) \in T^*\mathbf{R}\}, \end{aligned}$$

alors

$$(10) \quad \forall(x, \xi) \mu(\Gamma_{x, \xi}) = 0 \quad \forall(t, \tau) \mu(\Gamma_{t, \tau}) = 0.$$

Des équations vérifiées par  $u_1^k$  et  $u_2^k$  on déduit :

**LEMME 26.** — Soit  $\nu$  une mesure semi-classique de la suite  $\Delta(h_k D)u_1^k \Delta(h_k D)u_2^k$ . Alors  $\{\tau = \xi = 0\} \notin \text{supp}(\nu)$  et il existe deux mesures de Radon,  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , telles que  $\nu$  est absolument continue par rapport à la mesure  $\nu_1(dtd\tau) \otimes \nu_2(dx d\xi)$ .

On note  $V = \mathcal{C} \cap \{(x, t, \xi, \tau); \nu_1\{(t, \tau)\} = \nu_2\{(x, \xi)\} = 0\}$ . D'après (10),  $\mu$  est supportée par  $V$ . On note

$$\mathcal{C}_{x, \xi} = \{(t, \tau); \{\tau + a(x, t)\xi = 0\} \cap \{(t, \tau); \nu_1\{(t, \tau)\} = 0\},$$

ce sont des arcs de courbes qui, d'après l'hypothèse de non résonance, se coupent transversalement deux à deux (et nécessairement en des points que la mesure  $\nu_1$  ne charge pas). Donc l'ensemble des  $(x, \xi)$  tels que  $\nu_2\{(x, \xi)\} = 0$  et  $\nu_1(\mathcal{C}_{x, \xi}) > 0$  est au plus dénombrable, donc de  $\nu_2$  mesure nulle. D'après le théorème de Fubini,

$$\nu_1 \otimes \nu_2(V) = 0,$$

ce qui montre que les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont étrangères et contredit (9), d'après la proposition 7.

## APPENDICE. PREUVE DU POINT IV') DU THÉORÈME 15

Le résultat annoncé est un résultat local. Il suffit de montrer que si  $\gamma(-s, \varrho_0) \notin \text{supp}(\mu)$  pour  $0 < s$  assez petit, alors  $\varrho_0 \notin \text{supp}(\mu)$ . Pour simplifier l'exposition, on se limitera au cas  $a = 0$ . On peut également supposer  $\tau(\varrho_0) = 1$  (le cas  $-1$  se traitant de la même manière). La preuve que nous donnons, inspirée de C. Bardos-T. Masrour [4], repose essentiellement sur le lemme suivant dont on trouvera une démonstration dans [25], §24.3 p. 436-437 :

**LEMME 27.** — Soit  $\rho_0 = (x', \xi') \in \mathcal{G} \cap \{\tau = 1\}$ . On suppose que  $\rho_0$  est un point de contact d'ordre exactement  $k > 2$  ( $\rho_0 \in \mathcal{G}^k$ ), ce qui est équivalent à

$$H_{r_0}^j(\partial_{x_n} r(0, x', \xi')) = 0, \quad \forall j < k - 2 \quad \text{et} \quad H_{r_0}^{k-2}(\partial_{x_n} r(0, x', \xi')) \neq 0.$$

Alors il existe  $C > 0$  tel que si on note  $e(s) = \frac{\partial r}{\partial x_n}(\gamma(s, \rho_0))$  on a

$$(1) \quad |e(s) - as^{k-2}| \leq Cs^{k-1}$$

$$(2) \quad |x_n(s)| \leq Cs^k,$$

avec

$$a = (-H_{r_0})^j(\partial_{x_n} r(0, x', \xi')) / (k - 2)!$$

et si pour  $s > 0$  (respectivement  $s < 0$ )  $as^{k-2} > 0$  alors  $\gamma(s, \rho_0)$  est l'orbite du champ  $H_p$  (incluse dans  $T^*M$ ) issue vers  $s > 0$  (respectivement  $s < 0$ ) de  $\rho_0$  tandis que si  $as^{k-2} < 0$  alors  $\gamma(s, \rho_0) \in T^*\partial M$  est l'orbite du champ  $H_p - \partial_s r \partial_\sigma$  (incluse dans  $\mathcal{G}_{sg}$ ) issue vers  $s > 0$  (respectivement  $s < 0$ ) de  $\rho_0$ .

De plus si on choisit  $\rho_1 \in \mathcal{G}^k \cap \{\tau = 1\}$  assez proche de  $\rho_0$  alors le résultat reste vrai si on échange  $\varrho_0$  et  $\varrho_1$  avec la même constante  $C$ .

**Remarque :** Ce résultat est le point crucial pour démontrer que par tout point de  $\Sigma_b$  il passe au plus une bicaractéristique généralisée.

**COROLLAIRE 28.** — Pour tout  $k > 2$  et tout  $\rho_0 \in \mathcal{G}^k \cap \{\tau = 1\}$  il existe un voisinage dans  $T_b^*M$  de  $\rho_0$ ,  $V$ , et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $\rho \in V \cap \{\tau = 1\}$ , l'ensemble  $\{\gamma(s, \rho); |s| \leq \alpha\}$  ne rencontre  $\mathcal{G}^k$  qu'en au plus 1 point.

La preuve de iv') va se faire en plusieurs étapes. on rappelle que  $\text{supp}(\mu \subset \mathcal{C})$  et  $\text{supp}(\nu \subset \pi(\text{supp}(\mu))) \subset \Sigma_b$ .

**1<sup>ère</sup> étape :**  $\varrho_0 \in T^*M$ . Si le point  $\varrho_0$  est un point intérieur, iv') est clairement conséquence de l'équation ii).

**2<sup>ème</sup> étape (voir [21]) :**  $\varrho_0 \in \mathcal{H}$ . La mesure  $\mu$  est solution à l'intérieur d'une équation de transport,  $H_p \mu = 0$ , elle possède donc près de tout point  $\varrho_0 \in \mathcal{H}$  une trace sur  $T^*\mathbf{R}^d \cap \{x_n = 0\}$  puisqu'alors cette hypersurface est transverse au champ  $H_p$ . D'après la formule des sauts, on a

$$(3) \quad H_p(\mu) = H_p \cdot n(x) \mu |_{x_n=0} \otimes \delta_{x_n=0}.$$

On note  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  la symétrie orthogonale par rapport au plan tangent au bord de l'ouvert. Il est clair que le second membre de (3.1) est, sur  $\mathcal{H}$ , une mesure antiinvariante par l'involution  $S$ . Or  $H_p \cdot n \circ S = -H_p \cdot n$ , on en déduit que  $\mu |_{\partial M}$  est invariante par l'involution  $S$  et revenant à l'équation vérifiée par  $\mu$  à l'intérieur, on voit que si une des deux demi-bicaractéristiques (dont on exclut les points  $\pi^{-1}(\rho_0) = \rho_0^\pm$ ) issues de  $\rho_0 \in \mathcal{H}$  ne rencontre pas, au voisinage de  $\rho_0$ , le support de  $\mu$  alors  $\mu |_{\partial M}$  est identiquement nulle au voisinage de  $\rho_0^+$  (ou  $\varrho_0^-$ ), donc par symétrie elle est aussi nulle au voisinage de  $\rho_0^-$  (ou  $\varrho_0^+$ ). Revenant à l'équation (3), on voit que  $\mu$  est identiquement nulle, au voisinage de  $\rho_0^\pm$ .

**3<sup>ème</sup> étape :**  $\varrho_0 \in \mathcal{G}_d$ . Au voisinage de  $\varrho_0$  on a encore  $\partial_{x_n} r > 0$ . Les bicaractéristiques rencontrent donc soit le bord en un point hyperbolique, soit (si elles rencontrent le bord en un point glissant, donc diffractif) sont des courbes intégrales de  $H_p$ . Leurs points de rencontre avec le bord sont donc isolés, on en déduit que si  $V$  est un voisinage de  $\varrho_0$  dans  $T^*\partial M$  et si  $\alpha > 0$  est assez petit, pour tout  $\varrho \in V \cap \Sigma_b$ , l'ensemble  $\{\gamma(s, \varrho); -\alpha < s < 0\}$  ne rencontre pas  $T^*\partial M$ . D'après la deuxième étape et l'hypothèse, si  $V$  est assez petit, le support de  $\nu$  ne rencontre donc pas  $\mathcal{H} \cap V$  et

comme, d'après (3.4), il ne charge pas  $\mathcal{G}_d$ ,  $\nu$  est nulle sur  $V$ . Revenant à l'équation (3.1), on en déduit que la mesure  $\mu$  est invariante par le flot de  $H_p$  et comme par hypothèse  $\gamma(-\alpha, \varrho_0) \notin \text{supp}(\mu)$  si  $\alpha > 0$  est assez petit, on en déduit qu'elle est nulle aussi au voisinage de  $\varrho_0$ .

**4<sup>ème</sup> étape :**  $\varrho_0 \in \mathcal{G}_{sg}$ . Au voisinage de  $\varrho_0$  on a encore  $\partial_{x_n} r < 0$ . Soient  $V$  un voisinage de  $\varrho_0$  dans  $T_b^*M$  et  $\alpha > 0$  qu'on choisira assez petits. D'après [25], §24.3 p. 435, on sait que pour  $\varrho \in V \cap \mathcal{G} \cap \{|\tau| = 1\}$ ,  $\{\gamma(s, \varrho); |s| \leq \alpha\} \subset \mathcal{G}_{sg}$ . On peut donc trouver  $W$  un voisinage de  $\varrho_0$  dans  $T_b^*M$  et  $\beta > 0$  tels que  $\Phi_{-\beta}(W \cap \Sigma_b) \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$  et pour tout point  $\varrho \in W \cap \Sigma_b$ ,  $\varrho \notin \mathcal{G} \Rightarrow \{\gamma(-s, \varrho); 0 \leq s \leq \beta\} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ . Donc, d'après la deuxième étape, l'intersection du support de  $\mu$  avec  $W$  est incluse dans  $T^*M \cap \mathcal{G}$ , soit

$$(4) \quad \mu = \mu 1_{\mathcal{G}}.$$

Soit  $q(x_n, x', \xi')$  à support dans  $W$ . D'après l'équation (3.1) appliquée à  $q$  et compte tenu de (4), on obtient, si on note  $H'_{r_0} = \partial_{\xi'} r_0 \partial_{x'} - \partial_{x'} r_0 \partial_{\xi'}$ ,

$$\langle \mu, H'_{r_0} q \rangle = 0,$$

ce qui implique que la mesure  $\mu$  est, sur  $T^*\partial M$ , invariante au voisinage de  $\varrho_0$  par le flot de  $H_{r_0}$ . Comme  $\{\gamma(s, \varrho_0); -\alpha < s \leq 0\}$  est une courbe intégrale dans  $T^*\partial M$  de  $-H_{r_0}$  et comme  $\{\gamma(s, \varrho); -\alpha < s < 0\}$  ne rencontre pas le support de  $\mu$ , on obtient encore  $\varrho_0 \notin \text{supp}(\mu)$ .

**5<sup>ème</sup> étape :**  $\varrho_0 \in \mathcal{G}^3$ . Soit  $V_0$  un petit voisinage de  $\varrho_0$  dans  $T_b^*M$  tel que pour  $k > 3$ ,  $V_0 \cap \mathcal{G}^k = \emptyset$ . On choisit  $V \subset V_0$  un autre voisinage de  $\varrho_0$  dans  $T_b^*M$  et  $\alpha > 0$  comme au corollaire 28. On suppose que  $\Phi_{-\alpha}(V) \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$ , ce qui est possible si on prend  $\alpha$  puis  $V$  petits. D'après les étapes 1 à 4 et le corollaire 28 on sait que l'intersection du support de  $\mu$  avec  $V$  est incluse dans l'ensemble des points  $\varrho$  tels que

$$(5) \quad \{\gamma(s, \varrho); -\beta < s \leq 0\} \cap \mathcal{G}^3 \neq \emptyset.$$

On distingue alors selon le signe de  $\partial_n r(\gamma(s, \varrho_0)) = e(s, \varrho_0)$  pour  $s > 0$ .

**Si  $e < 0$ , pour  $s > 0$ .** Pour les autres points de  $\mathcal{G}^3 \cap V$  on a encore  $e(s, \varrho) < 0$  pour  $s > 0$ . On sait donc d'après (5) et puisqu'alors la demi-bicaractéristique vers  $s > 0$  correspondante est d'après le lemme 27 incluse dans  $\mathcal{G}_{sg}$  que les points susceptibles d'être dans l'intersection du support de  $\mu$  avec  $V$  sont dans  $\mathcal{G}_{sg} \cap \mathcal{G}^3$  et en procédant comme à l'étape 4 on obtient que  $\langle \mu, H'_{r_0} q \rangle = 0$  ce qui permet de conclure comme à l'étape 4 si le signe de  $e$  est négatif pour  $s < 0$  (c'est-à-dire si  $\gamma$  est au voisinage de  $\varrho_0$  une courbe intégrale dans  $T^*\partial M$  du champs  $-H_{r_0}$ ).

Si le signe de  $e$  est positif pour  $s < 0$  (c'est-à-dire si  $\gamma(s, \varrho_0)$  quitte le bord pour  $s < 0$ ), on sait que pour  $\delta < 0$  petit, le point  $\varrho_1$  sur la bicaractéristique de  $-H'_{r_0}$  issue

de  $\varrho_0$  n'appartient pas au support de  $\mu$ . En effet d'après (2), et puisque  $e(-\delta) > 0$ ,  $\varrho_1 \in \mathcal{G}_d$  donc ne peut pas appartenir au support de  $\mu$  puisqu'on sait que celui-ci est inclus dans  $\mathcal{G}_{sg} \cap \mathcal{G}^3$ . On peut donc encore conclure que  $\varrho_0 \notin \text{supp}(\mu)$  puisque  $\langle \mu, H'_{r_0} q \rangle = 0$  et que la courbe intégrale de  $H_{r_0}$  issue de  $\varrho_0$  rencontre un point ( $\varrho_1$ ) qui n'appartient pas au support de  $\mu$ .

**Si  $e > 0$ , pour  $s > 0$ .** On a aussi, pour tout  $\varrho \in \mathcal{G}^3 \cap V$ ,  $e(s, \varrho) > 0$  pour  $s > 0$  et donc pour tout point  $\varrho \in \mathcal{G}^3 \cap V$ ,  $\{\gamma(s, \varrho), 0 < s < \alpha\}$  ne rencontre  $V$  qu'en des points qui n'appartiennent pas au bord. On en déduit, d'après (5), que l'intersection du support de la mesure  $\nu$  avec  $V$  (qui est incluse dans  $\pi(\text{supp}(\mu))$ ) est incluse dans  $\mathcal{G}^3 \subset \mathcal{G}_{nsg}$  et comme elle ne charge pas cet ensemble d'après (3.4), on a  $\nu = 0$  au voisinage de  $\varrho_0$ . Finalement, revenant à (3.1), on obtient encore  $\varrho_0 \notin \text{supp}(\mu)$ .

**6<sup>ème</sup> étape :**  $\varrho_0 \in \mathcal{G}^k$ . Pour étudier le cas général on procède par récurrence sur l'indice  $k$  et à chaque étape on fait le même raisonnement qu'à la cinquième étape.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. ALLAIRE - *Homogenization and two-scale convergence*, Siam Journal of Mathematical Analysis **23-6** (1992), 1482-1518.
- [2] H. BAHOURI ET P. GÉRARD - *Concentration effects in critical nonlinear wave equations and scattering theory* in Geometrical optics and related topics, F. Colombini et N. Lerner ed., Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, à paraître.
- [3] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH - *Sharp Sufficient Conditions for the Observation, Control and Stabilization of Waves from the Boundary*, Siam Journal of Control and Optimization **305** (1992), 1024-1065.
- [4] C. BARDOS ET T. MASROUR - *Utilisation des mesures de défaut pour l'observation, le contrôle et la décroissance locale de l'énergie* (en préparation)
- [5] W. BLASCHKE ET G. BOL - *Geometrie der Gewebe*, Springer Verlag (1938).
- [6] S. BRAHIM-OTSMANE, G. FRANCFORT ET F. MURAT - *Correctors for the homogenization of the wave equation and heat equation* Jour. de Math. pures et appliquées **X-71-3** (1992), 197-231.
- [7] N. BURQ, P. GÉRARD - *Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes*, à paraître aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences.
- [8] N. BURQ - *Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts peu réguliers*, Asymptotic Analysis **14** (1997), 157-191.

- [9] V. BUSLAEV - *Semi-classical approximations for equations with periodic coefficients*, Russian Math. Surveys **42** (1987), 97-125.
- [10] Y. COLIN DE VERDIÈRE - *Ergodicité et fonctions propres du Laplacien*, Comm. Math. Phys. **102** (1985), 497-502.
- [11] C. FERMANIAN - *Equation de la chaleur et mesures semi-classiques*, Thèse de l'université de Paris Sud (1995) et article en préparation.
- [12] G. FRANCFORT ET F. MURAT - *Oscillations and energy densities in the wave equation*, Comm. in Partial Diff. equations, **17** (11&12) (1992), 1785-1865.
- [13] C. GÉRARD - *Resonance theory for periodic Schrödinger operators*, Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 27-54.
- [14] C. GÉRARD, A. MARTINEZ ET J. SJÖSTRAND - *A mathematical approach to the effective Hamiltonian in perturbed periodic problems*, Commun. Math. Phys. **142-2** (1991), 217-244.
- [15] P. GÉRARD - *Microlocal Defect Measures*, Communications in Partial Differential Equations **16** (1991), 1761-1794.
- [16] P. GÉRARD - *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch*, Seminaire EDP de l'École Polytechnique **16** (1990-1991).
- [17] P. GÉRARD - *Moyennisation et régularité deux-micro-locale*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **IV. Ser. 23**, No.1, (1990), 89-121.
- [18] P. GÉRARD - *Oscillations and Concentration Effects in Semilinear Dispersive Wave Equations*, Journal of Functional Analysis, **141-1** (1996), 60-98.
- [19] P. GÉRARD - *Communication personnelle*.
- [20] P. GÉRARD, F. GOLSE ET B. WENNERBERG - *A compactness result for generalized Radon transforms*, Math. Research Let. **3** (1996), 491-497.
- [21] P. GÉRARD ET E. LEICHTNAM - *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. Jour. **71** (1993), 559-607.
- [22] P. GÉRARD, P. MARKOWICH, N. MAUSER ET F. POUPAUD - *Homogenization limits and Wigner transforms*, Commun. in Pure and Applied Math **L** (1997), 323-379.
- [23] I. GOHBERG ET M. KREIN - *Introduction to the theory of Linear non Self adjoint Operators*, Transal. of Math. Monographs **18**, Amer. Math. Soc. (1969).
- [24] B. HELFFER, A. MARTINEZ ET D. ROBERT - *Ergodicité et limite semi-classique*, Comm. Math. Phys. **109** (1987), 313-326.
- [25] L. HÖRMANDER - *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I-IV*, Springer Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **256**, **257**, **274**, **275** (1983-1985).

- [26] J.L. JOLY, G. MÉTIVIER ET J. RAUCH - *Trilinear compensated compactness and nonlinear geometric optics*, Annals of Mathematics, **142** (1995), 121-169.
- [27] G. LEBEAU - *Équation des ondes amorties* in Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, A. Boutet de Monvel et V. Marchenko éd, (1996), Kluwer Academic, The Netherlands , 73-109.
- [28] J.L. LIONS - *Contrôlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, R.M.A., Masson **23**, (1988).
- [29] P.L. LIONS - *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. IHP **1** (1984), 109-145.
- [30] P.L. LIONS - *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana, **9** (1985), 145-201.
- [31] P.L. LIONS ET T. PAUL - *Sur les mesures de Wigner*, Revista Matemática Iberoamericana **9**, **3**(1993).
- [32] P. MARKOWICH, N. MAUSER ET F. POUPAUD - *A Wigner-Function Approach to (Semi)classical Limits I: Electrons in a Periodic Potential*, J. Math. Physics, **35** (1994), 1006-1094.
- [33] R. MELROSE ET J. SJÖSTRAND - *Singularities of boundary value problems I*, Communications in Pure and Applied Mathematics **31** (1978), 593-617
- [34] G. MÉTIVIER ET S. SCHOCHET - *Interaction trilinéaires résonantes*, Séminaire E.D.P. de l'École Polytechnique (1995-1996), VI.
- [35] G. MÉTIVIER ET S. SCHOCHET - *Trilinear resonant interactions of semilinear hyperbolic waves*, Prépublications de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes, **96-31** (1996).
- [36] L. MILLER - *Propagation d'ondes semi-classiques à travers une interface et mesures deux-micro-locales*, Thèse de l'université de Paris Sud (1996), Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **I-325** (1997), 371-376 et article en préparation.
- [37] F. MURAT - *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Sup. di Pisa, **5** (1978), 489-507.
- [38] F. NIER - *A semi-classical picture of quantum scattering*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **4-29** (1996), 149-183.
- [39] F. POUPAUD ET C. RINGHOFER - *Semiclassical Limits in a Crystal with External Potentials and Effective Mass Theorems*, Prepublication du laboratoire J.A. Dieudonné, Univ. de Nice **436** (1995), à paraître à C.P.D.E.
- [40] A. SHNIRELMAN - *Ergodic properties of eigenfunctions*, Uspekhi Mat. Nauk. **29** (1974), 181-182.

- [41] L. TARTAR - *H-Measures, a New Approach for Studying Homogenization, Oscillations and Concentration Effects in Partial Differential Equations*, Proceedings of the Royal Society Edinburgh, **115-A** (1990), 193-230.
- [42] L. TARTAR - *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Non linear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, **IV** 136-212, Res. Notes in Math. **39**, Pitman, (1979).
- [43] E. WIGNER - *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40** (1934), 742-759.
- [44] C.H. WILCOX - *Theory of Bloch waves*, Journal d'Analyse Mathématique, **33** (1978), 146-167.

Nicolas BURQ

École Polytechnique

Centre de Mathématiques

URA 169 du CNRS

F-91128 PALAISEAU CEDEX

E-mail : burq@math.polytechnique.fr

# *Astérisque*

OLIVIER DEBARRE

## **Variétés de Fano**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 827, p. 197-221

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_197\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__197_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**VARIÉTÉS DE FANO**par **Olivier DEBARRE****1. INTRODUCTION**

Une variété de Fano est une variété algébrique projective lisse connexe, définie sur un corps algébriquement clos, dont le fibré anticanonique (c'est-à-dire le déterminant du fibré tangent) est ample. Sur le corps des complexes, cela signifie que la première classe de Chern de la variété est représentée par une forme définie positive. On peut donner comme exemples les intersections complètes lisses dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$  d'hypersurfaces dont la somme des degrés est au plus  $n$ , et, en caractéristique nulle, les variétés projectives homogènes sous un groupe algébrique linéaire connexe.

Leur géométrie très riche a permis de déterminer complètement les variétés de Fano complexes de dimension au plus 3 : en dimension 1, il n'y a que la droite projective; en dimension 2, ce sont les surfaces dites de Del Pezzo (c'est-à-dire  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  et les éclatés de  $\mathbf{P}^2$  en au plus 8 points en position générale, soit 10 familles); en dimension 3, elles se répartissent en 104 familles ([I1], [I2], [Sh], [MM]; cf. aussi [SB] et [Me] pour le cas de la caractéristique non nulle, et [Ka] pour le cas singulier). Fano s'intéressait principalement à la question de la rationalité de ces variétés en dimension 3 ([F]).

Le but de cet exposé est de montrer qu'étant donné un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle et un entier  $n$ , il n'y a qu'un nombre fini, borné par une fonction explicite de  $n$ , de types de déformation de variétés de Fano de dimension  $n$  définies sur  $k$  (§5, th. 8).

Les courbes sur une variété, ou plus précisément les morphismes d'une courbe dans cette variété, sont récemment apparus comme un outil de première importance pour l'étude des propriétés géométriques de la variété. On pense bien sûr aux travaux de Gromov sur les courbes pseudo-holomorphes, à ceux de Kontsevich et Manin sur les invariants de Gromov-Witten et la cohomologie quantique, mais aussi au programme

de Mori de classification des variétés algébriques (« Minimal Model Program »). C'est d'ailleurs ce point de vue qui a permis à Mori de démontrer en 1979 que toute variété projective lisse dont le fibré tangent est ample est isomorphe à un espace projectif (conjecture de Hartshorne). Il établit au passage que toute variété de Fano  $X$  non réduite à un point est *uniréglée* : par chaque point passe une courbe rationnelle, c'est-à-dire l'image d'un morphisme non constant de la droite projective dans  $X$ . C'est cette idée (il y a « beaucoup » de courbes rationnelles sur une variété de Fano) qui est à la base de la démonstration du résultat de finitude ci-dessus.

Le plan de l'exposé est le suivant : dans le § 2, on rappelle brièvement comment Mori démontre que les variétés de Fano sont uniréglées, à l'aide de son célèbre « lemme de cassage ». En 1992, Campana, et indépendamment Kollár, Miyaoka et Mori, montrent que les variétés de Fano sont *rationnellement connexes* (r.c.) : deux points quelconques peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles. Ce théorème est démontré dans le § 3 : on construit, pour toute variété normale et propre, une sorte de quotient pour la relation d'équivalence « être relié par une chaîne de courbes rationnelles », et l'on démontre, en adaptant le lemme de cassage de Mori, que, pour les variétés de Fano, ce quotient n'a qu'un point.

L'étape suivante est due à Kollár, Miyaoka et Mori, qui montrent qu'en caractéristique nulle, deux points quelconques d'une variété r.c. lisse sont reliés par *une* courbe rationnelle; elle est démontrée dans le § 4. Il s'agit de « lisser » une chaîne rationnelle reliant deux points; on introduit à cet effet la notion de courbe rationnelle libre ou très libre (*cf. déf. 2*), qui fournit par ailleurs de très jolies caractérisations : pour qu'une variété lisse projective soit uniréglée (resp. r.c.), il faut et il suffit qu'elle possède *une* courbe rationnelle libre non constante (resp. très libre). Cela permet de montrer sans effort que les variétés complexes projectives lisses r.c. sont simplement connexes. On a de plus, dans les § 3 et 4, contrôlé le degré des courbes rationnelles qui interviennent; une astuce de Fano permet alors, dans le § 5, de majorer, pour toute variété de Fano  $X$  de dimension  $n$ , l'entier  $c_1(X)^n$  par une constante ne dépendant que de  $n$  (on donne aussi la borne, meilleure, que Nadel et Campana ont obtenu sous l'hypothèse que le groupe de Néron-Severi de la variété est de rang 1). On en déduit, en suivant Kollár, le résultat de finitude cherché.

Les variétés de Fano lisses (les seules que l'on considère ici) ont un intérêt essentiellement historique. Selon le programme de Mori, les objets vraiment importants sont d'une part les variétés de Fano *singulières* (« à singularités terminales »), d'autre part les variétés r.c.. Ces dernières, *a priori* plus générales que les variétés unirationnelles, mais d'une histoire plus récente, se sont révélées d'un maniement nettement plus

commode. Elles semblent constituer, selon les spécialistes, la bonne notion de variété « proche » de l'espace projectif.

Passons au point de vue de la géométrie différentielle : la théorie de Calabi-Yau entraîne que les variétés de Fano complexes sont les variétés kählériennes compactes dont la courbure de Ricci est définie positive ([Y1], [Y2], [Bou], [Be], 11.16.ii); cela permet d'ailleurs de (re)démontrer qu'elles sont simplement connexes ([Be], th. 11.26). Les variétés compactes admettant une métrique de Kähler-Einstein de signe positif sont des variétés de Fano (mais on ne les obtient pas toutes ainsi : l'existence d'une telle métrique force le groupe d'automorphismes de la variété à être réductif, ce qui exclut par exemple l'éclaté du plan projectif en un ou deux points; cf. [Be], cor. 11.54); on peut montrer le résultat de finitude pour ces variétés par des méthodes de géométrie différentielle (cf. 5.1).

Dans ce contexte, LeBrun et Salamon ([LBS]) ont donné une jolie application du résultat de finitude exposé ici : ils montrent qu'à isométrie et homothétie près, il n'y a, en chaque dimension  $4n$ , qu'un nombre fini de variétés riemanniennes compactes « quaternion-kählériennes » (c'est-à-dire dont l'holonomie est contenue dans le sous-groupe  $\mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1)$  de  $\mathrm{SO}(4n)$ ) à courbure scalaire strictement positive. Leur point de départ est que l'espace des twisteurs attaché à une telle variété est une variété de Fano. Les seuls exemples connus de ces variétés sont des espaces symétriques homogènes (dits « espaces de Wolf »), et l'on soupçonne que ce sont les seuls (c'est le cas en dimension 4 et 8).

Quelques conventions : tous les schémas sont définis sur un corps algébriquement clos; une variété est un schéma intègre de type fini; si  $X$  est une variété lisse, on note  $T_X$  son fibré tangent et  $K_X$  un diviseur canonique. On rappelle qu'un point très général d'une variété est un point situé en dehors d'une réunion dénombrable de fermés propres.

Je voudrais remercier Frédéric Campana et János Kollár de l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de la rédaction de ces notes, ainsi que Michèle Audin, Christophe Margerin et Jean-Yves Mérindol de leurs conseils.

## 2. LES VARIÉTÉS DE FANO SONT UNIRÉGLÉES

Dans [Mo], Mori démontre, outre la conjecture de Hartshorne, que les variétés de Fano sont uniréglées. La démonstration, exposée au séminaire Bourbaki ([De]), utilise un astucieux « lemme de cassage », qui permet non seulement de produire, en passant

à la caractéristique non nulle et en déformant une courbe passant par un point fixé, la courbe rationnelle cherchée, mais aussi d'en borner le degré. Nous décrivons dans ce numéro les outils utilisés.

Soient  $X$  une variété projective et  $H$  un diviseur ample sur  $X$ . Pour toute courbe projective  $C$  et tout morphisme  $f : C \rightarrow X$ , on appelle  $H$ -degré de  $f$  le degré du faisceau inversible  $f^*H$ . Lorsque  $X$  est une variété de Fano, le degré d'une courbe sera toujours, sauf mention du contraire, son  $(-K_X)$ -degré.

### 2.1. Espaces de courbes

Soit  $C$  une courbe projective réduite; on note  $g(C)$  son genre, c'est-à-dire l'entier  $1 - \chi(\mathcal{O}_C)$ . Soit  $B$  un sous-schéma fini du lieu lisse de  $C$  défini par un faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}_B$ , soit  $X$  une variété projective lisse et soit  $g : B \rightarrow X$  un morphisme. D'après Grothendieck ([G]), il existe un schéma  $\text{Mor}(C, X)$  paramétrant les morphismes de  $C$  dans  $X$  dont un sous-schéma fermé  $\text{Mor}(C, X; g)$  paramètre les morphismes de  $C$  dans  $X$  qui étendent  $g$ . Nous admettrons le résultat suivant (cf. [K1], p. 95), qui permet de minorer la dimension de ces espaces.

**PROPOSITION 1.**— *Soit  $f : C \rightarrow X$  un morphisme qui étend  $g$ . L'espace tangent à  $\text{Mor}(C, X; g)$  au point  $[f]$  s'identifie à  $H^0(C, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_B)$  et chaque composante de  $\text{Mor}(C, X; g)$  passant par  $[f]$  est de dimension au moins*

$$\chi(C, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_B) = -(K_X \cdot f_*C) + (1 - g(C) - \deg B) \dim X .$$

### 2.2. Lemme de cassage (« bend and break ») de Mori

Il s'agit du résultat suivant, qui sert à fabriquer des courbes rationnelles de bas degré sur les variétés. On renvoie à [Mo] pour la démonstration (ou à celle du th. 2 pour celle de a)).

**PROPOSITION 2 (Mori).**— *Soient  $X$  une variété projective lisse,  $C$  une courbe projective lisse,  $c$  et  $c'$  des points de  $C$  et  $f : C \rightarrow X$  un morphisme.*

a) *Si  $\text{Mor}(C, X; f|_{\{c\}})$  est de dimension au moins 1 en  $[f]$ , il existe une courbe rationnelle de  $X$  passant par  $f(c)$ .*

b) *Si  $C$  est rationnelle et que  $\text{Mor}(C, X; f|_{\{c, c'\}})$  est de dimension au moins 2 en  $[f]$ , on peut déformer  $f_*C$  en un cycle connexe non intègre, passant par  $f(c)$  et  $f(c')$ , dont toutes les composantes sont rationnelles.*

Sur une variété de Fano  $X$ , l'hypothèse de b) est satisfaite dès que le degré de la courbe est au moins  $\dim X + 2$  (prop. 1). Toute courbe rationnelle sur  $X$  peut donc

se « casser », en fixant deux points, en un cycle dont les composantes sont rationnelles de degré au plus  $\dim X + 1$ .

### 2.3. Les variétés de Fano sont uniréglées

Nous indiquons brièvement comment Mori démontre ce résultat. La seconde partie de son lemme de cassage lui permet même de construire par chaque point des courbes rationnelles de bas degré.

**PROPOSITION 3.**— *Soient  $X$  une variété de Fano non réduite à un point et  $x$  un point de  $X$ . Il existe une courbe rationnelle de  $X$  non constante passant par  $x$ , de degré au plus  $\dim X + 1$ .*

*Idée de la démonstration.* Il suffit de traiter le cas où le corps de base est de caractéristique non nulle. Soient  $C$  une courbe lisse et  $f : C \rightarrow X$  un morphisme non constant dont l'image contient  $x$ . En composant  $f$  avec une puissance convenable du morphisme de Frobenius, on peut supposer  $-(K_X \cdot f_*C) > g(C) \dim X$ ; les prop. 1 et 2.a) entraînent qu'il existe une courbe rationnelle  $g : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  vérifiant  $g(0) = x$ . Supposons  $g$  de degré minimal; le dernier paragraphe de 2.2 entraîne que son degré est au plus  $\dim X + 1$ . ■

On dit qu'une variété  $X$  de dimension  $n$  est *uniréglée* s'il existe une variété  $Y$  de dimension  $n - 1$  et un morphisme dominant  $\mathbf{P}^1 \times Y \rightarrow X$  (un point n'est pas uniréglé).

## 3. CONNEXITÉ RATIONNELLE

Nous allons maintenant montrer que les variétés de Fano contiennent « beaucoup » de courbes rationnelles : non seulement il en passe une par chaque point, mais deux points quelconques peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles. On définit précisément cette propriété de « connexité rationnelle » en 3.1. En 3.2, on construit, pour toute variété propre et normale, une sorte de quotient pour la relation d'équivalence « être relié par une chaîne de courbes rationnelles » ; on démontre en 3.3, en adaptant les idées de Mori exposées au §2, que ce quotient est réduit à un point pour les variétés de Fano.

### 3.1. Variétés rationnellement connexes (r.c.)

**DÉFINITION 1.**— *Soit  $X$  une variété définie sur un corps algébriquement clos non dénombrable. On dit que  $X$  est rationnellement connexe (r.c.) si deux points très*

*généraux de X peuvent être reliés par une courbe connexe de X dont toutes les composantes sont rationnelles.*

On dira aussi que deux points très généraux peuvent être reliés par une chaîne rationnelle. Une variété uniréglée, ou réduite à un point, est r.c.. Cette propriété n'est pas une notion birationnelle : un cône sur une courbe elliptique est r.c., mais ne l'est plus si l'on retire son sommet (*cf.* cependant le paragraphe qui suit le cor. 1 de 4.3). Toute variété unirationnelle est r.c. ; on s'attend à ce que la plupart des variétés lisses r.c. ne soient pas unirationnelles, mais aucun exemple n'est connu.

La propriété de connexité rationnelle ne dépend pas du corps sur lequel la variété est définie ; on peut donc l'étendre à un corps de base algébriquement clos quelconque : une variété X définie sur un corps algébriquement clos  $k$  est r.c. s'il existe une extension algébriquement close non dénombrable  $K$  de  $k$  telle que  $X \times_k K$  vérifie la définition 1. On pourra consulter [K1], p. 199, pour une définition plus naturelle (*attention* : notre terminologie est celle de [C1], pas celle de [K1] : nos variétés r.c. sont ses « rationally chain connected varieties »). On obtiendra en 4.3, cor. 1, diverses caractérisations des variétés r.c. en caractéristique nulle.

Lorsque X est *propre*, le schéma qui paramètre les 1-cycles de X dont les composantes sont rationnelles est propre ([K1], prop. 2.2, p. 103) ; si X est r.c., deux points *quelconques* de X peuvent être reliés par une chaîne rationnelle.

### 3.2. Quotient rationnel

Les résultats de ce numéro, présentés avec des démonstrations très succinctes, sont dus principalement à Campana ([C1], [C2]), sauf la majoration sur la longueur des chaînes du lemme 2, qui est due à Kollár, Miyaoka et Mori ([KMM3]).

Soit X une variété ; on peut définir une relation d'équivalence sur X en décrétant que deux points sont en relation s'ils peuvent être reliés par une chaîne rationnelle. L'ensemble des classes d'équivalence n'est pas en général une variété algébrique (il existe des variétés projectives complexes lisses contenant une infinité dénombrable de courbes rationnelles), mais on peut quand même construire une sorte de quotient. Partons d'une situation plus générale : on se donne un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow \pi & & \\ T & & \end{array}$$

Pour tout point  $t$  de T, on note  $\mathcal{C}_t$  la fibre  $\pi^{-1}(t)$  ; on dit que deux points

$x$  et  $x'$  de  $X$  peuvent être reliés par une T-chaîne de longueur  $m$  s'il sont égaux ou s'il existe des points  $t_1, \dots, t_m$  de  $T$  tels que  $F(\mathcal{C}_{t_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{t_m})$  soit connexe et contienne  $x$  et  $x'$ . On dit que deux points de  $X$  sont T-équivalents s'il peuvent être reliés par une T-chaîne de longueur quelconque.

*Lemme 1.*— On suppose  $X$  normale,  $F$  plat, et  $\pi$  plat à fibres irréductibles. Il existe un ouvert dense  $X^0$  de  $X$  et un morphisme surjectif  $\tau : X^0 \rightarrow Y$  vérifiant :

a) chaque fibre de  $\tau$  est connexe et son adhérence dans  $X$  est l'adhérence d'une classe de T-équivalence ;

b) deux points généraux d'une fibre de  $\tau$  peuvent être reliés par une T-chaîne de longueur au plus  $\dim X - \dim Y$ .

*Esquisse de démonstration.* Pour chaque point  $x$  de  $X$ , notons  $V_m(x)$  l'ensemble (constructible) des points de  $X$  qui peuvent être reliés à  $x$  par une T-chaîne de longueur  $m$  et posons  $d(x) = \max_{m \geq 1} \dim \overline{V_m(x)}$ . Le point crucial est que la suite de fermés  $(\overline{V_m(x)})$  est stationnaire pour  $m \geq d(x)$  ([KMM3], lemma 1.3, p. 768). On en déduit l'existence d'un ouvert  $X^1$  dense dans  $X$  sur lequel  $d(x)$  est constant égal à  $d$ , et d'un morphisme  $\tau : X^1 \rightarrow \text{Hilb}(X)$  qui à  $x$  associe  $\overline{V_d(x)}$ . Pour  $x$  et  $x'$  dans  $X^1$ , on a les implications

$$\begin{aligned} \tau(x) = \tau(x') &\Rightarrow \overline{V_d(x)} = \overline{V_d(x')} \Rightarrow V_d(x) \cap V_d(x') \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x' \in V_{2d}(x) \Rightarrow x' \in \overline{V_{2d}(x)} = \overline{V_d(x)}, \end{aligned}$$

et inversement

$$x' \in V_d(x) \Rightarrow V_d(x') \subset V_{2d}(x) \subset \overline{V_{2d}(x)} = \overline{V_d(x)} \Rightarrow \overline{V_d(x')} \subset \overline{V_d(x)},$$

d'où  $\overline{V_d(x')} = \overline{V_d(x)}$  puisque l'on a aussi  $x \in V_d(x')$ . Les fibres de  $\tau$  sont donc les  $\overline{V_d(x)} \cap X^1$  ; on prend pour  $Y$  un sous-ensemble dense de l'image de  $\tau$  localement fermé dans  $\text{Hilb}(X)$ , et pour  $X^0$  son image inverse par  $\tau$ . Si  $x'$  est général dans  $\tau^{-1}(\tau(x))$ , il est dans  $V_d(x)$ , donc peut être relié à  $x$  par une T-chaîne de longueur au plus  $d = \dim X - \dim Y$ . ■

On a un énoncé analogue lorsque  $F$  et  $\pi$  sont propres, mais les chaînes deviennent plus longues.

*Lemme 2* ([K1], th. 4.17, p. 219).— On suppose  $X$  propre et normale,  $F$  propre, et  $\pi$  propre à fibres connexes. Il existe un ouvert dense  $X^0$  de  $X$  et un morphisme propre  $\rho : X^0 \rightarrow Z$  dont les fibres sont des classes de T-équivalence de  $X$ , et tel que deux points d'une fibre de  $\rho$  puissent être reliés par une T-chaîne de longueur au plus  $2^{\dim X - \dim Z} - 1$ .

*Esquisse de démonstration.* En rétrécissant  $T$  et  $C$ , on se retrouve dans la situation du lemme 1, qui fournit un morphisme  $\tau : X^0 \rightarrow Y$  que l'on peut supposer, quitte à rétrécir  $Y$ , équidimensionnel. On construit alors une compactification normale  $\bar{Y}$  de  $Y$ , une variété normale  $X'$  et un morphisme birationnel propre  $u : X' \rightarrow X$  tels que  $\tau' : X' \xrightarrow{u} X \xrightarrow{\tau} \bar{Y}$  soit un morphisme propre équidimensionnel à fibres connexes. Deux points *quelconques* d'une fibre de  $\tau'$  peuvent être joints par une  $T$ -chaîne de longueur au plus  $\dim X - \dim Y$  : l'ensemble des points de  $X' \times_{\bar{Y}} X'$  qui vérifient cette propriété est fermé, contient un ouvert non vide par le lemme 1, tandis que les hypothèses entraînent que  $X' \times_{\bar{Y}} X'$  est irréductible.

On procède par récurrence sur la dimension de  $X$ . Si  $Y$  a même dimension que  $X$ , on prend  $\rho = \tau$  ; sinon, l'hypothèse de récurrence appliquée au diagramme

$$\begin{array}{ccc} C \times_X X' & \longrightarrow & X' \xrightarrow{\tau'} \bar{Y} \\ \downarrow \pi & & \\ T & & \end{array}$$

nous fournit un ouvert dense  $Y^0$  de  $Y$  et un morphisme propre  $\rho_Y : Y^0 \rightarrow Z$  vérifiant les conclusions du lemme. On en déduit, en posant  $X^0 = \tau'^{-1}(Y^0)$ , un morphisme propre  $\rho' : X^0 \rightarrow Z$ . Si deux points de  $X^0$  sont  $T$ -équivalents, il en est de même de leur image par  $\tau'$ , qui sont donc dans la même fibre de  $\rho_Y$ . Inversement, supposons  $\rho'(x'_1) = \rho'(x'_2)$  ; l'hypothèse de récurrence entraîne que  $\tau'(x'_1)$  et  $\tau'(x'_2)$  sont reliés par une  $T$ -chaîne de longueur au plus  $2^{\dim Y - \dim Z} - 1$ , que l'on relève dans  $X'$ . Les points de contacts des maillons sont dans les mêmes fibres de  $\tau'$ , de sorte que  $x'_1$  et  $x'_2$  peuvent être reliés par une  $T$ -chaîne de longueur au plus

$$2^{\dim Y - \dim Z} - 1 + (\dim X - \dim Y)(2^{\dim Y - \dim Z}) \leq 2^{\dim X - \dim Z} - 1 .$$

Il suffit alors de vérifier que  $\rho' : X^0 \rightarrow Z$  se factorise à travers  $u$  en un morphisme propre  $\rho : X^0 \rightarrow Z$  qui vérifie les propriétés demandées. ■

Soient  $X$  une variété propre et  $\rho : X \dashrightarrow Y$  une application rationnelle. On dit que  $\rho$  est *presque régulière* s'il existe un ouvert non vide dense  $X^0$  de  $X$  et un sous-schéma  $Y^0$  de  $Y$  tels que  $\rho$  se restreigne en un morphisme  $\rho^0 : X^0 \rightarrow Y^0$  propre surjectif. En d'autres termes, le lieu d'indétermination de  $\rho$  ne domine pas l'image de  $\rho$ . Si  $\rho$  est presque régulière, on dit que  $\rho$  est r.c. si ses fibres générales sont r.c. et que  $\rho_*^0 \mathcal{O}_{X^0} \simeq \mathcal{O}_{Y^0}$ .

Revenons au problème de la construction d'un quotient pour la relation d'équivalence où deux points sont équivalents s'ils sont reliés par une chaîne rationnelle. Etant donnée une variété propre  $X$ , nous construisons une application rationnelle  $\rho : X \dashrightarrow R(X)$  dominante, presque régulière et r.c. qui est *maximale*, c'est-à-dire qui se factorise à travers toute autre telle application rationnelle. Ses fibres très générales sont des classes d'équivalence pour cette relation.

**THÉORÈME 1** (Campana).— *Soit  $X$  une variété propre et normale. Il existe une application rationnelle  $\rho : X \dashrightarrow R(X)$  dominante presque régulière r.c. maximale. Si  $X$  est définie sur un corps algébriquement clos non dénombrable, toute courbe rationnelle de  $X$  rencontrant une fibre très générale de  $\rho$  est contenue dans cette fibre.*

Soit  $(T_m)_{m \geq 1}$  une famille croissante de schémas dont la réunion paramètre les 1-cycles connexes de  $X$  à composantes rationnelles. Le lemme 2 fournit pour chaque  $m$  un morphisme propre  $\rho_m : X_m^0 \rightarrow Z_m$ . Comme les classes de  $T_m$ -équivalence grandissent avec  $m$ , la dimension de  $Z_m$  diminue. Soient  $n$  un entier tel que  $\dim Z_n$  soit minimal, et  $m$  un entier plus grand que  $n$ . Le lemme 2 entraîne que pour  $x$  général, les classes de  $T_m$  et de  $T_n$ -équivalence de  $x$  sont irréductibles; comme elles ont même dimension, elles sont égales. Il s'ensuit que pour  $x$  très général,  $\rho_n^{-1}(\rho_n(x))$  est l'ensemble des points qui peuvent être joints à  $x$  par une chaîne rationnelle.

Soient  $X^0$  un ouvert dense de  $X$  et  $\tau : X^0 \rightarrow Y$  un morphisme propre r.c.; la propriété que l'on vient de démontrer entraîne qu'une fibre très générale de  $\tau$  est contenue dans une fibre de  $\rho_n$ . En caractéristique nulle, on en déduit la factorisation. En caractéristique non nulle, il faut utiliser le fait que  $\tau$  ne peut se factoriser à travers un morphisme purement inséparable. ■

L'application rationnelle  $\rho : X \dashrightarrow R(X)$  est bien déterminée à isomorphisme birationnel près; on l'appelle le *quotient rationnel* de  $X$  (« MRC-fibration » dans la terminologie de [K1]). Pour que  $X$  soit r.c. (resp. uniréglée), il faut et il suffit que  $R(X)$  soit un point (resp. que  $\dim R(X) < \dim X$ ).

Si la caractéristique du corps de base est nulle, et si  $X$  est propre et lisse, la dimension de  $R(X)$  est invariante par déformation ([KMM2], th. 2.15, ou [K1], th. 5.9, p.226), donc aussi la propriété d'être r.c. ou uniréglé; on retrouve ainsi un résultat de Fujiki ([Fu]) et Levine ([Le]).

Le problème principal concernant le quotient rationnel est le suivant :

**Conjecture.**— *Soient  $X$  une variété propre et lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et  $X \dashrightarrow R(X)$  son quotient rationnel. La variété*

$R(X)$  n'est pas uniréglée.

C'est équivalent ([K1], prop. 5.6.3, p. 224) à :

**Conjecture**.— Soient  $X$  une variété propre et lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et  $X \rightarrow \mathbf{P}^1$  un morphisme dont les fibres lisses sont r.c.. Alors  $X$  est r.c..

Cela revient à montrer que  $X \rightarrow \mathbf{P}^1$  a une multisection rationnelle, ou mieux, que la fibre générique a un point rationnel sur  $K(\mathbf{P}^1)$ . C'est vrai lorsque c'est une courbe (théorème de Tsen), ou une surface de Del Pezzo ([CT], [M]), ou un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire (théorème de Chevalley-Springer; cf. [S], III-14-16 et [Bor], 18.2).

### 3.3. Connexité rationnelle des variétés de Fano

On a vu (§2) que par chaque point d'une variété de Fano  $X$  passe une courbe rationnelle. Le théorème suivant généralise ce résultat : il s'agit d'adapter les méthodes de Mori pour construire une telle courbe qui ne soit pas contenue dans une fibre d'une application rationnelle presque régulière dominante  $X \dashrightarrow Z$ .

**THÉORÈME 2** ([C1], [KMM3]).— Soient  $X$  une variété de Fano,  $\rho : X \dashrightarrow Z$  une application rationnelle presque régulière dominante, et  $F$  une fibre générale de  $\rho$ . Si  $Z$  n'est pas réduit à un point, il existe une courbe rationnelle de  $X$  rencontrant  $F$  qui n'est pas contenue dans  $F$ .

La courbe rationnelle cherchée une fois trouvée, on peut, grâce au dernier paragraphe de 2.2, la casser en courbes rationnelles de degré au plus  $\dim X + 1$ , dont l'une au moins devra rencontrer  $F$  sans être contenue dans  $F$ . On peut donc (cf. [Mo]) se restreindre au cas où la caractéristique du corps de base est non nulle; on peut aussi supposer celui-ci non dénombrable. Soit  $X^0$  un ouvert dense de  $X$  sur lequel  $\rho$  est propre. On raisonne par l'absurde, en supposant que toute courbe rationnelle de  $X$  rencontrant  $F$  est contenue dans  $F$ . Il existe une courbe projective lisse  $C$  (irrationnelle), avec un point  $c$  et un morphisme  $f : C \rightarrow X$ , tels que  $\rho f(c)$  soit sur  $F$  et que  $\rho f$  ne soit pas constant. On fixe enfin un diviseur ample sur  $Z$  à l'aide duquel on mesurera le degré des courbes. Il existe un réel  $\lambda$  strictement positif tel que pour toute courbe lisse  $D$  et tout morphisme  $g : D \rightarrow X$  dont l'image rencontre  $X^0$ , on ait

$$\deg g_* D \geq \lambda \deg(\rho g)_* D.$$

Quitte à composer  $f$  avec une puissance convenable du morphisme de Frobenius,

on peut supposer

$$(*) \quad \lambda \deg(\rho f)_* C > g(C) \dim X .$$

Le choix de  $\lambda$  et la prop. 1 entraînent que  $\text{Mor}(C, X; f|_{\{c\}})$  est de dimension au moins 1 en  $[f]$ . Nous allons construire un morphisme  $f' : C \rightarrow X$  vérifiant  $\rho f' = \rho f$ , de sorte que  $f'$  vérifiera encore la condition  $(*)$ , et  $\deg f'_* C < \deg f_* C$ . On peut itérer cette construction, ce qui amène à une contradiction, puisque les degrés des morphismes obtenus vont en décroissant strictement.

Soit  $\alpha : X' \rightarrow X$  un morphisme propre birationnel qui induise un isomorphisme au-dessus de  $X^0$  et tel que  $\rho' = \rho \alpha$  soit un *morphisme* de  $X'$  dans  $Z$ . Il existe un voisinage  $M$  de  $[f]$  dans une composante de dimension au moins 1 de  $\text{Mor}(C, X; f|_{\{c\}})$  tel que l'évaluation se factorise en

$$C \times M \xrightarrow{e} X' \xrightarrow{\alpha} X .$$

Soient  $B^0$  une courbe lisse irréductible,  $B^0 \rightarrow M$  un morphisme non constant, et  $B$  une compactification normale de  $B^0$ . Soit  $\varepsilon : S \rightarrow C \times B$  une suite d'éclatements telle que la composée

$$S \xrightarrow{\varepsilon} C \times B \xrightarrow{e} X'$$

soit un morphisme. Comme  $C$  est irrrationnelle, les morphismes  $C \rightarrow X$  correspondant aux points de  $B^0$  ne peuvent tous provenir d'une reparamétrisation de  $f$ , de sorte que  $e\varepsilon(S)$  est une surface. Si  $e$  est défini en tout point de  $\{c\} \times B$ , qu'il contracte alors en  $f(c)$ , il existe des voisinages affines  $V$  de  $f(c)$  dans  $X$  et  $U$  de  $c$  dans  $C$  tels que  $e(U \times B)$  soit contenu dans  $V$ . Comme  $B$  est complète,  $\{c'\} \times B$  est contracté pour chaque  $c'$  dans  $U$ , et l'image de  $e$  est une courbe, ce qui est absurde.

Pour chaque point  $(c, b)$  en lequel  $e$  n'est pas défini, la fibre de  $S \rightarrow B$  en  $b$  contient la réunion de  $C$  et d'une courbe connexe  $E$  à composantes rationnelles qui coupe  $C$  en  $c$ , mais qui n'est pas contractée par  $e\varepsilon$ . La restriction de  $e\varepsilon$  à cette courbe induit un morphisme  $f' : C \rightarrow X$  qui vérifie

$$\deg f'_* C = \deg f_* C - \deg f'_* E < \deg f_* C .$$

La courbe  $e\varepsilon(E)$  est à composantes rationnelles et contient le point  $f(c)$  de  $F$ , donc est contractée par  $\rho'$ . Cela entraîne que  $\rho'e$  est définie sur  $\{c\} \times B$ , puis, par l'argument précédent, que  $\rho'e\varepsilon(S)$  n'est pas une surface. C'est donc la courbe  $\rho f(C)$ , de sorte que  $\rho f'(C) = \rho f(C)$ . Ceci, comme on l'a déjà expliqué, mène à une contradiction, ce qui termine la démonstration du théorème. ■

**COROLLAIRE.**— Soit  $X$  une variété de Fano de dimension  $n$ . Alors  $X$  est r.c.; plus précisément, deux points de  $X$  peuvent être reliés par une chaîne rationnelle de degré au plus  $(n + 1)(2^n - 1)$ .

Appliquons le théorème au quotient rationnel  $X \dashrightarrow R(X)$ ; le th. 1 entraîne que  $R(X)$  est réduit à un point, de sorte que deux points de  $X$  peuvent être reliés par une chaîne rationnelle. Grâce au dernier paragraphe de 2.2, on peut casser les maillons de cette chaîne jusqu'à ce qu'ils soient de degré au plus  $n + 1$ . On conclut en appliquant le lemme 2 de 3.2, en prenant pour  $C \rightarrow T$  la famille des 1-cycles connexes de  $X$  de degré au plus  $n + 1$  à composantes rationnelles. ■

On peut construire à l'aide de fibrés en coniques sur le plan projectif des familles de dimension arbitrairement grande de variétés r.c. birationnellement distinctes de dimension 3. Vu le th. 8, cela montre que « la plupart » des variétés r.c. ne sont pas birationnellement équivalentes à des variétés de Fano.

#### 4. UNE PROPRIÉTÉ FORTE DE CONNEXITÉ RATIONNELLE

Deux points d'une variété r.c. projective et lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle peuvent être reliés par une courbe rationnelle *irréductible*. Pour démontrer ce résultat de [KMM3], l'idée est simple : il suffit de « lisser » la chaîne rationnelle reliant les deux points. Il faut pour cela que ses maillons soient des morphismes *libres*, une notion définie en 4.1; intuitivement, cela signifie que les déformations du morphisme recouvrent la variété. Le résultat principal de 4.1. est la remarque élémentaire mais fort utile qu'une courbe rationnelle passant par un point très général d'une variété projective lisse est libre (en caractéristique nulle). On démontre en 4.2. les résultats de lissage nécessaires, tandis que le théorème principal fait l'objet de 4.3; la démonstration en est compliquée par le fait que l'on veut contrôler le degré des courbes construites. On termine en montrant en 4.4 que les variétés complexes projectives lisses r.c. (donc en particulier les variétés de Fano) sont simplement connexes.

##### 4.1. Morphismes libres

Ce sont les morphismes de  $\mathbf{P}^1$  dans une variété dont les déformations sont non-obstruées dans un sens fort.

**DÉFINITION 2.**— Soient  $X$  une variété lisse et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme; on écrit  $f^*T_X \simeq \bigoplus_{i=1}^{\dim X} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$ . On dit que  $f$  est libre (resp. très libre) si tous les  $a_i$  sont

positifs (resp. strictement positifs).

Un morphisme constant  $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$  est libre, mais n'est très libre que si  $X$  est réduite à un point. Il est facile de caractériser géométriquement les morphismes libres.

**PROPOSITION 4.**— Soient  $X$  une variété lisse projective et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme.

a) Si  $f$  est libre,  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  est lisse en  $[f]$  et la différentielle du morphisme d'évaluation  $e : \mathbf{P}^1 \times \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow X$  est surjective en tout point de  $\mathbf{P}^1 \times [f]$ .

b) Si la différentielle de  $e$  est surjective en un point de  $\mathbf{P}^1 \times [f]$ , le morphisme  $f$  est libre.

Si  $f$  est libre,  $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X)$  est nul, et  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  est lisse en  $[f]$  (prop. 1). La différentielle  $de : T_{\mathbf{P}^1, t} \oplus H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X) \rightarrow T_{X, f(t)} \simeq (f^*T_X)_t$  en  $(t, [f])$  est donnée par  $de(a, \sigma) = df(a) + \sigma(t)$ . Pour qu'elle soit surjective il faut et il suffit que l'évaluation  $H^0(\mathbf{P}^1, f^*T_X) \rightarrow (f^*T_X)_t$  le soit. Avec les notations de la définition 2, c'est équivalent au fait que chaque  $a_i$  est positif. ■

Cette proposition signifie simplement que les déformations d'un morphisme libre recouvrent la variété, et qu'inversement, en caractéristique nulle, un élément général d'une famille de courbes qui recouvrent la variété est libre. On en déduit que pour qu'une variété lisse projective  $X$  définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle soit uniréglée, il faut et il suffit qu'il existe une courbe rationnelle libre non constante sur  $X$  (cf. [K1], th. 1.9, p. 188).

On montre de la même façon :

**PROPOSITION 5.**— Soient  $X$  une variété lisse projective et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme.

a) Si  $f$  est très libre,  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; 0 \mapsto f(0))$  est lisse en  $[f]$  et la différentielle du morphisme d'évaluation  $e : \mathbf{P}^1 \times \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; 0 \mapsto f(0)) \rightarrow X$  est surjective en  $(\infty, [f])$ . La différentielle de l'évaluation  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow X \times X$  est surjective en  $(0, \infty, [f])$ .

b) Si la différentielle de  $e$  est surjective en un point de  $\mathbf{P}^1 \times [f]$ , le morphisme  $f$  est très libre.

Le résultat suivant dit qu'une courbe rationnelle passant par un point très général d'une variété lisse est libre (en caractéristique nulle).

**PROPOSITION 6.**— Soit  $X$  une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Il existe un sous-ensemble  $X^{\text{libre}}$  de  $X$  dont le complémentaire est réunion dénombrable de fermés propres de  $X$ , tel que tout

morphisme  $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$  dont l'image rencontre  $X^{\text{libre}}$  soit libre.

Nous noterons  $(M_i)_{i \in \mathbf{N}}$  les composantes irréductibles de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  et  $e_i : \mathbf{P}^1 \times M_i \rightarrow X$  les morphismes d'évaluation. Si  $e_i$  n'est pas dominant, on note  $G_i$  l'adhérence de son image. Si  $e_i$  est dominant, on note  $G_i$  le complémentaire d'un ouvert dense de  $X$  au-dessus duquel la différentielle  $de_i$  est surjective. Soit  $X^{\text{libre}}$  le complémentaire de la réunion des  $G_i$ . Soient  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme dont l'image rencontre  $X^{\text{libre}}$ , et  $M_i$  une composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  qui contient  $[f]$ . Le morphisme  $e_i$  est dominant, et  $de_i$  est surjective en un point de  $\mathbf{P}^1 \times [f]$ . On conclut avec la prop. 4.b). ■

Pour qu'une courbe rationnelle tracée sur une surface projective lisse soit libre, il faut et il suffit que son auto-intersection soit positive. Si  $\tilde{\mathbf{P}}^2$  est l'éclaté du plan projectif en un point,  $(\tilde{\mathbf{P}}^2)^{\text{libre}}$  est le complémentaire du diviseur exceptionnel. Il existe des surfaces contenant une infinité de courbes rationnelles lisses d'auto-intersection  $-1$ ; pour de telles variétés,  $X^{\text{libre}}$  n'est pas un ouvert.

On utilisera souvent la proposition en conjonction avec la remarque suivante : soient  $\mathcal{C}$  un schéma irréductible,  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow T$  une courbe projective plate et  $F : \mathcal{C} \rightarrow X$  un morphisme. Si l'image par  $F$  d'une fibre de  $\pi$  rencontre  $X^{\text{libre}}$ , il en est de même de l'image par  $F$  d'une fibre très générale de  $\pi$  : en effet,  $X - X^{\text{libre}}$  est réunion d'une suite  $(G_i)_{i \in \mathbf{N}}$ , que l'on peut supposer croissante, de fermés propres de  $X$ ; si l'image par  $F$  de la courbe  $\pi^{-1}(t)$  ne rencontre pas  $X^{\text{libre}}$ , celle-ci est contenue dans un  $F^{-1}(G_i)$ , de sorte que  $t$  n'appartient pas à l'intersection des ensembles  $\pi(\mathcal{C} - F^{-1}(G_i))$ , qui sont constructibles et contiennent chacun un ouvert dense. On exprime cela sous forme du principe suivant.

(P) Une déformation très générale d'un morphisme dont l'image rencontre  $X^{\text{libre}}$  a la même propriété.

## 4.2. Lissage des courbes singulières

On appelle *arbre rationnel* une courbe projective connexe  $C$  de composantes rationnelles  $C_1, \dots, C_m$ , que l'on peut numéroter de façon que chaque  $C_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) rencontre  $C_1 \cup \dots \cup C_i$  en un seul point, qui est un point double ordinaire de  $C$ . Il est facile de construire une courbe lisse connexe  $T$  et une courbe projective plate  $\mathcal{C} \rightarrow T$  dont l'une des fibres est  $C$  tandis que toutes les autres sont isomorphes à  $\mathbf{P}^1$ ; on dit que  $\mathcal{C} \rightarrow T$  est un *lissage* de  $C$ . On dit qu'un morphisme  $f : C \rightarrow X$  est *lissable* s'il existe un lissage  $\mathcal{C} \rightarrow T$  et un morphisme  $F : \mathcal{C} \rightarrow X$  qui coïncide avec  $f$  sur  $C$ . Si  $p_1, \dots, p_r$  sont des points lisses de  $C$ , le lecteur définira

sans mal la propriété «  $f$  est lissable en laissant  $f(p_1), \dots, f(p_r)$  fixes ».

**PROPOSITION 7.**— Soient  $X$  une variété projective lisse,  $C = C_1 \cup \dots \cup C_m$  un arbre rationnel et  $f : C \rightarrow X$  un morphisme.

a) Fixons un point  $p$  lisse sur  $C$ . Si la restriction de  $f$  à chaque  $C_i$  est libre, le morphisme  $f$  est lissable en une courbe rationnelle libre, en laissant  $f(p)$  fixe.

b) Fixons sur chaque  $C_i$  un point  $p_i$  lisse sur  $C$ . Si la restriction de  $f$  à chaque  $C_i$  est très libre, le morphisme  $f$  est lissable en une courbe rationnelle très libre, en laissant les  $f(p_i)$  fixes.

Soit  $\pi : C \rightarrow T$  un lissage de  $C$  avec une section  $\sigma$  passant par  $p$ ; notons  $g : \sigma(T) \rightarrow X \times T$  le morphisme  $(f(p), \pi)$ . Comme en 2.1, les  $T$ -morphisms de  $C$  dans  $X \times T$  étendant  $g$  sont encore paramétrés par un  $T$ -schéma  $\text{Mor}_T(C, X \times T; g)$  ( $[G]$ ). On montre (cf. [K1], p. 95) que celui-ci est lisse en  $[f]$  dès que  $H^1(C, f^*T_X(-p))$  est nul. On vérifie que c'est le cas ici, de sorte qu'il existe une courbe lisse  $T' \rightarrow \text{Mor}_T(C, X \times T; g)$  passant par  $[f]$  et dominant  $T$ , ce qui prouve a). Le b) est analogue, une fois que l'on a vérifié que  $H^1(C, f^*T_X(-p_1 \dots - p_m))$  est nul. ■

On appelle *peigne rationnel* un arbre rationnel  $C$  dont on peut noter les composantes  $D, C_1, \dots, C_m$  de façon que chaque  $C_i$  ne rencontre la réunion des autres composantes qu'en un seul point, qui est un point de  $D$ . On appelle les  $C_i$  les *dents* du peigne, et  $D$  sa *poignée*. Un sous-peigne de  $C$  est un peigne contenu dans  $C$  et contenant  $D$ . Le résultat suivant est plus difficile : on ne suppose plus que la restriction du morphisme à la poignée est libre, mais on obtient quand même un lissage partiel. Je renvoie à [K1], p. 157 pour la démonstration.

**PROPOSITION 8.**— Soient  $C$  un peigne rationnel à  $m$  dents,  $p_1, \dots, p_r$  des points de sa poignée  $D$  lisses sur  $C$ . Soient  $X$  une variété projective lisse et  $f : C \rightarrow X$  un morphisme dont la restriction à chaque dent de  $C$  est libre. Il existe un entier  $m'$  vérifiant

$$m' \geq m - (K_X \cdot f_*D) - (r - 1) \dim X - \dim_{[f|_D]} \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{p_1, \dots, p_r\}})$$

et un sous-peigne  $C'$  de  $C$  à  $m'$  dents tel que  $f|_{C'}$  soit lissable en laissant les  $f(p_i)$  fixes.

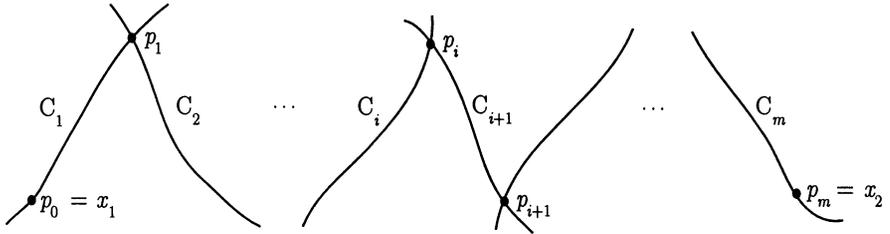
### 4.3. Une propriété forte de connexité rationnelle

Lorsque la caractéristique du corps de base est nulle, deux points quelconques d'une variété lisse r.c. peuvent être reliés par une courbe rationnelle *irréductible* (c'est faux pour les variétés singulières, comme le montre l'exemple du cône sur une courbe

elliptique). On aura en fait besoin d'un résultat plus précis permettant de contrôler le degré des courbes qui interviennent.

**THÉORÈME 3.**— Soient  $X$  une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et  $H$  un diviseur ample tel que  $H - K_X$  soit nef. On suppose qu'il existe  $d$  dans  $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  tel que deux points quelconques de  $X$  puissent être reliés par une chaîne rationnelle de  $H$ -degré au plus  $d$ . Deux points quelconques de  $X$  peuvent être reliés par une courbe rationnelle irréductible très libre de  $H$ -degré au plus  $2d(\dim X + d + 3)^d$ .

On peut supposer le corps de base non dénombrable et  $X$  non réduite à un point. Soient  $x_1$  et  $x_2$  des points de  $X$  ; il existe une chaîne rationnelle joignant  $x_1$  à  $x_2$  que l'on décrit ainsi :



On note  $f_i : \mathbf{P}^1 \rightarrow C_i \subset X$  la normalisation, en supposant  $f_i(0) = p_{i-1}$  et  $f_i(\infty) = p_i$ . Par la prop. 2.b), on peut, si  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f_i|_{\{0, \infty\}})$  est de dimension  $\geq 2$  en  $[f_i]$ , déformer  $f_i$  en une courbe réductible passant toujours par  $p_{i-1}$  et  $p_i$ . On supposera donc

$$\dim_{[f_i]} \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f_i|_{\{0, \infty\}}) \leq 1$$

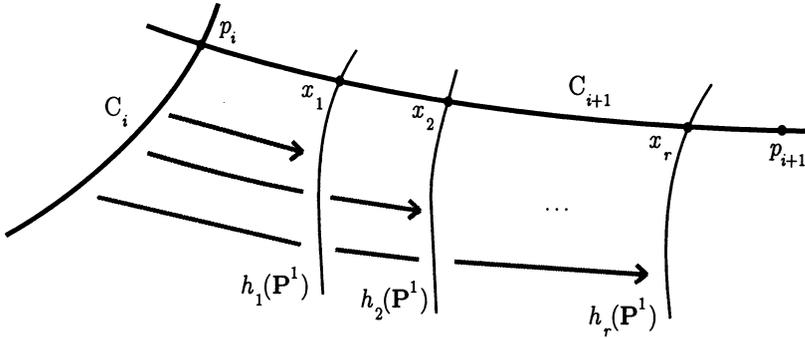
pour tout  $i = 1, \dots, m$ . Puisque  $H \cdot C_i > 0$ , on remarquera que  $m \leq d$ .

Supposons tout d'abord que  $x_1$  soit dans le sous-ensemble  $X^{\text{libre}}$  de  $X$  défini dans la prop. 6, de sorte que  $f_1$  est libre. On va construire par récurrence sur  $i$  des morphismes  $g_i : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  étendant  $f_i|_{\{0, \infty\}}$ , dont l'image rencontre  $X^{\text{libre}}$ , et dont le  $H$ -degré est inférieur à  $d(\dim X + d + 3)^{i-1}$ .

Pour  $i = 1$ , on prend  $g_1 = f_1$ . Supposons le morphisme  $g_i$  construit, avec  $g_i(\infty) = p_i$  ; il est libre, de sorte que le morphisme d'évaluation  $e : \mathbf{P}^1 \times \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow X$  est lisse sur  $\mathbf{P}^1 \times [g_i]$  (prop. 4.a)).

Appliquons le principe (P) de 4.1 à la famille de courbes paramétrée par l'image dans  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  d'une composante irréductible de  $e^{-1}(C_{i+1})$  qui domine  $C_{i+1}$  et qui contient  $(\infty, [g_i])$  : pour tout entier  $r$ , il existe des points distincts  $x_1, \dots, x_r$  de  $C_{i+1} - \{p_i, p_{i+1}\}$  et des déformations  $h_1, \dots, h_r : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  de  $g_i$  telles que l'image de

chaque  $h_j$  rencontre  $X^{\text{libre}}$  et  $h_j(0) = x_j$ . On obtient ainsi un *peigne rationnel*  $D$  (au sens de 4.2) et un morphisme  $h : D \rightarrow X$  d'image  $C_{i+1} \cup h_1(\mathbf{P}^1) \cup \dots \cup h_r(\mathbf{P}^1)$  dont la restriction aux dents est libre.



Par la prop. 8, on peut lisser, en fixant  $p_i$  et  $p_{i+1}$ , un sous-peigne  $D'$  de  $D$  qui a  $r'$  dents, où

$$\begin{aligned}
 r' &\geq r - (K_X \cdot C_{i+1}) - \dim X - \dim_{[f_{i+1}]} \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f_{i+1}|_{\{0, \infty\}}) \\
 (\mathcal{M}) \quad &\geq r + (H - K_X) \cdot C_{i+1} - H \cdot C_{i+1} - \dim X - 1 \\
 &\geq r - d - \dim X - 1.
 \end{aligned}$$

Si on prend  $r = \dim X + d + 2$  (ou  $r = H \cdot C_{i+1} + \dim X + 2$  si  $d = +\infty$ ), le peigne  $D'$  a au moins une dent, donc son image par  $h$  rencontre  $X^{\text{libre}}$ . Par le principe ( $\mathcal{P}$ ), une déformation lisse très générale  $g_{i+1}$  de  $h|_{D'}$  a la même propriété, donc est libre. Comme les restrictions de  $h$  aux dents de  $D$  sont des déformations de  $g_i$ , on a

$$\begin{aligned}
 \deg g_{i+1} &\leq r \deg g_i + \deg C_{i+1} \\
 &\leq (\dim X + d + 2)d(\dim X + d + 3)^{i-1} + d \\
 &\leq d(\dim X + d + 3)^i.
 \end{aligned}$$

On arrive ainsi à une chaîne de courbes rationnelles libres joignant  $x_1$  à  $x_2$ ; son degré total est

$$\leq d + d(\dim X + d + 3) + \dots + d(\dim X + d + 3)^{m-1} \leq d(\dim X + d + 3)^d,$$

puisque  $m \leq d$ . Par la prop. 7.a), on peut lisser une telle courbe en laissant  $x_2$  fixe; si  $M'$  est le sous-schéma de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; 0 \mapsto x_2)$  qui paramètre les morphismes de degré au plus  $d(\dim X + d + 3)^d$ , le fait que  $x_1$  soit quelconque dans  $X^{\text{libre}}$  entraîne

que l'évaluation  $e : \mathbf{P}^1 \times M' \rightarrow X$  est dominante. Soit  $M$  une composante irréductible de  $M'$  telle que  $e|_{\mathbf{P}^1 \times M}$  soit dominante; par la prop. 5.b), un élément général de  $M$  est très libre. On en déduit que deux points quelconques de  $X$  peuvent être reliés par une chaîne de deux courbes rationnelles très libres, de degré total au plus  $2d(\dim X + d + 3)^d$ . Par la prop. 7.b), une telle courbe peut être lissée en une courbe très libre passant par les deux points donnés. ■

**COROLLAIRE 1** ([KMM2]).— *Soit  $X$  une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la variété  $X$  est r.c. ;*
- (ii) *deux points quelconques de  $X$  sont contenus dans une courbe rationnelle irréductible ;*
- (iii) *tout sous-ensemble fini de  $X$  est contenu dans une courbe rationnelle irréductible ;*
- (iv) *il existe une courbe rationnelle très libre sur  $X$ .*

Supposons (i) vérifiée; le théorème entraîne (ii), et même (iii) (il suffit de lisser, en utilisant la prop. 7.b), un arbre rationnel à composantes très libres contenant l'ensemble en question), ainsi que (iv). Les implications (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i) sont évidentes, et (iv)  $\Rightarrow$  (i) résulte de la prop. 5.a). ■

On peut en fait se passer de l'hypothèse «  $X$  projective » dans ce corollaire (cf. [K1], th. 3.7, p. 202 et th. 3.10.3, p. 205). On en déduit que l'image par un morphisme dominant d'une variété lisse r.c. définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est r.c..

Il faut aussi mentionner une très jolie généralisation commune du corollaire et de la remarque qui précède la prop. 5 : sous les hypothèses du corollaire, et avec les notations de 3.2,  $\dim X - \dim R(X)$  est le plus grand entier  $r$  tel qu'il existe un morphisme libre  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  vérifiant  $f^*T_X \simeq \bigoplus \mathcal{O}(a_i)$  avec  $a_1, \dots, a_r > 0$  (cf. [K1], th. 5.8, p. 225).

**COROLLAIRE 2.**— *Soit  $X$  une variété de Fano de dimension  $n$  définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Deux points de  $X$  peuvent être reliés par une courbe rationnelle irréductible de degré au plus*

$$d(n) = 2(n+1)(2^n - 1)(n+2)^{(n+1)(2^n - 1)} .$$

Grâce au cor. du th. 2, le théorème s'applique avec  $H = -K_X$  et  $d = (n+1)(2^n - 1)$ , en remarquant que sa démonstration fournit dans ce cas la borne

$2d(\dim X + 2)^d$  sur le degré, puisque l'on peut améliorer la majoration  $(\mathcal{M})$  ci-dessus en utilisant l'inégalité  $-K_X \cdot C_{i+1} > 0$ . ■

La démonstration de ce corollaire est plus simple (on n'a besoin ni de la construction du quotient rationnel, ni du th. 3) et la borne obtenue bien meilleure, lorsque le groupe de Néron-Severi de la variété est de rang 1.

**THÉORÈME 4** ([C4], [N], [KMM1]).— *Soit  $X$  une variété de Fano de dimension  $n$  définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, dont le groupe de Néron-Severi est de rang 1. Deux points généraux de  $X$  peuvent être reliés par une courbe rationnelle irréductible de degré au plus  $n(n+1)$ .*

On peut supposer  $n > 0$ , de sorte que  $X$  est uniréglée (prop. 3). Comme l'on est en caractéristique nulle, on a vu en 4.1 qu'il existe une courbe rationnelle libre non constante sur  $X$  (§2); on applique le lemme 1 de 3.2 avec le sous-schéma  $T$  de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  qui paramètre les courbes *libres* de degré au plus  $n+1$  : on obtient un morphisme  $\tau : X^0 \rightarrow Y$ . Si  $Y$  n'est pas réduit à un point, on note  $H^0$  l'image inverse par  $\tau$  d'un diviseur ample sur  $Y$ , et  $H$  son adhérence dans  $X$ . Comme  $H - H^0$  est de codimension 2 dans  $X$ , il ne rencontre pas la courbe rationnelle  $C_t = e(\mathbf{P}^1 \times \{t\})$  pour  $t$  général dans  $T$ . Mais  $C_t \cap X^0$  est par le lemme 1 contenue dans une fibre de  $\tau$ , donc ne rencontre pas non plus  $H^0$ ; on en déduit  $H \cdot C_t = 0$ , ce qui contredit le fait que tout diviseur effectif sur  $X$  est ample. On en déduit que  $Y$  est un point, donc que deux points généraux de  $X$  peuvent être reliés par une chaîne rationnelle *libre* de degré  $n(n+1)$ . Par la prop. 7.a), cette chaîne peut être lissée, d'où le théorème. ■

On ne sait pas ce qu'il advient de ces résultats en caractéristique non nulle : les démonstrations présentées ici utilisent de façon essentielle l'existence d'une courbe rationnelle libre non constante sur une variété de Fano, que l'on ne sait pas démontrer dans le cas général.

#### 4.4. Simple connexité

Si  $X$  est une variété projective lisse r.c. (toujours définie sur un corps de caractéristique nulle), il existe un morphisme très libre  $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$  (th. 3). Soit  $m$  un entier strictement positif; toute section de  $(\Omega_X^1)^{\otimes m}$  s'annule sur l'image de cette courbe. Or les déformations très libres de cette courbe recouvrent un ouvert dense de  $X$  (cf. 4.1); on en déduit  $H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes m}) = 0$ , donc par symétrie de Hodge  $H^m(X, \mathcal{O}_X) = 0$  (lorsque  $X$  est une variété de Fano, cela découle directement du théorème d'annulation de Kodaira). On a alors  $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$ ; comme tout revêtement étale fini de  $X$  est encore r.c., on en déduit que  $X$  est algébriquement simplement connexe.

**THÉORÈME 5** ([C3], [KMM2]).— *Toute variété complexe projective lisse r.c. est simplement connexe.*

Soit  $X$  une telle variété. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que  $\pi_1(X)$  est fini. Il existe (th. 3) un morphisme  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  très libre. Par la prop. 5.a), une unique composante  $M$  de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X; f|_{\{0\}})$  contient  $[f]$ , et l'évaluation  $e : \mathbf{P}^1 \times M \rightarrow X$  est dominante, de sorte que  $\pi_1(e)$  est de conoyau fini. Mais la composée de  $e$  avec l'injection  $\iota : \{0\} \times M \rightarrow \mathbf{P}^1 \times M$  est constante, tandis que  $\pi_1(\iota)$  est bijective; cela entraîne que  $\pi_1(e)$  est constante, d'où la proposition. ■

La démonstration de [C3] (cor. 5.7 et 5.9) est différente, et ne fait pas appel au résultat de lissage du th. 3; il y est montré que le groupe fondamental d'une variété compacte kählérienne est fini si deux points très généraux peuvent être reliés par une chaîne de variétés irréductibles dont les normalisées ont des groupes fondamentaux finis (cf. aussi [K3], th. 4.13).

Avec les notations de 3.2, le résultat général est le suivant (cf. [K4], th. 5.2 pour la démonstration).

**THÉORÈME 6.**— *Soit  $X$  une variété complexe projective lisse. L'application  $\pi_1(\rho) : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(R(X))$  est bijective.*

## 5. LES VARIÉTÉS DE FANO FORMENT UNE FAMILLE LIMITÉE

### 5.1. Bornes sur $c_1(X)^{\dim X}$

Un argument qui remonte à Fano permet de déduire des résultats du §4 une majoration de  $c_1(X)^n$  valable pour toutes les variétés de Fano  $X$  de dimension  $n$ .

**PROPOSITION 9.**— *Soit  $X$  une variété projective lisse de dimension  $n$ , soit  $x$  un point de  $X$ , et soit  $H$  un diviseur ample sur  $X$ . On suppose qu'un point général de  $X$  peut être relié à  $x$  par une courbe irréductible de  $H$ -degré au plus  $d$ . Alors  $H^n \leq d^n$ .*

Par Riemann-Roch,  $h^0(X, tH)$  est équivalent à  $\frac{H^n}{n!} t^n$  pour  $t \gg 0$ . D'autre part, avoir un point de multiplicité au moins  $r$  en  $x$  impose au plus  $\binom{n+r-1}{n} \sim \frac{r^n}{n!}$  conditions sur les éléments de  $|tH|$ . On en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t \gg 0$  et  $D \in |tH|$  tels que

$$\text{mult}_x D \geq t \sqrt[n]{H^n} - t\varepsilon .$$

Soit  $C$  une courbe irréductible de  $H$ -degré au plus  $d$  joignant  $x$  à un point hors de  $D$ . On a

$$td \geq C \cdot (tH) \geq \text{mult}_x D \geq t \sqrt[n]{H^n} - t\varepsilon ,$$

d'où la proposition en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. ■

Le cor. 2 du th. 3 et le th. 4 entraînent :

**THÉORÈME 7** ([KMM3], [N]).— *Soit  $X$  une variété de Fano de dimension  $n$  définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On a  $c_1(X)^n \leq d(n)^n$ . Si le groupe de Néron-Severi de  $X$  est de rang 1, on a  $c_1(X)^n \leq (n(n+1))^n$ .*

Il faut aussi mentionner le résultat ancien de Bogomolov, qui établit dans [Bo], par des méthodes de caractéristique nulle, l'inégalité  $c_1(X)^3 \leq 72$  pour toute variété de Fano complexe  $X$  de dimension 3 dont le groupe de Néron-Severi est engendré par  $K_X$ . La borne  $c_1(X)^n \leq (n+1)^n$  a été conjecturée par Iskovskikh, mais Batyrev a remarqué dans [B] que pour la variété de Fano  $X = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(n-1))$ , dont le groupe de Néron-Severi est de rang 2, on a

$$c_1(X)^n = \frac{(2n-1)^n - 1}{n-1} \sim \frac{2^n e^{-3/2}}{n} (n+1)^n .$$

Pour une variété de Fano complexe  $X$  de dimension  $n$  qui admet une métrique de Kähler-Einstein  $g$ , des résultats classiques de géométrie différentielle permettent d'obtenir une borne sur  $c_1(X)^n$ . Supposons la métrique normalisée de telle sorte que sa courbure de Ricci soit  $g$ ; on a alors ([Be], 11.5)

$$c_1(X)^n = \text{vol}(X) \frac{n!}{(2\pi)^n} .$$

Un résultat de Bishop ([BC], cor. 4, p. 257) entraîne que le volume de  $X$  est inférieur à celui d'une sphère de même dimension et de rayon  $\sqrt{2n-1}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} c_1(X)^n &\leq \frac{n!}{(2\pi)^n} (\sqrt{2n-1})^{2n} \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= (2n-1)^n \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n)!} \sim 2^{n+1} \sqrt{\pi n} e^{-3/2} (n+1)^n , \end{aligned}$$

borne qui est très proche de la valeur de l'exemple de Batyrev.

## 5.2. Bornes sur le nombre de type de déformations

Par [Ma], il n'y a qu'un nombre fini de types de déformations de variétés de Fano de polynôme de Hilbert  $\chi(X, \mathcal{O}(tK_X))$  fixé. Les deux coefficients de plus haut degré de ce polynôme sont bornés par le th. 7, ce qui suffit à borner les autres ([KM]).

Pour obtenir une borne *effective*, il faut utiliser des résultats difficiles sur l'adjonction.

**THÉORÈME 8.**— Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Le nombre de types de déformation de variétés de Fano de dimension  $n$  définies sur  $k$  est majoré par  $(n+2)^{(n+2)n^{2^{3n}}}$ .

Les résultats de [D], [K2], [AS] et [T] entraînent que pour toute variété de Fano  $X$  de dimension  $n$ , le diviseur  $\frac{n(n+1)(n+3)}{2}(-K_X)$  est très ample. Par projection, toutes les variétés de Fano de dimension  $n$  peuvent être réalisées comme des sous-variétés lisses de  $\mathbf{P}^{2n+1}$  de degré au plus  $\delta(n) = [\frac{1}{2}n(n+1)(n+3)d(n)]^n$ . Des travaux de Catanese permettent de borner le nombre de composantes irréductibles du schéma de Chow des sous-variétés lisses de  $\mathbf{P}^N$  de dimension pure  $n$  et degré  $\delta$  ([Ca] ou [K1] (3.28.9) p. 61) par

$$C(n, \delta, N) = \binom{\delta(N+1)}{N}^{(N+1)\delta \binom{\delta+n}{n}}.$$

Le nombre de type de déformations des variétés de Fano de dimension  $n$  est donc majoré par  $C(n, \delta(n), 2n+1)$ ; cette borne est inférieure à celle du théorème. ■

## BIBLIOGRAPHIE

- [AS] U. ANGEHRN, Y.-T. SIU – *Effective Freeness and Point Separation*, Invent. Math. **122** (1995), 291–308.
- [B] V. BATYREV – *Boundedness of the degree of multidimensional toric Fano varieties* (en russe avec résumé anglais), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1982) 22–27, 76–77; trad. anglaise : Moscow Univ. Math. Bull. **37** (1982), 28–33.
- [Be] A. BESSE – *Einstein manifolds*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **10**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.
- [BC] A. BISHOP, R. CRITTENDEN – *Geometry of Manifolds*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **10**, Academic Press, New York and London, 1964.
- [Bo] F. BOGOMOLOV – *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 1227–1287, 1439; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **13** (1979), 499–555.
- [Bor] A. BOREL – *Linear algebraic groups*. Benjamin, 1969.

- [Bou] J.-P. BOURGUIGNON – *Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes, d'après E. Calabi, T. Aubin et S.T. Yau*, Séminaire Bourbaki, vol. 1977/78, Exp. 507, 1–21, Springer Lectures Notes **710**, Springer Verlag, 1979.
- [C1] F. CAMPANA – *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 539–545.
- [C2] F. CAMPANA – *Coréduction algébrique d'un espace analytique compact faiblement kählérien*, Invent. Math. **63** (1981), 187–223.
- [C3] F. CAMPANA – *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes*, Bull. Soc. Math. Fr. **122** (1994), 255–284.
- [C4] F. CAMPANA – *Une version géométrique généralisée du théorème du produit de Nadel*, Bull. Soc. Math. Fr. **119** (1991), 479–493.
- [Ca] F. CATANESE – *Chow varieties, Hilbert schemes and moduli spaces of surfaces of general type*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 561–596.
- [CT] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – *Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels*, Proc. Int. Congr. Math., (Berkeley, Calif., 1986), 641–653, A.M.S., Providence, RI, 1987.
- [D] J.-P. DEMAILLY – *A numerical criterion for very ample line bundles*, J. Diff. Geom. **37** (1993), 323–374.
- [De] M. DEMAZURE – *Caractérisations de l'espace projectif, d'après S. Mori*, Séminaire Bourbaki, vol. 1979/80, Exp. 544, 11–19, Springer Lectures Notes **842**, Springer Verlag, 1981.
- [F] G. FANO – *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, Atti Congr. Internaz. di Matematica, Bologna **4** (1931), 115–119.
- [Fu] A. FUJIKI – *Deformation of uni-ruled manifolds*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **17** (1981), 687–702.
- [G] A. GROTHENDIECK – *Fondements de la géométrie algébrique. Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962, Sec. Math., Paris, 1962. Réédition Astérisque hors série 5*, Soc. Math. Fr., 1997.
- [I1] V. ISKOVSKIKH – *Fano 3-folds I* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 516–562, 717; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **11** (1977), 485–527.
- [I2] V. ISKOVSKIKH – *Fano 3-folds II* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 506–549; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **12** (1978), 469–506.

- [Ka] Y. KAWAMATA – *Boundedness of  $\mathbf{Q}$ -Fano threefolds*, Proceedings of the International Conference on Algebra, (Novosibirsk, 1989), 439–445, Contemp. Math. **131**, Part 3, A.M.S., Providence, RI, 1992.
- [K1] J. KOLLÁR – *Rational Curves on Algebraic Varieties*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **32**, Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [K2] J. KOLLÁR – *Effective Base Point Freeness*, Math. Ann. **296** (1993), 595–605.
- [K3] J. KOLLÁR – *Shafarevich maps and automorphic forms*. M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [K4] J. KOLLÁR – *Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties*, Invent. Math. **113** (1993), 177–215.
- [KM] J. KOLLÁR, T. MATSUSAKA – *Riemann-Roch type inequalities*, Amer. J. Math. **105** (1983), 229–252.
- [KMM1] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rational Curves on Fano Varieties*, Proc. Alg. Geom. Conf. Trento, 100–105, Springer Lecture Notes **1515**, Springer Verlag, 1992.
- [KMM2] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rationally Connected Varieties*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 429–448.
- [KMM3] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI – *Rational Connectedness and Boundedness of Fano Manifolds*, J. Diff. Geom. **36** (1992), 765–769.
- [LBS] C. LEBRUN, S. SALAMON – *Strong rigidity of positive quaternion-Kähler manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 109–132.
- [Le] M. LEVINE – *Deformation of uni-ruled varieties*, Duke Math. J. **48** (1981), 467–473.
- [M] Y. MANIN – *Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic*. Second edition. North-Holland Mathematical Library, **4**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1986.
- [Ma] T. MATSUSAKA – *On canonically polarized varieties (II)*, Amer. J. Math. **92** (1970), 283–292.
- [Me] G. MEGYESI – *Fano threefolds in positive characteristic*, à paraître dans J. Alg. Geom.
- [Mo] S. MORI – *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. **110** (1979), 593–606.

- [MM] S. MORI, S. MUKAI – *Classification of Fano threefolds with  $b_2 \geq 2$* , Manusc. Math. **36** (1981), 147–162.
- [N] A. NADEL – *The boundedness of degree of Fano varieties with Picard number 1*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 681–692.
- [S] J.-P. SERRE – *Cohomologie Galoisienne*. Springer Lecture Notes **5**, Springer Verlag, Berlin, 1964.
- [SB] N. SHEPHERD-BARRON – *Fano threefolds in positive characteristic*, Comp. Math. **105** (1997), 237–265.
- [Sh] V.V. SHOKUROV – *The existence of a line on Fano varieties* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979) 922–964, 968; trad. anglaise : Math. USSR Izvestiya **14** (1980), 395–405.
- [T] H. TSUJI – *Global generation of adjoint bundles*, Nagoya. Math. J. **142** (1996), 5–16.
- [Y1] S.T. YAU – *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA **74** (1977), 1798–1799.
- [Y2] S.T. YAU – *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I*, Comm. Pure and Appl. Math. **31** (1978), 339–411.

Olivier DEBARRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée

Université Louis Pasteur et CNRS

7, rue René Descartes

F-67084 STRASBOURG CEDEX

Adresse électronique : [debarre@math.u-strasbg.fr](mailto:debarre@math.u-strasbg.fr)

# *Astérisque*

G. J. HECKMAN

## **Dunkl operators**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 828, p. 223-246

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_223\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__223_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DUNKL OPERATORS

by G.J. HECKMAN

## INTRODUCTION

*Hypergeometric functions. It is known that almost all the special functions of one variable to be met with in mathematical physics may be obtained from the general hypergeometric function of Gauss by a suitable choice of parameters. These same functions appear as elements of representations of the simplest classical groups, namely the groups of rotations of the sphere and of the Lobachevskii plane. This connection lies in the nature of the matter, since the special functions make their appearance by way of considerations connected with this or that invariance of a problem under transformations of a space. Hence, it is natural to construct the theory of hypergeometric functions of several variables, relying on results and methods of the theory of the representations of compact or locally compact Lie groups. It is thus necessary so to construct the theory of hypergeometric functions that it should contain the theory of general spherical functions, connected with the representations of semisimple groups.*

I.M. Gelfand, On some problems of functional analysis, Usp. Mat. Nauk 11 (6) (1956), 3-12.

For a finite reflection group  $W$  acting on a Euclidean vector space Dunkl introduced in [Du1] the remarkable operator

$$T(\xi, k) = \partial(\xi) + \sum_{\alpha} k_{\alpha} \alpha(\xi) \alpha(\cdot)^{-1} (1 - s_{\alpha})$$

as perturbation in the parameter  $k_{\alpha}$  (satisfying  $k_{w\alpha} = k_{\alpha} \forall w, \forall \alpha$ ) of the differentiation  $\partial(\xi)$  in the direction of a vector  $\xi$ . Here  $\alpha$  runs over a set of equations for the reflection hyperplanes of  $W$ , and  $s_{\alpha} \in W$  is the corresponding reflection. Dunkl operators act

on polynomials (and many other function spaces) with the properties

$$\begin{aligned} T(\xi, k)T(\eta, k) &= T(\eta, k)T(\xi, k) \quad \forall \xi, \eta \\ wT(\xi, k)w^{-1} &= T(w\xi, k) \quad \forall w, \forall \xi, \end{aligned}$$

and their simultaneous spectral theory has an exact solution [Du2, J]. In this lecture we have left these (rational) Dunkl operators aside, and instead focus on their trigonometric analogues (by lack of time, and because the latter seem to be more interesting). It will become clear that trigonometric Dunkl operators form the basic tool in the hypergeometr(ic theor)y for root systems.

I like to thank Eric Opdam for many stimulating discussions, and Erik Koelink and Henk de Vries for useful comments on the text.

## 1. TRIGONOMETRIC DUNKL OPERATORS

Let  $\mathfrak{a}$  be a Euclidean vector space of dimension  $n$ , and let  $R \subset \mathfrak{a}^*$  be a possibly nonreduced root system. Let  $R^\vee \subset \mathfrak{a}$  be the dual root system. Let  $Q^\vee = \mathbb{Z}R^\vee \subset \mathfrak{a}$  be the coroot lattice. The dual lattice  $P = (Q^\vee)^* \subset \mathfrak{a}^*$  is the weight lattice of  $R$ . Let us denote by  $\mathfrak{h}$  the complexification of  $\mathfrak{a}$ :  $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$  with  $\mathfrak{t} = i\mathfrak{a}$ . Let  $H = \text{Hom}(P, \mathbb{C}^\times)$  be the complex torus with rational character lattice  $P$ . We have the polar decomposition

$$(1.1) \quad H = AT, \quad A = \text{Hom}(P, \mathbb{R}_{>0}), \quad T = \text{Hom}(P, S^1)$$

and  $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ ,  $\mathfrak{a} = \text{Lie}(A)$ ,  $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ . Let  $\mathbb{C}[H]$  be the algebra of regular functions (Laurent polynomials) on  $H$ . It has a  $\mathbb{C}$ -basis  $e^\mu$  indexed by  $\mu \in P$ , and the multiplication is given by  $e^\mu e^\nu = e^{\mu+\nu}$ ,  $e^0 = 1$ .

For  $\alpha \in R$  let  $s_\alpha : \lambda \mapsto \lambda - \lambda(\alpha^\vee)\alpha$  denote the corresponding reflection, and let  $W = \langle s_\alpha; \alpha \in R \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$  be the Weyl group of  $R$ . By duality  $W$  also acts on  $\mathfrak{h}$  and  $H$ . Fix a set of positive roots  $R_+ \subset R$ . Let  $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee \in R_+^\vee$  be the set of simple coroots, and  $s_1, \dots, s_n \in W$  the corresponding simple reflections.

For  $\alpha \in R$  let  $H_\alpha = \{h \in H; e^\alpha(h) = 1\}$  and put  $H_{\text{reg}} = H \setminus \bigcup H_\alpha$ . Let  $\mathbb{C}[H_{\text{reg}}]$  be the algebra of regular functions on  $H_{\text{reg}}$ . For  $p \in S\mathfrak{h}$  let  $\partial(p)$  denote the corresponding translation invariant differential operator on  $H$ , so  $\partial(p)e^\mu = p(\mu)e^\mu$  for  $p \in S\mathfrak{h}$  and  $\mu \in P$ . Denote by  $\mathbb{D}[H_{\text{reg}}]$  the algebra of differential operators on  $H$  with coefficients in  $\mathbb{C}[H_{\text{reg}}]$ . Clearly  $\mathbb{C}[H_{\text{reg}}]$  is a natural left module for  $\mathbb{D}[H_{\text{reg}}]$ . Let  $\mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$  be the algebra of *differential reflection* operators on  $H_{\text{reg}}$ . The algebra structure is the natural one making  $\mathbb{C}[H_{\text{reg}}]$  into a left module for  $\mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$ .

**DEFINITION 1.1.**— Let  $K = \{k \in \mathbb{C}^R; k = (k_\alpha) \text{ with } k_{w\alpha} = k_\alpha \forall w \in W, \forall \alpha \in R\}$  be the linear space of multiplicity (or coupling) parameters for  $R$ . For  $\xi \in \mathfrak{h}$  and  $k \in K$  the (trigonometric) Dunkl operator  $T(\xi, k) \in \mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$  is defined by

$$(1.2) \quad T(\xi, k) = \partial(\xi) - \rho(k)(\xi) + \sum_{\alpha > 0} k_\alpha \alpha(\xi)(1 - e^{-\alpha})^{-1} \otimes (1 - s_\alpha)$$

with

$$(1.3) \quad \rho(k) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} k_\alpha \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$

Note that the *divided difference* operator  $(1 - e^{-\alpha})^{-1}(1 - s_\alpha)$  preserves the space  $\mathbb{C}[H]$ , and likewise does the Dunkl operator  $T(\xi, k)$ . Let  $R^0$  be the set of unmultipliable roots in  $R$ , and put  $k_\alpha^0 = \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha} + k_\alpha$  for  $\alpha \in R^0$  with the convention  $k_\beta = 0$  if  $\beta \notin R$ . So  $k^0$  is a multiplicity parameter for  $R^0$ . Taking  $R_+^0 = R^0 \cap R_+$  we get  $\rho(k^0) = \rho(k)$ . It is easy to check (just by a rank one calculation) that

$$(1.4) \quad s_i T(\xi, k) - T(s_i \xi, k) s_i = -k_{\alpha_i}^0 \alpha_i(\xi)$$

for each simple root  $\alpha_i \in R_+^0$ . The next theorem is the basic result of this section.

**THEOREM 1.2.**— We have  $[T(\xi, k), T(\eta, k)] = 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{h}, \forall k \in K$ .

We will give two indications how to prove this result.

**First proof:** Verification by an (elementary but somewhat cumbersome) calculation along the same lines as Dunkl's original proof of commutativity in the rational case [Du1]. The only illuminating point is that this calculation admits a reduction to rank two. This is a basic feature in the theory of the Yang-Baxter equation.  $\square$

**Second proof:** It is easy to see that an element of  $\mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$  is zero as soon as it vanishes on  $\mathbb{C}[H]$  (see [O5, Lemma 2.8]). Therefore it suffices to prove commutativity of the Dunkl operators as elements of  $\text{End}(\mathbb{C}[H])$ . It also suffices to check the commutation relation for a Zariski dense set of multiplicity parameters, say  $k_\alpha \geq 0 \forall \alpha \in R$ . In this case define a hermitian inner product  $(\cdot, \cdot)_k$  on  $\mathbb{C}[H]$  by

$$(1.5) \quad (f, g)_k = |W|^{-1} \int_T f \bar{g} \prod_{\alpha > 0} |e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}|^{2k_\alpha} dt$$

with  $dt$  the normalized Haar measure on  $T$ . Now it is easy to check that

$$(1.6) \quad (T(\xi, k)f, g)_k = (f, T(\bar{\xi}, k)g)_k$$

for all  $f, g \in \mathbb{C}[H]$  and  $\xi \in \mathfrak{h}$ . The bar denotes complex conjugation on  $\mathfrak{h}$  with respect to the real form  $\mathfrak{a}$ .

One has the usual partial ordering  $\leq$  on  $\mathfrak{h}^*$  defined by  $\mu \leq \nu$  iff  $\nu - \mu \in \mathbb{N}R_+$ . Let  $P_+$  be the cone of dominant weights. For  $\mu \in P$  we denote by  $\mu_+$  the unique dominant weight in  $W\mu$ . Define a new partial ordering  $\leq_W$  on  $P$  by

$$(1.7) \quad \mu \leq_W \nu \text{ if either } \mu_+ < \nu_+ \text{ or } \mu_+ = \nu_+ \wedge \nu \leq \mu.$$

So  $\mu_+$  is the smallest and  $w_0\mu_+$  is the largest element in the orbit  $W\mu$ . Here  $w_0 \in W$  is the longest element. Now it is easy to check that the Dunkl operators are upper triangular with respect to the basis  $e^\mu$  partially ordered by  $\leq_W$ .

Next define a new basis  $E(\mu, k)$ ,  $\mu \in P$ , of  $\mathbb{C}[H]$  by the conditions

$$(1.8) \quad E(\mu, k) = e^\mu + \dots$$

$$(1.9) \quad (E(\mu, k), e^\nu)_k = 0 \quad \forall \nu \in P \text{ with } \nu <_W \mu.$$

Here the dots denote lower order terms with respect to  $\leq_W$ . Clearly the Dunkl operators are also upper triangular with respect to the basis  $E(\mu, k)$  partially ordered by  $\leq_W$ . Since  $(E(\mu, k), E(\nu, k))_k = 0$ ,  $\forall \nu <_W \mu$ , it follows from (1.6) that the Dunkl operators are diagonalized by the basis  $E(\nu, k)$ . Hence Dunkl operators commute on  $\mathbb{C}[H]$ .  $\square$

**REMARK 1.3.**— Let  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \{\pm 1\}$  be defined by  $\varepsilon(x) = +1$  if  $x > 0$  and  $\varepsilon(x) = -1$  if  $x \leq 0$ . For  $\mu \in P$  let  $\tilde{\mu} \in \mathfrak{h}^*$  be given by

$$(1.10) \quad \tilde{\mu} = \mu + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} k_\alpha \varepsilon(\mu(\alpha^\vee)) \alpha.$$

Then a direct calculation yields

$$(1.11) \quad T(\xi, k)E(\mu, k) = \tilde{\mu}(\xi)E(\mu, k).$$

Since  $k_\alpha \geq 0$ ,  $\forall \alpha \in R$ , we have  $\tilde{\mu} \neq \tilde{\nu}$  if  $\mu, \nu \in P$  are distinct. Hence  $E(\mu, k)$ ,  $\mu \in P$ , is in fact an orthogonal basis of  $\mathbb{C}[H]$  with respect to  $(\cdot, \cdot)_k$ .

Due to the commutativity of the Dunkl operators we can extend the map  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$ ,  $\xi \mapsto T(\xi, k)$ , in a unique way to an algebra homomorphism  $S\mathfrak{h} \rightarrow$

$\mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$ . The image of  $p \in \mathfrak{Sh}$  will be denoted by  $T(p, k)$ . The next definition is due independently to Drinfeld [Dr] and Lusztig [Lu].

**DEFINITION 1.4.**— *The degenerate (or graded) Hecke algebra  $\mathbb{H} = \mathbb{H}(R_+, k)$  is the unique associative algebra over  $\mathbb{C}$  satisfying*

- (1)  $\mathbb{H} = \mathfrak{Sh} \otimes \mathbb{C}[W]$  as a vector space over  $\mathbb{C}$ ,
- (2)  $\mathfrak{Sh} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $p \mapsto p \otimes 1$  and  $\mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $w \mapsto 1 \otimes w$  are algebra homomorphisms (often we will identify  $\mathfrak{Sh}$  and  $\mathbb{C}[W]$  with their images in  $\mathbb{H}$  via these maps),
- (3)  $p \cdot w = p \otimes w \quad \forall p \in \mathfrak{Sh}, \forall w \in W$ ,
- (4)  $s_i \cdot \xi - s_i \xi \cdot s_i = -k_{\alpha_i}^0 \alpha_i(\xi) \quad \forall \xi \in \mathfrak{h}$ , and for  $\alpha_i$  a simple root of  $R_+^0$ .

**PROPOSITION 1.5.**— *In the degenerate Hecke algebra  $\mathbb{H}$  we have*

- (1)  $w \cdot \xi \cdot w^{-1} = w\xi + \sum_{\alpha \in R_+^0 \cap wR_-^0} k_{\alpha}^0 \alpha(w\xi) s_{\alpha} \quad \forall \xi \in \mathfrak{h}, \forall w \in W$ ,
- (2)  $s_i \cdot p - s_i p \cdot s_i = -k_{\alpha_i}^0 (p - s_i p) / \alpha_i^{\vee} \quad \forall p \in \mathfrak{Sh}$ ,
- (3) the center  $Z(\mathbb{H})$  of  $\mathbb{H}$  is equal to  $\mathfrak{Sh}^W$ .

**Proof:** (1) Use induction on the length  $l(w)$  of  $w \in W$ . If  $w = s_i v$  with  $l(v) < l(w)$  then one has  $R_+^0 \cap wR_-^0 = s_i(R_+^0 \cap vR_-^0) \cup \{\alpha_i\}$ . Using the induction hypothesis and relation (4) of Definition 1.4 one obtains the desired formula.

- (2) By induction on the degree of  $p$ .
- (3) From (1) it follows that  $Z(\mathbb{H}) \subset \mathfrak{Sh}$ , and then (2) gives  $Z(\mathbb{H}) = \mathfrak{Sh}^W$ . □

Combination of relation (1.4) and Theorem 1.2 with Definition 1.4 gives the following conclusion.

**CONCLUSION 1.6.**— *The maps  $p \mapsto T(p, k)$ ,  $w \mapsto w$  define a homomorphism of the degenerate Hecke algebra  $\mathbb{H}$  into the algebra  $\mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$  of differential reflection operators on  $H_{\text{reg}}$ . In turn this defines a representation of  $\mathbb{H}$  on  $\mathbb{C}[H_{\text{reg}}]$  leaving the subspace  $\mathbb{C}[H]$  invariant.*

**REMARK 1.7.**— Trigonometric Dunkl operators were originally introduced in [He2] in the different form

$$(1.12) \quad S(\xi, k) = \partial(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} k_{\alpha} \alpha(\xi) \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \otimes (1 - s_{\alpha})$$

satisfying the properties

$$(1.13) \quad wS(\xi, k)w^{-1} = S(w\xi, k) \quad \forall w \in W, \forall \xi \in \mathfrak{h}$$

and

$$(1.14) \quad [S(\xi, k), S(\eta, k)] = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta > 0} k_\alpha k_\beta \{ \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi) \} s_\alpha s_\beta$$

for all  $\xi, \eta \in \mathfrak{h}$ . Subsequently Cherednik [Ch1] suggested the formula for  $T(\xi, k)$  and found Theorem 1.2. Comparison of (1.2) and (1.12) yields the relation

$$(1.15) \quad T(\xi, k) = S(\xi, k) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} k_\alpha \alpha(\xi) s_\alpha.$$

With this in mind it is easy to see that (1.14) is just an equivalent form of Theorem 1.2. The second proof of Theorem 1.2 given here is due to the author (unpublished and reproduced in [O5]). The connection between Dunkl operators and the degenerate Hecke algebra is due to Cherednik [Ch2, O5].

## 2. THE HYPERGEOMETRIC SYSTEM

In this section we explain the intimate connection between Dunkl operators and the hypergeometric theory for root systems as introduced in [HO1, He1, O1, O2]. By Proposition 1.5 the center of the degenerate Hecke algebra equals  $S\mathfrak{h}^W$ . Hence for  $p \in S\mathfrak{h}^W$  the Dunkl operator

$$(2.1) \quad T(p, k) = \sum_w D(w, p, k) \otimes w \in \mathbb{D}[H_{\text{reg}}] \otimes \mathbb{C}[W]$$

commutes with all elements from  $W$ , and therefore

$$(2.2) \quad D(p, k) := \sum_w D(w, p, k) \in \mathbb{D}[H_{\text{reg}}]^W.$$

Clearly  $D(p, k)$  is the unique element in  $\mathbb{D}[H_{\text{reg}}]^W$  which has the same restriction to  $\mathbb{C}[H]^W$  as the Dunkl operator  $T(p, k)$ . In particular  $D(p, k)$  preserves the space  $\mathbb{C}[H]^W$ . It is also clear that

$$(2.3) \quad D(p, k)D(q, k) = D(pq, k) \quad \forall p, q \in S\mathfrak{h}^W$$

and so  $\{D(p, k); p \in S\mathfrak{h}^W\}$  is a commutative algebra of differential operators.

**DEFINITION 2.1.**— *Fix  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . The system of differential equations*

$$(2.4) \quad D(p, k)f = p(\lambda)f, \quad p \in S\mathfrak{h}^W$$

is called the hypergeometric system associated with the root system  $R$ , and with spectral parameter  $\lambda$ .

**THEOREM 2.2.**— If  $\xi_1, \dots, \xi_n$  is an orthonormal basis of  $\mathfrak{a}$  then

$$(2.5) \quad D\left(\sum_i \xi_i^2, k\right) = L(k) + (\rho(k), \rho(k))$$

with

$$(2.6) \quad L(k) = \sum_i \partial(\xi_i)^2 + \sum_{\alpha > 0} k_\alpha \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \partial(\alpha)$$

and  $\partial(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)\partial(\alpha^\vee)$ .

**Proof:** For homogeneous  $p \in S\mathfrak{h}^W$  the leading symbol of  $D(p, k)$  is equal to  $\partial(p)$ . Moreover by (1.6) the adjoint of  $D(p, k)$  with respect to  $(\cdot, \cdot)_k$  on  $\mathbb{C}[H]^W$  is equal to  $D(\bar{p}, k)$ . Finally, by (1.11) the constant term  $D(p, k)1$  is equal to  $p(\rho(k))$ . Therefore, the proposition follows, since  $L(k) \in \mathbb{D}[H_{\text{reg}}]^W$  is the unique second order differential operator with leading symbol  $\sum_i \partial(\xi_i)^2$  which is symmetric with respect to  $(\cdot, \cdot)_k$  and with constant term  $L(k)1 = 0$  (as follows from the next theorem).  $\square$

**REMARK 2.3.**— Suppose  $\mathfrak{g}$  is a real semisimple Lie algebra with Cartan decomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$  a maximal abelian subspace,  $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  the restricted root system, and  $m_\alpha$  the corresponding root multiplicities. If we put

$$(2.7) \quad R = 2 \sum, \quad k_{2\alpha} = \frac{1}{2}m_\alpha$$

then the radial part of the Laplace operator on the symmetric space  $G/K$  with respect to the left action by  $K$  has the form (2.6). For these particular multiplicity parameters the commuting algebra  $\{D(p, k); p \in S\mathfrak{h}^W\}$  therefore represents the radial parts of the algebra  $\mathbb{D}[G/K]$  of all invariant differential operators on  $G/K$ . For more details and variations see [HS].

**THEOREM 2.4.**— If we put  $\delta(k)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\alpha > 0} |e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}|^{k_\alpha}$ , then

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \delta(k)^{\frac{1}{2}} \circ \{L(k) + (\rho(k), \rho(k))\} \circ \delta(k)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_i \partial(\xi_i)^2 + \sum_{\alpha > 0} \frac{k_\alpha(1 - k_\alpha - 2k_{2\alpha})(\alpha, \alpha)}{(e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha})^2} \end{aligned}$$

**Proof:** This is a rather straightforward calculation. See [HS, Part I, Ch 2] where the proof is spelled out.  $\square$

**REMARK 2.5.**— The differential operator in the right hand side of (2.8) is the Schrödinger operator of the periodic Calogero-Moser system. For the root system  $R$  of type  $A_n$  this system describes the motion of  $n + 1$  points on the circle  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  with a potential proportional to the sum of the inverse squares of the pairwise distances. Conjugation of the commuting family  $\{D(p, k); p \in S\mathfrak{h}^W\}$  with the function  $\delta(k)^{\frac{1}{2}}$  yields the quantum complete integrability of this system, and via a classical limit also the classical complete integrability. For  $R$  a classical root system the classical integrability was obtained by Moser [Mo] for type  $A_n$  and by Olshanetsky and Perelomov [OP] for the other classical types by realizing the system as a Lax pair. However, the only known proof of classical integrability valid also for exceptional root systems is the one sketched above through quantum integrability and a classical limit. For more details see [HS, Part I, Ch 2].

**EXAMPLE 2.6.**— In case  $R$  has rank one and  $x$  is a coordinate on  $H = \mathbb{C}^\times$  (so  $\mathbb{C}[H] = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  and  $\theta = x \frac{d}{dx}$  is a basis for  $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$ ) the hypergeometric equation (2.4) takes the form

$$(2.9) \quad \{\theta^2 + \left(k_1 \frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} + 2k_2 \frac{1+x^{-2}}{1-x^{-2}}\right)\theta + (\frac{1}{2}k_1 + k_2)^2 - \lambda^2\}f = 0.$$

Note that the equation has Weyl group symmetry  $x \mapsto x^{-1}$ , and in the new coordinate  $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x + x^{-1})$  this becomes the Gauss hypergeometric equation

$$(2.10) \quad \{z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (c - (1+a+b)z) \frac{d}{dz} - ab\}f = 0$$

with parameters

$$(2.11) \quad a = \lambda + \frac{1}{2}k_1 + k_2, \quad b = -\lambda + \frac{1}{2}k_1 + k_2, \quad c = \frac{1}{2} + k_1 + k_2.$$

Following Harish-Chandra we substitute a formal series of the form

$$(2.12) \quad \sum_{\nu \leq \mu} c_\nu e^\nu, \quad c_\mu = 1$$

into the hypergeometric system (2.4). The leading exponents  $\mu \in \mathfrak{h}^*$  for which such solutions exist satisfy (using Remark 1.3) the indicial equation

$$(2.13) \quad p(\mu + \rho(k)) = p(\lambda) \quad \forall p \in S\mathfrak{h}^W \iff \mu \in W\lambda - \rho(k).$$

Therefore, the hypergeometric system (2.4) has the asymptotically free solution

$$(2.14) \quad \Phi(\lambda, k; \cdot) = \sum_{\kappa \leq 0} \Gamma_{\kappa}(\lambda, k) e^{\lambda - \rho(k) + \kappa}, \quad \Gamma_0(\lambda, k) = 1$$

with  $\Gamma_{\kappa}(\lambda, k)$  satisfying the recurrence relations (using only the eigenvalue equation for the second order operator  $L(k)$ )

$$(2.15) \quad -(2\lambda + \kappa, \kappa) \Gamma_{\kappa}(\lambda, k) = 2 \sum_{\alpha > 0} k_{\alpha} \sum_{j \geq 1} (\lambda - \rho(k) + \kappa + j\alpha, \alpha) \Gamma_{\kappa + j\alpha}(\lambda, k).$$

These recurrence relations can be uniquely solved unless

$$(2.16) \quad (2\lambda + \kappa, \kappa) = 0 \quad \text{for some } \kappa < 0.$$

The series (2.14) converges absolutely and uniformly on compact sets in  $\mathfrak{h}^* \times K \times A_+$  which avoid these hyperplanes. Here  $A_+ = \{a \in A; e^{\alpha}(a) > 1 \forall \alpha > 0\}$ . It can be shown [HS, Part I, Ch 4] that

$$(2.17) \quad e^{-\lambda + \rho(k)} \Phi(\lambda, k; \cdot)$$

defines a meromorphic function on  $\mathfrak{h}^* \times K \times A_+ T$  with simple poles along the hyperplanes

$$(2.18) \quad \lambda(\alpha^{\vee}) \in \mathbb{N} + 1 \quad \text{for some } \alpha \in R_+.$$

In other words, the hyperplanes (2.16) with  $\kappa$  not a multiple of a root give only apparent singularities.

**DEFINITION 2.7.**— *The meromorphic function  $\tilde{c}$  on  $\mathfrak{h}^* \times K$  is defined by*

$$(2.19) \quad \tilde{c}(\lambda, k) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\Gamma(\lambda(\alpha^{\vee}) + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha})}{\Gamma(\lambda(\alpha^{\vee}) + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha} + k_{\alpha})}$$

with the convention  $k_{\beta} = 0$  if  $\beta \notin R$ .

**THEOREM 2.8.**— *The function  $\tilde{F}(\lambda, k; h)$  given by*

$$(2.20) \quad \tilde{F}(\lambda, k; h) = \sum_w \tilde{c}(w\lambda, k) \Phi(w\lambda, k; h)$$

extends to a holomorphic function on

$$(2.21) \quad \mathfrak{h}^* \times K \times U$$

with  $U$  a small  $W$ -invariant tubular neighborhood of  $A$  in  $H$ . Moreover it satisfies

$$(2.22) \quad \tilde{F}(w\lambda, k; h) = \tilde{F}(\lambda, k; wh) = \tilde{F}(\lambda, k; h)$$

for all  $w \in W$  and  $(\lambda, k, h) \in \mathfrak{h}^* \times K \times U$ .

This result is due to Opdam [O2]. For a proof see also [HS, Part I, Ch 4].

**REMARK 2.9.**— Under the assumption

$$(2.23) \quad (\lambda, \alpha^\vee) \notin \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in R$$

the asymptotically free solutions  $\Phi(w\lambda, k; \cdot)$  with  $w \in W$  are a basis for the solution space of the hypergeometric system (2.4) on  $A_+$ . Being invariant under  $W$  the system (2.4) can be considered as a system of differential equations on the quotient  $W \backslash H \cong \mathbb{C}^n$ . The fundamental group  $\Pi_1(W \backslash H_{\text{reg}})$  of the regular orbit space is the affine braid group associated with  $R$ . In the above basis it can be checked that the monodromy of the hypergeometric system yields a representation of the affine Hecke algebra with quadratic relations

$$(2.24) \quad (T_j + 1)(T_j - e^{2\pi i(k \frac{1}{2}\alpha_j + k\alpha_j)}) = 0$$

and with central character  $s = e^{2\pi i\lambda}$ . See [HS, Part I, Ch 4] for more details.

The next result is also due to Opdam [O4].

**THEOREM 2.10.**— For all  $(\lambda, k) \in \mathfrak{h}^* \times K$  we have

$$(2.25) \quad \tilde{F}(\lambda, k; 1) = \tilde{c}(\rho(k), k).$$

Outside the zeros of the entire function  $\tilde{c}(\rho(k), k)$  on  $K$  we put

$$(2.26) \quad F(\lambda, k; \cdot) = \tilde{c}(\rho(k), k)^{-1} \tilde{F}(\lambda, k; \cdot)$$

This solution of (2.4) is called the *hypergeometric function* associated with  $R$ . In the rank one case of Example 2.6 it is just the Gauss hypergeometric function.

### 3. THE KNIZHNIK-ZAMOLODCHIKOV CONNECTION

In the previous section we have seen how Dunkl operators commuting with the action of  $W$  give rise to the system of hypergeometric differential equations. There is a more direct way to rewrite the eigenvalue problem for the Dunkl operators as an integrable connection of Knizhnik-Zamolodchikov (or short KZ) type. This is due to Matsuo [Mat] and Cherednik [Ch1, Ch2]. Our exposition is inspired by [O5, Section 3] and [Lo].

Let  $\Omega^p$  (and  $\mathcal{O} = \Omega^0$ ) denote the sheaf of holomorphic  $p$ -forms on  $H_{\text{reg}}$ , and likewise  $\Omega^p \otimes \mathbb{C}[W]$  the sheaf of holomorphic  $p$ -forms with values in the trivial bundle on  $H_{\text{reg}}$  with fiber  $\mathbb{C}[W]$ . For  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  write  $d\lambda$  for the translation invariant 1-form on  $H$  corresponding to  $\lambda$ . For  $\alpha \in R$  let  $\varepsilon_\alpha \in \text{End}(\mathbb{C}[W])$  be defined by

$$(3.1) \quad \varepsilon_\alpha(w) = -\text{sign}(w^{-1}\alpha)w \quad \text{for } w \in W.$$

It is clear that these endomorphisms satisfy

$$(3.2) \quad \varepsilon_\alpha + \varepsilon_{-\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in R$$

$$(3.3) \quad w\varepsilon_\alpha w^{-1} = \varepsilon_{w\alpha} \quad \forall w \in W, \forall \alpha \in R$$

with  $w \in W$  acting on  $\mathbb{C}[W]$  by left multiplication.

**DEFINITION 3.1.**— Fix  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  and  $k \in K$ . The (trigonometric) KZ-connection associated with  $R$  is the connection  $\nabla(\lambda, k) : \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}[W] \rightarrow \Omega^1 \otimes \mathbb{C}[W]$  on the trivial bundle over  $H_{\text{reg}}$  with fiber  $\mathbb{C}[W]$  given by

$$\nabla(\lambda, k) = d \otimes 1 - e(\lambda) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} k_\alpha \left( \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} d\alpha \otimes (1 - s_\alpha) + d\alpha \otimes s_\alpha \varepsilon_\alpha \right)$$

with  $e(\lambda)$  the map sending  $f \otimes w$  to  $fdw\lambda \otimes w$ .

**PROPOSITION 3.2.**— The KZ-connection commutes with the diagonal action of  $W$  on  $\Omega^p \otimes \mathbb{C}[W]$ , with the action on the first factor being the natural one, and on the second factor given by left multiplication.

**Proof:** Using (3.2) one can rewrite the formula for  $\nabla(\lambda, k)$  as

$$\nabla(\lambda, k) = d \otimes 1 - e(\lambda) + \frac{1}{4} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \left( \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} d\alpha \otimes (1 - s_\alpha) + d\alpha \otimes s_\alpha \varepsilon_\alpha \right)$$

and the  $W$ -equivariance follows by direct verification using (3.3). □

For  $h \in H_{\text{reg}}$  let us denote  $\Omega_{Wh}^p = \bigoplus_w \Omega_{wh}^p$  for the multigerms of  $p$ -forms at the orbit  $Wh$ . We have a natural isomorphism of vector bundles over  $W \setminus H_{\text{reg}}$

$$(3.4) \quad \Omega_{Wh}^p \xrightarrow{\cong} (\Omega_{Wh}^p \otimes \mathbb{C}[W])^W$$

given by  $\omega \mapsto \sum w\omega \otimes w$ . By the previous proposition the KZ-connection descends to a connection on the vector bundle  $(\Omega_{Wh}^p \otimes \mathbb{C}[W])^W$ , and via the isomorphism (3.4) transfers into a connection

$$(3.5) \quad d(\lambda, k) : \Omega_{Wh}^p \rightarrow \Omega_{Wh}^{p+1}.$$

Using the explicit formula for  $\nabla(\lambda, k)$  and the isomorphism (3.4) one has

$$d(\lambda, k) = d - d\lambda + \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} k_\alpha \left( \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} d\alpha \otimes (1 - s_\alpha) - d\alpha \otimes s_\alpha \right)$$

or equivalently

$$(3.6) \quad d(\lambda, k) = d - d(\lambda + \rho(k)) + \sum_{\alpha > 0} k_\alpha (1 - e^{-\alpha})^{-1} d\alpha \otimes (1 - s_\alpha).$$

**CONCLUSION 3.3.**— *Fix  $h \in H_{\text{reg}}$  and let  $v(\xi)$  for  $\xi \in \mathfrak{h}$  be the unique  $W$ -invariant vector field around  $Wh$  which is equal to  $\partial(\xi)$  around  $h$ . Then the covariant derivative  $d_{v(\xi)}(\lambda, k) \in \text{End}(\mathcal{O}_{Wh})$  of the connection (3.5) along  $v(\xi)$  (in a local coordinate around  $Wh \in W \setminus H_{\text{reg}}$  coming from a local coordinate around  $h$ ) is given by*

$$(3.7) \quad d_{v(\xi)}(\lambda, k) = T(\xi, k) - \lambda(\xi)$$

with  $T(\xi, k)$  the Dunkl operator of Definition 1.1.

**COROLLARY 3.4.**— *The KZ-connection is integrable.*

**Proof:** The formula for the curvature  $R(\lambda, k)$  of  $d(\lambda, k)$  is given by (cf [De, Chapter I, §2])

$$R(\lambda, k)(v(\xi), v(\eta)) = [d_{v(\xi)}(\lambda, k), d_{v(\eta)}(\lambda, k)] - d_{[v(\xi), v(\eta)]}(\lambda, k)$$

and therefore  $R(\lambda, k) = 0$  by Theorem 1.2. □

**REMARK 3.5.**— The proof of Matsuo [Mat] of the integrability of the KZ-connection proceeds in a similar way as the “first proof” of Theorem 1.2. Another proof of the integrability (by a more elegant calculation) has been given by Looijenga [Lo], whereas

Opdam [O5] derives the integrability from the integrability of the hypergeometric system (2.4).

#### 4. HYPERGEOMETRIC SHIFT OPERATORS

In the degenerate Hecke algebra  $\mathbb{H}(R_+, k)$  of Definition 1.4 we denote by

$$(4.1) \quad J = \sum_w S\mathfrak{h} \otimes (1 - w)$$

the left ideal in  $\mathbb{H}(R_+, k)$  generated by the elements  $1 \otimes (1 - w) \in 1 \otimes \mathbb{C}[W]$  for all  $w \in W$ . For a left module  $V$  for  $\mathbb{H}(R_+, k)$  the subspace  $V^W = \{v \in V; w(v) = v \forall w\}$  is called the space of spherical vectors in  $V$ . Clearly  $h_1 \equiv h_2 \pmod{J}$  for  $h_1, h_2 \in \mathbb{H}(R_+, k)$  implies  $h_1(v) = h_2(v) \forall v \in V^W, \forall V$ .

**PROPOSITION 4.1.**— *If we write*

$$(4.2) \quad \pi(k) = \prod_{\alpha \in R_+^0} (\alpha^\vee + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha} + k_\alpha) \in S\mathfrak{h} \subset \mathbb{H}(R_+, k)$$

then we have in  $\mathbb{H}(R_+, k)$  the relation

$$(4.3) \quad w \cdot \pi(k) \equiv \varepsilon(w)\pi(k) \pmod{J} \quad \forall w \in W.$$

Here  $\varepsilon : W \rightarrow \{\pm 1\}$  is the sign character.

**Proof:** Writing  $\pi(k) = (\alpha_i^\vee + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha_i} + k_{\alpha_i})\pi_i(k)$  with  $\pi_i(k) \in S\mathfrak{h}$  invariant under  $s_i$ , relation (4.3) follows from Proposition 1.5(2).  $\square$

Let  $\Delta \in \mathbb{C}[H]$  denote the Weyl denominator

$$(4.4) \quad \Delta = \prod_{\alpha \in R_+^0} (e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha})$$

which transforms under  $W$  according to the sign character  $\varepsilon$ . It is well known that every element of  $\mathbb{C}[H]$  transforming under  $W$  by  $\varepsilon$  is of the form  $\Delta f$  with  $f \in \mathbb{C}[H]^W$ . Now we write as in (2.1)

$$(4.5) \quad T(\pi(k), k) = \sum_w D(w, \pi(k), k) \otimes w$$

with  $D(w, \pi(k), k) \in \mathbb{D}[H_{\text{reg}}]$ .

**DEFINITION 4.2.**— *The fundamental shift operators  $G_+(k)$ ,  $G_-(k+1) \in \mathbb{D}[H_{\text{reg}}]$  are defined by*

$$(4.6) \quad G_+(k) = \sum_w \Delta^{-1} D(w, \pi(k), k)$$

$$(4.7) \quad G_-(k+1) = |W|^{-1} \sum_{w,v} \varepsilon(w)v(D(w, \pi(k), k)\Delta).$$

Here  $1 \in K$  is the multiplicity parameter defined by  $1_\alpha = 1$  if  $\alpha \in R^0$  and  $1_\alpha = 0$  if  $\alpha \in R \setminus R^0$ .

It is clear that for  $f \in \mathbb{C}[H]^W$  we have

$$(4.8) \quad G_+(k)f = \Delta^{-1} T(\pi(k), k)f$$

$$(4.9) \quad G_-(k+1)f = |W|^{-1} \sum_v vT(\pi(k), k)\Delta f.$$

From the results of Section 1 and Proposition 4.1 it follows that both  $G_+(k)$  and  $G_-(k+1)$  preserve the space  $\mathbb{C}[H]^W$ . In particular it follows that  $G_+(k), G_-(k+1) \in \mathbb{D}[H_{\text{reg}}]^W$ . Finally from (1.6) it is easy to see that (for  $k_\alpha \geq 0 \forall \alpha$ )

$$(4.10) \quad (G_+(k)f, g)_{k+1} = (f, G_-(k+1)g)_k$$

for all  $f, g \in \mathbb{C}[H]^W$ .

For  $\mu \in P_+$  let  $m_\mu \in \mathbb{C}[H]^W$  be the orbit sum defined by

$$(4.11) \quad m_\mu = \sum_{\nu \in W\mu} e^\nu.$$

Since  $P_+$  is a strict fundamental domain for the action of  $W$  on  $P$  the  $m_\mu$  for  $\mu \in P_+$  are a basis of  $\mathbb{C}[H]^W$ .

**DEFINITION 4.3.**— *For  $k_\alpha \geq 0 \forall \alpha$  let  $P(\mu, k)$  for  $\mu \in P_+$  be the basis of  $\mathbb{C}[H]^W$  characterized by*

$$(1) \quad P(\mu, k) = m_\mu + \dots$$

$$(2) \quad (P(\mu, k), m_\nu)_k = 0 \quad \forall \nu \in P_+ \text{ with } \nu < \mu.$$

Here the dots represent lower order terms  $\sum a_{\mu\nu} m_\nu$  (sum over  $\nu \in P_+$  with  $\nu < \mu$ ). The  $P(\mu, k)$  are called the Jacobi polynomials associated with  $R$ .

Now consider the action of the degenerate Hecke algebra  $\mathbb{H}(R_+, k)$  on  $\mathbb{C}[H]$  via Dunkl operators and the usual action of  $W$ . It is easy to see that for  $\mu \in P_+$  (in the notation of the proof of Theorem 1.2)

$$(4.12) \quad \text{span}\{E(\nu, k); \nu \in W\mu\}$$

is an (in fact irreducible) module for  $\mathbb{H}(R_+, k)$  with central character equal to  $\mu + \rho(k)$ . The Jacobi polynomial  $P(\mu, k)$  is the suitably normalized (namely by asymptotics) spherical vector in this module. Therefore it satisfies the hypergeometric system

$$(4.13) \quad D(p, k)P(\mu, k) = p(\mu + \rho(k))P(\mu, k) \quad \forall p \in S\mathfrak{h}^W.$$

Using (4.10) and arguing as in the proof of Theorem 1.2 one easily obtains the following result.

**PROPOSITION 4.4.**— *There exist polynomials  $\eta_+$  and  $\eta_-$  on  $\mathfrak{h}^* \times K$  such that*

$$(4.14) \quad G_+(k)P(\mu, k) = \eta_+(\mu + \rho(k), k)P(\mu - \rho(1), k + 1)$$

$$(4.15) \quad G_-(k)P(\mu, k) = \eta_-(\mu + \rho(k), k)P(\mu + \rho(1), k - 1)$$

for all  $\mu \in P_+$ .

**PROPOSITION 4.5.**— *We have (with  $N = \#R_+^0$ )*

$$(4.16) \quad \eta_+(\lambda, k) = \pi(\lambda, -k) = (-1)^N \tilde{c}(-\lambda, k) / \tilde{c}(-\lambda, k + 1)$$

$$(4.17) \quad \eta_-(\lambda, k) = \pi(\lambda, k - 1) = \tilde{c}(\lambda, k - 1) / \tilde{c}(\lambda, k).$$

**Proof:** Indeed we have for  $\mu \in P_+$

$$\begin{aligned} G_+(k)P(\mu, k) &= \Delta^{-1}T(\pi(k), k)m_\mu + \dots \\ &= \Delta^{-1}T(\pi(k), k)e^{w_0\mu} + \dots \\ &= (-1)^N \pi(\widetilde{w_0\mu}, k)e^{w_0\mu + \rho(1)} + \dots \\ &= \pi(-\widetilde{w_0\mu}, -k)P(\mu - \rho(1), k + 1) + \dots \end{aligned}$$

using Remark 1.3 and the equality  $\Delta = (-1)^N e^{-\rho(1)} \prod_{\alpha \in R_+^0} (1 - e^\alpha)$ . Since  $\widetilde{w_0\mu} = w_0(\mu + \rho(k))$  and  $\pi(-w_0\lambda, k) = \pi(\lambda, k)$  relation (4.16) follows. Indeed  $\pi(\lambda, k) = \tilde{c}(\lambda, k) / \tilde{c}(\lambda, k + 1)$  is just a trivial identity by the functional equation  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  and the duplication formula  $\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})$ .

For computing  $\eta_-(\lambda, k)$  one first observes (say for  $\mu$  regular)

$$G_-(k + 1)P(\mu, k + 1) = \sum_v vT(\pi(k), k)\Delta E(\mu, k + 1)$$

using (4.8), (4.10) and  $P(\mu, k + 1) = \sum_v vE(\mu, k + 1)$ . Then a similar computation ( $\Delta E(\mu, k + 1) = E(\mu + \rho(1), k) + \dots$ ) yields (4.17). □

**COROLLARY 4.6.**— For  $\mu \in P_+$  and  $k \in K$  with  $(k - 1)_\alpha \geq 0 \forall \alpha$  we have (with  $\lambda = \mu + \rho(k)$ )

$$(4.18) \quad \frac{(P(\mu, k), P(\mu, k))_k}{(P(\mu + \rho(1), k - 1), P(\mu + \rho(1), k - 1))_{k-1}} = (-1)^N \frac{\tilde{c}(\lambda, k - 1)\tilde{c}(-\lambda, k)}{\tilde{c}(\lambda, k)\tilde{c}(-\lambda, k - 1)}.$$

**Proof:** Just use (4.10) with  $k$  replaced by  $k - 1$ , and substitute  $f = P(\mu + \rho(1), k - 1)$  and  $g = P(\mu, k)$ . □

Let  $L \subset K$  be the lattice

$$(4.19) \quad L = \{k \in K; k_\alpha \in \mathbb{Z} \wedge k_{\frac{1}{2}\alpha} \in 2\mathbb{Z} \forall \alpha \in R^0\}.$$

Now the theory of shift operators can be generalized, and shifts over arbitrary  $l \in L$  can be established. The outcome is that formula (4.18) holds equally well with  $k - 1$  replaced by  $k - l$  and  $N$  by  $\sum_{\alpha > 0} l_\alpha$ . This enables one to compute the norm

$(P(\mu, k), P(\mu, k))_k$  inductively, and the final result takes the following form.

**THEOREM 4.7.**— For  $\mu \in P_+$  and  $k \in K$  with  $k_\alpha \geq 0 \forall \alpha$  we have (with  $\lambda = \mu + \rho(k)$  and  $(\cdot, \cdot)_k$  given by (1.5))

$$(4.20) \quad (P(\mu, k), P(\mu, k))_k = \frac{c^*(-\lambda, k)}{\tilde{c}(\lambda, k)},$$

with  $\tilde{c}(\lambda, k)$  given by (2.19) and  $c^*(\lambda, k)$  by

$$(4.21) \quad c^*(\lambda, k) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\Gamma(-\lambda(\alpha^\vee) - \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha} - k_\alpha + 1)}{\Gamma(-\lambda(\alpha^\vee) - \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha} + 1)}.$$

**REMARK 4.8.**— Shift operators were introduced by Opdam [O1, O2], and their application to the norm computation of the Jacobi polynomials is also due to him [O3]. The particular case of (4.20) with  $\mu = 0$  is the constant term conjecture of Macdonald [Ma], but the only known proof of this conjecture (which works in a uniform way for all root systems) is the one that proves (4.20) at the same time. A complete proof of Theorem 4.7 along the above lines is given in [HS, Part I, Section 3]. A somewhat different proof can be found in [O5].

## 5. HARMONIC ANALYSIS ON A

We shall think of  $A$  as a linear space via the isomorphism  $\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A$  (with  $\log$  as its inverse). Let  $da$  denote the Haar measure on  $A$  normalized by requiring  $A/\exp(Q^\vee)$  to have volume 1. In this section we want to study the *hypergeometric Fourier transform*  $\mathfrak{F}$  defined by

$$(5.1) \quad \mathfrak{F}f(\lambda) = |W|^{-1} \int_A f(a) \tilde{F}(-\lambda, k; a) \delta(k; a) da$$

for  $f$  a suitable function on  $A$  invariant under  $W$ , and the weight function  $\delta(k; \cdot)$  on  $A$  given by

$$(5.2) \quad \delta(k; \cdot) = \prod_{\alpha > 0} \left| e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha} \right|^{2k_\alpha}.$$

The hypergeometric Fourier transform reduces for  $k = 0$  to the Euclidean Fourier transform  $f \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int f(a) a^{-\lambda} da$ , and for particular values of  $k$  (as in Remark 2.3) to the spherical Fourier transform of Harish-Chandra (up to a factor  $\tilde{c}(\rho(k), k)$ ). The line of arguments will be similar to the one in the context of semisimple groups [Hel, BS, MW], but particular adaptations to the present situation are sometimes necessary [O5, HO2, O6]. Analogous arguments work in the setting of harmonic analysis for the affine Hecke algebras [HO3].

It is clear that  $\tilde{c}(\rho(k), k) > 0$  for all  $k \in K$  with  $k_\alpha \geq 0 \forall \alpha$ . Let  $K_+$  be the connected component of  $\{k \in K; k_\alpha \in \mathbb{R} \forall \alpha, \tilde{c}(\rho(k), k) \neq 0\}$  containing  $\{k \in K; k_\alpha \geq 0 \forall \alpha\}$ .

**PROPOSITION 5.1.**— *For real  $k \in K$  the condition  $k \in K_+$  is equivalent to  $\delta(k; \cdot)$  being locally integrable on  $A$ .*

**Proof:** It is easy to compute  $\tilde{c}(\rho(k), k)$  for each of the irreducible root systems case by case. For  $R$  reduced and  $k_\alpha = k \forall \alpha$  one has

$$\tilde{c}(\rho(k), k) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(d_i k)}$$

with  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  the primitive degrees of  $R$ . For  $R$  of type  $BC_n$  with  $k_s, k_m, k_\ell$  the multiplicities of the short, medium and long roots respectively one gets

$$\tilde{c}(\rho(k), k) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_s + (i-1)k_m + k_\ell)}{\Gamma(2k_s + (i-1)k_m + k_\ell)} \cdot \frac{\Gamma(k_m)}{\Gamma(ik_m)}.$$

For  $R$  of type  $F_4$  one finds

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\rho(k), k) &= \frac{\Gamma(k_s)}{\Gamma(2k_s)} \cdot \frac{\Gamma(k_s)}{\Gamma(3k_s)} \cdot \frac{\Gamma(k_\ell)}{\Gamma(2k_\ell)} \cdot \frac{\Gamma(k_\ell)}{\Gamma(3k_\ell)} \times \\ &\quad \frac{\Gamma(k_s + k_\ell)}{\Gamma(4(k_s + k_\ell))} \cdot \frac{\Gamma(3(k_s + k_\ell))}{\Gamma(6(k_s + k_\ell))} \cdot \frac{\Gamma(2k_s + k_\ell)}{\Gamma(2(2k_s + k_\ell))} \cdot \frac{\Gamma(k_s + 2k_\ell)}{\Gamma(2(k_s + 2k_\ell))} \end{aligned}$$

and for  $R$  of type  $G_2$  the outcome is

$$\tilde{c}(\rho(k), k) = \frac{\Gamma(k_s)}{\Gamma(2k_s)} \cdot \frac{\Gamma(k_\ell)}{\Gamma(2k_\ell)} \cdot \frac{\Gamma(k_s + k_\ell)}{\Gamma(3(k_s + k_\ell))}.$$

With these explicit formulas it is easy to check the proposition case by case (see [BHO, Section 2]).  $\square$

Assume from now on that  $k \in K_+$ . For  $f \in C_c^\infty(A)^W$  the Fourier transform  $\mathfrak{F}f$  is well defined and entire on  $\mathfrak{h}^*$  (by Theorem 2.8).

**DEFINITION 5.2.**— Given  $a \in A$  let  $C_a$  denote the convex hull of  $Wa$ , and let the support function  $H_a$  on  $\mathfrak{a}^*$  be given by  $H_a(\lambda) = \sup\{\lambda(\log b); b \in C_a\}$ . An entire function  $F$  on  $\mathfrak{h}^*$  is said to have Paley-Wiener type  $a$  if  $\forall N \in \mathbb{N} \exists C > 0$  such that

$$|F(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|)^{-N} e^{H_a(-\operatorname{Re}(\lambda))} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

(so  $F$  is rapidly decreasing on subspaces of the form  $\lambda_0 + i\mathfrak{a}^*$  for  $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*$ ). The space of functions on  $\mathfrak{h}^*$  of Paley-Wiener type  $a$  is denoted by  $PW(a)$ , and we also write  $PW = \cup_{a \in A} PW(a)$ .

The first step is to obtain uniform (both in  $\lambda$  and  $a$ ) estimates for  $\tilde{F}(\lambda, k; a)$  of the following form. Given  $D \subset A$  compact and  $p \in S\mathfrak{h}$  then  $\exists C > 0, N \in \mathbb{N}$  such that

$$(5.3) \quad |\partial(p)\tilde{F}(\lambda, k; a)| \leq C(1 + |\lambda|)^N e^{\max\{\operatorname{Re}[w\lambda(\log a)]; w \in W\}}$$

for all  $\lambda \in \mathfrak{h}^*, a \in D$ . Such an estimate was derived in [O5, Section 6] using the  $KZ$ -connection in case  $k_\alpha \geq 0 \forall \alpha$ . The extension of (5.7) to  $K_+$  (and even all of  $K$ ) follows with the help of hypergeometric shift operators [O6, Theorem 2.5]. Using (5.3) the following result can be obtained [O6, Theorem 4.1].

**THEOREM 5.3.**— If  $f \in C_c^\infty(A)^W$  has support in  $C_a$  for some  $a \in A$  then  $\mathfrak{F}f \in PW(a)$ .

For technical reasons we have to impose the following additional restrictions on  $k \in K_+$ :

$$(5.4) \quad k_\alpha^0 = \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha} + k_\alpha > -\frac{1}{2} \wedge k_{\frac{1}{2}\alpha} \in 2\mathbb{N} \text{ if } \frac{1}{2}\alpha, \alpha \in R.$$

So for  $R$  reduced this condition is vacuous. As a candidate for inversion introduce the *wave packet operator*  $\mathfrak{J}$  on  $PW$  by

$$(5.5) \quad \mathfrak{J}F(a) = \int_{\lambda_0 + i\mathfrak{a}^*} F(\lambda)\Phi(\lambda, k; a) \frac{d\mu(\lambda)}{\tilde{c}(-\lambda, k)}.$$

Here  $a \in A_+$ . For all  $\varepsilon > 0$  and  $a_0 \in A_+$  the series  $\Phi(\lambda, k; a)$  converges uniformly for  $\text{Re}\lambda(\alpha^\vee) < 1 - \varepsilon \forall \alpha > 0$  and  $a \in a_0A_+$ , as shown by Gangolli. Moreover  $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*$  satisfies  $\lambda_0(\alpha^\vee) < \min(1, \frac{1}{2}(k_{\frac{1}{2}\alpha} + 1), k_\alpha^0) \forall \alpha \in R_+^0$ . Finally  $d\mu(\lambda)$  denotes Lebesgue measure on  $i\mathfrak{a}^*$  (or its translates  $\lambda_0 + i\mathfrak{a}^*$ ) normalized such that  $i\mathfrak{a}^*/2\pi iP$  has volume 1 (this normalization is called the regular normalization for our choice of Haar measure  $da$  on  $A$ ). Using the duplication formula one can rewrite (2.19) as

$$(5.6) \quad \tilde{c}(\lambda, k) = \prod_{\alpha \in R_+^0} \frac{2^{-k_{\frac{1}{2}\alpha}} \Gamma(\lambda(\alpha^\vee)) \Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2}(k_{\frac{1}{2}\alpha} + 1)) \Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + k_\alpha^0)}.$$

Hence it follows from our restriction on  $\lambda_0$  and the Cauchy integral formula that the integral (5.5) is independent of  $\lambda_0$ .

The next step is to rewrite (5.5) in a different form. Under the hypothesis

$$(5.7) \quad k_\alpha^0 \geq 0 \forall \alpha \in R^0$$

one can directly take  $\lambda_0 = 0$  in (5.5) and get for  $F \in PW^W$

$$(5.8) \quad \mathfrak{J}F(a) = |W|^{-1} \int_{i\mathfrak{a}^*} F(\lambda)\tilde{F}(\lambda, k; a) \frac{d\mu(\lambda)}{\tilde{c}(\lambda, k)\tilde{c}(-\lambda, k)}.$$

Then one can proceed as in [O5, Section 8 and 9] to prove the Paley-Wiener theorem, the inversion formula and the Plancherel theorem for the hypergeometric Fourier transform.

If (5.7) is not valid one still moves  $\lambda_0$  back to 0 at the cost of picking up residues caused by the factor  $\tilde{c}(-\lambda, k)^{-1}$  in (5.5). To understand what happens write

$$(5.9) \quad \tilde{c}(\lambda, k) = \prod_{\alpha \in R_+^0} \frac{\lambda(\alpha^\vee) + k_\alpha^0}{\lambda(\alpha^\vee)} \prod_{\alpha \in R_+^0} \frac{2^{-k_{\frac{1}{2}\alpha}} \Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + 1) \Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2}(k_{\frac{1}{2}\alpha} + 1)) \Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + k_\alpha^0 + 1)}.$$

Because of our restrictions  $k \in K_+$  and (5.4) it so happens that the entire residue calculation is determined by the first factor in the right hand side of (5.9). This factor is the  $c$ -function for the Yang particle system which was studied in [HO2]. In order to state the result we need a definition.

**DEFINITION 5.4.**— For  $L \subset \mathfrak{a}^*$  an affine subspace put  $R_L^0 = \{\alpha \in R^0; L(\alpha^\vee) = \text{constant}\}$ . The property of  $L$  being residual is defined by induction on the codimension of  $L$ . By definition  $\mathfrak{a}^*$  itself is residual. An affine subspace  $L$  of  $\mathfrak{a}^*$  of positive codimension is called residual if there exists a residual subspace  $M$  of  $\mathfrak{a}^*$  with  $L \subset M$  and  $\dim M = \dim L + 1$  such that

$$(5.10) \quad \#\{\alpha \in R_L^0 \setminus R_M^0; L(\alpha^\vee) = k_\alpha^0\} \geq \#\{\alpha \in R_L^0 \setminus R_M^0; L(\alpha^\vee) = 0\} + 1.$$

A residual point is also called a distinguished point. Being residual or distinguished is a notion invariant under  $W$ . For  $L$  residual let  $c_L$  be the point of  $L$  closest to the origin, and put

$$(5.11) \quad L_{\text{temp}} = c_L + i(L - c_L) \subset \mathfrak{h}^*$$

for the tempered form of  $L$ .

It is easy to see that  $L$  is residual (for  $R^0$ ) if and only if  $c_L$  is distinguished (for  $R_L^0$ ). So the classification of residual subspaces reduces to the classification of distinguished points (for  $R^0$  and all its parabolic subsystems), and this was carried out in [HO2, Section 4]. It is easy to see that this classification is invariant under scaling  $k \mapsto xk$  for  $x \in (0, 1]$ . In case  $k_\alpha^0 = k_\beta^0 \forall \alpha, \beta \in R^0$  the classification of  $W$ -orbits of distinguished points is equivalent to the classification of distinguished nilpotent orbits (in the Bala-Carter classification [Ca, Chapter 5]) in a semisimple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  with root system dual to  $R^0$ . We can now formulate the analogue of (5.8) in case

$$(5.12) \quad k_\alpha^0 < 0 \forall \alpha \in R^0.$$

This restriction is necessary because [HO2] is restricted to this situation, but hopefully the method can be generalized to the case  $k \in K_+$  (i.e. with some multiplicity parameters positive and others negative).

**THEOREM 5.5.**— If  $k \in K_+$  satisfies (5.4) and (5.12) then for  $F \in PW^W$  we can write

$$(5.13) \quad \mathfrak{I}F(a) = \sum_L \int_{L_{\text{temp}}} F(\lambda) \tilde{F}(\lambda, k; a) \gamma_L(k) \frac{\prod'_L |\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha})|}{\prod'_L |\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}\alpha} + k_\alpha)|} d\mu_L(\lambda)$$

with the sum over all residual subspaces of  $\mathfrak{a}^*$ . Here  $\mu_L$  is the Lebesgue measure on  $L_{\text{temp}}$  normalized such that the volume of  $i(L - c_L)/2\pi i(P \cap (L - c_L))$  is equal to 1. The expression  $\Pi'_L$  means that in the product over all roots  $\alpha \in R$  those  $\Gamma$ -factors are deleted whose arguments vanish identically on  $L$ . The number  $\gamma_L(k)$  is nonnegative and rational satisfying  $\gamma_{wL}(xk) = \gamma_L(k)$  for all  $w \in W$ ,  $x \in (0, 1]$ . Moreover  $\gamma_{\mathfrak{a}^*} = |W|^{-1}$  and for  $\lambda$  a regular distinguished point with  $\{\beta_i\} \subset R^0$  the  $n$  roots for which  $\lambda(\beta_i^\vee) - k_{\beta_i} = 0$  one has  $\gamma_\lambda(k) = |W|^{-1} \cdot [Q^\vee : \Sigma \mathbb{Z}\beta_i^\vee]^{-1}$  if  $\lambda$  is a negative combination of the roots  $\beta_i$ , and  $\gamma_\lambda(k) = 0$  otherwise.

**REMARK 5.6.**— By induction on the rank the calculation of  $\gamma_L(k)$  reduces to the case that  $L$  is a distinguished point  $\lambda$ . For subregular  $\lambda$  the calculation is still manageable (but already cumbersome). For general  $\lambda$  the computation of  $\gamma_\lambda(k)$  is hard and captures the full complexity of the residue calculation. From this perspective it is equally hard to decide whether  $\gamma_\lambda(k) > 0$  or  $\gamma_\lambda(k) = 0$ . However in case  $k_\alpha^0 = k_\beta^0 \forall \alpha, \beta \in R^0$  it can be deduced from the work of Kazhdan and Lusztig [KL] (as in [HO2]) that  $\gamma_\lambda(k) > 0$  always. The example below shows that this need no longer be true in the multiparameter setting (see [HO2, Section 2] for a conjectural explanation).

With the formulas (5.8) and (5.13) at hand one can proceed as in [O6] to prove the Paley-Wiener theorem for the hypergeometric Fourier transform.

**THEOREM 5.7.**— *The hypergeometric Fourier transform  $\mathfrak{F}$  is a bijection from  $C_c^\infty(A)^W$  onto  $PW^W$  with inverse equal to the wave packet operator  $\mathfrak{J}$ .*

For a further discussion of the Plancherel theorem see [O6]. The distinguished points  $\lambda$  with  $\gamma_\lambda(k) > 0$  are exactly those  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  for which  $\tilde{F}(\lambda, k; \cdot) \in L^2(A, \delta(k; a)da)^W$ . In the spirit of Harish-Chandra one might call these hypergeometric functions *cuspidal*.

**EXAMPLE 5.8.**— Let  $R$  be of type  $G_2$  with simple roots  $\alpha_s, \alpha_\ell$  (short and long respectively) and fundamental weights  $\omega_s, \omega_\ell$  with  $\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$  for  $i, j \in \{s, \ell\}$ . The restrictions  $k \in K_+$  and (5.12) amount to  $k_s < 0$ ,  $k_\ell < 0$  and  $k_s + k_\ell > -\frac{1}{3}$ . Generically there are 3 (regular) distinguished points given by

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= k_s \omega_s + k_\ell \omega_\ell = \rho(k) \\ \lambda_2 &= k_s \omega_s + \frac{1}{2}(k_\ell - k_s) \omega_\ell \\ \lambda_3 &= k_s \omega_s + (k_\ell - k_s) \omega_\ell\end{aligned}$$

One can check that under the above conditions on  $k$  the points  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are always cuspidal, whereas  $\lambda_3$  is cuspidal for either  $\frac{2}{3}k_s < k_\ell < \frac{1}{2}k_s$  or  $k_s = k_\ell$  (in which case

$\lambda_3 = \lambda_2$ ). For  $R$  of type  $F_4$  a similar (but more complicated) pattern arises [HO2]. One might wonder where to look for the geometry behind all this?

## 6. FINAL REMARKS

A good portion of the results discussed so far admits a deformation with a parameter  $q$ . This originated with the  $q$ -constant term conjectures of Macdonald [Ma1]. Shortly after the introduction of the Jacobi polynomials  $P(\mu, k)$  and the computation of their norms [He1, O3] Macdonald introduced his orthogonal polynomials  $P(\mu, q, t)$  with  $0 < q < t < 1$  being independent parameters [Ma2]. One has (say  $R$  reduced and  $k_\alpha = k \forall \alpha$ )  $\lim_{q \uparrow 1} P(\mu, q, q^k) = P(\mu, k)$  and one can think of the Macdonald polynomials as multivariable analogues of the basic hypergeometric polynomials of Askey, Ismail and Wilson [GR].

It was an exciting discovery of Cherednik to see how to construct the appropriate  $q$ -analogues of the Dunkl operators using representation theory of affine and double Hecke algebras [Ch3, Ch4, Ma3, Ma5]. As an application of the theory one gets the evaluation of the norm of the Macdonald polynomials as an explicit product of  $q$ -shifted factorials. This deformation by  $q$  is not merely another generalization for its own sake. It is a beautiful fact (due to Koornwinder for type  $A_n$  [Ma4], conjectured in precise terms by Macdonald and then proved by Cherednik [Ch4]) that the Fourier analysis on  $T$  is selfdual in the sense that the spectral parameter and the variable in the (suitably normalized) Macdonald polynomials play a symmetric role. This symmetry is destroyed in the classical limit  $q \uparrow 1$ .

The extension with a parameter  $q$  has also a meaning in physical terms. As shown by Ruijsenaars it can be interpreted as the relativistic variation of the quantum Calogero-Moser system [Ru].

## REFERENCES

- [BS] E.P. van den Ban and H. Schlichtkrull, *The most continuous part of the Plancherel decomposition for a reductive symmetric space*, Ann. Math. (to appear).
- [BHO] R. Brussee, G.J. Heckman and E.M. Opdam, *Variation on a theme of Macdonald*, Math Z. **208** (1991), 1-10.
- [Ca] R.W. Carter, *Finite groups of Lie type*, Wiley, New York, 1985.
- [Ch1] I. Cherednik, *A unification of Knizhnik-Zamolodchikov equations and Dunkl operators via affine Hecke algebras*, Invent. Math. **106** (1991), 411-432.

- [Ch2] I. Cherednik, *Integration of quantum many body problems by affine Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Adv. in Math. **106** (1994), 65-95.
- [Ch3] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Ann. Math. **141** (1995), 191-216.
- [Ch4] I. Cherednik, *Macdonald's evaluation conjectures and difference Fourier transform*, Invent. Math. **122** (1995), 119-145.
- [De] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes Math. **163**, 1970.
- [Dr] V.G. Drinfeld, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 58-60.
- [Du1] C.F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 167-183.
- [Du2] C.F. Dunkl, *Hankl transforms associated to finite reflection groups*, Contemp. Math. **138** (1992), 123-138.
- [GR] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [He1] G.J. Heckman, *Root systems and hypergeometric functions II*, Comp. Math. **64** (1987), 353-373.
- [He2] G.J. Heckman, *An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam*, Invent. Math. **103** (1991), 341-350.
- [HO1] G.J. Heckman and E.M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329-352.
- [HO2] G.J. Heckman and E.M. Opdam, *Yang's system of particles and Hecke algebras*, Ann. Math. **145** (1997), 139-173.
- [HO3] G.J. Heckman and E.M. Opdam, *Harmonic analysis for affine Hecke algebras*, Current Developments in Mathematics, 1996, Intern. Press, Boston.
- [HS] G.J. Heckman and H. Schlichtkrull, *Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces*, Persp. in Math. **16**, Acad. Press, 1994.
- [Hel] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Acad. Press, New York, 1984.
- [J] M.F.E. de Jeu, *The Dunkl transform*, Invent. Math. **113** (1993), 147-162.
- [KL] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. **87** (1987), 153-215.
- [Lo] E. Looijenga, *Arrangements, KZ systems and Lie algebra homology*, Comm. Math. Inst. Utrecht Univ. **18** (1994), 105-124.
- [Lu] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 599-695.
- [Ma1] I.G. Macdonald, *Some conjectures for root systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 988-1007.

- [Ma2] I.G. Macdonald, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, preprint (1988).
- [Ma3] I.G. Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Sémin. Bourbaki no 797, 1995.
- [Ma4] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, 1995.
- [Ma5] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials* (Postscript), preprint (1996).
- [Mat] A. Matsuo, *Integrable connections related to zonal spherical functions*, Invent. Math. **110** (1992), 95-121.
- [MW] C. Moeglin and J.L. Waldspurger, *Décomposition Spectrale et Séries d'Eisenstein*, Prog. in Math. **113**, Birkhäuser, 1994.
- [Mo] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformation*, Adv. in Math. **16** (1975), 197-220.
- [OP] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras*, Invent. Math. **37** (1976), 93-108.
- [O1] E.M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions III*, Comp. Math. **67** (1988), 21-49.
- [O2] E.M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions IV*, Comp. Math. **67** (1988), 191-209.
- [O3] E.M. Opdam, *Some applications of hypergeometric shift operators*, Invent. Math. **98** (1989), 1-18.
- [O4] E.M. Opdam, *An analogue of the Gauss summation formula for hypergeometric functions related to root systems*, Math. Z. **212** (1993), 313-336.
- [O5] E.M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175** (1995), 75-121.
- [O6] E.M. Opdam, *Cuspidal hypergeometric functions*, preprint (1996).
- [Ru] S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 191-213.

G.J. HECKMAN

Department of Mathematics  
University of Nijmegen  
P.O. Box 9010  
6500 GL NIJMEGEN, The Netherlands  
E-mail: heckman@sci.kun.nl

# *Astérisque*

ALAIN VALETTE

## **Graphes de Ramanujan et applications**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 829, p. 247-276

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_247\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__247_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## GRAPHES DE RAMANUJAN ET APPLICATIONS

par Alain VALETTE

### INTRODUCTION

Le thème principal de cet exposé est la construction de familles infinies de graphes de Ramanujan, c'est-à-dire des graphes finis, connexes, réguliers de valence fixée, et dont les valeurs propres non triviales sont petites, en un sens optimal qui sera rendu précis dans la section 1. De tels graphes ont une grande constante isopérimétrique (ou constante d'expansion), ce qui les rend intéressants pour les applications en théorie des circuits.

Dans la section 2, nous passons en revue les constructions connues de familles de graphes de Ramanujan, toutes de nature arithmétique (ce que la terminologie est censée rappeler); il importe cependant de souligner qu'au delà de l'arithmétique, les constructions dépendent de résultats de géométrie algébrique, et spécialement de la preuve par Weil [75] de l'hypothèse de Riemann pour les courbes algébriques sur un corps fini.

Les graphes de Ramanujan possèdent une série de propriétés extrémales qui les rend particulièrement intéressants du point de vue de la théorie des graphes. Nous en présentons quelques-unes à la section 3. En particulier, les graphes décrits indépendamment par Lubotzky-Phillips-Sarnak [44] et Margulis [47] fournissent des exemples où le tour de taille est grand par rapport au (logarithme du) nombre de sommets; et ce sont les meilleures réponses connues à cette question.

Enfin, à la section 4, nous présentons une série d'applications récentes des graphes de Ramanujan dans d'autres domaines des mathématiques.

## 1 VALEURS PROPRES DE GRAPHES

### 1.1 Graphes

Nous adoptons l'approche de Serre ([65], §2.1; [66], §8).

**Définition 1** *Un graphe  $X$  est formé de deux ensembles, l'ensemble  $X^0$  des sommets et l'ensemble  $X^1$  des arêtes, de l'application "origine"  $o : X^1 \rightarrow X^0 : y \mapsto o(y)$ , et de l'application "inverse"  $X^1 \rightarrow X^1 : y \mapsto \bar{y}$ , qui est une involution sans point fixe. On définit l'extrémité de l'arête  $y$  par  $t(y) = o(\bar{y})$ . Deux sommets  $x, x'$  sont adjacents s'il*

existe une arête  $y$  avec  $o(y) = x$  et  $t(y) = x'$ . On dit que  $X$  est régulier de valence  $k$  si tout sommet est l'origine d'exactly  $k$  arêtes. On dit que  $X$  est biparti si on peut trouver une partition de  $X^0$  en deux parties non vides  $A, B$  telles que toute arête  $y \in X^1$  ait son origine dans  $A$  et son extrémité dans  $B$ , ou l'inverse.

Il est commode de noter  $|X|$  le nombre de sommets du graphe  $X$ .

**Définition 2** Soit  $r$  un entier,  $r \geq 1$ ; un chemin de longueur  $r$  dans le graphe  $X$  est une suite  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$  d'arêtes  $y_i \in X^1$  telles que  $t(y_i) = o(y_{i+1})$  pour  $1 \leq i < r$ . L'origine de  $\mathbf{y}$  est  $o(\mathbf{y}) = o(y_1)$ , son extrémité est  $t(\mathbf{y}) = t(y_r)$ . Le chemin  $\mathbf{y}$  est sans aller-retour si  $y_{i+1} \neq \bar{y}_i$  pour  $1 \leq i < r$ . Le graphe est connexe si deux sommets quelconques sont les extrémités d'au moins un chemin. Si  $x, x'$  sont deux sommets distincts d'un graphe connexe, la distance  $d(x, x')$  de  $x$  à  $x'$  est le minimum des longueurs des chemins d'origine  $x$  et d'extrémité  $x'$ . Un circuit de longueur  $r$  dans un graphe est un chemin  $(y_1, \dots, y_r)$  de longueur  $r$  et sans aller-retour, tel que les  $t(y_i)$  ( $1 \leq i \leq r$ ) soient distincts, et  $t(y_r) = o(y_1)$ . Une boucle est un circuit de longueur 1. Un arbre est un graphe connexe sans circuit.

Notre principale source de graphes réguliers sera les graphes de Cayley.

**Définition 3** Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini, et soit  $S$  une partie génératrice finie de  $\Gamma$ , symétrique ( $S = S^{-1}$ ), et ne contenant pas l'élément neutre de  $\Gamma$ . Le graphe de Cayley  $X(\Gamma, S)$  est le graphe  $X$  avec pour ensemble de sommets  $X^0 = \Gamma$ , pour ensemble d'arêtes  $X^1 = \Gamma \times S$  et, pour  $\gamma \in \Gamma, s \in S$ ,

$$o(\gamma, s) = \gamma \text{ et } \overline{(\gamma, s)} = (\gamma s, s^{-1}).$$

La condition  $1 \notin S$  assure que  $y \neq \bar{y}$  pour tout  $y \in X^1$ ; l'hypothèse que  $S$  engendre  $\Gamma$  assure que  $X(\Gamma, S)$  est connexe. Si  $k = |S|$ , le graphe  $X(\Gamma, S)$  est régulier de valence  $k$ .

Une définition importante pour les applications est celle de constante isopérimétrique d'un graphe  $X$ . Si  $A$  est une partie de  $X^0$ , on note  $\partial A$  le bord de  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des arêtes  $y \in X^1$  telles que  $o(y) \in A$  et  $t(y) \notin A$ .

**Définition 4** Soit  $X$  un graphe connexe fini. La constante isopérimétrique (ou constante d'expansion) de  $X$  est

$$h(X) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|} : A \subset X, 0 < |A| \leq \frac{|X|}{2} \right\}.$$

Quand le graphe  $X$  est vu comme circuit de transmission, la grandeur de la constante isopérimétrique mesure la qualité de  $X$  à transmettre l'information.

**Problème de base** : construire explicitement, pour un entier  $k \geq 1$  fixé, des familles infinies  $(X_m)_{m \geq 1}$  de graphes finis, connexes, réguliers de valence  $k$ , avec  $h(X_m)$  borné inférieurement par une constante strictement positive.

Par "famille infinie", on entend  $\lim_{m \rightarrow \infty} |X_m| = \infty$ . Intuitivement, on cherche des graphes à nombre de sommets arbitrairement grand, mais où l'information continue à bien circuler. Bien entendu, la condition cruciale sur les graphes est d'être réguliers de

*valence fixée* : cela impose que le nombre d'arêtes croît *linéairement* avec le nombre de sommets, ce qui correspond à une exigence de coût minimal des lignes de transmission. Sans cette condition, le problème serait trivial : prendre la suite des graphes complets ! On insiste aussi sur des constructions *explicites* : par des arguments de comptage non constructifs, on montre que le problème de base admet des solutions (voir [41], §1.2 ; [62], §3.1.2).

## 1.2 Matrice d'adjacence

Soit  $X$  un graphe. On note  $C_X$  l'espace des  $\theta$ -chaînes de  $X$ , c-à-d. l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des fonctions à support fini  $X^0 \rightarrow \mathbb{C}$ . Pour  $x \in X^0$ , notons  $\delta_x$  la fonction caractéristique de  $\{x\}$  ; les  $\delta_x$  forment une base de  $C_X$ . On considère l'endomorphisme  $A$  de  $C_X$  défini par

$$A(\delta_x) = \sum_{y:o(y)=x} \delta_{t(y)}.$$

**Définition 5** La matrice de  $A$  dans la base des  $\delta_x$  est la matrice d'adjacence du graphe  $X$ .

Soit  $X$  un graphe fini, régulier de valence  $k$ . Il est bien connu (voir par exemple [7], Proposition 3.1) que les valeurs propres de la matrice d'adjacence sont contenues dans l'intervalle  $[-k, k]$ , et que  $k$  est une valeur propre de multiplicité égale au nombre de composantes connexes de  $X$ . Supposons de plus  $X$  connexe, à  $n$  sommets. Rangeons par ordre décroissant les valeurs propres de  $A$

$$\mu_0 = k > \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}.$$

On a  $\mu_{n-1} = -k$  si et seulement si  $X$  est biparti, et dans ce cas le spectre de  $A$  est symétrique par rapport à 0 (voir [7], Proposition 8.2). La première valeur propre non triviale  $\mu_1$  permet d'estimer la constante isopérimétrique.

**Proposition 1** Pour un graphe  $X$  fini, connexe, régulier de valence  $k$  :

$$\frac{k - \mu_1}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)}.$$

Pour une preuve, ainsi que pour le lien avec l'inégalité de Cheeger-Buser en géométrie riemannienne, voir [41], Propositions 4.2.4 et 4.2.5. On voit donc que pour avoir une grande constante isopérimétrique, il faut que le *trou spectral*  $k - \mu_1$  soit grand, donc que  $\mu_1$  soit petit. Il se fait qu'il y a un seuil asymptotique pour la taille de  $\mu_1$ . En effet :

**Proposition 2** Soient  $k \geq 2$  un entier, et  $(X_m)_{m \geq 1}$  une famille infinie de graphes finis, connexes, réguliers de valence  $k$ . Alors

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mu_1(X_m) \geq 2\sqrt{k-1}.$$

Ce résultat est dû à Alon et Boppana ([1], page 95 ; pour des preuves, voir [44], Proposition 4.2 ; [62], Proposition 3.2.7). Des résultats plus précis ont été obtenus par

Burger ([10], Théorème 2), Nilli ([55], Théorème 1), Serre ([63], Théorème 1); nous en verrons un plus bas (Théorème 1). Notons  $\mathcal{T}_k$  l'arbre régulier de valence  $k$  : c'est le revêtement universel de n'importe quel graphe connexe et régulier de valence  $k$ . Le nombre  $2\sqrt{k-1}$  qui apparaît dans la Proposition 2 n'est autre que le rayon spectral de l'opérateur d'adjacence de  $\mathcal{T}_k$ , agissant sur l'espace de Hilbert  $\ell^2(\mathcal{T}_k^0)$ . Notons qu'un phénomène semblable à celui de la Proposition 2 se produit pour le bas du spectre; pour l'énoncer, nous aurons besoin de la notion de tour de taille d'un graphe (on dit aussi "calibre", ou "girth").

**Définition 6** *Le tour de taille  $g(X)$  d'un graphe  $X$  est la longueur du plus petit circuit de  $X$ , avec la convention  $g(X) = \infty$  si  $X$  est un arbre.*

Le résultat suivant est dû à P. Solé et W. Li ([39], Cor. 4) :

**Proposition 3** *Soient  $k \geq 2$  un entier, et  $(X_m)_{m \geq 1}$  une famille de graphes finis, connexes, réguliers de valence  $k$ , avec  $\lim_{m \rightarrow \infty} g(X_m) = \infty$ . Alors la limite supérieure de la plus petite valeur propre non triviale de  $X_m$  vaut au moins  $-2\sqrt{k-1}$ .*

Les Propositions 2 et 3 isolent une propriété extrême des spectres de graphes, qui motive la définition suivante.

**Définition 7** *Soit  $X$  un graphe fini, connexe, régulier de valence  $k$ ; on dit que  $X$  est un graphe de Ramanujan si, pour toute valeur propre  $\mu$  de la matrice d'adjacence de  $X$  à l'exception de  $\mu = \pm k$ , on a*

$$|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}.$$

Les propositions 1 et 2 montrent que si l'on arrive à construire une famille infinie de graphes de Ramanujan de valence  $k$  fixée, on aura une solution au problème de base avec  $h \geq \frac{k-2\sqrt{k-1}}{2}$  et optimale du point de vue spectral. La terminologie "graphe de Ramanujan" a été introduite par Lubotzky-Phillips-Sarnak [44], et a fait fortune depuis. Historiquement, il semble que les premiers exemples de graphes de Ramanujan soient apparus implicitement chez Ihara [30], qui considère des matrices à valeurs entières positives associées à certains sous-groupes arithmétiques  $\Gamma$  de  $G = PGL(2, \mathbf{Q}_p)$ , et fait explicitement le lien entre les valeurs propres non triviales de ces matrices et la conjecture de Ramanujan-Petersson, réinterprétée en disant que les représentations irréductibles de dimension infinie de  $G$  qui apparaissent dans  $L^2(G/\Gamma)$  ne sont pas dans la série complémentaire de  $G$ , c'est-à-dire sont tempérées ([31], p. 230; voir aussi la "condition (R)" dans [30]). Quand on connaît l'action de  $G$  sur l'arbre  $\mathcal{T}_{p+1}$  (voir [65], Chapitre II), on constate que les matrices d'Ihara ne sont rien d'autre que les matrices d'adjacence du graphe quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{T}_{p+1}$ .

Actuellement, les seules constructions connues de familles infinies de graphes de Ramanujan sont de nature arithmétique (voir la section 2), et font toujours appel à la résolution de la conjecture de Ramanujan-Petersson sur les coefficients des formes modulaires paraboliques. Un défaut des constructions arithmétiques est que les seules valences pour lesquelles on dispose actuellement de familles infinies de graphes de Ramanujan sont de la forme  $k = q + 1$ , où  $q$  est une puissance de premier.

**Problème ouvert** : Construire, pour tout entier  $k \geq 2$ , une famille infinie de graphes de Ramanujan de valence  $k$ . (La première valeur ouverte est  $k = 7$ ).

### 1.3 Opérateurs de Hecke sur un graphe

Si  $X$  est un graphe régulier de valence  $k$ , on définit pour tout entier  $r \geq 1$ , un endomorphisme  $A_r$  de  $C_X$  par

$$A_r(\delta_x) = \sum_y \delta_{t(y)},$$

la somme portant sur les chemins  $y$  sans aller-retour, d'origine  $x$  et de longueur  $r$ . On a  $A_1 = A$ , et on pose encore  $A_0 = 1$ . On vérifie aisément que  $A_1^2 = A_2 + k$  et, pour  $r > 1$

$$A.A_r = A_r.A = A_{r+1} + (k-1)A_{r-1}.$$

On en tire la fonction génératrice

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r t^r = \frac{1-t^2}{1-At+(k-1)t^2}.$$

Si l'on définit les *opérateurs de Hecke*  $T_m$  sur  $C_X$  comme

$$T_m = \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} A_{m-2r},$$

on vérifie facilement que les  $T_m$  admettent la fonction génératrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m = \frac{1}{1-At+(k-1)t^2}.$$

Ceci suggère de faire appel aux polynômes de Chebychev de seconde espèce, définis par

$$U_m(\cos \theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta},$$

et qui satisfont à la relation de récurrence

$$U_{m+1}(x) = 2x.U_m(x) - U_{m-1}(x),$$

avec  $U_0(x) = 1$  et  $U_1(x) = 2x$ . En effet la fonction génératrice de ces polynômes est

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^m = \frac{1}{1-2xt+t^2}.$$

On en tire immédiatement que les  $T_m$  sont essentiellement les polynômes de Chebychev en  $A$ ; précisément

$$(1) \quad T_m = (k-1)^{\frac{m}{2}} U_m\left(\frac{A}{2\sqrt{k-1}}\right).$$

Supposons de plus  $X$  fini à  $n$  sommets, et notons  $\mu_0 = k > \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  les valeurs propres de la matrice d'adjacence de  $X$ . Toute l'idée est maintenant d'établir une "mini-formule des traces" en calculant de deux manières la trace de  $T_m$ . En prenant la trace des deux membres dans (1), on commence par obtenir

$$(2) \quad \text{Tr } T_m = (k-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}}\right),$$

A ce stade, digressons brièvement pour discuter un résultat dû à Serre ([63], Théorème 1 ; voir aussi le Théorème 13 du Chapitre 9 de [37]), à propos de la répartition asymptotique des valeurs propres de la matrice d'adjacence, pour une famille infinie de graphes finis, connexes, réguliers de valence  $k$ . Ce Théorème implique trivialement la Proposition 2.

**Théorème 1** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante strictement positive  $C = C(\epsilon, k)$  telle que, pour tout graphe  $X$  fini, connexe, régulier de valence  $k$ , à  $n$  sommets, le nombre de valeurs propres de la matrice d'adjacence de  $X$  dans l'intervalle  $[(2 - \epsilon)\sqrt{k - 1}, k]$  est au moins  $C.n$ .*

Serre obtient ce Théorème comme conséquence d'un résultat sur les mesures prenant des valeurs positives sur les  $U_n$ , et pour la preuve duquel nous renvoyons à [63] ou aux pp. 212-213 de [37].

**Proposition 4** *Soient  $L \geq 2$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe une constante strictement positive  $C = C(\epsilon, L)$  avec la propriété que, si  $\nu$  est une mesure de probabilité sur  $[-L, L]$  avec*

$$\int_{-L}^L U_m\left(\frac{x}{2}\right) d\nu(x) \geq 0$$

*pour tout  $m \geq 0$ , alors  $\nu$  donne à l'intervalle  $[2 - \epsilon, L]$  une mesure au moins égale à  $C$ .*

Voici comment on déduit le Théorème 1 de la Proposition : on prend  $L = \frac{k}{\sqrt{k-1}}$  et, pour  $f$  une fonction continue sur  $[-L, L]$ , on pose

$$\nu(f) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{\mu_j}{\sqrt{k-1}}\right).$$

Comme  $T_m$  est donné par une matrice à coefficients positifs, on a  $Tr T_m \geq 0$ , et l'égalité (2) montre que  $\nu(U_m) \geq 0$ . Appliquée à la mesure  $\nu$ , la Proposition fournit le Théorème 1.

Moyennant des hypothèses supplémentaires sur la croissance du nombre de circuits de longueur  $r$  dans une famille infinie de graphes finis, connexes, réguliers de valence  $k$ , Serre obtient au §8 de [66] des résultats plus précis que le Théorème 1 sur la répartition asymptotique des valeurs propres de la matrice d'adjacence.

Le Théorème 1 a été généralisé par Greenberg [28] à des graphes pas nécessairement réguliers : si  $\tilde{X}$  désigne un graphe connexe localement fini, notons  $\rho(\tilde{X})$  le rayon spectral de l'opérateur d'adjacence de  $\tilde{X}$  sur  $\ell^2(\tilde{X}^0)$ . Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une constante  $C = C(\epsilon, \tilde{X}) > 0$  telle que, pour tout graphe fini connexe  $X$  revêtu par  $\tilde{X}$ , le nombre de valeurs propres supérieures à  $(1 - \epsilon)\rho(\tilde{X})$  de la matrice d'adjacence de  $X$  est au moins  $C.|X|$ .

Reprenons le calcul de la trace de  $T_m$ . Si  $X$  est un graphe fini, connexe, régulier de valence  $k$ , la trace  $Tr A_r$  est clairement égale au nombre  $f_r$  de chemins fermés sans aller-retour de longueur  $r$  dans  $X$ . Notons  $\Gamma$  le groupe fondamental de  $X$  : il agit librement sur  $\mathcal{T}_k$ . Si on choisit un système  $R$  de représentants pour les orbites de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{T}_k^0$ , on a

$$f_r = \sum_{x \in R} |\{\gamma \in \Gamma : d(\gamma x, x) = r\}|;$$

d'où, en tenant compte de (2)

$$(3) \quad \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} \sum_{x \in R} |\{\gamma \in \Gamma : d(\gamma x, x) = m - 2r\}| = (k-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}}\right).$$

## 2 CONSTRUCTIONS DE GRAPHERS DE RAMANUJAN

### 2.1 Les graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis

Les constructions qui suivent sont dues indépendamment à Lubotzky-Phillips-Sarnak [44] et Margulis [47].

Soit  $\mathbb{H}$  l'algèbre des quaternions de Hamilton, et  $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$  l'anneau des quaternions entiers :

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{\alpha = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Si  $\alpha \in \mathbb{H}$ , la norme de  $\alpha$  est  $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ . Par un célèbre résultat de Jacobi, le nombre  $r_4(n)$  de représentations d'un entier positif  $n$  par la forme quadratique  $N$  est donné par  $r_4(n) = 8 \sum_{d|n, 4 \nmid d} d$ . Si  $p$  est un premier impair, on a donc  $r_4(p) = 8(p+1)$ . On suppose dorénavant  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ; si  $\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$  est tel que  $N(\alpha) = p$ , il est clair qu'exactly un des  $a_i$  est impair. L'ensemble

$$B_p = \{\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) : N(\alpha) = p, a_0 > 0, a_0 \equiv 1 \pmod{2}\}$$

a donc  $p+1$  éléments  $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s$ , où  $s = \frac{p+1}{2}$ . On a alors le résultat suivant, essentiellement dû à Dickson et Hurwitz (pour des preuves, voir [27], Proposition 9.6; [44], lemme 3.1; [41], lemme 2.1.9; [62], lemme 2.5.3) :

**Proposition 5** *Soit  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Soit  $\beta \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$  tel que  $N(\beta) = p^m$ . Il existe une unique écriture de  $\beta$  sous la forme  $\beta = \epsilon^r w_\ell(\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s)$ , où  $\epsilon \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$  est une unité,  $m = 2r + \ell$ , et  $w_\ell$  est un mot réduit de longueur  $\ell$  sur l'alphabet  $B_p$ . (Par mot réduit, on entend un mot où les expressions  $\alpha_i \bar{\alpha}_i$  ou  $\bar{\alpha}_i \alpha_i$  n'apparaissent pas). En particulier, si  $\beta \equiv 1 \pmod{2}$ , on a  $\beta = \pm p^r w_\ell(\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s)$  et cette écriture est unique.*

Notons  $G = \mathbb{H}^\times / Z(\mathbb{H}^\times)$  le quotient du groupe multiplicatif de  $\mathbb{H}$  par son centre;  $G$  est vu comme groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Si  $N$  est un entier positif non divisible par  $p$ , notons  $\Gamma(N)$  le  $N$ -ème sous-groupe de congruence de  $G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ , c-à-d. le noyau de la réduction modulo  $N$

$$\Gamma(N) = \text{Ker}[G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \rightarrow G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})].$$

Si  $\alpha$  est un quaternion entier dont la norme est une puissance de  $p$ , on note  $[\alpha_i]$  l'image de  $\alpha$  dans  $G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ ; c'est une conséquence facile de la proposition 5 que  $\Gamma(2)$  est un groupe libre sur les générateurs  $[\alpha_1], \dots, [\alpha_s]$ . D'autre part, on peut identifier  $G(\mathbb{Q}_p)$  à  $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ , qui possède une action bien connue sur l'arbre régulier  $\mathcal{T}_{p+1}$  (voir le Chapitre II de [65]); via cette identification,  $\Gamma(2)$  agit simplement transitivement sur les sommets de  $\mathcal{T}_{p+1}$ , qu'on peut donc identifier au graphe de Cayley de  $\Gamma(2)$  par rapport aux  $[\alpha_i]$

et à leurs inverses (voir le lemme 7.4.1 de [41] pour les détails). Si  $N = 2M$ , on a  $\Gamma(2M) \subset \Gamma(2)$ , et on peut donc former le graphe

$$X^{p,M} = \Gamma(2M) \backslash \mathcal{T}_{p+1};$$

c'est un graphe fini, connexe, régulier de valence  $p+1$ ; pour  $M$  assez grand, on peut aussi le voir comme le graphe de Cayley du groupe fini  $\Gamma(2)/\Gamma(2M)$  par rapport à l'image des  $[\alpha_i]$  et de leurs inverses par l'application-quotient  $\Gamma(2) \rightarrow \Gamma(2)/\Gamma(2M)$ . Pour avoir une construction tout-à-fait explicite de  $X^{p,M}$ , il reste à identifier le groupe fini  $\Gamma(2)/\Gamma(2M)$ . Supposons  $M$  impair : alors  $G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = G(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times G(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$  et, comme l'image de  $\Gamma(2)$  dans le premier facteur est triviale, on identifie  $\Gamma(2)/\Gamma(2M)$  à un sous-groupe de  $G(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ . S'il existe un entier  $\delta$  tel que  $\delta^2 \equiv -1 \pmod{M}$ , on peut expliciter un isomorphisme entre  $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$  et l'anneau des matrices  $2 \times 2$  sur  $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$

$$a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1\delta & a_2 + a_3\delta \\ -a_2 + a_3\delta & a_0 - a_1\delta \end{pmatrix}.$$

On arrive ainsi à

**Proposition 6** *Soit  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ; soit  $M$  un entier positif impair, non divisible par  $p$ , tel qu'il existe  $\delta \in \mathbb{Z}$  tel que  $\delta^2 \equiv -1 \pmod{M}$ . A chaque  $\alpha = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in B_p$ , on associe l'image dans  $PGL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$  de la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1\delta & a_2 + a_3\delta \\ -a_2 + a_3\delta & a_0 - a_1\delta \end{pmatrix}.$$

On note  $S_{p,M}$  l'ensemble de ces éléments de  $PGL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ , et  $H$  le sous-groupe de  $PGL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$  engendré par  $S_{p,M}$ . Pour  $M$  assez grand,  $X^{p,M}$  est isomorphe au graphe de Cayley  $X(H, S_{p,M})$ ; de plus

- (a) si  $p$  est un carré modulo  $M$ , alors  $H = PSL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$  et  $X^{p,M}$  est un graphe non biparti.
- (b) si  $p$  n'est pas un carré modulo  $M$ , alors  $H$  contient  $PSL(2, \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$  comme sous-groupe d'indice 2, et  $X^{p,M}$  est un graphe biparti.

Pour la preuve, voir le Théorème 7.4.3 de [41] (ou le Théorème 3.3.1 de [62] si  $M$  est un premier  $q$ ; notons que, dans ce cas, on a  $H = PGL(2, q)$  si  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$  dans la proposition précédente). Le résultat principal de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis est le suivant.

**Théorème 2** *Soient  $p \equiv 1 \pmod{4}$  et  $M$  un entier positif impair non divisible par  $p$ . Le graphe  $X^{p,M}$  est un graphe de Ramanujan.*

**Preuve :** Notons  $n$  le nombre de sommets de  $X^{p,M}$  et  $\mu_0 = p+1 > \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  les valeurs propres de sa matrice d'adjacence. Supposons  $X^{p,M}$  non biparti (le cas biparti se traite de manière analogue : il faut seulement faire attention à la valeur propre  $-p-1$ ). Nous devons montrer  $|\mu_i| \leq 2\sqrt{p}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Comme  $X^{p,M} = \Gamma(2M) \backslash \mathcal{T}_{p+1}$ , nous faisons appel à la formule (3); pour un entier  $m \geq 1$ , on a

$$(4) \quad \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} \sum_{x \in R} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma x, x) = m - 2r\}| = p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right),$$

où  $R$  est un ensemble de représentants pour les orbites de  $\Gamma(2M)$  sur  $\mathcal{T}_{p+1}^0$ . Identifions  $\mathcal{T}_{p+1}^0$  à  $\Gamma(2)$ , de sorte que  $R$  devient un ensemble de représentants pour les classes latérales de  $\Gamma(2M)$  dans  $\Gamma(2)$ ; en notant  $e$  le neutre de  $\Gamma(2)$ , le membre de gauche de (4) devient

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} \sum_{x \in R} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(x^{-1}\gamma x, e) = m - 2r\}| \\ &= n \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma, e) = m - 2r\}| \end{aligned}$$

puisque  $\Gamma(2M)$  est normal dans  $\Gamma(2)$ . Cela donne

$$(5) \quad \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma, e) = m - 2r\}| = \frac{p^{\frac{m}{2}}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right),$$

où  $d$  désigne maintenant la métrique des mots dans le groupe libre  $\Gamma(2)$ .

On va alors ré-interpréter le membre de gauche de (5) en termes de formes quadratiques. Considérons la forme quadratique

$$Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + 4M^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

et notons  $r_Q(p^m)$  le nombre de représentations entières de  $p^m$  par  $Q$ ; c'est aussi le cardinal de l'ensemble

$$\{\alpha = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) : N(\alpha) = p^m, \alpha - a_0 \equiv 0 \pmod{2M}\}.$$

Par la seconde assertion de la Proposition 5, un  $\alpha$  dans cet ensemble s'écrit de manière unique sous la forme

$$(6) \quad \alpha = \pm p^\ell w_\ell(\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s),$$

avec  $2r + \ell = m$ ; de plus  $[\alpha]$  est dans le sous-groupe de congruence  $\Gamma(2M)$  et à distance  $\ell = m - 2r$  de  $e$  dans le groupe libre  $\Gamma(2)$ . Réciproquement, un élément  $\gamma \in \Gamma(2M)$  à distance  $m - 2r$  de  $e$  dans  $\Gamma(2)$  fournit, par la formule (6), deux représentations de  $p^m$  par  $Q$ ; donc

$$r_Q(p^m) = 2 \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} |\{\gamma \in \Gamma(2M) : d(\gamma, e) = m - 2r\}|$$

et, du fait de (5),

$$(7) \quad r_Q(p^m) = \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right).$$

L'idée est maintenant d'estimer, en fonction de  $p^m$ , les ordres de grandeur des différents termes de (7). Pour estimer le membre de droite, on effectue la substitution  $\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}} = \cos \phi_j$ , de sorte que le problème est de montrer que  $\phi_j$  est réel pour  $1 \leq j \leq n - 1$ .

La valeur propre  $\mu_0 = p + 1$  correspond à  $\phi_0 = i \log \sqrt{p}$  et

$$(8) \quad U_m\left(\frac{p+1}{2\sqrt{p}}\right) = p^{-\frac{m}{2}} \cdot \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1} = p^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{d|p^m} d;$$

d'autre part on voit facilement que, pour  $m \rightarrow \infty$

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(m+1)\phi_j}{\sin \phi_j} = o(p^{\frac{m}{2}}).$$

Pour estimer  $r_Q(p^m)$ , on fait appel aux résultats venus de la théorie des formes modulaires. La fonction  $\theta$  de  $Q$  est une forme modulaire de poids 2 et de niveau  $16M^2$ , ce qui veut dire que la fonction

$$\theta(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^4} e^{2\pi i Q(x)z}$$

est holomorphe sur le demi-plan supérieur, et vérifie

$$\theta(\gamma \cdot z) = (cz + d)^2 \theta(z)$$

pour tout  $z$  du demi-plan et tout  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans le sous-groupe de congruence  $\Gamma_0(16M^2)$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  :

$$\Gamma_0(16M^2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{16M^2} \right\}$$

(voir [50], 4.9.5; [62], 1.3). On peut alors écrire  $\theta$  comme une somme  $\theta = E_2 + f$ , où  $E_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) e^{2\pi i n z}$  est une série d'Eisenstein, et  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$  est une forme modulaire parabolique ([62], 1.4). A ce stade, la formule (7) devient, en tenant compte de (8)

$$(10) \quad \delta(p^m) + a(p^m) = \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d + \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(m+1)\phi_j}{\sin \phi_j}.$$

Nous voulons montrer pour commencer que  $\delta(p^m) = \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d$ . Pour cela, nous faisons appel à la *conjecture de Ramanujan-Petersson* pour les formes modulaires : en poids 2 (c'est le cas ici), elle a été démontrée par Eichler [21], comme conséquence de l'hypothèse de Riemann sur les courbes algébriques sur un corps fini, démontrée par Weil [75] (en poids supérieur à 2, elle a été démontrée par Deligne [18]); elle nous donne, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$(11) \quad a(p^m) = O(p^{\frac{m}{2}(1+\epsilon)}).$$

Tenant compte de (9), la formule (10) devient, pour  $m \rightarrow \infty$ ,

$$(12) \quad \delta(p^m) = \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d + o(p^m)$$

D'autre part, les coefficients  $\delta(n)$  de  $E_2$  sont de la forme

$$(13) \quad \delta(n) = \sum_{d|n} d.F(d),$$

où  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction périodique de période  $16M^2$  (voir [56], Proposition 17 du Chapitre IV ; [62], 1.4). On utilise alors le lemme élémentaire suivant ([44], lemme 4.4 ; [62], lemme 3.5.1) :

**Lemme 1** Soit  $G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction périodique telle que, pour  $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{d|p^m} d.G(d) = o(p^m).$$

Alors  $G(p^m) = 0$  pour tout  $m$ .

Ce lemme implique immédiatement  $\delta(p^m) = \frac{2}{n} \sum_{d|p^m} d$ . En comparant (10) et (11), on obtient, pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$\frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(m+1)\phi_j}{\sin \phi_j} = O(p^{\frac{m}{2}(1+\epsilon)});$$

il est alors clair que les  $\phi_j$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ) doivent être réels, ce qui termine la preuve.

Dans son livre ([41], Chapitre 6), Lubotzky donne également une approche adélique très élégante au Théorème 2. L'idée se trouve presque entièrement dans la solution de Drinfeld [19] au problème de Ruziewicz sur la sphère  $S^2$  (une mesure finement additive, définie sur la  $\sigma$ -algèbre des parties de  $S^2$  mesurables au sens de Lebesgue, et invariante par rotations, est nécessairement proportionnelle à la mesure de Lebesgue) ; la lecture de la preuve de Drinfeld est recommandée, pour sa redoutable efficacité (une page !). Le schéma de la preuve adélique du Théorème 2 est le suivant :

- Puisque  $G(\mathbb{Q}_p) \simeq PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ , on peut identifier  $\Gamma(N)$  à un réseau co-compact de  $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ . En utilisant la classification des fonctions et représentations sphériques de  $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ , on montre que  $X^{p,M}$  est un graphe de Ramanujan si et seulement si aucune représentation de la série complémentaire de  $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$  n'apparaît dans  $L^2(PGL(2, \mathbb{Q}_p)/\Gamma(N))$ , à l'exception de la représentation triviale et éventuellement (dans le cas biparti) de la représentation "signe"  $\gamma \mapsto (-1)^{v_p(\det \gamma)}$ . Ce résultat remonte à Ihara ([30], remarque (R) ; [41], Corollaire 5.5.3). Soit donc  $\rho$  une composante irréductible de dimension  $\neq 1$  de  $L^2(PGL(2, \mathbb{Q}_p)/\Gamma(N))$  ; notons  $\rho_\infty$  la représentation triviale de  $G(\mathbb{R}) \simeq SO(3)$  ; alors  $\rho \otimes \rho_\infty$  apparaît dans  $L^2((PGL(2, \mathbb{Q}_p) \times SO(3))/\Gamma(N))$ .
- Notons  $\mathbf{A}$  l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$ . Grâce au *théorème d'approximation forte*, on plonge  $L^2((PGL(2, \mathbb{Q}_p) \times SO(3))/\Gamma(N))$  comme  $G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{R})$ -module dans  $L^2(G(\mathbf{A})/G(\mathbb{Q}))$  ([41], Proposition 6.3.3). On trouve donc une représentation automorphe  $\bigotimes_{q \in P \cup \{\infty\}} \rho_q$  de  $G(\mathbf{A})$  avec  $\rho_p = \rho$  et  $\rho_\infty$  triviale.
- On fait appel à la *correspondance de Jacquet-Langlands* : il existe une représentation automorphe  $\bigotimes_{q \in P \cup \{\infty\}} \pi_q$  de  $PGL(2, \mathbf{A})$  telle que  $\rho_q = \pi_q$  pour  $q \neq 2, \infty$ . De plus  $\pi_\infty$  est dans la série discrète de  $PGL(2, \mathbb{R})$ .

- On termine en utilisant la formulation en théorie des représentations du résultat de Deligne sur la conjecture de Ramanujan-Petersson (voir l'appendice 2 de [41], par Rogawski) : si  $\bigotimes_{q \in P \cup \{\infty\}} \pi_q$  est une représentation automorphe de  $PGL(2, \mathbf{A})$  avec  $\pi_\infty$  dans la série discrète de  $PGL(2, \mathbb{R})$ , alors, pour tout  $q \in P$ , la représentation  $\pi_q$  n'est pas dans la série complémentaire de  $PGL(2, \mathbb{Q}_q)$ ; en particulier  $\pi_p = \rho_p = \rho$  n'est pas dans la série complémentaire de  $G(\mathbb{Q}_p)$ .

Le Théorème 2 fournit des familles de graphes de Ramanujan dont le degré minimal vaut 5. En utilisant une algèbre de quaternions définie positive sur  $\mathbb{Q}$  mais scindée en 2 (au contraire de l'algèbre des quaternions de Hamilton), P. Chiu [13] a construit la première famille de graphes de Ramanujan de degré 3.

## 2.2 Les graphes de Mestre et Oesterlé

Dans [49], Mestre donne une construction très élégante, due à Oesterlé et lui, de graphes de Ramanujan associés à des familles de courbes elliptiques. Fixons un nombre premier  $\ell$ ; une courbe elliptique  $E$  définie sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  est *supersingulière* si  $E$  n'a pas de point d'ordre  $\ell$  (c'est une des nombreuses définitions possibles : voir [67], Théorème 3.1 du Chapitre V). Considérons l'ensemble  $S_\ell$  des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques supersingulières sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ .

Pour chaque premier  $p$  différent de  $\ell$ , on va définir un *graphe de Brandt*  $B(p, \ell)$  dont l'ensemble des sommets est  $S_\ell$ . L'ensemble des arêtes de  $B(p, \ell)$  sera l'ensemble des isogénies de degré  $p$  entre deux courbes de  $S_\ell$ . Si  $y : E_1 \rightarrow E_2$  est une telle isogénie, on définit  $\bar{y} : E_2 \rightarrow E_1$  comme l'isogénie duale de  $y$ , telle que  $\bar{y} \circ y$  est la multiplication par  $p$  sur  $E_1$  (voir [67], Théorème 6.1 du Chapitre III). Il faut prendre garde ici qu'il peut arriver que  $y = \bar{y}$ , donc ces graphes ne satisfont pas réellement aux conditions de la Définition 1. Passons outre à cette difficulté, qu'on pourrait lever en définissant des sommets avec multiplicité dans un graphe. Remarquons alors que  $B(p, \ell)$  est régulier de valence  $p + 1$ , en d'autres termes que, pour  $E \in S_\ell$ , il y a  $p + 1$  isogénies  $y$  de degré  $p + 1$  et d'origine  $E$ . En effet,  $y$  est déterminé par son noyau, qui est un sous-groupe d'ordre  $p$  de  $E$ ; d'autre part, le groupe  $E[p]$  des points de  $p$ -torsion de  $E$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  ([67], Corollaire 6.4 du Chapitre III), et contient donc  $p + 1$  sous-groupes d'ordre  $p$ . Notons  $T_p$  la matrice d'adjacence de  $B(p, \ell)$ , donc définie par

$$T_p(E) = \sum_C E/C$$

où  $C$  parcourt les sous-groupes d'ordre  $p$  de  $E$ . Notons  $C_{S_\ell}^0$  l'espace des 0-chaînes de somme nulle sur  $S_\ell$ .

Notons encore  $\mathcal{S}_2(\ell)$  l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 2 et de niveau  $\ell$ , sur lequel agissent les opérateurs de Hecke classiques. Le point crucial est qu'il existe un isomorphisme, compatible avec l'action des opérateurs de Hecke, de  $C_S^0$  sur  $\mathcal{S}_2(\ell)$  ([49], Théorème 1). Grâce à Eichler [21], on obtient donc directement que les valeurs propres de  $T_p$  sur  $C_{S_\ell}^0$  sont inférieures ou égales à  $2\sqrt{p}$ . Ceci implique d'abord que le graphe  $B(p, \ell)$  est connexe (puisque la valeur propre  $p + 1$  est de multiplicité 1), ensuite que  $B(p, \ell)$  est un graphe de Ramanujan non biparti.

Pour construire une famille infinie de graphes de Ramanujan réguliers de valence  $p+1$ , il suffit donc de faire varier le nombre premier  $\ell$ . Le nombre de sommets de  $B(p, \ell)$ , c'est-à-dire le nombre de courbes elliptiques supersingulières sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , peut s'estimer par la "formule de masse" d'Eichler et Deuring ([29], Théorème 4.1 du Chapitre 13) :

$$\sum_{E \in S_\ell} \frac{1}{|\text{Aut } E|} = \frac{\ell-1}{24}.$$

En se rappelant que l'ordre de  $\text{Aut } E$  divise 24 (cf. [67], Théorème 10.1 du Chapitre III), on voit que  $|S_\ell| = O(\ell)$ ; mais on dispose en fait de formules exactes, qu'on trouve par exemple dans [29], §4 du Chapitre 13. Ainsi, si  $\ell \equiv 1 \pmod{12}$ , on a  $|\text{Aut } E| = 2$  pour tout  $E$ , d'où  $|S_\ell| = \frac{\ell-1}{12}$ .

Mestre a exploité les graphes  $B(2, \ell)$  pour dresser des listes (pour  $\ell$  pas trop grand) de toutes les courbes elliptiques supersingulières sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ . On commence par déterminer une courbe elliptique supersingulière  $E_0$ ; on est aidé pour cela par le fait que l'invariant  $j$  de  $E_0$  est dans  $\mathbb{F}_\ell$ . Mieux : si  $\ell \equiv 2 \pmod{3}$ , la courbe  $E_0$  d'équation  $y^2 = x^3 + 1$  (avec  $j(E_0) = 0$ ) fait l'affaire; et si  $\ell \equiv 3 \pmod{4}$ , la courbe  $E_0$  d'équation  $y^2 = x^3 + x$  (avec  $j(E_0) = 1728$ ) convient; pour tout ceci, voir [67], §4 du Chapitre V. On utilise alors les isogénies de degré 2 d'origine  $E_0$ . Si  $E$  est lié à  $E_0$  par une telle isogénie, leurs invariants  $j$  sont liés par une équation polynomiale  $\Phi_2(j(E_0), j(E)) = 0$ , de degré 3 en  $j(E)$ . Une fois  $E$  connu, on cherche les 3 courbes supersingulières qui lui sont reliées, mais on en connaît déjà une, à savoir  $E_0$ ; il faut donc résoudre une équation du second degré en les invariants  $j$ . En travaillant de proche en proche, on va trouver toutes les courbes supersingulières, puisque  $B(2, \ell)$  est connexe. Au §2.4 de [49], Mestre montre que cette exploration se fait en  $O(\ell \log \ell)$  pas.

On dispose d'un dictionnaire entre courbes elliptiques supersingulières et ordres dans les algèbres de quaternions (voir [73] pour le matériel nécessaire). En effet, notons  $D_\ell$  l'unique algèbre de quaternions sur  $\mathbb{Q}$  ramifiée exactement en  $\ell$  et en  $\infty$ ; pour  $\ell = 2$ , c'est l'algèbre  $\mathbb{H}$  des quaternions de Hamilton. Si  $E$  est une courbe elliptique supersingulière sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , l'anneau  $\text{End } E$  de ses endomorphismes est un ordre maximal de  $D_\ell$  (voir [67], Théorème 3.1 du Chapitre V et ex. 3.18). Fixons une telle courbe  $E_0$ , et notons  $\mathcal{O} = \text{End } E_0$  l'ordre maximal associé. L'application

$$E \rightarrow \text{Hom}(E_0, E)$$

définit une bijection de  $S_\ell$  sur l'ensemble des classes d'idéaux à droite sur  $\mathcal{O}$ , ce qui fournit déjà une nouvelle interprétation du nombre de sommets des graphes  $B(p, \ell)$ . Selon ce point de vue, les opérateurs  $T_p$  deviennent exactement les matrices de Brandt : si  $I_1, \dots, I_h$  sont des représentants des classes d'idéaux à gauche de  $\mathcal{O}$ , notons  $\mathcal{O}_i$  le normalisateur à droite de  $I_i$  : c'est encore un ordre maximal de  $D_\ell$ , et on note  $e_i$  l'ordre de son groupe d'unités. Le coefficient  $(i, j)$  de la matrice de Brandt  $b^{(p)}$  est donné par

$$b_{i,j}^{(p)} e_j = \left| \left\{ \alpha \in I_j^{-1} I_i : N(\alpha) = \frac{pN(I_i)}{N(I_j)} \right\} \right|,$$

où  $N$  désigne la norme (réduite) dans  $D_\ell$ . Si  $E_i, E_j$  sont les courbes elliptiques supersingulières qui correspondent à  $I_i, I_j$  respectivement,  $b_{i,j}^{(p)}$  est le nombre d'isogénies de

degré  $p$  de  $E_i$  vers  $E_j$ , à un automorphisme de  $E_j$  près ([49], §2.3). Notons  $G_\ell$  le quotient du groupe multiplicatif de  $D_\ell$  par son centre;  $G_\ell$  est vu comme groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Comme  $G_\ell(\mathbb{Q}_p) \simeq PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ , on peut faire agir  $G_\ell(\mathbb{Q}_p)$  sur l'arbre  $\mathcal{T}_{p+1}$ , et  $B(p, \ell)$  apparaît alors comme le "graphe-quotient" de  $\mathcal{T}_{p+1}$  par  $G_\ell(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$  ([73], §3 du Chapitre 5; voir aussi [37], Proposition 5 du Chapitre 9).

Les matrices de Brandt décrites ci-dessus correspondent à des ordres maximaux de  $D_\ell$ , c'est-à-dire à des ordres de niveau  $\ell$  au sens d'Eichler. Mestre et Oesterlé [49] ont aussi regardé la situation plus générale des ordres de niveau  $\ell N$ , où  $N$  est un entier non divisible par  $\ell$ ; les matrices de Brandt correspondent alors aux classes d'isomorphismes de couples  $(E, C)$ , où  $E$  est une courbe elliptique supersingulière sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  et  $C$  est un groupe cyclique d'ordre  $N$  de  $E$ . En définissant convenablement l'opérateur  $T_p$  sur les couples  $(E, C)$ , on obtient encore des familles de graphes de Ramanujan non bipartis, de valence  $p + 1$ . En considérant les ordres de niveau  $\ell^2 N$  dans  $D_\ell$  et les matrices de Brandt correspondantes, Pizer [61] donne des familles de graphes de Ramanujan de valence  $p + 1$ , qui sont bipartis si  $p$  n'est pas un carré modulo  $\ell$  (voir aussi [72]).

### 2.3 Les graphes de Morgenstern

Soit  $q$  une puissance de premier; notons  $\mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q$  éléments. En considérant des algèbres de quaternions  $D$  sur le corps global  $K = \mathbb{F}_q(t)$ , Morgenstern a construit des familles infinies de graphes de Ramanujan de valence  $q + 1$ . L'idée consiste à adéliser la situation, exactement comme dans la version adélique de la construction des graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis. Si  $G'$  est le quotient du groupe multiplicatif de  $D$  par son centre, on se ramène à un problème sur les représentations cuspidales du groupe adélique  $G'(\mathbf{A}_K)$ . Après usage de la correspondance de Jacquet-Langlands, le coup de grâce est donné par la solution de Drinfeld à la conjecture de Petersson pour  $GL(2, K)$ : si  $\otimes_v \pi_v$  est une représentation cuspidale de  $GL(2, \mathbf{A}_K)$ , alors pour toute place finie  $v$  de  $K$ , la composante locale  $\pi_v$  n'est pas dans la série complémentaire de  $GL(2, K_v)$  (voir [20], Corollaire au Théorème 1.1).

Ici encore, on peut expliciter les constructions en identifiant les graphes construits comme quotients de l'arbre régulier  $\mathcal{T}_{q+1}$  à des graphes de Cayley de certains groupes finis. Plus précisément, si  $q$  est impair, on choisit un élément  $\delta$  qui n'est pas un carré dans  $\mathbb{F}_q$ , ainsi qu'un polynôme  $g \in \mathbb{F}_q[t]$ , irréductible de degré  $d$  pair. Notons  $(a_k, b_k)$  ( $1 \leq k \leq q + 1$ ) les  $q + 1$  solutions dans  $\mathbb{F}_q$  de l'équation  $b^2\delta - a^2 = 0$ . Identifions le corps  $\mathbb{F}_{q^d}$  au quotient de l'anneau de polynômes  $\mathbb{F}_q[t]$  par l'idéal engendré par  $g$ . Soit  $\sqrt{\delta}$  une racine carrée de  $\delta$  dans  $\mathbb{F}_{q^d}$ ; considérons l'ensemble  $S_{q+1}$  des images dans  $PGL(2, q^d)$  des  $q + 1$  matrices

$$(14) \quad \left( \begin{array}{cc} 1 & a_k - b_k\sqrt{\delta} \\ (a_k + b_k\sqrt{\delta})(t - 1) & 1 \end{array} \right) \quad (1 \leq k \leq q + 1).$$

Morgenstern établit ([52], Théorème 4.13)

**Théorème 3** Soit  $q$  impair.

1. Si  $\left(\frac{t}{g(t)}\right) = 1$ , l'ensemble  $S_{q+1}$  défini en (14) est une partie génératrice symétrique de  $PSL(2, q^d)$ , et le graphe de Cayley correspondant est un graphe de Ramanujan de valence  $q+1$  et non biparti.
2. Si  $\left(\frac{t}{g(t)}\right) = -1$ , l'ensemble  $S_{q+1}$  défini en (14) est une partie génératrice symétrique de  $PGL(2, q^d)$ , et le graphe de Cayley correspondant est un graphe de Ramanujan de valence  $q+1$  et biparti.

Si  $q$  est une puissance de 2, il faut modifier la construction comme suit. On commence par choisir  $\delta \in \mathbb{F}_q$  tel que le polynôme  $f(t) = t^2 + t + \delta$  est irréductible sur  $\mathbb{F}_q$ , ainsi qu'un polynôme  $g \in \mathbb{F}_q[t]$ , irréductible de degré  $d$  pair. On note  $(a_k, b_k)$  ( $1 \leq k \leq q+1$ ) les  $q+1$  solutions dans  $\mathbb{F}_q$  de l'équation  $b^2\delta + ab + a^2 = 0$ . On identifie le corps  $\mathbb{F}_{q^d}$  au quotient de l'anneau de polynômes  $\mathbb{F}_q[t]$  par l'idéal engendré par  $g$ . Soit  $\epsilon$  une racine de  $f$  dans  $\mathbb{F}_{q^d}$ ; considérons l'ensemble  $S_{q+1}$  des images dans  $PGL(2, q^d)$  des  $q+1$  matrices

$$(15) \quad \begin{pmatrix} 1 & a_k + b_k\epsilon \\ (a_k + b_k\epsilon + b_k)t & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \leq k \leq q+1).$$

Morgenstern établit ([52], Théorème 5.13)

**Théorème 4** Soit  $q$  pair. L'ensemble  $S_{q+1}$  défini en (15) est une partie génératrice symétrique de  $PSL(2, q^d)$ , et le graphe de Cayley correspondant est un graphe de Ramanujan de valence  $q+1$  et non biparti.

Notons  $\mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$  le corps des séries de Laurent formelles en  $\frac{1}{t}$  sur le corps fini  $\mathbb{F}_q$ . Pour traiter des quotients de l'arbre de  $PGL(2, \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right))$  par des réseaux  $\Gamma$  non uniformes (typiquement  $\Gamma = PGL(2, \mathbb{F}_q[t])$ , voir [65], §2 du Chapitre II), Morgenstern a introduit les *diagrammes de Ramanujan* : ce sont des graphes pondérés par des poids définis sur les sommets et les arêtes (avec certaines relations de compatibilité) ; comme la somme des poids des sommets est finie, on peut d'une certaine manière considérer un diagramme comme un objet fini, même si le graphe sous-jacent est infini. Dans [51] (voir aussi [41], 8.4), Morgenstern définit la constante isopérimétrique et l'opérateur d'adjacence  $A$  d'un tel objet, isole la condition extrême "de Ramanujan" sur le spectre de  $A$ , et montre que les quotients de l'arbre de  $PGL(2, \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right))$  par les sous-groupes de congruence de  $\Gamma = PGL(2, \mathbb{F}_q[t])$  sont des diagrammes de Ramanujan. Morgenstern parvient à appliquer ces diagrammes à la construction de superconcentrateurs (voir §4.1 ci-dessous).

Une autre généralisation des graphes de Ramanujan a été définie et étudiée dans [40] sous le nom de *systèmes locaux de Ramanujan* : la construction d'exemples non triviaux dépend des résultats de [18].

## 2.4 Constructions à valences non bornées

Plusieurs personnes ont observé que certains graphes intéressants sont effectivement des graphes de Ramanujan, et qu'il est ainsi possible de construire des familles infinies de graphes de Ramanujan à valences non bornées. Cependant, il convient de rappeler

que ces familles ne sont pas des solutions au *problème de base* de la section 1, et que la vraie difficulté est de construire des familles de graphes de Ramanujan à valence fixée.

Nous donnons une liste des principales constructions de familles infinies de graphes de Ramanujan, par ordre croissant de difficulté à établir les bornes de Ramanujan :

1) Les graphes complets : le graphe complet sur  $n$  sommets est régulier de valence  $n - 1$ , et c'est un graphe de Ramanujan puisque les valeurs propres de sa matrice d'adjacence sont  $-1$  et  $n - 1$ .

2) Les graphes de Paley : un graphe  $X$  à  $n$  sommets et régulier de valence  $k$ , est *fortement régulier* de paramètres  $r_1, r_2$  si deux sommets quelconques  $x, x'$  de  $X$  ont exactement  $r_1$  sommets voisins en commun si  $x, x'$  sont extrémités d'une même arête, et  $r_2$  sommets voisins en commun sinon. Le spectre de la matrice d'adjacence d'un graphe fortement régulier se calcule en résolvant une équation du second degré ([7], §3.c), et on obtient qu'un graphe fortement régulier de paramètres  $r_1, r_2$  est de Ramanujan si et seulement si  $3k + r_2 \geq 4 + 2 \cdot |r_1 - r_2| \cdot \sqrt{k - 1}$ . Comme l'a remarqué de la Harpe, cela s'applique aux graphes de Paley  $X_q$ , avec  $q$  une puissance de premier et  $q$  congru à 1 modulo 4 : le graphe de Paley  $X_q$  est le graphe de Cayley du groupe additif du corps fini  $\mathbb{F}_q$  par rapport à l'ensemble des carrés non nuls de  $\mathbb{F}_q$  ; la valence de  $X_q$  est  $\frac{q-1}{2}$ , et c'est un graphe de Ramanujan ([41], Proposition 8.3.3).

3) Soit  $H$  un groupe fini, et  $S$  une partie génératrice symétrique et invariante par automorphismes intérieurs, donc réunion de classes de conjugaison  $C_1, \dots, C_k$ . C'est une conséquence immédiate du lemme de Schur que les valeurs propres du graphe de Cayley  $X(H, S)$  sont les  $\frac{1}{\chi(e)} \sum_{i=1}^k |C_i| \chi(C_i)$ , où  $\chi$  parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de  $H$ . La situation se simplifie encore si  $S$  est réduite à une classe de conjugaison ; dans ce cas, par simple contemplation d'une table de caractères de  $H$ , on peut vérifier si  $X(H, S)$  est un graphe de Ramanujan. Au paragraphe 8.2 de [41], Lubotzky donne une série d'exemples avec  $H = SL(2, q)$ , où  $q$  est une puissance de premier. Par exemple, si  $S$  est la classe de conjugaison de  $\begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu^{-1} \end{pmatrix}$ , avec  $\nu$  un générateur du groupe multiplicatif du corps fini  $\mathbb{F}_q$ , le graphe  $X(H, S)$  est de Ramanujan.

4) Chung [14], Li ([36] ; [37], §4 du Chapitre 9 ; [38]), Terras et ses collaborateurs ([69], [48]) ont étudié des graphes de Ramanujan obtenus à partir de groupes abéliens finis. Si  $\Gamma$  est un tel groupe, noté additivement, et  $S$  une partie génératrice symétrique de  $\Gamma$ , le graphe de Cayley de  $\Gamma$  par rapport à  $S$  s'appelle un *graphe de différence*, puisque deux éléments  $x, y \in \Gamma$  sont adjacents si et seulement si  $x - y \in S$ . Il est clair que les valeurs propres de la matrice d'adjacence de ce graphe de Cayley sont données par les sommes  $\sum_{s \in S} \chi(s)$ , où  $\chi$  parcourt l'ensemble des caractères de  $\Gamma$ . Donc, si l'on arrive à assurer

$$\left| \sum_{s \in S} \chi(s) \right| \leq 2\sqrt{|S| - 1}$$

pour tout caractère non trivial de  $\Gamma$ , le graphe de Cayley correspondant sera un graphe de Ramanujan. Le problème devient immédiatement un problème de majoration de sommes d'exponentielles de type Kloosterman. Chung, Li et Terras donnent plusieurs exemples non triviaux de cette situation, où les estimations nécessaires proviennent des bornes de

Weil [74] sur certaines sommes exponentielles, qui dépendent elles-mêmes de la preuve de l'hypothèse de Riemann [75] pour les courbes projectives sur  $\mathbb{F}_q$ .

5) Terras et ses élèves de San Diego ont introduit des graphes appelés (assez abusivement) "demi-plans supérieurs finis" (voir [3], [69]). Soit  $q$  une puissance de premier impair, et soit  $\delta$  un générateur du groupe multiplicatif du corps  $\mathbb{F}_q$ ; on identifie  $\mathbb{F}_{q^2}$  à  $\mathbb{F}_q(\sqrt{\delta})$ . L'ensemble des sommets du "demi-plan supérieur fini" est

$$H_q = \{x + y\sqrt{\delta} : x, y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0\},$$

que l'on identifie au groupe " $ax + b$ " de  $\mathbb{F}_q$

$$Aff(1, q) = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0 \right\}.$$

Pour  $a \in \mathbb{F}_q$ , on considère la conique dans  $H_q$

$$S_q(\delta, a) = \{x + y\sqrt{\delta} \in \mathbb{F}_q(\sqrt{\delta}) : x^2 = ay + \delta \cdot (y - 1)^2\};$$

on montre (voir [3]) que, pour  $0 \neq a \neq 4\delta$ , la conique  $S_q(\delta, a)$  est une partie génératrice symétrique à  $q + 1$  éléments de  $Aff(1, q)$ , et le "demi-plan supérieur fini"  $P_q(\delta, a)$  est le graphe de Cayley de  $Aff(1, q)$  par rapport à  $S_q(\delta, a)$ . La matrice d'adjacence de  $P_q(\delta, a)$  s'analyse en faisant agir  $G = GL(2, q)$  par homographies sur  $H_q$  et en identifiant  $H_q$  à  $G/K$ , où

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\delta \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_q, a^2 - b^2\delta \neq 0 \right\}.$$

Pour montrer que les  $P_q(\delta, a)$  sont des graphes de Ramanujan, on commence par utiliser les représentations sphériques de  $G$  et les fonctions sphériques associées pour ramener le problème à un problème de majoration de sommes de Kloosterman [4]; deux preuves différentes des majorations désirées ont été données, par Katz [33] et Li ([37], Théorème 10 du Chapitre 9). Récemment, Li a montré que les  $P_q(\delta, a)$  sont des quotients des graphes de Morgenstern basés sur les algèbres de quaternions sur  $\mathbb{F}_q(t)$ , ce qui fournit une troisième preuve du fait que les  $P_q(\delta, a)$  sont des graphes de Ramanujan ([35], Théorème 8).

### 3 PROPRIÉTÉS DES GRAPHERS DE RAMANUJAN

Cette section doit beaucoup aux sections 7.3 de [41] et 3.2 de [62].

Plusieurs invariants combinatoires d'un graphe fini sont liés au spectre de la matrice d'adjacence. Donnons-en quelques exemples.

**Définition 8** Soit  $X$  un graphe fini, connexe, sans boucle.

1. Le diamètre  $D(X)$  du graphe  $X$  est le maximum des distances entre deux sommets de  $X$ .
2. Le nombre d'indépendance  $i(X)$  de  $X$  est la taille d'une co-clique maximale de  $X$  (où une co-clique est un ensemble de sommets qui sont deux à deux non adjacents).

3. Le nombre chromatique  $\chi(X)$  de  $X$  est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de  $X$  de manière à ce que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.

Notons que, si  $n$  est le nombre de sommets de  $X$ , les quantités  $i(X)$  et  $\chi(X)$  sont liés par l'inégalité simple

$$\chi(X) \geq \frac{n}{i(X)},$$

qui provient du fait que, si  $A_1, \dots, A_{\chi(X)}$  sont les ensembles de sommets de la même couleur dans une coloration de  $X$ , chaque partie  $A_i$  est une co-clique de  $X$ ; dès lors

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(X)} |A_i| \leq \chi(X)i(X).$$

Les quantités de la définition précédente peuvent s'estimer spectralement comme suit.

**Proposition 7** Soit  $X$  un graphe fini, connexe, sans boucle, à  $n$  sommets, et régulier de valence  $k$ . Notons  $\mu_0 = k > \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$  les valeurs propres de la matrice d'adjacence de  $X$ , et

$$\mu(X) = \max\{|\mu_i| : \mu_i \neq \pm k\}.$$

Alors

(a)  $D(X) \leq \frac{\log(n-1)}{\log \frac{k}{\mu(X)}};$

(b) si  $X$  est non biparti :

$$i(X) \leq \frac{\mu(X)}{k} \cdot n;$$

(c) si  $X$  est biparti, on a  $\chi(X) = 2$ ; si  $X$  est non biparti, on a  $\chi(X) \geq \frac{k}{\mu(X)}$ .

Le point (a) est dû à Chung ([14], Théorème 1); voir aussi la Proposition 3.2.6 de [62]. Si on pense à un graphe comme à un réseau de communication, le diamètre mesure le délai de transmission; d'où un autre intérêt de construire des graphes avec  $\mu(X)$  petit. Le point (b) est dû à Alon; pour la preuve, voir la Proposition 5.2 de [44] ou la Proposition 3.2.3 de [62] (attention, l'hypothèse "non biparti" y manque!). La première assertion du point (c) est triviale; la seconde résulte de (b) et de la remarque précédant la proposition (pour un résultat plus précis, voir le Théorème 8.8 de [7]). Si  $X$  est un graphe de Ramanujan, on en déduit par simple substitution

**Corollaire 1** Soit  $X$  un graphe de Ramanujan sans boucle, à  $n$  sommets, de valence  $k$ . Alors

$$D(X) \leq 2 \log_{k-1}(n).$$

Si de plus  $X$  est non biparti,

(1)  $i(X) \leq \frac{2\sqrt{k-1}}{k} \cdot n;$

(2)  $\chi(X) \geq \frac{k}{2\sqrt{k-1}}.$

Pour d'autres invariants de graphes qui peuvent se lire spectralement, voir les livres de Biggs [7] et Chung [15].

Considérons les graphes connexes, finis, réguliers de valence  $k$  fixée. Si  $X$  est un tel graphe, disons à  $n$  sommets et de tour de taille  $g(X)$ , alors pour tout sommet  $x$  et tout réel positif  $R < \frac{g(X)}{2}$ , la boule dans  $X$  centrée en  $x$  et de rayon  $R$  est la même que la boule de rayon  $R$  de l'arbre régulier  $\mathcal{T}_k$ ; un argument de comptage élémentaire mène à l'inégalité

$$g(X) \leq (2 + o(1)) \log_{k-1}(n)$$

pour  $n \rightarrow \infty$ . Par des arguments de comptage non constructifs, Erdős et Sachs [22] ont montré qu'il existe des familles infinies de graphes réguliers de valence  $k$  avec  $g(X) \geq \log_{k-1}|X|$ . Mentionnons au passage un très joli argument de Margulis [46], complètement élémentaire, qui produit des familles explicites de graphes avec  $g(X) \geq (\frac{2}{3} + o(1)) \log_{k-1}|X|$  pour  $|X| \rightarrow \infty$ .

Les graphes de Ramanujan  $X^{p,N}$  de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis sont obtenus comme quotients de l'arbre régulier  $\mathcal{T}_{p+1}$  par l'action d'un groupe  $\Gamma(2N)$  opérant librement; il est facile de voir que

$$g(X^{p,N}) = \min_{g \in \Gamma(2N) - \{1\}} p(g),$$

où  $p(g)$  est le déplacement minimum d'un sommet de  $\mathcal{T}_{p+1}$  sous l'action de  $g$ . D'autre part  $\Gamma(2N)$  est un sous-groupe de  $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$ . Supposons pour simplifier que  $N = q$ , un nombre premier impair distinct de  $p$ ; en utilisant les formules pour l'action de  $PGL(2, \mathbb{Q}_p)$  sur  $\mathcal{T}_{p+1}$  (voir [41], §7.3; [47], lemme 2), on obtient :

**Théorème 5** *Pour les graphes  $X^{p,q}$  :*

(a) Si  $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ , c-à-d. si  $X^{p,q}$  est non biparti, on a

$$g(X^{p,q}) \geq 2 \log_p(q);$$

(b) si  $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ , c-à-d. si  $X^{p,q}$  est biparti, on a

$$4 \log_p(q) - \log_p(4) \leq g(X^{p,q}) < 4 \log_p(q) + \log_p(4) + 2.$$

Les bornes inférieures sont dues à Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis ([44], Théorème 3.4, [47], 3.1; voir aussi [41], Théorème 7.3.12 et [62], Théorème 3.3.1); la borne supérieure dans (b) est due à Biggs et Boshier [8]. Rappelons que, dans le cas non biparti, on a  $|X^{p,q}| = \frac{q(q^2-1)}{2}$  (c'est l'ordre de  $PSL(2, q)$ ) et, dans le cas biparti, on a  $|X^{p,q}| = q(q^2-1)$  (c'est l'ordre de  $PGL(2, q)$ ). Donc, dans ce dernier cas, on a, pour  $q \rightarrow \infty$  :

$$g(X^{p,q}) = \frac{4}{3} \log_p(|X^{p,q}|) + O(1).$$

On se trouve ici dans un des rares cas en théorie des graphes où l'on dispose d'une construction explicite qui donne un résultat meilleur que les arguments de comptage non constructifs. Il est à noter que la construction de familles de graphes finis ayant un grand

tour de taille et un grand nombre chromatique était un vieux problème : la difficulté réside dans le fait qu'un graphe ayant un grand tour de taille ressemble "localement" à un arbre, lequel peut être colorié au moyen de deux couleurs.

Pour  $q$  une puissance de premier, Lazebnik, Ustimenko et Woldar [34] ont récemment construit, par des moyens élémentaires, des familles de graphes finis réguliers  $X$  de valence  $q$  tels que

$$g(X) \geq \frac{4}{3} \log_q(q-1) \log_{q-1}(|X|).$$

Donc, du point de vue du tour de taille, ces graphes sont presque aussi bons que les  $X^{p,q}$  bipartis de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis.

**Problème ouvert :** Pour un entier positif  $k$  et un réel  $\gamma \in ]\frac{4}{3}, 2]$  fixés, construire des familles infinies de graphes  $X$  finis, réguliers de degré  $k$ , avec  $G(X) \geq \gamma \log_{k-1}(|X|)$ .

Un graphe de Ramanujan n'a pas nécessairement un grand tour de taille : ainsi, les "demi-plans supérieurs finis" ont des tours de taille égaux à 3 ou 4 (voir [3], page 11).

## 4 APPLICATIONS

Nous donnons ici, par ordre d'entrée en scène, les applications des graphes de Ramanujan dont nous avons eu connaissance.

Avant de commencer, rappelons que les groupes de quaternions qui servent à Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis pour fabriquer leurs exemples de graphes de Ramanujan avaient été utilisés dès 1984 par Drinfeld [19] pour résoudre le problème de Ruziewicz sur la sphère  $S^2$ . En fait, Lubotzky, Phillips et Sarnak ont utilisé ces groupes pour construire, simultanément, des graphes de Ramanujan et pour obtenir les "meilleures" distributions de points sur  $S^2$  (voir [42]; ces résultats ont été exposés à Bourbaki par Colin de Verdière [17]). Pour une exposition unifiée des trois questions (problème de Ruziewicz, répartition de points sur les sphères, graphes de Ramanujan), on consultera les excellents livres de Lubotzky [41] et Sarnak [62].

### 4.1 Graphes expanseurs et superconcentrateurs

Il s'agit de l'application qui a précédé la théorie ! En effet, on sait depuis les années 1970 que les familles infinies de graphes expanseurs à valences bornées, c-à-d. les solutions au *problème de base* de la section 1, trouvent des applications dans divers domaines de l'informatique théorique : pour de bonnes présentations de ces applications, voir [1], §1 ; [6] §5 ; [14] §3 ; [41] §1.1. Une des applications principales est la construction de superconcentrateurs, des graphes qui servent par exemple en théorie de la complexité [11].

**Définition 9** Soient  $n, k$  deux entiers positifs. Un  $(n, k)$ -superconcentrateur est un graphe orienté acyclique avec  $n$  émetteurs,  $n$  récepteurs et au plus  $kn$  arêtes, tel que, pour tout entier  $r$  avec  $1 \leq r \leq n$ , tout ensemble de  $r$  émetteurs est connecté à tout ensemble de  $r$  récepteurs par  $r$  chemins disjoints.

Il est à noter que le nombre des sommets d'un  $(n, k)$ -superconcentrateur est en général plus grand que  $2n$ . L'entier  $k$  de la définition est la *densité* du superconcentrateur, dont la qualité se mesure à la petitesse de  $k$ . Gabber et Galil ([25], Théorème 3) ont montré comment construire une famille infinie de superconcentrateurs à densités bornées à partir d'une famille infinie de graphes expanseurs à valences bornées ; les graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis mènent ainsi à des familles de superconcentrateurs de densité inférieure à 58 ; néanmoins, ceci n'est pas aussi bon que la densité de 36 qu'on peut atteindre par des arguments de comptage non constructifs (voir [43] pour les détails). Les graphes de Morgenstern [51] construits à partir de diagrammes de Ramanujan fournissent des familles de superconcentrateurs de densité 66, et Morgenstern conjecture qu'une de ses constructions mène à une famille de superconcentrateurs de densité 28.

## 4.2 Dimension de certains espaces de formes modulaires

Fixons un nombre premier  $p$  et un entier positif  $N$  non divisible par  $p$ . Notons  $C'(\Gamma_0(N), 2)$  l'espace engendré par les formes modulaires paraboliques de poids 2 et de niveau  $N$  qui sont fonctions propres de l'opérateur de Hecke classique  $T_p$ , et associées à des valeurs propres *entières*. En étudiant la distribution asymptotique des valeurs propres de certains revêtements des graphes de Mestre et Oesterlé, Serre [64] pour l'énoncé (a) et Feng-Li [23] pour l'énoncé (b) ont montré

**Théorème 6** (a) Soit  $\{l_i : i \geq 1\}$  une famille infinie de nombres premiers. Alors  $\dim C'(\Gamma_0(l_i), 2) = o(l_i)$ .

(b) Soit  $M_i : i \geq 1$  une famille d'entiers de la forme  $M_i = l_i N_i$ , où  $l_i$  est un nombre premier ne divisant pas  $N_i$ , et  $l_i \rightarrow \infty$  pour  $i \rightarrow \infty$ . Si le nombre des facteurs premiers des  $M_i$  est borné, alors

$$\dim C'(\Gamma_0(M_i), 2) = o(M_i);$$

sinon

$$\dim C'(\Gamma_0(M_i), 2) = o(M_i \log \log M_i).$$

Voir aussi le Théorème 15 du Chapitre 9 de [37] pour une preuve.

## 4.3 Systèmes dynamiques

Soient  $p, q$  deux premiers distincts, congrus à 1 modulo 4. Notons  $B_p, B_q$  les ensembles de quaternions entiers définis au §2.1 ci-dessus. Notons  $\Omega$  le sous-ensemble de  $(B_p \times B_p \times B_q \times B_q)^{\mathbb{Z}^2}$  formé des  $(a_{m,n}, a'_{m,n}, b_{m,n}, b'_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$  tels que, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$\begin{aligned} a_{m,n} b_{m,n} &= \pm b'_{m,n} a'_{m,n} \\ a'_{m,n} &= a_{m+1,n} \\ b_{m,n} &= b'_{m,n+1} \\ b'_{m+1,n} &\neq \overline{b'_{m,n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{m+1,n} &\neq \overline{b_{m,n}} \\ a_{m,n+1} &\neq \overline{a_{m,n}} \\ a'_{m,n+1} &\neq \overline{a_{m,n}} \end{aligned}$$

Le groupe  $\mathbb{Z}^2$  agit sur l'espace compact  $\Omega$ , avec une mesure de probabilité invariante  $\mu$ . Mozes a étudié ce système, en commençant par montrer que son entropie topologique bi-dimensionnelle est nulle. Si on considère l'ensemble des restrictions des éléments de  $\Omega$  au carré  $\{0, \dots, N-1\} \times \{0, \dots, N-1\}$  et qu'on note  $a(N)$  le nombre d'éléments de cet ensemble, l'entropie topologique du système se définit comme  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log a(N)}{N^2}$ . Ici, on montre que

$$a(N) = (p+1)p^{N-1}(q+1)q^{N-1}$$

(Corollaire 1 de [53]), ce qui implique le résultat.

Soit  $\Gamma$  le sous-groupe de  $G(\mathbb{Q})$  engendré par l'image de  $B_p \cup B_q$ . Le groupe  $\Gamma$  est un réseau co-compact dans  $H = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_q) \simeq PGL(2, \mathbb{Q}_p) \times PGL(2, \mathbb{Q}_q)$ , et le système  $(\Omega, \mathbb{Z}^2, \mu)$  est un quotient de  $(H/\Gamma, \mathbb{Z}^2, \nu)$ , où  $\nu$  est la mesure de probabilité  $H$ -invariante sur  $H/\Gamma$  et  $\mathbb{Z}^2$  agit via un homomorphisme dans le sous-groupe de Cartan de  $H$ . En reliant  $\Omega$  aux graphes de Ramanujan de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis, Mozes démontre (Théorème 1 et Corollaire 4 de [53]) que le système dynamique  $(\Omega, \mathbb{Z}^2, \mu)$  est *mélangeant à tous les ordres*, ce qui doit se comprendre comme suit. Pour un entier  $k \geq 1$ , notons  $\Delta : \Omega \rightarrow \Omega^k$  l'inclusion de la diagonale, et faisons agir  $(\mathbb{Z}^2)^k$  sur  $\Omega^k$  par l'action-produit. Le système est *mélangeant d'ordre  $k$*  si, chaque fois qu'on se donne une suite  $(\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{k,n})_{n \geq 1}$  dans  $(\mathbb{Z}^2)^k$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{i,n} - \gamma_{j,n} = \infty$  pour  $i \neq j$ , la suite de mesures  $((\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{k,n})_* \Delta_*(\mu))_{n \geq 1}$  converge vers la mesure-produit  $\mu^{\otimes k}$ . Bien sûr, le système est mélangeant à tous les ordres s'il est mélangeant d'ordre  $k$  pour tout  $k \geq 1$ . Grâce aux bornes de Ramanujan, Mozes est capable de donner des estimations quantitatives sur la vitesse de mélange.

#### 4.4 Produits tensoriels de $C^*$ -algèbres

Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable; notons  $B(H)$  la  $C^*$ -algèbre des opérateurs linéaires bornés sur  $H$ , et  $B(H) \otimes B(H)$  le produit tensoriel algébrique de deux copies de  $B(H)$ . On s'intéresse aux différentes manières de compléter ce produit tensoriel en une  $C^*$ -algèbre (voir l'exposé Bourbaki de Pisier [60] pour l'historique du problème). La théorie générale des produits tensoriels de  $C^*$ -algèbres [68] montre que toute  $C^*$ -norme sur un produit tensoriel algébrique de  $C^*$ -algèbres est comprise entre une  $C^*$ -norme minimale  $\|\cdot\|_{\min}$  et une  $C^*$ -norme maximale  $\|\cdot\|_{\max}$ . Dans une série de cas importants (par exemple les  $C^*$ -algèbres nucléaires) on sait que ces deux  $C^*$ -normes coïncident, mais le problème pour  $B(H) \otimes B(H)$  est resté ouvert jusqu'en 1995, quand Junge et Pisier ont démontré [32]

**Théorème 7** *Pour un entier  $n$  positif, on pose*

$$\lambda(n) = \sup \left\{ \frac{\|u\|_{\max}}{\|u\|_{\min}} : u \text{ tenseur de rang au plus } n \text{ dans } B(H) \otimes B(H) \right\}.$$

Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$C \cdot n^{1/8} \leq \lambda(n) \leq \sqrt{n}.$$

En particulier on voit, en prenant  $n$  assez grand, que  $\|\cdot\|_{\min} \neq \|\cdot\|_{\max}$  sur  $B(H) \otimes B(H)$ . Junge et Pisier posent la question du comportement asymptotique de  $\lambda(n)$ , et introduisent eux-mêmes une autre quantité  $C_n$  qui est excellente pour minorer  $\lambda(n)$ ; ce nombre  $C_n$  dépend des représentations unitaires de dimension finie du groupe libre  $\mathbb{L}_n$  sur  $n$  générateurs  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Définition 10** On note  $C_n$  l'infimum de l'ensemble des nombres  $C > 0$  pour lesquels il existe une suite  $(\pi_k)_{k \geq 1}$  de représentations unitaires de dimension finie de  $\mathbb{L}_n$  telles que :

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\pi_k \otimes \bar{\pi}_m)(a_i) \right\| \leq C \text{ pour tous } k, m \text{ distincts}$$

(où  $\bar{\pi}_m$  désigne la représentation contragrédiente de  $\pi_m$ ).

Junge et Pisier [32] ont montré que  $\lambda_n$  et  $C_n$  sont liés par l'inégalité

$$(16) \quad \frac{n}{C_n} \leq \lambda(n).$$

En utilisant les graphes non bipartis de Morgenstern, qui sont des graphes de Cayley de quotients finis de  $\mathbb{L}_{q+1}$  pour  $q$  une puissance de premier, on peut montrer [71]

**Proposition 8** Pour  $n = q + 1$ , avec  $q$  une puissance de premier, on a

$$C_n \leq 2\sqrt{n-1}.$$

Grâce à l'inégalité (16), cela donne, pour  $n$  comme dans la proposition

$$\lambda(n) \geq \frac{n}{2\sqrt{n-1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

D'autre part, Pisier [59] a établi, pour tout  $n \geq 2$ , l'inégalité

$$(17) \quad C_n \geq 2\sqrt{n-1}.$$

Si  $n$  est comme dans la proposition, on a donc  $C_n = 2\sqrt{n-1}$ , et on conjecture bien sûr que cette égalité a lieu pour tout  $n$ . (La construction de familles infinies de graphes de Ramanujan de valence  $n$  qui seraient des graphes de Cayley non bipartis, permettrait de démontrer cette conjecture.) A partir de la proposition et de l'inégalité (17), il n'est pas très difficile de démontrer que cette conjecture est vraie asymptotiquement [70].

**Corollaire 2**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{2\sqrt{n}} = 1$ .

Le théorème de Junge-Pisier et l'inégalité (16) fournissent un encadrement assez satisfaisant pour le quotient  $\frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(n)}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

#### 4.5 Théorie combinatoire des groupes et propriété (T)

Il ne s'agit pas à proprement parler d'une application des graphes de Ramanujan, mais plutôt d'une application des graphes de Cayley dont les valeurs propres non triviales sont petites, sans être optimales.

Soit  $\Gamma$  un groupe. Une représentation unitaire  $\pi$  de  $\Gamma$  sur un espace de Hilbert  $H_\pi$  est *sans vecteur invariant* s'il n'existe pas de vecteur non nul fixe par  $\pi(\Gamma)$  dans  $H_\pi$ .

**Théorème 8** *Pour un groupe  $\Gamma$  de type fini, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une partie génératrice finie  $S \subset \Gamma$  et un nombre  $\epsilon > 0$  tels que, pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $\Gamma$ , sans vecteur invariant, et tout vecteur  $\xi \in H_\pi$ , il existe  $s \in S$  avec  $\|\pi(s)\xi - \xi\| \geq \epsilon\|\xi\|$ .*
2. *Pour toute partie génératrice finie  $S \subset \Gamma$ , il existe un nombre  $\epsilon > 0$  tel que, pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $\Gamma$ , sans vecteur invariant, et tout vecteur  $\xi \in H_\pi$ , il existe  $s \in S$  avec  $\|\pi(s)\xi - \xi\| \geq \epsilon\|\xi\|$ .*
3. *Pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $\Gamma$ , le premier espace de cohomologie  $H^1(\Gamma, H_\pi)$  est nul.*

Ce résultat est essentiellement dû à Delorme et Guichardet (voir le Théorème 7 du Chapitre 4 de [16]).

**Définition 11** *Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini. On dit que  $\Gamma$  possède la propriété (T) de Kazhdan si  $\Gamma$  satisfait aux conditions du théorème 8. Si  $\Gamma$  a la propriété (T) et si  $S$  est une partie génératrice finie de  $\Gamma$ , la constante de Kazhdan  $\kappa(\Gamma, S)$  est le plus grand  $\epsilon$  qui fait l'affaire au deuxième point du théorème 8.*

Grâce à Margulis [45], la propriété (T) a une idylle avec les graphes expanseurs. En effet, si  $N$  est un sous-groupe normal d'indice fini d'un groupe  $\Gamma$  ayant la propriété (T), si  $S$  est une partie génératrice finie symétrique à  $k$  éléments de  $\Gamma$ , et si  $S$  s'injecte dans  $\Gamma/N$  via l'application-quotient  $\Gamma \rightarrow \Gamma/N$ , la première valeur propre non triviale  $\mu_1$  de la matrice d'adjacence du graphe de Cayley  $X(\Gamma/N, S/N)$  satisfait

$$\mu_1 \leq k - \frac{\kappa(\Gamma, S)^2}{2}.$$

(c'est l'idée de Margulis revue par Alon et Milman [2]; voir le Théorème 13 du Chapitre 8 de [16] pour une preuve). On en tire que, si de plus  $\Gamma$  est résiduellement fini, la famille des graphes de Cayley  $X(\Gamma/N, S/N)$ , où  $N$  parcourt les sous-groupes normaux d'indice fini dans  $\Gamma$ , répond au *problème de base* de la section 1, et donc forme une famille infinie de graphes expanseurs. Pour un exemple concret, prendre  $\Gamma = SL(3, \mathbb{Z})$ .

Le problème est que les constantes de Kazhdan sont très difficiles à calculer : jusque'en 1993, on ne disposait d'aucune valeur exacte pour des groupes infinis ayant la propriété (T) (voir à ce propos l'appendice de [16], par Burger). De même, tous les exemples connus de tels groupes étaient obtenus via la théorie des réseaux dans les groupes de Lie semi-simples réels ou  $p$ -adiques. La situation a commencé à bouger en 1993 quand Cartwright, Mlotkowski et Steger [12] ont étudié une classe de groupes agissant simplement transitivement sur les sommets d'un immeuble euclidien de type  $\hat{A}_2$ , et ont donné une preuve

directe du fait que ces groupes ont la propriété (T). Comme il existe des immeubles de type  $\tilde{A}_2$  non classiques, c-à-d. qui ne proviennent pas d'un groupe algébrique sur un corps  $p$ -adique, cela fournissait les premiers exemples de groupes avec la propriété (T) mais pas directement liés à des réseaux. La démonstration de Cartwright-Mlotkowski-Steger était un peu pénible, mais avait le mérite de donner la valeur exacte de la constante de Kazhdan associée au système naturel de générateurs. Notons que Nevo et Shalom [54] ont récemment fait des progrès remarquables dans le calcul des constantes de Kazhdan pour les réseaux dans les groupes de Lie semi-simples.

Dans son Séminaire Bourbaki [58], Pansu suggère de démontrer géométriquement qu'un groupe a la propriété (T), en exploitant la troisième assertion du Théorème 8. En effet, supposons que  $\Gamma$  soit le groupe fondamental d'un complexe simplicial fini  $K$ , de revêtement universel  $\tilde{K}$ ; si  $\pi$  est une représentation unitaire de  $\Gamma$  sur un espace de Hilbert  $H_\pi$ , formons le fibré plat  $E_\pi = \tilde{K} \times_\Gamma H_\pi$ . On a alors

$$H^1(\Gamma, H_\pi) = H^1(K, E_\pi),$$

et l'idée de Pansu est de démontrer géométriquement l'annulation du membre de droite, par exemple en utilisant des techniques de courbure combinatoire à la Garland [26] (voir aussi [9]). Cette idée a été concrétisée dans le cas où  $\tilde{K}$  est un complexe simplicial fini de dimension 2, ce que nous supposons dorénavant.

L'avantage d'avoir  $\tilde{K}$  de dimension 2 est que, pour tout sommet  $v$  de  $\tilde{K}$ , le *link* de  $v$  est un graphe  $Lk(v)$ , que nous supposons connexe et régulier de valence  $k_v$  (cette dernière hypothèse est en fait trop forte : nous l'adoptons pour la simplicité des énoncés). Nous notons comme d'habitude  $\mu_{0,v} = k_v > \mu_{1,v} \geq \dots$  les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe  $Lk(v)$ .

**Théorème 9** *Soient  $\tilde{K}$  un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2, et  $\Gamma$  un groupe d'automorphismes de  $\tilde{K}$  agissant proprement avec quotient fini. On suppose que, pour tout sommet  $v \in K$ , le link  $Lk(v)$  est connexe, régulier de valence  $k_v$ , et satisfait  $\mu_{1,v} < \frac{k_v}{2}$ . Alors  $\Gamma$  possède la propriété (T).*

Ce résultat est dû indépendamment à Zuk ([76], Théorème 1), Ballmann et Swiatkowski ([5], Corollaire 1), et à Pansu ([57], Théorème 1) dans le cas où  $\tilde{K}$  est un immeuble euclidien de type  $\tilde{A}_2$ ; en particulier, on obtient une preuve géométrique du fait que les groupes de Cartwright-Mlotkowski-Steger ont la propriété (T).

Ballmann et Swiatkowski ont étudié les actions propres sur des complexes simpliciaux contractiles de dimension 2. Ils ont montré ([5], Théorème 2)

**Théorème 10** *Soit  $\langle S|R \rangle$  une présentation finie d'un groupe fini  $H$ ; soit  $X$  le graphe de Cayley de  $H$  par rapport à  $S \cup S^{-1}$ . On suppose que  $g(X) \geq 6$ . Alors le groupe  $\Gamma$  donné par la présentation*

$$(18) \quad \Gamma = \langle S \cup \{\tau\} | R \cup \{\tau^2\} \cup \{(s\tau)^3 : s \in S\} \rangle$$

*agit proprement avec quotient fini sur un complexe simplicial contractile de dimension 2, dont les links sont isomorphes à  $X$ . De plus l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{K}$  est transitive sur les*

sommets, et les fixateurs des sommets dans  $\Gamma$  sont exactement les conjugués de  $H$  dans  $\Gamma$ . Enfin, si  $g(X) \geq 7$ , le groupe  $\Gamma$  est hyperbolique au sens de Gromov.

Les groupes apparaissant dans cet énoncé sont de dimension cohomologique virtuelle 2. En combinant les deux derniers théorèmes, on obtient un résultat tout-à-fait remarquable : notons  $k = |S \cup S^{-1}|$  la valence de  $X$  et  $\mu_1$  la première valeur propre non triviale de sa matrice d'adjacence.

**Corollaire 3** *On garde les hypothèses du théorème 10. Si de plus  $\mu_1 < \frac{k}{2}$ , alors le groupe défini par la présentation (18) a la propriété (T) de Kazhdan.*

Ce résultat permet d'écrire explicitement des présentations de groupes infinis ayant la propriété (T). Bien entendu, la condition  $\mu_1 < \frac{k}{2}$  est considérablement moins restrictive que la condition de Ramanujan  $\mu_1 \leq 2\sqrt{k-1}$ . Comme exemples vérifiant les hypothèses du Corollaire, Ballmann et Swiatkowski donnent précisément les graphes de Lubotzky-Phillips-Sarnak et Margulis, puisqu'ils ont un grand tour de taille : c'est évidemment cher payé ! Pour des exemples de graphes de Cayley à petites valeurs propres, voir [24].

## 5 Remerciements

Merci à A. Terras, W. Li et J-P. Serre de m'avoir communiqué une série de références bien utiles. Je remercie M. Burger, P. de la Harpe, W. Li, S. Mozes, P. Sarnak et tout spécialement A. Lubotzky et J-P. Serre pour une série d'échanges éclairants.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ALON, *Eigenvalues and expanders*, *Combinatorica*, 6 (1986), pp. 83–96.
- [2] N. ALON AND V. MILMAN,  $\lambda_1$ , *isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators*, *J. Combin. Theory, ser. B*, 38 (1985), pp. 73–88.
- [3] J. ANGEL, N. CELNIKER, S. POULOS, A. TERRAS, C. TRIMBLE, AND E. VELASQUEZ, *Special functions on finite upper half planes*, *Contemporary Maths.*, 138 (1992), pp. 1–26.
- [4] J. ANGEL, S. POULOS, A. TERRAS, C. TRIMBLE, AND E. VELASQUEZ, *Spherical functions and transforms on finite upper half planes : eigenvalues of the combinatorial Laplacian, uncertainty, traces*, *Contemporary Math.*, 173 (1994), pp. 15–70.
- [5] W. BALLMANN AND J. SWIATKOWSKI, *On  $L^2$ -cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes*. Preprint, 1996.
- [6] F. BIEN, *Constructions of telephone networks by group representations*, *Notices Amer. Math. Soc.*, 36 (1989), pp. 5–22.
- [7] N. BIGGS, *Algebraic graph theory (2nd ed.)*, Cambridge University Press, 1993.
- [8] N. BIGGS AND A. BOSHIER, *Note on the girth of Ramanujan graphs*, *J. Combinatorial Theory, ser. B*, 49 (1990), pp. 190–194.
- [9] A. BOREL, *Cohomologie de certains groupes discrets et Laplacien  $p$ -adique*, in *Séminaire Bourbaki*, exposé 437, Springer, pp. 12-34, 1975.

- [10] M. BURGER, *Cheng's inequality for graphs*. Preprint, 1987.
- [11] P. BÜRGISSER, M. CLAUSEN, AND M. SHOKROLLAHI, *Algebraic complexity theory*, Springer-Verlag, 1997.
- [12] D. CARTWRIGHT, W. MLOTKOWSKI, AND T. STEGER, *Property (T) and  $\tilde{a}_2$  groups*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 44 (1993), pp. 213–248.
- [13] P. CHIU, *Cubic Ramanujan graphs*, Combinatorica, 12 (1992), pp. 275–285.
- [14] F. CHUNG, *Diameters and eigenvalues*, Journal Amer. Math. Soc., 2 (1989), pp. 187–196.
- [15] ———, *Spectral graph theory*, CBMS reg. conf. ser. in Math. 92, Amer. Math. Soc., 1997.
- [16] P. DE LA HARPE AND A. VALETTE, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque 175, Soc. Math. France, 1989.
- [17] Y. C. DE VERDIÈRE, *Distribution de points sur une sphère [d'après Lubotzky, Phillips et Sarnak]*, in Séminaire Bourbaki, exposé 703, Astérisque 177–178, p. 83–93, 1989.
- [18] P. DELIGNE, *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES, 43 (1974), pp. 273–308.
- [19] V. DRINFELD, *Finitely additive measures on  $S^2$  and  $S^3$ , invariant with respect to rotations*, Funct. Anal. and its Appl., 18 (1984), pp. 245–246.
- [20] ———, *The proof of Petersson's conjecture for  $GL(2)$  over a global field of characteristic  $p$* , Funct. Anal. Appl., 22 (1988), pp. 28–43.
- [21] M. EICHLER, *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion*, Arch. Math., 5 (1954), pp. 355–366.
- [22] P. ERDÖS AND H. SACHS, *Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knollenzahl*, Wiss. Z. Univ. Halle-Willenberg Math. Nat. R., 12 (1963), pp. 251–258.
- [23] K. FENG AND W. LI, *Spectra of hypergraphs and applications*, Journal of number theory, 60 (1996), pp. 1–22.
- [24] J. FRIEDMAN, *Some graphs with small second eigenvalues*, Combinatorica, 15 (1995), pp. 31–42.
- [25] O. GABBER AND Z. GALIL, *Explicit constructions of linear-sized superconcentrators*, J. Comp. and Syst. Sci., 22 (1981), pp. 407–420.
- [26] H. GARLAND,  *$p$ -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of  $p$ -adic groups*, Ann. of Math., 97 (1973), pp. 375–423.
- [27] L. GERRITZEN AND M. VAN DER PUT, *Schottky groups and Mumford curves*, Springer Lect. Notes in Math. 817, 1980.
- [28] Y. GREENBERG, *Thèse*, PhD thesis, Hebrew Univ., Jerusalem, 1995.
- [29] D. HUSEMOLLER, *Elliptic curves*, Springer, 1987.
- [30] Y. IHARA, *Discrete subgroups of  $PL(2, k_p)$* , in Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. pure Math. IX, Amer. Math. Soc., pp. 272–278, 1966.

- [31] —, *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over  $p$ -adic fields*, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), pp. 219–235.
- [32] M. JUNGE AND G. PISIER, *Bilinear forms on exact operator spaces and  $B(H) \otimes B(H)$* , Geometric and Functional Analysis, 5 (1995), pp. 329–363.
- [33] N. KATZ, *Estimates for Soto-Andrade sums*, J. reine angew. Math., 438 (1993), pp. 143–161.
- [34] F. LAZEBNIK, V. USTIMENKO, AND A. WOLDAR, *A new series of dense graphs of high girth*, Bull. Amer. Math. Soc., 32 (1995), pp. 73–79.
- [35] W. LI, *Eigenvalues of Ramanujan graphs*. Preprint, 1996.
- [36] —, *Character sums and abelian Ramanujan graphs*, J. Number Theory, 41 (1992), pp. 199–214.
- [37] —, *Number theory with applications*, World Scientific, 1996.
- [38] —, *A survey of Ramanujan graphs*, in Arithmetic, geometry and coding theory (R. Pellikaan, M. Perret, S.G. Vladut eds), W. de Gruyter, pp. 127–143, 1996.
- [39] W. LI AND P. SOLÉ, *Spectra of regular graphs and hypergraphs, and orthogonal polynomials*, European J. Combinatorics, 17 (1996), pp. 461–477.
- [40] B. J. . R. LIVNE, *Ramanujan local systems on finite graphs*. Preprint, 1997.
- [41] A. LUBOTZKY, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Birkhäuser, 1994.
- [42] A. LUBOTZKY, R. PHILLIPS, AND P. SARNAK, *Hecke operators and distributing points on  $S^2$ , I*, Comm. pure and applied Math., 39 (1986), pp. 149–186.
- [43] —, *Ramanujan conjectures and explicit constructions of expanders*, Proc. Symp. on Theo. of Comp. Sci. (STOC), 86 (1986), pp. 240–246.
- [44] —, *Ramanujan graphs*, Combinatorica, 8 (1988), pp. 261–277.
- [45] G. MARGULIS, *Explicit construction of concentrators*, Problems Inform. Transmission, 9 (1973), pp. 325–332.
- [46] —, *Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes*, Combinatorica, 2 (1982), pp. 71–78.
- [47] —, *Explicit group-theoretical constructions of combinatorial schemes and their application to the design of expanders and concentrators*, J. Problems of Information Transmission, 24 (1988), pp. 39–46.
- [48] A. MEDRANO, P. MYERS, H. STARK, AND A. TERRAS, *Finite analogues of Euclidean space*, J. comput. applied maths., 68 (1996), pp. 221–238.
- [49] J.-F. MESTRE, *La méthode des graphes. exemples et applications*, in Proc. int. Conf. on class numbers and fund. units of alg. number fields, Katata, Japan, 217–242, 1986.
- [50] T. MIYAKE, *Modular forms*, Springer, 1989.
- [51] M. MORGENSTERN, *Ramanujan graphs and diagrams : function field approach*, in Expanding graphs, Amer. Math. Soc, DIMACS ser. 10, pp. 111–117, 1993.

- [52] —, *Existence and explicit construction of  $q + 1$  regular Ramanujan graphs for every prime power  $q$* , J. Combinatorial Theory, ser. B, 62 (1994), pp. 44–62.
- [53] S. MOZES, *A zero entropy, mixing of all orders tiling system*, Contemporary Math., 135 (1992), pp. 319–325.
- [54] A. NEVO AND Y. SHALOM, *Explicit Kazhdan constants for representations of semisimple groups and their lattices*. Preprint, 1996.
- [55] A. NILLI, *On the second eigenvalue of a graph*, Discrete Math., 91 (1991), pp. 207–210.
- [56] A. OGG, *Modular forms and Dirichlet series*, Benjamin, 1969.
- [57] P. PANSU, *Formules de Matsushima, de Garland, et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*. Preprint, 1995.
- [58] —, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, in Séminaire Bourbaki, exposé 778, Astérisque 227, pp. 69–105, 1995.
- [59] G. PISIER, *Quadratic forms in unitary operators*. A paraître dans Linear Algebra and Appl.
- [60] —, *Espaces d'opérateurs : une nouvelle dualité*, in Séminaire Bourbaki, exposé 814, Février, 1996.
- [61] A. PIZER, *Ramanujan graphs and Hecke operators*, Bull. (New Ser.) Amer. Math. Soc., 23 (1990), pp. 127–137.
- [62] P. SARNAK, *Some applications of modular forms*, Cambridge University Press, 1990.
- [63] J.-P. SERRE, *Lettre à Winnie Li*. 8 octobre 1990.
- [64] —, *Lettre à Winnie Li*. 5 Novembre 1990.
- [65] —, *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , Astérisque 46, Soc. Math. France, 1977.
- [66] —, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke  $T_p$* , J. Amer. Math. Soc., 10 (1997), pp. 75–102.
- [67] J. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*, Springer, 1986.
- [68] M. TAKESAKI, *Theory of operator algebras I*, Springer-Verlag, 1979.
- [69] A. TERRAS, *Survey of spectra of Laplacians on finite symmetric spaces*, Experimental Maths., 5 (1996), pp. 15–32.
- [70] A. VALETTE, *An application of Ramanujan graphs to  $C^*$ -algebra tensor products, II*, in Sémin. théorie spectrale et géométrie, pp. 105–107, Institut Fourier, Grenoble, 1996.
- [71] —, *An application of Ramanujan graphs to  $C^*$ -algebra tensor products*, Discrete Math., 167 (1997), pp. 597–603.
- [72] A. VENKOV AND A. NITIKIN, *The Selberg trace formula, Ramanujan graphs, and some problems of mathematical physics*, St. Petersburg Math. J., 5 (1994), pp. 419–484.
- [73] M.-F. VIGNÉRAS, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Springer LNM 800, 1980.

- [74] A. WEIL, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 34 (1948), pp. 204–207.
- [75] —, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, 1948.
- [76] A. ZUK, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*, C.R. Acad. Sci. Paris, sér. I, 323 (1996), pp. 453–458.

Alain VALETTE

Institut de Mathématiques  
Université de Neuchâtel  
Rue Emile-Argand 13  
CH-2000 NEUCHATEL  
SUISSE

E-mail : [alain.valette@maths.unine.ch](mailto:alain.valette@maths.unine.ch)

# *Astérisque*

JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

**Métriques d'Einstein-Kähler sur les variétés de Fano : obstructions et existence**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 830, p. 277-305

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_277\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__277_0)

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉTRIQUES D'EINSTEIN-KÄHLER SUR LES VARIÉTÉS DE FANO :  
OBSTRUCTIONS ET EXISTENCE

[d'après Y. Matsushima, A. Futaki, S.T. Yau, A. Nadel et G. Tian]

par Jean Pierre BOURGUIGNON

0. POSITION DU PROBLÈME

0.1. Sur une variété complexe  $M$  de dimension réelle  $n = 2m$ , nous nous intéressons aux métriques dites *d'Einstein-Kähler*, à savoir aux formes réelles  $\omega$  de type (1,1) définies positives et fermées qui vérifient, pour un nombre réel  $\lambda$ , la relation

$$(*_{\lambda}) \quad \rho_{\omega} = \lambda \omega ,$$

où  $\rho_{\omega}$  est la *forme de Ricci* de la métrique  $\omega$ , i.e. la forme de type (1,1) associée à sa courbure de Ricci, contraction du tenseur de courbure de Riemann. Cette forme est aussi (au facteur  $-i$  près) la courbure du fibré canonique  $K_M = \Lambda^m T_{\mathbb{C}}^* M \rightarrow M$ , fibré déterminant du fibré holomorphe tangent, pour la métrique hermitienne naturellement induite sur ce fibré par la métrique  $\omega$  sur le fibré tangent.

0.2. Il est à noter que la métrique naturelle sur l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^m$ , dite *de Fubini-Study*, satisfait à cette relation pour  $\lambda = 2(m+1)$  (le diamètre vaut alors  $\pi/2$  et la courbure sectionnelle varie entre 1 et 4). Dans [8], M. Berger a prouvé l'unicité de la métrique d'Einstein-Kähler sur  $\mathbb{C}P^m$  à homothétie près et à action du groupe  $\mathrm{PGL}_{m+1}(\mathbb{C})$  des transformations holomorphes de  $\mathbb{C}P^m$  près.

0.3. Dans une carte locale holomorphe  $(z^{\alpha})$ , si on note  $\omega = i \sum_{\alpha, \beta=1}^m g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$  l'expression de la forme de Kähler, alors la forme de Ricci  $\rho_{\omega}$  s'écrit

$$(0.4) \quad \rho_{\omega} = -i\partial\bar{\partial} \log(\det(g_{\alpha\bar{\beta}})) .$$

La classe de cohomologie définie par la métrique  $\omega$ , notée  $[\omega]$ , est appelée la *classe de Kähler*. Par sa relation à la courbure du fibré  $K_M$ , la forme  $\rho_{\omega}$  définit elle aussi une classe de cohomologie qui vérifie  $[\rho_{\omega}] = 2\pi c_1(M)$ , où  $c_1(M)$  désigne la première classe de Chern réelle du fibré  $T_{\mathbb{C}}M$  sur  $M$ .

Dès lors, une première condition apparaît : pour résoudre  $(*_\lambda)$ , il est nécessaire que la première classe de Chern soit nulle ou contienne une forme définie positive ou négative suivant que  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$  ou  $\lambda < 0$ . En fait dans ces deux derniers cas nous normalisons la métrique en supposant<sup>1</sup>  $\lambda = \pm 1$ .

**0.5.** Dans [82] et [83], S. T. Yau résout la conjecture de Calabi (cf. [16]) selon laquelle, si  $M$  est compacte, toute forme dans la classe  $2\pi c_1(M)$  est la courbure de Ricci d'une métrique kählérienne de classe de Kähler fixée ce qui équivaut à fixer la forme volume. Par suite, lorsque  $c_1(M) = 0$ , chaque classe de Kähler contient une métrique kählérienne à courbure de Ricci nulle (noter que cela conduit souvent à des modules de métriques d'Einstein-Kähler comme par exemple sur les surfaces K3).

Lorsque  $c_1(M)$  est définie (positive ou négative), la classe de Kähler d'une métrique d'Einstein-Kähler normalisée est bien définie par la structure holomorphe de  $M$ .

Dans le cas  $c_1(M) < 0$ , i.e. lorsque le fibré canonique est ample, il y a existence et unicité de la métrique d'Einstein-Kähler comme l'ont montré T. Aubin (cf. [2]) et S.T. Yau (cf. [82]). Cette métrique généralise en dimension supérieure les métriques à courbure constante des surfaces de Riemann, et sert d'auxiliaire uniformisant à la géométrie holomorphe.

**0.6.** Ce rapport est centré sur le cas  $c_1(M) > 0$ , i.e. lorsque le fibré anticanonique de  $M$  est ample (on dit que  $M$  est une variété de Fano), qui est beaucoup plus délicat : des obstructions diverses apparaissent, et la question de l'existence n'est pas encore complètement résolue, bien que la compréhension que nous en avons ait considérablement progressé ces dernières années. Ce problème mêle de façon intime des estimations analytiques, des considérations géométriques de plusieurs ordres et des concepts algébriques, ce qui en fait la subtilité, et en rehausse l'intérêt (noter que ceci est tout à fait dans le cadre de pensée développé par S.T. Yau dans [83]).

Dans la suite, nous travaillons toujours avec des métriques kählériennes  $\omega$  vérifiant la condition  $[\omega] = 2\pi c_1(M)$ , et nous cherchons donc à résoudre l'équation  $(*_1)$ .

**0.7.** Dans le cadre kählérien, il faut noter qu'un certain nombre de fonctionnelles classiques de la géométrie riemannienne prennent une signification cohomologique, et deviennent des invariants kählériens ou holomorphes.

Il en est ainsi du volume  $\int_M \omega^m / m!$  qui vaut  $[\omega]^m(M) / m!$  (avec notre choix pour  $[\omega]$ , il s'identifie donc au nombre de Chern  $c_1^m$  à  $(2\pi)^m / m!$  près ; dans la suite nous

---

<sup>1</sup> Cette normalisation n'est pas une restriction car, pour tout  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $\rho_{a^2 \omega} = \rho_\omega$ .

le noterons  $V(M)$ ) et de la courbure scalaire totale qui vaut  $\int_M \rho_\omega \wedge \omega^{m-1}/m! = (c_1(M) \cup [\omega]^{m-1})(M)/m!$  (soit encore  $c_1^m$  à  $(2\pi)^m$  près).

**0.8.** Les variétés de Fano sont algébriques projectives puisqu'une puissance du fibré anticanonique est très ample. On peut par exemple utiliser les plongements plurianticanoniques dans l'espace projectif  $P(H^0(M, K_M^{-k}))^*$  de l'espace vectoriel des sections holomorphes de puissances du fibré anticanonique pour  $k$  assez grand obtenus par évaluation sur une base quelconque. En utilisant un résultat de S. Kobayashi (cf. [39]) et la solution de la conjecture de Calabi, on prouve que ces variétés sont compactes simplement connexes, en particulier n'ont pas de 1-formes holomorphes non nulles.

En dimension 1,  $\mathbb{C}P^1$  est la seule variété de Fano ; en dimension 2, les variétés de Fano s'identifient aux surfaces de Del Pezzo (cf. [24]), à savoir à difféomorphisme près  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ , et les surfaces  $D_k$  obtenues à partir de  $\mathbb{C}P^2$  en éclatant  $k$  points en position générale pour  $k \leq 8$  ; dès la dimension 3, leur classification (même différentiable) est beaucoup plus compliquée (cf. [22]) ; en dimension 4, certaines variétés de Fano sont difféomorphes à des variétés de type général (pour un exemple dû à F. Catanese et à C. LeBrun, cf. [19]). En dimension  $m$ , les exemples les plus simples sont fournis par les hypersurfaces de  $\mathbb{C}P^{m+1}$  de degré  $d$  pour  $d < m + 2$ .

**0.9.** Le cœur du problème est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de métriques d'Einstein-Kähler portant sur la structure holomorphe d'une variété de Fano. Sont d'abord apparues des obstructions, i.e. des conditions nécessaires ; pour des conditions suffisantes, il a fallu attendre que S.T. Yau proposât en 1990 une piste qui, initialement, semblait avoir peu de fondement.

**PROBLÈME** (S.T. Yau, cf. problème 65 de [85]).- *Montrer qu'une variété de Fano a une métrique d'Einstein-Kähler si et seulement si son fibré tangent est stable au sens de la théorie des invariants géométriques et son groupe d'automorphismes réductif.*

Dans cet exposé, nous présentons l'ensemble du problème et notamment les étapes franchies vers la résolution de cette question, particulièrement par G. Tian. Ceci inclut de donner un sens précis à la notion de stabilité d'une variété algébrique requise dans ce problème.

**0.10.** J'ai pu bénéficier de nombreuses remarques utiles pour la préparation et la mise au point de la version finale de ce texte. Je tiens à remercier J.-P. Demailly, P. Gauduchon, D. Hulin, A.D. Hwang, C. LeBrun, T. Mabuchi, Y. Nakagawa, et tout spécialement G. Tian pour leur aide.

0.11. Après cette introduction, le plan de l'exposé est le suivant :

1. Obstructions liées aux champs de vecteurs holomorphes
2. Approche analytique de l'existence
3. Estimations uniformes
4. Exemples et contre-exemples
5. Obstructions étendues et stabilité
6. Point de vue symplectique

## 1. OBSTRUCTIONS LIÉES AUX CHAMPS DE VECTEURS HOLOMORPHES

1.1. L'espace vectoriel  $\mathfrak{H}(M)$  des champs de vecteurs holomorphes de  $M$  est l'algèbre de Lie du groupe des transformations holomorphes  $H(M)$ . Plusieurs obstructions à l'existence de métriques d'Einstein-Kähler, et plus généralement à l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, font intervenir  $\mathfrak{H}(M)$ . La plus ancienne (1957) est due à Y. Matsushima, et une plus subtile, et plus récente (1983), à A. Futaki.

a) *L'obstruction de Matsushima*

**THÉORÈME 1** (cf. [46], [52]).- *L'algèbre de Lie  $\mathfrak{I}(M)$  des isométries infinitésimales d'une métrique kählérienne sur une variété compacte à courbure scalaire constante est une forme réelle de  $\mathfrak{H}(M)$ , qui est donc une algèbre de Lie réductive.*

1.2. Pour établir ce théorème, on utilise un certain nombre de formules reliant la géométrie complexe et la structure métrique. Nous en donnons un rapide aperçu.

Nous notons  $D$  la dérivation covariante de Levi-Civita de la métrique  $\omega$ . Si  $\zeta$  est une 1-forme de type (0,1), soit  $D''\zeta$  la partie de type (0,2) de  $D\zeta$ . Ainsi, si  $Z$  désigne le champ de vecteurs dual de  $\zeta$  pour la métrique hermitienne (il est de type (1,0)), alors  $Z$  est holomorphe si et seulement si  $D''\zeta = 0$ .

D'après un résultat d'A. Lichnerowicz (cf. [46]), les champs de vecteurs holomorphes et les isométries infinitésimales sont reliés comme suit : *un champ de vecteurs  $X$  est une isométrie infinitésimale si et seulement si sa partie de type (1,0) le champ de vecteurs  $Z = X - iJX$  (ici  $J$  désigne la structure complexe induite sur l'espace tangent par la structure holomorphe de  $M$ ), est holomorphe, et si la 1-forme  $\xi$  duale (au sens réel) de  $X$  est cofermée. Ce fait provient de la formule*

$$(1.3) \quad \bar{\partial} \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \bar{\partial} = D''^* D'' + \rho_\omega$$

où les  $*$  désignent les adjoints des opérateurs pour le produit hermitien global.

La formule (1.3) est la clef pour deux faits qui sont fondamentaux pour nous :

- la 1-forme  $\zeta$  duale d'un champ de vecteurs holomorphe  $Z$  vérifie  $\zeta = \bar{\partial}f$  pour une fonction complexe  $f$ , dont les parties réelle et imaginaire pure donnent lieu à des champs de vecteurs holomorphes ; le théorème de Lichnerowicz-Matsushima suit alors simplement (pour les détails, voir l'exposé X de [64]) ; le fait que dans la preuve la courbure de Ricci n'intervient que par sa co-différentielle permet (cf. [46] ou [9], chapitre 11) d'établir le théorème pour les métriques à courbure scalaire constante via la deuxième identité de Bianchi ;
- sur une variété kählérienne, la première valeur propre  $\lambda_1$  du laplacien agissant sur les fonctions vérifie  $\lambda_1 \geq b$  si  $\rho_\omega \geq b\omega > 0$ , avec égalité si et seulement s'il existe une fonction propre réelle  $f$  pour  $\lambda$  telle que  $\bar{\partial}f$  est duale au sens hermitien d'un champ de vecteurs holomorphe  $Z$  (et  $Jdf$  est duale au sens réel d'une isométrie infinitésimale) ; cette estimation (que nous utiliserons plus tard) sort directement de (1.3) appliquée à  $\bar{\partial}f$ .

1.4. Le théorème 1 implique, comme Matsushima le remarque dans [52], que toute variété de Fano  $M$  telle que  $\mathfrak{H}(M)$  n'est pas réductive n'admet pas de métrique d'Einstein-Kähler.

On voit directement par exemple que la variété de Fano  $D_1$  (obtenue en éclatant  $\mathbb{C}P^2$  en un point  $p$ ) est obstruée car toute transformation holomorphe de  $D_1$  fixe la courbe exceptionnelle qui se projette sur  $p$ . Dans [81], S.T. Yau a montré qu'il en est de même de  $D_2$ . On peut noter que, pour les surfaces  $D_k$  pour  $4 \leq k$ ,  $\mathfrak{H}(D_k) = 0$ .

b) Le caractère de Futaki

1.5. Dans [32], A. Futaki introduit une forme linéaire sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{H}(M)$  par la construction suivante qui fait intervenir l'espace des potentiels kählériens associés à une métrique kählérienne  $\omega$ , noté  $\mathcal{M}_\omega$ , objet qui va nous accompagner dans le reste de l'exposé.

On se sert fondamentalement du lemme classique suivant : pour toutes formes réelles de type (1,1)  $\alpha$  et  $\alpha'$  telles que  $[\alpha'] = [\alpha]$ , il est possible de trouver une fonction  $C^\infty$  réelle  $\varphi$  globalement définie sur  $M$  telle que  $\alpha' = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$ . Nous nous en servons pour la forme de Kähler  $\omega$  et nous posons  $\mathcal{M}_\omega = \{\varphi \mid \varphi \in C^\infty(M), \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi > 0\}$ . Noter que, pour toute constante réelle  $c$ ,  $\varphi + c \in \mathcal{M}_\omega$  dès que  $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$ .

Comme nous avons pris  $[\omega] = 2\pi c_1(M)$ , cela assure qu'il existe une fonction  $r_\omega$ , définie à une constante additive près, telle que  $\rho_\omega - \omega = i\partial\bar{\partial}r_\omega$ . Nous appellerons  $r_\omega$  la déviation de Ricci de  $\omega$  car une métrique  $\omega$  est d'Einstein-Kähler si et seulement si  $r_\omega \equiv 0$ .

**THÉORÈME 2** (cf. [32], [33]).— *La forme linéaire  $\Phi_\omega$  définie sur l’algèbre de Lie  $\mathfrak{H}(M)$  par  $\Phi_\omega(X) = \int_M (\mathcal{L}_X r_\omega) \omega^m / m!$  (où  $\mathcal{L}_X$  désigne la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs  $X$ ) est un caractère, appelé caractère de Futaki, qui est intrinsèque, i.e. ne dépend pas du choix de  $\omega$  dans  $2\pi c_1(M)$ .*

Dans notre situation, le théorème 2 prouve que *la non-nullité du caractère de Futaki est une obstruction à l’existence d’une métrique d’Einstein-Kähler*. Pour cela il suffit de se placer en une métrique d’Einstein-Kähler  $\omega_{KE}$ , en laquelle  $r_{\omega_{KE}} = 0$ , de constater que  $\Phi_{\omega_{KE}}$  est trivialement nul, et de se souvenir que  $\Phi$  est intrinsèque.

Dans [35], A. Futaki a développé de nombreuses propriétés du caractère qui porte son nom. Il montre qu’un des points de vue possibles est de le relier aux classes caractéristiques secondaires associées à certaines classes de Chern, d’où des possibilités de localisation grâce à des formules de résidus (cf. [10]). Ces formules permettent de faire le calcul explicite du caractère de Futaki dans un certain nombre de cas comme celui des variétés toriques (voir, 4.2), grâce notamment à des formules combinatoires (cf. [59] et [60]).

REMARQUE.— La définition du caractère de Futaki que nous avons donnée dans le théorème 2 semble faire dépendre son existence du fait que  $M$  est une variété de Fano. Il n’en est rien : une définition générale peut en être donnée en définissant l’écart de Ricci par comparaison de  $\rho_\omega$  à la forme harmonique qui lui est cohomologue. Le théorème affirme alors que  $\Phi_\omega$  ne dépend que de  $[\omega]$ .

**1.6.** Dans la section 4, nous donnons des exemples de variétés dont le caractère de Futaki n’est pas nul alors que  $\mathfrak{H}(M)$  est réductive (pour elles, l’obstruction de Matsushima ne s’applique donc pas). Il est à noter que cela nécessite que  $\mathfrak{H}(M)$  ne soit pas semi-simple. En effet, si  $\mathfrak{H}(M)$  est semi-simple, le caractère de Futaki  $\Phi$  est automatiquement nul car  $\Phi([\mathfrak{H}(M), \mathfrak{H}(M)]) = 0$ .

Il existe plusieurs preuves du théorème 2 ; la première fut donnée par A. Futaki dans [33]. Il s’est inspiré d’un calcul fait par J.L. Kazdan et F. Warner (cf. [38]) qui ont exhibé des obstructions à prescrire la courbure scalaire dans une classe conforme de métriques riemanniennes sur la sphère ; dans ce contexte, c’est l’algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes qui joue le rôle de  $\mathfrak{H}(M)$ . Dans la section 6, nous en esquissons une autre preuve, qui en fait une loi de conservation “à la Élie Cartan” pour une 1-forme différentielle invariante sur  $\mathcal{M}_\omega$ . Ce point de vue a l’avantage d’être plus naturel, et d’insérer le caractère de Futaki dans une famille plus vaste. Le problème de remonter ce caractère de l’algèbre de Lie  $\mathfrak{H}(M)$  au groupe  $H(M)$  est traité dans [36] et [7].

1.7. Pendant un temps, ces deux obstructions, liées à la non-trivialité de  $\mathfrak{H}(M)$ , ont été les seules disponibles<sup>2</sup>. C'est ce qui a poussé E. Calabi à conjecturer que le problème  $(*_1)$  serait soluble sur les variétés de Fano  $M$  telles que  $\mathfrak{H}(M) = 0$ .

Il n'en est rien et d'autres obstructions, dues à W. Ding et G. Tian en 1992 et inspirées du caractère de Futaki tout en n'ayant pas recours aux champs de vecteurs holomorphes de  $M$ , sont présentées dans la section 5.

## 2. APPROCHE ANALYTIQUE DE L'EXISTENCE

### a) La traduction analytique

2.1. L'existence de solutions de  $(*_1)$  a été recherchée par une méthode analytique, consistant à ramener cette équation à une équation aux dérivées partielles non-linéaire scalaire, dite de Monge-Ampère, qui est une modification simple de celle de la conjecture de Calabi. Cette mise en équation remonte à E. Calabi (cf. [16]), ainsi qu'un certain nombre de résultats fondamentaux concernant sa résolution.

Prenons une métrique kählérienne  $\omega$  comme référence (vérifiant  $[\omega] = 2\pi c_1(M)$  comme d'habitude). Le principe de base consiste à remonter l'équation  $(*_1)$  dans l'espace  $\mathcal{M}_\omega$  en considérant les autres métriques kählériennes  $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$  définissant la même classe de Kähler. La formule (0.4) donnant la forme de Ricci permet d'écrire  $\rho_{\omega'} - \rho_\omega = -i\partial\bar{\partial}\log((\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m/\omega^m)$ , et donc de ramener  $(*_1)$  à

$$(**) \quad \frac{(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m}{\omega^m} = e^{-\varphi + r_\omega} .$$

Il sera commode par la suite de normaliser  $r_\omega$  en supposant  $\int_M (e^{r_\omega} - 1) \omega^m = 0$ .

2.2. Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre des équations non-linéaires comme celle-là est la *méthode de continuité*, qui consiste à prouver que  $(**)$  a une solution parce qu'elle peut être plongée dans une famille à un paramètre d'équations  $(**_t)_{t \in [0,1]}$  telle que  $(**_1)$  s'identifie à  $(**)$ , que l'équation  $(**_0)$  soit résolue, et que l'ensemble des valeurs  $t \in [0, 1]$  pour lesquelles  $(**_t)$  a une solution est ouvert et fermé, donc  $[0, 1]$  tout entier.

<sup>2</sup> L'article [37] est un rapport très complet sur les résultats obtenus jusqu'en 1990.

**2.3.** La famille d'équations utilisée<sup>3</sup> est

$$(**_t) \quad \frac{(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^m}{\omega^m} = e^{-t\varphi_t + r_\omega} ,$$

de telle sorte que  $\rho_{\omega_t}$ , la forme de Ricci de  $\omega_t = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$ , est donnée par la formule

$$(2.4) \quad \rho_{\omega_t} = t\omega_t + (1-t)\omega ,$$

qui peut encore s'écrire  $\rho_{\omega_t} - \omega_t = (t-1)i\partial\bar{\partial}\varphi_t$ .

Noter que  $(**_0)$  est précisément l'équation traduisant que l'on prescrit  $\omega$  comme forme de Ricci d'une métrique de Kähler dans la classe  $[\omega]$ , à savoir celle de la conjecture de Calabi. (Il faut prendre garde que  $\varphi_0 \neq 0$ .)

b) *La mise en œuvre de la méthode de continuité*

**2.5.** La mise en œuvre détaillée de la méthode suit [83] (cf. [11] pour un rapport dans ce séminaire).

Le fait que l'ensemble des valeurs du paramètre pour laquelle une solution existe soit un ensemble ouvert s'obtient par application du théorème d'inversion locale dans un espace fonctionnel  $\mathcal{E}$  approprié (typiquement un espace de Hölder d'ordre supérieur à 2). Il est donc nécessaire d'avoir des informations sur le linéarisé de l'opérateur appliqué à  $\varphi_t$ , qui n'est autre que  $\Delta_{\omega_t} - t$  (ici  $\Delta_{\omega_t}$  désigne le laplacien de la métrique  $\omega_t$  avec la convention de signe qui lui donne un spectre positif). Cet opérateur est inversible précisément à cause de l'estimation de la première valeur propre du laplacien donnée en 1.3. Noter que, lorsqu'il existe des champs de vecteurs holomorphes non isométriques, l'inversibilité n'est assurée que pour  $t < 1$ . Ceci suggère qu'atteindre 1 doit être une question délicate.

Montrer la fermeture est la partie la plus problématique (nettement plus que la partie correspondante pour résoudre la conjecture de Calabi puisque des obstructions existent) : il faut montrer qu'une suite de solutions  $(\varphi_{t_i})$  des équations  $(**_{t_i})$  est bornée dans  $\mathcal{E}$ . Le contrôle des normes des dérivées troisièmes à partir de celui de normes d'ordres inférieurs est dû à Calabi (cf. [17]). Celui des dérivées premières et secondes à partir de celui de la norme uniforme est identique à celui utilisé pour la résolution de la conjecture de Calabi. *La question cruciale est donc celle de l'estimation de la norme uniforme des solutions des équations  $(**_t)$  pour  $t \in [0, 1]$ .*

---

<sup>3</sup> Il semble que T. Aubin ait été le premier à utiliser cette famille.

c) *D'autres approches analytiques*

**2.6.** Plusieurs problèmes géométriques ont récemment trouvé leur solution en utilisant une méthode dynamique, la solution apparaissant comme la valeur-limite d'une courbe intégrale d'un champ de vecteurs bien choisi dans un espace fonctionnel. On y fait souvent référence sous le nom de *méthode de l'équation d'évolution d'Hamilton* (cf. [14] pour un rapport dans ce séminaire).

Pour étudier le problème qui nous intéresse, cette méthode a été utilisée par H.D. Cao (cf. [18]) qui montre notamment que l'équation d'évolution a une solution pour tous les temps. La question qui demeure est d'étudier ce qui se passe lorsque le paramètre d'évolution tend vers l'infini. Il ne semble pas que les obstructions précédemment présentées aient fait l'objet d'une interprétation dans ce cadre, ce qui pourrait être intéressant. On peut noter aussi que G. Tian utilise partiellement ce point de vue dans [76] pour établir une partie de ses estimations et rencontre dans ce cadre des *solitons de Ricci* (cf. 5.9 pour une définition), qui sont la traduction analytique de ces obstructions.

### 3. ESTIMATIONS UNIFORMES

a) *Les nouvelles énergies et les fonctionnelles F*

**3.1.** La première piste pour établir une estimée uniforme adaptée à notre problème a été fournie par T. Aubin dans [3] : l'estimation uniforme provient d'un contrôle des exponentielles de fonctions. Cela passe par l'introduction d'une *énergie généralisée*  $I_\omega$  définie comme  $I_\omega(\varphi) = (V(M))^{-1} \int_M \varphi (\omega^m - (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m)$ . E. Calabi avait aussi recours à cette expression pour prouver l'unicité dans le cas de la conjecture qui porte son nom. (Rappelons que  $V(M)$  désigne le volume de  $M$  pour toute métrique kählérienne  $\omega$  telle que  $[\omega] = 2\pi c_1(M)$ ). Le nom d'énergie donné à la fonctionnelle  $I_\omega$  est justifié par le fait qu'en dimension 1 on a  $I(\varphi) = (4\pi)^{-1} i \int_M \partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi$  (dans ce cas indépendamment de  $\omega$ ), et que, pour  $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$ , nous avons  $I_\omega(\varphi) \geq 0$ , puisque nous avons la définition alternative

$$V(M) I_\omega(\varphi) = i \sum_{j=1}^m \int_M \partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge \omega^j \wedge (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^{m-j-1} .$$

Dans [3], T. Aubin appelle à une généralisation d'une inégalité due sur la sphère  $S^2$  à N. Trudinger, J. Moser et E. Onofri (cf. [79], [54], [61]), à savoir montrer qu'il existe des constantes  $C$  et  $\eta$  telles que, pour toute fonction  $\varphi$  pour laquelle la métrique

de Kähler  $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$  a une courbure de Ricci uniformément minorée<sup>4</sup>, on ait

$$(3.2) \quad \int_M e^{-\varphi} \omega^m \leq C \exp \left( \eta I_\omega(\varphi) - (V(M))^{-1} \int_M \varphi \omega^m \right).$$

Il prouve que, sur une variété de Fano, une condition suffisante pour avoir l'estimation uniforme recherchée est qu'on puisse prendre  $\eta < ((m + 1) V(M))^{-1}$ .

**3.3.** Dans [70], G. Tian introduit un autre invariant noté  $\alpha(M)$  et défini ainsi

$$\alpha(M) = \sup \{ \alpha \mid \exists C, \forall \varphi \in \mathcal{M}_\omega, \int_M \varphi \omega^m = 0, \int_M e^{-\alpha\varphi} \omega^m \leq C \}.$$

Bien que ce ne soit pas a priori évident, on montre que  $\alpha(M)$  ne dépend que de  $[\omega]$ , et donc, dans notre cas, de la structure holomorphe de  $M$  seulement.

Cet invariant se relie à l'invariant  $\eta$  et, comme T. Aubin le faisait pour lui, G. Tian établit dans [70] que, si  $\alpha(M)$  vérifie l'inégalité  $\alpha(M) > m/(m + 1)$ , alors l'estimée uniforme peut être établie, et l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler garantie. Dans [25], W. Ding donne une preuve indépendante de ce résultat.

Le calcul explicite de la constante  $\alpha(M)$  a été possible dans un certain nombre de cas concrets. Il existe aussi une version équivariante de cette constante définie en se restreignant à un espace restreint de fonctions, à savoir celles qui sont invariantes sous l'action d'un groupe compact d'automorphismes (cf. [77] et [67]). Comme dans le problème de la courbure prescrite sur les surfaces considéré par J. Moser (dans ce cas, il s'agit de passer de  $S^2$  à  $\mathbb{R}P^2$ ), en passant à un quotient il est possible d'améliorer la constante, et du coup d'avoir sur l'espace-quotient un théorème d'existence.

Nous revenons sur ce point dans la section 4 où nous passons en revue un certain nombre d'exemples.

**3.4.** Il s'est avéré utile de recourir aussi à deux autres fonctionnelles, notées respectivement  $J$  et  $F$ . Elles sont définies comme suit

$$J_\omega(\varphi) = \int_0^1 s^{-1} I_\omega(s\varphi) ds,$$

$$F_\omega(\varphi) = J_\omega(\varphi) - V(M)^{-1} \int_M \varphi \omega^m - \log \left( V(M)^{-1} \int_M e^{r_\omega - \varphi} \omega^m \right).$$

---

<sup>4</sup> C'est automatiquement le cas pour une suite de solutions de (\*\*t) à cause de l'identité (2.4).

Par un calcul direct on prouve que les points critiques de  $F_\omega$  sont les potentiels qui définissent une métrique d'Einstein-Kähler, ce qui montre que cette fonctionnelle a un certain caractère intrinsèque. De même si nous notons  $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ , on vérifie que  $F_\omega(\varphi) = -F_{\omega'}(-\varphi)$  et que  $F_\omega(\varphi) + F_{\omega'}(\psi) = F_\omega(\varphi + \psi)$ .

C'est en termes de cette fonctionnelle  $F_\omega$  que les résultats de G. Tian sont exprimés. Nous les passons maintenant en revue, en commençant par un résultat qui conduira dans la section 5 à une solution partielle du problème posé par S.T. Yau. Nous passons ensuite à une généralisation optimale de (3.2) (le cas de  $S^2$  est traité dans [3]).

b) La propriété des fonctionnelles  $F$

**3.5.** Dans [76], G. Tian introduit la définition suivante : on dit que  $F_\omega$  est propre sur  $\mathcal{M}_\omega$  si, pour toute constante  $C > 0$  et toute suite de fonctions  $(\varphi_i)$  vérifiant  $\text{osc } \varphi_i \leq C(1 + J_\omega(\varphi_i))$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} J_\omega(\varphi_i) = +\infty$ , alors  $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} F_\omega(\varphi_i) = +\infty$ . A cause des identités que vérifient les fonctionnelles  $F_\omega$  lorsque  $\omega$  varie dans  $\mathcal{M}_\omega$ , cette propriété est en fait indépendante du choix de  $\omega$  : on peut donc parler de la propriété des fonctionnelles  $F$ .

G. Tian donne alors une caractérisation des variétés de Fano qui admettent une métrique d'Einstein-Kähler dans les termes suivants.

**THÉORÈME 3** (cf. [76]).— Une variété de Fano telle que  $\mathfrak{H}(M) = 0$  admet une métrique d'Einstein-Kähler si et seulement si les fonctionnelles  $F$  sont propres.

Le caractère suffisant de la condition s'appuie sur le fait que la propriété de  $F$  assure une estimation uniforme de la norme  $C^0$  d'une famille de solutions  $\varphi_t$  de  $(**_t)$  pour  $t \rightarrow 1$ . Une telle estimation s'obtient en contrôlant  $F_\omega(\varphi_t)$  grâce aux relations  $d/dt(t(J_\omega(\varphi_t) - (V(M))^{-1} \int_M \varphi_t \omega^m)) = -(I_\omega(\varphi_t) - J_\omega(\varphi_t)) \leq 0$  (pour la dernière inégalité, la bonne explication est de nature symplectique, voir la section 6 pour la description du cadre). La propriété de  $F$  faisant intervenir des fonctions  $\varphi$  dont l'oscillation est contrôlée par  $J$ , il faut recourir au procédé d'itération de Moser pour relier  $J_\omega(\varphi_t)$  et  $\inf \varphi_t$  et utiliser l'inégalité  $\Delta_\omega \varphi_t \leq m$  pour contrôler  $\sup \varphi_t$  par  $\int_M \varphi_t \omega^m$  (pour des estimations plus complètes, voir [72]).

c) Une généralisation de l'inégalité de Trudinger-Moser-Onofri

**3.6.** Pour montrer qu'en une métrique d'Einstein-Kähler  $\omega_{KE}$  les fonctionnelles  $F$  sont propres en l'absence de champs de vecteurs holomorphes, G. Tian s'appuie sur un contrôle de  $F_{\omega_{KE}}$  par  $J_{\omega_{KE}}$ , qui est une conséquence d'une inégalité "à la Trudinger-Moser-Onofri" (cf. aussi [20]). Dans [27], W. Ding et G. Tian établissent

une telle inégalité qui leur permet de montrer que les fonctionnelles  $F$  sont bornées inférieurement. Dans [78], G. Tian et X. Zhu établissent une estimation a priori qui semble la version optimale de cette inégalité dans le cadre kählérien.

**THÉORÈME 4** (cf. [78]).— Soit  $M$  une variété de Fano munie d'une métrique d'Einstein-Kähler  $\omega_{KE}$ . Il existe des constantes  $\delta(m)$  et  $C$  (qui dépend de  $m$  et de l'écart entre 1 et la plus petite valeur propre de  $\Delta_\omega$  plus grande que 1) telles que toute fonction  $\varphi \in \mathcal{M}_\omega$  vérifiant  $\int_M \varphi \psi \omega^m = 0$  pour toute fonction propre  $\psi$  de  $\Delta_\omega$  pour la valeur propre 1, satisfasse

$$\frac{1}{V(M)} \int_M e^{-\varphi} \omega_{KE}^m \leq C \exp \left( J_{\omega_{KE}}(\varphi) - \int_M \varphi \omega_{KE}^m - (J_{\omega_{KE}}(\varphi))^\delta \right).$$

d) Les faisceaux d'idéaux multiplicateurs d'A. Nadel

**3.7.** Pour prouver l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler sur une variété de Fano, une autre stratégie, indirecte celle-là, a été utilisée par A. Nadel (cf. [56], [57]) qui a appliqué à ce problème la méthode des *faisceaux d'idéaux multiplicateurs* (par analogie avec une méthode utilisée par J.J. Kohn, cf. [42], dans son étude de la sous-ellipticité du problème de Neumann pour l'opérateur  $\bar{\partial}$  ; on notera aussi que, dans [68], H. Skoda produit des invariants holomorphes à partir de métriques singulières). Le caractère faisceautique de la méthode d'A. Nadel permet d'obtenir plus d'exemples que la méthode directe. (Dans [23], J.P. Demailly et J. Kollár donnent une approche plus élémentaire des faisceaux multiplicateurs, et en donnent d'autres usages.)

Le point de départ de la méthode est de caractériser algébriquement la divergence d'une suite de solutions  $(\varphi_t)$  des équations  $(**_t)$  non uniformément bornée lorsque  $t \rightarrow 1$ , en lui associant un faisceau cohérent d'idéaux  $\mathcal{I}(M, (\varphi_t))$ . Par sa construction même, ce faisceau vérifie un certain nombre de propriétés algébriques. C'est dans sa définition que les exponentielles  $e^{-\gamma\varphi_t}$  pour  $\gamma \in ]m/m+1, 1[$  jouent un rôle, en liaison avec les estimées présentées précédemment qui sont utilisées dans le travail de Nadel (voir [86] pour un point de vue plus algébrique sur la construction de A. Nadel).

Cela a pour conséquence que le sous-schéma  $Y$  de  $M$  qui est le support du faisceau  $\mathcal{I}(M, (\varphi_t))$  vérifie lui aussi des propriétés particulières : il est par exemple connexe et de genre arithmétique zéro. En combinaison avec des propriétés de fibrés amples sur  $M$ , on trouve ainsi des restrictions sur la structure holomorphe de  $M$ , ce qui est précisément ce qui nous occupe depuis le début dans ce problème.

L'approche d'A. Nadel a, elle aussi, une version équivariante attachée à des sous-groupes compacts  $G$  de  $H(M)$ , qui apporte d'autres restrictions sur le support  $Y$  de  $\mathcal{I}(M, (\varphi_t))$  lorsque celui-ci est  $G$ -invariant.

**THÉORÈME 5** (cf. [57]).— Soit  $G$  un sous-groupe compact du groupe  $H(M)$  des transformations holomorphes d'une variété de Fano  $M$ . Si  $M$  n'admet pas de faisceau d'idéaux multiplicateurs  $G$ -invariant, alors  $M$  admet une métrique d'Einstein-Kähler.

Notons que ce théorème permet effectivement, comme nous l'énonçons dans la section 4, de construire des exemples de métriques d'Einstein-Kähler sur certaines variétés de Fano.

**3.8.** Dans [58], A. Nadel vient de raffiner sa méthode en présence de champs de vecteurs holomorphes  $X$  qui sont dans le noyau du caractère de Futaki  $\Phi$ . Il voit cette condition comme une contrainte supplémentaire sur le lieu des points où une suite de solutions peut diverger et d'en tirer une estimée sur ces solutions. Il prouve notamment (cf. [58]) que, si  $X$  est un champ de vecteurs holomorphe sur une variété de Fano  $M$  appartenant au noyau du caractère de Futaki, le sous-schéma  $Y$  qui supporte le faisceau d'idéaux multiplicateurs attaché à une suite divergente  $(\varphi_t)$  de solutions de  $(**_t)$  lorsque  $t \rightarrow 1$  ne rencontre pas  $Z^+(X)$ , lieu des zéros de  $X$  où sa divergence a une partie réelle positive.

En tant que tel, cet énoncé ne fournit pas un théorème d'existence de métrique d'Einstein-Kähler mais il est en relation avec la notion d'invariant de Futaki étendu que nous présentons dans la section 5. On peut noter que, dans le problème de la courbure scalaire prescrite sur les sphères (qui présente beaucoup d'analogies avec le problème que nous considérons), une condition analogue a été transformée par A. Bahri et J.M. Coron en condition suffisante d'existence de solutions (cf. [4]).

#### 4. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

##### a) Le cas des surfaces

**4.1.** Nous commençons par le cas des surfaces ( $m = 2$ ) qui est complètement résolu dans des articles de S.T. Yau et G. Tian ([77]), et de G. Tian ([70] et [71]). Il est plus simple parce que la classification des surfaces de Del Pezzo est complètement connue (y compris les informations sur le module de déformations des structures complexes) et que la traduction analytique du problème est moins non-linéaire qu'en dimension supérieure.

**THÉORÈME 6** (cf. [71]).— Une surface complexe  $M$  à première classe de Chern positive admet une métrique d'Einstein-Kähler si et seulement si l'algèbre de Lie  $\mathfrak{H}(M)$  est réductive.

Il est connu que les espaces symétriques complexes  $\mathbb{C}P^2$  et  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  admettent des métriques d'Einstein-Kähler. Nous avons déjà fait remarquer que les surfaces  $D_1$  et  $D_2$  obtenues à partir de  $\mathbb{C}P^2$  en éclatant un ou deux points ne peuvent admettre de telles métriques. Il n'y a qu'une structure holomorphe sur  $D_3$  et sur  $D_4$ . Une construction utilisant des symétries particulières de  $D_3$  a permis à Y.T. Siu (cf. [66] et [67]) de construire une métrique d'Einstein-Kähler.

Les premiers exemples de métriques d'Einstein-Kähler sur les autres surfaces  $D_k$  (déformées à partir de la structure holomorphe de surface éclatée de  $\mathbb{C}P^2$  en  $k$  points en position générale pour  $5 \leq k \leq 8$ ) ont été obtenus par G. Tian et S.T. Yau (cf. [77]) à partir de certaines structures particulières pour lesquelles il était possible d'évaluer l'invariant  $\alpha(M)$  de Tian<sup>5</sup>.

*b) Des exemples résultant de constructions géométriques*

**4.2.** Des exemples de métriques d'Einstein-Kähler peuvent être obtenus par des méthodes géométriques classiques. C'est ainsi qu'un certain nombre d'espaces homogènes kählériens sont construits par des considérations algébriques (cf. [51], et [53] pour l'unicité à automorphisme de la structure holomorphe près).

D'autres exemples non-homogènes ont été construits par N. Koiso et Y. Sakane (cf. [43] et [62]) par une méthode inspirée de constructions "à la Kaluza-Klein", i.e. en trouvant une métrique d'Einstein-Kähler sur l'espace total d'un fibré dont la métrique est construite en remontant celle de la base (souvent prise homogène), et en choisissant bien la connexion utilisée pour définir les espaces orthogonaux aux espaces tangents aux fibres. Il s'agit de compactifications de  $\mathbb{C}^*$ -fibrés sur des variétés kählériennes compactes qui, elles, peuvent être homogènes. Les premiers exemples de cette sorte étaient de cohomogénéité un, ce qui ramenait la résolution d'une équation aux dérivées partielles à celle d'une équation différentielle ordinaire. La particularité intéressante de leurs exemples est que, *pour cette famille de variétés, l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler est équivalente à la nullité du caractère de Futaki.*

D'autres exemples ont été trouvés dans les variétés de Fano *toriques*, i.e., des variétés de dimension  $m$  qui ont une action presque transitive de  $(\mathbb{C}^*)^m$ , cf. [49] et [35]. La discussion de certains exemples discutés par A. Futaki fait intervenir une interprétation symplectique du caractère de Futaki pour ces variétés, cf. [34].

---

<sup>5</sup> C'est dans l'article [71] que, pour la première fois, il est fait appel aux métriques induites de la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif complexe par les plongements pluri-anticanoniques et aussi à des connexions spéciales sur des fibrés holomorphes, qui seront très importantes dans la section suivante.

Dans le même esprit, A.D. Hwang m'a fait remarquer qu'il est possible d'obtenir des modules de métriques d'Einstein-Kähler grâce aux résultats de persistance de solutions après petite perturbation de la structure complexe de  $C$ . LeBrun et S. Simanca (cf. [45]) qu'ils obtiennent à cause de la non-dégénérescence du caractère de Futaki. Cette propriété est en particulier vérifiée pour les hypersurfaces cubiques de Fermat (ici c'est le cas  $m \geq 3$  qui nous intéresse).

c) *Exemples de métriques d'Einstein-Kähler obtenues grâce à des estimées a priori*

**4.3.** Rappelons que la plupart des constructions de métriques d'Einstein-Kähler sur les surfaces  $M$  s'appuyant sur des méthodes analytiques ont été obtenues en évaluant l'invariant  $\alpha(M)$  de Tian.

Des exemples en plus grande dimension ont aussi été construits de cette façon : par exemple G. Tian prouve que les hypersurfaces de degré  $m$  et  $m + 1$  de  $\mathbb{C}P^{m+1}$  admettent des métriques d'Einstein-Kähler.

**4.4.** Partant des propriétés géométriques du sous-schéma qu'il a mis en évidence lorsque la méthode de continuité ne permet pas de résoudre l'équation (\*\*<sub>1</sub>), A. Nadel montre dans [57] par exemple que l'hypersurface de Fermat de degré  $d$  dans  $\mathbb{C}P^n$  pour  $n/2 \leq d \leq n$  a des métriques d'Einstein-Kähler, et qu'il en est de même de certains revêtements ramifiés ou éclatés de  $\mathbb{C}P^m$ .

d) *Variétés obstruées*

**4.5.** Nous avons déjà donné des exemples de variétés de Fano obstruées par le théorème de Matsushima. Jusqu'ici nous n'avons donné aucun exemple de variété obstruée par le caractère de Futaki. En voici un donné par A. Futaki : on prend pour  $M$  l'espace total du fibré projectif sur  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$  associé au fibré somme directe des fibrés en droites tautologiques  $\mathcal{O}(-1)$  sur chaque facteur. On trouve d'autres exemples parmi les *variétés toriques* (cf. [59]).

**4.6.** Nous terminons cette revue d'exemples de variétés obstruées en présentant le *contre-exemple dû à G. Tian* (cf. [76]) à la *conjecture de Calabi* selon laquelle, sur une variété de Fano  $M$ , la nullité de  $\mathfrak{H}(M)$  serait une condition suffisante pour l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler.

La variété  $M$  est la sous-variété de la grassmannienne  $G_{4,7}(\mathbb{C})$  formée des espaces  $W$  de dimension 4 qui, un espace  $Q$  de dimension 3 étant donné dans  $\Lambda^2 \mathbb{C}^7$ , ont la propriété que  $Q$  se projette sur 0 dans  $\Lambda^2(\mathbb{C}^7/W)$ . Pour un choix générique de  $Q$ , la variété  $M$  associée est de Fano et n'a pas de champs de vecteurs holomorphes. Elle est cependant obstruée par des considérations de stabilité décrites dans la section 5.

e) Une réponse négative à une question d'Arthur Besse

**4.7.** Notons enfin que [19] contient des exemples de variétés de Fano de dimension  $2\ell$ ,  $\ell \geq 2$ , admettant des métriques d'Einstein-Kähler à courbure scalaire positive, qui sont difféomorphes à des variétés à fibré canonique ample, donc admettant des métriques d'Einstein-Kähler à courbure scalaire négative. Ceci donne les premiers exemples de variétés différentiables admettant des métriques d'Einstein de signes différents, répondant ainsi par la négative à une question formulée page 19 de [9].

La remarque fondamentale est que la surface de Barlow  $B$  (cf. [19]) a une déformation qui a un fibré canonique ample, alors qu'elle est  $h$ -cobordante (en fait homéomorphe) à une surface de Del Pezzo  $D_8$ . Par le théorème du  $h$ -cobordisme, les variétés  $D_8 \times D_8$  et  $B \times B$  (et plus généralement  $(D_8)^\ell$  et  $B^\ell$  pour  $2 \leq \ell$ ) sont difféomorphes.

## 5. OBSTRUCTIONS ÉTENDUES ET STABILITÉ

a) Caractère de Futaki étendu

**5.1.** Dans [26], W. Ding et G. Tian généralisent le caractère de Futaki de façon décisive en prenant avantage du fait que, pour une variété de Fano  $M$ , les puissances du fibré anticanonique  $K_M^{-k}$  sont très amples pour  $k$  assez grand. Ceci fournit des plongements  $\Psi_N$  de  $M$  dans les espaces projectifs complexes  $\mathbb{C}P^N$ . Dans la suite nous supposons donc que  $M$  est une sous-variété algébrique de  $\mathbb{C}P^N$  et que le fibré en hyperplans sur  $\mathbb{C}P^N$  se restreint en une puissance du fibré anticanonique  $K_M^{-1}$ .

**5.2.** Le groupe  $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$  des transformations holomorphes de  $\mathbb{C}P^N$  a certains sous-groupes à un paramètre qui proviennent de gradients de fonctions propres pour la plus petite valeur propre du laplacien (avec la normalisation que nous avons rappelée pour la métrique de Fubini-Study, cette valeur propre est  $2(N+1)$ ). Soit  $(\sigma_s)$  un tel groupe à un paramètre qui, par hypothèse, n'engendre pas un groupe compact de transformations mais au contraire "va à l'infini" dans  $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$ . Sous son action certaines coordonnées homogènes deviennent arbitrairement grandes avec l'effet géométrique d'"écraser certaines directions".

Posons  $M_s = \sigma_s(M)$ . Lorsque  $s \rightarrow \infty$ ,  $M_s$  converge vers une sous-variété (éventuellement singulière)  $M_\infty$  de  $\mathbb{C}P^N$ . Si  $M_\infty$  est irréductible et non-dégénérée (ce qui est vrai génériquement), alors  $\sigma_s$  préserve  $M_\infty$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et par suite le champ de vecteurs holomorphe que définit le groupe à un paramètre  $(\sigma_s)$  est tangent à  $M_\infty$ . On peut dire que  $M_\infty$  est obtenue à partir de  $M$  par *concentration* sous  $(\sigma_s)$ .

**5.3.** Il est alors utile d'introduire la sous-algèbre  $\mathfrak{H}(M_\infty)$  de l'algèbre de Lie de  $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$  formée des champs de vecteurs holomorphes qui sont tangents à  $M_\infty$  à laquelle nous étendons le caractère de Futaki. Pour cela, pour  $X \in \mathfrak{H}(M_\infty)$ , nous évaluons la dérivée  $\mathcal{L}_X r_\omega$ , où  $r_\omega$  désigne la déviation de Ricci sur la partie régulière  $M_\infty^{\mathrm{reg}}$  de  $M_\infty$  pour une métrique  $\omega$  dite *admissible*, i.e. induite de la métrique de Fubini-Study  $\omega_{FS}$  par un plongement  $\Psi_N$ . Les phénomènes de compensation qui assurent que  $\int_M \mathcal{L}_X r_\omega$  ne dépend pas de la métrique  $\omega \in 2\pi c_1(M)$  continuent de fonctionner *pourvu que l'on prenne soin de contrôler ce qui se passe aux points singuliers* (par exemple en passant par une résolution de  $X_\infty$ ). C'est évidemment là que réside tout la subtilité de l'extension.

Le résultat essentiel est alors le suivant.

**THÉORÈME 7** (cf. [26]).— *Soit  $M_\infty$  la variété algébrique (supposée normale) obtenue par concentration par un sous-groupe à un paramètre ( $\sigma_s$ ) de  $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$  agissant sur un plongement plurianticanonique d'une variété de Fano  $M$ . Si  $M$  admet une métrique d'Einstein-Kähler, alors l'extension à  $\mathfrak{H}(M_\infty)$  du caractère de Futaki a une partie réelle non-négative.*

**5.4.** Dans [26], les auteurs ne parviennent pas à déduire du théorème 7 un nouvel exemple de variété de Fano qui soit obstruée. Ils donnent cependant une variété d'orbites kählérienne à laquelle la construction précédente s'applique.

Notons qu'ils constatent que les variétés d'orbites de la famille qu'ils considèrent ont un fibré stable au sens de Mumford. Cela nous remet sur la voie proposée par S.T. Yau dans le problème cité dans l'introduction, et incite à considérer de plus près les relations entre les constructions précédentes et les notions de stabilité des variétés algébriques.

Dans [76], G. Tian part de la propriété du caractère de Futaki étendu qui apparaît dans le théorème 7 pour des déformations générales d'une variété algébrique  $M$  telle que  $\mathfrak{H}(M) = 0$  pour introduire la notion de *K-stabilité*. Avant de revenir à l'étude des variétés algébriques proprement dites, nous passons en revue le cas des fibrés holomorphes.

#### b) *Semi-stabilité et stabilité des fibrés*

**5.5.** Les concepts de stabilité (et de semi-stabilité) des fibrés et des variétés projectives ont été développés avec l'étude du problème de leurs modules, dans le contexte de la géométrie algébrique (cf. [55] par exemple pour une introduction). Nous sommes intéressés à la liaison de cette théorie avec des données métriques.

Dans le cadre de la théorie des fibrés, ce lien est maintenant établi de façon satisfaisante (cf. [1] pour le cas des surfaces de Riemann dans le cadre de l'étude de la fonctionnelle de Yang et Mills sur l'espace des connexions, [41] et [65] pour des présentations très complètes). Rappelons qu'un fibré holomorphe  $E$  sur une variété kählérienne  $(M, \omega)$  de dimension  $m$  est dit *stable par rapport à  $[\omega]$*  si, pour tout sous-faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  du faisceau  $\mathcal{O}(E)$  des germes de sections holomorphes de  $E$  dont le rang est strictement inférieur à  $m$ , on a

$$\frac{c_1(\mathcal{F}) \cup [\omega]^{m-1}(M)}{\text{rang } \mathcal{F}} < \frac{1}{m} c_1(M) .$$

Il est dit *semi-stable par rapport à  $[\omega]$*  si l'inégalité précédente n'est pas stricte pour certains faisceaux.

Si on munit le fibré  $E$  d'une métrique hermitienne  $h$ , on fait apparaître sa courbure qui est une 2-forme  $\Omega_h$  à valeurs dans  $\text{End } E$ . Dans [47] Lübke montre que l'existence sur le fibré  $E$  d'une métrique d'*Hermite-Einstein*, i.e. une métrique  $h$  sur  $E$  pour laquelle il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\omega^{m-1} \wedge \Omega_h = \lambda \omega^m \otimes Id_E$ , entraînait qu'il soit semi-stable, somme de fibrés stables, donc stable si irréductible (voir aussi [40]).

L'énoncé réciproque, connu sous le nom de *conjecture de Hitchin-Kobayashi*, a été établi d'une part par S. Donaldson (cf. [28] et [29]), qui a utilisé à la fois des idées empruntées à la géométrie algébrique et à la géométrie symplectique (voir la section 6), et par K. Uhlenbeck et S.T. Yau (cf. [80]), qui se sont servis principalement d'estimations analytiques (pour un exposé dans ce séminaire, voir [50]).

**5.6.** Le problème qui nous occupe est plus difficile car plus non-linéaire. Cette situation est bien connue en Physique Mathématique où les théories de l'électromagnétisme et des champs de Yang-Mills sont plus faciles (et en particulier plus facilement quantifiables) que la Gravitation. En effet, dans notre cas, la métrique kählérienne joue deux rôles à la fois : celui de métrique de référence sur la base du fibré, et celui de métrique hermitienne sur le fibré tangent vu comme un fibré holomorphe comme les autres. *On pourrait donc penser que c'est la stabilité du fibré tangent qui importe*<sup>6</sup>. Ce n'est pas le cas, et il faut avoir recours à une notion de stabilité plus spécialement adaptée au caractère algébrique des variétés considérées que nous introduisons maintenant.

---

<sup>6</sup> Les articles [69] et [15] mettent en évidence les conséquences pour le fibré tangent de l'existence d'une métrique d'Einstein-Kähler (ou plus généralement d'une métrique à courbure scalaire constante).

c) Vers la solution du problème de S.T. Yau : la stabilité au sens de Chow-Mumford

**5.7.** Le cas le plus élémentaire pour l'étude de la *stabilité des variétés projectives* est celui des hypersurfaces complexes de  $\mathbb{C}P^{m+1}$ . Dans le contexte qui nous intéresse ici, la liaison entre la stabilité et de l'existence de métriques d'Einstein-Kähler a été traitée par G. Tian dans [75]. Une hypersurface  $M$  définie par l'équation  $f = 0$ , où  $f \in \mathcal{P}_{m+2,d}$ , espace des polynômes complexes à  $m+2$  variables de degré  $d$ , est dite *stable* si l'orbite  $\mathrm{PGL}_{m+2}(\mathbb{C}).f$  pour l'action  $f \mapsto f \circ \sigma^{-1}$  est fermée dans  $\mathcal{P}_{m+2,d}$  et si le stabilisateur de  $f$  dans  $\mathrm{PGL}_{m+2}(\mathbb{C})$  est fini. (Noter que l'équation  $f \circ \sigma^{-1} = 0$  est celle de l'hypersurface  $\sigma(M)$ .) Elle est dite *semi-stable* si  $0 \notin \mathcal{P}_{m+2,d}$ .

Les hypersurfaces lisses sont stables, et dans [75] G. Tian relie la *semi-stabilité* de l'hypersurface  $M$  ayant seulement des singularités du type "espace d'orbites" à l'existence de métriques d'Einstein-Kähler généralisées en mettant en correspondance deux fonctionnelles définies sur les orbites, à savoir  $\log \|f \circ \sigma^{-1}\|$  et la  $K$ -énergie des métriques kählériennes induites sur les hypersurfaces  $\sigma(M)$ , notion qui est définie dans la section 6.

**5.8.** Dans le cas général d'une sous-variété algébrique  $M$  de  $\mathbb{C}P^N$ , la définition de la stabilité (et de la semi-stabilité) est plus lourde à mettre en place (pour les détails en relation avec notre point de vue, voir [74] et [76]).

A toute déformation  $Z$  de  $M$ , on associe un fibré virtuel  $L_Z$  construit à partir du fibré  $L$  en hyperplans sur  $\mathbb{C}P^N$  et de la déformation de  $M$ . Ce fibré est naturel en ce sens que son caractère de Chern reproduit exactement en cohomologie l'interprétation comme classe caractéristique secondaire de Bott-Chern du caractère de Futaki développée par A. Futaki, T. Mabuchi et Y. Nakagawa. La stabilité au sens de Chow-Mumford de  $M$  (on dira que  $M$  est *CM-stable*) se formule alors, comme dans le cas des hypersurfaces, comme la fermeture de l'orbite de tout élément  $\tilde{z} \neq 0$  dans l'espace total de  $L_Z$  sous l'action de  $\mathrm{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$  ; pour la semi-stabilité, il s'agit de la non-appartenance de 0 à la fermeture de cette orbite.

Le résultat qui montre le chemin de la résolution du problème posé par S.T. Yau est alors le suivant.

**THÉORÈME 8** (G. Tian, cf. [76]).— *Si une variété de Fano  $M$  admet une métrique d'Einstein-Kähler, alors  $M$  est faiblement CM-stable. Si  $\mathfrak{H}(M) = 0$ , alors  $M$  est CM-stable.*

La principale question qui reste ouverte est celle de la réciproque. Pour cela, il faut pouvoir déduire la stabilité d'estimées a priori.

d) *Commentaires supplémentaires*

**5.9.** Dans [76], G. Tian s'intéresse aussi à ce qui se passe lorsque la méthode de continuité ne permet pas d'aller jusqu'en 1. Il en déduit l'existence d'un espace  $M_\infty$  dont les singularités sont de codimension réelle au moins 4, d'un champ de vecteurs  $X \in \mathfrak{X}(M)$  dont l'invariant de Futaki étendu a une partie réelle négative. De plus la métrique  $\omega_\infty$  vérifie l'équation

$$\rho_{\omega_\infty} - \omega_\infty = -\mathcal{L}_X \omega_\infty$$

sur la partie régulière  $M_{\omega_\infty}^{\text{reg}}$  de  $M_\infty$ .

De tels espaces ont été appelés des *solitons de Ricci* par R. Hamilton. (Il est intéressant de contraster cette équation avec celle où la métrique  $\omega_\infty$  a pour coefficient la courbure scalaire, au lieu d'une constante, qui n'a pas, elle, de solution non triviale, cf. [12]).

## 6. POINT DE VUE SYMPLECTIQUE

a) *L'espace des potentiels kählériens comme objet géométrique*

**6.1.** Tout au long de l'exposé est apparu l'espace  $\mathcal{M}_\omega$  des fonctions pluri-surharmoniques pour  $\omega$ , qui est l'espace des potentiels kählériens de notre problème. Jusque là, nous avons laissé dans l'ombre sa géométrie qui est très riche et qui est la clef de beaucoup de questions reliées à notre problème. En fait  $\mathcal{M}_\omega$  est intrinsèquement attaché à  $M$ , la référence à  $\omega$  n'étant en quelque sorte que le choix d'un point-base. Cela est bien mis en valeur par la remarque suivante (cf. [31]), qui utilise le fait que  $[\omega]$  est multiple d'une classe entière donc est (à une constante multiplicative près) la courbure d'un fibré en droites holomorphe : *l'espace  $\mathcal{M}_\omega$  s'identifie à l'espace des métriques hermitiennes sur le fibré  $K_M$  à courbure positive*. En effet, si la métrique  $h$  a pour courbure  $i\omega$ , alors la courbure de la métrique  $e^\varphi h$  est  $i(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)$ . Désormais, nous notons  $\mathcal{M}$  au lieu de  $\mathcal{M}_\omega$ .

De plus, si on considère l'addition d'une constante réelle à un potentiel comme l'action du groupe additif  $\mathbb{R}$ , alors *l'espace quotient  $\mathcal{M}/\mathbb{R}$  s'identifie à l'espace des métriques kählériennes de la classe  $2\pi c_1(M)$* .

**6.2.** Dans [48], T. Mabuchi montre que  $\mathcal{M}$  a une métrique riemannienne naturelle (faible) : en effet au point  $\varphi \in \mathcal{M}$ , pour  $f, f' \in T_\varphi \mathcal{M} = C^\infty(M)$ , on peut poser par définition  $\langle f, f' \rangle = \int_M f f' (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m$ . Le résultat principal qu'il obtient est le fait que, pour ce produit scalaire,  $\mathcal{M}$  est un espace riemannien symétrique dont

la courbure se calcule au point  $\varphi$  par le crochet de Poisson des vecteurs tangents, à savoir pour  $f_1, f_2$  et  $f_3 \in C^\infty(M)$ ,  $R(f_1, f_2)f_3 = -\frac{1}{4} \{ \{ f_1, f_2 \}_\varphi, f_3 \}_\varphi$ , où  $\{ \cdot, \cdot \}_\varphi$  désigne le crochet de Poisson de la structure symplectique  $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ . Le seul point délicat est de prouver l'existence d'une dérivation covariante de Levi-Civita car  $\mathcal{M}$  est de dimension infinie (on peut noter cependant l'analogie avec l'espace symétrique des produits scalaires hermitiens sur un espace vectoriel).

Ce résultat a été retrouvé par S. Semmes dans [63], qui donne quelques prolongements intéressants du point de vue des équations de Monge-Ampère : il montre comment la recherche des géodésiques de  $\mathcal{M}$  est reliée à la solution des équations de Monge-Ampère homogènes. En prenant complexe le paramètre le long des géodésiques, ce qui revient à considérer des applications harmoniques définies sur une surface de Riemann  $\Sigma$  à valeurs dans l'espace symétrique  $\mathcal{M}$ , il en tire une interprétation nouvelle (et dynamique) de ces équations et permet aussi de les relier à l'étude d'équations de Monge-Ampère dégénérées sur  $\mathcal{M} \times \Sigma$ . Pour lui, c'est cette interprétation qui est le point de départ de son intérêt pour le sujet.

C'est aussi le point de vue développé systématiquement par S. Donaldson dans [31], et enrichi par une mise en relation avec des équations définissant des applications harmoniques définies sur des surfaces de Riemann à bord à valeurs dans un espace symétrique du type  $G^c/G$ , où  $G^c$  désigne le complexifié du groupe de Lie  $G$ . Ces équations sont analogues à celles qui apparaissent dans la théorie de Wess-Zumino-Witten.

**6.3.** Dans ce cadre, il est possible d'introduire une fonctionnelle  $I$  (cf. [31]) qui peut se relier à l'énergie. Sur  $\mathcal{M}$ , nous pouvons définir une 1-forme différentielle  $\iota$  en posant, pour  $f \in T_\varphi\mathcal{M}$ ,  $\iota(f) = \int_M f(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^m/m!$ . On vérifie que  $\iota$  est fermée. Comme  $\mathcal{M}$  est contractible, il est possible de définir une fonction à deux points  $I(\varphi, \varphi')$  en calculant l'intégrale curviligne de la forme  $\iota$  sur tout chemin joignant  $\varphi$  à  $\varphi'$  (car cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi à cause de la fermeture de  $\iota$ ). Pour avoir une formule explicite on prend comme chemin joignant  $\varphi$  à  $\varphi'$  un segment, et on retrouve l'énergie généralisée  $I_\omega$  par la formule  $I_{\omega+i\partial\bar{\partial}\varphi} = I(\varphi, \cdot)$ .

Les considérations précédentes suggèrent de travailler en prenant un point-base et de décomposer  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{K} \times \mathbb{R}$ , où  $\mathcal{K} = \{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{M}, I_\omega(\varphi) = 0 \}$  (la notation  $\mathcal{K}$  est là pour rappeler que cet espace peut être identifié à l'espace des métriques kählériennes de la classe  $2\pi c_1(M)$  et a donc une signification géométrique évidente). La décomposition précédente est en fait isométrique pour la métrique riemannienne naturelle.

b) *L'unicité des métriques d'Einstein-Kähler*

**6.4.** Dans le cadre de la géométrie de dimension infinie de  $\mathcal{M}$ , il est aussi possible d'interpréter l'invariant de Futaki comme une loi de conservation "à la Élie Cartan" liée à une action du groupe  $H_0(M)$  sur  $\mathcal{M}$ . En effet, si  $\psi \in H_0(M)$ , alors nous avons  $\psi^*\omega = \omega + i\partial\bar{\partial}\alpha_\psi$ , ce qui nous permet de définir une action par la formule  $\psi.\varphi = \varphi \circ \psi + \alpha_\psi$  (où  $\alpha_\psi$  doit être normalisé). On doit vérifier qu'il s'agit bien d'une action.

Introduisons alors sur  $\mathcal{M}$  la 1-forme différentielle  $\tau$  définie sur  $f \in T_\varphi\mathcal{M}$  par  $\tau(f) = \int_M f \rho_{\omega+i\partial\bar{\partial}\varphi} \wedge (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^{m-1}$ . Les deux faits fondamentaux concernant  $\tau$  (cf. [13]) sont les suivants : la forme  $\tau$  est fermée et invariante sous l'action de  $H_0(M)$  sur  $\mathcal{M}$  que nous venons de définir. Par suite, si  $X \in \mathfrak{H}(M)$ , nous avons la relation<sup>7</sup> " $\mathcal{L}_{X_\varphi}\sigma = 0$ " qui, par la relation fondamentale du calcul des variations  $\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ , la forme  $\tau$  étant fermée, donne la constance de la fonction  $\tau(X_\varphi)$  sur  $\mathcal{M}$  (où  $X_\varphi$  désigne l'action de  $\mathfrak{H}(M)$  déduite de l'action de  $H_0(M)$  définie précédemment), qui donne la constance du caractère de Futaki dans une classe de Kähler fixée.

**6.5.** Le fait que la 1-forme différentielle  $\tau$  soit fermée suggère que l'on considère sa primitive  $T$ , i.e. la fonction à deux points

$$T(\varphi, \varphi + \psi) = - \int_0^1 \left( \int_M \psi (\rho_{\omega_t} - \omega_t) \wedge (\omega_t)^{m-1} \right) dt ,$$

où  $\omega_t = \omega + i\partial\bar{\partial}(\varphi + t\psi)$ , l'indépendance du chemin choisi joignant  $\varphi$  à  $\varphi + \psi$  provenant bien entendu du fait que  $\tau$  est fermée. On vérifie facilement que l'on a  $T(\varphi, \varphi') = -T(\varphi', \varphi)$  et pour  $\varphi_1, \varphi_2$  et  $\varphi_3 \in \mathcal{M}$ ,  $T(\varphi_1, \varphi_2) + T(\varphi_2, \varphi_3) = T(\varphi_1, \varphi_3)$ .

Prenant un point-base dans  $\mathcal{M}$  (ce qui revient à prendre une métrique kählérienne de référence  $\omega$ ), T. Mabuchi définit (cf. [5]) la *K-énergie*  $T_\omega$  par  $T_\omega(\varphi) = T(0, \varphi)$ . Il prouve dans [5] que les points critiques des fonctionnelles  $T$  sont les métriques d'Einstein-Kähler, et aussi que, si  $(\xi_t)$  est le groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$  engendré par  $\text{Re}(X)$  pour un champ de vecteurs holomorphe  $X$  de  $M$ , alors  $d/dt(T(0, \alpha_{\xi_t}))|_{t=0} = \text{Re}(\Phi(X))$  si  $\alpha_{\xi_t}$  est défini par  $\xi_t^*(\omega) = \omega + i\partial\bar{\partial}\alpha_{\xi_t}$ . Ceci montre qu'il est possible de remonter le caractère de Futaki au groupe  $H(M)$ . De plus, pour toute famille  $\varphi_t$  de solutions de (\*\*<sub>t</sub>), il prouve que  $T(0, \varphi_t) \leq 0$ .

<sup>7</sup> Les guillemets sont là pour rappeler que nous considérons la dérivation de Lie dans le cadre de la variété de dimension infinie  $\mathcal{M}$ .

Ces calculs ont conduit S. Bando et T. Mabuchi (cf. [6]) à l'important résultat géométrique suivant, qui nécessite plusieurs arguments analytiques délicats mais qui s'appuie essentiellement sur la convexité de la  $K$ -énergie  $T_\omega$ .

**THÉORÈME 9** (cf. [6]).— *S'il existe une métrique de Kähler-Einstein sur une variété de Fano, alors celle-ci est unique, à l'action du groupe  $H_0(M)$  près.*

La question de l'extension du théorème 9 au cas à courbure scalaire constante reste ouverte (cf. [31] pour une conjecture dans ce sens, et [21] pour le cas des surfaces).

**6.6.** Il suit aussi du théorème de Bando-Mabuchi que toute métrique d'Einstein-Kähler sur une variété de Fano ayant un groupe d'automorphismes compact  $G$  admet  $G$  comme groupe d'isométries.

*c) Interprétation symplectique de la stabilité*

**6.7.** Dans [30], S. Donaldson propose une interprétation symplectique de l'intervention de la notion de stabilité dans le problème de l'existence de métriques d'Einstein-Kähler. Le schéma, déjà appliqué avec succès à certaines situations en géométrie algébrique, est le suivant. Un groupe  $G$  agit par transformations holomorphes isométriques sur une variété complexe  $\mathcal{C}$  munie d'une métrique kählérienne  $\Omega$ . On doit aussi disposer d'une application moment  $\mu$  de  $\mathcal{C}$  dans le dual de l'algèbre de Lie de  $G$  et d'une complexification  $G^c$  de  $G$  agissant aussi sur  $\mathcal{C}$ . L'identification entre objets holomorphes et objets métriques est donnée par la formule  $\mathcal{C}_{\text{stable}}/G^c = \mu^{-1}(0)/G$ , où  $\mathcal{C}_{\text{stable}}$  désigne l'ouvert formé des points stables de  $\mathcal{C}$  qui est invariant sous  $G^c$ .

C'est déjà cette approche qu'il a mise en œuvre pour l'étude de la stabilité des fibrés holomorphes. Dans ce cas l'espace  $\mathcal{C}$  est l'espace des connexions unitaires, le groupe  $G$  est celui des automorphismes unitaires. La  $m$ -forme  $\omega^{m-1} \wedge \Omega_h$  peut être prise comme application moment  $\mu$ .

**6.8.** S. Donaldson propose dans [30] la transposition de cette construction dans notre cadre via l'étude de l'espace des structures complexes sur le fibré tangent compatibles à une métrique  $\omega$ . Ce cas présente une non-linéarité supplémentaire. La  $m$ -forme  $\rho_\omega \wedge \omega^{m-1} - \omega^m$  peut être prise comme application moment pour l'action du groupe  $G$  qui peut s'identifier au sous-espace de  $C^\infty(M)$  formé des fonctions d'intégrale nulle. Le gradient symplectique de tout élément de  $C^\infty(M)$  donne naissance à un automorphisme de la structure symplectique définie par la forme réelle  $\omega$ . La difficulté principale est l'absence a priori d'une complexification de groupe  $G$ . S. Donaldson suggère de le remplacer par un feuilletage holomorphe dont les feuilles joueraient le rôle des orbites du groupe complexifié.

Dans cette approche, on peut espérer mettre en évidence des informations intéressantes sur la géométrie de la situation, en profitant du fait qu'il existe a priori un fibré en droites naturel sur  $\mathcal{C}$  qu'il serait souhaitable d'interpréter comme un fibré déterminant muni d'une métrique "à la Quillen-Bismut". Par ailleurs cela a l'avantage de permettre d'aborder naturellement le problème plus vaste de l'existence de métriques kähleriennes à courbure scalaire constante (dans le cadre restreint de la dimension 4, on peut aussi consulter [44] pour une autre approche de ce problème.)

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH, M.F., BOTT, R., *The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. London **A 308** (1983), 523–615.
- [2] AUBIN, T., *Équations du type de Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes*, C.R. Acad. Sci. Paris **283** (1976), 119–121.
- [3] AUBIN, T., *Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes à la démonstration d'une inégalité*, J. Functional Anal. **57** (1984), 143–153.
- [4] BAHRI, A., CORON, J.-M., *The Scalar Curvature Problem on the Standard 3-Dimensional Sphere*, J. Functional Anal. **95** (1991), 106–172.
- [5] BANDO, S., *The K-Energy Map, Almost Einstein-Kähler Metrics and an Inequality of the Miyaoka-Yau Type*, Tôhoku Math. J. **39** (1987), 231–235.
- [6] BANDO, S., MABUCHI, T., *Uniqueness of Kähler-Einstein Metrics Modulo Connected Group Actions*, in *Algebraic Geometry*, Sendai 1985, Adv. Studies in Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo, 1987, 11–40.
- [7] BANDO, S., MABUCHI, T., *On some Integral Invariants on Compact Complex Manifolds*, Proc. Japan Acad. Sci. **62** (1986), 197–200.
- [8] BERGER, M., *Sur les variétés d'Einstein compactes*, C.R. III<sup>ème</sup> Réunion Math. Expression Latine, Namur (1965), 35–55.
- [9] BESSE, A.L., *Einstein Manifolds*, Ergeb. Math. **10**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.
- [10] BOTT, R., *A Residue Formula for Holomorphic Vector Fields*, J. Differential Geom. **1** (1967), 311–330.
- [11] BOURGUIGNON, J.P., *Premières formes de Chern des variétés kähleriennes compactes*, in *Séminaire Bourbaki 1977-78*, Exposé n°507, Lect. Notes in Math. **710**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1978, 1–21.

- [12] BOURGUIGNON, J.P., *Ricci Curvature and Einstein Metrics*, in *Differential Geometry and Global Analysis*, Berlin 1979, U. Simon and D. Ferus Ed., Lect. Notes in Math. **838**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981, 42–63.
- [13] BOURGUIGNON, J.P., *Invariants intégraux fonctionnels pour des équations aux dérivées partielles d'origine géométrique*, in *Differential Geometry*, Peñíscola, A.M. Naveira Ed., Lect. Notes in Math. **1209**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987, 100–108.
- [14] BOURGUIGNON, J.P., *L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci*, in *Séminaire Bourbaki 1985-86*, Exposé n°653, Astérisque **145-146** (1987), 45–61.
- [15] BURNS, D., DE BARTOLOMEIS, P., *Stability of Vector Bundles and Extremal Metrics*, *Inventiones Math.* **92** (1988), 403–407.
- [16] CALABI, E., *The Space of Kähler Metrics*, in Proc. International Congress of Mathematicians, Amsterdam, **II** (1954), 206–207.
- [17] CALABI, E., *Improper Affine Hyperspheres and a Generalization of a Theorem of K. Jörgens*, *Michigan Math. J.* **5** (1958), 105–126.
- [18] CAO, H.D., *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on Compact Kähler Manifolds*, *Inventiones Math.* **81** (1985), 359–372.
- [19] CATANESE, F., LEBRUN, C., *On the Scalar Curvature of Einstein Manifolds*, Prépublication, Universität Göttingen.
- [20] CHANG, S.Y.A., YANG, P.C., *Prescribing Gaussian Curvature on  $S^2$* , *Acta Math.* **159** (1987), 215–259.
- [21] CHRUSCIEL, P., *Semi-Global Existence and Convergence of Solutions of the Robinson-Trautman (2-dimensional Calabi) Equation*, *Commun. Math. Phys.* **137** (1991), 289–313.
- [22] DEBARRE, O., *Variétés de Fano*, in *Séminaire Bourbaki 1996-97*, Exposé n° 827, 1–25.
- [23] DEMAILLY, J.-P., KOLLÁR, J., *Semi-continuity of Complex Singularity Exponents and Kähler-Einstein Metrics on Fano Orbifolds*, Prépublication Institut Fourier, Grenoble, à paraître.
- [24] DEMAZURE, M., *Surfaces de Del Pezzo*, in *Séminaire sur les singularités des surfaces 1976-1977*, Palaiseau, Lect. Notes in Math. **777**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, 23–69.
- [25] DING, W., *Remarks on the Existence Problem of Positive Kähler-Einstein Metrics*, *Math. Ann.* **282** (1988), 463–471.
- [26] DING, W., TIAN, G., *Kähler-Einstein Metrics and the Generalized Futaki Invariant*, *Inventiones Math.* **110** (1992), 315–335.

- [27] DING, W., TIAN, G., *The Generalized Moser-Trudinger Inequality*, in *Proc. Int. Conf. on Non-Linear Analysis*, Tianjin, K.C. Chang et al. Ed., World Scientific, Singapore, 1992, 57–70.
- [28] DONALDSON, S.K., *Anti-Self-Dual Yang-Mills Connections over Complex Algebraic Surfaces and Stable Vector Bundles*, *Proc. London Math. Soc.* **50** (1985), 1–26.
- [29] DONALDSON, S.K., *Infinite Determinants, Stable Bundles and Curvature*, *Duke Math. J.* **54** (1987), 231–247.
- [30] DONALDSON, S.K., *Remarks on Gauge Theory, Complex Geometry and 4-Manifold Topology*, *The Fields Medal Volume*, M.F. Atiyah and D. Iagolnitzer Ed., World Scientific, 1997.
- [31] DONALDSON, S.K., *Symmetric Spaces, Kähler Geometry and Hamiltonian Dynamics*, Preprint, Oxford Univ., Oxford, 1997.
- [32] FUTAKI, A., *On Compact Kähler Manifolds of Constant Scalar Curvatures*, *Proc. Japan Acad. Sci.* **59** (1983), 401–402.
- [33] FUTAKI, A., *An Obstruction to the Existence of Kähler-Einstein Metrics*, *Inventiones Math.* **73** (1983), 437–443.
- [34] FUTAKI, A., *The Ricci Curvature of Symplectic Quotients of Fano Manifolds*, *Tôhoku Math. J.* **39** (1987), 329–339.
- [35] FUTAKI, A., *Kähler-Einstein Metrics and Integral Invariants*, *Lect. Notes in Math.* **1314**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [36] FUTAKI, A., MABUCHI, T., *An Obstruction Class and a Representation of Holomorphic Automorphisms*, in *Geometry and Analysis on Manifolds*, *Lect. Notes in Math.* **1339**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, (1988), 127–141.
- [37] FUTAKI, A., MABUCHI, T., SAKANE, Y., *Einstein-Kähler Metrics with Positive Ricci Curvature*, in *Kähler Metrics and Moduli Spaces*, *Adv. Stud. Pure Math.* **18** (1990), 11–83.
- [38] KAZDAN, J.L., WARNER, F.W., *Curvature Functions for Compact 2-manifolds*, *Ann. Math.* **99** (1974), 14–47.
- [39] KOBAYASHI, S., *On Compact Kähler Manifolds with Positive Definite Ricci Tensor*, *Ann. Math.* **74** (1961), 570–574.
- [40] KOBAYASHI, S., *Curvature and Stability of Vector Bundles*, *Proc. Japan Acad. Sci.* **58** (1982), 158–162.
- [41] KOBAYASHI, S., *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, *Publ. Math. Soc. Japan* **15**, Princeton Univ. Press, Princeton, and Iwanami Shoten, Tokyo, 1987.

- [42] KOHN, J.J., *Subellipticity of the  $\bar{\partial}$ -Neumann Problem on Pseudo-Convex Domains : Sufficient Conditions*, Acta Math. **142** (1979), 79–122.
- [43] KOISO, N., SAKANE, Y., *Non-Homogeneous Kähler-Einstein Metrics on Compact Complex Manifolds*, in *Curvature and Topology of Riemannian Manifolds*, Lect. Notes in Math. **1201**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1986, 165–179.
- [44] LEBRUN, C., *Polarized 4-Manifolds, Extremal Kähler Metrics and Seiberg-Witten Theory*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 653–662.
- [45] LEBRUN, C., SIMANCA, S., *Extremal Kähler Metrics and Complex Deformation Theory*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), 298–336.
- [46] LICHNEROWICZ, A., *Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes*, C.R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 3011–3014.
- [47] LÜBKE, M., *Stability of Einstein-Kähler Vector Bundles*, Manuscripta Math. **42** (1983), 245–257.
- [48] MABUCHI, T., *Some Symplectic Geometry on Compact Kähler Manifolds*, Osaka Math. J. **24** (1987), 227–252.
- [49] MABUCHI, T., *Einstein-Kähler Forms, Futaki Invariants and Convex Geometry on Toric Fano Manifolds*, Osaka Math. J. **24** (1987), 705–737.
- [50] MARGERIN, C., *Fibrés stables et métriques d'Hermite-Einstein*, in *Séminaire Bourbaki 1986-87*, Exposé n°683, Astérisque **152-153** (1987), 263–283.
- [51] MATSUSHIMA, Y., *Sur les espaces homogènes kählériens d'un groupe réductif*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 53–60.
- [52] MATSUSHIMA, Y., *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 145–150.
- [53] MATSUSHIMA, Y., *Remarks on Kähler-Einstein Manifolds*, Nagoya Math. J. **46** (1972), 161–173.
- [54] MOSER, J., *A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger*, Indiana Math. J. **20** (1971), 1077–1091.
- [55] MUMFORD, D., *Stability of Projective Varieties*, Enseignement Math. **23** (1977), fasc. 1-2, 39–110.
- [56] NADEL, A.M., *Multiplier Ideal Sheaves and Existence of Kähler-Einstein Metrics of Positive Scalar Curvature*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), 7299–7300.
- [57] NADEL, A.M., *Multiplier Ideal Sheaves and Kähler-Einstein Metrics of Positive Scalar Curvature*, Ann. Math. **132** (1990), 549–596.

- [58] NADEL, A.M., *Multiplier Ideal Sheaves and Futaki's Invariant*, Preprint, Univ. Southern California, Los Angeles, 1997.
- [59] NAKAGAWA, Y., *Einstein-Kähler toric Fano fourfolds*, Tôhoku Math. J. **45** (1993), 297–310.
- [60] NAKAGAWA, Y., *Combinatorial Formulae for Futaki Characters and Generalized Killing Forms on Toric Fano Manifolds*, Prépublication, Tôhoku Univ., Sendai.
- [61] ONOFRI, E., *On the Positivity of the Effective Action in a Theory of Random Surfaces*, Commun. Math. Phys. **86** (1982), 321–326.
- [62] SAKANE, Y., *Examples of Compact Kähler-Einstein Manifolds with Positive Ricci Curvature*, Osaka J. Math. **31** (1986), 585–617.
- [63] SEMMES, S., *Complex Monge-Ampère Equations and Symplectic Manifolds*, Amer. J. Math. **114** (1992), 495–550.
- [64] *Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi*, Séminaire Palaiseau, Astérisque **58** (1978).
- [65] SIU, Y.T., *Lectures on Hermite-Einstein Metrics for Stable Bundles and Kähler-Einstein Metrics*, Deutscher Math. Ver. Seminar **8**, Birkhäuser, Basel, 1987.
- [66] SIU, Y.T., *Kähler-Einstein Metrics for the Case of Positive First Chern Class*, in *Complex Analysis III*, C.A. Berenstein Ed., Lect. Notes in Math. **1277**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1987), 120–130.
- [67] SIU, Y.T., *The Existence of Kähler-Einstein Metrics on Manifolds with Positive Anticanonical Line Bundle and a Suitable Finite Symmetry Group*, Ann. Math. **127** (1988), 585–627.
- [68] SKODA, H., *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini dans  $\mathbb{C}^n$* , Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 353–408.
- [69] SUBRAMANIAN, S., *Stability of the Tangent Bundle and Existence of a Kähler-Einstein Metric*, Math. Ann. **291** (1991), 573–577.
- [70] TIAN, G., *On Kähler-Einstein Metrics on Certain Manifolds with  $c_1(M) > 0$* , Inventiones Math. **89** (1987), 225–246.
- [71] TIAN, G., *On Calabi's Conjecture for Complex Surfaces with Positive First Chern Class*, Inventiones Math. **101** (1990), 101–172.
- [72] TIAN, G., *A Harnack Inequality for some Complex Monge-Ampère Equations*, J. Differential Geom. **29** (1989), 481–488.
- [73] TIAN, G., *On Stability of the Tangent Bundles of Fano Varieties*, Intern. J. Math. **3** (1992), 401–413.
- [74] TIAN, G., *Kähler-Einstein Metrics on Algebraic Manifolds*, in C.I.M.E. Conf. *Transcendental Methods in Algebraic Geom.*, F. Catanese, C. Ciliberto Ed., 1994.

- [75] TIAN, G., *The K-Energy on Hypersurfaces and Stability*, *Commun. Geom. Anal.* **2** (1994), 239–265.
- [76] TIAN, G., *Kähler-Einstein Metrics with Positive Scalar Curvature*, *Inventiones Math.*, à paraître.
- [77] TIAN, G., YAU, S.T., *Kähler-Einstein Metrics on Complex Surfaces with  $c_1(M)$  positive*, *Commun. Math. Phys.* **112** (1987), 175–203.
- [78] TIAN, G., ZHU, X., *A Non-Linear Inequality of Moser-Trudinger Type*, Preprint Mass. Inst. Technology, Cambridge.
- [79] TRUDINGER, N., *On Imbeddings into Orlicz Spaces and some Applications*, *J. Math. Phys.* **17** (1967), 473–483.
- [80] UHLENBECK, K.K., YAU, S.T., *On the Existence of Hermite-Yang-Mills Connections in Stable Vector Bundles*, *Commun. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 257–293.
- [81] YAU, S.T., *On the Curvature of Compact Hermitian Manifolds*, *Inventiones Math.* **25** (1974), 213–239.
- [82] YAU, S.T., *On Calabi's Conjecture and some New Results in Algebraic Geometry*, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), 1798–1799.
- [83] YAU, S.T., *On the Ricci-Curvature of a Complex Kähler Manifold and the Complex Monge-Ampère Equation, I*, *Commun. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 339–411.
- [84] YAU, S.T., *Non-Linear Analysis in Geometry*, *Enseignement Math.* **33** (1986), 1–54.
- [85] YAU, S.T., *Open Problems in Geometry*, in *Differential Geometry, Part I : Partial Differential Equations on Manifolds*, *Proc. Symp. Pure Math.* **54**, (1993), 1–28.
- [86] YOTOV, M., *Nadel's Subschemes of Fano Manifolds with a Picard Group Isomorphic to  $\mathbb{Z}$* , Preprint, Humboldt Univ., 1996.

Jean Pierre BOURGUIGNON

Institut des Hautes Études Scientifiques  
35, route de Chartres

F-91440 BURES-SUR-YVETTE

et

Centre de Mathématiques

U.R.A. 169 du C.N.R.S.

École polytechnique

F-91128 PALAISEAU Cedex

Adresse électronique : jpb@ihes.fr

# *Astérisque*

JEAN-FRANÇOIS BOUTOT

## **Uniformisation $p$ -adique des variétés de Shimura**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 831, p. 307-322

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_307\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__307_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNIFORMISATION P-ADIQUE DES VARIÉTÉS DE SHIMURA

par Jean-François BOUTOT

### 0. INTRODUCTION

Les premiers résultats d'uniformisation  $p$ -adique remontent à Tate [T] dans le cas des courbes elliptiques à réduction multiplicative. Il introduisit la notion d'espace analytique rigide, dont Raynaud [Ra1] donna par la suite une interprétation comme "fibre générique" de schémas formels. C'est de ce point de vue que Mumford [M] montra que les courbes de genre quelconque, en des places de mauvaise réduction semi-stable où la fibre spéciale est à composantes irréductibles rationnelles, peuvent être uniformisées par des ouverts convenables du "demi-plan  $p$ -adique"  $\Omega^2$ , le complémentaire dans  $\mathbb{P}^1$  de l'ensemble des points  $\mathbb{Q}_p$ -rationnels [Ra2].

Cherednik [Ch] découvrit que c'est le cas de la courbe de Shimura associée à une algèbre de quaternions  $B$  sur  $\mathbb{Q}$  en les places où cette algèbre est ramifiée. Cherednik part de la courbe définie par uniformisation  $p$ -adique et montre en utilisant des travaux d'Ihara que c'est une courbe de Shimura. Cette approche a été généralisée récemment par Varshavsky [V] à certaines variétés de Shimura de dimension supérieure.

Peu après la découverte de Cherednik, Drinfeld [Dr2] en donne une explication naturelle. Soit  $\widehat{\Omega}^2$  le modèle formel de  $\Omega^2$ , Drinfeld montre que  $\widehat{\Omega}^2 \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \widehat{\mathbb{Z}_p}^{nr}$  est un espace de modules pour des groupes  $p$ -divisibles d'un type particulier : les  $\mathcal{O}_{B_p}$ -modules formels spéciaux (2.1). L'uniformisation  $p$ -adique provient alors de ce qu'en la place  $p$  considérée la courbe de Shimura paramètre des variétés abéliennes toutes isogènes dont le groupe  $p$ -divisible est de ce type (3.4).

Dans cet article, Drinfeld considère plus généralement une extension finie  $F$  de  $\mathbb{Q}_p$ , l'espace  $\Omega_F^d$  complémentaire dans  $\mathbb{P}^d$  des hyperplans  $F$ -rationnels et le modèle formel  $\widehat{\Omega}_F^d$  défini par Deligne. Il montre que  $\widehat{\Omega}_F^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_F} \widehat{\mathcal{O}_F}^{nr}$  est un espace de modules de  $\mathcal{O}_D$ -modules formels spéciaux, pour  $D$  l'algèbre à division de centre  $F$

et d'invariant  $1/d$  (2.4).

Les sous-groupes finis du groupe  $p$ -divisible universel  $\mathcal{X}$  sur  $\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{F}}^{nr}$  permettent de définir un système projectif  $\Sigma$  de revêtements étales  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$ -équivariants de  $\Omega_{\mathbb{F}}^d \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}} \widehat{\mathbb{F}}^{nr}$  de groupe de Galois le complété profini  $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{D}}^*$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}^*$ . Drinfeld conjecture que toutes les représentations supercuspidales de  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$  se réalisent dans la cohomologie étale  $l$ -adique à support compact de  $\Sigma$ . Mieux l'action du groupe  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}) \times \mathbb{D}^* \times W_{\mathbb{F}}$  sur cette cohomologie devrait réaliser à la fois la correspondance de Jacquet-Langlands (entre représentations de  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$  et de  $\mathbb{D}^*$ ) et la correspondance de Langlands locale (entre représentations de  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$  et de  $W_{\mathbb{F}}$ ).

Modulo les problèmes dus aux fondements de la cohomologie  $l$ -adique des espaces rigides, maintenant éclaircis par les travaux de Berkovich [B], cette conjecture a été vérifiée par Carayol [C] dans le cas  $d = 2$ . La preuve utilise l'uniformisation  $p$ -adique des courbes de Shimura et le calcul de la cohomologie de ces courbes. Harris [H] a étendu cette approche à  $d$  quelconque, toutefois il n'identifie pas complètement l'action du groupe  $W_{\mathbb{F}}$  à celle prédite par la conjecture. Faltings [F] a étudié cette cohomologie par une méthode purement locale, sa méthode ne donne pas de renseignements sur l'action du groupe  $W_{\mathbb{F}}$ . La cohomologie des espaces  $\Omega_{\mathbb{F}}^d$  eux-mêmes a été déterminée par Schneider et Stuhler [SS].

Rapoport et Zink [RZ] ont généralisé la construction de Drinfeld à toutes les classes d'isogénie de groupes  $p$ -divisibles (1.2). Les schémas formels  $\check{\mathcal{M}}$  qu'ils définissent restent en général assez mystérieux. Cependant le groupe  $p$ -divisible universel au-dessus de  $\check{\mathcal{M}}$  permet de définir une application de périodes de source l'espace analytique rigide  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$  à valeurs dans une grassmannienne. Cette application est étale et, sous réserve de la validité d'une conjecture de Fontaine [F], son image coïncide, d'après Totaro [To], avec le sous-espace de cette grassmannienne défini par Van der Put et Voskuil [VV] par analogie avec les sous-espaces  $\Omega_d$  de  $\mathbb{P}^d$ . Dans le cas des groupes de Lubin-Tate [LT], cette application de périodes avait été étudiée auparavant par Gross et Hopkins ([GH1],[GH2],[Y]); c'est une application étale surjective du polydisque ouvert de dimension  $d - 1$  sur  $\mathbb{P}^{d-1}$ .

Suivant la méthode de Drinfeld, Rapoport et Zink montrent comment les schémas formels  $\check{\mathcal{M}}$  permettent d'uniformiser le voisinage formel de la classe d'isogénie la plus supersingulière dans la fibre en  $p$  d'une variété de Shimura de type (PEL), c'est-à-dire paramétrant des variétés abéliennes avec polarisations, endomorphismes et structures de niveau (3.3). Lorsqu'en la place  $p$  toutes les variétés abéliennes paramétrées par la variété de Shimura sont isogènes, il y a uniformisation

$p$ -adique de la variété de Shimura toute entière comme dans le théorème de Cherednik (3.4).

## 1. ESPACES DE MODULES DE GROUPES $p$ -DIVISIBLES

On fixe un nombre premier  $p$  et un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p$ . Soient  $W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ ,  $K_0$  son corps des fractions et  $\sigma$  l'automorphisme de Frobenius de  $K_0$ .

Pour tout anneau de valuation discrète complet  $\mathcal{O}$  de caractéristique résiduelle  $p$ , on note  $Nilp_{\mathcal{O}}$  la catégorie des schémas localement noethériens  $S$  sur  $\mathcal{O}$  tels que l'idéal  $p\mathcal{O}_S$  soit localement nilpotent. On note  $\bar{S}$  le sous-schéma fermé de  $S$  défini par  $p\mathcal{O}_S$ .

### 1.1. Classes d'isogénie

Si  $X$  et  $Y$  sont des groupes  $p$ -divisibles sur  $S$ , une *isogénie*  $f : X \rightarrow Y$  est un épimorphisme (de faisceaux f.p.p.f) dont le noyau est un schéma en groupes finis localement libre. Une *quasi-isogénie* est, localement sur  $S$ , un élément  $f$  de  $\text{Hom}(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  tel que  $p^n f$  soit une isogénie pour  $n$  convenable.

Soit  $\mathbf{X}$  un groupe  $p$ -divisible fixé sur  $\text{Spec } k$ . On considère le foncteur  $\mathcal{M}$  sur  $Nilp_{W(k)}$  qui à  $S$  associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples  $(X, \rho)$  consistant en :

- 1) un groupe  $p$ -divisible  $X$  sur  $S$ ,
- 2) une quasi-isogénie  $\rho : \mathbf{X}_{\bar{S}} \rightarrow X_{\bar{S}}$ .

**THÉORÈME 1.**— *Le foncteur  $\mathcal{M}$  est représentable par un schéma formel formellement localement de type fini sur  $\text{Spf}(W(k))$ .*

La difficulté technique pour démontrer ce résultat ([RZ], th. 2.16) est de contrôler l'entier  $n$  tel que  $p^n \rho$  soit une isogénie.

### 1.2. Structures supplémentaires

On va considérer des variantes du foncteur  $\mathcal{M}$  pour des groupes  $p$ -divisibles munis de structures supplémentaires de type (E) : endomorphismes ou de type (PE) : polarisations et endomorphismes.

**Cas (E):** On se donne une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre semi-simple de dimension finie  $D$  et un ordre maximal  $\mathcal{O}_D$  de  $D$ . On suppose que  $\mathbf{X}$  est muni d'une action de  $\mathcal{O}_D$  et se relève,

ainsi que l'action de  $\mathcal{O}_D$ , en un groupe  $p$ -divisible  $\tilde{\mathbf{X}}$  sur l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$  d'une extension finie  $K$  de  $K_0$ . Soit  $E$  l'extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , corps de définition de la classe d'isomorphisme de  $\text{Lie}(\tilde{\mathbf{X}}_K)$  comme représentation de  $D$ . Soient  $\check{E} = EK_0$  et  $\mathcal{O}_{\check{E}}$  l'anneau des entiers de  $\check{E}$ .

On considère le foncteur  $\check{\mathcal{M}}$  sur  $\text{Nilp}_{\mathcal{O}_{\check{E}}}$  qui à  $S$  associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples  $(X, \rho)$  consistant en :

1) un groupe  $p$ -divisible  $X$  sur  $S$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_D$ , tel que, pour tout  $S$ -schéma  $S'$  et tout  $a \in \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{S'}$ , on ait :

$$\det_{\mathcal{O}_{S'}}(a, \text{Lie}(X_{S'})) = \det_K(a, \text{Lie}(\tilde{\mathbf{X}}_K)).$$

2) une  $\mathcal{O}_D$ -quasi-isogénie  $\rho : X_{\check{S}} \rightarrow X_{\check{S}}$ .

**Remarque 1.** La condition d'égalité des déterminants est introduite par Kottwitz dans [K3]. La fonction  $a \mapsto \det_K(a, \text{Lie}(\tilde{\mathbf{X}}_K))$  pour  $a \in \mathcal{O}_D$  est à valeurs dans  $\mathcal{O}_E$ , mieux elle définit un polynôme à coefficients dans  $\mathcal{O}_E$  sur le  $\mathbb{Z}_p$ -module libre  $\mathcal{O}_D$ . On note encore  $\det_K(a, \text{Lie}(\tilde{\mathbf{X}}_K))$  la valeur de ce polynôme pour  $a \in \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{S'}$ .

**Remarque 2.** Supposons que le centre  $F$  de  $D$  soit une extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $\tilde{F}$  une extension non ramifiée de  $F$  contenue dans  $D$  déployant  $D$ . Alors il revient au même de demander que, pour tout point fermé  $s$  de  $S$  de corps résiduel  $k(s)$ ,  $\text{Lie}(X_s)$  et  $\text{Lie}(\mathbf{X}) \otimes_k k(s)$  soient isomorphes comme  $\mathcal{O}_{\tilde{F}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} k(s)$ -modules.

**Cas (PE) :** On suppose  $p \neq 2$  et  $D$  munie d'une involution  $*$  qui laisse  $\mathcal{O}_D$  stable. Si  $X$  est un groupe  $p$ -divisible avec action  $i : \mathcal{O}_D \rightarrow \text{End}(X)$ , on munit le dual  $\hat{X}$  de  $X$  de l'action de  $\mathcal{O}_D$  donnée par  $b \mapsto i(b^*)$ . On appelle  $*$ -polarisation de  $X$  une  $\mathcal{O}_D$ -quasi-isogénie symétrique  $X \rightarrow \hat{X}$ . On suppose  $\mathbf{X}$  muni d'une  $*$ -polarisation  $\lambda$ .

On considère le foncteur  $\check{\mathcal{M}}$  défini comme ci-dessus, mais en imposant aux couples  $(X, \rho)$  la condition : il existe un  $\mathcal{O}_D$ -isomorphisme  $\lambda_X : X \rightarrow \hat{X}$  et une constante  $c_X \in \mathbb{Q}_p^\times$  tels que  $\hat{\rho} \circ \lambda_X \circ \rho = c_X \lambda$ .

**THÉORÈME 2.**— *Le foncteur  $\check{\mathcal{M}}$  est représentable par un schéma formel formellement localement de type fini sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ .*

Ce résultat ([RZ], th. 3.25) se déduit facilement du théorème 1. Le schéma formel  $\check{\mathcal{M}}$  est mal connu en général; Rapoport et Zink conjecturent qu'il est plat sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ . On prendra garde qu'en général  $\check{\mathcal{M}}$  n'est pas un schéma formel  $p$ -adique.

### 1.3. Groupe d'automorphismes

Le groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$  des  $\mathcal{O}_D$ -quasi-isogénies de  $\mathbf{X}$  (resp.  $(\mathbf{X}, \mathbb{Q}_p^\times \lambda)$ ) dans le cas (PE) agit sur  $\check{\mathcal{M}}$  via

$$g.(X, \rho) = (X, \rho \circ g^{-1}).$$

### 1.4. Donnée de descente

Soit  $\tau$  l'automorphisme de Frobenius de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})$  au-dessus de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})$  et  $\bar{\tau}$  l'automorphisme correspondant de  $\text{Spec}(k)$ . Pour  $S \in \text{Nilp}_{\mathcal{O}_{\mathbb{E}}}$  de morphisme structural  $\varphi$ , on note  $S_\tau$  le schéma  $S$  muni du morphisme structural  $\tau \circ \varphi$ . Une puissance convenable du morphisme de Frobenius de  $\mathbf{X}$  définit un morphisme  $\text{Frob}_{\mathbb{E}} : \mathbf{X} \rightarrow \bar{\tau}^* \mathbf{X}$ . Le schéma formel  $\check{\mathcal{M}}$  est muni de la donnée de descente :

$$\begin{aligned} \alpha : \check{\mathcal{M}}(S) &\longrightarrow \check{\mathcal{M}}(S_\tau) \\ (X, \rho) &\longmapsto (X, \varphi^*(\text{Frob}_{\mathbb{E}}^{-1}) \circ \rho). \end{aligned}$$

Cette donnée de descente n'est pas effective sur  $\check{\mathcal{M}}$  lui-même, mais le devient sur un système projectif convenable de quotients de  $\check{\mathcal{M}}$  par des sous-groupes de  $J(\mathbb{Q}_p)$ , système projectif qui provient donc par changement de base d'un pro-schéma formel  $\mathcal{M}$  sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})$  ([RZ], th. 3.49). L'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\check{\mathcal{M}}$  commute à  $\alpha$  et définit donc une action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\mathcal{M}$ .

## 2. ESPACES DE DRINFELD

Drinfeld a étudié dans [Dr2] le cas où  $D$  est une algèbre à division de centre  $F$  et d'invariant  $1/d$  sur son centre. On note  $\tilde{F}$  une extension non ramifiée de degré  $d$  de  $F$  contenue dans  $D$  et  $\tau$  l'homomorphisme de Frobenius de  $\tilde{F}$  au-dessus de  $F$ . Enfin soit  $\pi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}_F$ ,  $q$  le cardinal du corps résiduel de  $F$  et  $\Pi$  un élément de  $\mathcal{O}_D$  tel que:

$$\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{\tilde{F}}[\Pi], \quad \Pi^d = \pi, \quad \Pi a = \tau(a)\Pi \quad \text{pour } a \in \tilde{F}.$$

### 2.1. $\mathcal{O}_D$ -modules formels spéciaux

Soit  $S$  un  $\mathcal{O}_F$ -schéma sur lequel  $p$  est nilpotent et  $X$  un groupe  $p$ -divisible sur  $S$ .

**DÉFINITION 1.**— On dit que  $X$  est un  $\mathcal{O}_F$ -module formel s'il est connexe et muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  telle que l'action induite sur  $\text{Lie}(X)$  coïncide avec celle provenant de la structure de  $\mathcal{O}_S$ -module de  $\text{Lie}(X)$  via l'homomorphisme structural  $\mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_S$ .

On appelle  $F$ -hauteur d'un  $\mathcal{O}_F$ -module formel  $X$  le quotient par  $[F : \mathbb{Q}_p]$  de la hauteur du groupe  $p$ -divisible  $X$ . C'est l'entier  $h$  tel que  $\text{Ker}(\pi : X \rightarrow X)$  soit un schéma en groupes fini de rang  $q^h$ .

**DÉFINITION 2.**— On dit que  $X$  est un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial s'il est connexe et muni d'une action de  $\mathcal{O}_D$  telle que:

(i) l'action induite de  $\mathcal{O}_F$  en fait un  $\mathcal{O}_F$ -module formel,

(ii) l'action induite de  $\mathcal{O}_{\tilde{F}}$  sur  $\text{Lie}(X)$  en fait un  $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\tilde{F}}$ -module localement libre de rang un.

Dans les propositions suivantes, on suppose que  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos  $k$ .

**PROPOSITION 1.**— Un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial est de  $F$ -hauteur multiple de  $d^2$ .

*Démonstration :* Supposons pour simplifier  $F = \mathbb{Q}_p$ . Soit  $(M, V)$  le cristal de Dieudonné de  $X$ :  $M$  est un  $W(k)$ -module libre dont le rang est la hauteur  $h$  de  $X$ , muni d'un opérateur  $\sigma^{-1}$ -linéaire  $V$  tel que  $M/VM = \text{Lie}(X)$ . Notons  $i : \mathcal{O}_D \rightarrow \text{End}(X)$  l'action de  $\mathcal{O}_D$ . Soit

$$M_j = \{m \in M / i(a)m = \sigma^{-j}(a)m \text{ pour } a \in \tilde{F}\}, \quad j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

On a

$$M = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_j.$$

Les opérateurs  $\Pi$  et  $V$  sont de degré 1. L'entier  $r = \text{long}(M_j/\Pi M_{j-1})$  est indépendant de  $j$  et  $h = \text{long}(M/\pi M) = d \text{long}(M/\Pi M) = d^2 r$ . ■

Soit également, pour  $j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \text{Lie}(X)_j &= \{t \in \text{Lie}(X) / i(a)t = \sigma^{-j}(a)t \text{ pour } a \in \tilde{F}\}, \\ &= M_j/VM_{j-1}. \end{aligned}$$

L'action de  $\Pi$  sur  $\text{Lie}(X)$  est de degré 1. On dit que  $j$  est *critique* si l'application  $\Pi : \text{Lie}(X)_j \rightarrow \text{Lie}(X)_{j+1}$  est nulle.

**PROPOSITION 2.**— Il n'existe qu'une seule classe de  $\mathcal{O}_D$ -isogénie de  $\mathcal{O}_D$ -modules formels spéciaux de  $F$ -hauteur  $d^2$ . Le groupe des  $\mathcal{O}_D$ -quasiisogénies d'un tel  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial est isomorphe à  $\text{GL}_d(F)$ .

*Démonstration* (lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$ ): La classe de  $\mathcal{O}_D$ -isogénie de  $X$  est déterminée par l'isocrystal  $(M \otimes \mathbb{Q}_p, V)$  avec action de  $D$ , lui-même déterminé par l'isocrystal  $(M_j \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi)$ , qui est indépendant de  $j$  (via les isomorphismes induits par  $\Pi$ ).

Montrons que cet isocrystal est de pente zéro. Soit  $j$  un indice critique; il en existe car  $\Pi^d = 0$  sur  $\text{Lie}(X)$  et chaque  $\text{Lie}(X)_j$  est un espace vectoriel de dimension 1. Alors  $\Pi M_j = VM_j$ ; ainsi  $M_j$  est un réseau stable par  $V^{-1}\Pi$  dans  $M_j \otimes \mathbb{Q}_p$  et, d'après Dieudonné,  $\eta_j = (M_j)^{V^{-1}\Pi}$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang  $d$  et  $(M_j \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi) \simeq (\eta_j \otimes W(k), id \otimes \sigma^{-1})$ .

De plus  $\text{Aut}_D(M \otimes \mathbb{Q}_p, V) = \text{Aut}(M_j \otimes \mathbb{Q}_p, V^{-1}\Pi) = \text{Aut}(\eta_j)$ . ■

## 2.2. Le foncteur de Drinfeld

On choisit une clôture algébrique  $\varepsilon : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  de  $F$ . On identifie  $k = \overline{\mathbb{F}_p}$  au corps résiduel de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  et du même coup le corps des fractions  $K_0$  de  $W(k)$  à un sous-corps de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . On pose  $E = F$  et  $\check{E} = EK_0$ . Enfin soit  $X$  un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial fixé sur  $\text{Spec}(k)$ .

Drinfeld [Dr2] considère le foncteur  $\check{M}$  sur  $\text{Nilp}_{\mathcal{O}_{\check{E}}}$  qui à  $S$  associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples  $(X, \rho)$  consistant en:

- 1) un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial  $X$  sur  $S$  de  $F$ -hauteur constante  $d^2$ .
- 2) une  $\mathcal{O}_D$ -quasi-isogénie  $\rho : X_{\check{S}} \rightarrow X_{\check{S}}$ .

**Remarque.** La condition pour  $X$  d'être un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial de  $F$ -hauteur  $d^2$  pourrait s'exprimer comme une condition sur le déterminant de l'action de  $\mathcal{O}_D$  sur  $\text{Lie}(X)$  comme en (1.2) (cf. [RZ] 3.58).

Drinfeld identifie explicitement le schéma formel qui représente  $\check{M}$ .

## 2.3. L'immeuble de Bruhat-Tits de $GL_d(F)$

L'immeuble de Bruhat-Tits  $\mathcal{B}$  de  $GL_d(F)$  est un complexe simplicial dont les sommets sont les classes d'homothétie de  $\mathcal{O}_F$ -réseaux dans  $F^d$ . Il sera plus commode ici de considérer  $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$  dont les sommets sont les réseaux eux-mêmes. Pour  $h \in \mathbb{Z}$ , un simplexe de  $\mathcal{B} \times \{h\}$  est un ensemble  $\Delta = (\eta_{i_0}, \dots, \eta_{i_r})$ ,  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_r < d$ , de  $\mathcal{O}_F$ -réseaux dans  $F^d$  tels que:

$$\pi\eta_{i_r} \subset \eta_{i_0} \subset \dots \subset \eta_{i_r} \quad \text{et} \quad [\eta_{i_k} : \mathcal{O}_F^d] = i_k - h \quad \text{pour} \quad k = 0, \dots, r,$$

où, si  $\eta$  et  $\eta'$  sont deux  $\mathcal{O}_F$ -réseaux dans  $F^d$ , on note:

$$[\eta : \eta'] = \text{long}_{\mathcal{O}_F}(\eta/\eta \cap \eta') - \text{long}_{\mathcal{O}_F}(\eta'/\eta \cap \eta').$$

Le groupe  $GL_d(\mathbb{F})$  agit sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$  via  $\eta \mapsto g\eta$  et  $h \mapsto h + \text{ord}_{\mathbb{F}}(\det g)$  pour  $g \in GL_d(\mathbb{F})$ .

#### 2.4. Le schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z}$

Pour  $\Delta$  un simplexe de  $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$ , soit  $\mathcal{F}_{\Delta}$  le foncteur sur  $Nilp_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}}$  qui à  $S$  associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \eta_{i_0} & \subset & \eta_{i_1} & \subset & \dots & \subset & \eta_{i_r} & \xrightarrow{\pi} & \eta_{i_0} \\
 \varphi_{i_0} \downarrow & & \varphi_{i_1} \downarrow & & & & \varphi_{i_r} \downarrow & & \varphi_{i_0} \downarrow \\
 \mathcal{L}_{i_0} & \rightarrow & \mathcal{L}_{i_1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{L}_{i_r} & \rightarrow & \mathcal{L}_{i_0}
 \end{array}$$

où les  $\mathcal{L}_{i_k}$  sont des  $\mathcal{O}_S$ -modules inversibles et les  $\varphi_{i_k}$  des applications  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ -linéaires telles que, pour tout  $n \in \eta_{i_k} \setminus \eta_{i_{k-1}}$ , la section  $\varphi_{i_k}(n)$  de  $\mathcal{L}_{i_k}$  ne s'annule en aucun point de  $S$ . Le foncteur  $\mathcal{F}_{\Delta}$  est représentable par un ouvert  $\widehat{\Omega}_{\Delta}$  du schéma formel:

$$\text{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}[\mathbb{T}_0, \dots, \mathbb{T}_r, \mathbb{U}_{r+1}, \dots, \mathbb{U}_d, \mathbb{U}_{r+1}^{-1}, \dots, \mathbb{U}_d^{-1}]) / (\mathbb{T}_0 \dots \mathbb{T}_r - \pi)^{\wedge} \quad ,$$

où  $\wedge$  dénote la complétion  $\pi$ -adique.

Si  $\Delta' = \Delta \setminus \{\eta_{i_k}\}$ , on définit une immersion ouverte  $\widehat{\Omega}_{\Delta'} \hookrightarrow \widehat{\Omega}_{\Delta}$  en complétant un diagramme de type  $\Delta'$  en le diagramme de type  $\Delta$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \subset & \eta_{i_k} & \rightarrow & \eta_{i_{k+1}} & \subset & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \rightarrow & \mathcal{L}_{i_{k+1}} & = & \mathcal{L}_{i_{k+1}} & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

On note  $\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z}$  le schéma formel  $\pi$ -adique localement de type fini sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}})$  obtenu par recollement des  $\widehat{\Omega}_{\Delta}$  le long de ces immersions ouvertes pour  $\Delta$  parcourant les simplexes de  $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$ . La fibre spéciale au-dessus du corps résiduel  $\kappa$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$  d'une composante  $\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d$  s'identifie à la réunion d'une infinité d'espaces projectifs  $\mathbb{P}_{\kappa}^{d-1}$  recollés le long de leurs hyperplans  $\kappa$ -rationnels en un agencement dual de celui des simplexes de  $\mathcal{B}$ .

Le groupe  $GL_d(\mathbb{F})$  agit sur  $\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z}$  de manière compatible à son action sur  $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$ . L'action de  $g \in GL_d(\mathbb{F})$  est définie par les applications de  $\mathcal{F}_{\Delta}(S) \rightarrow \mathcal{F}_{g\Delta}(S)$  qui, à  $\{\varphi_{i_k} : \eta_{i_k} \rightarrow \mathcal{L}_{i_k}\}$  font correspondre  $\{\varphi_{i_k} \circ g^{-1} : g\eta_{i_k} \rightarrow \mathcal{L}_{i_k}\}$ .

### 2.5. Le théorème de Drinfeld

Le résultat principal de l'article de Drinfeld [Dr2] est le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.**— *Il existe un isomorphisme de schémas formels :*

$$\check{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} (\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z}) \times_{\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}})} \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{E}}),$$

équivariant pour les actions de  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$  sur  $\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z}$  et sur  $\check{\mathcal{M}}$  (pour un choix convenable de l'isomorphisme  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}) \simeq \mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$ ).

La donnée de descente sur  $\check{\mathcal{M}}$  induit sur le membre de droite le composé de la donnée de descente canonique avec la translation par +1 sur  $\mathbb{Z}$ .

Décrivons explicitement la flèche  $\check{\mathcal{M}}(k) \rightarrow (\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z})(k)$  en reprenant les notations de (2.1). Soit  $(X, \rho)$  un point de  $\check{\mathcal{M}}(k)$ . Pour tout indice critique  $j$  de  $X$ , la quasi-isogénie  $\rho$  et l'opérateur  $\Pi^{-j}$  permettent d'identifier  $\eta_j = M_j^{V^{-1}\Pi}$  à un réseau dans  $F^d = (M_0(\mathbf{X}) \otimes_{W(k)} K_0)^{V^{-1}\Pi}$ . Alors, si  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_r < d$  sont les indices critiques de  $X$  et  $\Delta$  le simplexe  $(\eta_{i_0}, \dots, \eta_{i_r})$  de  $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}$  défini par ces réseaux, on associe à  $(X, \rho)$  le point de  $\widehat{\Omega}_{\Delta}(k)$  correspondant au diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} \eta_{i_0} & \subset & \eta_{i_1} & \subset & \dots & \subset & \eta_{i_r} & \xrightarrow{\pi} & \eta_{i_0} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Lie}(X)_{i_0} & \rightarrow & \mathrm{Lie}(X)_{i_1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathrm{Lie}(X)_{i_r} & \rightarrow & \mathrm{Lie}(X)_{i_0} \end{array}$$

où les applications verticales sont obtenues en composant les inclusions de  $\eta_j = M_j^{V^{-1}\Pi}$  dans  $M_j$  avec les applications  $M_j \rightarrow M_j/VM_j = \mathrm{Lie}(X)_j$ .

On vérifie facilement que l'on obtient ainsi une bijection  $\check{\mathcal{M}}(k) \rightarrow (\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z})(k)$ . La partie la plus délicate de la démonstration de Drinfeld consiste à définir la flèche  $\check{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times \mathbb{Z}$  au niveau des foncteurs (cf. [Dr2],[BC],[RZ]). La comparaison des théories de déformation permet ensuite de conclure. ■

**COROLLAIRE** — *Le pro-schéma formel  $\mathcal{M}$  s'identifie au système projectif des  $\widehat{\Omega}_{\mathbb{F}}^d \times_{\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}})} \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n})$ , où les  $\mathbb{F}_n$  sont les extensions non ramifiées de  $\mathbb{F}$ .*

**Remarque.** Drinfeld adopte une présentation légèrement différente en se restreignant aux quasi-isogénies de hauteur zéro. Nous avons suivi ici le point de vue de Rapoport et Zink.

### 3. UNIFORMISATION DES VARIÉTÉS DE SHIMURA

#### 3.1. Variétés de Shimura de type PEL

Soient  $B$  une  $\mathbb{Q}$ -algèbre simple de dimension finie et  $*$  une involution positive de  $B$ . Soient  $V$  un  $B$ -module à gauche de type fini et  $(\cdot, \cdot)$  une  $\mathbb{Q}$ -forme bilinéaire alternée non dégénérée telle que  $(bv, w) = (v, b^*w)$  pour  $v, w \in V$  et  $b \in B$ .

Soit  $h : \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_B(V_{\mathbb{R}})$  un homomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres tel que

$$(h(z)v, w) = (v, h(\bar{z})w) \quad \text{pour } v, w \in V_{\mathbb{R}} \text{ et } z \in \mathbb{C},$$

et que la forme bilinéaire symétrique  $(v, h(i)w)$  sur  $V_{\mathbb{R}}$  soit définie positive.

Soit  $G$  le groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$  des  $B$ -similitudes symplectiques de  $V$  : pour une  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  on a

$$G(R) = \{g \in \text{GL}_{B \otimes R}(V \otimes R) / (gv, gw) = c(g)(v, w), c(g) \in \mathbb{Q}\}.$$

Soit  $\mathcal{M}_{\infty}$  l'ensemblé des conjugués de  $h$  sous l'action de  $G(\mathbb{R})$ . C'est de manière naturelle un espace analytique complexe dont les composantes connexes sont des domaines hermitiens symétriques. On considère le système projectif indexé par les sous-groupes compacts ouverts  $C$  de  $G(\mathbb{A}_f)$  des quotients

$$\text{Sh}_{\mathbb{C}}^{\text{an}} = G(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{M}_{\infty} \times G(\mathbb{A}_f) / C.$$

Soit  $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}^0 \oplus V_{\mathbb{C}}^1$  la graduation de  $V_{\mathbb{C}}$  définie par  $h$  :

$$V_{\mathbb{C}}^0 = \{v \in V_{\mathbb{C}} / h(z)v = zv, z \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad V_{\mathbb{C}}^1 = \{v \in V_{\mathbb{C}} / h(z)v = \bar{z}v, z \in \mathbb{C}\}.$$

Ces sous-espaces sont munis d'une action de  $B$ , car  $B$  centralise  $h$ . Soit  $E$  le corps de définition de la classe d'isomorphisme de  $V_{\mathbb{C}}^0$  comme représentation de  $B$  ; plus concrètement  $E = \mathbb{Q} [\{ \text{Tr}(b|V_{\mathbb{C}}^0) \}, b \in B]$ . D'après Shimura, les espaces  $\text{Sh}_{\mathbb{C}}^{\text{an}}$  sont les espaces analytiques associés à des variétés algébriques  $\text{Sh}_{\mathbb{C}}$  définies sur  $E$ , dites modèles canoniques (*cf.* [De]).

#### 3.2. Modèles entiers en une place de $E$

Soit  $\mathcal{O}_B$  un ordre de  $B$ , stable sous l'involution  $*$  et tel que  $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$  soit un ordre maximal dans  $B \otimes \mathbb{Q}_p$ . Soit  $\Lambda$  un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau dans  $V_{\mathbb{Q}_p}$ , stable sous  $\mathcal{O}_B$  et autodual pour  $(\cdot, \cdot)$ . Soient  $C_p$  le stabilisateur de  $\Lambda$  dans  $G(\mathbb{Q}_p)$ ,  $C^p$  un sous-groupe compact ouvert de  $G(\mathbb{A}_f^p)$  et  $C = C^p C_p$ .

Soit  $\nu$  une place de  $E$  au-dessus de  $p$ . On considère le foncteur  $Sh_C$  qui, à un  $\mathcal{O}_{E_\nu}$ -schéma  $S$ , associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de quadruplets  $(A, i, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  où:

- $A$  est un schéma abélien sur  $S$  à quasi-isogénie première à  $p$  près,
- $i : \mathcal{O}_B \rightarrow \text{End}(A)$  est une action de  $\mathcal{O}_B$  sur  $A$  telle que

$$\det(i(b), \text{Lie}(A)) = \det(b, V_0) \quad , \quad \text{pour } b \in \mathcal{O}_B \quad ,$$

égalité au sens des polynômes comme en (1.2),

- $\bar{\lambda}$  est une  $*$ -polarisation  $\mathbb{Q}$ -homogène principale de  $A$  ,
- $\bar{\alpha}$  une classe mod( $\mathbb{C}^p$ ) de structures de niveau  $\alpha : H_1(A, \mathbb{A}_f^p) \simeq V \otimes \mathbb{A}_f^p$  , compatible aux actions de  $B$  et, à un facteur dans  $\mathbb{A}_f^p$  près, aux formes bilinéaires sur les deux membres : la forme de Riemann induite par  $\bar{\lambda}$  sur  $H_1$  et la forme  $(\cdot, \cdot)$  sur  $V$  .

Pour  $C^p$  assez petit, ce foncteur est représentable par un schéma quasi-projectif  $Sh_C$  sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{E_\nu})$ . De plus la fibre générique de ce schéma est une réunion disjointe d'un nombre fini de copies de  $Sh_C \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_\nu}$  (cf. [Ko3], par.8).

### 3.3. Uniformisation au voisinage d'une classe d'isogénie

Soit  $k$  la clôture algébrique du corps résiduel de  $\mathcal{O}_{E_\nu}$ . Soit  $(A_0, i_0, \bar{\lambda}_0, \bar{\alpha}_0)$  un point de  $Sh_C(k)$  fixé. Le groupe  $p$ -divisible  $\mathbf{X}$  de  $A_0$ , muni de l'action de  $B_{\mathbb{Q}_p}$  induite par  $i_0$  et de la polarisation  $\mathbb{Q}_p$ -homogène induite par  $\bar{\lambda}$ , définit d'après (1.2) un pro-schéma formel  $\mathcal{M}$  sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{E_\nu})$  équipé d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p) = \text{Aut}^0(\mathbf{X})$ .

Soit  $\mathbb{D}$  le pro-tore sur  $\mathbb{Q}_p$  de groupe des caractères  $\mathbb{Q}$ . La décomposition isocline de  $\mathbf{X}$  définit un homomorphisme  $\mathbb{D}_{K_0} \rightarrow G_{K_0}$ . On dit que  $\mathbf{X}$  est *basique* si cet homomorphisme est central (cf. [Ko1]).

**THÉORÈME 4.**— *Supposons le groupe  $p$ -divisible  $\mathbf{X}$  de  $(A_0, i_0, \bar{\lambda}_0)$  basique. Alors l'ensemble des points  $(A, i, \bar{\lambda}, \bar{\alpha})$  de  $Sh_C(k)$  tels que  $(A, i, \bar{\lambda})$  soit isogène à  $(A_0, i_0, \bar{\lambda}_0)$  est un fermé  $Z$  de  $Sh_C$ .*

C'est une variante due à Rapoport et Richartz [RR] du théorème de spécialisation de Grothendieck [G] pour les groupes  $p$ -divisibles. ■

Soit  $I(\mathbb{Q})$  le groupe des quasi-isogénies de  $(A_0, i_0, \bar{\lambda}_0)$ , c'est le groupe des points rationnels d'une forme intérieure  $I$  de  $G$ . L'action de  $I(\mathbb{Q})$  sur  $\mathbf{X}$  et sur  $H_1(A_0, \mathbb{A}_f^p) = V \otimes \mathbb{A}_f^p$  définit des homomorphismes de  $I(\mathbb{Q})$  dans  $J(\mathbb{Q}_p)$  et  $G(\mathbb{A}_f^p)$ .

**THÉORÈME 5.**— *Supposons que  $\mathbf{X}$  est basique et que le groupe  $G$  vérifie le principe de Hasse. Soit  $\widehat{Sh}_{C/Z}$  le complété formel de  $Sh_C$  le long de  $Z$ . Alors on a un*

isomorphisme canonique de schémas formels sur  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{E}_\nu})$  :

$$\theta_C : \mathrm{I}(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{M} \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p) / \mathrm{C}^p \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{Sh}}_C / \mathbb{Z},$$

où  $\mathrm{I}(\mathbb{Q})$  agit sur  $\mathcal{M}$  via  $\mathrm{I}(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$  et sur  $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$  via  $\mathrm{I}(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$ .

**Remarque 1.** Si  $\mathrm{G}$  ne vérifie pas le principe de Hasse, il faut remplacer le membre de gauche par une réunion disjointe de copies.

**Remarque 2.** Le système projectif de ces isomorphismes lorsque  $\mathrm{C}_p$  varie est équivariant pour l'action naturelle sur les deux membres des opérateurs de Hecke de  $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p)$ .

*Esquisse de démonstration* ([RZ], 6.30) : On montre d'abord l'énoncé analogue après changement de base à l'extension non ramifiée maximale  $\mathcal{O}_{\mathbb{E}_\nu}$ . Soit  $\tilde{\mathbf{X}}$  un relèvement de  $\mathbf{X}$  sur  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{E}_\nu})$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_0$  le relèvement correspondant de  $\mathbf{A}_0$ . Pour  $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\mathbb{E}_\nu}})$  et  $(X, \rho)$  dans  $\check{\mathcal{M}}(\mathrm{S})$ , la quasi-isogénie  $\rho : \mathbf{X}_{\tilde{\mathbf{S}}} \rightarrow \mathbf{X}_{\tilde{\mathbf{S}}}$  se relève de manière unique en une quasi-isogénie  $\tilde{\rho} : \tilde{\mathbf{X}}_{\tilde{\mathbf{S}}} \rightarrow X$ . Il existe un unique  $\mathcal{O}_{\mathbb{B}}$ -schéma abélien à isogénie première à  $p$  près  $\rho_* \tilde{\mathbf{A}}_0$  et une unique  $\mathcal{O}_{\mathbb{B}}$ -quasi-isogénie  $\tilde{\mathbf{A}}_{0\mathrm{S}} \rightarrow \rho_* \tilde{\mathbf{A}}_0$  induisant sur les groupes  $p$ -divisibles la quasi-isogénie  $\tilde{\rho}$ . De plus  $\bar{\lambda}_0$  et  $\bar{\alpha}_0$  induisent sur  $\rho_* \tilde{\mathbf{A}}_0$  une  $*$ -polarisation  $\rho_* \bar{\lambda}_0$  et une structure de niveau  $\rho_* \bar{\alpha}_0$ .

On définit un morphisme de foncteurs sur  $\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\mathbb{E}_\nu}}$  :

$$\begin{aligned} \Theta : \check{\mathcal{M}} \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p) &\longrightarrow \mathrm{Sh}_C \\ ((X, \rho), g) &\mapsto (\rho_* \tilde{\mathbf{A}}_0, \rho_* \bar{\lambda}_0, g^{-1} \rho_* \bar{\alpha}_0), \end{aligned}$$

et on vérifie facilement que  $\Theta$  se factorise à travers :

$$\bar{\Theta} : \mathrm{I}(\mathbb{Q}) \backslash \check{\mathcal{M}} \times \mathrm{G}(\mathbb{A}_f^p) / \mathrm{C}^p \longrightarrow \mathrm{Sh}_C.$$

Si  $\mathrm{G}$  vérifie le principe de Hasse,  $\bar{\Theta}$  induit une bijection des points à valeurs dans  $k$  du membre de gauche avec  $Z(k)$ . De plus  $\bar{\Theta}$  est formellement étale en ces points d'après le théorème de Serre-Tate selon lequel il revient au même de déformer une variété abélienne ou son groupe  $p$ -divisible. Il reste à vérifier la compatibilité des données de descente pour conclure. ■

**Remarque 3.** En passant aux espaces rigides analytiques associés à ces schémas formels, on déduit du théorème 5 sa variante rigide analytique où l'on uniformise un "voisinage tubulaire" de  $Z$  dans  $\mathrm{Sh}_C^{an}$ .

### 3.4. Uniformisation $p$ -adique des courbes de Shimura

Il peut arriver dans certains cas assez rares que  $Z$  soit toute la fibre spéciale en la place  $\nu$  de la variété de Shimura; on obtient alors une véritable uniformisation  $\nu$ -adique. C'était en particulier le cas du théorème initial de Cherednik [Ch] pour les courbes de Shimura sur  $\mathbb{Q}$ .

Dans ce cas  $B$  est une algèbre de quaternions sur  $\mathbb{Q}$  non ramifiée à l'infini, le groupe  $G$  est tel que  $G(\mathbb{Q}) = B^*$  et  $\mathcal{M}_\infty = \mathcal{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  avec l'action naturelle de  $G(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ . On a pour tout sous-groupe compact ouvert  $C$  de  $G(\mathbb{A}_f)$  une courbe de Shimura  $Sh_C$  définie sur  $E = \mathbb{Q}$  dont les points complexes sont

$$Sh_C(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{H}^\pm \times G(\mathbb{A}_f) / C.$$

Soit  $p$  un nombre premier en lequel  $B$  est ramifiée; soient  $D = \mathcal{O}_{B_p}$  et  $C = C_p C^p$ , où  $C_p$  est le sous-groupe compact maximal  $\mathcal{O}_D^*$  de  $G(\mathbb{Q}_p) = D^*$ . Soit  $\bar{B}$  l'algèbre de quaternions sur  $\mathbb{Q}$  ayant mêmes invariants que  $B$  en toutes les places sauf en  $p$  et  $\infty$  et  $\bar{G}$  le groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $\bar{G}(\mathbb{Q}) = \bar{B}^*$ .

**THÉORÈME 6.**— *On a un isomorphisme de schémas formels  $p$ -adiques sur  $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$  :*

$$\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash (\hat{\Omega}_{\mathbb{Q}_p}^2 \times_{\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p^{nr})) \times G(\mathbb{A}_f^p) / C^p \xrightarrow{\sim} Sh_C^\wedge,$$

où l'action de  $\bar{G}(\mathbb{Q})$  est diagonale via l'action décrite en (2.4) de  $\bar{G}(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$  sur

$$\hat{\Omega}_{\mathbb{Q}_p}^2 \times_{\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p^{nr})$$

et via l'isomorphisme  $\bar{G}(\mathbb{A}_f^p) \simeq G(\mathbb{A}_f^p)$ .

*Démonstration* ([Dr2],[BC],[RZ]) : Le problème de modules correspondant est a priori un problème de modules pour des surfaces abéliennes polarisées avec action de  $\mathcal{O}_B$ . Cependant on peut se débarrasser de la polarisation en montrant qu'une  $*$ -polarisation principale est uniquement déterminée ([BC], 3.3). Le théorème de Tate-Honda montre qu'il n'y a qu'une seule classe d'isogénie de telles surfaces sur  $\bar{\mathbb{F}}_p$ , leurs groupes  $p$ -divisibles sont des  $\mathcal{O}_D$ -modules formels spéciaux de hauteur 4 et dimension 2 isoclines de pente  $1/2$ , en particulier basiques. On conclut par application d'un cas particulier du théorème 5 (ici  $I = \bar{G}$ ) et du théorème 3 (de Drinfeld) pour identifier  $\mathcal{M}$ . ■

**Remarque 1.** Cette situation se rencontre également pour certaines variétés de Shimura de type (PEL) pour des groupes unitaires en dimension supérieure ([R1],[RZ],[V]).

**Remarque 2.** On peut en utilisant ces résultats, la loi de réciprocité des modèles canoniques et l'introduction de "modèles étranges" [De], obtenir des résultats analogues pour des variétés de Shimura qui ne sont pas de type (PEL), en particulier pour les courbes de Shimura sur les corps totalement réels [BZ].

## BIBLIOGRAPHIE

- [B] V.G. BERKOVICH – *Etale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. **78** (1993), 5–161.
- [Be] P. BERTHELOT – *Cohomologie rigide et cohomologie à supports propres*, prépublication **96-03**, Inst. Rech. Math. Rennes, 1996.
- [BC] J.-F. BOUTOT, H. CARAYOL – *Uniformisation  $p$ -adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Cherednik et de Drinfeld*, Astérisque **196-197** (1991), 45–158.
- [BZ] J.-F. BOUTOT, Th. ZINK – *The  $p$ -adic uniformisation of Shimura curves*, preprint **95-107**, Sonderforschungsbereich 343, Universität Bielefeld, 1995.
- [C] H. CARAYOL – *Non-abelian Lubin-Tate theory*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. II, Perspectives in Math. **11**, Academic Press (1990), 15–39.
- [Ch] I.V. CHEREDNIK – *Uniformization of algebraic curves by discrete subgroups of  $PGL_2(k_w)$  with compact quotients*, Math. USSR Sbornik **29** (1976), 55–78.
- [De] P. DELIGNE – *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki, vol. 1970/71, Exp. 389, Lecture Notes in Math. **244**, Springer Verlag (1971), 123–165.
- [Dr1] V. G. DRINFELD – *Elliptic Modules*, Math. USSR Sbornik **23** (1974), 561–592.
- [Dr2] V. G. DRINFELD – *Coverings of  $p$ -adic symmetric regions*, Funct. Anal. and Appl. **10** (1976), 107–115.
- [F] G. FALTINGS – *The trace formula and Drinfeld's upper halfplane*, Duke Math. J. **76** (1994), 467–482.
- [F] J.-M. FONTAINE – *Modules galoisiens, modules filtres et anneaux de Barsotti-Tate*, Astérisque **65** (1979), 3–80.
- [Ge] A. GENESTIER – *Espaces symétriques de Drinfeld*, Astérisque **234** (1996).
- [GH1] B. GROSS, M. HOPKINS – *The rigid analytic period mapping, Lubin-Tate space, and stable homotopy theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1994), 76–86.

- [GH2] B. GROSS, M. HOPKINS – *Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space*, Contemp. Math. **158** (1994), 23–88.
- [G] A. GROTHENDIECK – *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes du Congr. Internat. Math., Nice 1970, vol.1, Gauthier-Villars (1971), 431–436.
- [H] M. HARRIS – *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half-spaces; elaboration of Carayol’s program*, Inventiones Math. **129** (1997), 75–119.
- [Ko1] R.E. KOTTWITZ – *Isocrystals with additional structure*, Compositio Math. **56** (1985), 201–220.
- [Ko2] R.E. KOTTWITZ – *Shimura varieties and  $\lambda$ -adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. I, Perspectives in Math. **10**, Academic Press (1990), 161–209.
- [Ko3] R.E. KOTTWITZ – *Points on some Shimura varieties over finite fields*, Journal Amer. Math. Soc. **5** (1992), 373–444.
- [L] G. LAFAILLE – *Constructions de groupes  $p$ -divisibles: le cas de dimension 1*, Astérisque **65** (1979), 103–124.
- [LT] J. LUBIN, J. TATE – *Formal moduli for one parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 49–60.
- [Me] W. MESSING – *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math. **264**, Springer Verlag (1972).
- [M] D. MUMFORD – *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Compositio Math. **24** (1972), 239–272.
- [Mu] G. A. MUSTAFIN – *Non archimedean uniformization*, Math. USSR Sbornik **34** (1978), 187–214.
- [R1] M. RAPOPORT – *On the bad reduction of Shimura varieties*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. II, Perspectives in Math. **11**, Academic Press (1990), 15–39.
- [R2] M. RAPOPORT – *Non-archimedean period domains*, Proc. Internat. Congress Math., Zürich 1994, vol. 1, Birkhäuser Verlag (1995), 423–434.
- [RR] M. RAPOPORT, M. RICHARTZ – *On the classification and specialization of  $F$ -isocrystals with additional structure*, Compositio Math. **103** (1996), 153–181.
- [RZ] M. RAPOPORT, Th. ZINK – *Period spaces for  $p$ -divisible groups*, Annals of Math. Studies **141**, Princeton University Press (1996).

- [Ra1] M. RAYNAUD – *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,...*, Bull. Soc. Math. France, Mém. **39-40** (1974), 319–327.
- [Ra2] M. RAYNAUD – *Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne (d'après David Mumford)*, Séminaire Bourbaki, vol. 1972/73, Exp. 427, Lecture Notes in Math. **383**, Springer Verlag (1974), 171–185.
- [SS] P. SCHNEIDER, U. STUHLER – *The cohomology of  $p$ -adic symmetric spaces*, Inventiones Math. **105** (1991), 47–122.
- [T] J. TATE – *Rigid analytic spaces*, Inventiones Math. **12** (1971), 257–289.
- [To] B. TOTARO – *Tensor products in  $p$ -adic Hodge theory*, Duke Math. Journal **83** (1996), 79–104.
- [VV] M. VAN DER PUT, H. VOSKUIL – *Symmetric spaces associated to split algebraic groups over a local field*, J. reine angew. Math. **433** (1992), 69–100.
- [Va] Y. VARSHAVSKY –  *$P$ -adic uniformization of unitary Shimura varieties*, preprint Jerusalem (1995).
- [Y] J.-K. YU – *On the moduli of quasi-canonical liftings*, Compositio Math. **96** (1995), 296–321.

Jean-François BOUTOT

Institut de Recherche Mathématique Avancée  
Université Louis Pasteur et CNRS  
7, rue René Descartes  
F-67084 STRASBOURG CEDEX  
boutot@math.u-strasbg.fr

# *Astérisque*

ALAIN CHENCINER

## **À l'infini en temps fini**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 832, p. 323-353

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_323\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__323_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## À L'INFINI EN TEMPS FINI

par Alain CHENCINER

Je donne une idée de la démonstration du théorème suivant, qui affirme l'existence de singularités sans collision du problème des cinq corps dans l'espace [24] :

**Théorème (Z.Xia).** *Pour des valeurs convenablement choisies des masses dans le problème isocèle spatial des cinq corps, il existe un ensemble de Cantor de données initiales engendrant des solutions sans collision dans lesquelles quatre des masses partent à l'infini en temps fini.*

Il ne s'agit pas, bien entendu, de physique : si on sait depuis Newton [17] que le potentiel newtonien engendré à l'extérieur d'elle-même par une boule massive à symétrie sphérique est celui que produirait la totalité de la masse concentrée en son centre, le *Problème des  $n$  corps* – étude des mouvements de  $n$  masses ponctuelles soumises à l'attraction newtonienne – ne donne une bonne description du mouvement des corps célestes supposés approximativement sphériques, qu'à la condition que les distances entre ceux-ci soient supérieures à la somme de leurs rayons.

Posé par Painlevé à la fin du siècle dernier dans ses célèbres *Leçons de Stockholm* [18], le problème des “singularités”, obstacles au prolongement dans le temps d'une solution, a donné lieu à plusieurs travaux importants : ceux de Painlevé lui-même, qui montre d'une part que la *lim inf* de la distance minimale de deux particules d'un système tendant vers une singularité doit tendre vers zéro, d'autre part que les singularités du Problème des trois corps sont toutes dues à des collisions; ceux de Von Zeipel [25, 15], qui montre que la taille d'un système tendant vers une singularité ne correspondant pas à une collision tend nécessairement vers l'infini; ceux de Mc Gehee [13, 14] enfin dont l'analyse des solutions évitant de peu une collision triple a mis en lumière la possibilité que l'un des corps soit éjecté à une vitesse arbitrairement grande (voir 3.3), ce qui lui a permis d'en déduire avec Mather [12] l'existence de solutions du problème des quatre corps sur la droite qui, après régularisation par rebond élastique des collisions doubles, partent à l'infini en temps fini. Les solutions de Xia étant

directement inspirées de celles de Mather et McGehee, je commence par décrire ces dernières ainsi que les problèmes nouveaux qu'a du résoudre Xia. Ensuite, avant d'en venir aux preuves, il est nécessaire de familiariser Bourbaki avec les rudiments de la Mécanique Céleste, ce que je fais en m'inspirant d'une présentation développée avec Alain Albouy [2]. D'autres solutions dans lesquelles un polygone plan régulier, dont les  $N$  (grand) sommets sont les centre de gravité de  $N$  couples de corps tous de même masse, explose en temps fini sous l'influence de  $N$  messagers légers et véloces visitant tout à tour chaque couple de façon synchronisée, ont été découvertes par J.L. Gerver [6]. Je ne les décrirai pas.

*N.B. Une partie du texte est reprise quasi-littéralement de celui écrit par l'auteur à l'occasion de la journée de la Société Mathématique de France de juin 1996 consacrée à la Mécanique Céleste. Quelques légèretés ont été corrigées et l'exposé a été recentré sur les démonstrations de Mather-McGehee et de Xia. Merci à ladite Société d'avoir accepté cet autoplagiat et à Bourbaki de s'en être accomodé. Merci enfin à John Mather et Carlès Simo pour d'amicales discussions sur la dernière partie de la preuve.*

## 1. LES SOLUTIONS DE MATHER-McGEHEE ET CELLES DE XIA

1.1. Dans les solutions de Mather et McGehee, les quatre corps se déplacent sur une droite en conservant un ordre fixé, disons  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ , ordre qui n'est pas détruit par la régularisation des collisions doubles. Après fixation du centre de gravité la dimension de l'espace des phases est égale à 6. Deux amas – le couple  $m_1, m_2$  d'une part, la masse  $m_4$  d'autre part, s'éloignent l'un de l'autre à une vitesse de plus en plus grande sous l'influence d'un léger messager  $m_3$  qui rebondit indéfiniment sur chacun d'eux. A chaque retour du messager sur le couple, les trois masses passent de plus en plus près d'une collision triple. En dehors de ces instants le couple a un mouvement de type elliptique aplati (chaque collision est suivie d'un rebondissement élastique) de plus en plus rapide et de demi-grand axe de plus en plus petit. Les principales étapes de la preuve de l'existence de telles solutions sont les suivantes (figure 1) :

1) *L'ensemble  $\Sigma$  des données initiales conduisant à une collision triple des masses  $m_1, m_2, m_3$  est une sous-variété immergée de codimension 1. Un énoncé analogue vaut à énergie fixée.*

Ceci découlera de l'analyse de la variété de collision triple faite en 3.1. Soit  $z_0 \in \Sigma$ .

2) *Il existe un ouvert de valeurs de masses telles que tout arc  $\Gamma$  transverse en  $z_0$  à  $\Sigma$  contienne un sous arc  $\Gamma_0$  d'origine  $z_0$  ayant la propriété suivante : dans les mouvements dont la donnée initiale  $z$  appartient à  $\Gamma_0 \setminus \{z_0\}$ , la masse  $m_3$  passe à un*

instant donné  $\tau_- = \tau_-(z)$ , que l'on peut choisir continu en  $z$  et tendant vers l'instant  $\tau_0$  de la collision triple lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ , par le centre de gravité du système en se dirigeant vers  $m_1$  avec une vitesse  $V_-$  qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ .

C'est le point crucial, prouvé en 3.3, mais qui peut se comprendre intuitivement : la conservation de l'énergie implique qu'au voisinage d'une collision double, la vitesse des deux corps par rapport à leur centre de gravité tend vers l'infini; si  $m_3$  manque de peu la collision triple avec  $m_1$  et  $m_2$ , et rencontre  $m_2$  immédiatement après la collision de cette dernière avec  $m_1$ , elle profite de la vitesse acquise par  $m_2$  et rebondit avec une vitesse augmentée d'autant.

3) Provenant d'une collision avec  $m_2$  à un instant  $\tau^*$  immédiatement antérieur à  $\tau_-$ , la masse  $m_3$  entre en collision à un instant  $\hat{\tau}$  légèrement supérieur à  $\tau_-$  avec la masse  $m_4$  sur laquelle elle rebondit, repasse à un instant  $\tau_+$  par le centre de gravité du système avec une vitesse  $V_+$  dirigée vers le couple  $m_1, m_2$  et entre à nouveau en collision avec  $m_2$  à un instant  $\tau'$  qui, comme  $\tau^*, \tau_-$  et  $\tau_+$ , tend vers  $\tau_0$  lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ .

Il faut ici choisir les masses telles que  $\frac{m_4 - m_3}{m_3 + m_4} > \frac{m_3}{m_1 + m_2}$  (et vérifier que les conclusions du 2) sont compatibles avec un tel choix) pour que  $m_3$  rattrape effectivement  $m_2$ . En effet, des estimations élémentaires d'impulsion et d'énergie montrent qu'entre les instants  $\tau_-$  et  $\tau_+$ , les couples  $(m_1, m_2)$  et  $(m_3, m_4)$  influent très peu l'un sur l'autre, ce qui autorise des estimations de type "deux corps". Négligeant la vitesse de  $m_4$  par rapport à  $V_-$ , on obtient comme termes dominants  $\frac{m_3}{m_3 + m_4} V_-$  pour la vitesse du centre de gravité  $g_{34}$  de  $m_3$  et  $m_4$  aux instants  $\tau_-$  et  $\tau_+$ ,  $\frac{m_4}{m_3 + m_4} V_-$  pour la vitesse à l'instant  $\tau_-$  de  $m_3$  par rapport à  $g_{34}$ ,  $\frac{-m_4}{m_3 + m_4} V_-$  pour la vitesse de  $m_3$  par rapport à  $g_{34}$  à l'instant  $\tau_+$ , et  $\frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4} V_-$  pour  $V_+$ . Mais alors, le centre de gravité du système étant fixé, les vitesses  $W_-$  et  $W_+$  aux instants  $\tau_-$  et  $\tau_+$  du centre de gravité de  $m_1$  et  $m_2$  ont toutes deux  $\frac{-m_3}{m_1 + m_2} V_-$  pour terme dominant, d'où la condition sur les masses qui assure que  $|V_+| > |W_+|$ . La petitesse des intervalles de temps  $[\tau_-, \tau_+]$  et  $[\tau_+, \tau']$ , et donc l'assertion sur le comportement limite des fonctions  $\tau^*, \hat{\tau}, \tau_+, \tau'$ , se déduisent de ce que  $V_-$ , et donc également l'énergie interne du couple  $m_3, m_4$ , tend vers l'infini lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ . Notons qu'on peut choisir les instants  $\tau^*$  et  $\tau_-$  suffisamment proches pour que le centre de gravité de  $m_1, m_2, m_3$  se déplace arbitrairement peu entre ces instants. On en déduit que  $|x_1(\tau_-)| \geq K|x_1(\tau^*)|$ , où  $K$  peut être choisi arbitrairement proche de  $\frac{2m_1 + m_3}{2m_1}$ , et en particulier strictement supérieur à 1.

4) Le nombre  $N$  de collisions entre  $m_1$  et  $m_2$  pendant l'intervalle de temps  $[\tau^*, \tau']$  tend vers l'infini lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ , d'où suit par continuité que le point  $z_0$  est un point d'accumulation de  $\Gamma_0 \cap \Sigma$  puisqu'un tel point d'intersection se rencontre à chaque saut de la fonction  $N$ .

Ce point, qui implique la possibilité d'itérer la construction en se rapprochant de la collision triple, se montre de la manière suivante : au temps  $\tau_-$ , l'énergie interne du couple  $m_1, m_2$  est majorée par un nombre négatif très grand de la forme  $-C_1 V_-^2$  lorsque  $z$  est proche de  $z_0$ , car les masses  $m_3$  et  $m_4$  sont à une distance finie l'une de l'autre ainsi que du centre de gravité de  $m_1, m_2$  (ces trois positions ont des limites distinctes lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ ). Une majoration de ce type vaut donc sur tout l'intervalle de temps  $[\tau_-, \tau_+]$ . On en déduit que les masses  $m_1, m_2$  doivent rester pendant cet intervalle à une distance inférieure à un nombre très petit de la forme  $C_2 V_-^{-2}$ , ce qui donne une minoration du type Kepler  $C_3 (V_-^{-2})^{-3/2}$  pour la fréquence, donc une majoration par  $C_4 V_-^{-3}$  du temps séparant deux collisions, donc enfin une minoration du nombre  $N$  par  $C_5 V_-^2$  pendant l'intervalle de temps  $[\tau_-, \tau_+]$ . Ce dernier admet en effet une minoration de la forme  $CV_-^{-1}$ .

5) Pour les valeurs des masses compatibles avec 2) et 3), il existe un ensemble de Cantor de données initiales conduisant à une explosion du système en un temps arbitrairement proche de  $\tau_0$  (que l'on peut lui-même choisir arbitrairement petit).

On remplace  $\Gamma$  par  $\Gamma_0$  et on recommence en choisissant un arc  $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$  d'origine  $z_1 \in \Sigma$  assez proche de  $z_0$  pour que l'instant de la collision triple  $\tau_1$  de donnée initiale  $z_1$  soit arbitrairement proche de  $\tau_0$ . Itérant cette construction en choisissant deux arcs disjoints plutôt qu'un seul à chaque étape, on obtient en faisant l'intersection de tous ces arcs l'ensemble de Cantor cherché de données initiales.

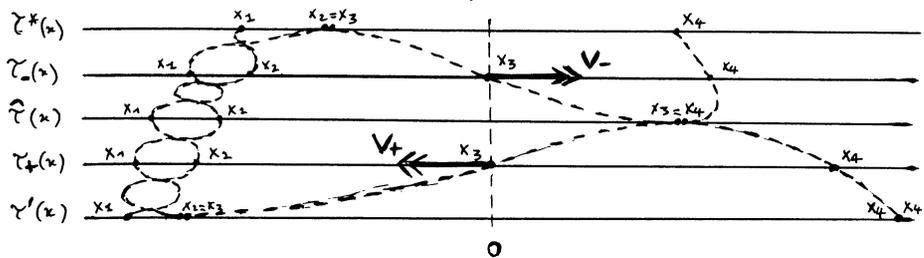


Figure 1

1.2. Afin d'éliminer les collisions, il semblerait naturel de considérer des solutions du problème des quatre corps dans le plan proches de celles de Mather-McGehee. Jusqu'ici personne n'a pu construire de telles solutions sans collision. Dans les solutions spatiales de Xia il y a également deux amas, mais la masse isolée  $m_4$  est rem-

placée par un couple  $m_4, m_5$  et dans chaque couple  $m_1, m_2$  et  $m_4, m_5$  les masses sont égales. Le messager  $m_3$  se déplace encore sur une droite fixe qui est un axe de symétrie du système, chacun des triplets  $(m_1, m_2, m_3)$  et  $(m_3, m_4, m_5)$  étant isocèle à chaque instant. La symétrie permet d'abaisser la dimension de l'espace des phases mais, le mouvement se passant dans l'espace à trois dimensions, celle-ci est quand même égale à 12 après fixation du centre de gravité. Lorsqu'il n'interagit pas étroitement avec  $m_3$ , chaque couple a autour de son centre de gravité un mouvement de type elliptique dont l'excentricité est de plus en plus grande et le demi-grand axe de plus en plus petit (figure 2). Sous l'influence des aller-retours de plus en plus rapides du messager, les centres de gravité des deux couples s'éloignent à l'infini en temps fini. Plus précisément, il s'agit de montrer qu'il existe un choix des masses admettant des mouvements du type suivant, permettant d'itérer la construction : la masse  $m_3$  est éjectée à une vitesse arbitrairement grande d'une presque collision triple avec  $m_1$  et  $m_2$  au moment où  $m_4$  et  $m_5$  sont elles-mêmes en presque collision double. Au bout d'un temps arbitrairement court,  $m_3, m_4, m_5$  sont à leur tour en presque collision triple alors que  $m_1$  et  $m_2$  sont en presque collision double, la taille du système a augmenté d'un facteur qui ne dépend que des masses et  $m_3$  revient encore plus vite; on recommence alors en échangeant indéfiniment les rôles des paires  $m_1, m_2$  et  $m_4, m_5$ . Bien entendu, si la synchronisation n'est pas bonne,  $m_3$  peut traverser le couple  $m_4, m_5$  et s'éloigner définitivement !

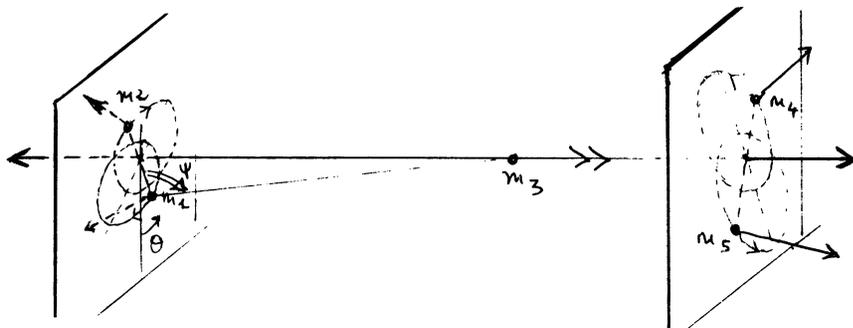


Figure 2

Si l'on permet chez Mather-McGehee des collisions doubles régularisées en rebonds élastiques – mais pas des collisions doubles simultanées – il faut chez Xia éviter toute collision et ce bien qu'un théorème célèbre de Sundman, rappelé en 2.2, implique que les dites solutions soient de moment cinétique nul. Nous verrons en 4.2 que ceci est garanti dès que les directions limites des axes des deux couples ne sont ni parallèles

ni orthogonales. De plus, il ne suffit plus qu'après son expulsion du premier amas le messager rattrape le second; il faut encore qu'il manque de très peu la collision triple avec ce dernier au moment où le premier sera presque en collision double : alors que les solutions de Mather-McGehee exigent la compréhension de mouvements passant très près d'une collision triple, il faut dans celles de Xia *comprendre des mouvements passant très près de collisions triple et double simultanées*.

En caricaturant à peine, on peut dire que chacune des solutions est une petite perturbation d'une "solution singulière" dans laquelle le messager fait une infinité d'aller-retours à vitesse infinie entre des amas eux-mêmes en collision infiniment rapide : dans la "solution singulière" de Mather et McGehee on passe ainsi infiniment rapidement et une infinité de fois de la collision triple  $m_1, m_2, m_3$  à la collision double  $m_3, m_4$  et retour alors que dans celle de Xia on passe infiniment rapidement et une infinité de fois des collisions simultanées triple  $m_1, m_2, m_3$  et double  $m_4, m_5$  aux collisions simultanées double  $m_1, m_2$  et triple  $m_3, m_4, m_5$  et retour.

## 2. LE PROBLÈME DES N CORPS

### 2.1. Équations, intégrales premières

Depuis Lagrange [9], les équations différentielles qui régissent le mouvement dans l'espace  $R^3$  de  $n$  masses ponctuelles  $m_i$  soumises à l'attraction newtonienne s'écrivent  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ , où le vecteur  $\vec{r}_i \in R^3$  décrit la position de la masse  $m_i$ ,  $\ddot{\vec{r}}_i$  sa dérivée seconde par rapport au temps, et où la fonction de force  $U$ , opposée à l'énergie potentielle, est définie par

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_{i < j} m_i m_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-1}.$$

Soit  $\mathcal{X} = \{(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \in (R^3)^n, \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0\}$ . La fonction  $U$  est bien définie sur l'espace des configurations  $\hat{\mathcal{X}}$ , ouvert de  $\mathcal{X}$  défini par la condition que quels que soient les indices  $i$  et  $j$  distincts, on ait  $\vec{r}_i \neq \vec{r}_j$  (absence de collision). Une configuration est un élément  $x$  de cet ouvert. On l'interprétera comme la donnée des positions de  $n$  masses ponctuelles  $m_i$  dans  $R^3$  dont le centre de gravité est à l'origine. C'est l'invariance par translation uniforme des équations qui justifie ce choix; elle implique en effet l'existence d'un repère galiléen dans lequel le centre de gravité du système reste fixe. L'espace des phases (ou espace des "états" ou espace des "positions-vitesses") est l'espace tangent à l'espace des configurations. Nous l'identifierons à l'ouvert  $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$  du produit  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Nous noterons  $(x, y)$  les éléments de  $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ . L'espace des configurations

est muni du *produit scalaire des masses* : si  $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ ,  $y = (\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n)$ , et si  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^3}$  désigne le produit scalaire dans  $R^3$ , on pose  $x \cdot y = \sum_{i=1}^n m_i \langle \vec{r}_i, \dot{\vec{s}}_i \rangle_{R^3}$ . Notant  $\nabla U(x)$  le gradient du potentiel pour la métrique sur  $\mathcal{X}$  définie par ce produit scalaire, on écrit les équations de Lagrange sous la forme

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \nabla U(x).$$

Nous noterons  $X_H(x, y) = (y, \nabla U(x))$  le champ de vecteurs sur l'espace des états engendrant ces équations. Les fonctions suivantes, définies également sur l'espace des états, jouent un rôle fondamental dans la description du comportement global des solutions :

$$I = x \cdot x, \quad J = x \cdot y, \quad K = y \cdot y, \quad H = \frac{1}{2}K - U.$$

La première,  $I = \sum_i m_i |\vec{r}_i|^2 = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_{i < j} m_i m_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2$ , est l'*inertie par rapport au centre de gravité*. Sa racine carrée  $r = I^{\frac{1}{2}}$  est une mesure de la *taille* d'une configuration, c'est-à-dire du sup des distances mutuelles;  $2J = \dot{I}$  est la dérivée de Lie de  $I$  suivant  $X_H$ , c'est-à-dire la dérivée de  $I$  par rapport au temps; la deuxième,  $K = \sum_i m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_{i < j} m_i m_j |\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j|^2$ , est le double de l'énergie cinétique dans un repère fixant le centre de gravité; enfin  $H$  est l'énergie totale du système représenté par  $(x, y)$ . On déduit de la conservation de l'énergie  $H$  que, comme  $U$ ,  $K$  est une mesure de l'inf des distances mutuelles, c'est-à-dire de la distance aux collisions.

Les intégrales premières classiques du système, conservées au cours du temps le long de n'importe quelle solution, se déduisent par le théorème de Noether des symétries des équations : alors que l'indépendance de  $X_H$  par rapport au temps implique la conservation de l'énergie  $H$ , déjà évoquée, son invariance par les rotations de  $R^3$  implique la conservation du moment cinétique  $\mathcal{C}$ , bivecteur de  $R^3$  défini par  $\mathcal{C}((\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n), (\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n)) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i$ , qu'on identifie à un vecteur  $\vec{C}$  une fois fixée l'orientation. La formule  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}((\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)) = (\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \wedge \vec{r}_1, \dots, \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \wedge \vec{r}_n)$  définit une structure complexe, c'est-à-dire un opérateur  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  de carré  $-Id$  sur le sous-espace de  $\mathcal{X}$  formé des  $n$ -uples  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$  dont chaque composante appartient au plan orthogonal à  $\vec{C}$ , donc sur  $\mathcal{X}$  si le mouvement a lieu dans un plan. Dans le cas général, on a l'inégalité  $\|\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(x)\| \leq \|x\|$ . On se permettra dans tous les cas de parler de  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  comme d'une structure complexe et d'appeler *droite complexe engendrée par  $x$*  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{X}$  de la forme  $\lambda x + \mu \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(x)$ , avec  $\lambda$  et  $\mu$  réels.

## 2.2. Relation de Lagrange-Jacobi, inégalité de Sundman

Calculons la dérivée  $\dot{J} = \dot{I}/2$  de  $J$  le long d'une solution des équations de Newton en tenant compte de l'homogénéité de degré  $-1$  de  $U(x)$  :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = \dot{x} \cdot \dot{y} + x \cdot \ddot{y} = \dot{y} \cdot \dot{y} + x \cdot \nabla U(x) = K - U = 2H + U = \frac{1}{2}K + H.$$

C'est la relation de Lagrange-Jacobi (ou relation du viriel) [7, 8], base de notre compréhension du comportement global des solutions du Problème des  $n$  corps. La fonction  $U$  étant toujours positive, la fonction  $J$  est croissante le long de chaque solution d'énergie totale  $H$  positive ou nulle. L'existence d'une telle *fonction de Liapunov* interdit toute récurrence non triviale, en particulier tout mouvement périodique. En énergie négative, il est bien connu que les choses sont plus compliquées. L'outil de base, en sus de l'équation de Lagrange-Jacobi, est l'*inégalité de Sundman* [22].

Commençons par examiner le cas de deux corps, pour lequel cette inégalité est une égalité. Le mouvement a lieu sur une droite fixe si le moment cinétique est nul, dans un plan fixe sinon. Dans le premier cas,  $x$  et  $y$  sont proportionnels, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $IK - J^2 \geq 0$  devient une égalité. Dans le deuxième, notons  $c = \|\vec{C}\|$  la norme du vecteur moment cinétique. La configuration  $y$  des vitesses est dans tous les cas un multiple complexe de la configuration  $x$ . On en déduit facilement (égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz complexe) que  $IK - J^2 = c^2$ . Dès que le nombre de corps est supérieur à deux, cette égalité devient l'*inégalité de Sundman*

$$IK - J^2 \geq c^2,$$

qu'on obtient en minorant la norme  $\|y\|$  de  $y$  (configuration des vitesses) par celle de sa projection orthogonale sur la droite complexe engendrée par  $x$ . Éliminant  $K$  à l'aide de l'équation de Lagrange-Jacobi, on transforme l'inégalité de Sundman en l'inéquation différentielle  $I\ddot{I} - 2IH - \frac{1}{4}\dot{I}^2 - c^2 \geq 0$  qui exprime que la dérivée seconde de  $I$  est toujours supérieure ou égale à la valeur qu'elle aurait pour un Problème de deux corps dans le plan de même énergie, de même moment cinétique, et ayant mêmes valeurs de  $I$  et  $\dot{I}$ . Une fois fixées les valeurs de  $H$  et  $c$ , les courbes intégrales de l'équation différentielle obtenue en remplaçant l'inégalité par une égalité dans l'inéquation ci-dessus, sont les courbes de niveau dans le plan de coordonnées  $(I, J = \dot{I}/2)$  de la *fonction S de Sundman*, définie sur l'espace des états par

$$S = I^{-\frac{1}{2}}(J^2 + c^2) - 2I^{\frac{1}{2}}H,$$

et l'inéquation différentielle, c'est-à-dire l'inégalité de Sundman, équivaut à ce que la dérivée

$$\dot{S} = I^{-\frac{3}{2}}J(IK - J^2 - c^2)$$

de  $S$  le long d'une solution soit du signe de  $J$  : les fonctions  $I$  et  $S$  sont en même temps croissantes ou décroissantes. Dans le cas de deux corps, la fonction de Sundman est une constante ne dépendant que des deux masses; plus généralement, on constate sur l'expression de  $\dot{S}$  que les mouvements de  $n$  corps dans  $R^3$  au cours desquels  $S$  reste constante sont d'une part les mouvements à inertie  $I$  constante, d'autre part les mouvements tels que  $IK - J^2 = c^2$ . On peut montrer que les derniers sont les mouvements *homothétiques complexes*, tels qu'à chaque instant  $y$  soit complexe-proportionnel à  $x$  (en particulier  $x$  ne change que par homothétie et rotation : on dit que le mouvement est *homographique*). Les configurations, très particulières, admettant un tel mouvement sont exactement celles qui admettent un mouvement *homothétique* (réel), c'est-à-dire un mouvement dans lequel la configuration des vitesses  $y$  est à chaque instant proportionnelle à la configuration  $x$ , les corps s'effondrant sur leur centre de gravité suivant le segment qui les joint à celui-ci et formant à tout instant une figure homothétique. Appelées *configurations centrales*, les figures correspondant à de telles solutions sont les seules que puissent asymptotiquement former les corps au voisinage d'une collision multiple (voir 2.3); elles ont été déterminées dans le cas de trois corps : ce sont les célèbres solutions d'Euler [5] (trois corps alignés avec des distances relatives dépendant de leurs masses) et Lagrange [8] (triangle équilatéral quelles que soient les masses). La détermination des configurations centrales de plus de trois corps est un problème extrêmement difficile [1].

**Remarque.** Un peu d'algèbre linéaire montre qu'en chaque point  $(x, y)$ , la configuration des vitesses  $y$  est la somme orthogonale d'une composante  $y_h$ , proportionnelle à  $x$ , qui induit une variation homothétique de la configuration, d'une composante  $y_r$  de rotation pure (i.e. telle qu'il existe un opérateur antisymétrique  $\Omega$  de l'espace euclidien  $R^3$  vérifiant pour chaque  $i$ ,  $\dot{r}_i = \Omega \vec{r}_i$ ), et d'une composante  $y_d$  qui correspond à une déformation de la configuration normalisée  $r^{-1}x = I^{-\frac{1}{2}}x$ . Nous appellerons *décomposition de Saari* cette écriture de  $y$ . On déduit de l'orthogonalité des composantes que  $K = \|y\|^2 = \|y_h\|^2 + \|y_r\|^2 + \|y_d\|^2$ . Calculant  $x \cdot y = x \cdot y_h$ , on voit que  $y_h = I^{-1}Jx$ , donc  $\|y_h\|^2 = I^{-1}J^2 = (\dot{r})^2$ . Enfin, on vérifie que  $y_d$  est orthogonale à la droite complexe engendrée par  $x$ . L'inégalité de Sundman revient donc à minorer le terme de rotation  $\|y_r\|^2$ , en fait le carré de la norme de sa projection sur cette droite complexe, par  $I^{-1}c^2$ , et ignorer le terme de déformation  $\|y_d\|^2$ . L'égalité de  $IK - J^2 - c^2$  à  $\|y_d\|^2$  n'a lieu à un instant donné que si d'une part  $y_r$  appartient à la droite complexe engendrée par  $x$ , d'autre part si  $\|\mathcal{I}_C(x)\| = \|x\|$ , c'est-à-dire si le mouvement a lieu dans un plan.

Voici une conséquence simple de l'inégalité de Sundman : dans le cas de deux corps,

l'inspection des solutions montre qu'une collision ne peut se produire que si le mouvement a lieu sur une droite, c'est-à-dire si le moment cinétique s'annule. Disons qu'un mouvement de  $n$  corps présente une *collision totale* au temps  $t_0$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} I(t) = 0$ .

**Lemme (Sundman).** *Une collision totale des  $n$  corps ne peut se produire que si le moment cinétique  $\mathcal{C}$  est nul.*

**Démonstration.** Supposons par exemple que  $t$  atteigne sa limite  $t_0$  en croissant. Il existe alors un réel positif  $\theta$  tel que, dans l'intervalle  $[t_0 - \theta, t_0[$ , les fonctions  $I, J, K$  se comportent de la façon suivante :  $I > 0$  décroît,  $J < 0$  croît,  $K > 0$  tend vers l'infini. En effet,  $U$  tend vers  $+\infty$  ainsi que  $\ddot{I} = 4H + 2U$  (formule de Lagrange-Jacobi) et  $K = 2H + 2U$ . Si  $\dot{I} = 2J$  devient positive ou nulle, elle le reste et  $I$  ne peut décroître, d'où la conclusion. Puisqu'au voisinage de  $t_0$  la fonction  $I$  finit par décroître, il en est de même de la fonction de Sundman  $S$ . Mais si  $\mathcal{C}$  n'est pas nul, le terme  $I^{-\frac{1}{2}}c^2$  la fait tendre vers  $+\infty$ .

### 2.3 Symétrie d'homothétie et collision totale

C'est l'homogénéité du potentiel newtonien qui permet une analyse approfondie des mouvements conduisant à une collision totale et de ceux qui évitent de peu une telle collision. D'une part, elle implique l'existence des *mouvements homothétiques* qui tendent vers la collision totale en ne modifiant leur configuration que par une homothétie de rapport de l'ordre de  $|t - t_0|^{\frac{2}{3}}$  si  $t_0$  est l'instant de la collision (penser au problème des deux corps sur la droite). D'autre part, elle implique que *tout mouvement se terminant en collision totale est asymptotiquement homothétique*. Considérons le champ de vecteurs  $Y$  sur l'espace des états défini par

$$Y(x, y) = \left(x, -\frac{1}{2}y\right)$$

(comparer au paragraphe 93 du beau livre d'Elie Cartan [3]). Le long d'une courbe intégrale de ce champ, la configuration  $x$  formée par les corps subit une expansion homothétique d'un facteur  $e^t$  alors que la configuration  $y$  des vitesses subit une contraction homothétique d'un facteur  $e^{-\frac{t}{2}}$ , les taux d'expansion et de contraction étant dans un rapport habilement choisi en fonction de l'homogénéité de degré  $-1$  en  $x$  du potentiel et de celle de degré  $2$  en  $y$  de l'énergie cinétique. On obtient sans peine les dérivées de Lie par rapport à  $Y$  du champ de vecteurs  $X_H$  décrivant les équations de Newton et de ses intégrales premières :

$$\mathcal{L}_Y X_H = [Y, X_H] = -\frac{3}{2}X_H, \quad \mathcal{L}_Y H = \partial_Y H = -H, \quad \mathcal{L}_Y \mathcal{C} = \partial_Y \mathcal{C} = \frac{1}{2}\mathcal{C}.$$

La première est une condition de Frobenius, qui assure l'existence d'un feuilletage singulier de dimension deux de l'espace des états dont les feuilles sont les variétés intégrales du champ de plans engendré par  $Y$  et  $X_H$ . Les feuilles singulières de ce feuilletage sont les courbes intégrales de  $X_H$  qui, au paramétrage près, sont des courbes intégrales de  $Y$ , c'est-à-dire les *mouvements homothétiques*. Il sera plus agréable d'engendrer ce feuilletage à l'aide du champ  $Y$  et d'un champ  $\tilde{X}_H = \phi X_H$  commutant avec lui, où le "facteur intégrant"  $\phi$  est n'importe quelle fonction  $\phi$  définie sur l'espace des états et vérifiant  $\mathcal{L}_Y \phi = \frac{3}{2}\phi$ . Le choix le plus simple, celui que l'on fera dans la suite du paragraphe, est  $\phi = I^{\frac{3}{4}}$ , mais d'autres peuvent avoir un intérêt, par exemple  $\phi = U^{-\frac{3}{2}}$ . Le champ  $\tilde{X}_H$  possède les mêmes courbes intégrales que  $X_H$ , paramétrées autrement : multiplier le champ par la fonction  $\phi$  revient à dériver suivant un nouveau "temps"  $\tau$  tel que  $dt/d\tau = \phi(x, y)$ . On étire le temps au voisinage de la collision de telle façon qu'un mouvement se terminant au temps  $t_0$  dans le temps initial continue indéfiniment dans l'autre. Le champ  $\tilde{X}_H$  possédant la symétrie définie par  $Y$ , on peut définir un champ de vecteur sur l'espace quotient. Mais cette "réduction" ne simplifie la situation que lorsque les intégrales premières classiques  $H$  et (les composantes de)  $\mathcal{C}$  sont nulles puisque seuls les deux niveaux  $H = 0$  et  $\mathcal{C} = 0$  sont invariants par  $Y$  (Euler [5] a le premier utilisé cette symétrie d'homothétie pour réduire le problème des trois corps sur la droite en énergie nulle); dans le cas contraire, le passage au quotient sacrifie l'une de ces intégrales premières : seul le moment cinétique "normalisé"  $|H|^{\frac{1}{2}}\mathcal{C}$  passe au quotient. Il sera commode d'introduire les fonctions suivantes, invariantes par  $Y$  :

$$\tilde{U} = I^{\frac{1}{2}}U, \quad \tilde{K} = I^{\frac{1}{2}}K, \quad \tilde{H} = I^{\frac{1}{2}}H, \quad \tilde{J} = I^{-\frac{1}{4}}J, \quad \tilde{c} = I^{-\frac{1}{4}}c, \quad \tilde{\mathcal{C}} = I^{-\frac{1}{4}}\mathcal{C}.$$

On vérifie que

$$\partial_{\tilde{X}_H} \tilde{H} = \tilde{J}\tilde{H}, \quad \partial_{\tilde{X}_H} \tilde{\mathcal{C}} = -\frac{1}{2}\tilde{J}\tilde{\mathcal{C}},$$

et on constate que la fonction de Sundman  $S = \tilde{J}^2 + \tilde{c}^2 - 2\tilde{H} = 2\tilde{U} - (\tilde{K} - \tilde{J}^2 - \tilde{c}^2)$ , est également invariante par  $Y$ . Les hypersurfaces de niveau de la fonction  $I$  sont transverses aux courbes intégrales de  $Y$  et chacune d'elles rencontre chacune des courbes intégrales en un et un seul point. *L'hypersurface d'équation  $I = 1$  est donc un bon représentant du quotient de l'espace des états  $\tilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$  par le flot de  $Y$* . Appelons  $\tilde{Z}$  l'unique champ de vecteurs sur ce dernier tel que  $[Y, \tilde{Z}] = 0$  et  $\partial_{\tilde{Z}} I = 0$ , qui ait même image directe que  $\tilde{X}_H$  dans ce quotient :

$$\tilde{Z} = \tilde{X}_H - \tilde{J}Y = I^{\frac{3}{4}}X_H - I^{-\frac{1}{4}}JY.$$

Le passage au quotient peut donc être réalisé en remplaçant le champ de vecteurs  $\tilde{X}_H$  par le *champ réduit*  $Z$ , restriction de  $\tilde{Z}$  à la sous-variété d'équation  $I = 1$ . La région définie par  $I = 1, H < 0$  (resp.  $I = 1, H > 0$ , resp.  $I = 1, H = 0$ ) représente n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie constante négative (resp. n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie constante positive, resp. le quotient par le flot de  $Y$  de la sous-variété d'énergie nulle).

**Définition.** La variété de collision ou variété de McGehee est l'intersection avec la sous-variété  $I = 1$ , de l'ensemble des états d'énergie et moment cinétique nuls. Plus intrinsèquement, c'est le quotient par le flot de  $Y$  de cet ensemble d'états.

Cette terminologie vient de ce que le difféomorphisme  $(x, y) \mapsto (s, \zeta)$  défini en suivant les courbes intégrales de  $Y$  d'une hypersurface d'équation  $H = h$  à l'hypersurface d'équation  $I = 1$  conduit naturellement aux *coordonnées de McGehee* [13] :

$$r = I^{\frac{1}{2}}, \quad s = r^{-1}x, \quad \zeta = r^{\frac{1}{2}}y,$$

assorties du changement de temps  $dt/dr = r^{\frac{3}{2}}$  (passage de  $X_H$  à  $\tilde{X}_H$ ), et que dans cette représentation la *variété de collision*  $r = 0$  s'identifie à la sous-variété d'équations  $I = 1, H = 0, C = 0$ .

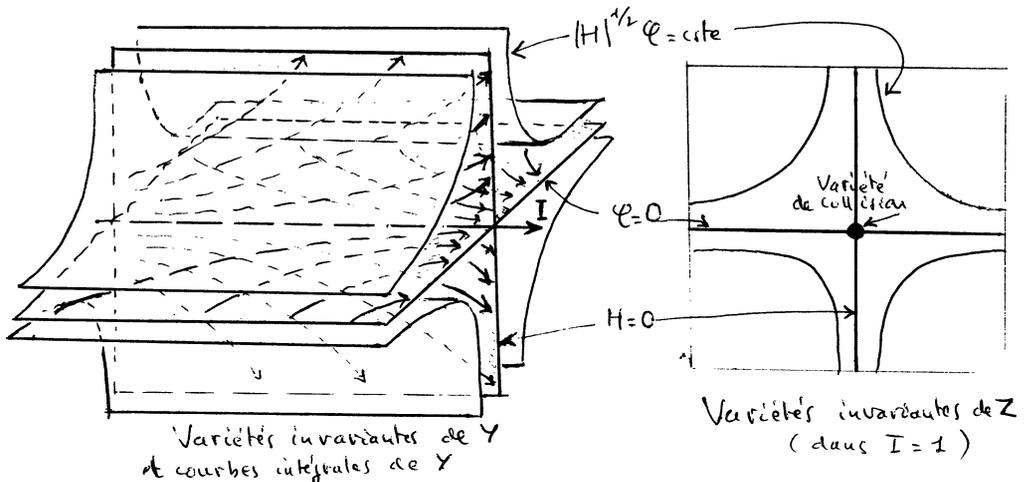


Figure 3

La restriction de  $S$  à la variété de collision coïncide avec celle de  $\tilde{J}^2$ . On en déduit que  $\tilde{J}$  est une fonction de Liapunov pour la restriction de  $Z$  à cette variété.

**Lemme.** Les singularités de  $Z$  appartiennent à la variété de collision : ce sont les états  $(x_0, y_0)$  définissant un mouvement homothétique d'énergie nulle. Ils vérifient  $J_0 = x_0 \cdot y_0 \neq 0$ . Les courbes intégrales qui leur sont positivement ou négativement asymptotes sont contenues dans la réunion des sous-ensembles  $C = 0$  et  $H = 0$ . Elles correspondent à des mouvements des  $n$  corps au long desquels ou bien  $I \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow \infty$  (collision totale en temps fini), ou bien  $K \rightarrow 0$ ,  $I \rightarrow \infty$  (mouvement complètement parabolique en temps infini). De plus, si  $C = 0$  et  $H \neq 0$  (resp.  $H = 0$  et  $C \neq 0$ ) c'est  $I$  (resp.  $K$ ) qui tend vers zéro.

**Démonstration.** Le mouvement correspondant à une singularité de  $Z$  doit se faire le long d'une courbe intégrale de  $Y$  et est donc homothétique. L'énergie et le moment cinétique, étant invariants, doivent alors s'annuler. Enfin, l'invariance de  $|H|^{\frac{1}{2}}C$  par  $Z$  force toute courbe intégrale de  $Z$  positivement ou négativement asymptote à une singularité à vérifier  $C = 0$  ou  $H = 0$ . L'absence de singularité du champ  $X_H$  implique la non-annulation de  $J_0 = x_0 \cdot y_0$  puisque  $Z$  et  $X_H$  se confondent en un point où  $J = 0$ . Le long d'une solution des équations de Newton correspondant à une courbe intégrale de  $Z$  asymptote à une singularité, la fonction invariante  $\tilde{J} = I^{-\frac{1}{4}}J$ , qui s'écrit encore  $\frac{2}{3}\partial_{X_H}I^{\frac{3}{4}}$ , a donc une limite non nulle  $J_0$ . On en déduit que, suivant que  $J_0$  est négatif ou positif, la fonction  $I^{\frac{3}{4}}$  (et donc également la fonction  $I$ ) tend vers 0 en temps fini ou vers l'infini en temps infini. Un raisonnement analogue vaut bien entendu lorsqu'au lieu de croître, le temps décroît. D'autre part, on déduit de  $0 \leq IK - J^2 = I^{\frac{1}{2}}(\tilde{K} - \tilde{J}^2)$  que  $\tilde{K} = I^{\frac{1}{2}}K > \frac{1}{2}J_0^2 > 0$  au voisinage de la singularité. Le long d'une telle solution, les conditions  $I \rightarrow 0$  et  $I \rightarrow \infty$  équivalent donc respectivement aux conditions  $K \rightarrow \infty$  et  $K \rightarrow 0$ . Considérons enfin une courbe intégrale de  $Z$  qui vérifie  $H \neq 0$  (et donc  $C = 0$ ), et est positivement (resp. négativement) asymptote à une singularité  $(x_0, y_0)$ . Le long d'une solution correspondante des équations de Newton, la fonction invariante  $\tilde{H} = I^{\frac{1}{2}}H$  tend vers 0, donc  $I \rightarrow 0$ . De même, si une courbe intégrale du champ  $Z$  vérifie  $C \neq 0$  (et donc  $H = 0$ ) et est asymptote à une singularité  $(x_0, y_0)$ , le long d'une solution correspondante des équations de Newton, l'application invariante  $\tilde{C} = I^{-\frac{1}{4}}C$  tend vers 0, donc  $I \rightarrow \infty$ , c.q.f.d. Précisant le lemme de Sundman, la réciproque suivante rassemble des résultats de Sundman, McGehee, Saari [22,13,19].

**Théorème fondamental.** Un mouvement de collision totale (resp. complètement parabolique) ne peut exister que si le moment cinétique (resp. l'énergie) s'annule. Dans les deux cas, la courbe intégrale du champ  $Z$  qui lui correspond tend vers l'ensemble des singularités de ce champ. En particulier, la configuration normalisée  $s = I^{-\frac{1}{2}}x$  tend vers l'ensemble des configurations centrales.

Je renvoie à [2] pour une démonstration unifiée de ce théorème. Les deux types de mouvement se traitent de façons pratiquement parallèles. Dans les deux cas, les points techniques fondamentaux sont d'une part l'*existence d'une limite finie non nulle*  $J_0$  de  $\tilde{J}$ , ce qui fournit les estimations de temps, d'autre part l'*existence d'une limite finie non nulle*  $U_0$  de  $\tilde{U}$ , résultat de compacité qui assure qu'on reste loin des collisions partielles et permet de prouver l'existence d'un ensemble limite vers lequel converge l'orbite de  $Z$ . Ces deux points équivalent aux estimations asymptotiques classiques de  $\dot{I}$  et  $\dot{I}$  qu'on trouvera dans [23] : dans le cas d'une collision totale au temps  $t_0$ ,  $I$  est de l'ordre de  $|t - t_0|^{\frac{4}{3}}$ , puisque la dérivée temporelle de  $I^{\frac{3}{2}}$ , qui est égale à  $\frac{3}{2}\tilde{J}$  tend vers la quantité non nulle  $\frac{3}{2}J_0$ ; quant aux estimations sur  $\dot{I}$  et  $\dot{I}$ , ce sont celles qu'on obtiendrait en dérivant formellement celle donnée pour  $I$ , mais aucun théorème Taubérien n'est requis. La seule différence notable entre les deux situations est la nécessité dans le cas complètement parabolique de recourir à un argument de *décomposition en amas* pour estimer a priori le comportement asymptotique de  $I$ . Cet argument, emprunté à Marchal et Saari [11], se ramène à une comparaison du problème considéré à un problème des deux corps d'énergie positive sur une droite. C'est avec la fonction de Sundman, qui compare à un problème des deux corps dans le plan de même énergie, le seul outil global dont on dispose en général.

**Remarque importante.** Les fonctions  $I, J, K, U, H, c$  sont invariantes par l'action naturelle  $(x, y) \rightarrow (Ax, Ay)$  des isométries  $A$  de l'espace ambiant  $R^3$  sur l'espace des phases, et le flot du champ de vecteurs  $Y$  commute avec cette action. *Le champ  $Z$  et la variété de collision passent donc au quotient par cette action. On se permettra dans la suite d'effectuer ce quotient sans changer de notations.*

Nous terminons ce paragraphe en explicitant le champ quotient  $Z$  dans le cas du Problème des deux corps dans le plan et en faisant le lien de ce qui précède avec la régularisation de Levi Civita [10]. L'espace des configurations  $\hat{\mathcal{X}}$  est difféomorphe à  $R^2 \setminus \{0\}$ , donc à  $S^1 \times R$  (il y a une seule configuration à homothétie et rotation près), et l'espace des phases à  $(R^2 \setminus \{0\}) \times R^2$ , c'est-à-dire à  $S^1 \times R^3$ . La restriction à  $I = 1$ , c'est-à-dire le quotient par le champ d'homothéties  $Y$ , nous ramène à  $S^1 \times R^2$ , et celui par les rotations du plan à  $R^2$ . On peut prendre dans ce plan les coordonnées  $\tilde{C}$  (qu'on peut identifier à un nombre réel de module  $\tilde{c}$ ), et  $\tilde{J}$  (figure 4). Les sous-variétés d'énergie nulle et de moment cinétique nul s'identifient respectivement au cercle d'équation  $\tilde{J}^2 + \tilde{C}^2 = 2\tilde{U} = S = 2 \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{2}}}$  et à la droite d'équation  $\tilde{C} = 0$ . Leur intersection, la variété de collision, est une sphère de dimension zéro, c'est-à-dire deux points caractérisés par le signe de  $\tilde{J}$ . L'intérieur du disque bordé par le cercle

d'énergie nulle correspond à n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie négative, l'extérieur à n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie positive. On a indiqué sur la figure les lignes de niveau de la fonction  $|H|^{\frac{1}{2}}C$  qui, de dimension un, coïncident avec les courbes intégrales du champ quotient  $Z$ .

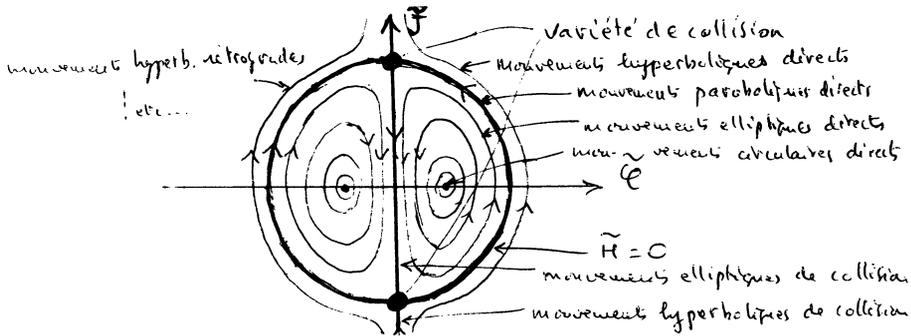


Figure 4

Lorsqu'il n'y a que deux corps, la collision peut être régularisée en remarquant que, convenablement ralenti, un mouvement suivant une cône de forte excentricité tend vers un mouvement de collision élastique lorsque l'excentricité tend vers 1 (figure 5 dans le cas elliptique où l'anomalie excentrique  $u$  est encore définie à la limite). C'est la régularisation de Levi Civita. Une variété d'énergie négative ainsi régularisée devient la sphère  $S^2$  de la figure 6, chaque mouvement décrivant un cercle horizontal. La latitude, comprise entre  $-1$  et  $+1$ , représente  $\pm\sqrt{1-e^2}$ , où  $e$  est l'excentricité de l'ellipse parcourue et le signe fixe l'orientation; la longitude représente l'anomalie excentrique sur cette ellipse. Ainsi les pôles correspondent aux mouvements circulaires et l'équateur aux mouvements de collision régularisés. Le lecteur se convaincra de ce que cette sphère  $S^2$  n'est autre que le disque d'énergie négative de la figure 4 dont on a identifié le bord à un point. La même opération effectuée sur l'extérieur (énergie positive) conduit à un plan  $R^2$ . Pour en savoir plus, on consultera la référence [16].

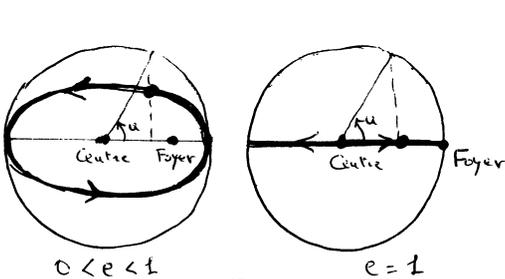


Figure 5

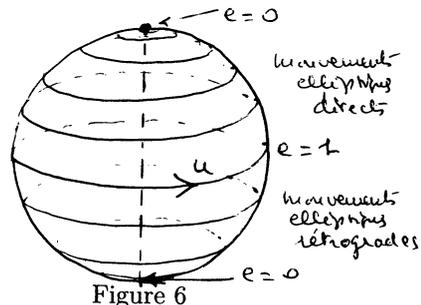


Figure 6

### 2.4 Collisions partielles, collisions simultanées

Lorsque la collision n'est pas totale, le choix de  $\phi = I^{\frac{3}{4}}$  comme facteur de renormalisation du champ  $X_H$  n'est plus adapté. Supposons qu'à l'instant  $t_0$  le système se décompose en un certain nombre  $k$  d'amas (éventuellement réduits à un unique corps) subissant au même instant une collision totale sur leurs centres de gravité respectifs. On sait depuis Jacobi qu'à une telle *décomposition en amas* correspond une décomposition orthogonale de l'espace des phases en  $k+1$  facteurs qui sont respectivement les  $k$  espaces des phases associés à chaque amas et l'espace des phases associé aux  $k$  centres de gravité des amas munis chacun de la somme des masses de l'amas. Bien entendu, un facteur n'existe effectivement que s'il correspond à un amas d'au moins deux corps. Si  $I_0$  désigne l'inertie du système des centres de gravité des amas par rapport au centre de gravité du système et  $I_1, \dots, I_k$  les inerties des amas par rapport à leurs centres de gravité, on a donc  $I = I_0 + I_1 + \dots + I_k$ . Le choix le plus naturel est alors  $\phi = I - I_0 = I_1 + I_2 + \dots + I_k$  puisque cette fonction, partout définie, ne s'annule qu'en cas de collision totale simultanée de chacun des amas. Le champ quotient (analogue de  $Z$ ) se représente naturellement dans la sous-variété d'équation  $I - I_0 = 1$ . Le seul inconvénient est d'envoyer à l'infini le centre de gravité de chaque amas, ce qui traduit simplement le fait qu'au moment de la collision un amas n'est plus influencé par les autres. En projection sur les  $k$  facteurs associés aux amas, le système quotient se comporte donc essentiellement comme  $k$  collisions totales indépendantes synchronisées dans le temps : on peut oublier la composante des centres de gravité pour tout ce qui concerne la dynamique sur et au voisinage de la variété de collision et étudier cette dernière sur le modèle de  $k$  amas en collision au même point n'interagissant pas entre eux. Il est important ici de noter que la synchronisation n'est possible que parce que toutes les collisions se produisent à une vitesse comparable : quel que soit  $j$ , le changement de temps défini par  $dt/d\tau = I - I_0$  est équivalent au voisinage de  $t_0$  à celui défini par  $dt/d\tau = I_j$ . Une manière équivalente de procéder, utilisée en particulier par Mather et McGehee, est de n'effectuer la renormalisation définie par  $\phi = I - I_0$  que sur les composantes associées aux amas; le passage du temps  $t$  au temps  $\tau$  tue alors toute dynamique sur la composante des centres de gravité.

**Exercice.** Etudier la variété de collision associée à la collision simultanée de deux couples de corps sur une droite et la comparer à celles étudiées dans le chapitre 3.

### 3. COLLISIONS TRIPLES

#### 3.1 Le cas aligné

L'ordre des trois masses étant conservé au cours d'un mouvement, et ce même si l'on régularise les collisions doubles, nous prendrons comme espace des configurations l'espace  $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 0, x_1 < x_2 < x_3\}$ . Une telle configuration étant parfaitement déterminée par un angle  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  caractérisant le rapport des distances de  $m_2$  à  $m_1$  et  $m_3$  respectivement, et par sa taille, c'est-à-dire par  $I$ ,  $\mathcal{X}$  est difféomorphe à  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times \mathbb{R}_+$ . L'espace des phases s'identifie donc à  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times \mathbb{R}^3$  et l'espace des phases réduit, après quotient par  $Y$ , à  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times \mathbb{R}^2$ . On peut prendre comme coordonnées dans ce dernier les fonctions  $\varphi, \tilde{J}$ , et la vitesse de déformation normalisée  $\tilde{y}_d = I^{\frac{1}{2}} y_d$  de la configuration (voir 2.2). Comme il n'y a pas de rotation possible et pas de moment cinétique, la décomposition de Saari fournit l'identité  $\tilde{K} = \tilde{J}^2 + \tilde{y}_d^2$  et la variété de collision a pour équation  $\tilde{J}^2 + \tilde{y}_d^2 = 2\tilde{U}(\varphi)$ . Elle est donc difféomorphe au cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}$  (figure 7.1).

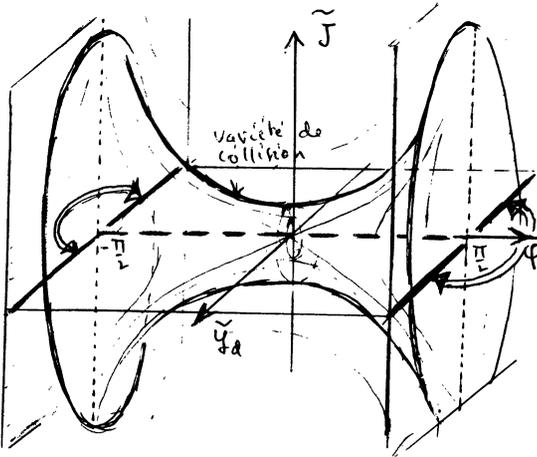


Figure 7.1

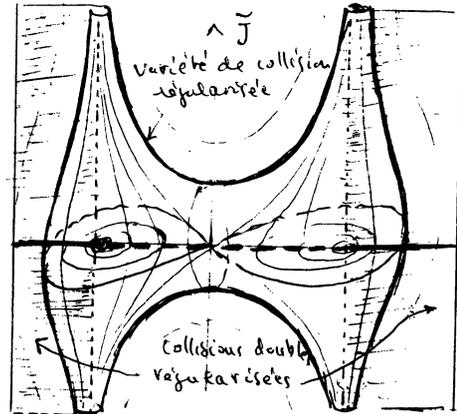


Figure 7.2

Les valeurs  $\pm\frac{\pi}{2}$  de  $\varphi$  correspondent respectivement aux collisions de  $m_2$  avec  $m_1$  et  $m_3$ , qu'on peut régulariser "à la Levi-Civita" en les remplaçant par des collisions élastiques. Le changement de signe des vitesses des deux corps à la collision laisse invariante les coordonnées  $\varphi$  et  $\tilde{J}$  et change le signe de  $\tilde{y}_d$ . La régularisation revient à ajouter à l'espace des phases réduit les deux plans  $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$  privés chacun de la droite

$\tilde{y}_d = 0$ , et à identifier les points  $(\varphi, -\tilde{y}_d, \tilde{J})$  et  $(\varphi, \tilde{y}_d, \tilde{J})$  lorsque  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ . L'espace des phases réduit ainsi régularisé est difféomorphe à  $R^3$  privé de deux droites, et la variété de collision à une sphère de dimension deux privée de quatre points. On a représenté sur la figure 7.2 les surfaces de niveau de  $\tilde{H} = I^{\frac{1}{2}}H$  qui, une fois une énergie  $H$  non nulle fixée, permettent de lire la taille  $r = I^{\frac{1}{2}}$  du système avant le passage au quotient par la symétrie d'homothétie. Les deux droites enlevées sont en pointillé fin; elles correspondraient à une taille infinie. La variété de collision correspond bien entendu à la taille nulle.

Convenablement ralenti au voisinage de  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , le champ quotient  $Z$  se prolonge en un champ régulier  $\hat{Z}$  dont la restriction à la variété de collision  $a$ , pour des valeurs convenablement choisies (génériques ?) des masses [13], l'allure donnée sur la figure 8. On a également indiqué sur cette figure les variétés stable et instable des singularités de ce champ dont on montre sans peine qu'elles sont hyperboliques. Ces variétés sont donc régulières, ce qui implique que le saturé de l'une d'elles par le flot de  $Y$ , par exemple l'ensemble  $\Sigma$  des points de l'espace des phases conduisant lorsque  $t$  croît à la collision totale est une sous-variété de codimension 1. C'est un cas particulier du *Théorème de Siegel* [20]. La même conclusion vaut d'ailleurs si l'on se restreint à une hypersurface d'énergie  $H$  fixée : si  $H \neq 0$ , une telle hypersurface est transverse aux courbes intégrales de  $Y$ , donc à  $\Sigma$ ; quant à l'hypersurface  $H = 0$ , elle est invariante à la fois par  $Y$  et  $Z$ . Les trajectoires verticales correspondent aux mouvements homothétiques d'énergies non nulles, ceux d'énergie nulle étant, rappelons-le, représentés par les singularités  $C$  et  $C^*$  de  $Z$  (ou  $\hat{Z}$ ) sur la variété de collision.

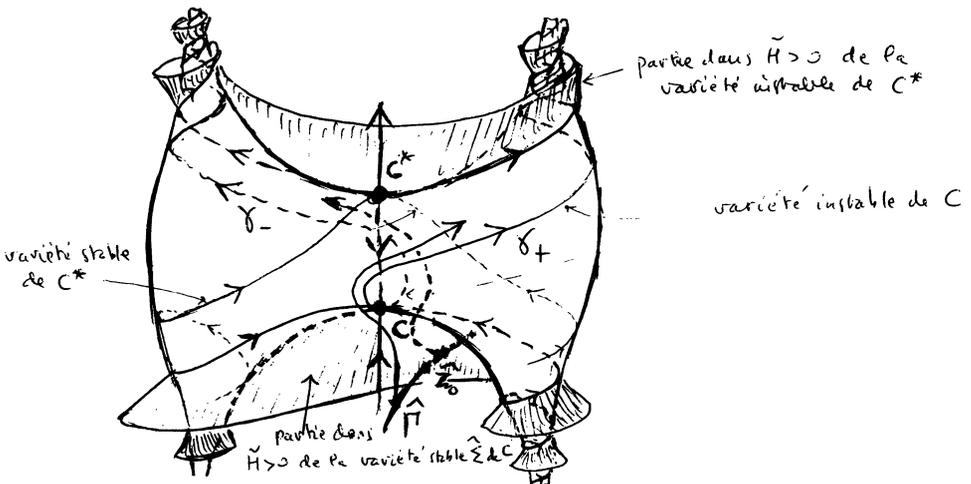


Figure 8

Soit  $z_0 \in \Sigma$  et  $\Gamma$  un petit arc contenant  $z_0$  et transverse à  $\Sigma$ . Suivant que l'on choisit une donnée initiale sur  $\Gamma$  d'un côté ou de l'autre de  $z_0$ , la solution correspondante se projette sur une courbe intégrale de  $\hat{Z}$  qui reste proche de  $\gamma_+$  ou de  $\gamma_-$  pendant un temps d'autant plus long qu'on est parti près de  $z_0$ . Sur la figure,  $\hat{\Sigma}, \hat{\Gamma}, \hat{z}_0$  désignent les projections de  $\Sigma, \Gamma, z_0$  dans le quotient par  $Y$ .

### 3.2 Le cas spatial isocèle

Il s'agit d'un sous-problème invariant du Problème des trois corps. La masse  $m_3$  se déplace sur l'axe de symétrie passant par le centre de gravité, les masses  $m_1$  et  $m_2$  sont égales et symétriques par rapport à cet axe. La configuration  $x$  est parfaitement définie par le donnée des angles  $\theta \in S^1$  et  $\psi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  et de sa taille  $I$  (figure 2). L'espace des configurations  $\hat{X}$  est difféomorphe à  $S^1 \times ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R_+$ , et l'espace des phases à  $S^1 \times ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R_+ \times R^3$ . Après quotient par  $Y$  et par les rotations autour de l'axe de symétrie (les seules possibles pour ce problème), il reste un espace des phases réduit  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \times R^3$ . On peut prendre dans ce dernier les coordonnées  $\tilde{C}$  (qu'on identifie à un nombre réel de module  $\tilde{c}$ ) et  $\tilde{J}$ , comme dans le cas de deux corps, auxquelles on adjoint un angle  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  caractérisant la configuration, et la vitesse de déformation normalisée  $\tilde{y}_d$ . Plus précisément, calculant la composante de rotation  $y_r$  de la vitesse, on constate que  $\|y_r\|^2 = I_\sigma^{-1} c^2$ , où  $I_\sigma$  est le moment d'inertie de la configuration par rapport à l'axe de symétrie. Au niveau des fonctions invariantes par  $Y$ , la décomposition de Saari de la vitesse fournit donc l'identité  $\tilde{K} = \tilde{J}^2 + I_\sigma^{-1} I \tilde{c}^2 + \tilde{y}_d^2$ , où  $\tilde{y}_d = I^{\frac{1}{2}} y_d$ . On obtient facilement la formule  $I^{-1} I_\sigma = (1 + 2\alpha \cos^2 \psi)^{-1} (1 + 2\alpha) \cos^2 \psi$ , où  $\alpha = m_3^{-1} m_1$  est le rapport des masses. Puisque le rapport  $I^{-1} I_\sigma$  varie entre 1 et 0 lorsque  $\psi$  varie entre 0 et  $\pm \frac{\pi}{2}$ , on peut définir un angle  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  par la condition que  $\varphi$  soit du signe de  $\psi$  et vérifie  $I^{-1} I_\sigma = \cos^2 \varphi$ . On laisse au lecteur le soin d'interpréter  $\varphi$  comme un angle polaire dans l'espace de configuration. Les sous-variétés d'énergie nulle et de moment cinétique nul ont respectivement pour équation

$$\tilde{J}^2 + \frac{\tilde{c}^2}{\cos^2 \varphi} + \tilde{y}_d^2 = 2\tilde{U}(\varphi) \quad \text{et} \quad \tilde{c} = 0,$$

et sont respectivement difféomorphes à  $S^2 \times R$  et  $R^3$ . Leur intersection, la variété de collision, est représentée sur la figure 9 qu'on comparera à la figure 7.1. Comme précédemment elle est difféomorphe à  $S^1 \times R$  et la régularisation des collisions doubles la transforme en une sphère de dimension deux privée de quatre points (la sous-variété d'énergie nulle devient quant à elle difféomorphe à une sphère de dimension trois

privée de quatre points). Les six points singuliers correspondent aux mouvements homothétiques de trois corps, découverts par Euler et Lagrange il y a deux siècles.

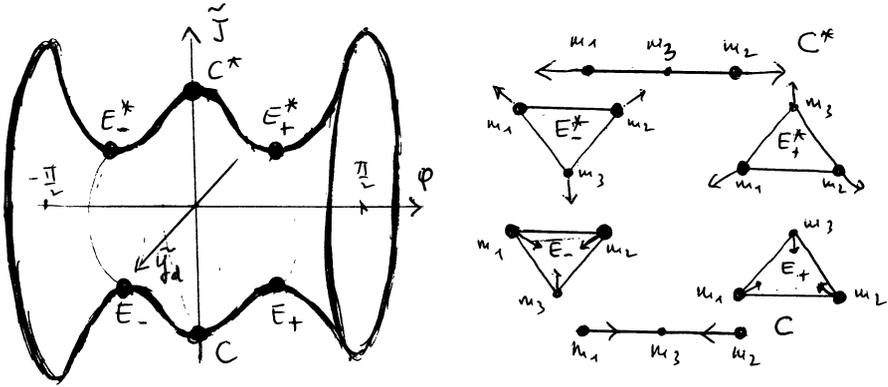
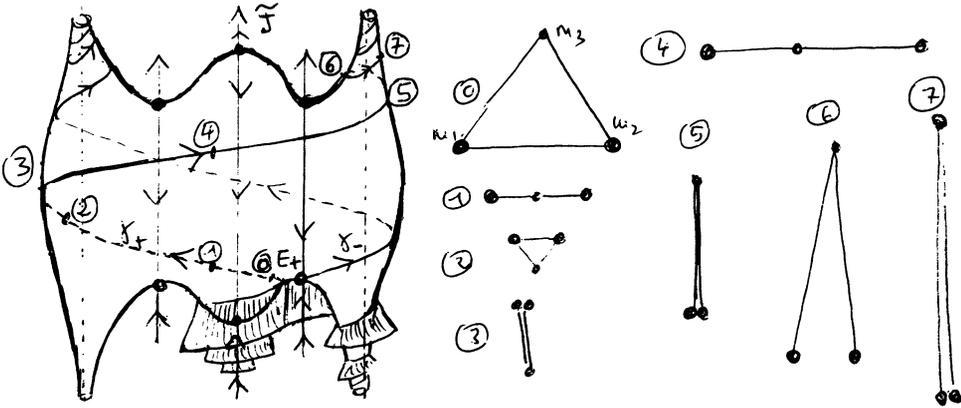


Figure 9 ( $\tilde{C} = 0$ )

La figure 10 (comparer aux figures 7.2 et 8) représente après régularisation le plongement dans  $\tilde{C} = 0$  de la variété de collision, avec un exemple de comportement des courbes intégrales du champ régularisé  $\hat{Z}$  qui se produit, d'après Simó [21], lorsque le rapport  $m_3/m_1$  appartient à l'intervalle  $[0, 378532 \dots, 2, 661993 \dots]$ . On a indiqué un mouvement des trois corps correspondant à la partie  $\gamma_+$  de la variété instable de  $E_+$ . On notera que la taille tend vers l'infini aux deux extrémités et que le mouvement a lieu dans un plan (théorème de Dziobek [23] page 427). On a également représenté la variété stable de  $E_+$ , entièrement contenue dans  $\tilde{C} = 0$ . L'ensemble  $\Sigma$  des points de l'espace des phase conduisant à une collision totale de type  $E_+$  est donc une sous-variété immergée de codimension 2. Soit  $z_0$  un point de  $\Sigma$ , et  $\Gamma$  un petit morceau de surface transverse à  $\Sigma$  en  $z_0$ . Pour les données initiales appartenant à la courbe d'intersection de  $\Gamma$  avec  $\tilde{C} = 0$ , tout se passe comme dans le paragraphe précédent : on suit, après quotient par  $Y$ , l'une des courbes  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$ ; notons qu'en suivant  $\gamma_+$  on décrit bien des mouvements du type cherché où le messenger s'approche d'un couple, interagit avec lui et repart d'où il est venu, alors qu'en suivant  $\gamma_-$  le messenger continue sa route après l'interaction.

Aux données initiales dans  $\Gamma$  n'appartenant pas à  $\tilde{C} = 0$ , correspondent après quotient par  $Y$ , des solutions de  $\hat{Z}$  qui, pendant un temps d'autant plus long qu'on est partis près de  $z_0$ , suivent une courbe intégrale appartenant à la variété instable de  $E_+$

Figure 10 ( $\tilde{C} = 0$ )

mais pas à la variété de collision, c'est-à-dire une courbe intégrale de  $\hat{Z}$  dans  $\tilde{H} = 0$  n'appartenant pas à la variété de collision et tendant vers l'un des points à l'infini (rappelons qu'après régularisation  $\tilde{H} = 0$  est difféomorphe à une sphère  $S^3$  privée de quatre points). A une telle courbe intégrale correspond, suivant la terminologie de Chazy [4], un mouvement de type hyperbolique-elliptique dans lequel  $m_3$  se sépare du centre de gravité du couple  $m_1, m_2$  à une vitesse, donc aussi une énergie  $h > 0$ , arbitrairement grande (on le montrera en 3.3) mais asymptotiquement constante (comme un problème de deux corps hyperbolique sur la droite), alors que ce dernier a asymptotiquement un mouvement elliptique dont l'excentricité  $e_{12}$  tend vers une constante strictement inférieure à 1. Cette dernière affirmation vient de ce que la fonction invariante par homothétie  $|\tilde{h}_{12}|^{\frac{1}{2}} \tilde{c}_{12} = |h_{12}|^{\frac{1}{2}} c_{12}$ , qui est proportionnelle à  $\sqrt{1 - e_{12}^2}$ , tend vers une limite non nulle. En effet, l'énergie totale étant nulle, l'énergie  $h_{12}$  de la paire (dont l'inverse est une mesure du demi-grand axe) est asymptotiquement égale à l'opposé  $-h$  de l'énergie des centres de gravité alors que son moment cinétique  $c_{12}$  est égal au moment cinétique total  $c$ , supposé non nul. A la décomposition en courbes intégrales de  $\hat{Z}$  de la variété instable de  $E_+$  correspond une décomposition de la surface  $\Gamma$  en courbes issues du point  $z_0$ . Ce qui précède montre que chacune de ces courbes peut être caractérisée par une excentricité limite  $e_{12}$ , qui n'est atteinte asymptotiquement que lorsque la donnée initiale tend vers  $z_0$  sur la courbe considérée (figure 11).

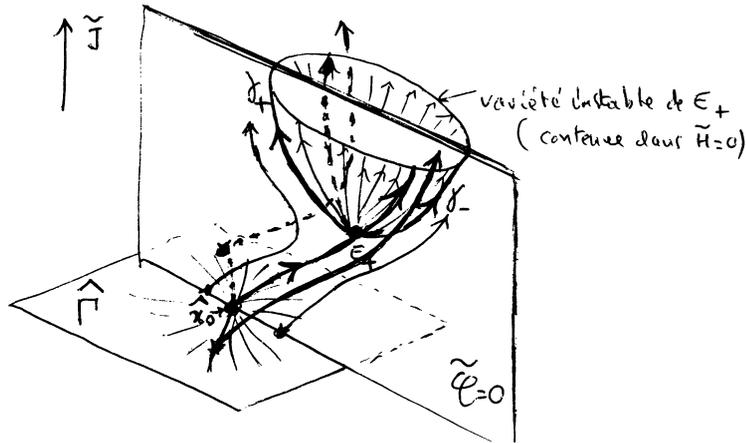


Figure 11

### 3.3 Éjection sauvage d'une "presque" collision triple

Nous en arrivons à la *propriété fondamentale des mouvements évitant de peu une collision au moins triple*, la possibilité évoquée en 1.1 d'éjecter un corps à une vitesse arbitrairement grande. Pour tout nombre réel positif  $\epsilon$ , appelons  $\mathcal{U}_\epsilon$  le sous-espace de l'espace des phases défini par l'équation  $r \leq \epsilon$ , c'est-à-dire  $I \leq \epsilon^2$ . Dans le cas de deux corps, le potentiel ne dépend que de la taille  $r$ , et l'énergie cinétique d'une solution rencontrant  $\mathcal{U}_\epsilon$  est donc la même au moment où celle-ci pénètre dans ce domaine et au moment où elle le quitte. Dès qu'il y a plus de deux corps, au contraire, certaines solutions peuvent acquérir une énergie cinétique arbitrairement grande en traversant  $\mathcal{U}_\epsilon$ . L'énergie totale restant constante, cet accroissement de l'énergie cinétique doit être compensé par un accroissement de  $U$  qui ne peut provenir que de la formation d'un sous-amas proche d'une collision. *Les raisonnements qui suivent peuvent être indifféremment effectués sur le cas aligné ou le cas spatial isocèle pourvu que dans chaque cas les masses soient choisies de façon que le flot de  $\hat{Z}$  soit du type représenté sur les figures 8 ou 10.* Remarquons que ce choix des masses est a priori plus difficile dans le cas isocèle car contrairement au cas aligné on peut aller se perdre dans la bosse de la variété de collision au lieu d'aller dans une des branches infinies.

Considérons tout d'abord les mouvements contenus dans la sous-variété  $H = 0, C = 0$ . Les courbes intégrales du champ quotient régularisé  $\hat{Z}$  qui leur correspondent appartiennent à la variété de collision. Soit à l'instant  $t_0$  un état  $(x_0, y_0)$  qui vérifie  $I_0 = \|x_0\|^2 = \epsilon^2$ , et est proche d'un état  $(\xi_0, \eta_0)$  conduisant à une collision totale. Lorsque  $t$  augmente, la courbe intégrale issue de  $(x_0, y_0)$  rentre dans l'intérieur de  $\mathcal{U}_\epsilon$ . La courbe intégrale  $\gamma$  du champ  $\hat{Z}$  qu'elle définit reste d'abord proche d'une branche  $\Sigma$

de la variété stable de la singularité correspondant à la collision, passe au voisinage de cette singularité, puis suit de près une branche  $\gamma$  de la variété instable de cette singularité, et ce d'autant plus longtemps que  $(x_0, y_0)$  est proche de  $(\xi_0, \eta_0)$ . Pour les valeurs des masses que nous avons considérées, on peut choisir une branche de cette variété instable sur laquelle la fonction  $\tilde{J}$  tend vers  $+\infty$ . De plus, le flot de  $Y$ , qui transforme  $r$  en  $re^\theta$  et fixe  $\tilde{J}$ , transforme les unes dans les autres les courbes intégrales de  $\tilde{X}_H$  se projetant sur une même courbe intégrale de  $\hat{Z}$ . On en déduit que si  $(x_0, y_0)$  est assez proche de  $(\xi_0, \eta_0)$ ,  $\tilde{J}$ , ainsi donc que  $r^{-1}\tilde{J}^2 = (\dot{r})^2$  et  $K \geq r^{-1}\tilde{J}^2$ , atteint toute valeur fixée à l'avance avant que  $r$  n'ait atteint la valeur  $\epsilon$  (figure 12, réaliste dans la mesure où la croissance de  $\tilde{J}$  implique la convexité de  $t \mapsto I^{\frac{3}{4}}(t) = r^{\frac{3}{2}}(t)$ ).

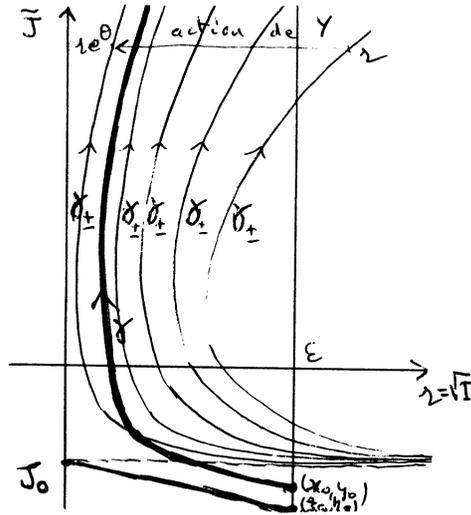


Figure 12

**Remarques.** 1) Le minimum de  $r$  au cours du mouvement sera d'autant plus petit qu'une plus grande valeur de  $\tilde{J}$  sera atteinte au bord de  $\mathcal{U}_\epsilon$ .

2) La traversée de  $\mathcal{U}_\epsilon$  se fait en un temps  $\tau$  borné indépendamment de la valeur atteinte par  $\tilde{J}$ , et donc en un temps  $t$  qui tend vers 0 avec  $\epsilon$ . En effet, on a les estimations  $\tau \leq \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} \leq \text{cste} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} < \infty$ , car le mouvement des centres de gravité des deux amas étant hyperbolique ( $K$  grand),  $r$  est de l'ordre de  $kt$

3) Le nombre de collisions doubles entre 1 et 2 tend vers l'infini avec  $\tilde{J}$  (voir 4.1).

Dans le cas général, la courbe intégrale du champ  $\hat{Z}$  reste proche d'une courbe

intégrale dans la variété de collision. Les estimations sont les mêmes si on remplace la fonction invariante  $\tilde{J}$  (ou plutôt son carré) par la fonction de Sundman. Bien entendu, pour que  $(x_0, y_0)$  soit assez proche de  $(\xi_0, \eta_0)$ , il faut que  $c$  soit assez proche de zéro.

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE XIA

Soit le problème des cinq corps décrit sur la figure 2. Le vecteur moment cinétique  $\vec{C}$  est parallèle à l'axe de symétrie et peut être assimilé à un nombre réel  $C$ ; il est égal à la somme  $\vec{C}_{12} + \vec{C}_{45}$  des moments cinétiques des deux couples. *Nous nous plaçons dorénavant dans la sous-variété de dimension 11 de l'espace des phases définie par  $\vec{C} = 0$ .*

##### 4.1. Ce qui ressemble à Mather-McGehee

Reprenons l'analyse faite en 1.1 des solutions de Mather-McGehee.  $\Sigma$  est maintenant l'ensemble des données initiales conduisant simultanément à la collision triple asymptotiquement équilatérale de  $m_1, m_2, m_3$  et la collision double de  $m_4, m_5$ . C'est une sous-variété immergée de codimension 3 dans l'espace ambiant de dimension 11 (utiliser 2.4). L'arc  $\Gamma$  est remplacé par une boule de dimension trois transverse à  $\Sigma$  et le sous-arc  $\Gamma_0$  par une région effilée le long d'une courbe  $\gamma_0$  contenue dans l'intersection de cette boule avec la sous-variété  $\Sigma_1$  de codimension 2 formée des données initiales qui conduisent à une collision triple de  $m_1, m_2, m_3$ . De plus, sur les bords de  $\Gamma_0$ , l'excentricité de l'ellipse approximativement décrite par la paire 1, 2 au moment où 3 s'éloigne est contrôlée (la quantité  $|h_{12}|^{\frac{1}{2}} c_{12}$  est minorée et majorée, voir 3.2). Les instants  $\tau^*$  ou  $\hat{\tau}$  correspondent non plus à des collisions mais à l'appartenance à un même plan orthogonal à l'axe de symétrie, de  $m_3$  et respectivement  $m_1, m_2$  ou  $m_4, m_5$ . A partir de  $\hat{\tau}$ , le scénario change puisque la simple collision de  $m_3$  sur  $m_4$  doit être remplacée par une suite symétrique d'événements dans lesquels les rôles des deux couples s'échangent, ce qui supprime les estimations de l'étape 3) de Mather-McGehee. La possibilité d'itérer la construction, qui était assurée chez Mather-McGehee par l'accumulation de  $\Sigma$  sur elle-même, l'est ici par une propriété analogue : l'ensemble des points de  $\Gamma$  qui conduisent simultanément à la collision triple asymptotiquement équilatérale de  $m_3, m_4, m_5$  et la collision double de  $m_1, m_2$  à l'instant  $\hat{\tau}$ , est non vide et contient  $z_0$  dans son adhérence. Intuitivement, en suivant d'infiniment près la variété instable d'une singularité dans la variété de collisions triple et double simultanées, on peut passer en un temps infiniment court de la collision simultanée de  $m_1, m_2, m_3$  et  $m_4, m_5$  à la collision triple  $m_3, m_4, m_5$ , et ce passage se fait au travers d'une infinité

de collisions des masses  $m_1$  et  $m_2$ . La démonstration se fait en deux étapes dont seule la deuxième est l'analogue du point 4) de Mather-McGehee :

1) dans la première, topologique, on montre que le sous-ensemble de  $\Gamma_0$  formé des données initiales qui conduisent au temps  $\hat{\tau}$  à la collision des trois masses  $m_3, m_4, m_5$  contient un continuum  $\gamma_1$  ayant  $z_0$  dans son adhérence. La preuve est un habile argument d'indice : un petit lacet  $\lambda$  entourant  $z_0$  dans le bord de  $\Gamma_0$  (figure 13) enlace nécessairement la courbe  $\mathcal{D}$  des données initiales dans  $\Gamma$  qui conduisent au temps  $\tau^*$  à la collision des masses  $m_4$  et  $m_5$ . Cette dernière appartient en effet à la surface, contenant  $\gamma_0$  et traversant  $\Gamma_0$ , des données initiales telles que le moment cinétique de chaque couple s'annule au temps  $\tau^*$ . L'application qui à une donnée initiale dans  $\lambda$  fait correspondre la direction orientée du vecteur joignant  $m_4$  à  $m_5$  au temps  $\tau^*$  est donc de degré  $\pm 1$ . On remarque alors que, le contrôle de l'excentricité du couple  $m_1, m_2$  le long du bord de  $\Gamma_0 \setminus \gamma_0$  excluant les collisions doubles, on définit une homotopie de cette application en faisant varier le temps de  $\tau^*$  à  $\hat{\tau}$  (pour une donnée initiale dans  $\gamma_0$  on définit par continuité  $\hat{\tau} = \tau^*$ ). De la non-nullité du degré on déduit enfin que chaque disque dans  $\Gamma_0$  bordé par  $\lambda$  contient au moins une donnée initiale pour laquelle, au temps  $\hat{\tau}$ ,  $m_4$  et  $m_5$ , donc également  $m_3$ , sont en collision ;

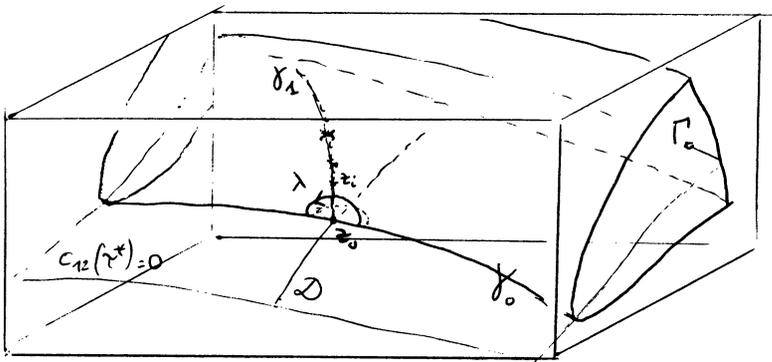


Figure 13

2) dans la deuxième étape, des estimations de type "deux corps" montrent comme dans le cas de Mather-McGehee que le nombre de révolutions (resp. collisions lorsque  $c_{12}$  s'annule) effectuées entre  $\tau^*$  et  $\hat{\tau}$  par  $m_1$  et  $m_2$ , tend vers l'infini lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ . Il en est donc de même du nombre d'instantanés auxquels la distance entre  $m_1$  et  $m_2$  atteint un minimum. Ce minimum étant égal à 0 lorsque le moment cinétique des

couples s'annule, on en déduit l'existence d'une suite de points  $z_i$  de  $\gamma_1$ , convergeant vers  $z_0$ , tels que les mouvements correspondants conduisent simultanément aux collisions  $m_1, m_2$  et  $m_3, m_4, m_5$ , avec un accroissement de la taille qui provient de la conservation de l'impulsion totale. Répétant la construction de  $\Gamma_0$  et de la suite  $z_i$  en remplaçant chaque fois  $z_0$  par un couple de  $z_i$ , on obtient un ensemble de Cantor de conditions initiales qui conduisent à une explosion du système en temps fini.

#### 4.2. Ce qu'il y a en plus de Mather-McGehee

C'est l'objet du dernier paragraphe de l'article de Xia où sont établies les deux propriétés cruciales qui impliquent l'absence de collision double :

- (i) d'une part les couples  $m_1, m_2$  et  $m_4, m_5$  s'applatissent (l'excentricité des ellipses tend vers 1, et ce bien que les demi-grands axes tendent vers 0) et les directions de leurs demi-grands axes tendent vers des limites;
- (ii) d'autre part, si les directions limites de ces mouvements de collision ne sont ni parallèles ni orthogonales, les moments cinétiques  $\mathcal{C}_{12}$  et  $\mathcal{C}_{45}$  finissent par tendre de façon monotone vers zéro, d'où il suit qu'ils ne s'annulent qu'à la limite.

L'affirmation (i) équivaut à l'existence d'une limite de module 1 pour les vecteurs de Laplace  $\vec{p}_{12}$  et  $\vec{p}_{34}$  des deux couples, vecteurs invariants par homothétie définis par

$$\vec{p}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} + \frac{1}{m_i + m_j} \vec{\sigma}_{ij} \wedge \dot{\vec{r}}_{ij},$$

où  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$  est le vecteur joignant les corps  $i$  et  $j$ , et  $\vec{\sigma}_{ij} = \vec{r}_{ij} \wedge \dot{\vec{r}}_{ij} = \frac{m_i + m_j}{m_i m_j} \vec{C}_{ij}$ . On sait\* que pour un problème de deux corps,  $\vec{p}_{ij}$  est une intégrale première : c'est, en énergie négative, le vecteur de longueur l'excentricité des deux ellipses kepleriennes (ou de celle décrite par  $\vec{r}_{ij}$ ) et de direction celle du périhélie de  $m_j$ . Xia obtient l'existence d'une limite au moyen d'un long calcul qui prouve que, pour un ensemble de Cantor de données initiales bien choisi, la somme de la série des contributions de chaque quasi-collision triple à la variation au cours du temps de  $\vec{p}_{12}$  (ou  $\vec{p}_{34}$ ) converge.

---

\* Retrouvée par Laplace dans sa recherche systématique des intégrales premières du problème des deux corps qui sont polynomiales de petit degré en les vitesses, cette intégrale (ou plutôt une de ses composantes) apparait pour la première fois chez J. Hermann (Jacopo Ermanno) en 1710 (voir les Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences 1712). C'est sans doute parce qu'elle était connue de Hamilton que les physiciens l'appellent "vecteur de Runge-Lenz". On conseille la lecture des deux articles de H. Goldstein : Prehistory of the "Runge-Lenz" vector, Am. J. Phys. 43 (1975) 737 et More on the prehistory ... id. 44 (1976) 1123, ainsi que d'un article historique d'Albouy à paraître.

Plus précisément, la formule élémentaire

$$\dot{\vec{p}}_{ij} = - \left( \frac{m_3}{2m_i} |\vec{r}_{i3}|^{-3} \right) \vec{\sigma}_{ij} \wedge \vec{r}_{ij} + O(|z_k|^{-2}),$$

dans laquelle l'influence de l'autre couple (repéré par  $z_k$  suivant l'axe de symétrie) est séparée de celle de  $m_3$ , montre que seule fait problème la contribution du messenger. En effet, le terme  $O(|z_k|^{-2})$  qui tend vers 0 correspond à une variation  $\Delta \vec{p}_{ij} = \int_0^{t_\infty} \dot{\vec{p}}_{ij} dt$  finie du vecteur de Laplace pendant le temps fini  $t_\infty$  que prend l'explosion du système. Les instants où le messenger n'est pas au voisinage du couple  $i, j$  fournissant également une contribution finie, il s'agit de montrer la convergence de la série  $\sum \int_{t'_n}^{t''_n} \dot{\vec{p}}_{ij} dt$  des variations du vecteur de Laplace lors des passages successifs du système au voisinage de la collision triple  $i, j, 3$ , c'est-à-dire entre les instants  $t'_n$  et  $t''_n$  d'entrée et de sortie dans un certain voisinage (fini) de celle-ci, par exemple les instants successifs de passage du messenger dans un sens ou dans l'autre au centre de gravité du système total (analogues des temps  $\tau_-$  et  $\tau_+$  définis en 1.1). Enfin, puisque très près de la collision triple la configuration des trois corps est approximativement équilatérale, on peut toujours minorer  $r_{i3}$  par  $r_{ij}$ . Se plaçant dans le temps étiré de la collision  $d\tau = I^{-\frac{3}{4}} dt$  défini en 2.3 ( $I$  est l'inertie du système  $i, j, 3$ ), on est ramenés au problème de la convergence de la série  $\sum a_n$  où, les notations étant celles de 3.2 appliquées au triple  $i, j, 3$ , et les instants  $\tau'_n, \tau''_n$  correspondant respectivement à  $t'_n, t''_n$ ,

$$a_n = \int_{\tau'_n}^{\tau''_n} |\tilde{c} \cos \varphi| d\tau.$$

Choissant à chaque étape le domaine  $\Gamma_0$  assez petit pour qu'aussi bien la valeur après la  $n^{\text{ème}}$  quasi-collision des rapports  $|\vec{r}_{12}|/|\vec{r}_{14}|$ ,  $|\vec{r}_{45}|/|\vec{r}_{14}|$  que le laps de temps entre cette étape et la suivante admettent, par exemple, une majoration de la forme  $M2^{-n}$ , Xia montre que la convergence découle d'une majoration analogue

$$|h_{ij}(t'_n) c_{ij}^2(t'_n)| \leq M2^{-n},$$

c'est-à-dire d'une convergence suffisamment rapide vers 1 de l'excentricité du couple  $m_i, m_j$  en la suite d'instantants  $t'_n$ . Or ce dernier point est conséquence de la possibilité de choisir un accroissement arbitraire de la vitesse du messenger entre deux passages loin des couples. Considérons en effet sur la figure 14 l'évolution des différents amas composant le système :

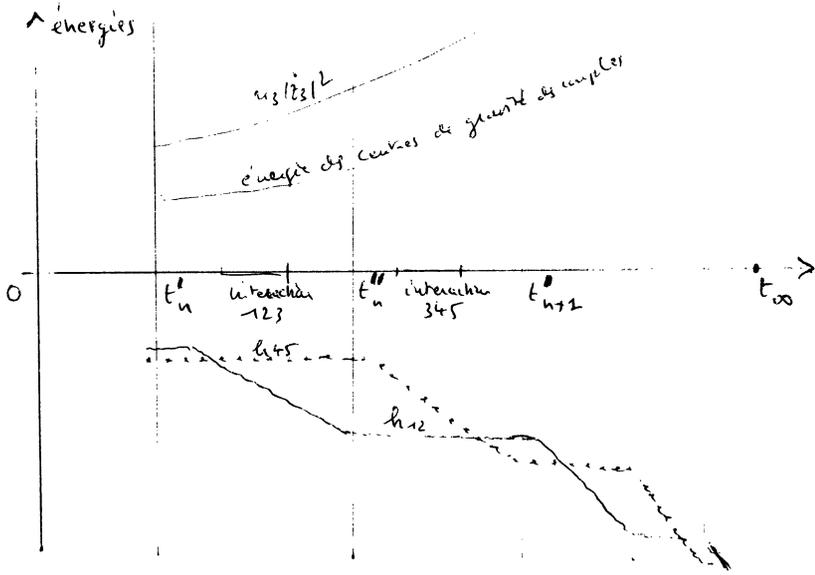


Figure 14

Tout d'abord, l'énergie  $h_{ij}$  du couple  $i, j$  varie peu lorsque le messager est plus près de l'autre couple (comparer à 1.1) :  $h_{12}$  est approximativement constant entre  $t'_n$  et  $t'_{n+1}$  alors que  $h_{45}$  est approximativement constant entre  $t'_n$  et  $t''_n$ . D'autre part, aux époques  $t'_n$ ,  $h_{45}$  est un grand  $O$  de l'énergie cinétique  $m_3 |\dot{z}_3|^2$  du messager, alors qu'aux époques  $t''_n$ , c'est  $h_{12}$  qui est un grand  $O$  de cette énergie cinétique. Choisissons  $\Gamma_0$  à chaque étape de façon à ce qu'après chaque éjection du messager hors du couple  $i, j$ , la quantité  $|h_{ij} c_{ij}^2|$ , proportionnelle à  $1 - e_{ij}^2$ , soit majorée par une quantité fixe  $w$  (voir 4.1). On a

$$|h_{45}(t''_n) c_{45}^2(t''_n)| \simeq |h_{45}(t'_n) c_{45}^2(t''_n)| = |h_{45}(t'_n) c_{12}^2(t''_n)| \leq M c_{12}^2(t''_n) |\dot{z}_3(t'_n)|^2.$$

Mais de  $w \geq |h_{12}(t''_n) c_{12}^2(t''_n)| \geq M c_{12}^2(t''_n) |\dot{z}_3(t''_n)|^2$  on déduit une majoration de  $c_{12}^2(t''_n)$  qui transforme l'inégalité précédente en

$$|h_{45}(t''_n) c_{45}^2(t''_n)| \leq M \frac{|\dot{z}_3(t'_n)|^2}{|\dot{z}_3(t''_n)|^2},$$

que l'on peut supposer inférieur à  $M 2^{-n}$ . Enfin, puisque sur le petit intervalle de temps  $[t'_n, t''_n]$  le couple 4, 5 est loin des autres masses, une inégalité de ce type vaut également pour  $h_{45} c_{45}^2$  à l'instant  $t'_n$ . Des estimations analogues aux instants  $t'_n$  et  $t''_n$  valent également pour  $h_{12} c_{12}^2$ .

Quant à l'affirmation (ii), elle vient de ce que la dérivée temporelle du moment cinétique du couple  $m_1, m_2$  (assimilé à un nombre réel  $C_{12}$ ) ne dépend pas du messager :

$$\dot{C}_{12} = \frac{3}{8} m_1 m_4 |\vec{r}_{12}|^2 |\vec{r}_{45}|^2 \sin 2\theta [(z_1 - z_4)^{-6} + O(|z_1 - z_4|^{-9})],$$

où  $\theta$  est l'angle des vecteurs  $\vec{r}_{12}$  et  $\vec{r}_{45}$ . On déduit en effet de cette expression que les seuls cas à exclure sont ceux pour lesquels l'angle des directions limites des demi-grands axes des deux couples est un multiple de  $\frac{\pi}{2}$ , cas qui correspondent en fait à des sous-problèmes invariants. Car s'il n'en est pas ainsi, en un point où  $C_{12}$  s'annule,  $\vec{p}_{12}$  coïncide avec le rayon vecteur normalisé  $\vec{r}_{12}/|\vec{r}_{12}|$  et  $\dot{C}_{12}$  a un signe constant, ce qui empêche toute oscillation vers la limite 0 et exclut donc à partir d'un certain instant toute collision entre  $m_1$  et  $m_2$  d'une part,  $m_4$  et  $m_5$  de l'autre. Les collisions triples ayant été exclues par construction, on obtient la conclusion cherchée.

**Remarques.** 1) Les solutions de Xia sont d'une complexité essentiellement minimale compatible avec l'existence d'une singularité (impossibilité de prolonger). Il faut en effet plus de trois corps, la taille du système doit tendre vers l'infini, et la distance minimale de deux particules doit avoir 0 comme *lim inf*. Le premier point est le *Théorème de Painlevé* [18], le deuxième celui de *Von Zeipel* [25], le troisième vient de la nécessité d'atteindre des valeurs non bornées de  $U$ . Il implique la présence d'un messager revenant indéfiniment interagir avec les amas qui s'éloignent à l'infini : le centre de gravité d'un amas isolé a en effet une vitesse asymptotiquement constante (mouvement hyperbolique) qui ne lui permet pas d'atteindre l'infini en temps fini.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ALBOUY - *Recherches sur le problème des configurations centrales*, 1997, à paraître.
- [2] A. ALBOUY, A. CHENCINER - *Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le Problème des  $N$  corps*, 1996.
- [3] E. CARTAN - *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann (1922).
- [4] J. CHAZY - *Sur l'allure du mouvement dans le Problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment*, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* **39** (1922), 29-130.
- [5] L. EULER - *Considérations sur le problème des trois corps* Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin ( lu en 1765) **19** (1770), 194-220 .

- [6] J.L. GERVER - *The existence of Pseudocollisions in the Plane*, Journal of Differential Equations **89** (1991), 1–68.
- [7] C.G.J. JACOBI - *Vorlesungen über Dynamik* (1843), Gesammelte Werke, Chelsea (1969).
- [8] J.L. LAGRANGE - *Essai sur le problème des trois corps*, œuvres **vol. 6** (1772), 229–324.
- [9] J.L. LAGRANGE - *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps*, œuvres **vol. 4** (1777), 401–418.
- [10] T. LEVI CIVITA - *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, Acta Mathematica **30** (1906), 311, et *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Acta Mathematica **42** (1920), 44.
- [11] C. MARCHAL, D. SAARI - *On the final evolution of the  $n$  body problem*, Journal of Differential Equations **20** (1976), 150–186.
- [12] J. MATHER, R. McGEHEE - *Solutions of the collinear four body Problem which become unbounded in finite time*, Lecture Notes in Physics **38** (J. Moser editor) Springer (1975), 573–597.
- [13] R. McGEHEE - *Triple collision in the collinear three body Problem*, Inventiones Mathematicæ **27** (1974), 191–227.
- [14] R. McGEHEE - *Singularities in Classical and Celestial Mechanics*, Proceedings of the Int. congress of Math. Helsinki (1978), 827–834.
- [15] R. McGEHEE - *Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics*, Expo. Math. **4** (1986), 335–345.
- [16] J. MILNOR - *On the geometry of the Kepler problem*, American Mathematical Monthly **vol. 2** (1983), 353–365.
- [17] I. NEWTON - *Principia Mathematica* Liber Tertius (1686).
- [18] P. PAINLEVE - *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Hermann (1897), in Œuvres, C.N.R.S **vol. 1**.
- [19] D. SAARI - *The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the  $n$ -body problem*, J. of Differential Equations **55** (1984), 300–329.
- [20] C.L. SIEGEL, J. MOSER - *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer (1971).
- [21] C. SIMO - *Analysis of triple collision in the isocetes problem*, Classical Mechanics and Dynamical Systems, Dekker New York 1981.
- [22] K.F. SUNDMAN - *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math. **36** (1913), 105–179.
- [23] A. WINTNER - *The analytical foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press (1947).

- [24] Z. XIA - *The existence of non collision singularities in newtonian systems*, Thèse Northwestern University (1988) et *Annals of Mathematics* **135** (1992), 411–468.  
[25] H. von ZEIPPEL - *Sur les singularités du problème des  $n$  corps*, *Arkiv för Matematik, Astronomii och Fysik* **Bd 4 Nr 32** (1908).

Alain CHENCINER

Université de Paris 7–Denis Diderot  
U.F.R. de Mathématique  
Tour 45–55, 5ème étage  
2, place Jussieu  
F-75251 PARIS CEDEX 05

et

Astronomie et Systèmes Dynamiques  
Bureau des Longitudes  
URA 707 du CNRS  
3, rue Mazarine  
F-75006 PARIS

chencine@mathp7.jussieu.fr

# *Astérisque*

ERIC M. FRIEDLANDER

## **Motivic complexes of Suslin and Voevodsky**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 833, p. 355-378

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_355\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__355_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MOTIVIC COMPLEXES OF SUSLIN AND VOEVODSKY

by Eric M. FRIEDLANDER\*

### 0 Introduction: Connections with K-theory

In this report we sketch some of the insights and consequences of recent work by Andrei Suslin and Vladimir Voevodsky concerning algebraic K-theory and motivic cohomology. We can trace these developments to a lecture at Luminy by Suslin in 1987 and to Voevodsky's Harvard thesis in 1992. What results is a powerful general theory of sheaves with transfers on schemes over a field, a theory developed primarily by Voevodsky with impressive applications by Suslin and Voevodsky.

Criteria for a good motivic cohomology theory originate in topology. This should be a theory which plays some of the same role in algebraic geometry as singular cohomology plays in algebraic topology. One important aspect of singular cohomology is its relationship to (complex, topological) K-theory as formalized by the Atiyah-Hirzebruch spectral sequence for a topological space  $T$  [1]

$$E_2^{p,q} = H^p(X, K_{top}^q) \Rightarrow K_{top}^{p+q}(T)$$

where  $K_{top}^q$  is the  $q^{th}$  coefficient of the generalized cohomology theory given by topological K-theory (equal to  $\mathbb{Z}$  if  $q \leq 0$  is even and 0 otherwise). Indeed, when tensored with the rational numbers, this spectral sequences collapses to give  $K_{top}^n(T) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{p+q=n, p \geq 0, q \leq 0} H^p(T, K_{top}^q) \otimes \mathbb{Q}$ . This direct sum decomposition can be defined intrinsically in terms of the weight spaces of Adams operations acting upon  $K_n^{top}(T)$ . This becomes particularly suggestive when compared to the well known results of Alexander Grothendieck [17] concerning algebraic  $K_0$  of a smooth scheme  $X$ :

$$K_0(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus CH^d(X) \otimes \mathbb{Q}$$

where  $CH^d(X)$  is the Chow group of codimension  $d$  cycles on  $X$  modulo rational equivalence; moreover, this decomposition is once again given in terms of weight spaces for Adams operations.

---

\*Partially supported by the N.S.F. and the Humboldt Foundation

Working now in the context of schemes (typically of finite type over a field  $k$ ), William Dwyer and Friedlander [8] developed a topological K-theory for schemes (called étale K-theory) which also has such an Atiyah-Hirzebruch spectral sequence with  $E_2$ -term the étale cohomology of the scheme. In [5], Spencer Bloch introduced complexes  $Z_*^d(X)$  for  $X$  quasi-projective over a field which consist of certain algebraic cycles of codimension  $d$  on the product of  $X$  and affine spaces of varying dimensions. The homology of  $Z_*^d(X)$  is closely related to the (higher Quillen) algebraic K-theory of  $X$ . If  $CH^d(X, n)$  denotes the  $n$ -th homology group of the Bloch complex  $Z_*^d(X)$  and if  $X$  is a smooth scheme, then

$$K_n(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_d CH^d(X, n) \otimes \mathbb{Q}$$

(see also [20]); this decomposition is presumably given in terms of weight spaces for Adams operations on K-theory. Together with Stephen Lichtenbaum, Bloch has moreover established a spectral sequence [6] converging to algebraic K-theory in the special case that  $X$  is the spectrum of a field  $F$

$$E_2^{p,q} = CH^{-q}(\text{Spec} F, -p - q) \Rightarrow K_{-p-q}(\text{Spec} F).$$

As anticipated many years ago by Alexander Beilinson [2], there should be such a spectral sequence for a quite general smooth scheme

$$E_2^{p,q} = H^{p-q}(X, \mathbb{Z}(-q)) \Rightarrow K_{-p-q}(X)$$

converging to algebraic K-theory whose  $E_2$ -term is *motivic cohomology*. Moreover, Beilinson [4] and Lichtenbaum [22] anticipated that this motivic cohomology should be the cohomology of *motivic chain complexes*. Although such a spectral sequence still eludes us (except in the case of the spectrum of a field), the complexes  $\mathbb{Z}(n)$  of Voevodsky and Suslin (see §4) satisfy so many of the properties required of motivic complexes that we feel comfortable in calling their cohomology motivic cohomology. The first sections of this exposition are dedicated to presenting some of the formalism which leads to such a conclusion. As we see in §5, a theorem of Suslin [27] and duality established by Friedlander and Voevodsky [14] imply that Bloch's higher Chow groups  $CH^d(X, n)$  equal motivic cohomology groups of Suslin-Voevodsky for smooth schemes  $X$  over a field  $k$  "which admits resolution of singularities."

The Beilinson-Lichtenbaum Conjecture (cf [2], [3] [18]) predicts that the conjectural map of spectral sequences from the conjectured spectral sequence converging to algebraic K-theory mod- $\ell$  to the Atiyah-Hirzebruch spectral sequence converging to étale K-theory mod- $\ell$  should be an isomorphism on  $E_2$ -terms (except for a fringe effect whose extent depends upon the mod- $\ell$  étale cohomological dimension of  $X$ ) for smooth schemes over

a field  $k$  in which  $\ell$  is invertible. This would reduce the computation of mod- $\ell$  K-theory of many smooth schemes to a question of computing “topological invariants” which in many cases has a known solution. In §6, we sketch the proof by Suslin and Voevodsky that the “Bloch-Kato Conjecture” for a field  $k$  and a prime  $\ell$  invertible in  $k$  implies this Beilinson-Lichtenbaum Conjecture for  $k$  and  $\ell$ . As discussed in the seminar by Bruno Kahn, Voevodsky has proved the Bloch-Kato Conjecture for  $\ell = 2$  (in which case it was previously conjectured by John Milnor and thus is called the Milnor Conjecture.) Recent work by B. Kahn and separately by Charles Weibel and John Rognes establishes that computations of the 2-primary part of algebraic K-theory for rings of integers in number fields can be derived using special arguments directly from the Beilinson-Lichtenbaum Conjecture and the Bloch-Lichtenbaum spectral sequence.

## 1 Algebraic Singular Complexes

The elementarily defined *Suslin complexes*  $Sus_*(X)$  provide a good introduction to many of the fundamental structures underlying the general theory developed by Voevodsky. Moreover, the relationship between the mod- $n$  cohomology of  $Sus_*(X)$  and the étale cohomology mod- $n$  of  $X$  stated in Theorem 1.1 suggests the close relationship between étale motivic cohomology mod- $\ell$  and étale cohomology mod- $\ell$ .

As motivation, we recall from algebraic topology the following well known theorem of A. Dold and R. Thom [7]. If  $T$  is a reasonable topological space (e.g., a C.W. complex) and if  $SP^d(T)$  denotes the  $d$ -fold symmetric product of  $T$ , then the homotopy groups of the group completion  $(\coprod_d Sing.(SP^d(T)))^+$  of the simplicial abelian monoid  $\coprod_d Sing.(SP^d(T))$  are naturally isomorphic to the (singular) homology of  $T$ . Here,  $Sing.(SP^d(T))$  is the (topological) singular complex of the space  $SP^d(T)$ , whose set of  $n$ -simplices is the set of continuous maps from the topological  $n$ -simplex  $\Delta[n]$  to  $SP^d(T)$ .

Suppose now that  $X$  is a scheme of finite type over a field  $k$ ; each  $SP^d(X)$  is similarly a scheme of finite type over  $k$ . Let  $\Delta^n$  denote  $Speck[t_0, \dots, t_n] / \sum_i t_i - 1$  and let  $\Delta^*$  denote the evident cosimplicial scheme over  $k$  which in codimension  $n$  is  $\Delta^n$ . We define the Suslin complex  $Sus_*(X)$  of  $X$  to be the chain complex associated to the simplicial abelian group  $(\coprod_d Hom_{Sch/k}(\Delta^*, SP^d(X)))^+$ .

Various aspects of  $Sus_*(X)$  play an important role in our context. First,  $Sus_*(X)$  equals  $c_{equi}(X, 0)(\Delta^*)$ , where  $c_{equi}(X, 0)$  is a sheaf in the *Nisnevich topology* on the category  $Sm/k$  of smooth schemes over the field  $k$ . Second, the sheaf  $c_{equi}(X, 0)$  is a *presheaf with transfers*. Third, if we denote by  $\underline{C}_*(c_{equi}(X, 0))$  the complex of Nisnevich sheaves with transfers (sending a smooth scheme  $U$  to  $c_{equi}(X, 0)(U \times \Delta^*)$ ), then this complex of sheaves

has homology presheaves which are *homotopy invariant*: the natural pull-back

$$c_{\text{equi}}(X, 0)(U \times \Delta^*) \rightarrow c_{\text{equi}}(X, 0)(U \times \mathbb{A}^1 \times \Delta^*)$$

induces an isomorphism on homology groups.

**Theorem 1.1.** ([28]). *Let  $X$  be a quasi-projective scheme over an algebraically closed field  $k$  and let  $n$  be a positive integer relatively prime to the exponential characteristic of  $k$ . Then the mod- $n$  cohomology of  $Sus_*(X)$  (i.e., the cohomology of the complex  $\mathbf{R}Hom(Sus_*(X), \mathbb{Z}/n)$ ) is given by*

$$H^*(Sus_*(X), \mathbb{Z}/n) \simeq H_{\text{et}}^*(X, \mathbb{Z}/n),$$

where the right hand side is the étale cohomology of the scheme  $X$  with coefficients in the constant sheaf  $\mathbb{Z}/n$ .

**Quick sketch of proof.** This theorem is proved using the rigidity theorem of Suslin and Voevodsky stated below as Theorem 2.5. We apply this to the (graded) homotopy invariant (cf. Lemma 2.4) presheaves with transfers

$$\Phi_i(-) = H_i(c_{\text{equi}}(X, 0)(- \times \Delta^*)) \otimes \mathbb{Z}[1/p]$$

where  $p$  is the exponential characteristic of  $k$ . An auxiliary topology, the “qfh topology” is introduced which has the property that the free  $\mathbb{Z}[1/p]$  sheaf in this topology represented by  $X$  equals  $c_{\text{equi}}(X, 0) \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ . Since  $Sus_*(X) = \Phi_*(\text{Speck})$ , Theorem 2.5 and the comparison of cohomology in the qfh and étale topologies provides the following string of natural isomorphisms:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\text{Ab}}^*(Sus_*(X), \mathbb{Z}/n) &= \text{Ext}_{\text{EtShv}/X}^*(\Phi_*)_{\text{et}}, \mathbb{Z}/n) = \text{Ext}_{\text{qfhShv}/X}^*(\Phi_*)_{\text{qfh}}, \mathbb{Z}/n) \\ \text{Ext}_{\text{qfhShv}(k)}^*(\mathbb{Z}[1/p](X), \mathbb{Z}/n) &= H_{\text{qfh}}^*(X, \mathbb{Z}/n) = H_{\text{et}}^*(X, \mathbb{Z}/n). \end{aligned}$$

□

These concepts of presheaves with transfers, Nisnevich sheaves, and homotopy invariant presheaves will be explained in the next section. Even before we investigate their definitions, we can appreciate their role from the following theorem of Voevodsky.

**Theorem 1.2.** [31, 5.12] *Assume that  $k$  is a perfect field. Let*

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$$

be a short exact sequence of Nisnevich sheaves on  $\text{Sm}/k$  with transfers. Then the resulting triple of chain complexes of abelian groups

$$F_1(\Delta^*) \rightarrow F_2(\Delta^*) \rightarrow F_3(\Delta^*) \rightarrow F_1(\Delta^*)[1]$$

is a distinguished triangle (i.e., determines a long exact sequence in homology groups).

**Quick sketch of proof.** Let  $P$  denote the presheaf cokernel of  $F_1 \rightarrow F_2$ . Then the kernel and cokernel of the natural map  $P \rightarrow F_3$  have vanishing associated Nisnevich sheaves. The theorem follows from an acyclicity criterion for  $Q(\Delta^*)$  in terms of the vanishing of  $Ext^*(Q_{Nis}, -)$  for any presheaf with transfers  $Q$  on  $Sm/k$  (with associated Nisnevich sheaf  $Q_{Nis}$ ). A closely related acyclicity theorem is stated as Theorem 3.5 below.  $\square$

One consequence of Theorem 1.2 (and Proposition 2.2 below) is the following useful property. The resulting long exact sequence in Suslin homology is far from evident if one works directly with the definition of the Suslin complex.

**Corollary 1.3.** [31, 5.17] *Let  $k$  be a perfect field and  $X$  a scheme of finite type over  $k$ . Then for any open covering  $X = U \cup V$  of  $X$*

$$Sus_*(U \cap V) \rightarrow Sus_*(U) \oplus Sus_*(V) \rightarrow Sus_*(X) \rightarrow Sus_*(U \cap V)[1]$$

*is a distinguished triangle.*

## 2 Nisnevich sheaves with Transfers

Let  $Sm/k$  denote the category of smooth schemes over a field  $k$ . (In particular, such a scheme is of finite type over  $k$ .) Then the *Nisnevich topology* on  $Sm/k$  (cf. [23]) is the Grothendieck topology (finer than the Zariski topology and less fine than the étale topology) whose coverings  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  are étale coverings with the property that for each point  $u \in U$  there exists some  $i \in I$  and some point  $\tilde{u} \in U_i$  mapping to  $u$  such that the induced map of residue fields  $k(u) \rightarrow k(\tilde{u})$  is an isomorphism. A key property of this topology is that its points are Hensel local rings.

In order to consider singular schemes which admit resolutions by smooth schemes, we shall also consider the stronger *cdh topology* on the category  $Sch/k$  of schemes of finite type over  $k$ . This is defined to be the minimal Grothendieck topology for which Nisnevich coverings are coverings as are proper, surjective morphisms of the following type:

$$W \amalg U_1 \xrightarrow{p \amalg i} U$$

where  $i : U_1 \rightarrow U$  is a closed embedding and  $p^{-1}(U - U_1) \rightarrow U - U_1$  is an isomorphism.

We shall often have need to assume that the field “admits resolution of singularities” as formulated in the following definition. At this time, this hypothesis is only known to hold for fields of characteristic 0. As one can see, the cdh topology is designed to permit the study of singular schemes over a field which admits resolution of singularities by employing coverings by smooth schemes.

**Definition 2.1.** *A field  $k$  is said to admit resolution of singularities provided that*

1. *For any scheme of finite type  $X$  over  $k$  there is a proper, birational, surjective morphism  $Y \rightarrow X$  such that  $Y$  is a smooth scheme over  $k$ .*
2. *For any smooth scheme  $X$  over  $k$  and any proper, birational, surjective map  $q : X' \rightarrow X$ , there exists a sequence of blow-ups  $p : X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 = X$  with smooth centers such that  $p$  factors through  $q$ .*

We define the presheaf of abelian groups

$$c_{\text{equi}}(X, 0) : (Sm/k)^{\text{op}} \rightarrow Ab$$

to be the evident functor whose values on a smooth connected scheme  $U$  is the free abelian group on the set of integral closed subschemes on  $X \times U$  finite and surjective over  $U$ . This is a sheaf for the étale topology and hence also for the Nisnevich topology; indeed, as mentioned following the statement of Theorem 1.1,  $c_{\text{equi}}(X, 0)$  can be constructed as the sheaf in the qfh-topology (stronger than the étale topology) associated to the presheaf sending  $U$  to the free abelian group on  $Hom_{Sch/k}(U, X)$ .

We shall have occasion to consider other Nisnevich sheaves defined as follows:

$$z_{\text{equi}}(X, r) : (Sm/k)^{\text{op}} \rightarrow Ab$$

sends a connected smooth scheme  $U$  to the group of cycles on  $U \times X$  equidimensional of relative dimension  $r$  over  $U$ . In particular, if  $X$  is proper over  $k$ , then  $c_{\text{equi}}(X, 0) = z_{\text{equi}}(X, 0)$ .

One major advantage of our Nisnevich and cdh topologies when compared to the Zariski topology is the existence of Mayer-Vietoris, localization, and blow-up exact sequences as stated below.

**Proposition 2.2.** *(cf. [29, 4.3.7; 4.3.1; 4.3.2]) For any smooth scheme  $X$  over  $k$  and any Zariski open covering  $X = U \cup V$ , the sequence of sheaves in the Nisnevich topology*

$$0 \rightarrow c_{\text{equi}}(U \cap V, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(U, 0) \oplus c_{\text{equi}}(V, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}(X, 0) \rightarrow 0$$

*of Mayer-Vietoris type is exact.*

*For any scheme  $X$  of finite type over  $k$ , any open covering  $X = U \cup V$ , and any closed scheme  $Y \subset X$ , the sequences of sheaves in the cdh topology*

$$0 \rightarrow c_{\text{equi}}(U \cap V, 0)_{\text{cdh}} \rightarrow c_{\text{equi}}(U, 0)_{\text{cdh}} \oplus c_{\text{equi}}(V, 0)_{\text{cdh}} \rightarrow c_{\text{equi}}(X, 0)_{\text{cdh}} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow z_{\text{equi}}(Y, r)_{\text{cdh}} \rightarrow z_{\text{equi}}(X, r)_{\text{cdh}} \rightarrow z_{\text{equi}}(X - Y, r)_{\text{cdh}} \rightarrow 0$$

of Mayer-Vietoris and localization type are exact.

For any scheme  $X$  of finite type over  $k$ , any closed subscheme  $Z \subset X$ , and any proper morphism  $f : X' \rightarrow X$  whose restriction  $f^{-1}(X - Z) \rightarrow X - Z$  is an isomorphism, the sequences of sheaves in the *cdh* topology

$$0 \rightarrow c_{\text{equi}}(f^{-1}(Z), 0)_{\text{cdh}} \rightarrow c_{\text{equi}}(X', 0)_{\text{cdh}} \oplus c_{\text{equi}}(Z, 0)_{\text{cdh}} \rightarrow c_{\text{equi}}(X, 0)_{\text{cdh}} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow z_{\text{equi}}(f^{-1}(Z), r)_{\text{cdh}} \rightarrow z_{\text{equi}}(X', r)_{\text{cdh}} \oplus z_{\text{equi}}(Z, r)_{\text{cdh}} \rightarrow z_{\text{equi}}(X, r)_{\text{cdh}} \rightarrow 0$$

of blow-up type are exact.

**Remarks on the proof.** The only issue is exactness on the right. We motivate the proof of the exactness of the localization short exact sequences using Chow varieties, assuming that  $X$  is quasi-projective. Let  $W$  be a smooth connected scheme and  $Z \subset (X - Y) \times W$  a closed integral subscheme of relative dimension  $r$  over  $W$ . Such a  $Z$  is associated to a rationally defined map from  $W$  to the Chow variety of some projective closure of  $X$ . The projection to  $W$  of the graph of this rational map determines a *cdh*-covering  $W' \rightarrow W$  restricted to which the pull-back of  $Z$  on  $(X - Y) \times W'$  extends to a cycle on  $X \times W'$  equidimensional of relative dimension  $r$  over  $W'$ .  $\square$

We next introduce the important notion of transfers (i.e., functoriality with respect to finite correspondences).

**Definition 2.3.** *The category of smooth correspondences over  $k$ ,  $\text{SmCor}(k)$ , is the category whose objects are smooth schemes over  $k$  and for which*

$$\text{Hom}_{\text{SmCor}(k)}(U, X) = c_{\text{equi}}(X, 0)(U),$$

the free abelian group of finite correspondences from  $U$  to  $X$ . A presheaf with transfers is a contravariant functor

$$F : (\text{SmCor}(k))^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}.$$

The structure of presheaves with transfers on  $c_{\text{equi}}(X, 0)$  and  $z_{\text{equi}}(X, r)$  is exhibited using the observation that if  $Z$  is an equidimensional cycle over a smooth scheme  $X$  and if  $W \rightarrow X$  is a morphism of schemes of finite type, then the pull-back of  $Z$  to  $W$  is well defined since the embedding of the graph of  $W \rightarrow X$  in  $W \times X$  is a locally complete intersection morphism [15]. Consequently, if  $U \leftarrow W \rightarrow X$  is a finite correspondence in  $\text{SmCor}(k)$ , then we obtain transfer maps by first pulling back cycles of  $X$  to  $W$  and then pushing them forward to  $U$ . The reader should be forewarned that earlier papers of Voevodsky, Suslin, and Friedlander use the condition on a presheaf that it be a “pretheory

of homological type” which is shown in [32, 3.1.10] to be implied by the existence of transfers.

One can easily prove the following lemma which reveals the key property of homotopy invariance possessed by the algebraic singular complex used to define Suslin homology. For any presheaf  $F$  on  $Sm/k$ , we employ the notation  $\underline{C}_*(F)$  for the complex of presheaves on  $Sm/k$  sending  $U$  to the complex  $F(U \times \Delta^*)$ .

**Lemma 2.4.** *Let  $F : (Sm/k)^{op} \rightarrow Ab$  be a presheaf on  $Sm/k$  and consider  $\underline{h}^{-i}(F) : (Sm/k)^{op} \rightarrow Ab$  sending  $U$  to the  $i$ -th homology of  $\underline{C}_*(F)$  (for some non-negative integer  $i$ ). Then  $\underline{h}^{-i}(F)$  is homotopy invariant:*

$$\underline{h}^{-i}(F)(U) = \underline{h}^{-i}(F)(U \times \mathbb{A}^1).$$

As we saw in our sketch of proof of Theorem 1.1, the following rigidity theorem of Suslin and Voevodsky, extending the original rigidity theorem of Suslin [26] is of considerable importance.

**Theorem 2.5.** [28, 4.4] *Let  $\Phi$  be a homotopy invariant presheaf with transfers satisfying  $n\Phi = 0$  for some integer  $n$  prime to the residue characteristic of  $k$ . Let  $S_d$  be the henselization of  $\mathbb{A}^d$  (i.e., affine  $d$ -space) at the origin. Then*

$$\Phi(S_d) = \Phi(\text{Speck}).$$

**Idea of Proof.** In a now familiar manner, the theorem is reduced to an assertion that any two sections of a smooth relative curve  $X \rightarrow S$  with good compactification which coincide at the closed point of  $S$  induce the same map  $\Phi(X) \rightarrow \Phi(S)$ . The difference  $Z$  of these sections is a finite correspondence from  $S$  to  $X$ . Since  $\Phi$  is a homotopy invariant presheaf with transfers, to show that the map induced by  $Z$  is 0 it suffices to show that the difference is 0 in the relative Picard group  $\text{Pic}(\overline{X}, Y)/n \subset H_{\text{ét}}^2(\overline{X}, j_!(\mu_n))$ , where  $\overline{X} \rightarrow S$  is a good compactification,  $Y = \overline{X} - X$ , and  $j : X \subset \overline{X}$ . The proper base change theorem implies that it suffices to show that the image of  $Z$  is 0 upon base change to the closed point of  $S$ . This is indeed the case since the two sections were assumed to coincide on the closed point.  $\square$

The following theorem summarizes many of the results proved by Voevodsky in [31] and reformulated in [32]. In particular, this theorem enables us to replace consideration of cohomology in the Nisnevich topology by cohomology in the Zariski topology for smooth schemes.

**Theorem 2.6.** [32, 3.1.11] *If  $F : (SmCor(k))^{op} \rightarrow Ab$  is a homotopy invariant presheaf with transfers, then its associated Nisnevich sheaf  $F_{Nis}$  is also a homotopy invariant*

presheaf with transfers and equals (as a presheaf on  $Sm/k$ ) the associated Zariski sheaf  $F_{Zar}$ .

Moreover, if  $k$  is perfect, then

$$H_{Zar}^i(-, F_{Zar}) = H_{Nis}^i(-, F_{Nis})$$

for any  $i \geq 0$ , and these are homotopy invariant presheaves with transfer.

To complete the picture relating sheaf cohomology for different topologies we mention the following result which tells us that if we consider the cdh topology on schemes of finite type over  $k$  then the resulting cohomology equals Nisnevich cohomology whenever the scheme is smooth.

**Proposition 2.7.** [14, 5.5] *Assume that  $k$  is a perfect field admitting resolution of singularities. Let  $F$  be a homotopy invariant presheaf on  $Sm/k$  with transfers. Then for any smooth scheme of finite type over  $k$*

$$H_{cdh}^*(X, F_{cdh}) = H_{Nis}^*(X, F_{Nis}) = H_{Zar}^*(X, F_{Zar}).$$

**Remark on Proof.** The proof uses the techniques employed in the proof of Theorem 3.5 below applied to the cone of  $\mathbb{Z}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{Z}(U)$ , where  $\mathcal{U}$  is an arbitrarily fine hypercovering of  $U$  for the cdh topology consisting of smooth schemes.  $\square$

### 3 Formalism of the Triangulated Category $DM_k$

Voevodsky's approach [32] to motives for smooth schemes and for schemes of finite type over a field admitting resolution of singularities entails a triangulated category  $DM_{gm}^{eff}(k)$  of effective geometric motives. Roughly speaking,  $DM_{gm}^{eff}(k)$  is obtained by adjoining kernels and cokernels of projectors to the localization (to impose homotopy invariance) of the homotopy category of bounded complexes on the category of smooth schemes and finite correspondences. Voevodsky then inverts the "Tate object"  $\mathbb{Z}(1)$  in this category to obtain his triangulated category  $DM_{gm}(k)$  of geometric motives. (See [21] for another approach to the triangulated category of mixed motives by Marc Levine.

In this section, we focus our attention upon another triangulated category introduced by Voevodsky which we denote by  $DM_k$  for notational convenience. (Voevodsky's notation is  $DM_{-}^{eff}(k)$ .) Voevodsky proves [32, 3.2.6] that his category  $DM_{gm}^{eff}(k)$  of effective geometric motives embeds as a full triangulated subcategory of  $DM_k$ . Furthermore, as we see in Theorem 5.7 below, under this embedding the Tate motive is quasi-invertible so that  $DM_{gm}$  is also a full triangulated subcategory of  $DM_k$ .

**Definition 3.1.** *Let  $X$  be a scheme over a field  $k$ . Assume either that  $X$  is smooth or that  $X$  is of finite type and  $k$  admits resolution of singularities. We define the motive of  $X$  to be*

$$M(X) \equiv \underline{C}_*(c_{\text{equi}}(X, 0)) : (Sm/k)^{op} \rightarrow C_*(Ab).$$

*Similarly, we define the motive of  $X$  with compact supports to be*

$$M^c(X) \equiv \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X, 0)) : (Sm/k)^{op} \rightarrow C_*(Ab).$$

We shall use the usual (but confusing) conventions when working with complexes. Our complexes will have cohomological indexing, meaning that the differential increases degree by 1. We view this differential of degree +1 as shifting 1 position to the right. If  $K$  is a complex, then  $K[1]$  is the complex obtained from  $K$  by shifting 1 position to the left. This has the convenience when working with (hyper-) cohomology that  $H^i(X, K[1]) = H^{i+1}(X, K)$ .

We now introduce the triangulated category  $DM_k$  designed to capture the Nisnevich cohomology of smooth schemes over  $k$  and the cdh cohomology of schemes of finite type over  $k$ .

**Definition 3.2.** *Denote by  $Shv_{Nis}(SmCor(k))$  the category of Nisnevich sheaves with transfers and let  $D_-(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$  denote the derived category of complexes of  $Shv_{Nis}(SmCor(k))$  which are bounded above. We define*

$$DM_k \subset D_-(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$$

*to be the full subcategory of those complexes with homotopy invariant cohomology sheaves.*

By Lemma 2.4 and Theorem 2.6,  $M(X)$  and  $M^c(X)$  are objects of the triangulated category  $DM_k$ .

We obtain the following relatively formal consequence of our definitions.

**Proposition 3.3.** *[32, 3.1.8, 3.2.6] If  $X$  is smooth over  $k$ , then for any  $K \in DM_k$ ,*

$$H_{Zar}^n(X, K) = Hom_{DM_k}(M(X), K[n]);$$

*in particular, if  $X$  is smooth, then*

$$Hom_{DM_k}(M(X), M(Y)[i]) = H_{Zar}^i(X, \underline{C}_*(Y)).$$

*If  $X$  is of finite type over  $k$  and  $k$  admits resolution of singularities, then*

$$H_{cdh}^n(X, K_{cdh}) = Hom_{DM_k}(M(X), K[n]_{cdh}).$$

Taking  $X = \text{Spec}k$ , we obtain an interpretation of  $Sus_*(Y)$  in terms of  $DM_k$ .

**Corollary 3.4.** *If  $Y$  is a scheme of finite type over  $k$ , then the homology of  $Sus_*(Y)$  is given by  $\text{Hom}_{DM_k}(\mathbb{Z}[*], M(Y))$ .*

The machinery of presheaves with transfers and the formulation of the cdh topology permits the following useful vanishing theorem. This is an extension of an earlier theorem of Voevodsky asserting the equivalence of the conditions on a homotopy invariant presheaf with transfers that the homology sheaves of  $\underline{C}_*(F)_{Zar}$  vanish and that  $\text{Ext}_{NisShv}^*(F_{Nis}, -) = 0$  [31, 5.9].

**Theorem 3.5.** [14, 5.5.2] *Assume  $F$  is a presheaf with transfers on  $Sm/k$  where  $k$  is a perfect field which admits resolution of singularities. If  $F_{cdh} = 0$ , then  $\underline{C}_*(F)_{Zar}$  is quasi-isomorphic to 0.*

**Idea of Proof.** If  $\underline{C}_*(F)_{Zar}$  is not quasi-isomorphic to 0, let  $\underline{h}_n(F)_{Zar}$  be the first non-vanishing cohomology sheaf. Using Theorem 2.6 and techniques of [31], we conclude that a non-zero element of this group determines a non-zero element of

$$\text{Hom}_{D(Sm/k)_{Nis}}(\underline{C}_*(F)_{Nis}, \underline{h}_n(F)_{Nis}[n]) = \text{Ext}_{NisShv}^n(F_{Nis}, \underline{h}_n(F)_{Nis}).$$

On the other hand, using a resolution of  $F$  by Nisnevich sheaves which are the free abelian sheaves associated to smooth schemes, we verify that the vanishing of  $F_{cdh}$  together with [31, 5.9] implies that

$$\text{Ext}_{NisShv}^*(F_{Nis}, G_{Nis}) = 0$$

for any homotopy invariant presheaf  $G$  with transfers. □

In conjunction with Proposition 2.2, Theorem 3.5 leads to the following distinguished triangles for motives and motives with compact support.

**Corollary 3.6.** *Assume that the field  $k$  admits resolution of singularities and that  $X$  is a scheme of finite type over  $k$ . If  $X = U \cup V$  is a Zariski open covering, then we have the following distinguished triangles of Mayer-Vietoris type*

$$M(U \cap V) \rightarrow M(U) \oplus M(V) \rightarrow M(X) \rightarrow M(U \cap V)[1]$$

$$M^c(X) \rightarrow M^c(U) \oplus M^c(V) \rightarrow M^c(U \cap V) \rightarrow M^c(X)[1].$$

*If  $Y \subset X$  is a closed subscheme with Zariski open complement  $U$ , then we have the following distinguished triangle of localization type*

$$M^c(Y) \rightarrow M^c(X) \rightarrow M^c(U) \rightarrow M^c(Y)[1].$$

Finally, if  $f : X' \rightarrow X$  is a proper morphism and  $Z \subset X$  is a closed subscheme such that the restriction of  $f$  above  $X - Z$ ,  $f| : X' - f^{-1}(Z) \rightarrow X - Z$  is an isomorphism, then we have the following distinguished triangles for abstract blow-ups:

$$M(f^{-1}(Z)) \rightarrow M(X') \oplus M(Z) \rightarrow M(X) \rightarrow M(f^{-1}(Z))[1]$$

$$M^c(f^{-1}(Z)) \rightarrow M^c(X') \oplus M^c(Z) \rightarrow M^c(X) \rightarrow M^c(f^{-1}(Z))[1]$$

Armed with these distinguished triangles, one can obtain results similar to those of Henri Gillet and Christophe Soulé in [16].

We next introduce the *Tate motive*  $\mathbb{Z}(1)[2]$  in  $DM_k$  and define the *Tate twist* of motives.

**Definition 3.7.** We define the *Tate motive*  $\mathbb{Z}(1)[2]$  to be the cone of  $M(\text{Spec } k) \rightarrow M(\mathbb{P}^1)$ .

We define the *Tate twist* by

$$M(X)(1) = \text{cone}\{M(X) \rightarrow M(X \times \mathbb{P}^1)[-2]\},$$

$$M^c(X)(1) = \text{cone}\{M^c(X) \rightarrow M^c(X \times \mathbb{P}^1)[-2]\}.$$

Thus, if  $X$  is projective and  $k$  admits resolution of singularities,

$$M(X)(1) = M^c(X \times \mathbb{A}^1)[-2].$$

We briefly introduce the analogous triangulated category for the étale site.

**Definition 3.8.** Denote by  $\text{Shv}_{\text{ét}}(\text{SmCor}(k))$  the category of presheaves with transfers which are sheaves on the étale site of  $(\text{Sm}/k)$  and let  $D_-(\text{Shv}_{\text{ét}}(\text{SmCor}(k)))$  denote the derived category of complexes of  $\text{Shv}_{\text{ét}}(\text{SmCor}(k))$  which are bounded above. We define

$$DM_{k,\text{ét}} \subset D_-(\text{Shv}_{\text{ét}}(\text{SmCor}(k)))$$

to be the full subcategory of those complexes with homotopy invariant cohomology sheaves.

Observe that the exact functor  $\pi^* : \text{Shv}_{\text{Nis}}(\text{SmCor}(k)) \rightarrow \text{Shv}_{\text{ét}}(\text{SmCor}(k))$  induces a natural map

$$\text{Hom}_{DM_k}(K, L) \rightarrow \text{Hom}_{DM_{k,\text{ét}}}(\pi^*K, \pi^*L).$$

Voevodsky observes that

$$\text{Hom}_{DM_{k,\text{ét}}}(M(X), K[n]) = H_{\text{ét}}^n(X, K)$$

for any  $K \in DM_{k,\text{ét}}$ .

## 4 Motivic Cohomology and Homology

Having introduced the triangulated category  $DM_k$ , we now proceed to consider the motivic complexes  $\mathbb{Z}(n) \in DM_k$  whose cohomology and homology is motivic cohomology and homology. Other authors (e.g., Lichtenbaum and Friedlander-Gabber) have considered similar complexes; the importance of the approach of Suslin and Voevodsky is the context in which these complexes are considered. The many properties established for  $DM_k$  enable many good formal properties to be proved.

**Definition 4.1.** *For a given positive integer  $n$ , let  $F_n$  be the sum of the images of the  $n$  embeddings*

$$c_{\text{equi}}((\mathbb{A}^1 - \{0\})^{n-1}, 0) \rightarrow c_{\text{equi}}((\mathbb{A}^1 - \{0\})^n, 0)$$

*determined by the embeddings  $(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_i, \dots, t_{n-1})$ . We define*

$$\mathbb{Z}(n) = \underline{C}_*(c_{\text{equi}}((\mathbb{A}^1 - \{0\})^n, 0)/F_n)[-n].$$

*For any positive integer  $m$ , we define*

$$\mathbb{Z}/m(n) = \underline{C}_*(c_{\text{equi}}((\mathbb{A}^1 - \{0\})^n, 0)/F_n \otimes \mathbb{Z}/m)[-n].$$

Observe that Mayer-Vietoris implies that  $\mathbb{Z}(1)$  defined as in Definition 4.1 agrees with (i.e., is quasi-isomorphic to)  $\mathbb{Z}(1)$  as given in Definition 3.7; similarly, for any  $n > 0$ ,

$$\mathbb{Z}(n) = \underline{C}_*(c_{\text{equi}}(\mathbb{P}^n, 0)/c_{\text{equi}}(\mathbb{P}^{n-1}))[-2n].$$

Moreover, if  $k$  admits resolution of singularities, then localization implies that

$$\mathbb{Z}(n) = \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^n, 0))[-2n].$$

We obtain the following determination of  $\mathbb{Z}(0)$  and  $\mathbb{Z}(1)$  which we would require of any proposed definition of motivic complexes.

**Proposition 4.2.** [32, 3.4.3]

- (a.)  $\mathbb{Z}(0)$  is the constant sheaf  $\mathbb{Z}$ .
- (b.)  $\mathbf{G}_m \simeq \mathbb{Z}(1)[1]$ , where  $\mathbf{G}_m$  is viewed as a sheaf of abelian groups.

We now introduce motivic cohomology.

**Definition 4.3.** For any scheme of finite type over a field  $k$ , we define the motivic cohomology of  $X$  by

$$H^i(X, \mathbb{Z}(j)) = H_{cdh}^i(X, \mathbb{Z}(j)_{cdh}).$$

For any positive integer  $m$ , we define the mod- $m$  motivic cohomology of  $X$  by

$$H^i(X, \mathbb{Z}/m(j)) = H_{cdh}^i(X, \mathbb{Z}/m(j)_{cdh}).$$

Thus, if  $X$  is smooth and  $k$  is perfect, then Theorem 2.6 and Proposition 3.3 imply that motivic cohomology is Zariski hypercohomology (where the complex  $\mathbb{Z}(j)$  of Nisnevich sheaves is viewed as a complex of Zariski sheaves by restriction):

$$H^i(X, \mathbb{Z}(j)) = H_{Zar}^i(X, \mathbb{Z}(j)) = Hom_{DM_k}(M(X), \mathbb{Z}(j)[i]).$$

Similarly, if  $k$  admits resolution of singularities, then for any  $X$  of finite type over  $k$

$$H^i(X, \mathbb{Z}(j)) = Hom_{DM_k}(M(X), \mathbb{Z}(j)[i]).$$

If  $d$  denotes the dimension of  $X$ , then

$$H^i(X, \mathbb{Z}(j)) = 0 \quad \text{whenever } i > d + j.$$

The following theorem relating Milnor K-theory to motivic cohomology appears in various guises in [5] and [24]. The reader is referred to [30] for a direct proof given in our present context.

**Theorem 4.4.** For any field  $k$  and any non-negative integer  $n$ , there is a natural isomorphism

$$K_n^M(k) \simeq H^n(\text{Speck}, \mathbb{Z}(n))$$

where  $K_*^M(k)$  is the Milnor K-theory of  $k$ .

So defined, motivic cohomology is cohomology with respect to the Zariski site for smooth schemes (and with respect to the cdh site for more general schemes of finite type) as anticipated by Beilinson. One can also consider the analogous cohomology with respect to the étale site following the lead of Lichtenbaum.

As usual, we let  $\mu_\ell$  denote the sheaf of  $\ell$ -th roots of unity on  $(Sm/k)_{et}$ .

**Theorem 4.5.** [32, 3.3] Define the étale motivic cohomology  $H_{et}^i(X, \mathbb{Z}(j))$  of a scheme  $X$  of finite type over  $k$  by

$$H_{et}^i(X, \mathbb{Z}(j)_{et}) = Hom_{DM_{k,et}}(M(X)_{et}, \mathbb{Z}(j)_{et}[i]);$$

similarly for any positive integer relatively prime to the residue characteristic of  $k$ , define

$$H_{et}^i(X, \mathbb{Z}/m(j)) \equiv H_{et}^i(X, \mathbb{Z}/m(j)_{et}) = \text{Hom}_{DM_{k,et}}(M(X)_{et}, \mathbb{Z}/m(j)_{et}[i]).$$

Then there is a natural quasi-isomorphism

$$\mu_m^{\otimes j} \rightarrow \mathbb{Z}/m(j)_{et}$$

In particular, this gives an isomorphism

$$H_{et}^*(X, \mu_m^{\otimes j}) \xrightarrow{\cong} H_{et}^*(X, \mathbb{Z}/m(j)).$$

**Sketch of proof.** By Proposition 4.2.b,  $\mu_m$  is quasi-isomorphic to  $\mathbb{Z}/m(1)$ . More generally, we construct an explicit map  $\mu_m^{\otimes j}(F(\zeta_m)) \rightarrow \mathbb{Z}/m(j)(F(\zeta_m))$  where  $F$  is a field extension of  $k$  and  $\zeta_m$  is a primitive  $m$ -th root of unity and show that this map is  $\text{Gal}(F(\zeta_m)/F)$ -invariant. This determines a map of étale sheaves with transfers  $\mu_m^{\otimes j} \rightarrow \mathbb{Z}/m(j)_{et}$ . By Theorems 1.1 and 2.5, this map is a quasi-isomorphism.  $\square$

Because the étale cohomology of a Hensel local ring is torsion, we readily conclude the following proposition using Proposition 2.7.

**Proposition 4.6.** *For any smooth scheme,*

$$H^*(X, \mathbb{Z}(j)) \otimes \mathbb{Q} = H_{et}^*(X, \mathbb{Z}(j)) \otimes \mathbb{Q}.$$

As we shall see in the next section, motivic cohomology is dual to motivic locally compact homology for smooth schemes over a field admitting resolution of singularities. This locally compact homology was initially formulated in [14] (essentially following the definition in [10]) using  $\underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X, r))$ . To rephrase this in terms of our triangulated category  $DM_k$ , we need the following proposition.

**Proposition 4.7.** [32, 4.2.8] *Let  $X$  be a scheme of finite type over a field  $k$  and let  $r$  be a non-negative integer. Then there is a natural isomorphism in  $DM_k$*

$$\underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X, r)) \simeq \underline{\text{Hom}}_{DM_k}(\mathbb{Z}(r)[2r], M^c(X))$$

where  $\underline{\text{Hom}}$  denotes internal Hom in the derived category of unbounded complexes of Nisnevich sheaves with transfers.

We now define three other theories: motivic cohomology with compact supports, motivic homology, and motivic homology with locally compact supports. We leave implicit the formulation of these theories with mod- $m$  coefficients.

**Definition 4.8.** *Let  $X$  be a scheme of finite type over a field  $k$  which admits resolution of singularities. Then we define*

$$H_c^i(X, \mathbb{Z}(j)) = \text{Hom}_{DM_k}(M^c(X), \mathbb{Z}(j)[i])$$

$$H_i^{lc}(X, \mathbb{Z}(j)) = \text{Hom}_{DM_k}(\mathbb{Z}(j)[i], M^c(X))$$

$$H_i(X, \mathbb{Z}(j)) = \text{Hom}_{DM_k}(\mathbb{Z}(j)[i], M(X)).$$

Since  $c_{\text{equi}}(-, 0)$  is covariantly functorial (using push-forward of cycles), we conclude that  $H^*(X, \mathbb{Z}(j))$  is contravariantly functorial and  $H_*(X, \mathbb{Z}(j))$  is covariantly functorial for morphisms of schemes of finite type over  $k$ . Similarly, the functoriality of  $z_{\text{equi}}(-, 0)$  implies that  $H_c^*(X, \mathbb{Z}(j))$  (respectively,  $H_*^{lc}(X, \mathbb{Z}(j))$  is contravariant (resp. covariant) for proper maps and covariant (resp. contravariant) for flat maps.

We recall the bivariant theory introduced in [14], which is closely related to a construction in [10] and which is an algebraic version of the bivariant morphic cohomology introduced by Friedlander and Lawson in [11]:

$$A_{r,i}(Y, X) \equiv H_{cdh}^{-i}(Y, \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X, r))_{cdh}).$$

This bivariant theory is used in §5 when considering the duality relationship between motivic cohomologies and homologies.

We conclude this section with a proposition, proved by Voevodsky, which interprets this bivariant theory in the context of the triangulated category  $DM_k$  and the Tate twist of Definition 3.7.

**Proposition 4.9.** *[32, 4.2.3] Let  $k$  be a field admitting resolution of singularities and  $X, Y$  schemes of finite type over  $k$ . There is a natural isomorphism*

$$A_{r,i}(Y, X) = \text{Hom}_{DM_k}(M(Y)(r)[2r + i], M^c(X)).$$

As special cases of  $A_{r,i}(Y, X)$ , we see that

$$A_{0,i}(Y, \mathbb{A}^j) = H^{2j-i}(Y, \mathbb{Z}(j))$$

(since localization implies that  $\mathbb{Z}(j)[2j]$  is quasi-isomorphic to  $M^c(\mathbb{A}^j)$ ) and

$$A_{r,i}(\text{Speck}, X) = H_{2r+i}^{lc}(X, \mathbb{Z}(r))$$

(since  $M(\text{Speck})(r) = \mathbb{Z}(r)$ ).

## 5 Duality with Applications

In [13], Friedlander and H.B. Lawson prove a moving lemma for families of cycles on a smooth scheme which enables one to make all effective cycles of degree bounded by some constant to intersect properly all effective cycles of similarly bounded degree. This was used to establish duality isomorphisms [12], [9] between Lawson homology (cf. [18]) and morphic cohomology (cf. [11]), topological analogues of motivic homology with locally compact supports and motivic cohomology.

Theorem 5.3 presents the result of adapting the moving lemma of [13] to our present context of  $DM_k$ . As consequences of this moving lemma, we show that a theorem of Suslin implies that Bloch's higher Chow groups of a smooth scheme over a field which admits resolution of singularities equals motivic cohomology as defined in §4. We also prove that applying Tate twists is fully faithful in  $DM_k$ .

We first translate the moving lemma of [13] into a statement concerning the presheaves  $z_{\text{equi}}(X, *)$ . The moving lemma enables us to move cycles on  $U \times W \times X$  equidimensional over a smooth  $W$  to become equidimensional over  $U \times W$  provided that  $U$  is also smooth. (In other words, cycles are moved to intersect properly each of the fibres of the projection  $U \times W \times X \rightarrow U \times W$ .)

**Theorem 5.1.** [14, 7.4] *Assume that  $k$  admits resolution of singularities, that  $U$  is a smooth, quasi-projective, equidimensional scheme of dimension  $n$  over  $k$ , and that  $X$  is a scheme of finite type over  $k$ . For any  $r \geq 0$ , the natural embedding of presheaves on  $Sm/k$*

$$\mathcal{D} : z_{\text{equi}}(X, r)(U \times -) \rightarrow z_{\text{equi}}(X \times U, r + n)$$

*induces a quasi-isomorphism of chain complexes*

$$\mathcal{D} : z_{\text{equi}}(X, r)(U \times \Delta^*) \rightarrow z_{\text{equi}}(X \times U, r + n)(\Delta^*).$$

As shown in [14, 7.1], the hypothesis that  $k$  admits resolution of singularities may be dropped provided that we assume instead that  $X$  and  $Y$  are both projective and smooth.

Applying Theorem 5.1 to the map of presheaves

$$z_{\text{equi}}(X, r)(\Delta^* \times \mathbb{A}^1 \times -) \rightarrow z_{\text{equi}}(X \times \mathbb{A}^1, r + 1)(\Delta^* \times -)$$

and using Lemma 2.4, we obtain the following homotopy invariance property.

**Corollary 5.2.** *Assume that  $k$  admits resolution of singularities. Then the natural map of presheaves induced by product with  $\mathbb{A}^1$*

$$z_{\text{equi}}(X, r) \rightarrow z_{\text{equi}}(X \times \mathbb{A}^1, r + 1)$$

induces a quasi-isomorphism

$$\underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X, r)) \xrightarrow{\cong} \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X \times \mathbb{A}^1, r + 1)).$$

Massaging Theorem 5.1 into the machinery of the previous sections provides the following duality theorem.

**Theorem 5.3.** [14, 8.2] *Assume that  $k$  admits resolution of singularities. Let  $X, Y$  be schemes of finite type over  $k$  and let  $U$  be a smooth scheme of pure dimension  $n$  over  $k$ . Then there are natural isomorphisms*

$$\begin{aligned} A_{r,i}(Y \times U, X) &\equiv H_{\text{cdh}}^{-i}(Y \times U, \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X, r))_{\text{cdh}}) \xrightarrow{\cong} \\ &H_{\text{cdh}}^{-i}(Y, \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X \times U, r + n))_{\text{cdh}}) \equiv A_{r+n,i}(Y, X \times U). \end{aligned}$$

Setting  $Y = \text{Speck}$ ,  $X = \mathbb{A}^j$ , and  $r = 0$ , we obtain the following duality relating motivic cohomology to motivic homology with locally compact supports.

**Corollary 5.4.** *Assume that  $k$  admits resolution of singularities and that  $U$  is a smooth scheme of pure dimension  $n$  over  $k$ . Then there are natural isomorphisms*

$$H^m(U, \mathbb{Z}(j)) \xrightarrow{\cong} H_{2n-m}^{\text{lc}}(U, \mathbb{Z}(n-j))$$

provided  $n \geq j$ .

*Proof.* We obtain the following string of equalities provided  $n \geq j$ :

$$\begin{aligned} H^m(U, \mathbb{Z}(j)) &= H^m(U, \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(\mathbb{A}^j, 0))[-2j]) \\ &\xrightarrow{\cong} H^m(\text{Speck}, \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(U \times \mathbb{A}^j, n))[-2j]) = H^m(\text{Speck}, \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(U, n-j))[-2j]) \\ &= \text{Hom}_{DM_k}(\mathbb{Z}(n-j)[2n-2j], M^c(U)[m-2j]) = H_{2n-m}^{\text{lc}}(X, \mathbb{Z}(j)). \end{aligned}$$

□

The following theorem was proved by Suslin in [27] using a different type of moving argument which applies to cycles over affine spaces. The content of this theorem is that Bloch's complex (consisting of cycles over algebraic simplices which meet the pre-images of faces properly) is quasi-isomorphic to complex of cycles equidimensional over simplices.

**Theorem 5.5.** *Let  $X$  be a scheme of finite type of pure dimension  $n$  over a field  $k$  and assume that either  $X$  is affine or that  $k$  admits resolution of singularities. Let  $Z_*^j(X)$  denote the Bloch complex of codimension  $j$  cycles (whose cohomology equals Bloch's higher Chow groups  $CH^j(X, *)$ ). Then whenever  $0 \leq j \leq n$ , the natural embedding*

$$\underline{C}_*(z_{\text{equi}}(X, n-j))(\text{Speck}) \rightarrow Z_*^j(X)$$

is a quasi-isomorphism.

Combining Corollary 5.4 and Theorem 5.5, we obtain the following comparison of motivic cohomology and Bloch's higher Chow groups.

**Corollary 5.6.** *Let  $X$  be a smooth scheme of finite type of pure dimension  $n$  over a field  $k$  and assume that  $k$  admits resolution of singularities. Then there is a natural isomorphism*

$$H^{2j-i}(X, \mathbb{Z}(j)) \simeq CH^j(X, i).$$

Another important consequence of Theorem 5.3 is the following theorem.

**Theorem 5.7.** [32, 4.3.1] *Let  $X, Y$  be schemes of finite type over a field  $k$  which admits resolution of singularities. Then the natural map*

$$\text{Hom}_{DM_k}(M(X), M(Y)) \rightarrow \text{Hom}_{DM_k}(M(X)(1), M(Y)(1))$$

is an isomorphism.

**Sketch of proof.** We use the following identification (cf. [32, 4.23.])

$$A_{r,i}(X, Y) = \text{Hom}_{DM_k}(\underline{C}_*(c_{\text{equi}}(X, 0))(r)_{cdh}[2r+i], \underline{C}_*(z_{\text{equi}}(Y, 0))_{cdh}).$$

Using localization, we reduce to the case that  $X, Y$  are projective. Then,

$$\text{Hom}_{DM_k}(M(X)(1), M(Y)(1)) = \text{Hom}_{DM_k}(M(X)(1), M^c(Y \times \mathbb{A}^1)[-2])$$

equals  $A_{1,0}(X, Y \times \mathbb{A}^1)$  by Proposition 4.9 which is isomorphic to  $A_{0,0}(X, Y) = \text{Hom}_{DM_k}(X, Y)$  by Theorem 5.3.  $\square$

## 6 Conjecture of Beilinson -Lichtenbaum

In this section, we sketch a theorem of Suslin and Voevodsky which permits K-theoretic conclusions provided that one can prove the Bloch-Kato Conjecture. Since this conjecture for the prime 2 is precisely the Milnor Conjecture recently proved by Voevodsky [33], the connection established by Suslin and Voevodsky has important applications to the 2-primary part of algebraic K-theory.

Throughout this section  $\ell$  is a prime invertible in  $k$  and  $k$  is assumed to admit resolution of singularities. We recall the Bloch-Kato Conjecture.

**Conjecture 6.1.** (Bloch-Kato conjecture in weight  $n$  over  $k$ ) *For any field  $F$  over  $k$ , the natural homomorphism*

$$K_n^M(F)/\ell \rightarrow H_{\text{et}}^n(F, \mu_\ell^{\otimes n})$$

is an isomorphism. In other words,

$$H^n(\text{Spec} F, \mathbb{Z}/\ell(n)) \xrightarrow{\cong} H_{\text{et}}^n(\text{Spec} F, \mathbb{Z}/\ell(n)).$$

If  $K$  is a complex of sheaves on some site, we define  $\tau_{\leq n}(K)$  to be the natural sub-complex of sheaves such that

$$\underline{H}^i(\tau_{\leq n}(K)) = \begin{cases} \underline{H}^i(K) & i \leq n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

**Definition 6.2.** Let  $\pi : (Sm/k)_{et} \rightarrow (Sm/k)_{zar}$  be the evident morphism of topologies on smooth schemes over  $k$ . Let  $\mathbf{R}\pi_*(\mu_\ell^{\otimes n})$  denote the total right derived image of the sheaf  $\mu_\ell^{\otimes n}$ . We denote by  $B/\ell(n)$  the complex of sheaves on  $(Sm/k)_{zar}$  given by

$$B/\ell(n) = \tau_{\leq n}\mathbf{R}\pi_*(\mu_\ell^{\otimes n}).$$

As shown in [30, 5.1],  $B/\ell(n)$  is a complex of presheaves with transfers with homotopy invariant cohomology sheaves. By Propositions 2.7 and 3.3, this implies the natural isomorphism for any smooth scheme  $X$  over  $k$

$$H_{Zar}^i(X, B/\ell(n)) \xrightarrow{\sim} Hom_{DM_k}(M(X), B/\ell(n)[i]),$$

where the cohomology is Zariski hypercohomology.

The following conjecture of Beilinson [2], related to conjectures of Lichtenbaum [22], is an intriguing generalization of the Bloch-Kato conjecture. We use the natural quasi-isomorphism  $\mu_\ell^{\otimes n} \simeq \mathbb{Z}/\ell(n)_{et}$  of Theorem 4.5 plus the acyclicity of  $\mathbb{Z}/\ell(n)$  in degrees greater than  $n$  to conclude that the natural maps

$$\mathbb{Z}/\ell(n) \rightarrow \mathbf{R}\pi_*\mathbb{Z}/\ell(n)_{et} \simeq \mathbf{R}\pi_*\mu_\ell^{\otimes n} \leftarrow B/\ell(n)$$

determine a natural map (in the derived category of complexes of sheaves in the Zariski topology)

$$\mathbb{Z}/\ell(n) \rightarrow B/\ell(n).$$

**Conjecture 6.3.** (*Beilinson-Lichtenbaum Conjecture in weight  $n$  over  $k$* ) The natural morphism

$$\mathbb{Z}/\ell(n) \rightarrow B/\ell(n)$$

is a quasi-isomorphism of complexes of sheaves on  $(Sm/k)_{zar}$ .

**Remark** A well known conjecture of Beilinson [2], [3] and Christophe Soulé [25] asserts that  $H^i(X, \mathbb{Z}(n))$  vanishes for  $i < 0$ . Since  $H_{et}^i(X, \mu_\ell^{\otimes n}) = 0$  for  $i < 0$ , Conjecture 6.3 incorporates the mod- $\ell$  analogue of the Beilinson-Soulé Conjecture.

We now state the theorem of Suslin and Voevodsky. M. Levine provided a forerunner of this theorem in [19].

**Theorem 6.4.** [30, 5.9] *Let  $k$  be a field which admits resolution of singularities and assume that the Bloch-Kato conjecture holds over  $k$  in weight  $n$ . Then the Beilinson-Lichtenbaum conjecture holds over  $k$  in weight  $n$ .*

**Sketch of Proof.** One readily verifies that the validity of the Bloch-Kato Conjecture in weight  $n$  implies the validity of this conjecture in weights less than  $n$ . Consequently, proceeding by induction, we may assume the validity of the Beilinson-Lichtenbaum Conjecture in weights less than  $n$ . Moreover, since both  $\mathbb{Z}/\ell(n)$  and  $B/\ell(n)$  have cohomology presheaves which are homotopy invariant presheaves with transfers annihilated by multiplication by  $n$ , we may apply the rigidity theorem (Theorem 2.5) to conclude that to prove the asserted quasi-isomorphism  $\mathbb{Z}/\ell(n) \rightarrow B/\ell(n)$  it suffices to prove for all extension fields  $F$  over  $k$  that the induced map

$$H^*(\text{Spec}F, \mathbb{Z}/\ell(n)) \rightarrow H^*(\text{Spec}F, B/\ell(n))$$

is an isomorphism. By construction,  $H^i(\text{Spec}F, \mathbb{Z}/\ell(n)) = 0$  for  $i > n$ , so that it suffices to prove

$$H^i(\text{Spec}F, \mathbb{Z}/\ell(n)) \xrightarrow{\cong} H_{\text{et}}^i(\text{Spec}F, \mu_\ell^{\otimes n}) \quad i \leq n.$$

Suslin and Voevodsky easily conclude that it suffices to prove that

$$H^i(\text{Spec}F, \mathbb{Z}/\ell(n)) \rightarrow H_{\text{et}}^i(\text{Spec}F, \mu_\ell^{\otimes n}) \quad i < n$$

is injective (assuming the validity of the Bloch-Kato Conjecture in weight  $n$ ). This in turn is implied by the assertion that

$$H^n(\partial\Delta_F^j, \mathbb{Z}/\ell(n)_{\text{cdh}}) \rightarrow H^n(\partial\Delta_F^j, B/\ell(n)_{\text{cdh}})$$

is injective for all  $j$ , where  $\partial\Delta_F^j$  is the (singular) boundary of the  $j$ -simplex over  $F$  whose cohomology fits in Mayer-Vietoris exact sequence for a covering by two contractible closed subschemes whose intersection is  $\partial\Delta_F^{j-1}$ .

We denote by  $S^1$  the scheme obtained from  $\mathbb{A}^1$  by gluing together  $\{0\}, \{1\}$ . We have natural embeddings

$$H^n(\partial\Delta_F^j, \mathbb{Z}/\ell(n)_{\text{cdh}}) \rightarrow H^{n+1}(\partial\Delta_F^j \times S^1, \mathbb{Z}/\ell(n)_{\text{cdh}})$$

$$H^n(\partial\Delta_F^j, B/\ell(n)_{\text{cdh}}) \rightarrow H^{n+1}(\partial\Delta_F^j \times S^1, B/\ell(n)_{\text{cdh}}).$$

Any cohomology class in  $H^n(\partial\Delta_F^j, \mathbb{Z}/\ell(n))$  which does not arise from  $H^n(\text{Spec}F, \mathbb{Z}/\ell(n))$  vanishes on some open subset  $U \subset \partial\Delta_F^j \times S^1$  containing all the points of the form  $p_i \times \infty$  where  $\infty \in S^1$  is the distinguished point. In other words, all such cohomology lies in

the image of  $H_{\mathcal{Z}}^{n+1}(\partial\Delta_F^j \times S^1, \mathbb{Z}/\ell(n)_{cdh})$ , the direct limit of cohomology with supports in closed subschemes missing each of the points  $p_i \times \infty$ .

The localization distinguished triangle of Corollary 3.6 gives us long exact sequences in cohomology with coefficients  $\mathbb{Z}/\ell(n)_{cdh}$  and  $B/\ell(n)_{cdh}$  and a map between these sequences; the terms involve the cohomology of  $S$  (the semi-local scheme of the set  $\{p_i \times \{\infty\}\}$ ), of  $\Delta_F^j \times S^1$  with supports in  $\mathcal{Z}$ , and of  $\Delta_F^j \times S^1$  itself. Although  $S$  is not smooth, one can conclude that our Bloch-Kato hypothesis implies that  $H^n(S, \mathbb{Z}/\ell(n)_{cdh}) \rightarrow H^n(S, B/\ell(n)_{cdh})$  is surjective. Another application of the localization distinguished triangle plus induction (on  $n$ ) implies that the map on cohomology with supports in  $\mathcal{Z}$  is an isomorphism. The required injectivity now follows by an easy diagram chase.  $\square$

An important consequence of Theorem 6.4 is the following result of Suslin and Voevodsky.

**Proposition 6.5.** [30, 7.1] *The Bloch-Kato conjecture holds over  $k$  in weight  $n$  if and only if for any field  $F$  of finite type over  $k$  the Bockstein homomorphisms*

$$H_{\text{et}}^n(F, \mu_{\ell^m}^{\otimes n}) \rightarrow H_{\text{et}}^{n+1}(F, \mu_{\ell}^{\otimes n})$$

are zero for all  $m > 0$ .

**Comment about the Proof.** If the Bloch-Kato conjecture holds, then  $H_{\text{et}}^n(F, \mu_{\ell^m}^{\otimes n})$  consists of sums of products of elements of  $H_{\text{et}}^1(F, \mu_{\ell^m})$ . The vanishing of the Bockstein homomorphism on classes of cohomology degree 1 follows immediately from Hilbert's Theorem 90.

The proof of the converse is somewhat less direct.

$\square$

## REFERENCES

- [1] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces. In *Differential Geometry, Proc. Sympos. Pure Math*, vol. 3, A.M.S. (1961), 7-38.
- [2] A. Beilinson. Letter to C. Soulé, 1982.
- [3] A. Beilinson. Higher regulators and values of  $L$ -functions. *Current Problems in Mathematics*, **24** (1984), 181-238.
- [4] A. Beilinson. Height pairing between algebraic cycles. In *K-Theory, Arithmetic and Geometry*, Moscow 1984-86, Lecture Notes in Math 1289, Springer-Verlag (1987), 1-26.

- [5] S. Bloch. Algebraic cycles and higher K-theory. *Adv. in Math* **61** (1986), 267–304.
- [6] S. Bloch and S. Lichtenbaum. A spectral sequence for motivic cohomology. *Preprint*
- [7] A. Dold and R. Thom, Quasifaserungen und unendliche symmetrische producte. *Annals of Math*, **68** (1958), 239–281.
- [8] W. Dwyer and E. Friedlander. Algebraic and etale K-theory. *Trans. A. M.S.*, **292** (1985), 247-280.
- [9] E. Friedlander. Algebraic cocycles on quasi-projective varieties. *Compositio Math.* (1997).
- [10] E. Friedlander, O. Gabber. Cycle spaces and intersection theory. In *Topological Methods in Modern Mathematics*, (1993), 325-370.
- [11] E. Friedlander and H.B. Lawson. A theory of algebraic cocycles. *Annals of Math*, **136** (1992), 361–428.
- [12] E. Friedlander and H.B. Lawson. Duality relating spaces of algebraic cocycles and cycles. *Topology*, **36** (1997), 533–565.
- [13] E. Friedlander and H.B. Lawson. Moving algebraic cycles of bounded degree. *Inventiones Math.*
- [14] E. Friedlander and V. Voevodsky. Bivariant cycle homology. In *Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories*, Annals of Math Studies, Princeton Univ. Press.
- [15] W. Fulton Intersection Theory, Ergebnisse, Springer-Verlag 1984
- [16] H. Gillet and C. Soulé. Descent, motives and K-theory. *J. reine angew Math*, **478** (1996), 127–176.
- [17] A. Grothendieck, P. Berthelot, and L. Illusie. *SGA 6*, Lecture Notes in Mathematics **225**, Springer 1971.
- [18] H.B. Lawson. Algebraic cycles and homotopy theory. *Annals of Math*, **129** (1989), 253–291.
- [19] M. Levine. Relative Milnor K-theory. *K-Theory*, **6** (1992), 113-175. Correction: *K-Theory*, **9** (1995), 503-505.
- [20] M. Levine. Bloch’s higher Chow groups revisited. *Astérisque* **210** (1994), 235–320.

- [21] M. Levine. Motivic cohomology and algebraic cycles: a categorical construction, I. *Preprint* (1993).
- [22] S. Lichtenbaum. Values of zeta-functions at non-negative integers. In *Number Theory*, Lecture Notes in Math **1068**, Springer-Verlag (1983), 127–138.
- [23] Y. Nisnevich. The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory. In *Algebraic K-theory: connections with geometry and topology* 1989, Kluwer Acad Publ, 241–342.
- [24] Yu. P. Nesterenko and A. Suslin. Homology of the general linear group over a local ring and Milnor K-theory. *Izv AN SSSR*.
- [25] C. Soulé. Opérations en K-théorie algébrique. *Canad. J. Math* **37** (1985), 488–550.
- [26] A. Suslin. On the K-theory of algebraically closed fields. *Inventiones Math* **73** (1983), 241–245.
- [27] A. Suslin. Higher Chow groups and étale cohomology. In: *Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories*, Annals of Math Studies, Princeton Univ. Press.
- [28] A. Suslin and V. Voevodsky. Singular homology of abstract algebraic varieties. *Inventiones Math* **123** (1996), 61–94.
- [29] A. Suslin and V. Voevodsky. Relative cycles and Chow sheaves. In *Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories*, Annals of Math Studies, Princeton Univ. Press.
- [30] A. Suslin and V. Voevodsky. Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In *Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories*, Annals of Math Studies, Princeton Univ. Press.
- [31] V. Voevodsky. Homology of Schemes. In *Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories*, Annals of Math Studies, Princeton Univ. Press.
- [32] V. Voevodsky. Triangulated categories of motives over a field. In *Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories*, Annals of Math Studies, Princeton Univ. Press.
- [33] V. Voevodsky. The Milnor Conjecture. *Preprint*.

Eric M. FRIEDLANDER  
Department of Mathematics  
Northwestern University  
EVANSTON, Ill. 60208 (U.S.A.)  
E-mail : eric@math.nwu.edu

# *Astérisque*

BRUNO KAHN

## **La conjecture de Milnor**

*Astérisque*, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 834, p. 379-418

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1996-1997\\_\\_39\\_\\_379\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__379_0)>

© Société mathématique de France, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**LA CONJECTURE DE MILNOR**  
d'après V. Voevodsky

par Bruno KAHN

TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1. Résultats antérieurs et premières réductions</b>	<b>5</b>
1.1. Résultats connus antérieurement	
1.2. Nettoyages	
<b>2. Cohomologie motivique</b>	<b>8</b>
<b>3. Corps dont la <math>K</math>-théorie de Milnor est divisible</b>	<b>12</b>
<b>4. Variétés de déploiement</b>	<b>14</b>
4.1. Corps de déploiement	
4.2. Variétés de déploiement	
<b>5. Homotopie des variétés algébriques</b>	<b>20</b>
5.1. Topologie de Nisnevich	
5.2. Catégorie homotopique	
5.3. Deux cercles	
5.4. $T$ -spectres	
5.5. Théories cohomologiques et homologiques	
5.6. Spectres d'Eilenberg-Mac Lane et cohomologie motivique	
<b>6. Opérations de Steenrod en cohomologie motivique</b>	<b>24</b>
<b>7. Démonstration du théorème 6.6</b>	<b>26</b>
7.1. Réalisation topologique	
7.2. Espaces de Thom et cobordismes algébriques	
7.3. Le théorème principal	

<b>8.</b>	<b>Démonstration du théorème 4.16</b>	<b>32</b>
8.1.	Le motif de Rost	
8.2.	Zéro-cycles à coefficients dans les unités	
<b>9.</b>	<b>Compléments</b>	<b>36</b>
9.1.	Le motif de Rost-Voevodsky	
9.2.	$(v_n, l)$ -variétés et variétés de déploiement génériques	
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>38</b>

### Introduction

Soit  $F$  un corps commutatif. La  $K$ -théorie de Milnor de  $F$  est l'anneau gradué  $K_*^M(F)$  défini par générateurs et relations de la manière suivante :

- Générateurs :  $\{a\}$ ,  $a \in F^*$ .
- Relations :  $\{ab\} = \{a\} + \{b\}$  ( $a, b \in F^*$ ),  $\{a\} \cdot \{1 - a\} = 0$  ( $a \in F^* - \{1\}$ ).

En d'autres termes,  $K_*^M(F)$  est le quotient de l'algèbre tensorielle du  $\mathbf{Z}$ -module  $F^*$  par l'idéal bilatère engendré par les  $a \otimes (1 - a)$  pour  $a \neq 1$ . On a  $K_0(F) = \mathbf{Z}$ ,  $K_1(F) = F^*$ . Pour  $a_1, \dots, a_n \in F^*$ , le produit  $\{a_1\} \cdot \dots \cdot \{a_n\} \in K_n^M(F)$  est noté  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Pour  $a \neq 1$ , les relations

$$\begin{aligned} \{a, 1 - a\} &= 0 \\ \{a^{-1}, 1 - a^{-1}\} &= 0 \end{aligned}$$

et la bilinéarité entraînent

$$\{a, -a\} = 0$$

d'où, encore par bilinéarité

$$\{a, b\} = -\{b, a\} \quad \text{pour } a, b \in F^*.$$

L'anneau gradué  $K_*^M(F)$  est donc *commutatif*.

Les groupes  $K_n^M(F)$  ont été introduits dans [22] par Milnor, qui était motivé par le fait que  $K_2^M(F) = K_2(F)$  (théorème de Matsumoto).

Soit  $m$  un entier premier à l'exposant caractéristique de  $F$ , et soit  $F_s$  une clôture séparable de  $F$ . La suite exacte de Kummer

$$1 \rightarrow \mu_m \rightarrow F_s^* \xrightarrow{m} F_s^* \rightarrow 1$$

fournit un homomorphisme

$$(1) \quad \begin{aligned} F^* &\rightarrow H^1(F, \mu_m) \\ a &\mapsto (a) \end{aligned}$$

vers la cohomologie galoisienne de  $F$ .

LEMME 1 (Tate). — *L'homomorphisme (1) se prolonge par le cup-produit en une famille d'homomorphismes*

$$K_n^M(F)/m \xrightarrow{u_{n,m}(F)} H^n(F, \mu_m^{\otimes n}).$$

Cela revient à voir que  $(a) \cup (1-a) = 0$  dans  $H^2(F, \mu_m^{\otimes 2})$ , pour tout  $a \in F^*$ . Pour cela, considérons l'algèbre étale  $E = F[t]/t^m - a$ . Si  $\alpha$  est l'image de  $t$  dans  $E$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha^m &= a \\ N_{E/F}(1 - \alpha) &= 1 - a. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de projection en cohomologie étale, il en résulte :

$$(a) \cup (1-a) = \text{Cor}_{E/F}((a) \cup (1-\alpha)) = \text{Cor}_{E/F}(m(\alpha) \cup (1-\alpha)) = 0. \quad \square$$

Les homomorphismes  $u_{n,m}(F)$  sont parfois appelés, pour des raisons historiques, *homomorphismes de résidu normique*. Notons  $K(n, m, F)$  l'énoncé suivant :

$(K(n, m, F))$  L'homomorphisme  $u_{n,m}(F)$  du lemme 1 est bijectif.

Kato a proposé la conjecture suivante :

CONJECTURE 1 ([14, conj. 1]). —  *$K(n, m, F)$  est vrai pour tout  $(n, m, F)$ .*

Pour  $n = 2$ , cette conjecture avait été indiquée par Milnor lui-même [22, p. 540], et Bloch [6, lecture 5] avait posé la question de la surjectivité des  $u_{n,m}$  lorsque  $F$  est un corps de fonctions sur  $\mathbf{C}$  (notons que, dans ce cas, la surjectivité équivaut au fait que l'algèbre de cohomologie  $H^*(F, \mathbf{Z}/m)$  est engendrée en degré 1).

La conjecture de Kato a été démontrée dans un grand nombre de cas particuliers (voir 1.1). Elle vient d'être démontrée dans le cas 2-primaire par Voevodsky :

THÉORÈME 1 ([48]). —  *$K(n, m, F)$  est vrai pour tout  $(n, F)$  lorsque  $m$  est une puissance de 2.*

La démonstration de Voevodsky est par récurrence sur  $n$  : elle est exposée dans les prochaines sections<sup>1</sup>. Contrairement aux démonstrations précédentes, qui utilisaient la

<sup>1</sup>Le rédacteur ne prétend pas avoir vérifié les moindres ramifications de cette démonstration, qui s'appuie sur un travail antérieur considérable (notamment [12], [42], [44], [45]). Il a par contre vérifié les arguments de [48] dans un détail suffisant pour juger que son contenu mérite d'être exposé dans ce séminaire. Néanmoins, il doit souligner que la démonstration de [48] ne sera complète que lorsque les articles [26] et [47], sur lesquels elle repose, seront achevés et rendus publics.

$K$ -théorie algébrique, elle n'utilise "que" la *cohomologie motivique*, qu'il a contribué à développer (voir à ce sujet l'exposé de E. Friedlander dans ce séminaire). Malgré cela, la topologie algébrique y joue un rôle essentiel, sous la forme de la catégorie homotopique (et de la catégorie homotopique stable) des variétés, introduite par Morel et Voevodsky [25], [46], [26]. Les arguments de Voevodsky n'utilisent pas non plus de réduction aux corps de nombres, comme c'était le cas pour certaines des démonstrations antérieures.

Pour le lecteur qui ne souhaiterait pas se plonger dans les détails, nous en donnons ici un résumé. Il est facile de voir qu'on peut se limiter au cas où  $F$  est de caractéristique 0, voire un sous-corps de  $\mathbf{C}$  (corollaire 1.4 et proposition 1.5). On suppose la conjecture connue en degré  $n - 1$ . La première étape, largement inspirée de (mais non identique à) la stratégie antérieure de Merkurjev-Suslin, réduit le problème à démontrer un "théorème 90 de Hilbert en degré  $n$ " (corollaire 2.6) : celui-ci est exprimé en termes de cohomologie motivique. La deuxième étape, toujours inspirée par Merkurjev-Suslin, consiste à réduire ce théorème 90 à l'existence d'une variété de déploiement convenable pour un symbole  $a \in K_n^M(F)/2$ , c'est-à-dire une variété intègre  $X_a$  telle que  $a$  s'annule par extension des scalaires de  $F$  à  $F(X_a)$  : on prend pour  $X_a$  la quadrique projective définie par une voisine de dimension  $2^{n-1} + 1$  de la forme de Pfister associée à  $a$ . Ici la stratégie diverge de celle de Merkurjev-Suslin : Voevodsky montre qu'il suffit d'établir la nullité d'un certain groupe de cohomologie motivique d'un schéma simplicial  $\check{C}(X_a)$  associé à  $X_a$  (proposition 4.4 et théorème 4.9). Cette approche simplifie grandement celle de Merkurjev et Suslin, qui étaient obligés de démontrer une multitude d'énoncés parasites.

Toutes les démonstrations antérieures de cas particuliers de la conjecture de Kato utilisent le fait que, pour une variété de déploiement convenable  $X$  associée comme ci-dessus à un symbole, le groupe des "zéros-cycles à coefficients dans les unités modulo l'équivalence rationnelle"

$$A_0(X, K_1)$$

s'injecte dans  $F^*$  par l'intermédiaire de la norme (voir section 8). Pour  $l = 2$ , ce résultat est démontré par M. Rost en tout degré (théorème 8.5). Grâce à une décomposition du motif de Chow de  $X_a$ , également due à Rost (théorème 8.1), Voevodsky montre que cette injectivité est équivalente à la nullité d'un *autre* groupe de cohomologie motivique de  $\check{C}(X_a)$  (théorème 4.16). Sa contribution essentielle est alors de relier le premier groupe au deuxième par une opération cohomologique  $\alpha$ , qu'il va montrer être injective.

Pour définir  $\alpha$ , Voevodsky utilise la *catégorie homotopique des  $F$ -variétés*, qu'il construit conjointement avec F. Morel. Elle lui permet de définir des opérations de Steenrod en cohomologie motivique, analogues à celles existant en topologie algébrique, et  $\alpha$  est une version entière de l'une de ces opérations. Supposant  $F$  plongé dans  $\mathbf{C}$ , l'injectivité

de  $\alpha$  sur la cohomologie motivique de la variété  $X_a$  résulte d'une part de l'existence d'une classe fondamentale dans le bordisme algébrique de  $X_a$ , et d'autre part du fait que la classe de  $X_a(\mathbf{C})$  en  $(n-1)$ -ième  $K$ -théorie de Morava est un générateur périodique, ce qui établit un lien mystérieux entre la démonstration de Voevodsky et des objets intervenant dans des propriétés profondes de la catégorie homotopique stable classique ([10], [31], [32])  
 ...

Une partie considérable de l'argument de Voevodsky s'applique au cas d'un nombre premier quelconque. Nous nous sommes efforcé de mettre en évidence cette généralité; on en trouvera les fruits dans la section 9.1. Pour avoir tous les détails de la démonstration, le lecteur devra naturellement consulter [48], ainsi que les articles dont il dépend. Nous l'encourageons également à lire [46], ancêtre direct de [48], qui contient des commentaires éclairants ayant disparu de ce dernier article.

Supposons  $F$  de caractéristique différente de 2. Soient  $W(F)$  l'anneau de Witt de  $F$ , classifiant les formes quadratiques non dégénérées sur  $F$ ,  $IF$  son idéal d'augmentation et, pour tout  $n > 0$ ,  $I^n F = (IF)^n$ . Le groupe abélien  $IF$  est engendré par les classes des formes binaires  $\langle 1, -a \rangle$  pour  $a \in F^*$ ; le groupe  $I^n F$  est donc engendré par les classes des  $n$ -formes de Pfister  $\ll a_1, \dots, a_n \gg := \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$ . L'application  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \ll a_1, \dots, a_n \gg$  induit un homomorphisme surjectif

$$(2) \quad K_n^M(F)/2 \rightarrow I^n F / I^{n+1} F.$$

En collaboration avec D. Orlov et A. Vishik, Voevodsky a annoncé une démonstration du fait que (2) est *bijectif* pour tout  $(n, F)$ ; cela avait été également conjecturé par Milnor. Nous n'aborderons pas ici cet aspect de son travail, qui utilise essentiellement les mêmes méthodes (*cf.* [28]).

Je remercie Fabien Morel pour son aide dans la préparation de ce texte.

NOTATION. Si  $A$  est un foncteur sur la catégorie des extensions de  $F$ , si  $a \in A(F)$  et si  $E$  est une extension de  $F$ , on note  $a_E$  l'image de  $a$  dans  $A(E)$ .

## 1. RÉSULTATS ANTÉRIEURS ET PREMIÈRES RÉDUCTIONS

### 1.1. Résultats connus antérieurement

Notons  $K(n, m)$  l'énoncé  $\{K(n, m, F)$  pour tout corps  $F$  de caractéristique ne divisant pas  $m\}$ .

L'énoncé  $K(0, m, F)$  dit que le groupe de cohomologie galoisienne  $H^0(F, \mathbf{Z}/m)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/m$  : c'est trivial.

L'énoncé  $K(1, m, F)$  dit que le groupe  $H^1(F, \mu_m)$  est isomorphe à  $F^*/F^{*m}$ . Ce résultat, classique, est connu sous le nom de *théorie de Kummer*. Lorsque  $\mu_m \subset F$ , il équivaut au fait que les caractères d'ordre divisant  $m$  du groupe de Galois  $G_F = \text{Gal}(F_s/F)$  correspondent bijectivement aux éléments de  $F^*/F^{*m}$ , après le choix d'une racine primitive  $m$ -ième de l'unité. L'injectivité de  $u_{1,m}(F)$  résulte immédiatement de sa définition; sa surjectivité résulte du théorème 90 de Hilbert (ou plutôt de la version d'Emmy Noether de ce théorème) :

$$H^1(F, F_s^*) = 0.$$

La démonstration de  $K(2, m, F)$  est due à Tate pour les corps globaux [43]; Tate utilise la théorie du corps de classes. La démonstration de  $K(2, m)$  est due à Merkurjev pour  $m = 2$  [18] et à Merkurjev-Suslin pour  $m$  quelconque [20]. Elle utilise la  $K$ -théorie algébrique de Quillen; voir l'exposé Bourbaki de Soulé à ce sujet [39].

La démonstration de  $K(3, 2)$  est due indépendamment à Rost [33] et à Merkurjev-Suslin [21]. La démonstration de Merkurjev-Suslin utilise la  $K$ -théorie algébrique, alors que celle de Rost ne l'utilise pas. Une démonstration de  $K(4, 2)$  a été annoncée par Rost vers 1988, mais celui-ci ne l'a jamais rédigée.

Rost et Voevodsky ont récemment annoncé une démonstration de  $K(3, 3)$  et de  $K(4, 3)$  (voir section 9.1).

Enfin, en dehors des cas cités ci-dessus,  $K(n, m, F)$  est connu pour des corps  $F$  particuliers :

- *Corps globaux* :  $K(n, m, F)$  est connu pour tout  $(n, m)$  avec  $n \geq 3$  (Bass-Tate [5]). Bass et Tate démontrent plus : pour  $n \geq 3$ , le groupe  $K_n^M(F)$  est isomorphe à  $(\mathbf{Z}/2)^{r_1}$ , où  $r_1$  est le nombre de places réelles de  $F$ .
- *Corps henséliens* : soit  $F$  un corps de caractéristique 0, hensélien pour une valuation discrète, à corps résiduel de caractéristique  $p > 0$ . Alors  $K(n, p, F)$  est connu pour tout  $n$  (Bloch-Gabber-Kato [7]).

## 1.2. Nettoyages

PROPOSITION 1.1. — *a) Soient  $m_1, m_2$  deux entiers premiers entre eux. Alors, pour tout corps  $F$  de caractéristique première à  $m_1 m_2$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $K(n, m_1 m_2, F) \iff \{K(n, m_1, F) \text{ et } K(n, m_2, F)\}$ .*

*b) (Tate) Soient  $m \geq 1$ ,  $F$  un corps de caractéristique première à  $m$  et  $E/F$  une extension de degré premier à  $m$ . Soit  $n \geq 0$ . Alors  $K(n, m, E) \Rightarrow K(n, m, F)$ .*

c) (Tate) Soit  $l$  un nombre premier. Alors, pour tout corps  $F$  de caractéristique différente de  $l$ ,  $\{K(n-1, l, F) \text{ et } K(n, l, F)\} \Rightarrow \{K(n, l^\nu, F) \text{ pour tout } \nu \geq 1\}$ .

Démonstration. a) est clair. Pour démontrer b), on remarque que les deux foncteurs  $F \mapsto K_n^M(F)$  et  $F \mapsto H^n(F, \mu_m^{\otimes n})$  sont munis de transferts

$$N_{E/F} : \begin{cases} K_n^M(E) & \rightarrow K_n^M(F) \\ H^i(E, \mu_m^{\otimes n}) & \rightarrow H^i(F, \mu_m^{\otimes n}) \end{cases}$$

pour toute extension finie  $E/F$ , vérifiant la formule de projection et tels que  $N_{E/F} \circ i_{E/F}$  soit la multiplication par le degré  $[E : F]$ , où  $i_{E/F}$  correspond à la functorialité (c'est classique pour la cohomologie galoisienne, cf. [38]; voir [5, §5] et [14, §1.7] pour la  $K$ -théorie de Milnor), et que ces transferts commutent à l'homomorphisme  $u_{n,m}$ .

Pour démontrer c), on se réduit via b) au cas où  $F$  contient une racine primitive  $l$ -ième de l'unité  $\zeta$  : en effet, le degré  $[F(\mu_l) : F]$  divise  $l-1$ , donc est premier à  $l$ . On raisonne par récurrence sur  $\nu$ , en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} K_{n-1}^M(F)/l & \xrightarrow{[\zeta]} & K_n^M(F)/l^\nu & \longrightarrow & K_n^M(F)/l^{\nu+1} & \longrightarrow & K_n^M(F)/l & \longrightarrow & 0 \\ u_{n-1,l} \downarrow & & u_{n,\nu} \downarrow & & u_{n,\nu+1} \downarrow & & u_{n,l} \downarrow & & \\ H^{n-1}(F, \mu_l^{\otimes(n-1)}) & \xrightarrow{\rho} & H^n(F, \mu_l^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(F, \mu_{l^{\nu+1}}^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(F, \mu_l^{\otimes n}) & & \end{array}$$

où  $\rho$  est le cup-produit par la classe  $[\zeta]$  de  $\zeta$  dans  $H^0(F, \mu_l) = \mu_l$  suivi du Bockstein  $\partial$  associé à la suite exacte de coefficients

$$(A_n) \quad 0 \rightarrow \mu_{l^\nu}^{\otimes n} \rightarrow \mu_{l^{\nu+1}}^{\otimes n} \rightarrow \mu_l^{\otimes n} \rightarrow 0.$$

Dans ce diagramme, la ligne inférieure est exacte, et la ligne supérieure est exacte sauf peut-être en  $K_n^M(F)/l^\nu$ . La commutativité du diagramme est évidente, sauf celle du carré de gauche. Pour vérifier cette dernière, on remarque que, si  $x \in K_{n-1}^M(F)$ , son image  $y$  par  $u_{n-1,l}$  provient de  $\tilde{y} = u_{n-1,\nu+1}(x) \in H^{n-1}(F, \mu_{l^{\nu+1}}^{\otimes(n-1)})$ , et donc que

$$\rho(y) = \partial([\zeta] \cup y) = \partial([\zeta]) \cup \tilde{y} = (\zeta) \cup \tilde{y} = u_{n,\nu}(\{\zeta\} \cdot x).$$

L'énoncé résulte alors d'une chasse aux diagrammes. □

PROPOSITION 1.2. — Soit  $E$  un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel  $F$ . Alors, pour tout  $m$  premier à la caractéristique de  $F$  et tout  $n \geq 1$ , on a  $K(n, m, E) \iff \{K(n, m, F) \text{ et } K(n-1, m, F)\}$ .

En effet, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_n^M(F)/m & \longrightarrow & K_n^M(E)/m & \longrightarrow & K_{n-1}^M(F)/m & \longrightarrow & 0 \\ & & u_{n,m(F)} \downarrow & & u_{n,m(E)} \downarrow & & u_{n-1,n(F)} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^n(F, \mu_m^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(E, \mu_m^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^{n-1}(F, \mu_m^{\otimes(n-1)}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

La ligne supérieure est exacte scindée par le choix d'une uniformisante de  $E$  [22, lemma 2.6], ainsi que la ligne inférieure, cf. [38, p. 121, (2.2)]. On vérifie facilement que ce diagramme est commutatif [22, p. 341] et que les deux scindages sont compatibles. La proposition résulte alors du lemme des 5.  $\square$

**COROLLAIRE 1.3.** —  $K(n, m) \Rightarrow K(n - 1, m)$ .

*Démonstration.* On applique la proposition 1.2 avec  $E = F((t))$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.4.** —  $K(n, m)$  en caractéristique 0 implique  $K(n, m)$  en toute caractéristique première à  $n$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  un corps de caractéristique  $p > 0$  première à  $m$ . D'après la proposition 1.1 b), pour démontrer  $K(n, m, F)$ , on peut supposer  $F$  parfait. On applique alors la proposition 1.2 en prenant pour  $E$  le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de  $F$ .  $\square$

Pour démontrer le théorème 1, on peut donc supposer que  $m = 2$  et que  $F$  est un corps de caractéristique 0. Cela servira à disposer non seulement de la résolution des singularités, mais aussi d'un "foncteur de réalisation" de la catégorie homotopique des  $F$ -schémas vers la catégorie homotopique classique, associé à un plongement de  $F$  dans  $\mathbf{C}$ , si par exemple  $F$  est de type fini sur  $\mathbf{Q}$  (voir section 7.1). Cette hypothèse supplémentaire est innocente en vertu de la

**PROPOSITION 1.5.** — Soit  $F$  un corps. Si  $K(n, m, k)$  est vrai pour tout sous-corps  $k \subset F$  de type fini sur son sous-corps premier, alors  $K(n, m, F)$  est vrai.

C'est clair, puisque la  $K$ -théorie de Milnor et la cohomologie galoisienne commutent aux limites inductives filtrantes.  $\square$

## 2. COHOMOLOGIE MOTIVIQUE

Soit  $F$  un corps. A tout  $F$ -schéma lisse de type fini  $X$ , Suslin et Voevodsky [42, §2] associent une famille de complexes de groupes abéliens  $\mathbf{Z}(n, X)_{n \geq 0}$ , contravariants en  $X$  et commutant aux limites projectives à morphismes de transition affines. Pour chaque  $n \geq 0$ , les  $\mathbf{Z}(n, X)$  définissent donc un complexe de faisceaux  $\mathbf{Z}(n)$  sur le grand site zariskien de  $\text{Spec } F$  restreint à la sous-catégorie pleine des  $F$ -schémas lisses. Ces complexes de faisceaux ont les propriétés suivantes :

- (A)  $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}$ , concentré en degré 0.
- (B)  $\mathbf{Z}(1)$  est quasi-isomorphe à  $\mathbb{G}_m[-1]$  (le faisceau des unités placé en degré cohomologique 1).
- (C) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathbf{Z}(n)$  est acyclique en degré  $> n$ .

- (D) Pour  $m, n \geq 0$ , il existe un produit  $\mathbf{Z}(m) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}(n) \rightarrow \mathbf{Z}(m+n)$ . Ce produit est commutatif et associatif à homotopie près.
- (E) Pour tout  $m$  premier à l'exposant caractéristique de  $F$ ,  $\alpha^* \mathbf{Z}(n) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/m$  est quasi-isomorphe à  $\mu_m^{\otimes n}$ , où  $\alpha$  est la projection du grand site étale de  $\text{Spec } F$  sur son grand site zariskien.
- (F)  $\mathbf{Z}(n)$  est un complexe de faisceaux avec transferts, à faisceaux de cohomologie invariants par homotopie, au sens de [44].
- (G)  $\mathbb{H}^n(\text{Spec } F, \mathbf{Z}(n)) = K_n^M(F)$  [42, §3].

Pour plus de détails, voir l'exposé de Friedlander.

Pour tout groupe abélien  $A$ , on note  $A(n)$  le complexe  $\mathbf{Z}(n) \overset{L}{\otimes} A$ . On note  $H_B^*(X, A(n))$  (resp.  $H_L^*(X, A(n))$ ) les groupes d'hypercohomologie  $\mathbb{H}_{\text{Zar}}^*(X, A(n))$  (resp.  $\mathbb{H}_{\text{ét}}^*(X, \alpha^* A(n))$ ). Pour  $X = \text{Spec } F$ , on convient de noter simplement ces groupes  $H_B^*(F, A(n))$  et  $H_L^*(F, A(n))$ .

Comme on ne sait pas pour  $n \geq 2$  si  $\mathbf{Z}(n)$  est cohomologiquement borné à gauche (c'est une conjecture), il est bon de rappeler la définition de l'hypercohomologie d'un complexe non borné et de vérifier quelques propriétés des groupes ci-dessus (ces points sont quelque peu passés sous silence dans [42] et [48]). Si  $X$  est un site et  $C$  un complexe de faisceaux sur  $X$ , à valeurs dans les groupes abéliens,  $\mathbb{H}^*(X, C)$  est la cohomologie d'un complexe  $\mathcal{F}$   $K$ -injectif au sens de [40], quasi-isomorphe à  $C$ . Si  $X$  est de dimension cohomologique finie, on a des suites exactes :

$$(3) \quad 0 \rightarrow \varprojlim^1 \mathbb{H}^{q-1}(X, \tau_{\geq n} C) \rightarrow \mathbb{H}^q(X, C) \rightarrow \varprojlim \mathbb{H}^q(X, \tau_{\geq n} C) \rightarrow 0.$$

Si  $C$  est cohomologiquement borné à gauche ou si  $X$  est de dimension cohomologique finie  $d$ , on a des suites spectrales d'hypercohomologie fortement convergentes :

$$(4) \quad I_1^{p,q} = H^q(X, C^p) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, C) \Leftarrow H^p(X, \mathcal{H}^q(C)) = II_2^{p,q}.$$

On aura aussi besoin de la cohomologie motivique de certains schémas simpliciaux. Si  $x_\bullet$  est un objet simplicial de  $X$ , on définit  $\mathbb{H}^*(x_\bullet, C)$  comme étant la cohomologie du complexe total associé au complexe cosimplicial  $\mathcal{F}(x_\bullet)$ , où  $\mathcal{F}$  est comme ci-dessus. Si  $C$  est cohomologiquement borné à gauche ou si  $x_\bullet$  est de dimension finie, on a une suite spectrale fortement convergente :

$$(5) \quad E_1^{p,q} = \mathbb{H}^q(x_p, C) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(x_\bullet, C).$$

Si  $x_\bullet^{(r)}$  est un système inductif d'objets simpliciaux, de limite inductive  $x_\bullet$ , on a des suites exactes analogues à (3) :

$$(6) \quad 0 \rightarrow \varprojlim^1 \mathbb{H}^{q-1}(x_\bullet^{(r)}, C) \rightarrow \mathbb{H}^q(x_\bullet, C) \rightarrow \varprojlim \mathbb{H}^q(x_\bullet^{(r)}, C) \rightarrow 0.$$

Pour tout nombre premier  $l$ , notons  $\mathbf{Z}_{(l)}$  le localisé de  $\mathbf{Z}$  en  $l$ .

PROPOSITION 2.1. — Pour tout corps  $F$  et tout nombre premier  $l \neq \text{car } F$ ,

a) L'application naturelle  $H_B^q(F, \mathbf{Q}(n)) \rightarrow H_L^q(F, \mathbf{Q}(n))$  est un isomorphisme pour tout  $q \in \mathbf{Z}$ .

b) Le foncteur  $F \mapsto H_L^q(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$ , où  $l \neq \text{car } F$ , commute aux limites inductives pour tout  $q \in \mathbf{Z}$ .

c)  $H_L^q(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$  est de torsion pour  $q > n$ .

Démonstration. a) Plus généralement, pour tout corps  $F$  et tout complexe de faisceaux de  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels  $K$  sur le grand site zariskien de  $\text{Spec } F$ , munis de transferts au sens de [44], l'application  $H^q(K(F)) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^q(F, \alpha^* K)$  est un isomorphisme. Si  $K$  est réduit à un faisceau, c'est dû à l'existence de transferts et au fait que la cohomologie galoisienne d'un  $G_F$ -module est de torsion en degré  $> 0$ . En général, on note qu'un corps est de  $\mathbf{Q}$ -dimension cohomologique étale 0, et qu'on peut donc appliquer la suite spectrale II de (4).

b) Il suffit de démontrer l'énoncé analogue pour les groupes de cohomologie à coefficients  $\mathbf{Q}(n)$  et  $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)$ . Dans le premier cas, cela résulte de a) ; dans le deuxième, cela résulte de la propriété (E) de  $\mathbf{Z}(n)$  et de la commutation bien connue de la cohomologie étale d'un faisceau aux limites inductives filtrantes.

c) Cela résulte de a) et des propriétés (C) et (E) de  $\mathbf{Z}(n)$ . □

Soit  $l$  un nombre premier différent de  $\text{car } F$ . Considérons l'énoncé suivant :

$$(H90(n, l, F)) \quad \text{Pour tout } i \leq n, \quad H_L^{i+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(i)) = 0.$$

Exemples 2.2. —

(1)  $n = 0$  : l'énoncé se traduit en  $H_{\text{ét}}^1(F, \mathbf{Z}_{(l)}) = 0$ . C'est clair, puisque le groupe de Galois  $G_F$ , profini, n'a pas de caractères continus d'ordre infini.

(2)  $n = 1$  : l'énoncé se traduit en le précédent et  $H_{\text{ét}}^1(F, \mathbf{G}_m) \otimes \mathbf{Z}_{(l)} = 0$ . C'est la version d'Emmy Noether du théorème 90 de Hilbert.

Notons  $H90(n, l)$  l'énoncé  $\{H90(n, l, F) \text{ pour tout corps } F \text{ de caractéristique } 0\}$ . Par ailleurs, notons  $B(n)$  le complexe de faisceaux zariskiens  $\tau_{\leq n+1} R\alpha_* \alpha^* \mathbf{Z}(n)$  : on a un morphisme naturel

$$(B_n) \quad \mathbf{Z}(n) \rightarrow B(n)$$

sur le grand site zariskien de  $\text{Spec } \mathbf{Q}$ .

THÉORÈME 2.3 ([48, th. 2.11]). — Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $H90(n, l)$  est vrai.

(ii) Pour tout  $i \leq n$ , le morphisme  $(B_i) \otimes \mathbf{Z}_{(l)}$  est un quasi-isomorphisme.

*Démonstration.* (ii)  $\Rightarrow$  (i) est clair, d'après la propriété (C) de  $\mathbf{Z}(n)$ . Pour voir la réciproque, introduisons le cône  $K(i)$  du morphisme  $(B_i) \otimes \mathbf{Z}_{(i)} : c$ 'est un complexe de faisceaux sur le grand site zariskien de  $\text{Spec } F$ , et il faut montrer qu'il est acyclique. Pour tout anneau local  $A$  d'une  $F$ -variété lisse  $X$ , il résulte de la propriété (F) de  $\mathbf{Z}(i)$  que  $\mathbb{H}^*(\text{Spec } A, K(i)) \rightarrow \mathbb{H}^*(\text{Spec } E, K(i))$  est injectif ("conjecture de Gersten", [44, cor. 4.17]). Cela ramène à démontrer, sans perte de généralité, que  $\mathbb{H}^*(F, K(i)) = 0$ . D'après la proposition 2.1 c),  $\mathbb{H}^*(F, K(i) \otimes \mathbf{Q}) = 0$ . Il reste à voir que  $\mathbb{H}^*(F, K(i) \otimes^L \mathbf{Q}_i/\mathbf{Z}_i) = 0$ , c'est-à-dire que  $H_B^q(F, \mathbf{Q}_i/\mathbf{Z}_i(i)) \rightarrow H_L^q(F, \mathbf{Q}_i/\mathbf{Z}_i(i))$  est bijectif pour  $q \leq i$ . Or :

LEMME 2.4. — Si  $H_{90}(n, l, F)$  est vrai, alors, pour tout  $i \leq n$ , le Bockstein

$$H^i(F, \mu_{l^v}^{\otimes i}) \rightarrow H^{i+1}(F, \mu_i^{\otimes i})$$

associé à la suite exacte  $(A_i)$  est nul.

En effet, la propriété (E) du complexe  $\mathbf{Z}(i)$  implique que ce Bockstein se factorise par le Bockstein

$$H^i(F, \mu_{l^v}^{\otimes i}) \rightarrow H_B^{i+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(i)) = 0$$

associé au triangle distingué  $\alpha^* \mathbf{Z}_{(l)}(i) \xrightarrow{l^v} \alpha^* \mathbf{Z}_{(l)}(i) \rightarrow \alpha^* \mathbf{Z}/l^v(i) \rightarrow \alpha^* \mathbf{Z}_{(l)}(i)[1]$ . La conclusion résulte maintenant de [42, prop. 7.1 et th. 5.9] (voir l'exposé de Friedlander, prop. 6.5).  $\square$

*Remarque 2.5.* — L'hypothèse de caractéristique 0 intervient dans la démonstration de [42, th. 5.9], qui utilise la résolution des singularités.

COROLLAIRE 2.6. —  $H_{90}(n, l) \Rightarrow K(n, l)$ .

Vu les propriétés (E) et (G) de  $\mathbf{Z}(n)$ , il suffit d'appliquer le foncteur  $C \mapsto \mathbb{H}_{\text{Zar}}^n(F, C \otimes^L \mathbf{Z}/l)$  au morphisme  $(B_n)$  et de tenir compte du corollaire 1.4.  $\square$

Dans la section suivante, on aura également besoin du

COROLLAIRE 2.7 (théorème 90 de Hilbert pour  $K_n^M$ , [48, cor. 2.14]). — Supposons que  $H_{90}(n, l)$  soit vrai. Soient  $F$  un corps de caractéristique 0,  $E/F$  une extension cyclique de degré  $l^v$  ( $v \geq 1$ ) et  $\sigma$  un générateur de son groupe de Galois. Alors la suite

$$(7) \quad K_n^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_n^M(F)$$

est exacte.

*Démonstration.* Soit  $G = \text{Gal}(E/F)$ . On a une suite exacte de  $G_F$ -modules

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbf{Z}[G] \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

que l'on considère comme un complexe  $K$  de faisceaux sur le petit site étale de  $\text{Spec } F$ . On a donc

$$\text{Ext}_{F, \text{ét}}^q(K, \alpha^* \mathbf{Z}_{(l)}(n-1)) = 0 \quad \text{pour tout } q \in \mathbf{Z}.$$

Notons que  $Ext_{F,\text{ét}}^q(\mathbf{Z}, \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(n)) = H_L^q(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$  et que  $Ext_{F,\text{ét}}^q(\mathbf{Z}[G], \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(n)) = H_L^q(E, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$ . D'après le théorème 2.3, ces groupes coïncident respectivement avec  $H_B^q(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$  et  $H_B^q(E, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$  pour  $q \leq n + 1$ . En utilisant une suite spectrale d'hypercohomologie convergeant vers  $Ext_{F,\text{ét}}^*(K, \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(n))$  et la propriété (G) de  $\mathbf{Z}(n)$ , on en déduit que la suite (7) est exacte après tensorisation par  $\mathbf{Z}_{(l)}$ . Mais l'homologie de (7) est de  $l^\nu$ -torsion, en vertu de la formule  $N_{E/F}(x)_E = \sum_{k=0}^{l^\nu-1} \sigma^k x$ ; le corollaire 2.7 en résulte.  $\square$

*Remarque 2.8.* — Dans le cas  $l = 2$ , Merkurjev a démontré indépendamment que la propriété du lemme 2.4 pour  $\nu = 1$  entraîne la conjecture de Milnor, sans utiliser la résolution des singularités [19].

Vu le corollaire 2.6, le théorème 1 résulte maintenant du théorème suivant :

**THÉORÈME 2.9** ([48, th. 4.1]). —  $H_{90}(n, 2)$  est vrai pour tout  $n \geq 0$ .

### 3. CORPS DONT LA $K$ -THÉORIE DE MILNOR EST DIVISIBLE

Le but de cette section est de démontrer :

**THÉORÈME 3.1.** — Soit  $l$  un nombre premier, et soit  $F$  un corps de caractéristique 0, sans extensions finies de degré premier à  $l$ , tel que  $K_n^M(F) = lK_n^M(F)$ . Alors  $H_{90}(n-1, l) \Rightarrow H_{90}(n, l, F)$ .

*Démonstration.* On a besoin de quelques lemmes :

**LEMME 3.2** (cf. [48, lemma 2.20]). — Supposons  $H_{90}(n-1, l)$  vrai. Soit  $F$  un corps de caractéristique 0, sans extensions de degré premier à  $l$ . Soit  $E/F$  une extension cyclique de degré  $l$  telle que la norme  $K_{n-1}^M(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_{n-1}^M(F)$  soit surjective. Alors la suite

$$K_n^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_n^M(F) \rightarrow 0$$

est exacte.

*Démonstration.* L'exactitude en  $K_n^M(F)$  résulte facilement de l'hypothèse. Pour démontrer l'exactitude en  $K_n^M(E)$ , on définit un homomorphisme

$$K_n^M(F) \xrightarrow{\varphi} K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E)$$

par la formule

$$\varphi(\{a_1, \dots, a_n\}) = b \cdot \{a_n\}$$

où  $b \in K_{n-1}^M(E)$  est tel que  $N_{E/F}(b) = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ . Le corollaire 2.7 implique que  $b \cdot \{a_n\} \in K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E)$  ne dépend pas du choix de  $b$ . Pour voir que  $\varphi$  est bien défini, il faut vérifier que  $b \cdot \{a_n\}$  dépend multilinéairement de  $(a_1, \dots, a_n)$ , ce qui est

immédiat, et que cet élément est nul si  $a_1 + a_n = 1$ . Pour simplifier, supposons  $a_1 \notin F^{*l}$  (l'autre cas est plus facile), et soit  $K = F(\sqrt[l]{a_1})$ . Soit  $c \in K^*$  tel que  $c^l = a_1$ . Notons que

$$N_{KE/K}(b_{KE}) = N_{E/F}(b)_K = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}_K = l\{c, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

donc que  $N_{KE/K}(b_{KE} - \{c, a_2, \dots, a_{n-1}\}) = 0$ ; en appliquant de nouveau le corollaire 2.7, on obtient un élément  $d \in K_n^M(KE)$  tel que  $(1 - \sigma)d = b_{KE} - \{c, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ . Notons aussi que  $1 - a_1 = N_{K/F}(1 - c)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} b \cdot \{a_n\} &= b \cdot \{1 - a_1\} = N_{KE/E}(b_{KE} \cdot \{1 - c\}) \\ &= N_{KE/E}((b_{KE} - \{c, a_2, \dots, a_{n-1}\}) \cdot \{1 - c\}) = N_{KE/E}((1 - \sigma)d \cdot \{1 - c\}) \\ &= (1 - \sigma)N_{KE/E}(d \cdot \{1 - c\}) \in (1 - \sigma)K_n^M(E). \end{aligned}$$

Il est clair que  $\varphi$  est une section de l'homomorphisme  $K_n^M(E)/(1 - \sigma)K_n^M(E) \xrightarrow{\nu} K_n^M(F)$  induit par la norme. Reste à voir qu'il est surjectif. Or, d'après Bass-Tate [5, cor. 5.3],  $K_n^M(E)$  est engendré par les symboles de la forme  $\{b, a_2, \dots, a_n\}$  avec  $b \in E^*$  et  $a_2, \dots, a_n \in F^*$ . On vérifie facilement sur ces symboles que  $\varphi \circ \nu$  est l'identité.  $\square$

LEMME 3.3 (cf. [48, lemma 2.17]). — Soit  $F$  un corps de caractéristique 0, sans extensions de degré premier à  $l$ . Supposons  $H90(n - 1, l)$  vrai. Alors, pour toute extension cyclique  $E/F$  de degré  $l$ , la suite

$$H^{n-1}(E, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{N_{E/F}} H^{n-1}(F, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{\cup \chi} H^n(F, \mathbf{Z}/l) \rightarrow H^n(E, \mathbf{Z}/l),$$

où  $\chi \in H^1(F, \mathbf{Z}/l)$  est un caractère définissant  $E$ , est exacte.

Nous renvoyons à [48] pour la démonstration : en effet, pour  $l = 2$ , ce résultat est vrai sans l'hypothèse  $H90(n - 1, l)$  (ni d'ailleurs celle que  $F$  n'ait pas d'extensions premières à  $l$ ), cf. par exemple [1, cor. 4.6].

LEMME 3.4 ([48, lemma 2.22]). — Sous l'hypothèse du théorème 3.1, on a  $K_n^M(E) = lK_n^M(E)$  pour tout extension finie  $E/F$ .

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où  $E/F$  est cyclique de degré  $l$ . Montrons d'abord que la norme  $K_{n-1}^M(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_{n-1}^M(F)$  est surjective : comme son conoyau est de  $l$ -torsion, cela résulte de la surjectivité de  $K_{n-1}^M(E)/l \xrightarrow{N_{E/F}} K_{n-1}^M(F)/l$ . Comme  $F$  n'a pas d'extensions de degré premier à  $l$ , il contient une racine primitive  $l$ -ième de l'unité dont le choix identifie le module galoisien  $\mu_l$  à  $\mathbf{Z}/l$ ; de plus, on a  $E = F(\sqrt[l]{a})$  pour un  $a \in F^*$  convenable. On a alors un diagramme commutatif

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} K_{n-1}^M(E)/l & \xrightarrow{N_{E/F}} & K_{n-1}^M(F)/l & \xrightarrow{\cdot \{a\}} & K_n^M(F)/l = 0 & \longrightarrow & K_n^M(E)/l \\ \downarrow u_{n-1,l} & & \downarrow u_{n-1,l} & & \downarrow u_{n,l} & & \downarrow u_{n,l} \\ H^{n-1}(E, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{N_{E/F}} & H^{n-1}(F, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{\cup(a)} & H^n(F, \mathbf{Z}/l) & \longrightarrow & H^n(E, \mathbf{Z}/l) \end{array}$$

où les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes par le corollaire 2.6 et dont la ligne inférieure est exacte par le lemme 3.3. La surjectivité en résulte.

Soit  $\sigma$  un générateur de  $Gal(E/F)$ . L'égalité  $K_n^M(F) = lK_n^M(F)$  et le lemme 3.2 entraînent facilement que l'endomorphisme  $1 - \sigma$  de  $K_n^M(E)/l$  est surjectif. La conclusion en résulte, puisque  $(1 - \sigma)^l = 0$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 3.1.** Montrons que  $H^n(F, \mathbf{Z}/l) = 0$  : c'est suffisant vu la proposition 2.1 c) et la propriété (E) de  $\mathbf{Z}(n)$ . Soit  $\alpha \in H^n(F, \mathbf{Z}/l)$ . Il existe une extension finie galoisienne  $E/F$  telle que  $\alpha_E = 0$ . Grâce au lemme 3.4, on peut supposer par récurrence sur  $[E : F]$  que  $E/F$  est cyclique de degré  $l$ . Soit  $E = F(\sqrt[l]{a})$  pour  $a \in F^*$ . En réutilisant le diagramme (8), on voit facilement que  $\alpha = 0$ .  $\square$

## 4. VARIÉTÉS DE DÉPLOIEMENT

### 4.1. Corps de déploiement

**DÉFINITION 4.1.** — Soient  $F$  un corps,  $n > 0$  et  $x \in K_n^M(F)/l$ . On dit qu'une extension  $K/F$  est un *corps de déploiement* (resp. un *corps de déploiement générique*) pour  $x$  si  $x_K = 0$  (resp. si, pour toute extension  $E/F$ ,  $x_E = 0 \iff$  il existe une  $F$ -place de  $K$  vers  $E$ ). On dit qu'une  $F$ -variété intègre  $X$  est une *variété de déploiement* (resp. une *variété de déploiement générique*) pour  $x$  si  $F(X)$  est un corps de déploiement (resp. un corps de déploiement générique) pour  $x$ .

*Remarque 4.2.* — Si la variété  $X$  est de plus *propre*, la condition de généricité se traduit sous la forme suivante : pour toute extension  $E/F$ ,  $x_E = 0$  si et seulement si  $X \otimes_F E$  a un point rationnel. Cela résulte du critère valuatif de propreté. Si  $Y$  est une autre variété de déploiement pour  $x$ , il existe donc un  $F$ -morphisme d'un ouvert de  $Y$  vers  $X$ . La pertinence de cette notion apparaîtra dans la section 9.2.

*Exemples 4.3.* —

- (1)  $F_s$  est un corps de déploiement pour tout  $x$  : en effet, la  $K$ -théorie de Milnor de  $F_s$  est  $l$ -divisible. Cela prouve l'existence de corps de déploiement (et même de corps de déploiement de degré fini sur  $F$ ).
- (2) Pour la démonstration du théorème 2.9, on utilisera des corps de déploiement *génériques* dans le cas où  $x$  est un symbole. En voici des exemples :
  - (a)  $n = 2$ . Supposons  $\mu_l \subset F$  et choisissons une racine primitive  $l$ -ième de l'unité  $\zeta$ . Pour  $a, b \in F^*$ , l'algèbre centrale simple  $A = \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ & \zeta \end{smallmatrix} \right)_\zeta$  admet une *variété de Severi-Brauer*  $X$  : c'est une  $F$ -variété projective, lisse, géométriquement intègre, isomorphe à  $\mathbf{P}^{l-1}$  si et seulement si  $A$  n'est pas à division ([8], [2]). On montre que  $X$  est une variété de déploiement générique pour  $\{a, b\} \in K_2^M(F)/l$  (Bass-Tate, [23, th. 5.7 et cor. 5.11]).

- (b)  $n = 3$ . Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, soit  $c$  un troisième élément de  $F^*$ . Notons  $U$  la variété affine d'équation  $Nrd_A(x) = c$ , où  $Nrd_A$  est la norme réduite associée à  $A$  : c'est une "forme tordue" de  $SL_l$ . Il résulte de [20, th. 12.1] que  $U$  est une variété de déploiement générique pour  $\{a, b, c\} \in K_3^M(F)/l$ . Une complétion projective de  $U$  est donnée par  $X = \{[x, y, t] \in \mathbf{P}(A \oplus A \oplus F) \mid xy = t^2, x^* = yt^{l-2}c, y^* = xt^{l-2}c^{-1}\}$ , où  $x \mapsto x^* \in A$  est une fonction polynomiale (bien définie ! ) telle que  $xx^* = Nrd_A(x)$ , l'immersion ouverte  $U \rightarrow X$  étant donnée par  $x \mapsto [x, x^{-1}, 1]$  (Rost). La variété  $X$  n'est toutefois lisse que pour  $l = 3$ .
- (c)  $l = 2$ . Pour  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (F^*)^n$  la quadrique projective  $X_{\underline{a}}$  définie par la  $n$ -forme de Pfister  $\varphi = \ll a_1, \dots, a_n \gg$  est une variété de déploiement générique pour  $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)/2$  [11, cor. 3.3]. Variante : on remplace  $\varphi$  par une de ses voisines (sous-forme de dimension  $> 2^{n-1}$ ) [17, ex. 4.1].

Pour  $x \in K_n^M(F)/l$ , notons  $D(x)$  la propriété suivante :

$D(x)$  Il existe un corps de déploiement  $K$  pour  $x$ , de type fini sur  $F$  et tel que  $H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}(l)(n)) \rightarrow H_L^{n+1}(K, \mathbf{Z}(l)(n))$  soit injectif.

**PROPOSITION 4.4.** — *Supposons  $H90(n-1, l)$  vrai. Supposons de plus que, pour tout corps  $E$  de caractéristique 0 et tout  $(a_1, \dots, a_n) \in (E^*)^n$ ,  $D(\{a_1, \dots, a_n\})$  soit vrai. Alors  $H90(n, l)$  est vrai.*

*Démonstration.* Par l'absurde. Soit  $\alpha \in H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}(l)(n)) - \{0\}$ . Choisissons un domaine universel pour  $F$ , c'est-à-dire une extension  $\tilde{F}/F$ , algébriquement close et de degré de transcendance infini. D'après la proposition 2.1 b), l'ensemble des sous-extensions  $K/F$  telles que  $\alpha_K \neq 0$  est inductif; il a donc un élément maximal  $E$ . Ce corps  $E$  n'a pas d'extensions finies de degré premier à  $l$  (argument de transfert). D'après le théorème 3.1, on a donc  $K_n^M(E)/l \neq 0$ . Soit  $x = \{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(E)/l - \{0\}$ . En appliquant  $D(x)$ , on trouve une extension  $K/E$  de type fini, telle que  $x_K = 0$  (donc  $K \neq E$ ) et  $\alpha_K \neq 0$ . Comme  $K/E$  est de type fini,  $K$  se plonge dans  $\tilde{F}$ , ce qui contredit la maximalité de  $E$ .  $\square$

## 4.2. Variétés de déploiement

Pour toute  $F$ -variété intègre  $X$ , notons  $\check{C}(X)$  le schéma simplicial tel que  $\check{C}(X)_n = X^{n+1}$ , les faces et dégénérescences étant données par les projections et diagonales partielles. On a une chaîne de morphismes de schémas simpliciaux

$$\mathrm{Spec} F(X) \rightarrow X \rightarrow \check{C}(X) \rightarrow \mathrm{Spec} F$$

où les objets autres que  $\check{C}(X)$  sont considérés comme des schémas simpliciaux constants.

**LEMME 4.5.** — *a) Si  $X$  a un point rationnel, les homomorphismes*

$$H_B^*(F, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_B^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n))$$

sont des isomorphismes.

b) Les homomorphismes

$$H_L^*(F, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_L^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n))$$

sont des isomorphismes.

*Démonstration.* a) C'est classique : le choix d'un point rationnel de  $X$  définit une rétraction  $r$  de l'application naturelle

$$H_B^*(F, \mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\alpha} H_B^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n)).$$

Pour prouver que  $\alpha \circ r$  est l'identité, on construit comme d'habitude une homotopie de l'identité à l'application correspondant à  $\alpha \circ r$  sur un complexe calculant  $H_B^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n))$ .

b) C'est clair par le même raisonnement qu'en a) si  $X$  a un point rationnel, par exemple si  $F$  est algébriquement clos. En général, cela résulte de la comparaison des suites spectrales convergentes

$$\begin{aligned} H^p(F, \mathbb{H}_{\text{ét}}^q(F_s, K)) &\Rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{p+q}(F, K) \\ H^p(F, \mathbb{H}_{\text{ét}}^q(\check{C}(X_s), K)) &\Rightarrow \mathbb{H}_{\text{ét}}^{p+q}(\check{C}(X), K) \end{aligned}$$

où  $X_s = X \otimes_F F_s$  et  $K = \mathbf{Q}(n)$  ou  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)$ , cf. la démonstration de la proposition 2.1 b).  
□

*Remarque 4.6.* — Une démonstration du lemme 4.5 a) plus naturelle d'un point de vue homotopique pourra être obtenue à partir de l'exemple 5.1 et du théorème 6.2 ci-dessous.

**DÉFINITION 4.7.** — Soit  $x \in K_n^M(F)/l$ . Une variété de déploiement  $X$  pour  $x$  est *bonne* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $X$  est lisse.
- (ii)  $X_{F(X)}$  est rétracte rationnelle.
- (iii)  $H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}(l)(n)) = 0$ .

Rappelons qu'une  $F$ -variété intègre  $X$  est *rétracte rationnelle* s'il existe un ouvert non vide  $U \subset X$  tel que  $Id_U$  se factorise par un ouvert d'un espace affine. Cette notion est due à D. Saltman [37].

*Exemples 4.8.* —

- (1) Soit  $X$  une *variété projective homogène* sur  $F$  : il existe donc un groupe semi-simple  $G$ , défini sur  $F$ , tel que  $X \otimes_F F_s$  soit  $F_s$ -isomorphe à  $G \otimes_F F_s/P$  pour un  $F_s$ -sous-groupe parabolique  $P$  convenable de  $G \otimes_F F_s$  [9, prop. 4]. Alors  $X$  vérifie les hypothèses (i) et (ii) de la définition 4.7. Pour (i), c'est classique; pour (ii) on utilise la décomposition de Bruhat généralisée qui montre que  $X_{F(X)}$  est même  $F(X)$ -rationnelle [3, th. 21.20] (je remercie Philippe Gille de m'avoir indiqué cette référence). Ceci s'applique aux exemples 4.3 (2) (a) et (c).

- (2) La variété  $U$  de l'exemple 4.3 (2) (b) vérifie également les hypothèses (i) et (ii) de la définition 4.7 : pour (ii), on remarque que si  $U$  a un point rationnel, on peut se ramener à  $c = 1$  par multiplicativité de la norme réduite. Il faut donc montrer que  $SL_{1,A}$  est rétracte rationnelle. Comme l'indice de  $A$  est premier, le théorème de Wang [50] implique que tout élément de norme réduite 1 est produit de commutateurs. En appliquant ceci au point générique  $\eta$  de  $SL_{1,A}$ , on obtient une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \eta & \hookrightarrow & SL_{1,A} \\ & \searrow & \nearrow \\ & (GL_{1,A})^{2m} & \end{array}$$

pour  $m \geq 1$  convenable. Cette factorisation s'étend en un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & SL_{1,A} \\ & \searrow & \nearrow \\ & (GL_{1,A})^{2m} & \end{array}$$

où  $V$  est un ouvert convenable de  $SL_{1,A}$ , ce qui entraîne facilement la propriété cherchée. (Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène de m'avoir expliqué cette démonstration.)

**THÉORÈME 4.9** (cf. [48, th. 2.25]). — *Supposons que  $H90(n-1, l)$  soit vrai. Soit  $x \in K_n^M(F)/l$ ; supposons que  $x$  admette une bonne variété de déploiement. Alors  $D(x)$  est vrai.*

*Démonstration.* On a encore besoin de quelques lemmes :

**LEMME 4.10** ([48, th. 2.15]). — *Supposons que  $H90(n-1, l)$  soit vrai; soit  $K(n)$  le cône du morphisme  $(B_n)$  ci-dessus, localisé en  $l$ . Alors  $X \mapsto \mathbb{H}^*(X, K(n))$  est un invariant birationnel lorsque  $X$  décrit les  $F$ -variétés lisses et intègres.*

*Démonstration.* Il faut montrer que, pour tout ouvert non vide  $U \subset X$ ,  $\mathbb{H}^*(X, K(n)) \rightarrow \mathbb{H}^*(U, K(n))$  est bijectif. Soit  $Z = X - U$ . Par récurrence sur  $\dim Z$ , on se ramène au cas où  $Z$  est lisse (considérer son lieu singulier). De la pureté de la cohomologie motivique [42, prop. 2.4] et de la cohomologie étale à coefficients racines de l'unité tordues, on déduit alors que

$$\mathbb{H}_2^q(X, K(n)) \simeq \mathbb{H}^{q-2c}(Z, K(n-c))$$

où  $c = \text{codim}_X(Z)$ . La conclusion résulte maintenant du théorème 2.3.  $\square$

**LEMME 4.11.** — *Avec les hypothèses et notations du lemme 4.10, soit  $Y \xrightarrow{f} X$  un morphisme dominant de  $F$ -variétés lisses et intègres, dont la fibre générique est une variété rétracte rationnelle. Alors  $\mathbb{H}^*(X, K(n)) \xrightarrow{f^*} \mathbb{H}^*(Y, K(n))$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Grâce au lemme 4.10, on se ramène au cas où  $X$  est un corps. En réutilisant si besoin est le lemme 4.10, le lemme 4.11 résulte alors de l'invariance par homotopie de la cohomologie motivique (propriété (F) de  $\mathbf{Z}(n)$ ) et de la cohomologie étale à coefficients racines de l'unité tordues.  $\square$

**LEMME 4.12.** — *Supposons  $H90(n-1, l)$  vrai. Soit  $X$  une  $F$ -variété intègre vérifiant les propriétés (i) et (ii) de la définition 4.7. Alors,*

a) *Les homomorphismes*

$$\mathbb{H}^*(\check{C}(X), K(n)) \rightarrow \mathbb{H}^*(X, K(n)) \rightarrow H^*(F(X), K(n))$$

*sont des isomorphismes.*

b) *On a une suite exacte*

$$H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) \rightarrow H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n)) \rightarrow H_L^{n+1}(F(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)).$$

*Démonstration.* a) C'est clair pour l'homomorphisme de droite, en vertu du lemme 4.10. Si  $\partial$  est une face de  $\check{C}(X)_{r+1}$  vers  $\check{C}(X)_r$ , il résulte du lemme 4.11 que l'application induite par  $\partial$  en  $K(n)$ -hypercohomologie est un isomorphisme. Pour tout  $r \geq 0$ , soit  $\check{C}(X)^{(r)}$  le  $r$ -ième squelette de  $\check{C}(X)$ . D'après la remarque ci-dessus, les différentielles  $d_1$  sont alternativement nulles et bijectives dans la suite spectrale (5) associée à  $\check{C}(X)^{(2r)}$ . Il en résulte que cette suite spectrale dégénère et induit des isomorphismes

$$\mathbb{H}^*(\check{C}(X)^{(2r)}, K(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^*(X, K(n)), \quad r \geq 0.$$

En particulier, les systèmes projectifs  $(\mathbb{H}^*(\check{C}(X)^{(2r)}, K(n)))_{r \geq 0}$  sont constants, et il résulte des suites exactes (6) que les homomorphismes  $\mathbb{H}^*(\check{C}(X), K(n)) \rightarrow \mathbb{H}^*(\check{C}(X)^{(2r)}, K(n))$  sont des isomorphismes pour tout  $r \geq 0$ .

b) Cela résulte de a) et du diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} 0 = H_B^{n+1}(F(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) & \longrightarrow & H_L^{n+1}(F(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(F(X), K(n)) \\ & & \uparrow & & \uparrow \wr \\ H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) & \longrightarrow & H_L^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(\check{C}(X), K(n)) \\ & & \uparrow \wr & & \\ & & H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n)) & & \end{array}$$

où l'isomorphisme du haut résulte de a), et celui du bas du lemme 4.5 b).  $\square$

Le théorème 4.9 résulte immédiatement de la définition 4.7 et du lemme 4.12 b).  $\square$

Vu la proposition 4.4 et le théorème 4.9, le théorème 2.9 résulte maintenant du

THÉORÈME 4.13 (cf. [48, prop. 4.10]). — Supposons  $H90(n-1, 2)$  vrai. Soient  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (F^*)^n$  et  $Q_{\underline{a}}$  la quadrique projective de dimension  $2^{n-1} - 1$  définie par la forme quadratique

$$\ll a_1, \dots, a_{n-1} \gg \perp \langle -a_n \rangle .$$

Alors  $Q_{\underline{a}}$  est une bonne variété de déploiement pour  $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)/2$ .

Remarque 4.14. — Soient  $X, Y$  deux  $F$ -variétés lisses et intègres qui sont *stablement équivalentes*, par exemple  $X_{F(Y)}$  est  $F(Y)$ -rationnelle et  $Y_{F(X)}$  est  $F(X)$ -rationnelle. Alors, pour  $x \in K_n^M(F)/l$ ,  $X$  est une bonne variété de déploiement pour  $x$  si et seulement si  $Y$  l'est. Cela résulte facilement du lemme 4.12 b) (voir aussi exemple 5.1).

Dans l'énoncé du théorème 4.13, on pourrait donc remplacer la quadrique  $Q_{\underline{a}}$  par la quadrique  $X_{\underline{a}}$  associée à la  $n$ -forme de Pfister  $\ll a_1, \dots, a_n \gg$ . Toutefois, l'existence du modèle  $Q_{\underline{a}}$  est cruciale pour la démonstration de Voevodsky, comme le montre l'énoncé du théorème 4.15 ci-dessous.

Le théorème 4.13 résulte formellement de la conjonction des deux énoncés suivants, le premier de nature "topologique", le deuxième de nature "arithmétique" :

THÉORÈME 4.15. — Supposons  $H90(n-1, l)$  vrai. Soient  $F$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$  et  $X$  une  $F$ -variété projective lisse de dimension  $d = l^{n-1} - 1$  telle que  $s_d(X(\mathbf{C})) \not\equiv 0 \pmod{l^2}$ , où  $s_d(X(\mathbf{C}))$  est le nombre de Chern de  $X(\mathbf{C})$  associé au  $d$ -ième polynôme de Newton (cf. [24, §16]). Alors il existe une injection

$$H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) \xrightarrow{\alpha} H_B^{2\frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(\frac{l^{n-1}-1}{l-1} + 1)).$$

Le théorème 4.15 sera démontré dans les sections 6 et 7.3.

THÉORÈME 4.16. — Supposons  $H90(n-1, 2)$  vrai. Soient  $F$  et  $\underline{a}, Q_{\underline{a}}$  comme dans le théorème 4.13. Alors  $s_d(Q_{\underline{a}}(\mathbf{C})) \not\equiv 0 \pmod{4}$  et  $H_B^{2^n-1}(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(2^{n-1})) = 0$ .

Le théorème 4.16 sera démontré dans la section 8. Notons tout de suite que sa première conclusion résulte d'un calcul élémentaire (on trouve  $s_d(Q_{\underline{a}}(\mathbf{C})) = 2(2^{2^{n-1}-1} - 2^{n-1} - 1)$ , cf. [24, problem 16-D]).

Pour la démonstration du théorème 4.15, Voevodsky utilise des opérations de Steenrod en cohomologie motivique. Pour les définir, il faut introduire la *catégorie homotopique stable des schémas* : c'est fait dans la prochaine section.

## 5. HOMOTOPIE DES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

### 5.1. Topologie de Nisnevich

Soit  $X$  un schéma. Un *recouvrement de Nisnevich* de  $X$  est une famille  $(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$  de morphismes étales telle que, pour tout  $x \in X$ , il existe  $i \in I$  et  $u \in f_i^{-1}(x)$  tel que  $\kappa(x) \rightarrow \kappa(u)$  soit un isomorphisme. Les recouvrements de Nisnevich définissent une topologie de Grothendieck sur la catégorie  $Sm/F$  des  $F$ -schémas lisses : la *topologie de Nisnevich* [27]. Les anneaux locaux de cette topologie sont les anneaux locaux henséliens.

### 5.2. Catégorie homotopique

Soient  $Shv_{Nis}(Sm/F)$  le topos associé (faisceaux d'ensembles) et  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  la catégorie des objets simpliciaux de ce topos. On identifiera, sans plus de commentaires, les objets suivants à des objets de  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  : ensembles simpliciaux (faisceaux constants),  $F$ -schémas simpliciaux (faisceaux représentables), faisceaux d'ensembles,  $F$ -schémas.

Pour  $U \in Sm/F$  et  $u \in U$ , notons  $\mathcal{O}_{U,u}^h$  le hensélisé de l'anneau local de  $U$  en  $u$ . Alors  $\text{Spec } \mathcal{O}_{U,u}^h$  est limite projective de  $F$ -schémas lisses  $U_\alpha$  ; pour tout  $\mathcal{X} \in \Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$ , on définit sa fibre  $\mathcal{X}_u$  en  $u$  comme la limite inductive des ensembles simpliciaux  $\mathcal{X}(U_\alpha)$ . On dit qu'un morphisme  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  est une *équivalence faible simpliciale* si, pour tout  $U \in Sm/F$  et tout  $u \in U$ ,  $\varphi_u = \mathcal{X}_u \rightarrow \mathcal{Y}_u$  est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

*Exemple 5.1.* — (cf. [48, lemma 3.8]) Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de  $Sm/F$ . Considérons le schéma simplicial  $\check{C}_S(X)$  tel que  $\check{C}_S(X)_n = \underbrace{X \times_S \cdots \times_S X}_{n+1}$ , les faces et dégénérescences étant données par les projections et diagonales partielles (pour  $S = \text{Spec } F$ , on retrouve l'objet  $\check{C}(X)$  considéré ci-dessus). Si  $f_s$  a une section pour tout  $s \in S$ , la projection  $\check{C}_S(X) \rightarrow S$  est une équivalence faible simpliciale : c'est évident. En particulier, supposons  $X = Y \times_F S$  pour un  $F$ -schéma lisse  $Y$  ; alors, si  $\text{Hom}_F(S, Y) \neq \emptyset$ , la projection  $\check{C}(Y) \times_F S \rightarrow S$  est une équivalence faible simpliciale.

Prenons par exemple  $S = \text{Spec } F$ , et pour  $Y$  une variété de déploiement générique pour un élément  $x \in K_n^M(F)/l$  (cf. définition 4.1). Supposons  $Y$  propre. Alors le faisceau simplicial  $\check{C}(Y)$  est faiblement simplicialement équivalent au faisceau d'ensembles  $\Phi_x$  défini par

$$\Phi_x(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_{F(U)} \neq 0 \\ pt & \text{si } x_{F(U)} = 0 \end{cases}$$

où  $U$  décrit les  $F$ -schémas lisses intègres et  $pt$  désigne un ensemble à 1 élément : cela résulte de la remarque 4.2. Ceci montre que l'objet  $\check{C}(Y)$ , vu à homotopie près, ne dépend que de  $x$ .

Notons  $\mathcal{H}_s(\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F))$  la localisation de  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  par rapport aux équivalences faibles simpliciales. On dit qu'un objet  $\mathcal{X} \in \Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  est  $\mathbf{A}^1$ -local si, pour tout  $\mathcal{Y} \in \Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$ ,  $Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \rightarrow Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y} \times \mathbf{A}^1, \mathcal{X})$  est bijective, et qu'un morphisme  $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$  de  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  est une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence faible si pour tout objet  $\mathbf{A}^1$ -local  $\mathcal{X}$ , l'application correspondante

$$Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y}', \mathcal{X}) \xrightarrow{f^*} Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$$

est bijective. Disons qu'un morphisme  $\varphi$  de  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  est une *cofibration* (resp. une *équivalence faible*) si  $\varphi$  est un monomorphisme (resp. une  $\mathbf{A}^1$ -équivalence faible). D'après [26], ceci munit  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  d'une structure de catégorie de modèles fermée au sens de Quillen [29]. La catégorie homotopique correspondante  $\mathcal{H}(F)$  est appelée *catégorie homotopique des  $F$ -schémas*.

On a une version pointée  $\mathcal{H}_\bullet(F)$  de  $\mathcal{H}(F)$ , en partant de la catégorie  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  des faisceaux d'ensembles simpliciaux pointés, et un foncteur

$$\mathcal{H}(F) \rightarrow \mathcal{H}_\bullet(F)$$

induit par le foncteur  $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_+ = \mathcal{X} \amalg pt$ . Notons que le faisceau simplicial pointé constant réduit à un point est représenté par  $\text{Spec } F$ . Si  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  sont deux faisceaux simpliciaux pointés, on définit leur *smash produit*  $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$  comme étant le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \mathcal{X}(U) \wedge \mathcal{Y}(U)$ . Ceci munit  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  et  $\mathcal{H}_\bullet$  d'une structure monoïdale symétrique, l'objet unité étant  $S^0$  (faisceau constant, que l'on peut décrire comme  $(\text{Spec } F)_+$ ).

### 5.3. Deux cercles

On définit deux "cercles"  $S_s^1, S_t^1 \in \Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$  :

- $S_s^1$  est le cercle simplicial, vu comme faisceau constant.
- $S_t^1$  est le  $F$ -schéma  $\mathbf{A}_F^1 - \{0\}$  pointé par 1, vu comme faisceau représentable (constant comme objet simplicial).

On note également  $T$  le faisceau simplicial pointé donné par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_F^1 - \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{A}_F^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } F & \longrightarrow & T. \end{array}$$

Dans  $\mathcal{H}_\bullet(F)$ , on a des isomorphismes  $S_s^1 \wedge S_t^1 \approx T \approx (\mathbf{P}_F^1, 0)$ .

Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de  $\Delta^{\text{op}}Shv_{Nis}(Sm/F)$ . Le *cône* de  $f$ ,  $\text{cône}(f)$ , est le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \text{cône}(f(U))$ . On a un morphisme canonique  $\mathcal{Y} \rightarrow$

cône( $f$ ) qui s'étend comme d'habitude en une suite

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \rightarrow \text{cône}(f) \rightarrow S_s^1 \wedge \mathcal{X}$$

appelée *suite cofibrante* associée à  $f$ .

#### 5.4. $T$ -spectres

**DÉFINITION 5.2.** — Un  $T$ -spectre sur  $F$  est une suite  $\mathbf{E} = (E_i, e_i : T \wedge E_i \rightarrow E_{i+1})_{i \in \mathbf{Z}}$ , où  $E_i \in \Delta_{\bullet}^{\text{op}} \text{Shv}_{Nis}(Sm/F)$  pour tout  $i$ . Soient  $\mathbf{E} = (E_i, e_i)$ ,  $\mathbf{F} = (F_i, f_i)$  deux  $T$ -spectres. Un morphisme  $\varphi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  est la donnée, pour tout  $i$ , d'un morphisme  $\varphi_i : E_i \rightarrow F_i$ , avec  $\varphi_{i+1} \circ e_i = f_i \circ \varphi_i$ .

On note  $\text{Spect}_T(F)$  la catégorie des  $T$ -spectres sur  $F$ . En utilisant la structure de modèles fermée sur  $\Delta_{\bullet}^{\text{op}} \text{Shv}_{Nis}(Sm/F)$ , on définit comme dans [4] des structures de modèles fermées stable et stricte. On note  $\mathcal{SH}(F)$  la catégorie homotopique associée à la structure stable : c'est la *catégorie homotopique stable des  $F$ -schémas*.

Soit  $\mathcal{X} \in \Delta_{\bullet}^{\text{op}} \text{Shv}_{Nis}(Sm/F)$ . On a le spectre des suspensions de  $\mathcal{X}$  :

$$\Sigma_T^{\infty} \mathcal{X} = (T^{\wedge i} \wedge \mathcal{X}, Id).$$

Par abus de notation, on notera parfois  $\mathcal{X}$  au lieu de  $\Sigma_T^{\infty} \mathcal{X}$ . Cette construction induit un foncteur  $\mathcal{H}_{\bullet}(F) \rightarrow \mathcal{SH}(F)$ .

**THÉORÈME 5.3** ([48, th. 3.10]). — *Il existe une structure de catégorie tensorielle triangulée sur  $\mathcal{HS}(F)$  ayant les propriétés suivantes :*

- (i) *Le foncteur de décalage  $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}[1]$  est donné par  $\mathbf{E}[1] = S_s^1 \wedge \mathbf{E}$ .*
- (ii) *Le foncteur  $\Sigma_T^{\infty}$  transforme suites cofibrantes en triangles distingués.*
- (iii) *Le foncteur  $\Sigma_T^{\infty}$  est un foncteur monoïdal symétrique de  $(\mathcal{H}_{\bullet}(F), \wedge)$  vers  $(\mathcal{SH}(F), \wedge)$ .*
- (iv) *L'objet  $T$  de  $\mathcal{SH}(F)$  est inversible.*

#### 5.5. Théories cohomologiques et homologiques

Fixons des objets  $S_s^{-1}, S_t^{-1}$  de  $\text{Spect}_T(F)$  et des isomorphismes

$$\begin{aligned} S_s^1 \wedge S_s^{-1} &\cong S^0 \\ S_t^1 \wedge S_t^{-1} &\cong S^0 \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{SH}(F)$ . Notons, pour  $n \in \mathbf{Z}$ ,

$$S_s^n = \begin{cases} (S_s^1)^{\wedge n} & \text{pour } n \geq 0 \\ (S_s^{-1})^{\wedge (-n)} & \text{pour } n \leq 0 \end{cases} \quad S_t^n = \begin{cases} (S_t^1)^{\wedge n} & \text{pour } n \geq 0 \\ (S_t^{-1})^{\wedge (-n)} & \text{pour } n \leq 0 \end{cases}$$

et, pour  $p, q \in \mathbf{Z}$

$$S^{q,p} = S_t^p \wedge S_s^{q-p}.$$

Pour  $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(F)$ , on note  $\mathbf{E}(p)[q] = S^{q,p} \wedge \mathbf{E}$ .

**DÉFINITION 5.4.** — Soit  $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(F)$ . La *théorie cohomologique associée à  $\mathbf{E}$*  est le foncteur

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{p,q} : \mathcal{SH}(F) &\rightarrow (Ab)^{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} \\ X &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{SH}(F)}(X, \mathbf{E}(q)[p]). \end{aligned}$$

La *théorie homologique associée à  $\mathbf{E}$*  est le foncteur

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{p,q}(X) : \mathcal{SH}(F) &\rightarrow (Ab)^{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} \\ X &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{SH}(F)}(S^{q,p}, \mathbf{E} \wedge X). \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(F)$ , on note

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{p,q}(\mathcal{X}) &= \tilde{\mathbf{E}}^{p,q}(\Sigma_T^\infty(\mathcal{X}_+)) \\ \mathbf{E}_{p,q}(\mathcal{X}) &= \tilde{\mathbf{E}}_{p,q}(\Sigma_T^\infty(\mathcal{X}_+)). \end{aligned}$$

## 5.6. Spectres d'Eilenberg-Mac Lane et cohomologie motivique

Pour toute  $F$ -variété lisse  $X$ , notons  $L(X)$  le faisceau pour la topologie de Nisnevich qui associe à un schéma lisse connexe  $U$  le groupe abélien libre engendré par les fermés irréductibles de  $U \times_F X$  qui sont finis et surjectifs sur  $U$  (c'est le faisceau  $c_{\text{equi}}(X, 0)$  de l'exposé de Friedlander, §2). Soit  $A$  un groupe abélien. Pour  $n \geq 0$ , on note

$$K(A(n), 2n)$$

le faisceau de groupes abéliens quotient  $L(\mathbf{A}^n)/L(\mathbf{A}^n - \{0\}) \otimes A$ , considéré comme faisceau d'ensembles pointés. On a des morphismes de faisceaux d'ensembles pointés

$$T \wedge K(A(n), 2n) \xrightarrow{e_n} K(A(n+1), 2n+2).$$

Pour  $n < 0$ , on pose  $K(A(n), 2n) = \{*\}$ .

**DÉFINITION 5.5.** — Le *spectre d'Eilenberg-Mac Lane  $\mathbf{H}_A$*  est le  $T$ -spectre  $(K(A(n), 2n), e_n)$ .

Pour  $X \in \mathcal{SH}(F)$  (resp.  $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(F)$ ), on note  $\tilde{H}^{p,q}(X, A) = \tilde{\mathbf{H}}_A^{p,q}(X)$  (resp.  $H^{p,q}(\mathcal{X}, A) = \mathbf{H}_A^{p,q}(\mathcal{X})$ ) (cf. définition 5.4) : c'est la *cohomologie motivique de  $X$*  (resp. de  $\mathcal{X}$ ). Cette terminologie est justifiée par le

**THÉORÈME 5.6** ([26]). — Soit  $F$  un corps de caractéristique 0, et soit  $\mathcal{X}$  un  $F$ -schéma simplicial lisse. Alors, pour tout groupe abélien  $A$ , on a

$$H^{p,q}(\mathcal{X}, A) = H_B^p(\mathcal{X}, A(q)).$$

*Indications sur la démonstration* (d’après F. Morel). Il résulte de la quasi-invertibilité de  $\mathbf{Z}(1)$  dans la catégorie triangulée  $DM^{eff}(F)$  des  $F$ -motifs effectifs ([45, th. 4.3.1], voir aussi l’exposé de Friedlander, th. 5.7) que le spectre  $\mathbf{H}_A$  est un  $\Omega_T$ -spectre. Il suffit donc de montrer que, pour tous  $m, n, i \geq 0$ , l’ensemble des morphismes dans  $\mathcal{H}_\bullet(F)$

$$[\Sigma_s^m \Sigma_t^n(\mathcal{X}_+), K(A(i), 2i)]$$

s’identifie naturellement au groupe  $H_B^{2i-m-n, i-n}(\mathcal{X}, A)$ . Cela résulte d’une adjonction essentiellement formelle.  $\square$

*Remarque 5.7.* — On peut montrer que le foncteur  $A \mapsto \mathbf{H}_A$  se “prolonge” en un foncteur

$$\mathbf{H} : DM(F) \rightarrow \mathcal{SH}(F)$$

où  $DM(F)$  est la catégorie triangulée des  $F$ -motifs, convenablement complétée, où l’on a inversé le motif de Tate. Ce foncteur a pour adjoint à gauche un foncteur

$$M : \mathcal{SH}(F) \rightarrow DM(F)$$

qui “prolonge” le foncteur “motif”  $Sm/F \xrightarrow{M} DM(F)$  (cf. l’exposé de Friedlander, définition 3.1). Ce résultat généralise le théorème 5.6.

## 6. OPÉRATIONS DE STEENROD EN COHOMOLOGIE MOTIVIQUE

**DÉFINITION 6.1.** — *L’algèbre de Steenrod motivique modulo  $l$  sur  $F$  est l’algèbre  $\mathcal{A}^{*,*}(F, \mathbf{Z}/l)$  des endomorphismes du  $T$ -spectre  $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}$  dans  $\mathcal{SH}(F)$ .*

Par définition, on a

$$\mathcal{A}^{p,q}(F, \mathbf{Z}/l) = \text{Hom}_{\mathcal{SH}(F)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}(q)[p]) = \tilde{H}^{p,q}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l).$$

**THÉORÈME 6.2** ([48, th. 3.14], [47]). — *On a*

- (i)  $\mathcal{A}^{p,q}(F, \mathbf{Z}/l) = 0$  pour  $q < 0$
- (ii)  $\mathcal{A}^{0,0}(F, \mathbf{Z}/l) = \mathbf{Z}/l$ , engendré par l’identité.

**THÉORÈME 6.3** ([48, th. 3.15], [47]). — *L’homomorphisme de Künneth*

$$\tilde{H}^{*,*}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l) \otimes_{\tilde{H}^{*,*}(S^0, \mathbf{Z}/l)} \tilde{H}^{*,*}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l) \rightarrow \tilde{H}^{*,*}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l)$$

*est un isomorphisme.*

On va avoir besoin d’opérations  $Q_i \in \mathcal{A}^{2i-1, i^2-1}(F, \mathbf{Z}/l)$ , analogues aux opérations de Milnor. Pour les définir, on procède comme en topologie algébrique : on définit des opérations  $P^i \in \mathcal{A}^{2i(l-1), i(l-1)}(F, \mathbf{Z}/l)$  analogues aux puissances de Steenrod, et on définit inductivement

$$\begin{aligned} Q_0 &= \beta \\ Q_{i+1} &= [Q_i, P^{l^i}] \end{aligned}$$

où  $\beta$  est le Bockstein modulo  $p$ . Pour cet exposé, les propriétés principales des  $Q_i$  sont :

THÉOREME 6.4 ([48, th. 3.17], [47]). — (i)  $Q_i^2 = 0$ .

(ii) Pour tout  $i > 0$ , il existe des opérations  $q_i$  telles que  $Q_i = [\beta, q_i]$ .

COROLLAIRE 6.5. — Soient  $X \in \mathcal{SH}(F)$  et  $p, q \in \mathbf{Z}$ . Pour tout  $x \in \tilde{H}^{p,q}(X, \mathbf{Z}_{(l)})$  et tout  $i > 0$ , posons

$$\tilde{Q}_i(x) = \tilde{\beta}q_i(\bar{x})$$

où  $q_i$  est comme dans le théorème 6.4 (ii),  $\tilde{\beta}$  est le Bockstein entier et  $\bar{\phantom{x}}$  désigne la réduction modulo  $l$ . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^{p,q}(X, \mathbf{Z}_{(l)}) & \xrightarrow{\tilde{Q}_i} & \tilde{H}^{p+2i-1, q+i-1}(X, \mathbf{Z}_{(l)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^{p,q}(X, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{Q_i} & \tilde{H}^{p+2i-1, q+i-1}(X, \mathbf{Z}/l) \end{array}$$

est commutatif. □

Vu la propriété (i) des  $Q_i$ , on a pour tout objet  $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}(F)$  des complexes

$$(9) \quad \dots \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p-2(i-1), q-i+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p+2(i-1), q+i-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i} \dots$$

THÉOREME 6.6. — Soient  $F$  et  $X$  comme dans l'énoncé du théorème 4.15. Alors les complexes (9) sont acycliques pour  $i \leq n-1$  et  $\mathcal{X} = \text{fibre}(\Sigma_T^\infty(\check{C}(X)_+) \rightarrow S^0)$ .

Le théorème 6.6 sera démontré dans la section 7.3. Déduisons-en tout de suite le théorème 4.15 avec  $\alpha = \tilde{Q}_{n-2} \dots \tilde{Q}_1$ , où les  $\tilde{Q}_i$  sont les opérations cohomologiques du corollaire 6.5. D'après le théorème 5.6, l'algèbre de Steenrod motivique opère sur la cohomologie motivique de  $\check{C}(X)$ , de telle façon que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n-2} \dots \tilde{Q}_1} & H_B^{2\frac{n-1}{l-1}+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(\frac{n-1}{l-1} + 1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^{n+1,n}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(l)}) & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n-2} \dots \tilde{Q}_1} & H^{2\frac{n-1}{l-1}+1, \frac{n-1}{l-1}+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(l)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^{n+1,n}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{Q_{n-2} \dots Q_1} & H^{2\frac{n-1}{l-1}+1, \frac{n-1}{l-1}+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \end{array}$$

La propriété (C) des  $\mathbf{Z}(i)$  implique que les flèches verticales supérieures sont des isomorphismes. Par ailleurs, le lemme 4.5 a) et un argument de transfert impliquent que  $\tilde{H}^{*,*}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(l)})$  est d'exposant  $l$ ; les flèches verticales inférieures sont donc injectives. Par conséquent, pour démontrer le théorème 4.15, il suffit de prouver que la flèche horizontale inférieure est injective.

Le théorème 6.6 implique que, pour  $1 \leq i \leq n - 2$ , la suite

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{n+1-2l\frac{l^i-2^{i-1}+1}{l-1}-i+2, n-\frac{l^i-2^{i-1}+1}{l-1}-i+2}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) &\xrightarrow{Q_i} \\ \tilde{H}^{n+1+2l\frac{l^{i-1}-1}{l-1}-i+1, n+l\frac{l^{i-1}-1}{l-1}-i+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) &\xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{n+1+2l\frac{l^{i-1}-1}{l-1}-i, n+l\frac{l^{i-1}-1}{l-1}-i}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \end{aligned}$$

est exacte. Mais  $\tilde{H}^{n+1-2l\frac{l^i-2^{i-1}+1}{l-1}-i+2, n-\frac{l^i-2^{i-1}+1}{l-1}-i+2}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) = 0$  : si  $n - \frac{l^i-2^{i-1}+1}{l-1} - i + 2 < 0$ , c'est trivial, et sinon cela résulte du théorème 2.3 (ii) et du lemme 4.5 b).  $\square$

## 7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.6

### 7.1. Réalisation topologique

Soit  $F$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$ . Soit  $\Delta^{\text{op}}\text{Ens}$  la catégorie des ensembles simpliciaux. On a un foncteur

$$\begin{aligned} Sm/F &\rightarrow \Delta^{\text{op}}\text{Ens} \\ X &\mapsto \text{Sing}(X(\mathbf{C})), \end{aligned}$$

où  $\text{Sing}(M)$  désigne l'ensemble simplicial singulier associé à une variété complexe. D'après [26], on peut "prolonger" ce foncteur en un foncteur *réalisation topologique*

$$t_{\mathbf{C}} : \Delta^{\text{op}}\text{Shv}_{\text{Nis}}(Sm/F) \rightarrow \Delta^{\text{op}}\text{Ens}$$

tel que, pour tout  $X \in Sm/F$ ,  $t_{\mathbf{C}}(X)$  soit naturellement isomorphe à  $\text{Sing}(X(\mathbf{C}))$ . Ce foncteur transforme les  $\mathbf{A}_{\mathbf{F}}^1$ -équivalences faibles en équivalences faibles, donc induit un foncteur sur les catégories homotopiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(F) &\xrightarrow{t_{\mathbf{C}}} \mathcal{H} \\ \mathcal{SH}(F) &\xrightarrow{t_{\mathbf{C}}} \mathcal{SH}. \end{aligned}$$

On a

$$t_{\mathbf{C}}(S_s^1) \cong t_{\mathbf{C}}(S_t^1) \cong S^1$$

donc

$$t_{\mathbf{C}}(T) \cong S^2.$$

De plus, le théorème de Dold-Thom implique :

$$t_{\mathbf{C}}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}) \cong \mathbf{H}_{\mathbf{Z}}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{C}}(P^i) &= P^i \\ t_{\mathbf{C}}(Q_i) &= Q_i. \end{aligned}$$

## 7.2. Espaces de Thom et cobordismes algébriques

Soient  $X \in Sm/F$ ,  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel sur  $X$  et  $s$  la section nulle de  $\mathcal{E}$ . On définit l'espace de Thom de  $\mathcal{E}$  comme étant le faisceau pointé  $Th(\mathcal{E})$  donné par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} - s(X) & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } F & \longrightarrow & Th(\mathcal{E}) \end{array}$$

généralisant le carré qui définit  $T$  [26]. Si  $\mathcal{E} = 0$ , on a évidemment :

$$Th(\mathcal{E}) = X_+.$$

Si  $\mathcal{F}$  est un fibré sur une autre variété  $Y$  et  $\mathcal{E} \boxplus \mathcal{F}$  est leur somme externe sur  $X \times_F Y$ , on a un isomorphisme canonique de faisceaux pointés [26]

$$Th(\mathcal{E} \boxplus \mathcal{F}) = Th(\mathcal{E}) \wedge Th(\mathcal{F})$$

en particulier, pour  $Y = \text{Spec } F$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{O}^n$  :

$$Th(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}^n) = T^{\wedge n} \wedge Th(\mathcal{E}).$$

les  $Th(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}^n)$  forment donc un spectre isomorphe au spectre des suspensions de  $Th(\mathcal{E})$ . Dans  $\mathcal{H}_\bullet(F)$ , on a un isomorphisme [26]

$$Th(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O})/\mathbf{P}(\mathcal{E})$$

d'où l'on déduit des isomorphismes, avec  $d = \dim \mathcal{E}$  :

$$(10) \quad \tilde{H}^{p,q}(Th(\mathcal{E}), A) \simeq H_B^{p-2d}(X, A(q-d)), \quad p, q \in \mathbf{Z},$$

pour tout  $A$ , à l'aide du théorème 5.6 et du calcul de la cohomologie motivique d'une fibré projectif [42, prop. 2.5].

**THÉORÈME 7.1** (théorème de pureté homotopique, [26]). — Soit  $i : Z \rightarrow X$  une immersion fermée de  $F$ -variétés lisses. Notons  $U$  l'ouvert complémentaire et  $\nu_i \rightarrow Z$  le fibré normal de  $i$ . Alors on a un isomorphisme canonique dans  $\mathcal{H}_\bullet(F)$  :

$$X/U \approx Th(\nu_i).$$

Nous noterons  $\mathbf{M}(\mathcal{E})$  la désuspension  $T^{-d}\Sigma_T^\infty Th(\mathcal{E})$ , où  $d = \dim \mathcal{E}$  : c'est le spectre de Thom de  $\mathcal{E}$ . En remplaçant au besoin  $X$  par une  $F$ -variété affine par le procédé de Jouanolou [13, lemme 1.5], on peut étendre cette construction en une fonction

$$\mathbf{M} : K_0(X) \rightarrow \mathcal{SH}(F).$$

Le foncteur  $t_{\mathbf{C}}$  envoie  $Th(\mathcal{E})$  (resp.  $\mathbf{M}(\mathcal{E})$ ) sur l'espace (resp. le spectre) de Thom classique  $Th(\mathcal{E}(\mathbf{C}))$  (resp.  $\mathbf{M}(\mathcal{E}(\mathbf{C}))$ ).

Soit  $G(m, n)$  la grassmannienne standard, munie de son fibré canonique  $\mathcal{E}_{m,n}$ . En lui appliquant la construction précédente, on obtient un spectre  $\mathbf{M}(\mathcal{E}_{m,n})$ . La limite inductive de ces spectres est notée  $\mathbf{MGL}$  : c'est le *spectre des ( $F$ -)cobordismes algébriques*. La formule (10) et la propriété (C) des  $\mathbf{Z}(n)$  entraînent :

**THÉORÈME 7.2** ([48, th. 3.21]). — *Pour tout groupe abélien  $A$ , on a  $\tilde{H}^{p,q}(\mathbf{MGL}, A) = 0$  pour  $p > 2q$  et  $\tilde{H}^{0,0}(\mathbf{MGL}, A) = A$ .*

On note  $\tau$  le générateur canonique de  $\tilde{H}^{0,0}(\mathbf{MGL}, \mathbf{Z})$ .

Le foncteur  $t_{\mathbf{C}}$  envoie  $\mathbf{MGL}$  sur le spectre du cobordisme complexe  $\mathbf{MU}$ . En particulier, pour tout  $F$ -schéma simplicial lisse  $\mathcal{X}$ , on a des homomorphismes

$$\mathbf{MGL}_{p,q}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{MU}_p(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$$

naturels en  $\mathcal{X}$ .

**DÉFINITION 7.3.** — Soit  $X \in Sm/F$ . On note  $I_X$  l'image de l'homomorphisme composé

$$\bigoplus_{i \geq 0} \mathbf{MGL}_{2i,i}(X) \rightarrow \bigoplus_{i \geq 0} \mathbf{MGL}_{2i,i}(\mathrm{Spec} F) \rightarrow \mathbf{MU}_*(pt).$$

On vérifie facilement que  $I_X$  est un idéal de  $\mathbf{MU}_*(pt)$ .

### 7.3. Le théorème principal

Nous commençons par énoncer le théorème principal de Voevodsky. Pour cela, nous avons besoin d'une définition :

**DÉFINITION 7.4.** — a) Un  $(v_n, l)$ -élément de  $\mathbf{MU}_*(pt)$  est une classe de bordisme complexe  $v_n$  représentée par une variété compacte  $Y$  telle que

- (1)  $d := \dim Y = l^n - 1$
- (2)  $s_d(Y) \not\equiv 0 \pmod{l^2}$ .

b) Soit  $F$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$ . Une  $F$ -variété  $X$ , propre et lisse, est une  $(v_n, l)$ -variété si  $X(\mathbf{C})$  définit un  $(v_n, l)$ -élément de  $\mathbf{MU}_*(pt)$ .

Dans a), il revient au même de dire que  $v_n$  définit un générateur multiplicatif de  $\pi_*(BP)$  (resp. de  $\pi_*(K(n))$ ), où  $BP$  (resp.  $K(n)$ ) est le *spectre de Broun-Peterson en  $l$*  (resp. la  $n$ -ième  $K$ -théorie de Morava en  $l$ ) [30, ch. 4].

*Exemples 7.5.* —

- (1) L'espace projectif  $\mathbf{P}_F^d$  est une  $(v_n, l)$ -variété si et seulement si  $n = 1$  et  $d = l - 1$  [24, exemple 16-6].
- (2) Une hypersurface projective lisse  $X \subset \mathbf{P}_F^{d+1}$  de degré  $l$  est une  $(v_n, l)$ -variété si et seulement si  $d = l^n - 1$  [24, problem 16-D].

(3) On peut montrer que, pour  $l = 3$ , la variété  $X$  de l'exemple 4.3 (2) (b) est une  $(v_2, 3)$ -variété (Rost).

**THÉORÈME 7.6** ([48, th. 3.25]). — Soit  $F$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$ , et soit  $X \in Sm/F$  telle que  $I_X$  (cf. définition 7.3) contienne un  $(v_n, l)$ -élément. Alors les complexes (9) sont acycliques pour  $i = n$  et  $\mathcal{X} = \text{fibre}(\Sigma_{\mathbb{F}}^\infty(\tilde{C}(X)_+) \rightarrow S^0)$ .

*Démonstration.* Notons  $\Phi_n$  la fibre homotopique de  $Q_n : \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \rightarrow S_s^1 \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}$ . On a donc un triangle distingué

$$T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{u} \Phi_n \xrightarrow{v} \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{Q_n} S_s^1 \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}.$$

D'autre part, notons  $\tilde{\tau}$  le composé

$$\mathbf{MGL} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{\tau \wedge Id} \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{m} \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}$$

où  $\tau$  est défini après l'énoncé du théorème 7.2 et  $m$  est le produit en cohomologie motivique. Du théorème 7.2 et d'une formule donnant  $\Delta(Q_n)$ , où  $\Delta$  est le coproduit de l'algèbre de Steenrod associé à  $m$  via le théorème 6.3, on déduit l'existence d'un morphisme  $\varphi_n$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MGL} \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \\ \downarrow & & \downarrow u \\ \mathbf{MGL} \wedge \Phi_n & \xrightarrow{\varphi_n} & \Phi_n \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \mathbf{MGL} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \end{array}$$

soit commutatif dans  $\mathcal{SH}(F)$ .

Fixons  $\mathcal{Y} \in \mathcal{SH}(F)$ , un morphisme  $\mathcal{Y} \xrightarrow{p} S^0$ , un entier  $d$  et  $\rho \in \mathbf{MGL}_{2d,d}(\mathcal{Y})$ . Pour tout  $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}$ , on a un homomorphisme

$$\pi(\rho) : \tilde{\Phi}^{*,*}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}) \rightarrow \tilde{\Phi}^{*-2d,*-d}(\mathcal{X})$$

qui envoie l'élément de  $\tilde{\Phi}^{*,*}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X})$  donné par le morphisme

$$\alpha : \mathcal{Y} \wedge \mathcal{X} \rightarrow \Phi_n(*)[*]$$

sur l'élément de  $\tilde{\Phi}^{*-2d,*-d}(\mathcal{X})$  donné par la composition

$$T^d \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{\rho \wedge Id} \mathbf{MGL} \wedge \mathcal{Y} \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{Id \wedge \alpha} \mathbf{MGL} \wedge \Phi_n(*)[*] \xrightarrow{\varphi_n(*)[*]} \Phi_n(*)[*]$$

où  $\varphi_n$  est comme dans le diagramme ci-dessus. On a :

**PROPOSITION 7.7** ([48, prop. 3.24]). — *Avec les notations ci-dessus, supposons que  $d = l^n - 1$  et que  $t_{\mathbf{C}}(p, \rho) \in \mathbf{MU}_{2(l^n-1)}(pt)$  soit un  $(v_n, l)$ -élément. Alors il existe  $c \in (\mathbf{Z}/l)^*$  tel que, pour tout  $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}(F)$ , le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Phi}_n^{*,*}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{\Phi}_n^{*,*}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}) \\ v \downarrow & & \pi(\rho) \downarrow \\ \tilde{H}^{*,*}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{cu} & \tilde{\Phi}^{*-2(l^n-1), *-(l^n-1)}(\mathcal{X}) \end{array}$$

*soit commutatif.*

*Démonstration.* En introduisant les “spectres fonctionnels”  $RHom(\mathcal{Y}, \Phi_n)$  et  $RHom(T^{l^n-1}, \Phi_n)$ , l’énoncé peut être réinterprété de la manière suivante : le diagramme

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} \Phi_n & \xrightarrow{p^*} & RHom(\mathcal{Y}, \Phi_n) \\ v \downarrow & & \pi(\rho) \downarrow \\ \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} & \xrightarrow{cu} & RHom(T^{l^n-1}, \Phi_n) \end{array}$$

est commutatif à homotopie près. Les deux composés de ce diagramme définissent des éléments de

$$Hom_{\mathcal{SH}(F)}(\Phi_n, RHom(T^{l^n-1}, \Phi_n)) = Hom_{\mathcal{SH}(F)}(T^{l^n-1} \wedge \Phi_n, \Phi_n).$$

D’après le théorème 6.2 et la définition de  $\Phi_n$ , ce groupe est cyclique d’ordre  $l$  et s’injecte dans le groupe correspondant  $Hom_{\mathcal{SH}}(S^{2(l^n-1)} \wedge t_{\mathbf{C}}(\Phi_n), t_{\mathbf{C}}(\Phi_n))$ . Il suffit donc de démontrer la commutativité du diagramme (11) après lui avoir appliqué le foncteur  $t_{\mathbf{C}}$ , et ceci résulte d’un calcul facile (cf. [48, lemme 3.6]).  $\square$

*Fin de la démonstration du théorème 7.6.* On applique la proposition 7.7 à  $\mathcal{X}$ , avec  $\mathcal{Y} = \Sigma_T^\infty(X_+)$ ,  $p$  la projection naturelle et  $\rho$  l’antécédent d’un  $(v_n, l)$ -élément de  $I_X$ . On a  $\Sigma_T^\infty(X_+) \wedge \mathcal{X} = 0$  : cela résulte de l’exemple 5.1. La commutativité du diagramme implique donc que le composé

$$\tilde{\Phi}^{p,q}(\mathcal{X}) \xrightarrow{v} \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{cu} \tilde{\Phi}^{*-2(l^n-1), *-(l^n-1)}(\mathcal{X})$$

est identiquement nul pour tout  $(p, q)$ , ce qui est équivalent à l’énoncé du théorème 7.6.  $\square$

*Démonstration du théorème 6.6.* Il faut voir que  $I_X$  contient un  $(v_i, l)$  élément pour tout  $i \leq n - 2$  dès que  $X$  satisfait les hypothèses du théorème 4.15. En utilisant les opérations de Landweber-Novikov sur  $\mathbf{MU}_*$ , on peut montrer que si  $I_X$  contient un  $(v_i, l)$ -élément, il contient un  $(v_j, l)$ -élément pour tout  $j \leq i$ . Comme  $X$  est par hypothèse une  $(v_{n-1}, l)$ -variété, il suffit de voir que la classe de bordisme de  $X(\mathbf{C})$  est dans  $I_X$ . Cela résulte du théorème plus précis suivant :

**THÉORÈME 7.8** ([48, th. 3.22]). — *Soit  $X$  une variété projective et lisse de dimension  $d$  sur un sous-corps  $F$  de  $\mathbf{C}$ . Il existe un élément  $\varphi_X \in \mathbf{MGL}_{2d,d}(X)$  tel que l'image  $t_{\mathbf{C}}(\varphi_X)$  de  $\varphi_X$  dans  $\mathbf{MU}_{2d}(X(\mathbf{C}))$  soit la classe fondamentale de  $X(\mathbf{C})$  en  $\mathbf{MU}$ -homologie.*

*Remarque 7.9.* — Dans le cas où  $l = 2$ , on peut éviter le recours aux opérations de Landweber-Novikov mentionnées juste avant l'énoncé : en effet, le théorème 7.8 implique que l'idéal  $I_{Q_{\underline{a}}}$  contient les classes de toutes les variétés  $Y$  telles que  $\text{Hom}_F(Y, Q_{\underline{a}}) \neq \emptyset$ . Or l'exemple 7.5 montre qu'une section plane de dimension  $2^i - 1$  de  $Q_{\underline{a}}$  est une  $(\nu_i, l)$ -variété.

*Indications sur la démonstration* (F. Morel) : il faut construire un morphisme

$$T^d \rightarrow \mathbf{MGL} \wedge X_+$$

associé à  $X$ . On procède comme en topologie algébrique, avec quelques complications dues à la géométrie algébrique. Soit  $\nu_X$  le fibré normal de  $X$ , vu comme l'opposé de son fibré tangent dans  $K_0(X)$ . Rappelons qu'il lui est associé canoniquement une classe de spectre  $\mathbf{M}(\nu_X) \in \mathcal{SH}(F)$ . Il suffit de construire des morphismes dans  $\mathcal{SH}(F)$

$$\begin{aligned} T^d &\rightarrow \mathbf{M}(\nu_X) \\ \mathbf{M}(\nu_X) &\rightarrow \mathbf{M}(\nu_X) \wedge X_+ \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{M}(\nu_X) \wedge X_+ \rightarrow \mathbf{MGL} \wedge X_+.$$

Le dernier morphisme provient d'un morphisme  $\mathbf{M}(\nu_X) \rightarrow \mathbf{MGL}$ , lui-même obtenu à partir d'un morphisme  $X \rightarrow Gr$  classifiant le fibré (virtuel)  $\nu_X$ , où  $Gr$  est la grassmannienne infinie [26]. Le deuxième est simplement le morphisme de spectres de Thom associé au pull-back par la diagonale du fibré  $\nu_X \boxplus 0$  sur  $X \times_F X$ .

Enfin, pour définir le premier morphisme, on se ramène d'abord au cas où  $X = \mathbf{P}_F^n$ . On a le lemme suivant, qui généralise le théorème 7.1 (et s'en déduit) :

**LEMME 7.10.** — *Soient  $i : Z \rightarrow X$  une immersion fermée de  $F$ -variétés lisses,  $U$  l'ouvert complémentaire,  $\nu_i$  le fibré normal de  $i$  et  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel sur  $X$ . Alors la cofibre homotopique du morphisme évident*

$$\text{Th}(\mathcal{E}|_U) \rightarrow \text{Th}(\mathcal{E})$$

*s'identifie canoniquement dans  $\mathcal{H}_*(F)$  à  $\text{Th}(i^*\mathcal{E} \oplus \nu_i)$ .*

En appliquant ce lemme à l'immersion fermée  $\mathbf{P}_F^n \xrightarrow{\Delta} \mathbf{P}_F^n \times_F \mathbf{P}_F^n$  et à  $\mathcal{E} = p_1^* \nu_{\mathbf{P}_F^n}$ , où  $p_1$  est la première projection, on obtient un morphisme  $\text{Th}(p_1^* \nu_{\mathbf{P}_F^n}) \rightarrow \text{Th}(\nu_{\mathbf{P}_F^n} \oplus \nu_{\Delta})$ , qui se traduit après projection de  $\mathbf{P}_F^n$  sur le point en un morphisme dans  $\mathcal{SH}(F)$

$$D : \mathbf{M}(\nu_{\mathbf{P}_F^n}) \wedge (\mathbf{P}_F^n)_+ \rightarrow T^n.$$

On montre alors par dévissage que l'adjoint de  $D$

$$M(\nu_{\mathbf{P}_F^n}) \rightarrow RHom((\mathbf{P}_F^n)_+, T^n)$$

est un isomorphisme, en filtrant  $\mathbf{P}_F^n$  par les  $\mathbf{P}_F^i$ ,  $i \leq n$ . Le morphisme cherché correspond maintenant au morphisme  $T^n \rightarrow RHom((\mathbf{P}_F^n)_+, T^n)$  induit par la projection de  $(\mathbf{P}_F^n)_+$  sur  $S^0$ . Le lecteur au courant aura reconnu au passage la  $S$ -dualité ...  $\square$

## 8. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.16

Dans cette section, on suppose  $l = 2$ .

### 8.1. Le motif de Rost

Soient  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (F^*)^n$ ,  $\varphi = \ll a_1, \dots, a_n \gg$  la  $n$ -forme de Pfister associée, et soient  $X_{\underline{a}}$  (resp.  $Q_{\underline{a}}$ ) la quadrique projective d'équation  $\varphi = 0$  (resp. d'équation  $\ll a_1, \dots, a_{n-1} \gg \perp \langle -a_n \rangle = 0$ ). On a  $\dim X_{\underline{a}} = 2d$  (resp.  $\dim Q_{\underline{a}} = d$ ), avec

$$d = 2^{n-1} - 1.$$

L'énoncé qui suit est une réinterprétation par Voevodsky d'un théorème de Rost, dans le langage de la catégorie  $DM^{eff}(F)$  :

**THÉORÈME 8.1** ([48, th. 4.5]). — *Il existe un facteur direct  $M_{\underline{a}}$  de  $M(Q_{\underline{a}})$ , muni de deux morphismes*

$$\begin{aligned} \psi^* : \mathbf{Z}(d)[2d] &\rightarrow M_{\underline{a}} \\ \psi_* : M_{\underline{a}} &\rightarrow \mathbf{Z} \end{aligned}$$

tel que :

(i) *Les composés*

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(d)[2d] &\xrightarrow{\psi^*} M_{\underline{a}} \rightarrow M(Q_{\underline{a}}) \\ M(Q_{\underline{a}}) &\rightarrow M_{\underline{a}} \xrightarrow{\psi_*} \mathbf{Z} \end{aligned}$$

*sont respectivement la classe fondamentale et le morphisme canonique  $M(Q_{\underline{a}}) \rightarrow M(\text{Spec } F) = \mathbf{Z}$ .*

(ii) *Pour toute extension  $K/F$  telle que  $Q_{\underline{a}}(K) \neq \emptyset$ , la suite*

$$\mathbf{Z}(d)[2d] \xrightarrow{\psi^*} M_{\underline{a}} \otimes_F K \xrightarrow{\psi_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}(d)[2d+1]$$

*est un triangle distingué scindé dans  $DM^{eff}(F)$ .*

Dans l'énoncé original de Rost [35, th. 3], ces propriétés sont énoncées de la façon suivante : a) le morphisme canonique  $\mathbf{Z} \rightarrow CH^0(M_{\underline{a}})$  est un isomorphisme; b) le degré induit une injection  $CH^d(M_{\underline{a}}) \rightarrow \mathbf{Z}$ , d'image  $2\mathbf{Z}$  (resp.  $\mathbf{Z}$ ) si  $Q_{\underline{a}}$  n'a pas de point rationnel (resp. a un point rationnel); c) si  $Q_{\underline{a}}$  a un point rationnel,  $M_{\underline{a}}$  se décompose canoniquement en  $L^0 \oplus L^d$  (en tant que motif de Chow), où  $L$  est le motif de Lefschetz.

Rost construit  $M_{\underline{a}}$  par récurrence sur  $n$ . Sa démonstration repose sur les techniques de [36] : il est impossible de l'exposer ici en détail. Nous nous bornerons à en donner le principe.

Définir  $M_{\underline{a}}$  revient à construire un projecteur dans  $End(M(Q_{\underline{a}}))$ . Supposons construit le motif  $M'$  correspondant au symbole  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  et notons

$$\tilde{M} = \bigoplus_{i=1}^{d'} M' \otimes L^i,$$

où  $d' = 2^{n-2} - 1$ . Rost construit des morphismes

$$\tilde{M} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} M(Q_{\underline{a}})$$

tels que  $g \circ f$  soit inversible dans  $End(\tilde{M})$ . Le point clé de cette construction est :

LEMME 8.2 (Rost). — *Il existe  $\theta \in CH_{2d'}(M(Q_{\underline{a}}) \otimes M')$  tel que*

$$\theta \otimes_F F_s \equiv h \times P + u \times (M \otimes_F F_s)$$

où  $P$  est un point fermé de  $Q_{\underline{a}} \times_F F_s$ ,  $h$  est une section hyperplane de  $Q_{\underline{a}}$  et  $u = \frac{1}{2}h^{d'+1}$ .

Rost pose alors

$$g_i = h^{i-1}\theta \in CH_{2d'+1-i}(M(Q_{\underline{a}}) \otimes M') = Hom(M' \otimes L^i, M(Q_{\underline{a}}))$$

$$f_i = \theta \otimes L^i \in CH_{2d'+1-i}(M' \otimes M(Q_{\underline{a}})) = Hom(M(Q_{\underline{a}}), M' \otimes L^i),$$

et enfin  $f = (f_i), g = (g_i)$ . □

Du théorème 8.1, Voevodsky déduit, de manière essentiellement formelle :

THÉORÈME 8.3 ([48, th. 4.4]). — *Avec les notations ci-dessus, on a un triangle distingué dans  $DM^{eff}(F)$*

$$M(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(d)[2d] \rightarrow M_{\underline{a}} \rightarrow M(\check{C}(Q_{\underline{a}})) \xrightarrow{\gamma} M(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(d)[2d+1].$$

Remarque 8.4. — On trouvera dans la section 9.1 une description du morphisme  $\gamma$ .

En prenant la cohomologie motivique de ce triangle, on obtient une suite exacte

$$H_B^0(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(1)) \rightarrow H_B^{2d+1}(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(d+1)) \rightarrow H_B^{2d+1}(M_{\underline{a}}, \mathbf{Z}(d+1)) \xrightarrow{N} H_B^1(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(1)).$$

Le premier groupe à partir de la gauche est nul, le quatrième s'identifie canoniquement à  $F^*$  et le troisième est facteur direct de  $H_B^{2d+1}(Q_{\underline{a}}, \mathbf{Z}(d+1))$ . Ce dernier groupe s'identifie, par la conjecture de Gersten pour la cohomologie motivique et les propriétés (C) et (G) de  $\mathbf{Z}(d+1)$ , au conoyau  $A_0(Q_{\underline{a}}, K_1)$  de l'homomorphisme

$$\coprod_{x \in (Q_{\underline{a}})_{(1)}} K_2^M(F(x)) \xrightarrow{\partial} \coprod_{x \in (Q_{\underline{a}})_{(0)}} K_1(F(x))$$

où  $(Q_{\underline{a}})_{(p)}$  désigne l'ensemble des points de  $Q_{\underline{a}}$  de dimension  $p$  et  $\partial$  est une collection d'homomorphismes résidus [15]. Pour  $x \in (Q_{\underline{a}})_{(0)}$ , l'extension  $F(x)/F$  est finie; la norme induit un homomorphisme

$$(12) \quad A_0(X, K_1) \xrightarrow{N} F^*$$

(cela résulte de la "réciprocité de Weil"), compatible avec celui de la suite exacte ci-dessus. Pour démontrer le théorème 4.16, on est donc ramené à démontrer :

**THÉORÈME 8.5** ((Rost) [34]). — *L'homomorphisme (12) est injectif.*

Pour  $n = 2$ , ce résultat est dû à Suslin [41]; pour  $n = 3$ , il avait été obtenu, antérieurement à [34], indépendamment par Rost [33] et Merkurjev-Suslin [21, prop. 2.2]. Sa démonstration est esquissée dans la section suivante.

### 8.2. Zéro-cycles à coefficients dans les unités

*Le cas  $n = 2$  :*  $Q_{\underline{a}}$  est une conique. Comme indiqué ci-dessus, le théorème 8.5 est alors dû à Suslin : il utilise la  $K$ -théorie de Quillen. Une démonstration élémentaire, due à Merkurjev, n'utilise que le théorème de Riemann-Roch sur  $Q_{\underline{a}}$  (une courbe de genre 0!) [49, th. 2.5].

*Le cas  $n > 2$ .* La stratégie est de se ramener au cas  $n = 2$ . Pour toute  $F$ -variété projective et lisse  $X$ , notons  $A_0(X, K_1)$  le conoyau de l'application analogue à (12). On montre que  $A_0(X, K_1)$  est un invariant birationnel stable de  $X$  (stable signifie que  $A_0(X \times \mathbf{P}_F^1, K_1) \rightarrow A_0(X, K_1)$  est un isomorphisme). On peut donc remplacer  $Q_{\underline{a}}$  par  $X_{\underline{a}}$  dans la démonstration du théorème 8.1. De plus, par un argument de transfert, on peut supposer que  $F$  n'a pas d'extensions de degré impair.

On commence par montrer que  $\text{Im}(N) \subset D(\varphi)$ , où  $D(\varphi)$  est l'ensemble des valeurs non nulles de  $\varphi$  : cela résulte de la multiplicativité des formes de Pfister [16, ex. 10.2.4] et du principe de norme de Knebusch (*ibid.*, th. 7.5.1). On construit alors une application

$$\sigma : D(\varphi) \rightarrow A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$$

qui est une section surjective de  $N$ , ce qui termine la démonstration (et décrit du même coup l'image de  $N$ ).

Pour construire  $\sigma$ , on note  $V$  l'espace sous-jacent à  $\varphi$ , on choisit  $v_0 \in V$  tel que  $\varphi(v_0) = 1$  et on écrit

$$V = Fv_0 \oplus V'$$

où  $V'$  est le supplémentaire orthogonal de  $v_0$ . Soit  $b \in D(\varphi)$ . Ecrivons  $b = \varphi(xv_0 + yv')$  avec  $x, y \in F$  et  $v' \in V' - \{0\}$ . On a donc

$$b = x^2 - ay^2$$

avec

$$a = -\varphi(v').$$

Ainsi

$$b \in N_{E/F}(E^*)$$

où  $E = F(\sqrt{a})$ .

Comme  $\langle 1, -a \rangle$  est une sous-forme de  $\varphi$ , on a  $\text{Spec } E \in (X_{\underline{a}})_{(0)}$ . On peut maintenant poser

**DÉFINITION 8.6.** —  $\sigma(b) = i_*(x + \sqrt{a}y) \in A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$ , où  $i_*$  est induit par le plongement  $E^* \hookrightarrow \coprod_{x \in (Q_{\underline{a}})_{(0)}} K_1(F(x))$ .

Pour que cette définition ait un sens, il faut voir que  $\sigma(b)$  ne dépend pas du choix de  $v', x, y$ . On note que, de toute façon,

$$(13) \quad N(\sigma(b)) = b.$$

Si on a une autre écriture

$$b = \varphi(\tilde{x}v_0 + \tilde{y}\tilde{v}'),$$

on note  $W$  le sous-espace de  $V$  engendré par  $v_0, \tilde{v}$  et  $\tilde{v}'$  et  $\tilde{\sigma}(b)$  l'élément correspondant de  $A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$ . Pour simplifier, supposons  $W$  de dimension 3 (l'autre cas est plus facile). Si  $Y$  est la conique correspondant à la restriction de  $\varphi$  à  $W$ , on a

$$\sigma(b), \tilde{\sigma}(b) \in \text{Im}(A_0(Y, K_1) \rightarrow A_0(X_{\underline{a}}, K_1)).$$

D'après (13) et le cas  $n = 2$ , il en résulte bien que  $\sigma(b) = \tilde{\sigma}(b)$ .

Pour voir que  $\sigma$  est surjective, soient  $x \in X_{\underline{a}}$  un point fermé,  $E = F(x)$  et  $\lambda \in E^*$ ; notons  $\lambda_x$  l'image de  $\lambda$  dans  $A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$ . Alors  $\lambda_x$  est (tautologiquement!) la norme de  $\lambda_x$  vu dans  $A_0(X_{\underline{a}} \times_F E, K_1)$ . Comme  $\varphi_E$  est isotrope,  $A_0(X_{\underline{a}} \times_F E, K_1) \xrightarrow{N_E} D(\varphi_E)$  est

bijective, ainsi que  $\sigma_E$ . La conclusion résulte donc du fait que les normes commutent à  $\sigma$ . Pour le voir, on remarque que par hypothèse toute extension finie de  $F$  est filtrée par des extensions quadratiques successives; on se ramène donc au cas d'une extension quadratique  $E/F$ . On remarque alors que  $D(\varphi_E) = \bigcup D(\alpha_E)$  où  $\alpha$  décrit les sous-formes ternaires de  $\varphi$  contenant le vecteur  $v_0$ , ce qui ramène de nouveau au cas connu  $n = 2$ .  $\square$

## 9. COMPLÉMENTS

Dans cette section, nous indiquons certains résultats annoncés par Voevodsky, qui réduisent la démonstration de la conjecture de Kato en général à un problème très spécifique.

### 9.1. Le motif de Rost-Voevodsky

Voevodsky a annoncé une construction indépendante du motif du théorème 8.1, qui offre l'intérêt de se généraliser au cas d'un nombre premier  $l$  quelconque. Ce qui suit est extrait de messages à Rost et au rédacteur, et reproduit avec son autorisation.

Commençons par décrire le morphisme  $\gamma$  du théorème 8.3. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.12, on établit facilement une suite exacte (sous les hypothèses de ce lemme) :

$$0 \rightarrow H^n(\check{C}(X), \mathbf{Z}/l(n-1)) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(F, \mu_l^{\otimes(n-1)}) \rightarrow H_{\text{ét}}^n(F(X), \mu_l^{\otimes(n-1)}).$$

En identifiant  $\mu_l^{\otimes(n-1)}$  à  $\mu_l^{\otimes n}$  par le choix d'une racine primitive  $l$ -ième de l'unité de  $F$  (supposé en contenir), on en déduit un élément

$$\xi \in H^n(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbf{Z}/l(n-1))$$

correspondant à  $(a_1) \cdot \dots \cdot (a_n) \in H_{\text{ét}}^n(F, \mu_l^{\otimes n})$ . Pour  $l = 2$ , on montre que  $\gamma$  est donné par le cup-produit par  $\tilde{Q}_{n-2} \dots \tilde{Q}_1 \tilde{\beta}(\xi)$ , où  $\tilde{\beta}$  et les  $\tilde{Q}_i$  sont comme dans le corollaire 6.5.

Dans le cas général, le même opérateur donne un triangle distingué dans  $DM^{eff}(F)$

$$M'_{\underline{a}} \rightarrow M(\check{C}(X_{\underline{a}})) \xrightarrow{\gamma} M(\check{C}(X_{\underline{a}})(l^{n-1} - 1)[2l^{n-1} - 1]) \rightarrow M'_{\underline{a}}[1]$$

où  $X_{\underline{a}}$  est une variété de déploiement pour  $\{a_1, \dots, a_n\}$  vérifiant les hypothèses (i) et (ii) de la définition 4.7 et  $M'_{\underline{a}}$  est simplement défini comme la fibre de  $\gamma$ . Voevodsky a annoncé :

**THÉORÈME 9.1.** — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, supposons que  $F$  soit un sous-corps de  $\mathbf{C}$ , sans extensions de degré premier à  $l$ . Supposons de plus que  $X$  soit une  $(v_{n-1}, l)$ -variété. Posons*

$$M_{\underline{a}} = S^{l-1}(M'_{\underline{a}}),$$

où  $S^{l-1}$  dénote la puissance symétrique  $(l-1)$ -ième dans  $DM^{eff}(F)$ . Alors  $M_{\underline{a}}$  est facteur direct autodual de  $M(X_{\underline{a}})$ .

En particulier,  $M_{\underline{a}}$  est un motif pur, canoniquement associé à  $\underline{a}$  d'après l'exemple 5.1.

En utilisant ce fait et le théorème 4.15, Voevodsky obtient alors :

**THÉORÈME 9.2.** — *Supposons  $H90(n-1, l)$  vrai. Supposons que, pour tout sous-corps  $F$  de  $\mathbf{C}$  et tout  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (F^*)^n$ , il existe une variété de déploiement  $X_{\underline{a}}$  pour  $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)/l$  telle que*

- (i)  $X_{\underline{a}}$  soit une  $(v_{n-1}, l)$ -variété;
- (ii) la norme  $A_0(X_{\underline{a}}, K_1) \xrightarrow{N} F^*$  soit injective.

Alors  $H90(n, l)$  est vrai.

Cet énoncé donne une nouvelle démonstration du théorème de Merkurjev-Suslin (le cas  $n = 2$ ,  $l$  quelconque) modulo (ii), qui est démontré dans [20, cor. 8.7.2] pour la variété de Severi-Brauer d'une algèbre centrale simple de degré  $l$ . Dans le cas  $l = 3$ , Rost a annoncé une démonstration de (ii) pour la variété de l'exemple 4.3 (2) (b) (sa démonstration utilise une  $F$ -forme du plan projectif de Cayley), ce qui donne  $K(3, 3)$ , ainsi que pour une variété convenable de dimension 26, ce qui donne  $K(4, 3) \dots$

Dans les autres cas, on ne dispose pas pour  $X_{\underline{a}}$  de candidats aussi géométriques que précédemment. Voevodsky en a proposé une construction récursive, mais il n'a pour l'instant que des résultats partiels sur les variétés obtenues.

## 9.2. $(v_n, l)$ -variétés et variétés de déploiement génériques

Voevodsky a également annoncé des résultats qualitatifs sur les variétés de déploiement, qui clarifient grandement la situation et que nous ne résistons pas à l'envie d'exposer.

Si  $X, Y$  sont deux  $F$ -variétés, notons  $X \leq_l Y$  s'il existe un morphisme  $\rho : M(X) \rightarrow M(Y)$  dans  $DM^{eff}(F, \mathbf{Z}_{(l)})$  (motifs à coefficients dans  $\mathbf{Z}_{(l)}$ ) tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{\rho} & M(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}_{(l)} & \xrightarrow{c} & \mathbf{Z}_{(l)} \end{array}$$

soit commutatif pour un  $c \in \mathbf{Z}_{(l)}^*$ -convenable. C'est une relation de préordre; si  $X$  et  $Y$  sont propres et lisses,  $X \leq_l Y$  si et seulement si il existe un revêtement  $Z \rightarrow X$  de degré premier à  $l$  et un morphisme  $Z \rightarrow Y$ . Notons  $\cong_l$  la relation d'équivalence associée : c'est la  $l$ -équivalence. Voevodsky a alors annoncé :

**THÉORÈME 9.3.** — Soient  $X$  une  $(v_n, l)$ -variété et  $Y$  une variété non  $l$ -triviale (c'est-à-dire non  $l$ -équivalente à  $\text{Spec } F$ ). Alors tout morphisme  $M(X) \rightarrow M(Y)$  est non trivial sur la classe fondamentale de  $X$  à coefficients  $\mathbf{Z}/l$ . En particulier, on a :

(i)  $X \leq_l Y \Rightarrow \dim X \leq \dim Y$  ;

(ii) Si  $X \leq_l Y$  et  $\dim X = \dim Y$ , alors  $X \cong_l Y$ .

**THÉORÈME 9.4.** — Supposons  $H90(n-1, l)$  vrai. Soit  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (F^*)^n$ , et soit  $X$  une variété de déploiement pour  $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)/l$  qui est une  $(v_{n-1}, l)$ -variété. Alors, toute autre variété de déploiement  $Y$  vérifie  $Y \leq_l X$ .

**COROLLAIRE 9.5.** — Sous les hypothèses du théorème 9.4, toute  $(v_{n-1}, l)$ -variété de déploiement pour un symbole  $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)/l$  est générique (cf. définition 4.1). Deux  $(v_{n-1}, l)$ -variétés de déploiement pour  $\{a_1, \dots, a_n\}$  sont  $l$ -équivalentes.

**COROLLAIRE 9.6.** — Supposons que  $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)/l$  admette une  $(v_{n-1}, l)$ -variété de déploiement. Alors toute variété de déploiement générique pour  $\{a_1, \dots, a_n\}$  est de dimension  $\geq l^{n-1} - 1$  ; si elle est propre et lisse de dimension  $l^{n-1} - 1$ , c'est une  $(v_{n-1}, l)$ -variété.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Arason *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Alg. **36** (1975), 448–491.
- [2] M. Artin *Brauer-Severi varieties*, Lect. Notes in Math. **917**, Springer, 1982, 194–210.
- [3] A. Borel *Linear algebraic groups* (2<sup>e</sup> édition), Springer, 1991.
- [4] A. Bousfield, E. Friedlander *Homotopy theory of  $\Gamma$ -spaces, spectra and bisimplicial sets*, Lect. Notes in Math. **658**, Springer, 1978, 80–130.
- [5] H. Bass, J. Tate *The Milnor ring of a global field*, Lect. Notes in Math. **342**, Springer, 1973, 349–428.
- [6] S. Bloch *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Lectures Series, 1982.
- [7] S. Bloch, K. Kato  *$p$ -adic étale cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 107–152.
- [8] F. Châtelet *Variations sur un thème de H. Poincaré*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **61** (1944), 249–300.
- [9] M. Demazure *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39** (1977), 179–186.
- [10] E. Devinatz, M. Hopkins, J. Smith *Nilpotence and stable homotopy theory, I*, Ann. of Math. **128** (1988), 207–241.
- [11] D. Elman, T. Y. Lam *Pfister forms and  $K$ -theory of fields*, J. Alg. **23** (1972), 181–213.
- [12] E. Friedlander, V. Voevodsky *Bivariant cycle cohomology*, prépublication, 1995.

- [13] J.-P. Jouanolou *Une suite exacte de Mayer-Vietoris en  $K$ -théorie algébrique*, Lect. Notes in Math. **341**, Springer, 1973, 293–316.
- [14] K. Kato *A generalization of higher class field theory by using  $K$ -groups, I*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo **26** (1979), 303–376.
- [15] K. Kato *Milnor  $K$ -theory and the Chow group of zero cycles*, Contemp. Math. **55** (I), AMS, 1986, 241–253.
- [16] T.Y. Lam *The algebraic theory of quadratic forms (2ème édition)*, Benjamin, 1980.
- [17] M. Knebusch *Generic splitting of quadratic forms, I*, Proc. London Math. Soc. **33** (1976), 65–93.
- [18] A.S. Merkurjev *Sur le symbole de résidu normique de degré 2 (en russe)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **261** (1981), 542–547. Traduction anglaise : Soviet Math. Dokl. **24** (1981), 546–551.
- [19] A.S. Merkurjev *On the norm residue homomorphism for fields*, Amer. Math. Soc. Transl. **174** (1996), 49–71.
- [20] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin  *$\mathcal{K}$ -cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de résidu normique (en russe)*, Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011–1046. Traduction anglaise : Math USSR Izv. **21** (1983), 307–340.
- [21] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin *L'homomorphisme de résidu normique de degré 3 (en russe)*, Izv. Akad. Nauk SSSR **54** (1990), 339–356. Traduction anglaise : Math. USSR Izv. **36** (1991), 349–368.
- [22] J. Milnor *Algebraic  $K$ -theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9** (1970), 315–344.
- [23] J. Milnor *An introduction to algebraic  $K$ -theory*, Ann. Math. Studies **72**, Princeton University Press, 1971.
- [24] J. Milnor, J. Stasheff *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies **76**, Princeton University Press, 1974.
- [25] F. Morel *Théorie de l'homotopie et motifs, I*, prépublication, 1995.
- [26] F. Morel, V. Voevodsky *Homotopy category of schemes over a base*, en préparation.
- [27] Y. Nisnevich *The completely decomposed topology on schemes and the associated descent spectral sequences in algebraic  $K$ -theory*, in Algebraic  $K$ -theory : connections with geometry and topology, (J.F. Jardine, V.P. Snaith, eds.), NATO ASI Series, Ser. C **279** (1989), 241–342.
- [28] D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky *Motivic cohomology of Pfister quadrics*, en préparation.
- [29] D. Quillen *Homotopical algebra*, Lect. Notes in Math. **43**, Springer, 1967.
- [30] D. Ravenel *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Acad. Press, 1986.
- [31] D. Ravenel *The nilpotence and periodicity theorems in stable homotopy theory*, Séminaire Bourbaki, juin 1990, exposé n° 728, Astérisque **189–190** (1990), 399–428.

- [32] D. Ravenel Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory, Ann. Math. Studies **128**, Princeton University Press, 1992.
- [33] M. Rost *Hilbert's theorem 90 for  $K_3^M$  for degree-two extensions*, prépublication, 1986.
- [34] M. Rost *On the spinornorm and  $A_0(X, K_1)$  for quadrics*, prépublication, 1988.
- [35] M. Rost *Some new results on the Chowgroups of quadrics*, prépublication, 1990.
- [36] M. Rost *Chow groups with coefficients*, Documenta Math. **1** (1996), 319–393.
- [37] D. Saltman *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Isr. J. Math. **47** (1984), 165–215.
- [38] J.-P. Serre *Cohomologie galoisienne (nouvelle édition)*, Lect. Notes in Math. **5**, Springer, 1994.
- [39] C. Soulé  *$K_2$  et le groupe de Brauer*, Séminaire Bourbaki, novembre 1982, exposé n° 601, Astérisque **105–106** (1983), 79–93.
- [40] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), 121–154.
- [41] A. Suslin *L'homomorphisme quaternionique pour le corps des fonctions d'une conique (en russe)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), 292–296. Traduction anglaise : Soviet Math. Dokl. **26** (1982), 72–77.
- [42] A. Suslin, V. Voevodsky *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, prépublication, 1995.
- [43] J. Tate *Relations between  $K_2$  and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.
- [44] V. Voevodsky *Homology of schemes, II*, prépublication, 1993.
- [45] V. Voevodsky *Triangulated categories of motives over a field*, prépublication, 1994.
- [46] V. Voevodsky *Bloch-Kato conjecture for  $\mathbf{Z}/2$ -coefficients and algebraic Morava  $K$ -theories*, prépublication, 1995.
- [47] V. Voevodsky *Cohomological operations in motivic cohomology*, en préparation.
- [48] V. Voevodsky *The Milnor conjecture*, prépublication, 1996.
- [49] A. Wadsworth *Merkurjev's elementary proof of Merkurjev's theorem*, Contemp. Math. **55** (II), AMS, 1986, 741–776.
- [50] S. Wang *On the commutator subgroup of a simple algebra*, Amer. J. Math. **72** (1950), 323–334.

Bruno KAHN

Institut de Mathématiques de Jussieu

Equipe Théories Géométriques

Université Paris 7

Case 7012

75251 Paris Cedex 05

France

Adresse électronique: kahn@math.jussieu.fr