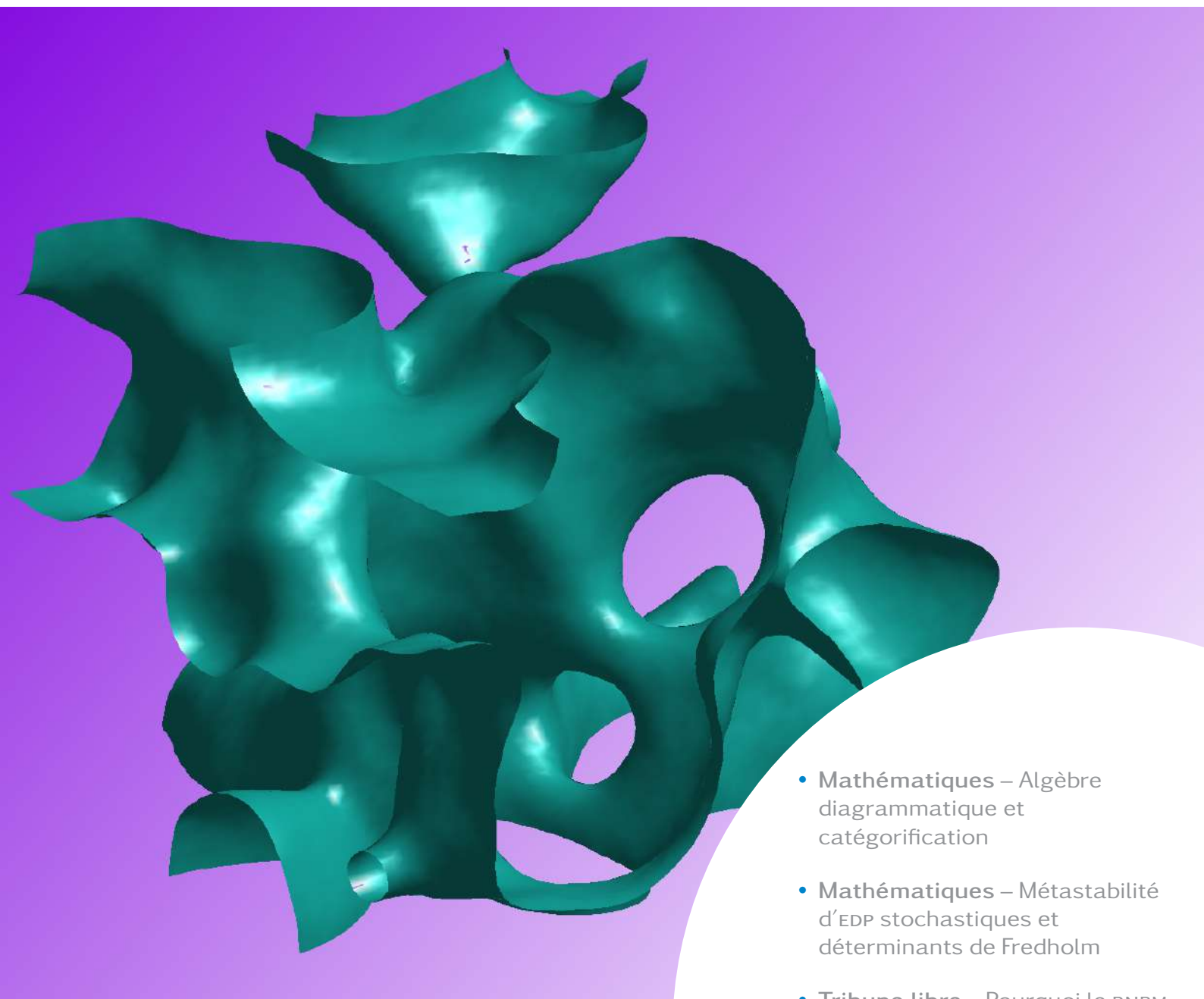


la Gazette

des Mathématiciens



- **Mathématiques** – Algèbre diagrammatique et catégorification
- **Mathématiques** – Métastabilité d'EDP stochastiques et déterminants de Fredholm
- **Tribune libre** – Pourquoi le RNBM
- **Information** – Quelques nouvelles de l'INSMI

Société
Mathématique
de France



Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Rédacteurs

Boris ADAMCZEWSKI

Institut Camille Jordan, Lyon
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Maxime BOURRIGAN

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles
maxime.bourrigan@gmail.com

Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Sébastien GOUÉZEL

Université de Nantes
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Lille
grivaux@math.univ-lille1.fr

Fanny KASSEL

IHÉS
kassel@ihes.fr

Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Romain TESSERA

Université Paris-Sud
romain.tessera@math.u-psud.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. L'image de couverture montre la surface séparant les valeurs positives et négatives du champ, solution d'une équation d'Allen-Cahn stochastique dans un cube, avec condition initiale aléatoire et conditions aux bords de Neumann (c'est-à-dire que la dérivée normale du champ est nulle sur les faces du cube). (crédit : Matthieu BRACHET).

N° 163

Éditorial

Chères lectrices, chers lecteurs,

J'avoue, j'ai eu un peu peur quand nous avons reçu un article avec *catégorification* dans le titre. Les catégories, j'ai toujours vu ça de loin avec un respect teinté de beaucoup d'ignorance, et le suffixe en *fication* m'indiquait qu'on allait transformer sans doute des concepts bien familiers en d'horribles abstractions algébriques, avec peut-être en prime des morphismes d'oubli pour anesthésier le tout. Il n'en est rien : l'article dont il est question est limpide, simple, convaincant et parfois même drôle. Il met en relation des objets tous aussi naturels les uns que les autres, mais de natures très différentes. Vous ne verrez plus jamais, par exemple, les polynômes de Tchebychev du même œil analytique.

Le Raconte-moi parle aussi d'algèbre, cette fois d'un objet au cœur du monde de l'arithmétique p -adique, la courbe de Fargues-Fontaine. À contre-courant de la difficulté légendaire à présenter cet univers aux béotiens du thème, notre généreux auteur démarre avec les familières fonctions holomorphes et les séries de Laurent pour nous entraîner (avec un nombre raisonnable de heurts) dans les arcanes de cette fameuse courbe. Amateurs de jolis mots, n'hésitez pas à vous y promener, vous y trouverez d'élégants *diamants* et quelques *débasquements* bien sentis. On y trouvera même des *corps hyperparfaits*, il faudra bien ça aux agentes d'entretien de nos laboratoires, exclues du statut de fonctionnaire, payées une misère, et bientôt contraintes à ruiner leurs articulations jusqu'à 64 ans.

Le fantôme de la couverture de la *Gazette* n'est pas celui du Conseil national de la Résistance poursuivant Delevoye, mais la phase transitoire d'un flot convergeant tranquillement vers un équilibre *métastable*, une notion qui a permis aux physiciens de comprendre pourquoi l'eau pouvait parfois rester liquide à température négative. L'article associé part d'une situation très simple, une particule soumise à un champ mais perturbée par un mouvement brownien. La particule réussira-t-elle à sortir du fond de son trou de potentiel ? Et en dimension 2 ? Et en dimension infinie ? Vous serez guidés pas à pas dans l'univers fascinant des équations aux dérivées partielles stochastiques. En prime pour les lectrices et lecteurs consciencieux,

une petite histoire de mystérieux pli cacheté se cache dans le texte.

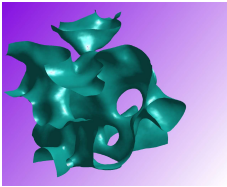
Ne négligez surtout pas l'article présentant la parution du second tome des œuvres complètes de René Thom : il n'a rien d'un ronflant panégyrique de promotion éditoriale. Bien au contraire, il présente les nombreux concepts et théorèmes développés par Thom au court de sa vie. Les auteurs ne manquent jamais de mettre en perspective, en quelques mots bien placés, ses idées, leur postérité ou les échecs de Thom. En épilogue, un véritable article de mathématiques expose l'un des résultats majeur de Thom sur la transversalité. Et je m'abstiens pour une fois d'un commentaire facile sur les catastrophes et la réforme des retraites.

Savez-vous combien de laboratoires sont associés à l'INSMI ? Quel y est le taux moyen de chercheurs ? Quel est le taux de succès à une demande de délégation ? À un dossier PEPs ? Êtes-vous à la page linguistico-administrative, sauriez-vous mener tambour battant un *projet structurant* ? Connaissez-vous les deux thèmes que l'INSMI souhaite développer en interaction avec les mathématiques ? La direction de notre institut national préféré répond à ces questions dans ce numéro dense en communication institutionnelle, et nous expose un bilan de son action des deux dernières années, ainsi que sa vision pour le futur, certes plus en filigrane. Nos deux sections fétiches du CNU, la 25 et la 26, nous présentent quant à elles leur bilan pour cette année passée. Vous y trouverez par exemple les critères pour les promotions, en particulier la nouvelle classe exceptionnelle MCF, ou les raisons qui ont poussé ces deux sections à ne pas instaurer le suivi de carrière.

Qui a dit cette phrase : *Nous sommes les riches, nous devons payer* ? Non, bien sûr, pas eux ! Qui donc alors ? Vous le découvrirez dans la recension brève mais intense d'un livre relatant le destin funeste des normaliens pendant la première guerre mondiale.

Au nom de l'équipe de la *Gazette*, je vous souhaite une excellente lecture et une très bonne année 2020.

Damien GAYET



N° 163

Sommaire

SMF	4
Mot du président	4
MATHÉMATIQUES	6
Algèbre diagrammatique et catégorification – <i>H. QUEFFELEC et P. WEDRICH</i>	6
Métastabilité d'EDP stochastiques et déterminants de Fredholm – <i>N. BERGLUND</i>	14
Les œuvres mathématiques de René Thom dans la collection <i>Documents mathématiques</i> – <i>M. CHAPERON et F. LAUDENBACH</i>	26
RACONTE-MOI	36
... la courbe de Fargues-Fontaine – <i>M. MORROW</i>	36
TRIBUNE LIBRE	42
Pourquoi le RNBM ? – <i>B. KLOECKNER</i>	42
INFORMATION	44
Quelques nouvelles de l'INSMI	44
Bilan des activités 2019 et de la mandature du CNU 26	52
Rapport sur les sessions du CNU 25 pour l'année 2019	60
Créations chaotiques – <i>A. ROSSILLE</i>	64
RÉTROVISEUR	65
LIVRES	66

Mot du président

Chères et chers collègues,

Je vous souhaite une très bonne année 2020.

Le monde de l'enseignement et de la recherche est en ébullition au moment où j'écris ces lignes (mi-décembre), peut-être la situation a-t-elle évolué depuis un mois.

Comme nous l'avions indiqué depuis plus d'un an et demi, la réforme du lycée a des conséquences néfastes sur l'enseignement de spécialité de mathématiques en classe de première, mais également sur la perception de notre matière par les élèves et les parents. Il n'est pas trop tard pour ajuster la formation lycéenne et permettre une spécialité mathématiques moins pointue qui s'adresserait à tous les élèves qui ont besoin des mathématiques pour poursuivre leurs études, sans pour autant les aimer au point d'en faire sa spécialité principale.

D'autres réformes sont évidemment en cours de préparation, celle des retraites et la loi de programmation pluri-annuelle de la recherche (LPPR). Les deux sont bien entendu liées, en particulier via toutes les conséquences que l'une et l'autre pourront avoir sur le recrutement et la qualité des conditions de travail des jeunes collègues. Dans ce mot je me focalise sur la LPPR – la SMF est pleinement dans ses missions lorsqu'elle y contribue. Comme j'ai eu l'occasion de l'écrire dans plusieurs lettres, les rapports gouvernementaux ont posé un bilan réaliste, très sévère, des conditions de travail et de recherche de la communauté scientifique. Suite à la consultation nationale qu'elles avaient organisée, les sociétés savantes ont émis une série de recommandations (notamment budgétaires) que je vous invite à (re-) consulter, accompagnées de quelques lignes rouges qui, si elles étaient franchies, ne pourraient être acceptées par la communauté (du moins, par les personnes ayant participé au sondage et le Conseil d'Administration de la SMF) : le recrutement pérenne des chercheurs et enseignants-chercheurs, femmes et hommes, garants du développement des projets courant parfois sur des dizaines d'années (peu importe la discipline) et porteurs d'une connaissance collective, doit rester absolument prioritaire ; les modalités de la nécessaire, mais difficile, évaluation collective ou individuelle de la

recherche et la pression administrative doivent être assouplies ; le taux de sélection aux appels d'offres nationaux (notamment l'ANR, 3 fois plus élevé que nos voisins) doit être mis à un niveau d'environ 30 pour cent.

Enfin, le budget européen consacré à l'enseignement et la recherche (mi-décembre) semblait en nette baisse. Là encore, beaucoup d'inquiétudes sur la compréhension par le monde politique des enjeux liés au fait de favoriser une recherche attractive et de qualité à grande échelle.

Les mathématiques sont tout à fait concernées et potentiellement menacées par les orientations qui pourraient être prises.

Nous devons persévérer plus que jamais pour être une société savante force de proposition, et pour travailler de concert avec d'autres sociétés savantes pour faire entendre non seulement notre voix, mais aussi plus globalement celle du milieu scientifique. Une condition nécessaire, non suffisante, pour que nos messages soient transmis est que la communication entre le monde de la recherche et les décideurs et médias soit nettement améliorée. L'expérience semble montrer que nous devons prendre l'initiative. Ainsi, la SMF participe à des sondages, des pétitions, des articles de presse et co-organise des manifestations et événements pour que le dialogue avec les parlementaires s'instaure, notamment avant les premiers arbitrages qui seront rendus en février prochain pour la LPPR. Je vous invite à consulter notre site pour suivre nos activités.

Bref, l'année s'annonce encore chargée, et peut-être décisive pour le monde de l'enseignement et de la recherche. La SMF continuera de porter la voix des mathématiques avec votre soutien.

Je vous renouvelle mes meilleurs vœux pour 2020,

Le 2 janvier 2020

Stéphane SEURET, président de la SMF



Algèbre diagrammatique et catégorification

- H. QUEFFELEC
- P. WEDRICH

Nous proposons une illustration diagrammatique abordable du concept de catégorification qui s'est développé au cours des vingt dernières années.

1. Introduction

Le concept de catégorification a été proposé il y a une vingtaine d'années par Crane et Frenkel [5], pour étendre certaines théories de la physique quantique de la dimension 3 à la dimension 4. Cette idée générale fait écho à des phénomènes plus anciens et bien connus et a été appliquée principalement en algèbre et en topologie pendant les vingt dernières années, avec à la clef plusieurs applications allant de la théorie des nœuds aux représentations de groupes.

Ce principe relativement vague professe que, dans certaines situations, les objets mathématiques que nous étudions sont « l'ombre », ou la « trace », d'objets de dimension supérieure. Comprendre cette dimension supérieure peut alors permettre de découvrir une nouvelle théorie intéressante, mais aussi de (tenter de) résoudre les problèmes classiques avec de nouveaux outils. L'exemple le plus ancien (1895!) est probablement la définition par Poincaré de la notion d'homologie des variétés, qui remplace un nombre entier χ , la caractéristique d'Euler, associé à une variété, par une suite d'espaces vectoriels H_n dont la somme alternée des dimensions vaut χ : $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim(H_n) = \chi$. Au passage, Poincaré gagne deux choses : il obtient un outil plus puissant pour l'étude des variétés, mais il montre qu'on peut également capturer des informations nouvelles sur les applications entre ces variétés. On peut ainsi dériver des constructions d'homologie une preuve classique d'un théorème de Brouwer qui dit en substance qu'un espace de dimension n ne peut pas être équivalent à un espace de dimension m si m et n diffèrent : la notion de dimension d'un espace est donc bien définie.

À l'époque de Poincaré cependant, on ne pouvait pas parler de catégorification : la notion même de catégories¹ n'était pas encore définie. Aussi la formalisation du concept de catégorification remonte-t-elle aux années 90, et les premières mises en œuvre modernes datent du tournant du siècle : Khovanov [10] en théorie des nœuds (ainsi qu'Ozsvath et Szabo dans une direction plus géométrique), Khovanov–Lauda [11] et Chuang–Rouquier [4] en théorie des représentations (à la suite de [2] et [8]).

Nous proposons ici une illustration accessible, et, espérons-le, élégante, du concept de catégorification, appliqué à des outils mathématiques bien connus. On va ainsi montrer que des objets appelés idempotents de Jones–Wenzl ont pour trace les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce U_n . Cette discussion est également l'occasion de présenter en action des calculs d'algèbre diagrammatique, un domaine de l'algèbre qui consiste essentiellement à manipuler des dessins.

2. Les polynômes de Tchebychev

On ne présente plus les polynômes de Tchebychev, famille de polynômes à une variable qui apparaît dans plusieurs domaines des mathématiques (avec une possible prédilection, du moins historique, pour les domaines de l'analyse). Rappelons tout de même qu'ils existent sous deux déclinaisons (première espèce, notés T_n pour n entier, et deuxième espèce, notés U_n), et se définissent de manière récursive comme suit :

$$T_0 = 2, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad T_n = XT_{n-1} - T_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2$$

$$U_0 = 1, \quad U_1 = X \quad \text{et} \quad U_n = XU_{n-1} - U_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

1. Tout l'enjeu de cet article est de parler de catégorification sans dire un mot sur les catégories.

Nous n'allons utiliser ici que les polynômes U_n , de deuxième espèce. Ce sont probablement les plus classiques en algèbre, même si leurs cousins T_n jouent un rôle important en topologie et font l'objet de conjectures toujours ouvertes (énoncées par Fock et Goncharov et en des termes plus élémentaires par D. Thurston).

Notons au passage qu'algébristes et analystes semblent ne pas avoir la même normalisation préférée pour les polynômes de Tchebychev. Celle (plus classique, puisque référencée sur Wikipedia ?) des analystes est :

$$\tilde{T}_0 = 1, \quad \tilde{T}_1 = X \quad \text{et} \quad \tilde{T}_n = 2X\tilde{T}_{n-1} - \tilde{T}_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2$$

$$\tilde{U}_0 = 1, \quad \tilde{U}_1 = 2X \quad \text{et} \quad \tilde{U}_n = 2X\tilde{U}_{n-1} - \tilde{U}_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Un peu de calcul permet de réaliser que les deux définitions sont compatibles, puisqu'on a les identités suivantes :

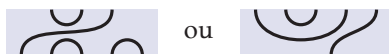
$$T_n(X) = 2\tilde{T}_n\left(\frac{X}{2}\right) \quad \text{et} \quad U_n(X) = \tilde{U}_n\left(\frac{X}{2}\right).$$

La prédilection des analystes pour la définition ci-dessus s'explique peut-être par la fameuse formule suivante :

$$\tilde{T}_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

3. Une algèbre diagrammatique

Considérons le \mathbb{Q} -espace vectoriel formellement engendré par des diagrammes de la forme suivante :

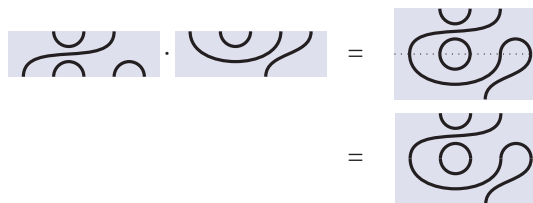


Les diagrammes que l'on considère sont des segments reliant les bords haut et bas d'un rectangle. Un segment peut soit connecter deux points du haut, soit un point du haut à un point du bas, soit deux points du bas ensemble. On regarde le tout à déformation près : qu'un segment soit tracé tout droit ou fasse des détours ne change rien, par contre on ne veut pas que deux segments s'intersectent. Puisqu'on regarde les combinaisons linéaires de tels diagrammes, l'élément suivant est typiquement quelque chose qui nous intéresse :

$$3 \left[\text{diagram 1} \right] - 2 \left[\text{diagram 2} \right]$$

On peut également munir notre espace vectoriel d'une structure d'algèbre (non unitaire), c'est-à-dire

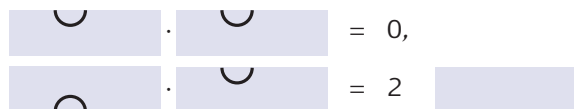
qu'on peut y définir un produit. Dans le cas de deux diagrammes, leur produit est obtenu en positionnant le premier diagramme au-dessus du second :



On voit apparaître ici un premier phénomène dont nous n'avons pas parlé : que faire des cercles ? Dans l'espace où on travaille, on décide qu'on peut remplacer un cercle par un coefficient 2. Le calcul ci-dessus se simplifie donc :



Dans le cas où les nombres de points de bord des rectangles qu'on essaie de recoller ne coïncident pas, le résultat est alors 0 (à ne pas confondre avec le diagramme vide, comme illustré ci-dessous).



On a ainsi défini l'algèbre de Temperley-Lieb de paramètre 2, $TL(2)$. Cette définition a été introduite dans les années 70 par Temperley et Lieb dans l'étude des modèles qui décrivent la structure de la glace en deux dimensions. Elle a ensuite été récupérée par des mathématiciens, et notamment Jones et Wenzl que l'on va bientôt évoquer, dans les années 80, et son étude occupe encore une place importante dans la recherche actuelle.

Avant de parler de Jones et Wenzl, notons qu'on peut également munir $TL(2)$ d'une opération supplémentaire : plutôt que de superposer des rectangles, on peut les disposer côte à côte. On notera cette seconde opération \otimes :



Il est intéressant de noter que le diagramme vide est l'élément neutre pour cette opération : accoler un diagramme vide revient à ne rien faire, ce qui est rassurant.

4. Idempotents de Jones-Wenzl

La recherche d'idempotents ($p^2 = p$) est une phase importante dans l'étude d'une algèbre, en ceci qu'elle permet de découper l'algèbre en morceaux plus petits et donne un premier outil pour étudier ses représentations. Pour l'algèbre de Temperley-Lieb, une famille d'idempotents a été décrite par Jones et Wenzl [9, 15], qui se définit comme suit :

$$JW_0 = \text{[Diagram: 1 vertical line]} , \quad JW_1 = \text{[Diagram: 2 vertical lines with a box between them]}$$

$$\begin{aligned}
 JW_{n+1} &= \text{[Diagram: n+1 vertical lines with a box labeled n+1]} \\
 &= \text{[Diagram: n vertical lines with a box labeled n]} - \frac{n}{n+1} \text{[Diagram: n vertical lines with two boxes labeled n]} \quad \text{si } n \geq 1.
 \end{aligned} \tag{1}$$

À droite du signe égal dans la seconde ligne ci-dessus, les zones grisées sont à remplir avec les valeurs de JW_n déterminées inductivement. Ainsi, le second diagramme du membre de droite de l'équation est une sorte de produit de deux JW_n , dont les extrémités sont combinées comme indiqué dans la partie bleutée du diagramme.

Par exemple, on calcule pour le cas où il y a deux brins :

$$JW_2 = \text{[Diagram: 2 vertical lines]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]}$$

On arrive ici sur le premier cas où l'idempotent n'est pas un diagramme pur, mais une combinaison linéaire de diagrammes. Pour continuer à utiliser la récurrence, il nous faut préciser que l'insertion des copies de JW_n dans les zones grisées à la droite de l'équation se fait en respectant la linéarité. Ainsi, le calcul de JW_3 est le suivant :

$$\begin{aligned}
 JW_3 &= \text{[Diagram: 3 vertical lines with a box labeled 2]} - \frac{2}{3} \text{[Diagram: 3 vertical lines with two boxes labeled 2]} \\
 &= \left(\text{[Diagram: 3 vertical lines]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 3 vertical lines with a cup and cap]} \right) \\
 &\quad - \frac{2}{3} \left(\text{[Diagram: 3 vertical lines with a cup and cap]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 3 vertical lines with two cups and caps]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 3 vertical lines with two cups and caps]} + \frac{1}{4} \text{[Diagram: 3 vertical lines with two cups and caps]} \right) \\
 &= \text{[Diagram: 3 vertical lines]} - \frac{2}{3} \text{[Diagram: 3 vertical lines with a cup and cap]} - \frac{2}{3} \text{[Diagram: 3 vertical lines with a cup and cap]} \\
 &\quad + \frac{1}{3} \text{[Diagram: 3 vertical lines with two cups and caps]} + \frac{1}{3} \text{[Diagram: 3 vertical lines with two cups and caps]}
 \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que ces éléments sont bien des idempotents. Dans le cas de JW_2 , on calcule ainsi :

$$\begin{aligned}
 JW_2^2 &= \left(\text{[Diagram: 2 vertical lines]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]} \right)^2 \\
 &= \text{[Diagram: 2 vertical lines]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]} + \frac{1}{4} \text{[Diagram: 2 vertical lines with two cups and caps]} \\
 &= \text{[Diagram: 2 vertical lines]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]} \\
 &= \text{[Diagram: 2 vertical lines]} - \frac{1}{2} \text{[Diagram: 2 vertical lines with a cup and cap]}
 \end{aligned}$$

Nous laissons à la lectrice ou au lecteur le plaisir d'utiliser la relation de récurrence (1) pour montrer que les éléments JW_n sont tous des idempotents.

Il est intéressant de noter qu'il existe d'autres idempotents dans notre algèbre. Une première remarque est que l'algèbre $TL(2)$ telle que nous l'avons définie est en fait une sorte d'amalgame de ce qu'on appelle généralement les algèbres de Temperley-Lieb $TL_n(2)$. Pour chaque valeur de n , l'algèbre $TL_n(2)$ se définit comme le sous-espace de $TL(2)$ où tous les diagrammes ont n points en haut et n points en bas. En notant id_n le diagramme obtenu en dessinant n segments verticaux, on peut facilement voir que id_n est un idempotent de $TL(2)$, et on obtient ainsi :

$$TL_n(2) = id_n TL(2) id_n.$$

Alors, JW_n vit dans $TL_n(2)$, et on pourrait écrire $id_n = JW_n + \sum_k P_{k,n}$ où les $P_{k,n}$ sont d'autres idempotents.

tents. Dans cette décomposition, JW_n est le terme « dominant » (et le plus facile à décrire), et les autres sont d'ordre de plus en plus petit.

5. Catégorification des polynômes de Tchebychev

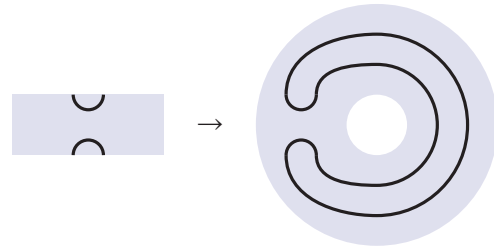
Nous y voilà : on prétend que l'idempotent de Jones-Wenzl catégorifie le polynôme de Tchebychev U_n . Pour expliquer cette idée, on va s'employer à prendre une « trace » de $TL(2)$ et à retrouver à partir des idempotents de Jones-Wenzl les relations de récurrence des polynômes de Tchebychev. On attaque ainsi ici une étape centrale de la catégorification : prouver qu'on peut bien retrouver les objets d'étude initiaux comme ombre de la nouvelle théorie. Dans la plupart des cas, on utilise un calcul de dimension pour définir le processus qui calcule les anciens objets à partir des nouveaux. L'idée d'utiliser plutôt des traces a été largement mise en œuvre ces dernières années et a apporté quelques résultats inattendus (voir [1] ou [13] par exemple). Elle a également l'avantage de se définir beaucoup plus facilement pour $TL(2)$.

La notion de trace en mathématique est d'abord vue dans le cadre des matrices : la trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux². Un exercice classique consiste à montrer la relation suivante : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Ce qui nous intéresse ici est l'idée suivante : pour une trace, on peut faire passer le terme de gauche d'un produit à droite sans que le résultat ne change. Dans notre cadre, on pourrait décrire cette relation comme suit :

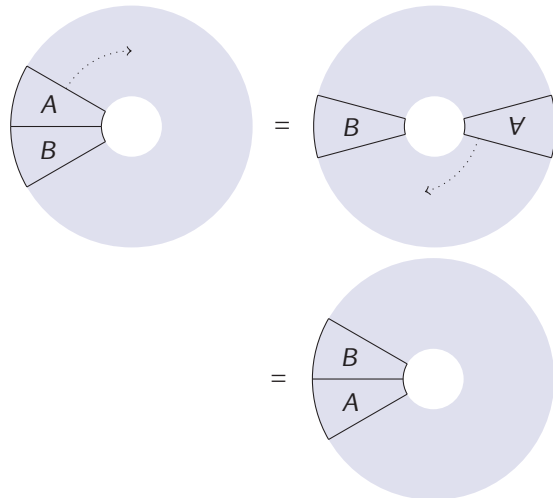
$$\text{Tr} \left(\begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \right) = \text{Tr} \left(\begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \right)$$

Une manière naturelle de réaliser une telle relation est d'autoriser un morceau de diagramme à glisser du haut vers le bas, par exemple le long d'un cylindre. On va donc définir $\text{Tr}(TL(2))$ en refermant sur eux-mêmes les éléments de $TL(2)$ pour les regarder dans un anneau (on parle de clôture annulaire) :

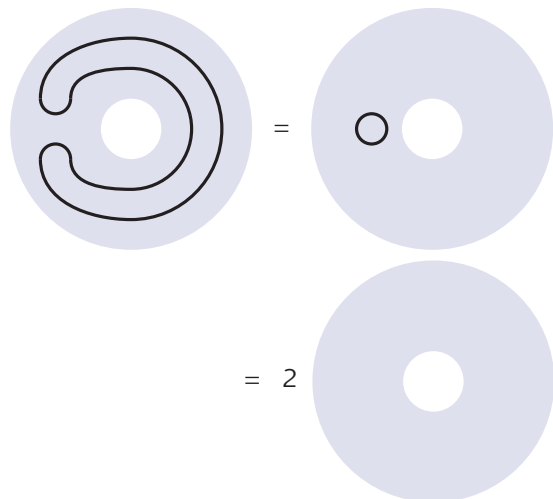
2. Pour justifier l'idée que prendre une trace revient à calculer une dimension, considérons un espace de dimension n muni de n vecteurs de base. La matrice identité sur cet espace s'écrit comme une matrice de taille n par n avec des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs, et sa trace est n , soit la dimension de l'espace.



On s'autorise alors les déformations des diagrammes, qui permettent d'avoir la propriété de trace que nous cherchons :



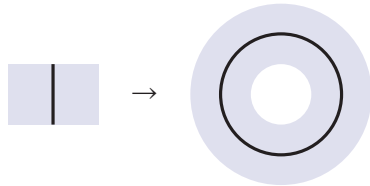
Ainsi, dans l'exemple précédent :



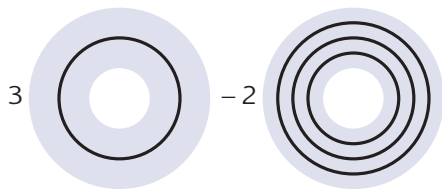
Notons au passage qu'un diagramme ne peut se recoller dans l'anneau que si les nombres de points en haut et en bas correspondent. On restreint donc

la définition de trace aux combinaisons linéaires de tels diagrammes.

Que reste-t-il donc dans $\text{Tr}(\text{TL}(2))$? Les diagrammes qui engendrent cet espace sont des segments refermés, dessinés dans un anneau. Quand on recolle les deux bouts d'un segment, on obtient un cercle, et on se trouve alors dans l'une des deux possibilités suivantes : soit on a un cercle dont le disque intérieur ne contient pas l'âme de l'anneau (comme dans l'exemple précédent) et qui peut donc se remplacer par le coefficient 2, soit il le contient, comme ci-dessous :

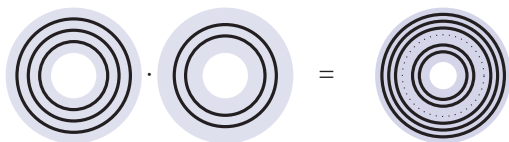


Dans ce cas, les relations de $\text{TL}(2)$ ne nous sont d'aucune aide : il s'agit là de l'un des éléments de base de l'espace $\text{Tr}(\text{TL}(2))$. On peut ainsi montrer que $\text{Tr}(\text{TL}(2))$ est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les diagrammes formés de cercles concentriques qui s'enroulent autour de l'âme de l'anneau. On y voit des choses comme :



Si on décide de noter X^n le diagramme qui correspond à n cercles concentriques, on peut réécrire l'élément ci-dessus comme $3X - 2X^3$.

La manière dont on a construit cette trace nous fait perdre l'opération de multiplication qui consistait à superposer des diagrammes. Par contre, l'opération \otimes induit bien une nouvelle opération sur $\text{Tr}(\text{TL}(2))$:



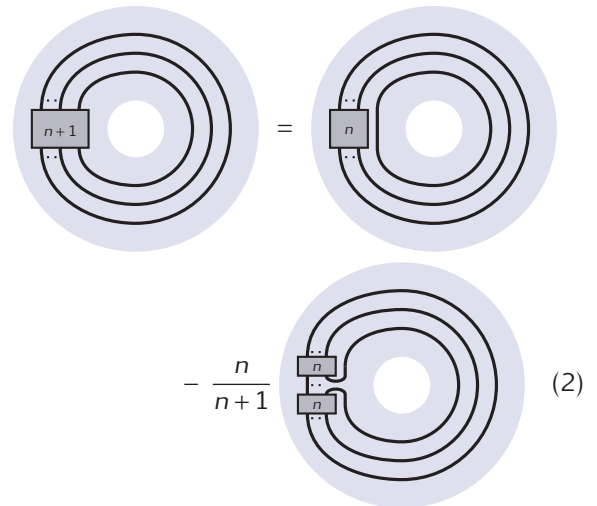
En utilisant des X , on vient d'écrire : $X^3 \cdot X^2 = X^5$. Cette idée permet d'identifier $\text{Tr}(\text{TL}(2))$ avec les polynômes en une variable. On vient ainsi essentiellement d'expliquer qu'on peut catégorifier les poly-

nômes à une variable par l'algèbre de Temperley-Lieb : à partir de l'algèbre $\text{TL}(2)$ munie des opérations \cdot et \otimes , on retrouve l'espace des polynômes qui n'hérite que d'une unique opération, le processus de « perte d'information » (décatégorification) reliant les deux espaces étant réalisé par une trace.

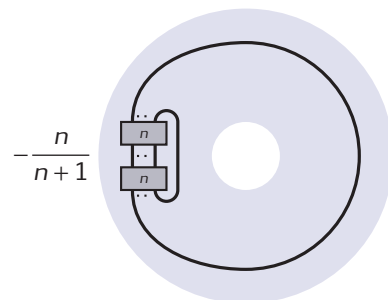
Intéressons-nous maintenant aux traces des idempotents de Jones-Wenzl, et définissons :

$$J_n = \text{Tr}(JW_n).$$

On voit facilement que $J_0 = 1$ et $J_1 = X$. La relation de récurrence (1) devient :

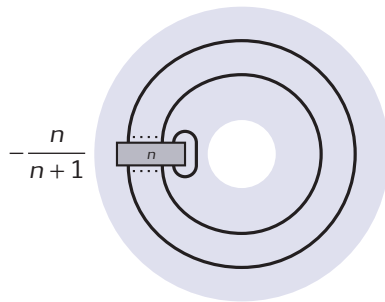


Le terme de gauche ci-dessus est J_{n+1} , et le premier terme de la partie droite de l'égalité est $J_n \cdot X = X \cdot J_n$. Pour le second, on fait glisser le rectangle grisé du haut le long de l'anneau pour l'amener en bas, et on obtient :



On peut maintenant utiliser l'idempotence pour remplacer les deux copies de JW_n par une seule et obtenir (dans le dessin ci-dessus, on a rajouté un brin par rapport aux précédents pour rendre le

résultat plus clair) :



Avant de conclure, il nous reste un petit calcul pour montrer le résultat suivant, pour $n \geq 1$:

$$\text{Diagram with box } n \text{ and a loop} = \frac{n+1}{n} \text{Diagram with box } n-1 \text{ and a loop} \quad (3)$$

Preuve. On vérifie cette relation en utilisant la relation (1). Pour $n = 1$, on a simplement :

$$\text{Diagram of a circle} = 2.$$

Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Diagram with box } n+1 \text{ and a loop} &= \text{Diagram with box } n \text{ and a loop} - \frac{n}{n+1} \text{Diagram with box } n \text{ and a loop} \\ &= (2 - \frac{n}{n+1}) \text{Diagram with box } n \text{ and a loop} = \frac{n+2}{n+1} \text{Diagram with box } n \text{ and a loop} \end{aligned}$$

□

Grâce à la relation (3), la relation (2) devient :

$$\begin{aligned} \text{Diagram with box } n+1 &= \text{Diagram with box } n \\ &- \text{Diagram with box } n-1 \end{aligned}$$

qui se réécrit

$$J_{n+1} = X \cdot J_n - J_{n-1}.$$

Victoire : on retrouve ici les polynômes de Tchebychev U_n !

Pour résumer, on a donc reconstruit des polynômes introduits au XIX^e siècle dans des problèmes d'interpolation à partir d'outils de découpage d'une algèbre introduite par des physiciens dans les années 70 et largement utilisée depuis dans l'étude des représentations de certains groupes de Lie. Pour faire le lien entre les deux, on a exhumé une notion de trace des plus classiques, remise fortement au goût du jour ces dernières années en tant que « processus de décatégorification ».

6. Un phénomène typique : la positivité

L'exemple que nous avons développé permet (avec un peu de travail et en tordant le cou à toute linéarité historique) de faire apparaître un phénomène assez caractéristique de la catégorification : la positivité. Dans notre cas, il s'énonce de cette façon : un produit de polynômes de Tchebychev s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients positifs de polynômes de Tchebychev.

Pour expliquer cela, remarquons d'abord que le processus de catégorification tel que nous l'avons décrit est suffisamment vague pour qu'un même objet puisse admettre plusieurs catégorifications, possiblement très différentes. C'est par exemple le cas pour un polynôme de nœuds bien connu, le polynôme de Jones (oui, le même Jones que précédemment!), qui peut se relever de différentes façons en des suites d'espaces vectoriels.

De manière reliée, une même catégorification peut admettre plusieurs descriptions, et trouver le lien exact entre ces descriptions peut apporter des informations intéressantes. C'est le cas pour nous : la construction que nous avons présentée est très reliée à la théorie des représentations du groupe $SL(2)$.

Cette description alternative associe aux points au bord (inférieur ou supérieur) de nos diagrammes un espace vectoriel de dimension 2^n , où n est le nombre de points considérés. Cet espace vectoriel s'obtient comme produit tensoriel de copies de \mathbb{C}^2 , et si on regarde les matrices de $SL_{\mathbb{C}}(2)$ agir sur \mathbb{C}^2 , on peut déduire une action de $SL_{\mathbb{C}}(2)$ sur $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$. Dans cette version, les diagrammes peuvent être interprétés comme des morphismes d'espace vectoriel (qui commutent à l'action de $SL_{\mathbb{C}}(2)$), et l'idem-

potent JW_n devient alors un projecteur au sens de l'algèbre linéaire classique : on peut montrer que c'est la projection sur un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1$ (qui plus est irréductible sous l'action du groupe spécial linéaire). Un intérêt de cette version est le suivant : lorsqu'on cherche à calculer $JW_n \otimes JW_m$, cela revient à calculer le produit d'un espace de dimension $n + 1$ et d'un espace de dimension $m + 1$, donnant un espace de dimension $(m + 1)(n + 1)$. La théorie des représentations nous dit alors que l'espace produit doit se découper en espaces irréductibles. On peut ensuite utiliser un autre résultat de théorie des représentations, qui énonce que les seuls espaces irréductibles sont ceux reliés aux JW_k , pour déduire que $JW_n \otimes JW_m$ doit s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs des JW_k . L'aspect capital ici est le fait que les coefficients sont positifs, et on le lit parce qu'un espace donné peut apparaître 0 fois, 1 fois, 2 fois... dans la décomposition, mais pas -1 fois. De là, en prenant la trace, on déduit le phénomène de positivité suivant : un produit de polynômes de Tchebychev s'écrit comme somme de polynômes de Tchebychev avec des coefficients positifs.

On pourrait même être plus précis et prouver que, pour $n \geq m$ ³ :

$$U_n \cdot U_m = U_{n+m} + U_{n+m-2} + \dots + U_{n-m}.$$

7. Quelques pistes

De manière générale, l'un des espoirs de la catégorification est de découvrir des outils mathématiques intéressants et éclairants. Dans le cas que nous avons présenté, il n'est pas nécessaire de parler de catégorification pour convaincre de l'intérêt des polynômes de Tchebychev, étudiés dans nombre de domaines depuis plus d'un siècle, ni des algèbres de Temperley-Lieb qui sont apparues dans l'étude des modèles de glace en deux dimensions avant de jouer un rôle dans plusieurs champs d'étude de l'algèbre et de la topologie.

On peut cependant citer, en toute partialité, quelques cadres dans lesquels cette théorie prend toute son importance. Autour des questions de positivité tout d'abord, les travaux d'Elias et Williamson [6] sont emblématiques d'une approche mêlant

catégorification et géométrie. Ils ont ainsi prouvé en 2012 une conjecture de Soergel qui relève la base de Kazhdan-Lusztig de l'algèbre de Hecke en une version catégorique [14], rendant les propriétés de positivité de cette base très naturelles. Le résultat précis (sans parler de la preuve subtile) demanderait trop de définitions pour pouvoir être énoncé ici⁴, mais il est intéressant de souligner que les objets mis en jeu sont reliés à l'algèbre de Temperley-Lieb que nous avons étudiée dans les paragraphes précédents : l'algèbre de Temperley-Lieb est un quotient de l'algèbre de Hecke, et celle-ci admet également des descriptions diagrammatiques. Ainsi, si nous avons utilisé dans cet article l'algèbre de Temperley-Lieb pour réaliser une catégorification des polynômes de Tchebychev, celle-ci admet elle-même des catégorifications, qui d'ailleurs rentrent dans le cadre du calcul diagrammatique.

Un autre principe directeur est la volonté de mettre en évidence des relations explicites⁵ entre objets qui n'étaient pas précédemment reliés : c'est l'idée-force dans les travaux de Chuang-Rouquier [4], et de manière générale dans la catégorification des groupes quantiques [12, 11].

Sur des questions plus topologiques, il semble raisonnable d'espérer des résultats liés à la catégorification, par exemple dans le cas des algèbres de surfaces (où, essentiellement, on dessine les anneaux qu'on a considérés plus haut sur une surface générale et on se demande comment se comporte la multiplication) [7, 3]. Ce cas-là est particulièrement intéressant puisqu'il fait le lien entre la notion d'algèbre amassée, un objet algébrique, et les algèbres dites d'écheveau qui sont un objet central en topologie quantique, liées à des théories quantiques des champs en physique théorique. Il est difficile de savoir quelle méthode mènera la première au résultat... peut-être une combinaison des deux ?

Pour terminer, l'idée de calcul diagrammatique qui a largement sous-tendu cet article est également un principe unificateur pour une bonne partie de notre domaine de recherche⁶, et vient peut-être du fait qu'une partie de ses acteurs a été formée en théorie des nœuds. Prouver que des algèbres définies à partir de diagrammes font bien ce qu'on veut peut s'avérer difficile, mais une fois que ce résultat est obtenu, il est incroyablement plus facile et visuel de faire des preuves avec des petits dessins qu'en

3. L'honnêteté nous oblige à préciser qu'il n'est pas vraiment nécessaire de savoir catégorifier les polynômes de Tchebychev pour prouver cette formule-là.

4. Les notes de Simon Riche pour le séminaire Bourbaki en donnent cependant une idée précise et concise.

5. Des isomorphismes, des équivalences...

6. Domaine de recherche qu'on pourrait désigner par le nom de topologie quantique.

manipulant des expressions interminables. Les articles de notre domaine de recherche ont tendance à être très longs, mais ils sont également truffés

de ces dessins et diagrammes qui les rendent presque aussi agréables à lire qu'une bonne BD.

Références

- [1] A. BELIAKOVA et al. « Current algebras and categorified quantum groups ». *Journal of the London Mathematical Society* **95**, n° 1 (2017), p. 248-276.
- [2] J. BERNSTEIN, I. FRENKEL et M. KHOVANOV. « A categorification of the Temperley-Lieb algebra and Schur quotients of $U(\mathfrak{sl}_2)$ via projective and Zuckerman functors. » *Selecta Mathematica, New Series* **5**, n° 2 (1999), p. 199-241.
- [3] F. BONAHOH et H. WONG. « Representations of the Kauffman bracket skein algebra I : invariants and miraculous cancellations ». *Inventiones mathematicae* **204**, n° 1 (2016), p. 195-243.
- [4] J. CHUANG et R. ROUQUIER. « Derived equivalences for symmetric groups and categorification ». *Annals of Mathematics* (2008), p. 245-298.
- [5] L. CRANE et I. B. FRENKEL. « Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases ». *Journal of Mathematical Physics* **35**, n° 10 (1994), p. 5136-5154.
- [6] B. ELIAS et G. WILLIAMSON. « The Hodge theory of Soergel bimodules ». *Annals of Mathematics* **180**, n° 3 (2014), p. 1089-1136.
- [7] V. FOCK et A. GONCHAROV. « Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory ». *Publications Mathématiques de l'IHÉS* **103** (2006), p. 1-211.
- [8] I. FRENKEL, M. KHOVANOV et C. STROPPEL. « A categorification of finite-dimensional irreducible representations of quantum \mathfrak{sl}_2 and their tensor products. » *Selecta Mathematica* **12**, n° 3-4 (2007), p. 379.
- [9] V. F. JONES. « Index for subfactors ». *Inventiones mathematicae* **72**, n° 1 (1983), p. 1-25.
- [10] M. KHOVANOV. « A categorification of the Jones polynomial ». *Duke Math. J.* **101**(3) (2000), p. 359-426.
- [11] M. KHOVANOV et A. LAUDA. « A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I ». *Representation Theory of the American Mathematical Society* **13**, n° 14 (2009), p. 309-347.
- [12] R. ROUQUIER. « 2-Kac-Moody algebras ». *arXiv preprint arXiv:0812.5023* (2008).
- [13] P. SHAN, M. VARAGNOLO et É. VASSEROT. « On the center of quiver Hecke algebras ». *Duke Mathematical Journal* **166**, n° 6 (2017), p. 1005-1101.
- [14] W. SOERGEL. « Kategorie \mathcal{O} , perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe. » *Journal of the American Mathematical Society* **3**, n° 2 (1990), p. 421-445.
- [15] H. WENZL. « On sequences of projections ». *CR Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **9**, n° 1 (1987), p. 5-9.



Hoel QUEFFELEC

IMAG, université de Montpellier, CNRS
hoel.queffelec@umontpellier.fr

Hoel Queffelec est Chargé de Recherche CNRS à l'Institut Montpellierain Alexander Grothendieck. Ses recherches portent sur les invariants quantiques de nœuds et leur catégorification, au confluent de la topologie et de la théorie des représentations.



Paul WEDRICH

Institut Max-Planck pour les mathématiques et université de Bonn, Allemagne.
p.wedrich@gmail.com

Paul Wedrich occupe un poste de « Hirzebruch Research Instructor » à l'Institut Max-Planck pour les mathématiques et à l'université de Bonn. Il étudie les invariants fonctoriels des nœuds et entrelacs, et leurs liens avec la théorie des représentations et la physique mathématique.

Nous remercions Christian Blanchet, Cédric Bonnafé, Alice Cleynen, Jérôme Germoni, Aaron Lauda, Anthony Licata, Emmanuel Opshtein, Alan Pinoy et Philippe Roche pour leurs commentaires sur des versions préliminaires de cet article. Hoel Queffelec a bénéficié du soutien des bourses ANR Quantact et Catore, Paul Wedrich des bourses ARC DP140103821 et DP160103479, et les deux auteurs sont soutenus par un PEPS JCJC du CNRS.

Métastabilité d'EDP stochastiques et déterminants de Fredholm

• N. BERGLUND

La métastabilité apparaît lorsqu'un système thermodynamique, tel que l'eau en surfusion (qui est liquide à température négative), se retrouve du « mauvais » côté d'une transition de phase, et reste pendant un temps très long dans un état différent de son état d'équilibre. Il existe de nombreux modèles mathématiques décrivant ce phénomène, dont des modèles sur réseau à dynamique stochastique. Dans ce texte, nous allons nous intéresser à la métastabilité dans des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) paraboliques. Certaines de ces équations sont mal posées, et ce n'est que grâce à des progrès très récents dans la théorie des EDPS dites singulières qu'on sait construire des solutions, via une procédure de renormalisation. L'étude de la métastabilité dans ces systèmes fait apparaître des liens inattendus avec la théorie des déterminants spectraux, dont les déterminants de Fredholm et de Carleman-Fredholm.

1. Introduction

Déposez une bouteille d'eau dans le compartiment à glace de votre réfrigérateur. Si l'eau est assez pure, en retirant la bouteille après quelques heures, vous trouverez l'eau qu'elle contient encore à l'état liquide, bien qu'à une température négative. On dit que l'eau est dans un état de surfusion. Agitez la bouteille, et vous verrez l'eau se transformer rapidement en glace.

L'eau en surfusion est un exemple d'état métastable. Dans un tel état, un système minimise localement un potentiel thermodynamique, tel que son énergie libre, mais pas globalement. La transition vers son état stable nécessite de franchir une barrière d'énergie, ce qui peut prendre beaucoup de temps si seules les fluctuations dues à l'agitation thermique entrent en jeu. Ainsi, la transformation

de l'eau en surfusion en glace se fait par nucléation, c'est-à-dire par l'apparition de cristaux de glace qui croissent petit à petit¹. La présence d'impuretés, ou un apport d'énergie de l'extérieur, peuvent toutefois accélérer le processus de solidification.

Il existe de nombreux modèles mathématiques décrivant le phénomène de la métastabilité. Les premiers à avoir été étudiés sont des modèles sur réseau, comme le modèle d'Ising avec une dynamique stochastique de type Metropolis-Hastings. On trouvera par exemple dans [13] un panorama de résultats sur la métastabilité dans les systèmes dynamiques stochastiques sur réseau. La métastabilité apparaît toutefois également dans des systèmes continus, tels que les équations différentielles stochastiques, que nous allons évoquer dans la section 2, ainsi que les EDPS stochastiques que nous aborderons dans la section 3.

1. Un cristal sphérique de rayon r modifie l'énergie du système de deux manières : d'une part, le fait que la glace est plus stable diminue l'énergie d'une quantité proportionnelle au volume du cristal, donc à r^3 ; d'autre part, l'interface entre le cristal et l'eau environnante augmente l'énergie d'un terme proportionnel à la surface du cristal, donc à r^2 . Pour de petites valeurs de r , la seconde contribution domine la première, alors que c'est l'inverse pour r assez grand. Pour cette raison, les cristaux de glace croissent très lentement tant que leur taille est plus petite qu'une valeur critique, pour laquelle le terme de volume et le terme de surface se compensent.

2. Diffusions réversibles

Le mouvement dans \mathbb{R}^n d'une particule brownienne de masse m , soumise à une force dérivant d'un potentiel V , une force de frottement visqueuse, et des fluctuations thermiques, peut être décrit par l'équation de Langevin

$$m \frac{d^2 x_t}{dt^2} = -\nabla V(x_t) - \gamma \frac{dx_t}{dt} + \sigma \frac{dW_t}{dt},$$

où W_t est un mouvement brownien (voir encart), γ est un coefficient de frottement, et le paramètre positif σ est relié à la température. Nous supposons dans la suite que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel confinant (borné inférieurement et tendant vers l'infini assez rapidement), et nous sommes intéressés surtout au cas où σ est petit. De plus, nous écrivons $\sigma = \sqrt{2\varepsilon}$, afin de simplifier un certain nombre d'expressions.

Lorsque $\varepsilon = 0$, si la masse m de la particule est assez petite par rapport au coefficient de frottement γ , la particule s'approche sans osciller d'un minimum local de V . On dit que son mouvement est *suramorti*. Pour ε quelconque et dans la limite de m/γ très petit, on peut montrer qu'après un changement d'unités, le mouvement de la particule brownienne est décrit par l'équation plus simple du premier ordre

$$\frac{dx_t}{dt} = -\nabla V(x_t) + \sqrt{2\varepsilon} \frac{dW_t}{dt}, \quad (1)$$

qu'on appelle une équation de Langevin suramortie. Mathématiquement parlant, c'est un exemple d'équation différentielle stochastique (EDS), et sa solution est aussi appelée une *diffusion*.

Par exemple, en dimension $n = 1$, si $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ l'équation (1) devient

$$\frac{dx_t}{dt} = -x_t + \sqrt{2\varepsilon} \frac{dW_t}{dt}, \quad (2)$$

et décrit un oscillateur harmonique suramorti soumis à un bruit thermique. Sa solution est appelée un *processus d'Ornstein-Uhlenbeck*.

Une manière de décrire les solutions de (1) est de déterminer leurs probabilités de transition $p_t(x, y)$. Celles-ci sont telles que si la particule démarre du point x au temps 0, alors la probabilité $\mathbb{P}^x\{x_t \in A\}$ de la trouver dans une région A en un

temps $t > 0$ s'écrit comme

$$\mathbb{P}^x\{x_t \in A\} = \int_A p_t(x, y) dy.$$

On sait que $p_t(x, y)$ satisfait à l'équation de Fokker-Planck

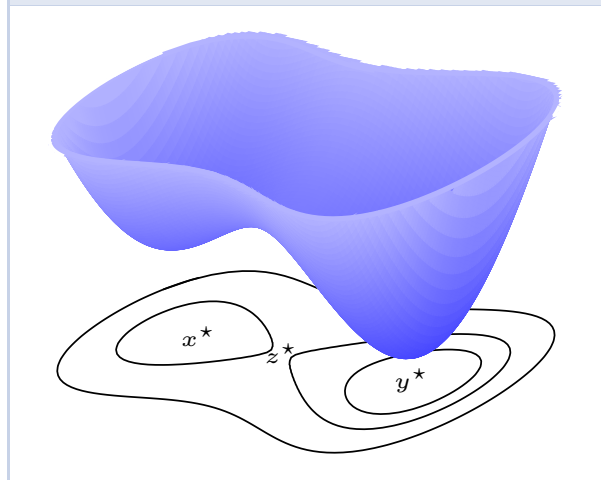
$$\partial_t p_t = \nabla \cdot (\nabla V p_t) + \varepsilon \Delta p_t \quad (3)$$

(les opérateurs Δ et ∇ agissant sur la variable y). Le terme $\nabla \cdot (\nabla V p_t)$ a pour effet de transporter p_t d'une distance proportionnelle à $-\nabla V$, alors que $\varepsilon \Delta p_t$ est un terme de diffusion, qui tend à élargir la distribution de x_t . Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (2), on peut vérifier que

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-e^{-2t})}} \exp\left\{-\frac{(y-xe^{-t})^2}{2\varepsilon(1-e^{-2t})}\right\}, \quad (4)$$

c'est-à-dire que x_t suit une loi normale d'espérance xe^{-t} et de variance $\varepsilon(1-e^{-2t})$. Remarquons que lorsque t tend vers l'infini, cette loi tend vers une loi normale centrée de variance ε : plus la température est faible, plus la variance est petite, et les fluctuations de x_t sont moins importantes.

FIGURE 1 – Un potentiel à deux puits. Les minima locaux x^* et y^* sont séparés par un point selle z^* .



Pour des potentiels V généraux, on ne sait pas résoudre l'équation de Fokker-Planck (3). Toutefois, on sait que la limite lorsque $t \rightarrow \infty$ de $p_t(x, y)$ est toujours égale à

$$\pi(y) = \frac{1}{Z} e^{-V(y)/\varepsilon}$$

où Z est une constante de normalisation telle que l'intégrale de $\pi(y)$ vaille 1. En fait, $\int \pi(y) dy$ est aussi

2. L'invariance de π suit du fait que π appartient au noyau de l'opérateur de Fokker-Planck apparaissant au membre de droite de l'équation (3), ce qui équivaut à la condition $\varepsilon \nabla \cdot (e^{-V/\varepsilon} \nabla (e^{V/\varepsilon} \pi)) = 0$. La relation d'équilibre détaillé (5) vient du fait que cet opérateur est auto-adjoint dans l'espace L^2 muni du poids $e^{V/\varepsilon}$.

une mesure de probabilité invariante du processus, c'est-à-dire que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \pi(x) p_t(x, y) dx = \pi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0.$$

Mieux, on sait montrer que la diffusion $(x_t)_{t \geq 0}$ est réversible par rapport à π : ses probabilités de transition satisfont à la condition d'équilibre détaillé

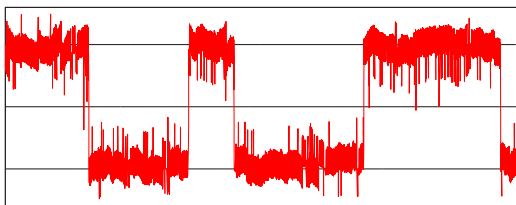
$$\pi(x) p_t(x, y) = \pi(y) p_t(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0. \quad (5)$$

Cette relation se vérifie aisément dans le cas des probabilités de transition (4) du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Physiquement, elle signifie que si l'on renverse le sens du temps, les trajectoires gardent la même probabilité. Autrement dit, si l'on filmait le système à l'équilibre et qu'on passait le film à l'envers, on serait incapable de détecter une différence.

La métastabilité se manifeste dans le système (1) dès que V admet plus d'un minimum local. Considérons le cas le plus simple où V est un potentiel à deux puits, c'est-à-dire que V admet exactement deux minima locaux x^* et y^* , ainsi qu'un point selle z^* (Figure 1). Les deux minima locaux représentent deux états métastables du système, car les solutions de l'EDS (1) passent beaucoup de temps au voisinage de ces points (Figure 2).

La question centrale est alors la suivante. Supposons que la diffusion démarre dans le premier minimum local x^* , et soit $\mathcal{B}_\delta(y^*)$ une boule de petit rayon δ centrée au second minimum. Quel est le comportement, pour ε petit, du premier temps où x_t visite $\mathcal{B}_\delta(y^*)$, noté $\tau = \inf\{t > 0 \mid x_t \in \mathcal{B}_\delta(y^*)\}$?

FIGURE 2 – Une trajectoire x_t de l'EDS (1) dans un cas de dimension 1, avec le potentiel $V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$. La trajectoire passe la plupart du temps à fluctuer autour des deux minima locaux $x^* = -1$ et $y^* = 1$ du potentiel V , avec des transitions occasionnelles d'un minimum vers l'autre. Dans cette simulation, ε a été choisi relativement grand pour que des transitions soient observables durant le temps de la simulation.



2.1 – Loi d'Arrhenius et théorie des grandes déviations

Une première réponse à cette question fut proposée dès la fin du XIX^e siècle par Jacobus van t'Hoff, puis justifiée physiquement par Svante Arrhenius [1] : la valeur moyenne de τ (son espérance) se comporte comme $e^{[V(z^*) - V(x^*)]/\varepsilon}$. Elle est donc exponentiellement grande dans la hauteur de la barrière de potentiel entre les deux minima locaux de V . Lorsque ε tend vers 0, le temps de transition moyen tend très rapidement vers l'infini, reflétant le fait qu'aucune transition n'est possible en l'absence de fluctuation thermique. Inversement, lorsque ε augmente, le temps moyen entre transitions devient de plus en plus court.

Une version rigoureuse de cette loi dite d'Arrhenius peut être déduite de la théorie des grandes déviations, développée dans le contexte des EDS par Mark Freidlin et Alexander Wentzell dans les années 1960-70 [10]. L'idée de l'approche est la suivante. On fixe un intervalle de temps $[0, T]$, et on associe à toute trajectoire déterministe dérivable $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction taux

$$\mathcal{I}_{[0, T]}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) + \nabla V(\gamma(t)) \right\|^2 dt. \quad (6)$$

Remarquons que cette fonction est nulle si et seulement si $\gamma(t)$ satisfait à l'équation $\frac{d\gamma}{dt}(t) = -\nabla V(\gamma(t))$, c'est-à-dire (1) pour $\varepsilon = 0$. Sinon, $\mathcal{I}_{[0, T]}(\gamma)$ est strictement positive, et mesure le « coût » pour que x_t reste proche de $\gamma(t)$. En effet, le principe des grandes déviations pour les diffusions affirme que la probabilité que cela arrive est proche (dans un sens précis) de l'exponentielle de $-\mathcal{I}_{[0, T]}(\gamma)/(2\varepsilon)$.

On peut également estimer la probabilité $p(T) = \mathbb{P}^{x^*}\{\tau \leq T\}$ que la diffusion partant de x^* atteigne la boule $\mathcal{B}_\delta(y^*)$ en un temps T au plus. Observons pour cela que pour tout $T_1 \in [0, T]$, la fonction taux est supérieure ou égale à $\mathcal{I}_{[0, T_1]}(\gamma)$, qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{[0, T_1]}(\gamma) &= \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) - \nabla V(\gamma(t)) \right\|^2 dt \\ &\quad + 2 \int_0^{T_1} \frac{d\gamma}{dt}(t) \cdot \nabla V(\gamma(t)) dt. \end{aligned}$$

Le second terme s'intègre et vaut $2[V(\gamma(T_1)) - V(\gamma(0))]$. Comme le potentiel le long de toute trajectoire γ reliant x^* à $\mathcal{B}_\delta(y^*)$ atteint au moins la valeur $V(z^*)$, le principe de grandes déviations

montre que $p(T)$ est au plus d'ordre $e^{-[V(z^*)-V(x^*)]/\varepsilon}$. On peut de plus construire une trajectoire de x^* à $\mathcal{B}_\delta(y^*)$ de coût $2[V(z^*) - V(x^*) + R(T)]$ où $R(T)$ est un reste tendant vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$.³ On conclut alors en comparant le processus à un processus de Bernoulli, effectuant des tentatives indépendantes d'atteindre $\mathcal{B}_\delta(y^*)$ pendant les intervalles de temps $[kT, (k+1)T]$, chacune avec probabilité de succès $p(T)$, dont l'espérance est égale à $1/p(T)$. Les erreurs faites en comparant les deux processus deviennent en effet négligeables dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.⁴

2.2 – Loi d'Eyring-Kramers et théorie du potentiel

La loi d'Eyring-Kramers, proposée dans les années 1930 [8, 14], est plus précise que la loi d'Arrhenius,⁵ puisqu'elle décrit le préfacteur du temps de transition moyen. Dénotons par Hess $V(x)$ la matrice Hessienne du potentiel V au point x , qu'on supposera toujours non dégénérée (c'est-à-dire de déterminant non nul). Toutes les valeurs propres de la matrice Hess $V(x^*)$ sont positives, alors que la matrice Hess $V(z^*)$ admet une unique valeur propre négative, que nous noterons $\lambda_-(z^*)$.⁶

Dans cette situation, la loi d'Eyring-Kramers affirme que

$$\mathbb{E}^{x^*}[\tau] = \frac{2\pi}{|\lambda_-(z^*)|} \times \sqrt{\frac{|\det \text{Hess } V(z^*)|}{\det \text{Hess } V(x^*)}} e^{[V(z^*)-V(x^*)]/\varepsilon} [1 + R(\varepsilon)], \quad (7)$$

où $R(\varepsilon)$ est un reste tendant vers 0 dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Il existe actuellement plusieurs méthodes permettant de démontrer ce résultat. Dans la suite de cette section, nous allons expliquer celle reposant sur la théorie du potentiel, développée par Anton Bovier, Michael Eckhoff, Véronique Gayraud et Markus Klein dans les années 2000 [6], qui se prête à une généralisation aux EDPs stochastiques (les lecteurs qui ne s'intéressent pas à ces précisions

techniques sont invités à passer directement à la section 3).

Fixons deux ensembles disjoints $A, B \subset \mathbb{R}^n$, à bord lisse – pensez à des voisinages des minima x^* et y^* du potentiel V . L'observation de base est que la *formule de Dynkin* (ou formule d'Itô pour les temps d'arrêt) permet d'exprimer plusieurs quantités probabilistes intéressantes comme solutions d'EDPs. Par exemple, la fonction $w_B(x) = \mathbb{E}^x[\tau_B]$, donnant l'espérance du temps d'atteinte de B partant de x , satisfait au *problème de Poisson*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} w_B)(x) = -1 & x \in B^c, \\ w_B(x) = 0 & x \in B, \end{cases} \quad (8)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L} = \varepsilon \Delta - \nabla V \cdot \nabla,$$

appelé *générateur* de la diffusion $(x_t)_{t \geq 0}$ (c'est l'adjoint dans L^2 de l'opérateur de Fokker-Planck apparaissant dans (3)).

La solution de l'équation de Poisson (8) peut être représentée sous la forme

$$w_B(x) = - \int_{B^c} G_{B^c}(x, y) dy, \quad (9)$$

où G_{B^c} est la *fonction de Green* associée à B^c , solution de

$$\begin{cases} (\mathcal{L} G_{B^c})(x, y) = \delta(x - y) & x \in B^c, \\ G_{B^c}(x, y) = 0 & x \in B. \end{cases}$$

La réversibilité implique que G_{B^c} satisfait à la *relation d'équilibre détaillé*

$$e^{-V(x)/\varepsilon} G_{B^c}(x, y) = e^{-V(y)/\varepsilon} G_{B^c}(y, x) \quad \forall x, y \in B^c. \quad (10)$$

Dans le cas $V = 0$, la fonction de Green a une interprétation électrostatique : $G_{B^c}(x, y)$ est la valeur en x du potentiel électrique créé par une charge unité placée en y , lorsque le domaine B est occupé par un conducteur à potentiel nul.

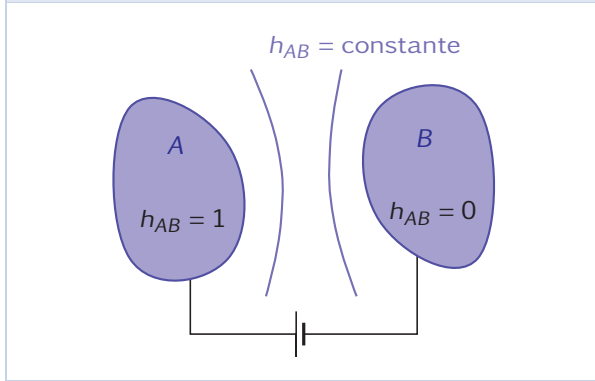
3. Pour T assez grand, on relie des points voisins de x^* et z^* en un temps $(T-1)/2$ par une trajectoire sur laquelle $\frac{dy}{dt}(t) = +\nabla V(y(t))$, de coût proche de $2[V(z^*) - V(x^*)]$. Puis on relie un point proche de z^* à $\mathcal{B}_\delta(y^*)$ en un temps $(T-1)/2$ par une trajectoire déterministe de coût nul. Enfin, on utilise le temps 1 restant pour compléter ces deux bouts de trajectoires par des segments de droites, de coût négligeable.

4. L'énoncé précis du résultat est que le temps de transition moyen $\mathbb{E}^{x^*}[\tau]$ satisfait à $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \mathbb{E}^{x^*}[\tau] = V(z^*) - V(x^*)$.

5. La loi d'Eyring-Kramers a en effet été proposée une trentaine d'années avant qu'on ne dispose d'une preuve de la loi d'Arrhenius.

6. En effet, si Hess $V(z^*)$ admettait plusieurs valeurs propres négatives, on pourrait trouver un chemin plus économique en termes d'altitude maximale pour aller de x^* à y^* . Par exemple, en dimension 2, les points stationnaires de V auxquels la Hessienne admet deux valeurs propres négatives sont des maxima locaux de V , alors que nous sommes intéressés aux cols, caractérisés par une valeur propre de chaque signe.

FIGURE 3 – Le potentiel d'équilibre h_{AB} décrit, dans le cas $V = 0$, le potentiel électrique dans un condensateur formé de deux conducteurs A et B , respectivement au potentiel 1 et 0.



Une seconde quantité importante est le *potentiel d'équilibre* $h_{AB}(x) = \mathbb{P}^x\{\tau_A < \tau_B\}$, aussi appelé « committor » : il donne la probabilité, partant de x , d'atteindre l'ensemble A avant l'ensemble B . C'est une fonction \mathcal{L} -harmonique, qui satisfait au *problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} (\mathcal{L}h_{AB})(x) = 0 & x \in (A \cup B)^c, \\ h_{AB}(x) = 1 & x \in A, \\ h_{AB}(x) = 0 & x \in B. \end{cases}$$

Le potentiel d'équilibre admet également une expression intégrale en termes de la fonction de Green, à savoir

$$h_{AB}(x) = - \int_{\partial A} G_{B^c}(x, y) e_{AB}(dy), \quad (11)$$

où e_{AB} est une mesure concentrée sur ∂A , appelée *mesure d'équilibre*, définie par

$$e_{AB}(dx) = (-\mathcal{L}h_{AB})(dx).$$

L'interprétation électrostatique de h_{AB} est que c'est le potentiel électrique dans un condensateur, formé de deux conducteurs en A et B , respectivement au potentiel 1 et 0 (Figure 3). Enfin, la *capacité*

$$\text{cap}(A, B) = \int_{\partial A} e^{-V(x)/\varepsilon} e_{AB}(dx)$$

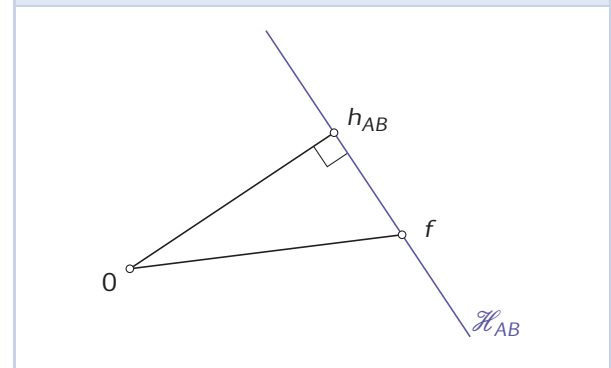
est la constante de normalisation assurant que

$$\nu_{AB}(dx) = \frac{1}{\text{cap}(A, B)} e^{-V(x)/\varepsilon} e_{AB}(dx)$$

soit une mesure de probabilité sur ∂A . En électrostatique, $\text{cap}(A, B)$ s'interprète comme la charge

totale dans le condensateur (qui est bien égale à la capacité pour une différence de potentiel unité).

FIGURE 4 – Le principe de Dirichlet affirme que la capacité minimise la distance à l'origine, mesurée par la forme de Dirichlet, parmi l'ensemble \mathcal{H}_{AB} des fonctions h valant 1 en A et 0 en B . Cela découle du fait que $\langle f, -\mathcal{L}h_{AB} \rangle_\pi$ est constante pour $f \in \mathcal{H}_{AB}$.



En combinant les expressions (9) de w_B et (11) de h_{AB} avec la relation d'équilibre détaillé (10) de la fonction de Green, on obtient la relation

$$\int_{\partial A} \mathbb{E}^x[\tau_B] \nu_{AB}(dx) = \frac{1}{\text{cap}(A, B)} \int_{B^c} e^{-V(x)/\varepsilon} h_{AB}(x) dx, \quad (12)$$

qui est essentielle pour l'approche par la théorie du potentiel. En prenant pour A une petite boule centrée en x^* , on peut en effet montrer (soit à l'aide d'inégalités de Harnack, soit par un argument de couplage) que $\mathbb{E}^x[\tau_B]$ varie très peu sur ∂A . Le membre de gauche de (12) est donc proche de l'espérance cherchée $\mathbb{E}^{x^*}[\tau_B]$. Quant au membre de droite, on commence par observer que si B est une petite boule centrée en y^* , alors h_{AB} est proche de 1 dans le bassin d'attraction de x^* , et exponentiellement petite (dans un sens qu'on contrôle) dans le bassin de y^* . La méthode de Laplace permet alors de montrer que

$$\int_{B^c} e^{-V(x)/\varepsilon} h_{AB}(x) dx \simeq \sqrt{\frac{(2\pi\varepsilon)^n}{\det \text{Hess } V(x^*)}} e^{-V(x^*)/\varepsilon}. \quad (13)$$

Il reste donc à estimer la capacité. Ceci peut être fait à l'aide de principes variationnels. La *forme de Dirichlet* est la forme quadratique associée au générateur, qui peut s'écrire, à l'aide d'une intégration

par parties (identité de Green) comme

$$\mathcal{E}(f, f) = \langle f, -\mathcal{L}f \rangle_\pi = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} e^{-V(x)/\varepsilon} \|\nabla f(x)\|^2 dx,$$

où $\langle f, g \rangle_\pi$ est le produit scalaire avec poids $\pi(x)$. Le *principe de Dirichlet* affirme que la capacité $\text{cap}(A, B)$ est égale à la borne inférieure de la forme de Dirichlet sur toutes les fonctions valant 1 en A et 0 en B , et que cet infimum est atteint pour $f = h_{AB}$. C'est une conséquence directe du fait que $\langle f, -\mathcal{L}h_{AB} \rangle_\pi = \text{cap}(A, B)$ pour tous les f satisfaisant à ces mêmes conditions aux bords, et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Figure 4). En électrostatique, la forme de Dirichlet s'interprète comme l'énergie électrostatique du condensateur, qui est effectivement minimale dans l'état d'équilibre.

Une borne inférieure à la capacité peut être obtenue à l'aide du *principe de Thomson*. Pour un champ de vecteurs $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on définit la forme quadratique

$$\mathcal{D}(\varphi, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{(A \cup B)^c} e^{V(x)/\varepsilon} \|\varphi(x)\|^2 dx.$$

Le principe de Thomson affirme que l'inverse de la capacité est l'infimum de \mathcal{D} sur tous les champs de vecteurs de divergence nulle, et dont le flux sur ∂A est égal à 1.

En choisissant des fonctions tests adéquates pour les deux principes variationnels (qu'on devine en s'inspirant du cas de la dimension 1, qui peut être résolu explicitement), on trouve

$$\text{cap}(A, B) \simeq \frac{|\lambda_-(z^*)|}{2\pi} \sqrt{\frac{(2\pi\varepsilon)^n}{|\det \text{Hess } V(z^*)|}} e^{-V(z^*)/\varepsilon}.$$

En prenant le rapport entre (13) et cette dernière expression, on obtient bien la formule d'Eyring-Kramers (7).

3. Métastabilité pour l'équation d'Allen-Cahn

Notre objectif est maintenant de quantifier la métastabilité, de manière similaire aux EDS, pour des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS). Nous allons considérer ici l'équation d'Allen-Cahn

$$\partial_t \phi = \Delta \phi + \phi - \phi^3 + \sqrt{2\varepsilon} \xi, \quad (14)$$

qui est un modèle simple de séparation de phases, dans un mélange de glace et d'eau par exemple, ou

encore dans un alliage. C'est également l'une des EDPS les plus simples présentant un comportement métastable.

L'inconnue est un champ $\phi(t, x)$, où la variable spatiale x appartient au tore $\mathbb{T}_L^d = (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^d$ de taille L (on pourrait travailler avec le tore unité quitte à introduire un paramètre de viscosité devant le Laplacien). Le terme ξ dénote ce que l'on appelle un *bruit blanc espace-temps*. Intuitivement, ξ représente un bruit brownien agissant de manière indépendante en tout point de l'espace, ce qui se traduit par la relation

$$\mathbb{E}[\xi(t, x)\xi(s, y)] = \delta(t - s)\delta(x - y). \quad (15)$$

La définition mathématique de ξ est que c'est une distribution aléatoire gaussienne, centrée, et de covariance donnée par

$$\mathbb{E}[\langle \xi, \varphi_1 \rangle \langle \xi, \varphi_2 \rangle] = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{L^2}$$

pour tout couple de fonctions tests $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2$. En effet, en remplaçant formellement les fonctions test par des distributions de Dirac, on retrouve la relation (15). De plus, si $\varphi_T(t, x)$ vaut 1 si $t \in [0, T]$ et x appartient à un ensemble $A \subset \mathbb{T}_L^d$, et 0 sinon, alors $W_T = \langle \xi, \varphi_T \rangle$ est un mouvement brownien.

On peut considérer (14) comme un analogue en dimension infinie de la diffusion gradient (1), pour le potentiel

$$V(\phi) = \int_{\mathbb{T}_L^d} \left(\frac{1}{2} \|\nabla \phi(x)\|^2 - \frac{1}{2} \phi(x)^2 + \frac{1}{4} \phi(x)^4 \right) dx. \quad (16)$$

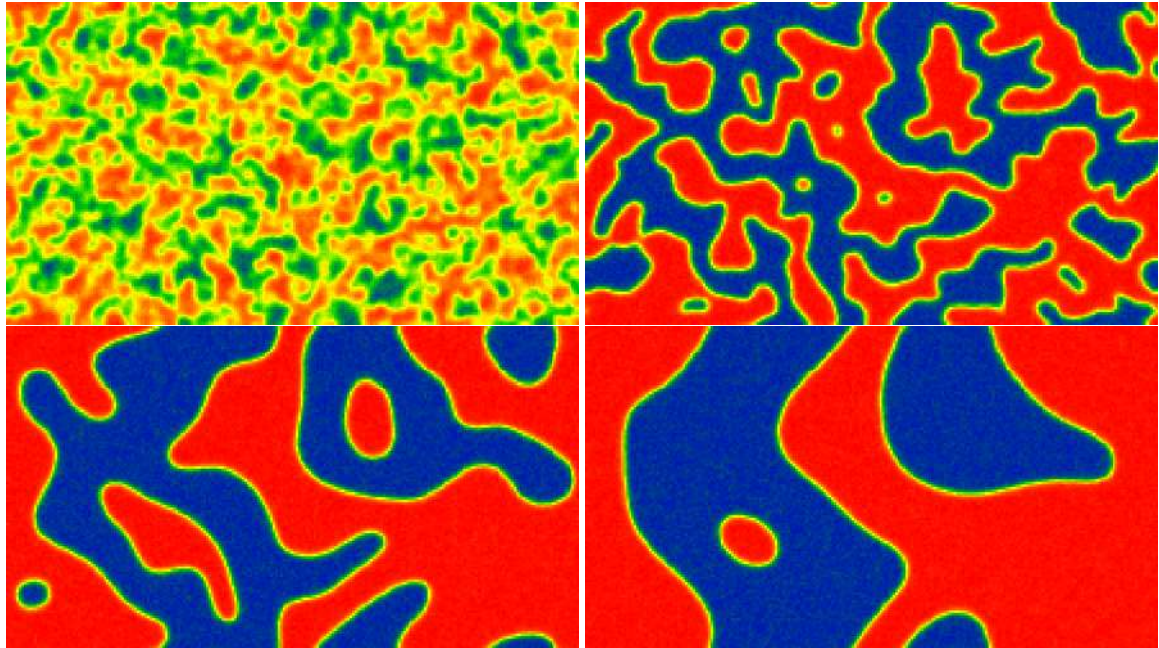
En effet, pour toute fonction périodique ψ , la dérivée de Gâteaux de V dans la direction ψ vaut

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(\phi + h\psi) - V(\phi)}{h} \\ &= \int_{\mathbb{T}_L^d} \left(\nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) - \phi(x)\psi(x) + \phi(x)^3\psi(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Une intégration par parties du terme en $\nabla \phi \cdot \nabla \psi$ montre que cette dérivée est précisément égale au produit scalaire $-\langle \Delta \phi + \phi - \phi^3, \psi \rangle_{L^2}$ du membre de droite de (14) avec ψ , changé de signe.

Les solutions stationnaires de (14) dans le cas déterministe $\varepsilon = 0$ sont les points critiques de V . Parmi ces points critiques, il n'en existe que deux qui sont des minima locaux, et jouent donc le même rôle que x^* et y^* dans le cas des diffusions : ce sont les solutions identiquement égales à ± 1 , que nous noterons ϕ_\pm^* . Si ϕ représente un mélange d'eau et de glace, alors ϕ_\pm^* et ϕ_\pm^* représentent respectivement la glace pure et l'eau pure. Selon la taille L du

FIGURE 5 – Évolution temporelle d’une solution de l’équation d’Allen-Cahn stochastique sur un tore de dimension 2, illustrant le phénomène de décomposition spinodale, ou séparation lente des phases. Les couleurs rouge et bleue représentent, respectivement, des régions où le champ ϕ est proche de 1 et de -1 , alors que le jaune correspond à ϕ proche de 0. L’effet principal du bruit sur ces simulations est de rendre les phases rouge et bleue légèrement granulaires. Les interfaces entre les deux phases restent relativement lisses, ce qui est dû à l’effet régularisant du Laplacien.



domaine, il existe un ou plusieurs autres points critiques. Dans ce qui suit, pour simplifier, nous allons nous concentrer sur le cas $L < 2\pi$. Alors, l’unique autre point critique est la fonction identiquement nulle, que nous noterons ϕ_{trans}^* car il s’agit de l’état de transition pour aller de ϕ_-^* à ϕ_+^* . Il joue le même rôle que z^* dans le cas des diffusions.

La Figure 5 donne un exemple d’évolution temporelle d’une solution de (14) en dimension 2.⁷ Celle-ci présente un phénomène de séparation progressive des phases (en physique du solide, par exemple pour la séparation des phases d’un alliage, on parle aussi de *décomposition spinodale*), qui correspond à une convergence assez lente vers l’un des états stables ϕ_{\pm}^* . Une différence par rapport au cas de la diffusion de dimension 1 représenté dans la Figure 2 est que l’on observe pendant longtemps un mélange des deux phases. Ce n’est qu’au bout d’un

temps très long (dépassant ce qui est montré sur la Figure 5) que le système s’approche d’une phase pure, soit bleue, soit rouge. Cela est dû au fait que la condition initiale, aléatoire à moyenne nulle, incite le champ à s’approcher d’abord du point selle ϕ_{trans}^* (qui est également de moyenne nulle), avant d’être finalement attiré par ϕ_-^* ou ϕ_+^* . Comme, de plus, on est en dimension infinie, le système a beaucoup de « place » lui permettant d’évoluer avant de converger vers un équilibre.

Si, contrairement à ce qui est montré dans la Figure 5, on démarrerait la simulation dans l’une des phases pures, par exemple ϕ_-^* , on verrait le système rester très longtemps près de cet état, avant de faire une transition vers l’autre phase, c’est-à-dire ϕ_+^* . Puis, après un autre intervalle de temps très long, on le verrait retourner près de l’état initial, et ainsi de suite. La valeur moyenne du champ se com-

7. On trouvera des animations sur les pages <https://www.idpoisson.fr/berglund/simchain.html> pour la dimension 1, et <https://www.idpoisson.fr/berglund/simac.html> pour la dimension 2. Voir aussi la page YouTube <http://tinyurl.com/q43b61f>. Par ailleurs, on trouvera des simulations interactives aux adresses <https://experiences.math.cnrs.fr/Equation-aux-Derivees-Partielles.html> et <https://experiences.math.cnrs.fr/Equation-aux-Derivees-Partielles-69.html>.

porterait donc un peu comme dans la Figure 2. On a donc bien affaire à un phénomène de métastabilité. Une question naturelle qui se pose ici pour $\varepsilon > 0$ est la suivante : si l'on démarre avec une condition initiale proche de ϕ^* , quelle est l'asymptotique précise du temps nécessaire à atteindre un petit voisinage (dans une norme appropriée) de la solution ϕ_+^* ?

3.1 – Dimension 1 : déterminants de Fredholm

Dans le cas de la dimension $d = 1$, William Faris et Giovanni Jona-Lasinio ont établi dans [9] un principe de grandes déviations, ayant pour fonction taux (comparer à l'expression (6) de la fonction taux d'une diffusion)

$$\mathcal{I}_{[0, \tau]}(\gamma) = \frac{1}{2} \times \int_0^T \int_{\mathbb{T}_L} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(t, x) - \gamma(t, x) + \gamma(t, x)^3 \right]^2 dx dt. \quad (17)$$

Soit τ le temps de première atteinte d'une boule $B = \{\phi : \|\phi - \phi_+^*\|_{L^\infty} < \delta\}$, avec $\delta > 0$ petit et indépendant de ε . Par une méthode tout à fait analogue à celle discutée dans la section 2.1, on obtient que τ satisfait à la loi d'Arrhenius

$$\mathbb{E} \phi^*[\tau] \simeq e^{[V(\phi_{\text{trans}}^*) - V(\phi_+^*)]/\varepsilon}.$$

Qu'en est-il de la loi d'Eyring-Kramers ? Si nous voulons extrapoler l'expression (7) obtenue en dimension finie, il nous faut d'abord déterminer l'analogue des matrices Hessiennes de V aux points critiques. Une intégration par parties montre que le développement limité d'ordre 2 du potentiel autour de $\phi_{\text{trans}}^* = 0$ s'écrit

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \langle \phi, [-\Delta - 1]\phi \rangle_{L^2} + \mathcal{O}(\phi^4),$$

ce qui nous permet d'identifier Hess $V(\phi_{\text{trans}}^*)$ avec la forme quadratique $-\Delta - 1$. Un argument similaire appliqué en ϕ_+^* montre que Hess $V(\phi_+^*)$ s'identifie à $-\Delta + 2$.⁸ Pris séparément, ces deux opérateurs n'ont pas de déterminant bien défini. Toutefois, leur rapport peut s'écrire

$$\det((-\Delta + 2)(-\Delta - 1)^{-1}) = \det(\mathbb{1} + 3(-\Delta - 1)^{-1}). \quad (18)$$

8. Les valeurs -1 et 2 sont les dérivées secondes de la fonction $\phi \mapsto \frac{1}{4}\phi^4 - \frac{1}{2}\phi^2$ en 0 et en -1 .

9. Les racines non nulles du polynôme caractéristique $c_M(t) = \det(t\mathbb{1} - M)$ d'une matrice M sont les inverses des racines de $\tilde{c}_M(s) = \det(\mathbb{1} - sM)$. Le déterminant de Fredholm de $-sM$ est l'analogue de $\tilde{c}_M(s)$ lorsque M est un opérateur linéaire de dimension infinie.

Il s'agit d'un *déterminant de Fredholm*, un objet qui permet de généraliser le polynôme caractéristique à des opérateurs en dimension infinie.⁹ Pour voir que ce déterminant converge, notons que les valeurs propres λ_k de $3(-\Delta - 1)^{-1}$ décroissent comme $1/k^2$ pour k grand. Le logarithme du déterminant se comporte donc comme la somme des $\ln(1 + \lambda_k)$, c'est-à-dire la somme des λ_k , ou encore la trace de $3(-\Delta - 1)^{-1}$. Le critère de Riemann nous confirme que cette somme converge, on dit que $3(-\Delta - 1)^{-1}$ est *de classe trace*. En fait, en utilisant deux identités d'Euler sur les produits infinis, on peut obtenir la valeur explicite

$$\det(\mathbb{1} + 3(-\Delta - 1)^{-1}) = -\frac{\sinh^2(L/\sqrt{2})}{\sin^2(L/2)}.$$

Le théorème suivant est un cas particulier d'un résultat montré dans [5] (et aussi d'un résultat de [2], obtenu par une approche différente).

Théorème 1. *Pour $L < 2\pi$, on a*

$$\mathbb{E} \phi^*[\tau] = \frac{2\pi}{|\lambda_-(\phi_{\text{trans}}^*)|} \times \frac{e^{[V(\phi_{\text{trans}}^*) - V(\phi_+^*)]/\varepsilon}}{\sqrt{|\det(\mathbb{1} + 3(-\Delta - 1)^{-1})|}} [1 + R(\varepsilon, \delta)], \quad (19)$$

où $\lambda_-(\phi_{\text{trans}}^*) = -1$ est la plus petite valeur propre de $-\Delta - 1$, et $R(\varepsilon, \delta)$ est un terme d'erreur convergent vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. (La vitesse de cette convergence dépend de L , elle devient plus lente lorsque L s'approche de 2π .)

Donnons une esquisse de la démonstration du Théorème 1. La première étape consiste en une *approximation de Galerkin spectrale*. Soit $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une base de Fourier de $L^2(\mathbb{T}_L)$, et pour un entier positif N (appelé *paramètre de coupure ultra-violette*), soit P_N la projection sur l'espace \mathcal{H}_N engendré par $\{e_k\}_{|k| \leq N}$. L'équation projetée

$$\partial_t \phi_N = \Delta \phi_N + \phi_N - P_N(\phi_N^3) + \sqrt{2\varepsilon} P_N \xi$$

est alors équivalente à une EDS de dimension finie de la forme (1), avec V le potentiel (16) restreint à \mathcal{H}_N . On peut donc appliquer l'approche par la théorie du potentiel discutée dans la section 2.2, en prenant garde à bien gérer la dépendance des

termes d'erreur dans le paramètre de coupure N , puis prendre la limite $N \rightarrow \infty$.

Une difficulté majeure est donc d'obtenir une estimation similaire à (19) pour l'approximation de Galerkin, avec un terme d'erreur $R(\varepsilon, \delta)$ qui ne dépende pas de N . Une idée clé de la démonstration consiste à décomposer le potentiel V en une partie quadratique et une partie d'ordre supérieur. Cela permet d'interpréter la capacité et l'intégrale du membre de droite de la relation (12) comme des espérances, sous une mesure gaussienne, de certaines variables aléatoires, que l'on peut ensuite estimer à l'aide d'arguments probabilistes. On trouvera des détails sur ce calcul dans [3, Section 2.7].

3.2 – Dimension 2 : déterminants de Carleman-Fredholm

Intéressons-nous maintenant à l'équation d'Allen-Cahn (14) sur le tore de dimension $d = 2$. Il s'avère que contrairement au cas $d = 1$, l'équation n'est plus bien posée! C'est une conséquence du fait que le bruit blanc espace-temps est plus singulier en dimension 2 qu'en dimension 1. Dans [7], Giuseppe Da Prato et Arnaud Debussche ont résolu ce problème par un procédé de *renormalisation*, inspiré de la physique quantique des champs. Au lieu de (14), ils considèrent, pour $\delta > 0$, l'équation régularisée

$$\partial_t \phi = \Delta \phi + \phi + 3\varepsilon C_\delta \phi - \phi^3 + \sqrt{2\varepsilon} \xi^\delta. \quad (20)$$

Ici ξ^δ est une régularisation du bruit blanc spatio-temporel, définie comme la convolution $\rho^\delta * \xi$, où

$$\rho^\delta(t, x) = \frac{1}{\delta^4} \rho\left(\frac{t}{\delta^2}, \frac{x}{\delta}\right),$$

pour une fonction test ρ d'intégrale 1. Par conséquent, ρ^δ converge vers la distribution de Dirac lorsque δ tend vers 0. De plus, C_δ est une constante de *renormalisation* qui diverge comme $\ln(\delta^{-1})$ lorsque δ tend vers 0. Comme ξ^δ est une fonction, et non une distribution, l'équation dite *renormalisée* (20) admet des solutions pour tout $\delta > 0$. Da Prato et Debussche ont alors montré que ces solutions convergent vers une limite bien définie lorsque δ tend vers 0.

À première vue, on pourrait penser que les états d'équilibre stables de l'équation (20) se trouvent en $\pm\sqrt{1 + 3\varepsilon C_\delta}$, et tendent donc vers l'infini lorsque δ

tend vers 0 à ε fixé. En fait, il n'en est rien – une première indication de cela est que Martin Hairer et Hendrik Weber ont démontré dans [12] un principe de grandes déviations, avec une fonction taux analogue à celle du cas unidimensionnel (voir (17)). Le point à noter est que comme en dimension 1, cette fonction taux ne fait pas apparaître de contre-terme de renormalisation. On en déduit la loi d'Arrhenius

$$\mathbb{E}^{\phi^\star}[\tau] \simeq e^{[V(\phi_{\text{trans}}^\star) - V(\phi^\star)]/\varepsilon},$$

où V est le potentiel (16), indépendant de tout terme de renormalisation. Comme avant, τ est bien le temps de transition entre les équilibres ϕ_-^\star et ϕ_+^\star , situés en ± 1 . On peut interpréter ce résultat comme indiquant que le *contre-terme* $3\varepsilon C_\delta \phi$ sert uniquement à rendre la non-linéarité ϕ^3 bien définie.

Et pour la loi d'Eyring-Kramers? Ici, il s'avère que le déterminant de Fredholm (18) ne converge pas. En effet, $3(-\Delta - 1)^{-1}$ n'est plus de classe trace en dimension 2, puisque ses valeurs propres sont proportionnelles à $1/(k_1^2 + k_2^2)$ avec k_1 et k_2 deux entiers non nuls. Or la somme de ces valeurs propres diverge comme la série harmonique!

La solution à ce problème consiste tout d'abord à travailler, comme en dimension 1, avec une approximation de Galerkin spectrale avec coupure ultraviolette N . Au lieu de régulariser le bruit blanc espace-temps par convolution, on peut à nouveau considérer sa projection de Galerkin spectrale $\xi_N = P_N \xi$, avec un contre-terme

$$3\varepsilon C_N = \frac{3\varepsilon}{L^2} \text{Tr}(P_N(-\Delta - 1)^{-1})$$

qui diverge comme $\ln(N)$ (la constante C_N est la variance du *champ libre gaussien* tronqué¹⁰). Le potentiel renormalisé s'écrit alors

$$V_N(\phi) = \int_{\mathbb{T}_L^2} \left[\frac{1}{2} \|\nabla \phi(x)\|^2 + \frac{1}{4} \phi(x)^4 - \frac{1 + 3\varepsilon C_N}{2} \phi(x)^2 \right] dx.$$

Le point crucial est alors de noter que

$$V_N(\phi_{\text{trans}}^\star) - V_N(\phi_-^\star) = \frac{L^2}{4} + \frac{3}{2} L^2 \varepsilon C_N.$$

Le nouveau terme $\frac{3}{2} L^2 \varepsilon C_N$ est précisément celui qui va faire converger le préfacteur. En effet, la formule d'Eyring-Kramers fait intervenir le facteur

$$\det(\mathbb{1} + 3P_N(-\Delta - 1)^{-1}) e^{-3\text{Tr}(P_N(-\Delta - 1)^{-1})},$$

qui admet une limite lorsque $N \rightarrow \infty$ (cela suit du fait que son logarithme se comporte comme la

10. Pour plus d'informations sur le champ libre gaussien, voir l'article de Rémi Rhodes dans la *Gazette* n° 157 (juillet 2018).

somme des $1/(k_1^2 + k_2^2)^2$). Il s'agit en fait d'une régularisation connue du déterminant de Fredholm, appelée aussi *déterminant de Carleman-Fredholm*, parfois notée $\det_2(\mathbb{1} + 3(-\Delta - 1)^{-1})$. Contrairement au déterminant de Fredholm, ce déterminant modifié est bien défini pour les opérateurs dont le carré est de classe trace, appelés *opérateurs de Hilbert-Schmidt*, dont $3(-\Delta - 1)^{-1}$ fait partie.

Le théorème suivant combine les résultats de [4] et [15].

Théorème 2. *Soit τ le temps d'atteinte d'une boule (dans la norme de Sobolev H^s pour un $s < 0$), centrée en ϕ_+^* . Pour $L < 2\pi$, on a*

$$\mathbb{E}^{\phi_+^*}[\tau] = \frac{2\pi}{|\lambda_-(\phi_{\text{trans}}^*)|} \times \frac{e^{[V(\phi_{\text{trans}}^*) - V(\phi_+^*)]/\varepsilon}}{\sqrt{|\det_2(\mathbb{1} + 3(-\Delta - 1)^{-1})|}} [1 + R(\varepsilon, \delta)], \quad (21)$$

où $\lambda_-(\phi_{\text{trans}}^*) = -1$ est la plus petite valeur propre de $-\Delta - 1$, et $R(\varepsilon, \delta)$ est un terme d'erreur convergeant vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (à une vitesse dépendant de L).

Ce résultat confirme que la renormalisation n'a pas pour effet de déplacer les états stationnaires, puisque le théorème s'applique bien aux états ϕ_{\pm}^* situés en ± 1 . En revanche, la procédure de renormalisation est nécessaire pour obtenir un préfacteur fini pour le temps de transition, puisque le rapport de déterminants spectraux et le contre-terme $\frac{3}{2}L^2\varepsilon C_N$ dans le potentiel se compensent exactement.

4. Quelques problèmes ouverts

Une question naturelle est de savoir s'il existe une loi d'Eyring-Kramers pour l'équation d'Allen-Cahn en dimension $d = 3$ (en dimension 4, on ne s'attend pas à l'existence de solutions non triviales à cette équation). Comme montré par Martin Hairer dans le très remarquable article [11]¹¹, qui lui a valu la Médaille Fields en 2014, la forme de l'équation

renormalisée est alors

$$\partial_t \phi = \Delta \phi + \phi + \left[3\varepsilon C_\delta^{(1)} - 9\varepsilon^2 C_\delta^{(2)} \right] \phi - \phi^3 + \sqrt{2\varepsilon} \xi^\delta,$$

où $C_\delta^{(1)}$ et $C_\delta^{(2)}$ divergent respectivement comme δ^{-1} et $\ln(\delta^{-1})$. Le premier contre-terme provient de la même procédure de renormalisation qu'en dimension 2 (appelée *renormalisation de Wick*), et ne pose pas de nouvelle difficulté par rapport au cas $d = 2$. En revanche, le second contre-terme est propre à la dimension 3, et source de nombreuses difficultés. En particulier, contrairement au cas $d = 2$, la mesure invariante de l'équation d'Allen-Cahn est singulière par rapport au champ libre gaussien.

On peut toutefois remarquer que $(-\Delta - 1)^{-1}$ reste Hilbert-Schmidt en dimension 3. Comme le second contre-terme apparaît avec un facteur ε^2 , on s'attend à ce qu'une formule d'Eyring-Kramers similaire à (21) reste valable ici. Avec Ajay Chandra, Giacomo Di Gesù et Hendrik Weber, nous sommes parvenus à établir une partie des bornes nécessaires à établir ce résultat. Toutefois, pour l'heure la borne inférieure sur la capacité nous résiste encore.

Bien entendu, il serait souhaitable d'obtenir des formules d'Eyring-Kramers pour d'autres EDPS que celle d'Allen-Cahn. Un exemple est l'équation de Cahn-Hilliard, qui décrit la séparation de phases dans des situations où le volume total de chaque phase est conservé, comme dans le cas de mélanges d'eau et d'huile. Toutefois, comme la plupart des modèles mathématiques de systèmes métastables, ces EDPS restent basées sur une dynamique sur réseau : chaque point du réseau est caractérisé par son état, mais reste fixé au même endroit. C'est un bon modèle pour certains alliages ou des matériaux ferromagnétiques, qui ont une structure cristalline, avec des atomes ou des spins de différents types attachés à chaque site. Pour un mélange d'eau et de glace, toutefois, il n'y a pas de réseau sous-jacent. L'un des grands défis de la théorie de la métastabilité est d'analyser des modèles tenant compte du fait que les cristaux de glace peuvent se déplacer à travers l'eau liquide, pour former des cristaux plus grands par agglomération.

11. On pourra consulter l'article de François Delarue dans la *Gazette* n° 143 (janvier 2015) pour plus de détails sur la théorie introduite par Martin Hairer, appelée théorie des *structures de régularité*.

Encart : le mouvement brownien

Le mouvement brownien est un modèle mathématique pour le mouvement erratique d'une particule immergée dans un fluide, sous l'effet des collisions avec les molécules du fluide. Il fut observé pour la première fois par le naturaliste écossais Robert Brown en 1827, lors de l'étude au microscope de grains de pollen.

Les premières descriptions mathématiques du mouvement brownien furent proposées par le mathématicien français Louis Bachelier en 1901, pour des applications en finance, et par Albert Einstein en 1905. Des variantes de leurs approches furent développées par Marian Smoluchowski en 1906 et par Paul Langevin en 1908. Les calculs d'Einstein permirent à Jean Perrin d'estimer expérimentalement le nombre d'Avogadro en 1909, ce qui lui valut le prix Nobel de physique en 1926.

Considérons le cas de la dimension 1, et supposons que la particule subit des collisions régulières, à intervalles de temps Δt . Entre deux collisions successives, la particule se déplace d'une distance Δx , avec probabilité $\frac{1}{2}$ soit vers la gauche, soit vers la droite. Sa position au temps $n\Delta t$ est donc donnée par $S_n \Delta x$, où S_n est une suite d'entiers telle que l'incrément $S_{n+1} - S_n$ vaille 1 ou -1, chaque fois avec probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose de plus que chaque incrément est indépendant de tous les incréments précédents. La suite des S_n s'appelle une marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} (voir Figure 6).

Comme en pratique, les intervalles d'espace et de temps Δx et Δt sont très petits, il semble pertinent de les faire tendre vers zéro, afin d'obtenir un objet universel. Il s'avère que cette limite est intéressante seulement si Δt est proportionnel à Δx^2 (c'est une conséquence du théorème central limite). Cela revient à poser

$$W_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} .$$

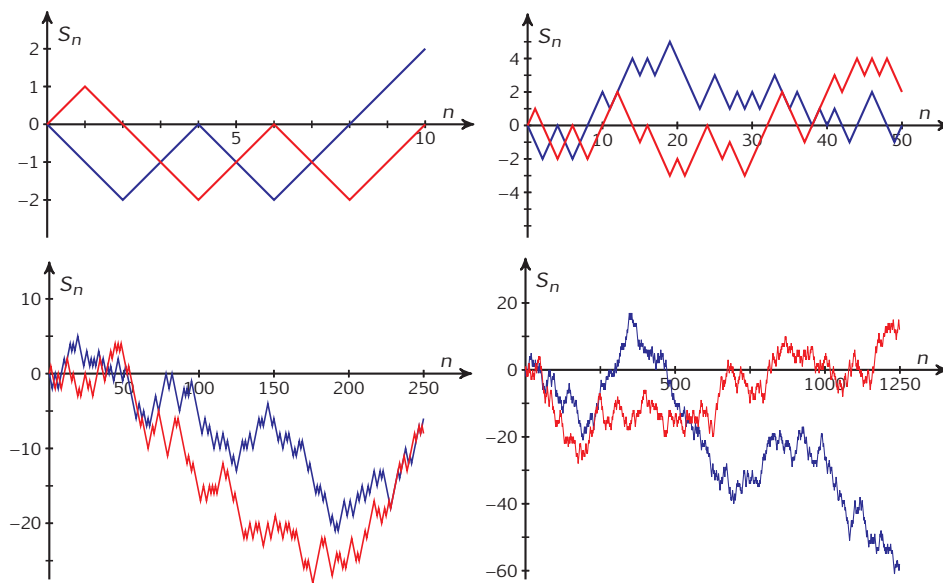
Cette définition s'avère être équivalente à imposer que pour tout $t > s \geq 0$, l'incrément $W_t - W_s$ suive une loi normale, centrée, de variance $t - s$, et soit indépendant des valeurs du processus jusqu'au temps s .

Norbert Wiener a montré en 1923 que les trajectoires $t \mapsto W_t$ sont continues (W_t est d'ailleurs aujourd'hui aussi connu sous le nom de *processus de Wiener*). D'autres propriétés de W_t furent établies notamment par Raymond Paley, Antoni Zygmund, et Paul Lévy. En particulier, on sait que les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas différentiables. Ceci pose un problème pour la définition de l'EDS (1), qu'on résout en définissant ses solutions comme celles de l'équation intégrale

$$x_t = x_0 - \int_0^t \nabla V(x_s) ds + \sqrt{2\varepsilon} W_t ,$$

que l'on peut étudier par un argument de point fixe. La théorie fut généralisée par Kiyoshi Itô dans les années 1940. Son calcul stochastique permet de résoudre des variantes de (1) dans lesquelles le terme de bruit est multiplié par une fonction de x . Certaines idées à la base du calcul stochastique avaient été découvertes indépendamment par Wolfgang Döblin, et envoyées à l'Académie des sciences dans un pli cacheté qui ne fut ouvert qu'en 2000.

FIGURE 6 – Deux réalisations (l'une en rouge, l'autre en bleu) d'une marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} , vues à différentes échelles. D'une image à la suivante, l'échelle horizontale est comprimée d'un facteur 5, alors que l'échelle verticale est comprimée d'un facteur $\sqrt{5}$.



Références

- [1] S. ARRHENIUS. « On the reaction velocity of the inversion of cane sugar by acids ». *J. Phys. Chem.* 4 (1889). In German. Translated and published in : Selected Readings in Chemical Kinetics, M.H. Back and K.J. Laidler (eds.), Pergamon, Oxford, 1967., p. 226.
- [2] F. BARRET. « Sharp asymptotics of metastable transition times for one dimensional SPDEs ». *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51, n° 1 (2015), p. 129-166. ISSN : 0246-0203. DOI : 10.1214/13-AIHP575. URL : <http://dx.doi.org/10.1214/13-AIHP575>.
- [3] N. BERGLUND. « An introduction to singular stochastic PDEs : Allen–Cahn equations, metastability and regularity structures ». Lecture notes, Sarajevo Stochastic Analysis Winter School. [arXiv/1901.07420](https://arxiv.org/abs/1901.07420). Jan. 2019. URL : <https://arxiv.org/abs/1901.07420>.
- [4] N. BERGLUND, G. DI GESÙ et H. WEBER. « An Eyring–Kramers law for the stochastic Allen–Cahn equation in dimension two ». *Electron. J. Probab.* 22 (2017), p. 1-27. ISSN : 1083-6489. DOI : 10.1214/17-EJP60.
- [5] N. BERGLUND et B. GENTZ. « Sharp estimates for metastable lifetimes in parabolic SPDEs : Kramers' law and beyond ». *Electron. J. Probab.* 18 (2013), no. 24, 58. ISSN : 1083-6489. DOI : 10.1214/EJP.v18-1802. URL : <http://dx.doi.org/10.1214/EJP.v18-1802>.
- [6] A. BOVIER et al. « Metastability in reversible diffusion processes. I. Sharp asymptotics for capacities and exit times ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 6, n° 4 (2004), p. 399-424.
- [7] G. DA PRATO et A. DEBUSSCHE. « Strong solutions to the stochastic quantization equations ». *Ann. Probab.* 31, n° 4 (2003), p. 1900-1916. ISSN : 0091-1798. DOI : 10.1214/aop/1068646370. URL : <http://dx.doi.org/10.1214/aop/1068646370>.
- [8] H. EYRING. « The activated complex in chemical reactions ». *Journal of Chemical Physics* 3 (1935), p. 107-115.
- [9] W. G. FARIS et G. JONA-LASINIO. « Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise ». *J. Phys. A* 15, n° 10 (1982), p. 3025-3055. ISSN : 0305-4470.
- [10] M. I. FREIDLIN et A. D. WENTZELL. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Second. New York : Springer-Verlag, 1998.
- [11] M. HAIRER. « A theory of regularity structures ». *Invent. Math.* 198, n° 2 (2014), p. 269-504. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/s00222-014-0505-4. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-014-0505-4>.
- [12] M. HAIRER et H. WEBER. « Large deviations for white-noise driven, nonlinear stochastic PDEs in two and three dimensions ». *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 24, n° 1 (2015), p. 55-92. ISSN : 0240-2963. DOI : 10.5802/afst.1442. URL : <http://dx.doi.org/10.5802/afst.1442>.
- [13] F. den HOLLANDER. « Metastability under stochastic dynamics ». *Stochastic Process. Appl.* 114, n° 1 (2004), p. 1-26.
- [14] H. A. KRAMERS. « Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions ». *Physica* 7 (1940), p. 284-304.
- [15] P. TSATSOLIS et H. WEBER. « Exponential loss of memory for the 2-dimensional Allen–Cahn equation with small noise ». [arXiv:1808.04171](https://arxiv.org/abs/1808.04171). 2018.



Nils BERGLUND

Université d'Orléans

nils.berglund@univ-orleans.fr

Nils Berglund est professeur à l'université d'Orléans. Ses travaux portent sur les équations différentielles stochastiques et les EDP stochastiques, souvent issues de problèmes en physique et en biologie.

La publication des œuvres mathématiques de René Thom dans la collection *Documents mathématiques de la SMF*

- M. CHAPERON
- F. LAUDENBACH

Le volume II vient de paraître. Nous présentons l'ensemble du projet, né à l'initiative d'André Haefliger.

René Thom en bref

Thom est un des premiers membres de l'école mathématique constituée autour d'Henri Cartan à la fin de la seconde guerre mondiale, et l'un des plus glorieux, mais d'emblée *singulier* : provincial, né hors du sérail universitaire, il avait acquis très jeune une connaissance intime du calcul différentiel tel que ses fondateurs le concevaient ; à rebours de son temps, il ne se méfiait donc nullement de la géométrie, où il avait développé son intuition jusqu'à « voir » en dimension quatre ; enfin, ayant suivi Henri Cartan à Strasbourg comme jeune chercheur du CNRS, il y est resté après le départ de son maître, bénéficiant en particulier de l'influence de Charles Ehresmann.

Ainsi nanti d'une vision du monde complémentaire de celle des « Parisiens », Thom a résolu des questions fondamentales auxquelles d'autres n'auraient sans doute même pas pensé. Quelques jalons.

- De 1949 à 1956, Thom travaille en topologie algébrique et élabore « une manière complètement neuve d'étudier les variétés différentiables » (Milnor), sur lesquelles il obtient ainsi des résultats définitifs, donnant naissance à la théorie du *cobordisme* récompensée par la médaille Fields en 1958.
- À partir de 1956 il se concentre sur les singularités d'applications différentiables, qui apparaissent naturellement dans sa vision de la topologie différentielle. À la suite de Whitney, il étudie alors les stratifications et introduit la « stratification naturelle des espaces d'ap-

plications » précisée ultérieurement par John Mather¹.

- Dès le milieu des années soixante, conscient que les singularités d'applications et la transversalité aident à comprendre toutes sortes de phénomènes naturels, il développe une *théorie des catastrophes* ; celle-ci connaîtra une fortune médiatique extraordinaire après la parution de son livre *Stabilité structurelle et morphogénèse* en 1972.
- À la fin des années soixante-dix, l'engouement parfois délirant pour les catastrophes subit un coup d'arrêt brutal, sans doute guère plus justifié que les errements de la mode. Thom s'éloigne alors des mathématiques au profit de la philosophie et d'un retour fécond à Aristote.

Ces changements d'orientation ne doivent pas masquer une profonde unité de pensée : dès son entrée à l'École normale supérieure, Thom était tenté par la philosophie des sciences, dont la direction de l'École avait dû le détourner. Ses grands résultats mathématiques ont une forte connotation philosophique, loin de la prétention « moderne » d'affranchir les mathématiques de la question du sens.

Naissance du projet

L'admiration d'André Haefliger pour Thom remonte aux années strasbourgeoises communes (1954-1958)². Leurs relations n'ont cessé qu'à la disparition de Thom en octobre 2002.

Déjà nanti des documents issus de ce presque demi-siècle d'échanges, Haefliger a consacré dès

1. Cette idée, à laquelle Thom tenait beaucoup, fournit par exemple le cadre des travaux de Jean Cerf sur la pseudo-isotopie et de ceux de Victor Vassiliev sur les invariants des nœuds.

2. De très nombreuses discussions entre eux sur les variétés feuilletées avaient alors abouti à la partie « concrète » (feuilletages analytiques) de la thèse restée fameuse à laquelle Haefliger travaillait sous la direction de Charles Ehresmann.

la fin de l'année 2010 beaucoup de temps à étudier les *archives Thom*, triées, inventoriées et classées à partir de la mi-avril 2011 dans les sous-sols de l'INÉS par sa bibliothécaire Aurélie Brest avec, au début, le concours de Herminia et André Haefliger. Celui-ci y a découvert « de véritables trésors », par exemple deux *inédits mathématiques* assez stupéfiants, nous en reparlerons. Il a associé Marc Chaperon à cette découverte en septembre 2011, dans l'idée de mettre sur pied avec son aide et celle de Bernard Teissier une publication papier « classique », *annotée et commentée*, des œuvres mathématiques de Thom.

Bernard Teissier et Étienne Ghys auraient souhaité que cette édition s'accompagne de la mise en ligne des œuvres complètes (mathématiques ou non) de Thom, publiées sous la forme d'un CD-ROM début 2003 par l'INÉS³. Hélas ! Cette idée bien naturelle achoppe sur des problèmes de droits⁴. Quant au CD-ROM, tout à fait utilisable malgré l'obsolescence de son moteur de recherche, il n'est plus en vente.

Un premier comité éditorial, constitué en octobre 2011, s'est réuni au début du mois suivant ; outre Haefliger, Teissier et Chaperon, il comprenait Alain Chenciner. Le projet a été soumis fin novembre par Bernard Teissier à Pierre Colmez et immédiatement accepté dans la collection *Documents mathématiques* nouvellement créée par la SMF. François Laudenbach, Jean Petitot, David Trotman et, pour le volume I, Jean Lannes et Pierre Vogel ont vite rejoint le comité éditorial.

Présentation d'ensemble

Cette publication ne prétend pas se substituer au CD-ROM mais le compléter.

- Elle se concentre sur les articles mathématiques (ou au moins répertoriés dans les *Mathematical Reviews*), qui sont ici assortis de commentaires mathématiques ou historiques, justifiés par les développements ultérieurs et l'actualité de cette œuvre souvent visionnaire. Certains commentaires se trouvent à la suite de l'article sur lequel ils portent ; d'autres

servent d'introduction à un ensemble. Après chaque article on peut trouver des notes plus brèves renvoyant à des points précis.

- Nous avons choisi de reproduire les originaux au lieu de les transcrire en typographie mathématique moderne, évitant ainsi d'y ajouter des fautes et d'en changer la pagination⁵. Une exception est constituée d'inédits (absents du CD-ROM) dont la version dactylographiée était trop peu lisible.
- En plus de ces inédits, nous publions un certain nombre de documents pour leur intérêt historique, par exemple de larges extraits de la correspondance avec Cartan qui a abouti à la thèse de Thom⁶, et des fragments des lettres écrites par celui-ci à sa femme Suzanne lors de son séjour à Princeton en 1951 – elles contiennent beaucoup d'informations sur la genèse des travaux qui ont suivi.
- La bibliographie, comme la notice biographique, complète, corrige et enrichit celle du CD-ROM ; s'appuyant sur les versions antérieures de Michèle Porte, Jean Petitot et Aurélie Brest, elle recense tous les écrits de Thom, mathématiques ou non.

Le volume I

Ce volume, 573 pages, est enfin paru en avril 2017 comme n°15 de la collection *Documents mathématiques*. Il couvre les publications de Thom de 1949 à 1959 sauf une, reportée au début du volume suivant pour limiter l'épaisseur de celui-ci. Vu ces dates, il n'est pas étonnant qu'il contienne des pièces majeures de l'œuvre de Thom. Nous allons les évoquer un peu plus précisément.

Le premier article de Thom est une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 2 pages, intitulée *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*. Il s'agit d'une fonction de Morse, c'est-à-dire une fonction au moins C^2 dont les points critiques ont des hessiens de rang maximal. Cette note a eu une très riche descendance que nous avons explicitée en commentaire dans le volume I. Thom, y est curieuse-

3. Grâce en soient rendues aux efforts de son directeur, Jean-Pierre Bourguignon, et à l'enthousiasme inlassable de Michèle Porte, maître d'œuvre de ce projet lancé en 1996 et auquel Thom avait collaboré activement.

4. Ceux des livres reproduits n'ont été cédés par leurs éditeurs que pour un nombre limité d'exemplaires.

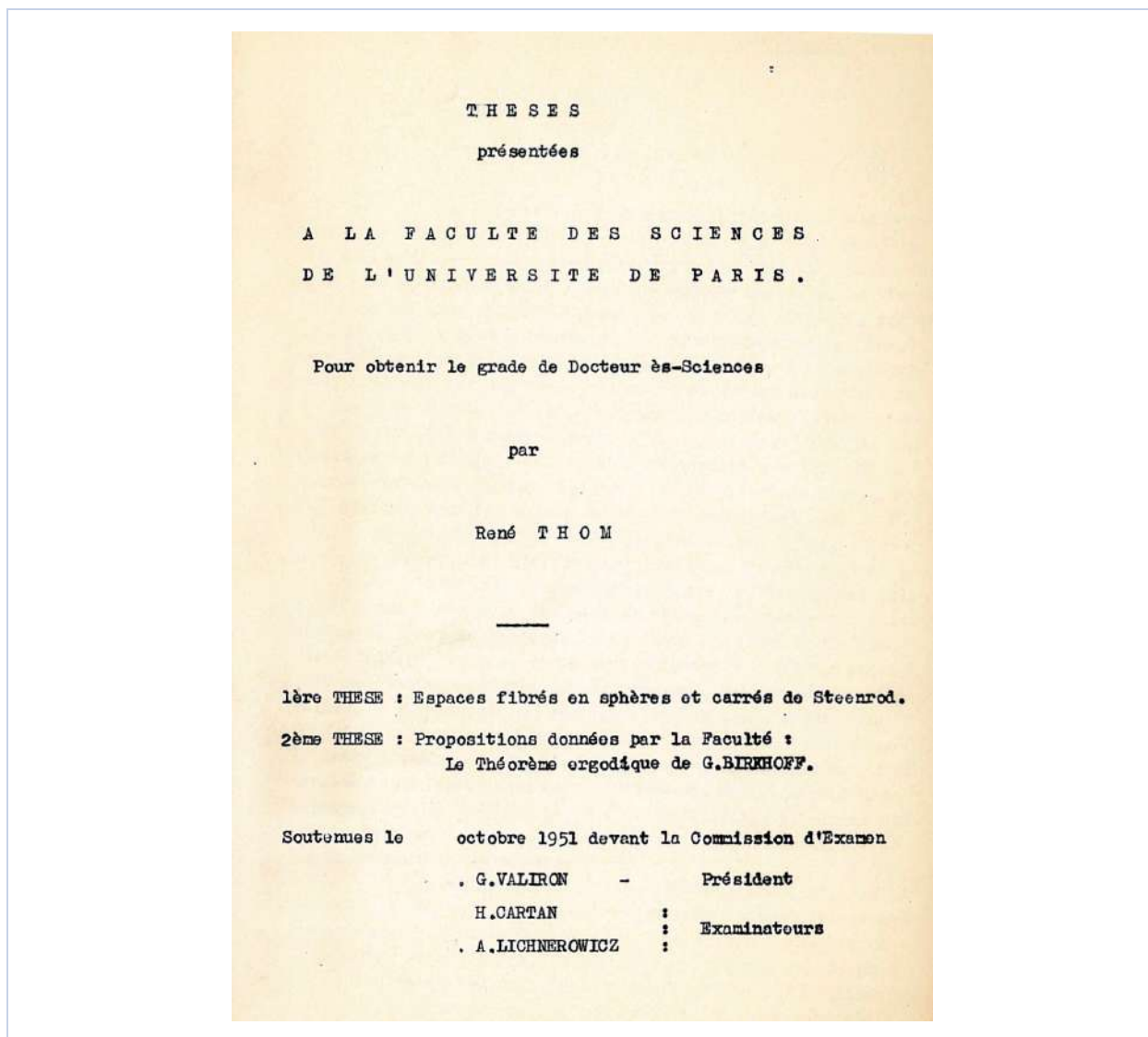
5. Ce choix, même s'il a contribué à beaucoup retarder la parution du volume I, s'imposait d'autant plus que Thom a souvent publié dans des revues ou des recueils d'articles devenus presque introuvables.

6. Nous n'avons malheureusement pas pu tenir compte dans le volume I d'un document inestimable qui fait partie des archives confiées depuis lors par la famille Thom à la bibliothèque de l'École normale supérieure : le chapitre 6 sur le cobordisme, écrit par Thom pour sa thèse et écarté par Cartan, à qui il ne semblait pas encore tenir debout.

ment muet sur ce qui deviendra, à partir de 1954, un de ses paradigmes : la notion de *généricité*. Manque en effet l'hypothèse supplémentaire de *généricité* assurant que ladite partition en cellules soit ce qui est appelé une *décomposition cellulaire*, avec ses propriétés spécifiques sur les attachements de cellules. C'est à Stephen Smale qu'il reviendra, dix ans plus tard, d'expliciter cette hypothèse sur le gra-

dient de la fonction considérée, dite aujourd'hui *condition de Morse-Smale*.

Viennent ensuite les travaux de Thom en topologie algébrique que nous avons fait précéder d'une note de présentation globale écrite par J. Lannes et P. Vogel. Cela recouvre essentiellement les travaux de Thom pour sa thèse (1951) et son article fondateur sur la *théorie du cobordisme* (1954).



La thèse sera publiée dans les Annales de l'École normale supérieure (1952), 73 pages.

L'article de 1954, 69 pages, a un titre ouvert sur l'avenir, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*. C'est ici qu'apparaît pour la première fois la notion de *transversalité*, propriété qui est générique – satisfaite « la plupart du temps »

par une application suffisamment différentiable. Cet article est capital à deux égards. D'une part, il ouvre la voie à une nouvelle branche de la topologie algébrique qui deviendra la *topologie homotopique*; cela part du problème suivant que Thom résout : à quelle condition une classe d'homologie d'une variété est-elle réalisable par une sous-variété?

D'autre part, juste par l'apparition de la transversalité – quelques pages de cet article – il ouvre la voie à l'étude des singularités. À quelques exceptions près, Thom va s'engouffrer dans cette seconde voie. Voyons ce qui se passe.

Thom va se rendre compte que la façon dont il a prouvé son théorème de transversalité sur une sous-variété s'applique telle quelle, sans changement, à certaines situations que l'on appelle maintenant de *transversalité sous contrainte*. La première de ces situations est la transversalité sur une sous-variété d'un *espace des jets*.

Les fibrés de jets ont été découverts par Ehresmann. Pour une fonction f , disons réelle pour simplifier, k -fois différentiable et définie sur une variété V , son jet d'ordre k en un point a de V est, en coordonnées, le développement de Taylor de f en a . Bien sûr, ce polynôme dépend des coordonnées mais que deux fonctions aient le même développement à l'ordre k n'en dépend pas. On peut alors collectionner tous les k -jets de fonctions en tous les points de M et on a ainsi fabriqué une nouvelle variété $J^k(M, \mathbb{R})$ qui est fibrée sur M en indiquant le point a où est pris le k -jet. Une *section* de ce fibré est bien rarement la collection des polynômes de Taylor d'une même fonction en tous les points de M ; il y a une condition dite d'*intégrabilité*.

Malgré cette contrainte, le théorème de transversalité sur une sous-variété S de $J^k(M, \mathbb{R})$ marche, non pas dans l'espace de toutes les sections mais parmi celles qui sont intégrables – et bien sûr, on peut remplacer \mathbb{R} par n'importe quelle autre variété. Or, le choix de S est décisif pour l'étude des singularités de fonctions réelles. C'est ce que fait Thom dans son article, *Les singularités des applications différentiables*, paru aux Annales de l'Institut Fourier (1956). Avant cet article, un « chapeau » écrit par Haefliger et fondé sur ses propres archives, présente les travaux de Thom sur les singularités dans la période 1956-1957. De plus, avec l'accord de l'AMS nous avons reproduit le long compte rendu de W.S. Massey dans les *Math. Reviews*; cela apporte un éclairage utile sur l'article de Thom.

Puisque nous en sommes à 1957, disons un mot des *deux inédits*. Le premier est intitulé : *Une démonstration d'un théorème de Lefschetz*, et le second : *L'homologie des variétés de Stein*. Thom écrit au tout début du second : « Il en résultera la démonstration d'une conjecture de J.-P. Serre : les groupes d'homologie $H_i(V; \mathbb{Z})$ d'une variété de Stein de dimension complexe n sont nuls pour $i > n$ ».

Thom les a exposés dans un séminaire à Chicago en février 1957. Pourquoi sont-ils restés non publiés ? Nous n'aurons jamais la réponse. Toujours est-il que A. Andreotti & T. Frankel ont publié un article, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections*, *Annals of Math.* (1959), 14 pages. Dans leur introduction, on peut lire :

Recently Thom has given a proof (unpublished) which, as far as we know, is the first to use Morse's theory of critical points. We present in §3, in a slightly more general setting, an alternate proof inspired by Thom's discovery.

Finissons ce coup d'œil sur le volume I avec une dernière évocation historique. Thom a donné une conférence dans un colloque du CNRS à Lille en 1959. Cette conférence a été publiée dans le Bulletin SMF sous le titre *Remarques sur les problèmes comportant des inéquations différentielles globales*. On ne peut s'empêcher de rapprocher ce titre de celui du livre de M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986; d'ailleurs, l'article de Thom y est cité. Thom donne dans cet article, à côté de considérations générales, un énoncé précis sur l'homologie d'un ouvert dans un espace de jets. On est dix ans avant la thèse de Gromov (1969) qui prouvera un énoncé analogue mais, à la différence qui est d'importance, Gromov parle d'*homotopie*. Comme plus tard, l'énoncé de Gromov s'appellera un h -principe d'après l'initiale de *homotopy*, on pourrait dire que l'énoncé de Thom est un h -principe (seulement homologique) avant la lettre.

Le paradoxal de l'affaire est que Thom, au moment où S. Smale a rédigé son (bref) compte rendu pour les *Math. Reviews*, ne croyait plus à son théorème que pour les espaces de jets d'ordre un, comme en témoigne le commentaire de Smale. Or, le commentaire de D. Spring dans notre volume I, p. 562, précise que lui-même sait faire une preuve à partir du théorème d'approximation holonome de Eliashberg & Mishachev (*L'Enseignement Math.*, 2001). Enfin, il y a de fortes chances que l'idée de Thom d'introduire des petites dents-de-scie dans ses simplexes puisse être menée jusqu'au bout.

Le volume II

Comme dans le volume I, les textes de Thom y sont précédés d'une bibliographie complète de ses œuvres⁷. Il commence par le cours sur les singu-

7. Légèrement corrigée par rapport au volume I, ce qui modifie parfois la numérotation.

larités donné à Bonn en 1959, dans la rédaction de Harold Levine. Annoté et commenté par Haefliger, ce cours est suivi d'une traduction de la préface et de la table des matières de l'édition russe par V.I. Arnold, puis d'une lettre à Haefliger de février 1959; malgré une faute d'étourderie, celle-ci montre que Thom avait vite repéré les modules (*moduli*) qui compliquent la théorie.

Le volume réunit ensuite les articles de Thom publiés entre 1962 et 1971⁸, dans l'ordre chronologique de leur parution. Le comité de rédaction a été ici plus sollicité que dans le volume I.

- Beaucoup des grands articles que contenait celui-ci, rédigés sous l'œil d'Henri Cartan et de son école, n'appelaient en effet d'autre commentaire que la mention de leurs tenants et aboutissants. Après sa médaille Fields, Thom est plus seul mais ne perd rien de son audace tranquille, qui aboutit à des articles mathématiques souvent prophétiques (et, très rarement, mal écrits) appelés à être complétés⁹ et, dans ce volume, commentés plus en détail.
- Cette audace l'amène à « sortir du cadre » avec sa théorie des catastrophes, dont les articles fondateurs figurent dans ce volume II. Contenant des mathématiques parfois très neuves, ils s'inscrivent aussi dans une autre histoire, notamment en biologie, dont il importait de donner une idée : Sara Franceschelli et Jean Petitot s'en sont chargés avec un grand talent.

Singularités. Une bonne partie de ce volume est formée d'articles essentiels sur les singularités d'applications – notamment sur leur stabilité topologique et sur les stratifications – annotés et commentés par Teissier et Trotman, orfèvres en la matière. Cela inclut *La stabilité topologique des applications polynomiales*, qui esquisse déjà les célèbres théorèmes d'isotopie de Thom-Mather, puis *Propriétés différentiables locales des ensembles analytiques (d'après H. Whitney)*, excellent exposé de résultats fondamentaux de Whitney sur la stratification des ensembles stratifiés; celle-ci est développée plus avant dans *Local topological properties of differentiable mappings*, étonnant de clairvoyance et

suivi de *On some ideals of differentiable functions*, attaché à ce qui distingue le différentiable de l'analytique.

Vient alors un « gros morceau », *Ensembles et morphismes stratifiés* qui, après avoir inspiré Mather et une pléiade d'autres experts, continue après cinquante ans d'être la source de travaux actifs. *The bifurcation subset of a space of maps* introduit l'idée absolument fascinante d'une stratification naturelle des espaces de fonctions, sur laquelle beaucoup reste à faire.

Le volume se conclut, dans un ordre d'idées plus proche des deux inédits du volume I, par *Un résultat sur la monodromie*, commenté par Norbert A'Campo avec Teissier, et par un manuscrit inédit sur la monodromie¹⁰ qui, en dépit d'une *fatal error*, contient des idées importantes et belles. Pour la petite histoire, l'article de Thom avait été accepté dans une revue prestigieuse, laquelle avait parallèlement refusé celui où le jeune A'Campo donnait un contre-exemple! Heureusement, Thom a retiré son texte et le travail d'A'Campo, qui a surpris les plus grands, a établi sa réputation.

Catastrophes. Précédée d'une savante introduction de Petitot, cette partie comporte cinq articles. *A dynamical theory for morphogenesis*, « introuvable » déniché par Tadashi Tokieda, présente pour la première fois la théorie, en insistant sur son aspect mathématique – c'est en particulier la première apparition des *déploiements universels*; le commentaire nous a amenés à interroger Mather dont la réponse, d'un grand intérêt, est reproduite en partie.

Thom expose ses idées plus en détail dans *Une théorie dynamique de la morphogénèse*, article fondateur suivi d'une correspondance avec le grand biologiste C.H. Waddington; le tout est commenté par Sara Franceschelli et Petitot, qui commencent par le rapport avec *The chemical basis of morphogenesis* d'Alan Turing (1952).

Viennent ensuite *Topological models in biology*, puis *A mathematical approach to morphogenesis : archetypal morphologies* et *Topologie et linguistique*, qui illustrent l'envergure du projet.

Varia. Le volume contient d'autres applications « concrètes » de la théorie des singularités : *Sur la*

8. Sauf le cours Fermi *Modèles mathématiques de la morphogénèse* donné à l'École normale supérieure de Pise en avril 1971, reporté au volume III comme le cours à Bonn l'avait été au volume II.

9. Des mathématiciens du calibre de John Mather ou Vladimir Arnold s'y sont employés mais bien des problèmes passionnants restent ouverts.

10. Dans une typographie moderne de Duco van Straten.

théorie des enveloppes, écrit en 1960 pour assainir un domaine assez « sale », est peu lisible – nous avons tenté d’y remédier en partie sans sortir des idées de Thom ; *Sur les variétés d’ordre fini* esquisse notamment la preuve que, sauf exception rarissime, une sous-variété compacte M de dimension n dans \mathbb{R}^{n+p} coupe tout p -plan affine P en un nombre fini de points, borné quand P varie.

Plus ambitieux, l’article *Les symétries brisées en physique macroscopique et la mécanique quantique* est confronté par Valentin Poénaru aux progrès ultérieurs de la physique. Comme l’exposé *Travaux de Moser sur la stabilité des mouvements périodiques* sur la « théorie KAM », il témoigne de la variété des intérêts de Thom et de son exceptionnelle pénétration.

L’article *Sur l’homologie des variétés algébriques réelles*, commenté par Ilia Itenberg, est consacré à ce qui est souvent appelé *inégalité de Smith-Thom*, très importante en géométrie algébrique réelle. Ce travail dédié à Marston Morse repose bien sûr sur la théorie de Morse, dont une version « feuilletée » est proposée dans *Généralisation de la théorie de Morse aux variétés feuilletées*.

Enfin *Jets de Liapunov*, commenté par Krzysztof Kurdyka, examine les implications de l’existence d’une fonction de Lyapounov pour un champ de vecteurs au voisinage d’un point où il s’annule.

Le volume III

Eu égard au nom de la collection, ce dernier volume¹¹ se concentre pour l’essentiel sur les écrits mathématiques, quantitativement très minoritaires chez Thom après 1971 mais souvent remarquables. Signalons-en quelques-uns.

Le premier texte, le cours Fermi *Modèles mathématiques de la morphogenèse* déjà mentionné¹², expose clairement les enjeux de la théorie des catastrophes et beaucoup de mathématiques nouvelles, qui ont eu une importante descendance. Une relecture critique s’imposait donc.

Vient ensuite *Sur le cut-locus d’une variété plongée*, article très riche mathématiquement (il reprend le point de vue fonctionnel de *The bifurcation subset of a space of maps*) et même au-delà – on y

trouve un modèle tout à fait actuel du processus de perception visuelle.

Phase transitions as catastrophes, mathématiquement substantiel¹³, propose notamment une preuve de la règle des phases de Gibbs fondée sur la structure générique des *ensembles de Maxwell*¹⁴.

Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières fournit entre autres une merveilleuse introduction aux singularités, à la géométrie de contact et aux systèmes de Pfaff.

Symmetries gained and lost analyse les ruptures de symétrie, en liaison avec les travaux du physicien Louis Michel et dans le prolongement de l’article du volume II.

Introduction à la dynamique qualitative, texte mathématico-historico-philosophique à la Thom, témoigne de son intérêt de longue date pour ce domaine un temps peu populaire en France – situation à laquelle son séminaire autour de 1970 avait remédié, contribuant à orienter de futurs « leaders » du sujet comme Michel Herman.

Gradients of analytic functions, absent du CD-ROM et déniché par notre collègue iranien Massoud Amini, énonce notamment la « conjecture du gradient » sur la limite des tangentes aux courbes intégrales d’un gradient analytique en un point singulier¹⁵. Commentaire enthousiaste de Kurdyka.

Tectonique des plaques et théorie des catastrophes témoigne d’une excursion intrépide de Thom sur les terres de Claude Allègre.

Le cours aux Houches *Mathematical concepts in the theory of ordered media* fait suite aux travaux de Kléman et Toulouse sur les dislocations dans les milieux cristallins.

La Note avec Yannick Kergosien *Sur les points paraboliques des surfaces*, complétée et corrigée avec Thomas Banchoff, porte sur les contours apparents d’une surface « générique » de l’espace euclidien quand la direction de projection varie¹⁶.

Les deux Notes avec Peixoto sur *Le point de vue énumératif dans les problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires* illustrent en particulier la vision très instructive qu’avait Thom des problèmes « bien posés » : ce sont ceux pour lesquels la variété (de dimension finie d) des solutions du système d’équations différentielles est trans-

11. En cours d’élaboration, nous aimerions le voir paraître fin 2020.

12. Il fournit les cinq premiers chapitres du livre paru sous le même titre en 1974 dans la collection de poche 10-18.

13. Et audacieux, parfois un peu trop...

14. Ensemble des valeurs des paramètres pour lesquels une fonction dépendant de ces paramètres atteint son minimum en plusieurs points (si on les compte avec leur multiplicité). Cette notion était au cœur de l’article sur le cut-locus.

15. Une forme en a été démontrée par Kurdyka, Mostowski et Parusiński dans un travail publié en 2000 aux *Annals*.

16. Le cas d’une seule projection était très bien traité dans l’article sur les équations différentielles multiformes.

verse dans l'espace fonctionnel à la sous-variété de codimension d définie par le problème aux limites.

Quid des stratifications canoniques? exprime encore leur extrême importance aux yeux de Thom.

Enfin, les notices nécrologiques de Morse et Whitney écrites pour l'Académie des sciences sont évidemment d'un grand intérêt, ainsi que *La théorie des jets et ses développements ultérieurs*, publié avec les œuvres complètes d'Ehresmann.

Nous parlons un peu aussi de « la catastrophe de la théorie des catastrophes », qui date de 1978 et a sans nul doute contribué à éloigner Thom des mathématiques, malheureusement pour celles-ci.

Appendice : modeste aperçu de la transversalité d'après Thom

La transversalité joue un rôle essentiel dans l'œuvre de Thom, à la fois en mathématiques et dans la théorie des catastrophes, dont une idée clé est que seuls s'observent les phénomènes stables par perturbation. Le lemme de transversalité dans les espaces de jets¹⁷ a émerveillé son premier « cobaye » Whitney qui, au départ, ne croyait pas en cet énoncé mettant dans le même sac presque tous les arguments de position générale. Il nous a donc semblé utile d'en donner un aperçu¹⁸.

Première forme élémentaire. Le geste suivant nous semble répondre à l'intuition. Si, dans \mathbb{R}^3 , un point p se trouve sur une surface S , une « petite secousse » poussera p hors de S . Si une courbe (compacte) C est tangente à S en un ou plusieurs de ses points, une « petite secousse » fera que soit S et C seront disjointes soit, aux éventuels points de contact, la tangente à C et le plan tangent à S seront supplémentaires. Enfin, si S' est une surface (compacte) qui en quelques points partage le même plan tangent que S , une « petite secousse » de S' la mettra en position *transverse* à S ; aux éventuels points communs les deux plans tangents seront sécants; en fait – et c'est moins intuitif – si cette dernière condition sur les plans tangents est satisfaite en chaque point de l'intersection $S \cap S'$ alors cette intersection sera une courbe « lisse » (ce dernier point est garanti par le théorème des fonctions implicites).

Le premier énoncé de Thom sur la transversalité est la généralisation à toutes les dimensions

et à toutes les variétés des trois exemples précédents. Encore faut-il préciser ce qu'est une « petite secousse ». Il s'agit d'un difféomorphisme g de la variété ambiante M , arbitrairement proche de l'identité de M (en topologie C^∞) que l'on fait agir sur une sous-variété (compacte) N pour la rendre *transverse* à une autre sous-variété N' de M : en chaque point x de $N \cap N'$ les deux espaces tangents $T_x N$ et $T_x N'$ engendrent $T_x M$. Dans la suite, toutes les variétés seront supposées C^∞ (on dira « lisse »).

Théorème de transversalité élémentaire (Thom). *La propriété que $g(N)$ soit transverse à N' est génériquement satisfaite pour g dans le groupe $\text{Diff}^k(M)$ des difféomorphismes C^k de M si $k > \max(0, \dim N - \text{codim } N')$. Ici, une propriété est dite générique si elle est satisfaite en tout point d'une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\text{Diff}^k(M)$.*

Remarque. 1) Si N est compacte, la transversalité est une propriété ouverte en topologie C^1 et donc en toute topologie plus fine comme l'est la topologie C^∞ sur le groupe $\text{Diff}^\infty(M)$. En outre, sous cette hypothèse, la généricité vaut aussi dans le sous-groupe $\text{Diff}_c^\infty(M)$ des difféomorphismes à support compact.

2) Le même énoncé vaut encore si N est singulière (présence de points doubles, défaut de plan tangent) ou même l'image dans M d'une variété N par une application C^k .

Preuve du théorème de Thom à partir d'un théorème de A. Morse et A. Sard.

Théorème (Morse-Sard). *Soit X une variété. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ est C^k , $k > \max(0, \dim X - q)$, alors presque tout y dans \mathbb{R}^q , au sens de la mesure de Lebesgue, est une valeur régulière de f , c'est-à-dire que pour tout $x \in f^{-1}(y)$ la différentielle de f en x est de rang q .*

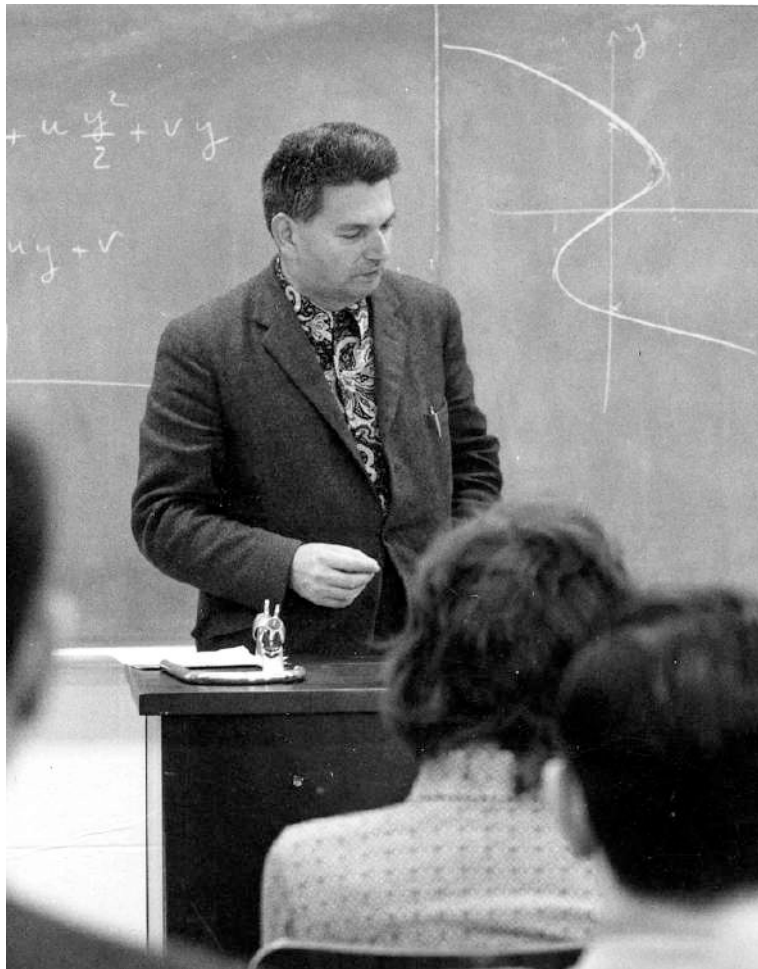
Par exemple, si $\dim X < q$, presque aucun y n'est dans l'image de f . Par le théorème des fonctions implicites, la préimage d'une valeur régulière est une sous-variété C^k de X de codimension q .

L'inégalité portant sur k dans l'énoncé ci-dessus est nécessaire. Par exemple, Whitney a construit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et un arc A du plan où f n'est pas constante mais le long duquel sa différentielle df est identiquement nulle (l'arc A est continu mais évidemment pas C^1); l'intervalle $f(A)$ ne contient donc aucune valeur régulière de f , bien qu'il soit de longueur positive.

17. Voir l'article de Thom *Un lemme sur les applications différentiables* (1956), reproduit et commenté dans le volume I.

18. Marc Chaperon l'avait tenté très différemment dans le numéro 65 de la *Gazette*, avec bien d'autres applications.

Catastrophes, vers 1975



© Archive de l'IHÉS - Droits réservés

Voici comment Thom utilise le théorème de Sard pour prouver son premier théorème de transversalité. Avec les notations de celui-ci, occupons-nous de $k = \infty$ et N compacte et concentrons-nous sur la partie densité. Comme $\text{Diff}_c^\infty(M)$ est un groupe, on se ramène facilement à montrer que id_M peut être approchée en topologie C^∞ par $g \in \text{Diff}_c^\infty(M)$ tel que $g(N)$ soit transverse à N' .

L'idée de Thom est de construire, pour un certain entier r , une application $G : \mathbb{R}^r \times M \rightarrow M$, $(v, x) \mapsto G(v, x)$, de classe C^∞ , telle que :

- (1) $G(0, x) = x$ pour tout $x \in M$;
- (2) pour tout v fixé assez petit, $g_v := G(v, -)$ est un difféomorphisme de M à support compact;
- (3) $\partial_v G(0, x)$ est de rang $n = \dim N$ pour tout $x \in N$.

On pensera à G comme à une famille à r para-

mètres réels $\{g_v\}_{v \in \mathbb{R}^r}$. Supposons avoir une telle famille et prouvons le théorème de Thom. Comme la condition de rang est ouverte, la condition (3) implique que $\partial_v G(v, x)$ est de rang n pour tout v dans un voisinage U de $\{0\} \times N$. Appelons encore G sa restriction à U . Avec cette condition de rang, le théorème des fonctions implicites nous dit que $W := G^{-1}(N')$ est une sous-variété de U de classe C^∞ .

Soit $\Pi : W \rightarrow B_r$ la projection sur l'espace des paramètres. On applique alors le théorème de Sard à Π . Presque tout paramètre (r -dimensionnel) v est une valeur régulière de Π . Un petit lemme d'algèbre linéaire montre alors que, pour un tel v , le difféomorphisme g_v met N en position transverse à N' .

Il ne reste qu'à construire une famille G . Commençons par le cas $M = \mathbb{R}^n$. Prenons pour espace des paramètres l'espace vectoriel \mathbb{R}^n des transla-

tions de \mathbb{R}^n . Par une partition de l'unité bien choisie, on prolonge la translation du compact N par le vecteur v en un difféomorphisme g_v à support compact qui est id_M si $v = 0$. Les conditions (1) - (3) sont satisfaites.

Dans le cas où M est une variété, utilisant que N est compact on recouvre N par une collection finie de boules $\{B_i\}_{i=1}^s$ chacune contenue dans une carte \mathcal{U}_i de coordonnées de M .

On prend les translations v_i dans les coordonnées de \mathcal{U}_i assez petites pour que $B_i + v_i$ reste dans un compact fixe de cette carte. On prolonge facilement cette translation en un difféomorphisme g_{i,v_i} de M , à support compact, valant id_M si $v_i = 0$. Soit $v := (v_1, \dots, v_s)$. On pose $g_v = g_{1,v_1} \circ \dots \circ g_{s,v_s}$. On vérifie sans peine que les conditions (1) - (3) sont satisfaites, ce qui achève l'argument.

Transversalité et espace de jets. Bien sûr, c'est dans les espaces de jets d'ordre $r \geq 2$ que Thom donnera du théorème de transversalité les applications les plus profondes à la théorie des singularités d'applications différentiables. Cependant, déjà avec les jets d'ordre 1 (ou 1-jets) de fonctions réelles d'une variable réelle on se rend compte de l'aspect novateur de ce théorème.

Pour avoir une variété de base compacte, regardons l'espace des 1-jets de fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$, qui n'est pas exactement une variété mais une variété à bord. Le bord ne crée pas de difficultés pour comprendre l'espace des fonctions C^∞ à valeurs réelles.

Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est C^k , $k \geq 1$, on définit son jet d'ordre un $j^1 f(a) = (a, f(a), f'(a))$ en chaque point $a \in [0, 1]$.¹⁹

L'application $j^1 f$ est une section (c.-à-d. une inverse à droite) de la projection $(x, y, z) \mapsto x$ de $J^1([0, 1])$ sur $[0, 1]$; elle s'identifie donc à son image, qui est une sous-variété C^{k-1} de $J^1([0, 1])$.

Une section globale $s(x) = (x, y(x), z(x))$ est de la forme $j^1 f(x)$ si et seulement si

$$z(x) = \frac{dy}{dx}(x) \quad (\text{condition d'intégrabilité}).$$

Cette condition est bien rarement satisfaite; par conséquent, si Σ est une sous-variété de $J^1([0, 1])$, la preuve donnée pour le théorème de transversalité (version élémentaire) produira à partir de $j^1 f$ au

mieux une section transverse à Σ , avec quasiment aucune chance de fournir une section intégrable.

On se souvient que tout est dans le choix de la famille G de rang maximum par rapport aux paramètres. C'est la clairvoyance de Thom qui lui a fait voir que la même preuve fonctionnait dans le sous-espace des sections intégrables si on prend comme espace de paramètres l'espace (de dimension finie) des polynômes réels de degré 1, ici d'une variable. En même temps, on remplacera le groupe de difféomorphismes de $J^1([0, 1])$ par son sous-groupe, qu'on pourrait appeler *groupe de jauge*, formé des difféomorphismes qui non seulement préservent chaque fibre $J_x^1([0, 1])$ mais aussi la distribution des plans de contact, c.-à-d. les noyaux de la forme différentielle $dy - zdx$.²⁰

Si P est une fonction polynôme de degré 1, la translation (dans les fibres)

$$(x, y, z) \mapsto (x, y + P(x), z + P'(x))$$

autrement dit $j^1 f(x) \mapsto j^1(f + P)(x)$ est une transformation de jauge, envoyant chaque section intégrable $j^1 f$ sur la section intégrable $j^1(f + P)$. Cette famille de translations vérifie les conditions (1) - (3), une fois tronquée pour avoir (2).

La même démarche fonctionne en toute dimension de variété de base et pour tout ordre de jet²¹. Thom obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème de transversalité dans un espace de jets (Thom). Soit N une variété de dimension n , soit $J^r(N)$ son espace de r -jets de fonctions réelles et soit Σ une sous-variété de $J^r(N)$, de codimension q . Quelle que soit $f \in C^k(N, \mathbb{R})$, $k - r > \max\{0, n - q\}$, génériquement pour g dans le groupe de jauge C^{k-r} , la sous-variété $g(j^r f(N))$ est transverse à Σ .

Voici une première application aux fonctions de Morse. Au début des années 30, Marston Morse a montré l'importance des fonctions qui aujourd'hui portent son nom pour la compréhension des variétés. Rappelons qu'une fonction de Morse $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, au moins C^2 , dont tous les points critiques (points où $df = 0$) sont non dégénérés (en coordonnées, la matrice des dérivées partielles secondes est de rang maximum).

Corollaire. Les fonctions de Morse C^k sur N sont denses dans $C^k(N, \mathbb{R})$ pour $k \geq 2$.

19. Autrement dit $j^1 f(a) = (a, j_a^1 f)$ où $j_a^1 f \in \mathbb{R}[T]$ est le polynôme de Taylor $f(a) + f'(a)T$. L'espace de tous les $j^1 f(a)$ s'identifie à $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$, dont tout point (a, b, c) est en effet le jet en a d'une fonction affine.

20. Une tradition « contactologue » échange y et z , d'où la forme $dz - ydx$.

21. Même en remplaçant l'espace-but \mathbb{R} par une autre variété.

En effet, par un calcul simple, on a l'équivalence : f est une fonction de Morse si et seulement si $j^1 f$ est transverse à la section nulle $\Sigma := \{j^1 \varphi(x) : d_x \varphi = 0\}$

de la projection $j^1 \varphi(x) \mapsto j^0 \varphi(x) := (x, \varphi(x))$. D'après le théorème (ici avec $q = n$ et $r = 1$), génériquement $j^1 f$ est transverse à Σ , d'où la densité.



Marc CHAPERON

Professeur émérite à l'université de Paris, membre de l'IMJ-PRG.

marc.chaperon@imj-prg.fr

<https://webusers.imj-prg.fr/~marc.chaperon/>

Ancien élève de l'École normale supérieure, il a bénéficié à ses débuts des conseils de René Thom, Alain Chenciner et Michel Herman. Ses travaux en géométrie différentielle portent sur les systèmes dynamiques, les singularités et la géométrie symplectique.



François LAUDENBACH

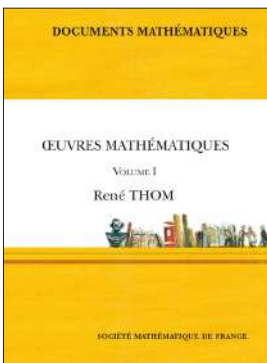
Professeur émérite au laboratoire de mathématiques Jean Leray, université de Nantes.

francois.laudenbach@univ-nantes.fr

<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~laudenba/>

Lauréat d'un cours Peccot (Collège de France, 1973), successivement professeur à l'université Paris-Sud (Orsay), à l'ÉNS-Lyon, à l'École polytechnique et à l'université de Nantes. Il a travaillé sur des problèmes d'isotopie en topologie différentielle de dimension 3 (isotopie des 2-sphères homotopes, isotopie des formes différentielles de degré 1 fermées sans zéros) et sur les courants de de Rham en théorie de Morse. Actuellement, il travaille entre autres sur la théorie de Morse-Novikov des 1-formes fermées à zéros de Morse.

Documents Mathématiques



Vol. 15

Œuvres mathématiques de René Thom (Volume I)

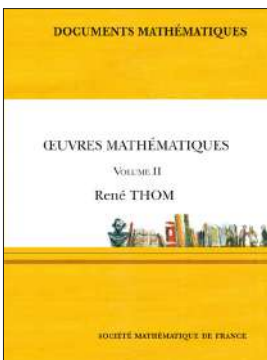
ISBN 978-2-85629-816-9

2017 - 573 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 70 € - Members: 49 €

Le premier volume des œuvres mathématiques complètes de René Thom contient les articles publiés avant 1960, assortis d'inédits passionnants et de commentaires les mettant en perspective. La contribution de Thom à la topologie algébrique et différentielle, née au contact d'Henri Cartan et de Charles Ehresmann et qui valut à son auteur la médaille Fields en 1958, figure pour l'essentiel ici. Viennent ensuite les articles fondateurs sur les singularités, qui seront poursuivis dans les années soixante et donneront naissance à la théorie des catastrophes.

Le volume commence par une biographie substantielle et une bibliographie des œuvres de Thom, mathématiques ou non.



Vol. 17

Œuvres mathématiques de René Thom (Volume II)

ISBN 978-2-85629-888-6

2019 - 630 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 75 € - Members: 53 €

Ce deuxième volume des œuvres mathématiques complètes de René Thom contient le cours sur les singularités donné à Bonn en 1959, puis les articles publiés entre 1962 et 1971, assortis d'inédits et de commentaires mettant le tout en perspective. L'impressionnante contribution de Thom à la classification topologique des singularités d'applications différentiables et à la théorie des ensembles stratifiés figure pour l'essentiel ici. On y trouve aussi les articles fondateurs sur les catastrophes, avant la mode et les polémiques des années soixante-dix - les commentaires devraient aider à y voir plus clair. Le volume commence par une bibliographie des œuvres de Thom, mathématiques ou non.

Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





... .. la courbe de Fargues-Fontaine

• M. MORROW

La courbe de Fargues-Fontaine est un objet de théorie des nombres découvert en 2009 par Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine, et dont la géométrie encode beaucoup d'information sur l'arithmétique des nombres p -adiques. Elle est devenue rapidement un thème de recherche central en théorie de Hodge p -adique et dans le programme de Langlands.

1. Des courbes avec un point à l'infini

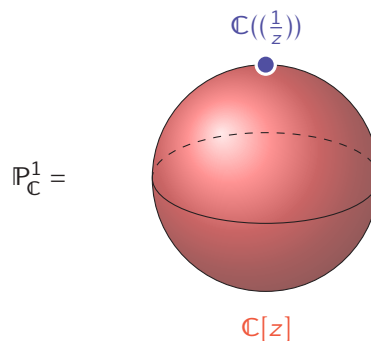
Afin de motiver la courbe de Fargues-Fontaine, commençons par analyser d'un point de vue algébrique une courbe plus familière, à savoir la sphère de Riemann $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (notée plutôt $\mathbb{C}P^1$ par les géomètres non algébriques, et en effet de dimension un sur les nombres complexes). À la sphère de Riemann on peut aisément associer deux anneaux

$$\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right). \quad (1)$$

D'abord, l'anneau des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sans pôle en dehors du point à l'infini est l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[z]$, où z désigne le paramètre local usuel à l'origine : en effet, rappelons que toute fonction holomorphe sur le plan des nombres complexes avec au pire un pôle au point à l'infini est forcément un polynôme. En regardant ensuite les développements de Laurent au point à l'infini de toutes les fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, on trouve l'anneau $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ des séries de Laurent en la variable $\frac{1}{z}$, qui est un paramètre local au point à l'infini.

On peut illustrer la situation ainsi :

1. L'ordre d'annulation $\text{ord}_{\infty} f$ au point à l'infini d'une fonction peut être caractérisé de façon purement algébrique par $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$: en fait, $\text{ord}_{\infty} : \mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ est l'unique valuation discrète non triviale sur le corps $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.



Réciproquement, et de manière peut-être plus surprenante, voici une façon pour reconstruire la sphère de Riemann à partir seulement de la paire d'anneaux (1) : les points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ correspondent aux droites dans l'espace vectoriel complexe de dimension deux

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}z = \{f \in \mathbb{C}[z] : \deg f \leq 1\}. \quad (2)$$

Notons ici qu'on peut retrouver cet espace vectoriel à partir de la paire (1) car le degré d'un polynôme f est égal à l'ordre de son pôle au point à l'infini en tant que fonction méromorphe sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$,

$$\deg f = -\text{ord}_{\infty} f, \quad (3)$$

ce qui est encodé dans l'anneau $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.¹ Il existe également un énoncé plus précis : si l'on filtre $\mathbb{C}[z]$ par le degré pour que l'anneau de Rees associé soit égal à

$$\bigoplus_{k \geq 0} \{f \in \mathbb{C}[z] : \deg f \leq k\}, \quad (4)$$

alors le schéma projectif (on invite le lecteur qui ne connaîtrait pas la construction Proj en géométrie algébrique à ignorer cet énoncé) s'identifie à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Pour établir cette identification, la clé (un exercice facile en algèbre) est d'observer que l'anneau gradué (4) est isomorphe à l'anneau des polynômes

en deux variables $\mathbb{C}[z_0, z_1]$, en associant à un polynôme $f(z)$ de degré $\leq k$ le polynôme en deux variables $z_1^k f(z_0/z_1)$. Une conséquence de cet isomorphisme, combiné avec le théorème fondamental de l'algèbre, est que tout polynôme homogène $f(z_0, z_1) \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ s'écrit de façon unique, à une constante près, comme un produit d'expressions linéaires :

$$f(z_0, z_1) = c \prod_{i=1}^{\deg f} (a_i z_0 + b_i z_1) \quad (5)$$

où $a_i, b_i, c \in \mathbb{C}$. Pour résumer, la théorie de la sphère de Riemann peut s'exprimer fidèlement en termes de la paire d'anneaux (1), mais nous renonçons alors à toute intuition géométrique. Or, cette perspective géométrique est tellement importante qu'elle nous guide même lorsqu'elle n'existe plus. En particulier, en théorie des nombres, il existe une vieille analogie entre les entiers \mathbb{Z} et l'anneau $\mathbb{C}[z]$. Tous deux sont des anneaux euclidiens, avec le stathme euclidien donné dans le premier cas par la valeur absolue $|\cdot|$ des nombres réels \mathbb{R} et dans le second cas par le degré d'un polynôme, ce qui correspond à l'ordre de son pôle au point à l'infini grâce à (3); en deux mots, la paire d'anneaux $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ est un analogue arithmétique de la paire (1). En géométrie arithmétique on essaie donc de voir les entiers comme des fonctions sur l'ensemble des nombres premiers, avec un point supplémentaire « à l'infini » donné par les nombres réels ou de manière équivalente par $|\cdot|$, et de développer des analogues des techniques géométriques déjà existantes pour la sphère de Riemann (fibrés vectoriels, cohomologie, faisceaux, etc.). Cette approche, bien que fructueuse, est limitée par le fait que \mathbb{R} n'est plus vraiment un objet algébrique et donc que la « courbe compactifiée » $\{\text{nombres premiers}\} \cup \{\cdot\}$ n'existe pas en tant que vrai objet de la géométrie algébrique.

Fargues et Fontaine ont mené cette analogie beaucoup plus loin en considérant plutôt un nombre premier fixé p et en remplaçant la géométrie arithmétique par la géométrie arithmétique p -adique. L'anneau euclidien \mathbb{Z} ou $\mathbb{C}[z]$ est alors remplacé par une certaine \mathbb{Q}_p -algèbre \mathbb{B}_e venant de la théorie de Hodge p -adique, qui est (presque) encore un anneau euclidien. Mais contrairement au cas de \mathbb{Z} où le « point à l'infini » était en-dehors du monde algébrique, nous nous retrouvons cette fois dans une

situation plus favorable : le rôle du point à l'infini est maintenant joué par un certain corps \mathbb{B}_{dR} , venant lui aussi de la théorie de Hodge p -adique, et la paire d'anneaux

$$\mathbb{B}_e \subseteq \mathbb{B}_{dR} \quad (6)$$

est sous-jacente à une vraie courbe algébrique X^{FF} de la même façon que la paire (1) est sous-jacente à la sphère de Riemann. De plus, les résultats que nous avons vus tout à l'heure pour la sphère de Riemann (description de ses points, factorisation unique, etc.) admettent des analogues, qui encodent chaque fois de l'information subtile en arithmétique p -adique. Cette courbe X^{FF} est la courbe de Fargues-Fontaine; elle nous apporte une nouvelle interprétation géométrique de l'arithmétique p -adique. Pour plus de détails sur l'histoire de la découverte de la courbe, voir [1].

2. La courbe fondamentale de la théorie de Hodge p -adique

Afin de présenter la paire d'anneaux (6) et d'introduire la courbe de Fargues-Fontaine, rappelons d'abord quelques aspects de la *théorie de Hodge p -adique*.² Ce sujet a été créé par Fontaine (inspiré par un travail fondamental de Tate et une question de Grothendieck) dans les années 1980 afin d'étudier le groupe de Galois absolu $G := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ des nombres p -adiques \mathbb{Q}_p . Dans le prolongement moderne de la vision de Galois, ce groupe et ses symétries (c'est-à-dire ses actions et ses représentations) recèlent toute l'information arithmétique des nombres p -adiques. En théorie de Hodge p -adique on s'intéresse à ses représentations continues sur des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{Q}_p .³

L'une des contributions fondamentales de Fontaine a été d'identifier et de décrire certaines classes de représentations de G qui sont suffisamment riches pour contenir tous les exemples venant de la géométrie arithmétique. Chaque classe est formée des représentations qui sont « admissibles » pour un « anneau de périodes ». Un anneau de périodes est une \mathbb{Q}_p -algèbre \mathbb{B} munie d'une action de G , vérifiant certaines hypothèses. Étant donné un tel \mathbb{B} , on peut associer à une représentation quelconque V (au sens ci-dessus) le sous-espace des

2. Ainsi nommée car elle comporte des comparaisons entre différentes théories de cohomologie (p -adiques), de la même manière que l'isomorphisme entre les cohomologies de Betti et de de Rham est à la base de la théorie de Hodge classique.

3. Notons que \mathbb{Q}_p joue ici deux rôles différents : étant donné n'importe quel corps F , on pourrait s'intéresser aux représentations de son groupe de Galois absolu sur des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{Q}_ℓ pour un nombre premier ℓ ; en théorie de Hodge p -adique on s'intéresse au cas spécial $F = \mathbb{Q}_p$ et $\ell = p$, qui est particulièrement riche.

éléments G -invariants du produit tensoriel $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}$, qu'on appelle le *module de Dieudonné* associé :

$$V \text{ représentation} \mapsto D_{\mathbb{B}}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B})^G.$$

Sous certaines hypothèses sur \mathbb{B} , Fontaine a montré que $\dim D_{\mathbb{B}}(V) \leq \dim V$, en disant que V est \mathbb{B} -admissible si l'égalité vaut. Dans ce cas le module de Dieudonné, qui est en général plus facile à étudier que la représentation initiale V , est suffisamment gros pour contenir de l'information intéressante sur V , et même pour la décrire complètement si \mathbb{B} est assez « fin ».

Donnons un exemple bête pour illustrer les définitions ci-dessus : si l'on prend $\mathbb{B} = \mathbb{Q}_p$ muni de l'action triviale de G , alors le module de Dieudonné est simplement les G -invariants V^G de la représentation V ; on voit donc que V est \mathbb{Q}_p -admissible si et seulement si c'est une représentation triviale. Bien sûr ces représentations ne sont pas très intéressantes : nous n'avons pas bien choisi \mathbb{B} .

Une étape délicate au début du programme de Fontaine a été la construction de certains anneaux de périodes tels que les classes des représentations \mathbb{B} -admissibles soient assez riches.

Exemple 1. 1. L'anneau des nombres complexes p -adiques \mathbb{C}_p est le complété p -adique de la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ du corps \mathbb{Q}_p . L'action du groupe de Galois G s'étend par continuité à \mathbb{C}_p .

2. L'anneau des périodes de de Rham \mathbb{B}_{dR} est un certain corps muni d'une action de G . En tant que corps il est isomorphe de manière abstraite à l'algèbre des séries de Laurent $\mathbb{C}_p((t))$ à coefficients dans \mathbb{C}_p , mais il n'est pas possible d'écrire l'action de G de façon naturelle via cette identification.

3. L'anneau \mathbb{B}_{dR} contient un sous-anneau \mathbb{B}_{cris} , invariant par l'action de G , appelé l'anneau des périodes cristallines. Il est muni d'un endomorphisme ϕ_{cris} appelé son *Frobenius*, qui ne s'étend pas à \mathbb{B}_{dR} , et on note $\mathbb{B}_e := \{f \in \mathbb{B}_{cris} : \phi_{cris}(f) = f\}$ le sous-anneau de \mathbb{B}_{cris} formé des éléments invariants par ϕ_{cris} .

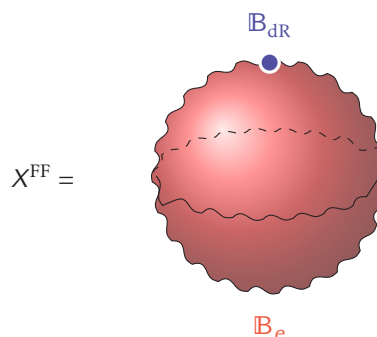
Les anneaux de périodes sont fondamentaux en arithmétique p -adique depuis les années 1980 (pour plus de détails sur leur histoire et leur rôle dans le sujet, voir [2]), mais ce n'est qu'en 2009 que

Fargues et Fontaine ont découvert qu'une courbe se cachait derrière :

Théorème 1 (Fargues-Fontaine 2009). *Il existe une « courbe lisse »⁴ X^{FF} sur \mathbb{Q}_p qui recolle les anneaux de périodes de Fontaine de la même façon que la sphère de Riemann recolle la paire (1), à savoir :*

- *il existe un point $\infty \in X^{FF}$ tel que l'anneau des fonctions méromorphes sur X^{FF} sans pôle en dehors du point ∞ soit \mathbb{B}_e ,⁵*
- *et l'anneau des développements de Laurent au point ∞ des fonctions méromorphes⁶ sur X^{FF} est \mathbb{B}_{dR} .*

Donc en remplaçant la paire (1) par la paire (6), on peut dessiner⁷ X^{FF} de façon analogue à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$:



En outre, le groupe fondamental de X^{FF} est isomorphe à G .

La courbe de Fargues-Fontaine X^{FF} contient tout ce qu'il nous faut pour étudier les représentations du groupe de Galois absolu G de \mathbb{Q}_p : à la fois G lui-même et les anneaux de périodes. On peut donc reformuler une grande partie du programme de Fontaine en termes de la géométrie de la courbe. Ce point de vue mène notamment à une preuve conceptuelle d'une conjecture importante de Fontaine. Plus précisément, Fontaine a montré que toute représentation cristalline V (c'est-à-dire admissible par rapport à l'anneau \mathbb{B}_{cris} ; par exemple, provenant d'un objet géométrique à bonne réduction) peut être décrite complètement en termes de son module de Dieudonné $D_{\mathbb{B}_{cris}}(V)$. Dans l'autre sens, notant que $D_{\mathbb{B}_{cris}}(V)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie muni à la fois d'un endomorphisme (induit par ϕ_{cris}) et d'une filtration (induite par la filtration t -adique sur \mathbb{B}_{dR}), autrement dit un *isocristal filtré*, il a conjecturé que les représentations cristallines

4. Pour les experts : un schéma régulier, noethérien, connexe, séparé, de dimension un.

5. Plus précisément, $X^{FF} \setminus \{\infty\} = \text{Spec } \mathbb{B}_e$.

6. C'est-à-dire, le corps des fractions du complété de l'anneau de valuation discrète $\hat{\mathcal{O}}_{X^{FF}, \infty}$.

7. Ce dessin est à prendre avec des pincettes : la courbe appartient à la géométrie p -adique et est donc totalement discontinue.

devraient correspondre de cette façon aux isocristaux filtrés dont la filtration et l'endomorphisme satisfont à une certaine condition de compatibilité algébrique (en termes de la courbe, elle devient une condition naturelle de semi-stabilité au sens de Harder et Narasimhan). Bien que cette conjecture ait été résolue par Colmez et Fontaine avant la découverte de la courbe, elle est maintenant un corollaire trivial d'un résultat géométrique, à savoir la classification des fibrés vectoriels sur la courbe. Pour plus de détails sur cette reformulation de la théorie de Hodge p -adique via la courbe, voir [1].

Mais comment la courbe est-elle définie ? En fait, on peut la construire à partir de la paire d'anneaux (6) de la même façon que nous avons reconstruit la sphère de Riemann à partir de la paire (1) à la partie 1. Premièrement, par analogie avec (2), les points de X^{FF} correspondent aux droites dans le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel

$$\{f \in \mathbb{B}_e : \text{deg } f \leq 1\}, \tag{7}$$

où le *degré* d'un élément de \mathbb{B}_e est défini par analogie avec la formule (3), à savoir $\text{deg } f := -\text{ord}_{\text{dR}} f$ où ord_{dR} désigne l'ordre t -adique dans \mathbb{B}_{dR} via l'isomorphisme de l'exemple 1.⁸ Le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel (7) n'est plus de dimension deux comme (2), mais de dimension infinie, ce qui implique que la courbe de Fargues-Fontaine est beaucoup plus « grosse » que la sphère de Riemann.

Deuxièmement, de manière plus précise, la courbe X^{FF} est définie comme le schéma projectif associé à l'anneau gradué

$$\bigoplus_{k \geq 0} \{f \in \mathbb{B}_e : \text{deg } f \leq k\}, \tag{8}$$

qui est un analogue de l'anneau gradué (4). Remarquons que l'anneau (8) contient, par définition, de l'information subtile sur l'interaction du Frobenius ϕ_{cris} sur \mathbb{B}_{cris} et la filtration t -adique sur \mathbb{B}_{dR} ; leur interaction est un thème important en théorie de Hodge p -adique depuis sa naissance.

Mais contrairement à la sphère de Riemann, où les liens entre l'algèbre de la paire (1) et la géométrie de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ étaient assez élémentaires, les résultats analogues pour la courbe de Fargues-Fontaine sont exceptionnellement profonds. Le résultat clé qui expose la structure de X^{FF} (notamment le fait qu'elle est de dimension un!) est, comme on l'a déjà vu pour la sphère de Riemann dans (5), que tout élément homogène de (8) s'écrit de façon unique, à

une constante près, comme un produit d'éléments de degré un ; il joue le rôle d'un analogue p -adique du théorème fondamental de l'arithmétique. Alors que cet énoncé pour $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ était une conséquence facile de la structure de l'anneau $\mathbb{C}[z]$, l'analogue p -adique prend la moitié du livre [4] de Fargues et Fontaine et repose sur des analogues p -adiques subtils des produits de Weierstrass en analyse complexe.

3. La courbe comme espace de débasculés

Enfin, présentons un autre point de vue sur la courbe X^{FF} , lié à la théorie des perfectoides de Scholze.

Le *basculement*⁹ est une procédure algébrique pour passer de la caractéristique nulle (où tous les anneaux contiennent une copie de \mathbb{Q} , et même de \mathbb{Q}_p dans notre cadre p -adique) à la caractéristique p (où ils contiennent une copie de \mathbb{F}_p). Ne confondons pas cette procédure, que nous définissons ci-dessous, avec la réduction modulo p : étant donné par exemple un polynôme à coefficients dans \mathbb{Q} , on peut essayer de remplacer les coefficients par leurs réductions modulo p pour obtenir un nouveau polynôme à coefficients dans \mathbb{F}_p , mais cela ne marche que si les coefficients initiaux ne contiennent aucun dénominateur divisible par p , et on perd alors énormément d'information. Par contre, le basculement fonctionne bien sans hypothèse sur les dénominateurs, et l'information perdue sera classifiée précisément en termes de la courbe de Fargues-Fontaine.

Commençons par basculer les nombres complexes p -adiques \mathbb{C}_p (voir l'exemple 1), qui sont l'exemple de base de ce que l'on appelle un *anneau perfectoïde* [6, 7].

Définition 1. Le *basculé* \mathbb{C}_p^b de \mathbb{C}_p est l'ensemble des suites compatibles de racines p^n -ièmes dans \mathbb{C}_p ,

$$\mathbb{C}_p^b = \{(a_0, a_1, \dots) : a_n \in \mathbb{C}_p, a_n^p = a_{n-1} \forall n \geq 1\},$$

muni des lois de multiplication et d'addition suivantes :

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, \dots) \times (b_0, b_1, \dots) &:= (a_0 b_0, a_1 b_1, \dots) \\ (a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) &:= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^{p^n}, \right. \\ &\quad \left. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + b_{n+1})^{p^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} + b_{n+2})^{p^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

8. De manière plus canonique et par analogie avec la note de bas de page 1, ord_{dR} est l'unique valuation discrète sur \mathbb{B}_{dR} .

9. Terminologie introduite par Scholze ; la procédure existe dans certains cas depuis le début de la théorie de Hodge p -adique.

Il n’y rien à dire sur la loi de multiplication : elle est facile à définir car un produit de deux suites compatibles de racines p^n -ièmes est encore une telle suite. Par contre, l’assertion analogue est totalement fautive pour l’addition¹⁰ et la formule est donc plus subtile : à partir de deux telles suites, nous ajoutons pour chaque n les deux racines p^n -ièmes, c’est-à-dire $a_n + b_n$, puis passons à la puissance p^n -ième, c’est-à-dire $(a_n + b_n)^{p^n}$. Cette dernière expression ne dépend de n qu’à petite approximation près : les éléments

$$(a_1 + b_1)^p, \quad (a_2 + b_2)^{p^2}, \quad (a_3 + b_3)^{p^3}, \quad \dots$$

ne sont pas forcément tous les mêmes mais ils deviennent de plus en plus proches. Plus précisément, ils forment une suite de Cauchy dans le corps topologique complet \mathbb{C}_p , et nous pouvons donc prendre sa limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^{p^n}$; de plus cet élément, que nous avons construit à partir de nos deux suites compatibles de racines p^n -ièmes, admet lui-même une racine p -ième $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + b_{n+1})^{p^n}$, une racine p^2 -ième $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} + b_{n+2})^{p^n}$, etc. De cette façon nous construisons une nouvelle suite compatible de racines p^n -ièmes, ce qui définit la somme des deux suites de départ.

Le lemme suivant est classique et apparaît dans le travail de Fontaine.

Lemme 1. \mathbb{C}_p^b , muni des opérations ci-dessus, est un corps de caractéristique p .

En outre, le basculement préserve certaines propriétés algébriques. Le corps \mathbb{C}_p a les propriétés suivantes :

(Pf₀) être un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, complet pour une valeur absolue $|\cdot|$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, et avoir pour corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$,

alors que son basculé \mathbb{C}_p^b a les propriétés suivantes :

(Pf_p) être un corps algébriquement clos de caractéristique p , complet pour la valeur absolue $(a_0, a_1, \dots) \mapsto |a_0|$, et avoir pour corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Autrement dit, la différence principale entre le corps \mathbb{C}_p et son basculé \mathbb{C}_p^b est que $p = 0$ dans le second mais pas dans le premier.

Nous avons expliqué comment basculer (dans le cas de \mathbb{C}_p) pour passer de la caractéristique nulle

à la caractéristique p . Malheureusement cette procédure est irréversible : il est impossible de débasculer ! Plus précisément, il existe des corps C avec les propriétés (Pf₀), non isomorphes à \mathbb{C}_p (en tant que corps valués), mais qui deviennent isomorphes après basculement : $C^b \cong \mathbb{C}_p^b$. Ici le basculé C^b de C est défini exactement de la même façon que \mathbb{C}_p . Plus subtilement, mais de manière tout aussi importante, il existe des automorphismes de \mathbb{C}_p^b qui ne sont pas induits par les automorphismes de \mathbb{C}_p , dont un exemple est le « Frobenius absolu »

$$\phi : \mathbb{C}_p^b \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}_p^b, \quad \alpha \mapsto \alpha^p \quad (9)$$

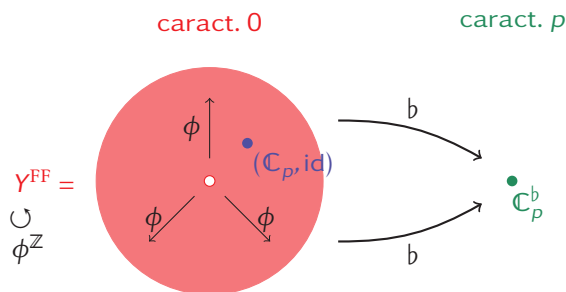
(il respecte les lois de multiplication et d’addition car \mathbb{C}_p^b est de caractéristique p). Ainsi, quand on étudie un objet défini en termes de \mathbb{C}_p^b , on ne sait pas si – ou comment – il provient de \mathbb{C}_p lui-même ou d’un autre corps C . Afin d’étudier ce phénomène on adopte la définition suivante :

Définition 2. Un débasculé de \mathbb{C}_p^b est une paire (C, ι) , où C est un corps avec les propriétés (Pf₀) et $\iota : C^b \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}_p^b$ un isomorphisme. On note Y^{FF} l’ensemble des débasculés.¹¹

Exemple 2. 1. Le débasculé trivial est la paire $(\mathbb{C}_p, \text{id})$ elle-même.

2. Étant donné un débasculé (C, ι) , on peut toujours en construire un nouveau $(C, \phi \circ \iota)$, où ϕ est le Frobenius absolu (9). De cette façon on obtient une action du groupe cyclique infini $\phi^{\mathbb{Z}}$ sur l’ensemble des débasculés.

Résumons la situation par un dessin, où nous représentons Y^{FF} comme un disque épointé :



L’énoncé remarquable est que l’ensemble des débasculés, au moins si l’on identifie ceux qui sont reliés par une itération de l’exemple 2.2, peut être muni de la structure d’une courbe lisse ; nous retrouvons la courbe de Fargues-Fontaine !

Théorème 2 (Fargues-Fontaine, Scholze). Il existe

10. $(a + b)^p \neq a^p + b^p$ en caractéristique nulle ; mais le basculement va nous faire passer en caractéristique p , où l’égalité est vraie !

11. Plus précisément, on considère les débasculés à équivalence près : on dit que (C_1, ι_1) et (C_2, ι_2) sont équivalents s’il existe un isomorphisme $C_1 \cong C_2$ dont l’isomorphisme induit $C_1^b \cong C_2^b$ est compatible avec ι_1 et ι_2 .

une bijection canonique entre l'ensemble $Y^{\text{FF}}/\phi^{\mathbb{Z}}$ et les points de X^{FF} .

Par conséquent, en revenant à la partie 2, il n'est pas faux de dire que la théorie de Hodge p -adique s'insère dans l'étude de la géométrie d'un espace de débasculés. Ce beau point de vue est développé systématiquement dans la théorie récente des diamants de Scholze [9] : il associe aux objets de la géométrie arithmétique p -adique (notamment aux variétés algébriques sur \mathbb{Q}_p ou \mathbb{C}_p) certains ensembles de débasculés, non seulement de \mathbb{C}_p^b mais de n'importe quel perfectoïde. Ce que l'on obtient est un exemple de *diamant*, à savoir un espace construit en recollant des espaces perfectoïdes de manière assez subtile. Scholze montre que les diamants fournissent un monde géométrique qui contient nos objets habituels mais qui possède aussi de nouvelles richesses : un débasculé de \mathbb{C}_p^b est maintenant représenté par un « morphisme » entre \mathbb{Q}_p et \mathbb{C}_p^b , ou plus précisément entre leurs diamants associés $\text{Spd}(\mathbb{Q}_p)$ et $\text{Spd}(\mathbb{C}_p^b)$, il existe une « surface » $\text{Spd}(\mathbb{Q}_p) \times \text{Spd}(\mathbb{Q}_p)$ dont la géométrie doit intervenir de manière cruciale dans le programme de Langlands, et la courbe X^{FF} est représentée par la belle formule

$$X^{\text{FF}} = \text{Spd}(\mathbb{C}_p^b)/\phi^{\mathbb{Z}} \times \text{Spd}(\mathbb{Q}_p).$$

La théorie des diamants joue un rôle essentiel dans la façon dont la courbe est en train de transformer un autre sujet que la théorie de Hodge p -adique, à savoir le programme de Langlands local. Rappelons que le but de ce programme est, grosso modo, de classier les représentations complexes du groupe de Galois absolu G de \mathbb{Q}_p , comme une vaste extension de la théorie du corps de classes. Il existe aussi une version géométrique du programme, qui cherche à classier les représentations du groupe fondamental d'une courbe sur un corps fini et qui est beaucoup plus avancée (notamment suite aux travaux récents de V. Lafforgue). Grâce au théorème 1 on peut désormais voir G comme le groupe fondamental de la courbe X^{FF} et développer des analogues (formulés dans le langage des diamants) des techniques du programme géométrique ; ceci est le sujet de la *conjecture de géométrisation* de Fargues [3] et de ses travaux en cours avec Scholze [5].

On peut dire sans hésiter que la courbe de Fargues-Fontaine, les perfectoïdes et les diamants sont une petite révolution en géométrie arithmétique p -adique.

Références

- [1] P. COLMEZ. « La courbe de Fargues et Fontaine ». *Préface de [4]* (2018).
- [2] P. COLMEZ. « Le programme de Fontaine ». <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/FW.html> (2019).
- [3] L. FARGUES. « La Courbe ». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Rio, 2018)* (2019).
- [4] L. FARGUES et J.-M. FONTAINE. « Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique ». *Astérisque* 406 (2018).
- [5] L. FARGUES et P. SCHOLZE. *Geometrization of the local Langlands correspondence*. En préparation.
- [6] J.-M. FONTAINE. « Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze) ». *Astérisque*, n° 352 (2013). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012, Exposé 1057.
- [7] B. LE STUM. « Raconte-moi un perfectoïde ». *Gazette des Mathématiciens* 154 (octobre 2017).
- [8] M. MORROW. « The Fargues-Fontaine curve and diamonds [d'après Fargues, Fontaine, and Scholze] ». *Astérisque*, n° 414 (2019). Séminaire Bourbaki. Vol. 2017/2018, Exposé 1150.
- [9] P. SCHOLZE. « Étale cohomology of diamonds ». [arXiv:1709.07343](https://arxiv.org/abs/1709.07343) (2017).



Matthew MORROW

Matthew Morrow est chargé de recherche à l'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche. Il travaille en géométrie arithmétique et en K -théorie algébrique.

Je remercie chaleureusement Laurent Fargues, Pierre Colmez et le comité de rédaction de la *Gazette* pour leurs corrections, remarques et suggestions.



Pourquoi le RNBM ?

• B. KLOECKNER

Le Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques (RNBM) fait partie du paysage mathématique français, mais traverse aujourd'hui une période de doutes et d'incertitudes. Son rôle n'est pas forcément évident pour tout le monde, et dans un paysage de l'édition scientifique en pleine mutation et un contexte de restrictions budgétaires, la question commence à se poser : a-t-on besoin d'un RNBM ? En fait, la question est plus large, et le rôle des bibliothèques de mathématiques est également en question – très concrètement, le renouvellement de chaque départ de bibliothécaire n'est plus du tout acquis, loin de là. Dans ce texte, loin de prétendre répondre à ces questions, je souhaite faire part de mon expérience personnelle avec les bibliothèques de mathématiques et avec le RNBM. Elle fera peut-être écho à la vôtre, peut-être pas, mais au fond la réponse aux questions ci-dessus est dans la collection de nos expériences : qu'avons-nous gagné à conserver, plus que d'autres disciplines, nos bibliothèques ? à maintenir le RNBM et à y mettre un peu ou beaucoup de notre temps ?

Ma première rencontre avec une bibliothèque de mathématique a eu lieu à l'ÉNS de Lyon, peu après mon arrivée. Aussi naïf et ignorant qu'on peut l'être à 20 ans, on me présente avec tous mes camarades la bibliothèque de mathématiques. Je m'attendais aux livres¹, mais pas aux revues. Le magasin était facilement accessible, et offrait des rangées de volumes récents et anciens, littéralement des tonnes de mathématiques. On peut dire que cela a été mon premier contact avec la recherche, à travers sa réalisation matérielle.

Pendant ma scolarité et ma thèse à Lyon, cette bibliothèque est restée un lieu privilégié d'étude – j'y ai feuilleté et lu beaucoup de livres, préparé des examens, préparé l'agrégation dans la fraîcheur relative de sa climatisation aux prémisses de la ca-

nicule de 2003, puis feuilleté et lu beaucoup d'articles.

Ma deuxième bibliothèque est celle de l'Institut Fourier à Grenoble, où je me suis tout de suite senti chez moi. À nouveau, une très grande proximité aux livres et aux revues, y compris la réserve et le fonds ancien accessibles sans franchir la moindre porte. Je faisais partie des rares collègues à feuilletter régulièrement les revues sur les présentoirs des nouveautés : je regardais les tables des matières, lisais les résumés quand les titres m'attiraient, et parfois allais m'asseoir pour lire un peu plus en détail. J'ai plus d'une fois rencontré ainsi un article que je n'aurais sans doute jamais cherché, et ma culture mathématique doit donc beaucoup à Francesca Leinardi, directrice de la bibliothèque qui avait décidé de cette organisation, et à Boucif Mokhtari qui la mettait en œuvre.

Mon souvenir le plus sentimental y est sans doute celui d'avoir ouvert un volume des années 1860 ou 1870, dans la belle collection du *Journal de mathématiques pures et appliquées* du temps où on l'appelait encore le journal de Liouville et où sa maison d'édition mettait du cœur à l'ouvrage. J'avais eu l'idée de regarder un problème naturel, un peu loin de mon expertise, avant de découvrir que Camille Jordan avait déjà eu l'idée très peu de temps² avant. Pour lire l'article de Jordan, je suis simplement descendu à la bibliothèque et cinq minutes après j'avais le volume dans les mains. J'étais le premier à chercher à lire cette partie du volume, car les pages n'étaient pas coupées ! Mes mains tremblaient un peu en maniant le coupe-papier pour séparer les pages encore jointes par le haut.

C'est en devenant responsable scientifique de la bibliothèque pour les abonnements que j'ai mis un premier pied dans le RNBM, avant plus tard d'en rejoindre le bureau comme chargé de mission « accès

1. Celui dont la tranche ne portait que le très sobre « $SL(2, \mathbb{R})$ » m'a tout de même étonné – qu'y avait-il à dire des matrices $(2, 2)$ de déterminant 1 ? Je l'ai ouvert, et je n'y ai rien compris, dissipant un tout petit peu de ma naïveté.

2. À peine plus de 130 ans.

ouvert » avec Karim Ramdani. Le RNBM est un « Groupe de Service » du CNRS, et sans prétendre à l'exhaustivité il me semble intéressant de mentionner quelques-unes de ses actions.

Je souhaite commencer par deux événements qui illustrent bien le fonctionnement *en réseau*. L'ANF (Action Nationale de Formation) 2017 a été un moment important d'échange entre mathématiciennes et mathématiciens et bibliothécaires ; l'atelier a par exemple permis de constituer une liste utile d'actions concrètes par lesquelles chacun et chacune peut participer à développer un accès ouvert équitable³. Sept ans plus tôt, lorsque les négociations nationales de Couperin avec Springer s'étaient avérées (sans surprise) difficiles, nous avons avec Francesca lancé l'« Appel pour des négociations équilibrées » dont le but était de permettre à Couperin de pouvoir refuser un accord, s'il était jugé mauvais, en sachant que la communauté mathématique au moins les soutiendrait. Le RNBM a été central pour la communication de l'appel, les responsables scientifiques veillant à ce que la question soit débattue dans chaque laboratoire. L'appel a ainsi été bien relayé, fortement soutenu par la communauté, mais son effet est resté modeste (quelques pourcents d'augmentation en moins). Je garde en mémoire un aspect positif de cette petite aventure : nous avons agi collectivement, en communauté soudée sur un objectif largement partagé. À une époque où la compétition entre nous est instituée à tous les niveaux, ce n'est pas rien.

Le plan de conservation partagée est un projet important du RNBM, visant à assurer la pérennité au niveau national des collections de revues de mathématiques. Il s'agit de définir les revues pertinentes et d'en organiser la conservation de plusieurs versions papier. Le RNBM a également négocié des accords nationaux avec des maisons d'édition académiques : SMF, EMS et Mathematical Sciences Publishers, afin d'éviter que les gros bouquets commerciaux ne finissent par occuper tout le financement disponible. On peut encore citer la mise en place des « EZproxy » permettant au portail maths de regrouper les divers accès de chacun et chacune à la documentation, le genre de choses qu'on ignore facilement parce qu'on les tient pour acquises et qu'elles reposent sur un travail de l'ombre de nombreuses et nombreux collègues bibliothécaires.

Certains apports du RNBM sont moins tangibles : au fil des réunions et des débats du bureau j'ai aiguisé ma réflexion, reçu et partagé de nombreuses informations sur l'actualité de la documentation

scientifique. Il me serait bien difficile de faire la liste de tout ce que j'ai appris aux côtés de Frédéric Hélein, de Julie Janody et du bureau, mais je sais que je leur dois beaucoup, et j'espère leur avoir apporté un peu. Avant de conclure, j'aimerais revenir à la question plus large de nos bibliothèques. Depuis 2014, je n'ai malheureusement plus de bibliothèque de mathématique – j'y survivais, mais moins bien. On peut-être ne trouverais-je plus le temps d'y aller, vu l'impression de compression de mon emploi du temps ? À moins que ce ne soient les périodes passées dans le calme d'une bibliothèque, livres ou articles papier dans les mains, qui me sortaient de cette sensation de courir en permanence ? En tout cas, il faut garder en tête la mission des bibliothécaires. Elles et ils travaillent à assurer la conservation⁴ de ce que nous écrivons et de ce que nos prédécesseurs ont écrit, et à rendre ces écrits aussi faciles à identifier et à trouver que possible. Si nous pensons que nos articles ont une valeur, alors nous ne pouvons pas sous-estimer l'importance de cette tâche.

Ainsi, si on me demande si nous pouvons nous passer de bibliothèques de mathématiques, ou nous passer du RNBM, force m'est de répondre positivement. Nous pouvons abandonner les bibliothèques aux Services Communs de Documentation, nous pouvons ne plus investir de temps ni d'argent dans le RNBM (et l'un ne va pas sans l'autre, car sans RNBM les bibliothèques se retrouveront isolées et rapidement balayées). Après tout, beaucoup d'autres disciplines l'ont fait.

Mais nous y perdrons quelque chose, que de nombreux collègues d'autres disciplines nous enivrent, pas seulement un supplément d'âme. Nous perdrons notre position de communauté la plus en pointe dans les questions d'accès ouvert (en particulier ses modalités sans frais de publication : voie verte avec les archives ouvertes, revues ouvertes et gratuites pour les auteurs). La communauté mathématique française elle-même perdra une part de sa cohésion au profit de la compétition entre universités, laboratoires ou individus, dont la force est très importante. Nous perdrons le traitement spécifique des documents mathématiques, la prise en compte du temps long de validité des articles mathématiques, le rôle particulier des livres. Nous perdrons notre voix, qui compte actuellement dans le paysage des publications scientifiques au regret de certaines et certains qui aimeraient signer en toute tranquillité des accords toujours aussi favorables aux grandes maisons d'édition commerciales.

3. <https://www.rnbm.org/acces-ouvert/>

4. *Scripta manent*, « les écrits restent », certes, mais seulement si quelqu'un y travaille !



Quelques nouvelles de l'INSMI

Ce texte présente un bilan des actions de l'INSMI sur les deux dernières années, des réflexions et quelques informations sur la politique de l'équipe de direction.

1. Politique de ressources humaines

1.1 – Réflexions sur le recrutement enseignement-recherche actuel en mathématiques

L'avenir de la recherche française en mathématiques dépend naturellement du recrutement d'enseignants-chercheurs et enseignantes-chercheuses. Il est fort possible que le système évolue dans les années à venir avec l'arrivée de postes type « tenure-tracks », mais dans le système actuel des postes MCF et PU qui prévaut, il y a déjà matière à inquiétude.

Comme beaucoup d'entre vous, l'INSMI consulte chaque année le site de l'Opération Postes. Il faut d'ailleurs remercier la SMAI qui met en œuvre ce site et l'équipe de bénévoles qui se mobilise pour centraliser des informations utiles aux candidates et candidats aux postes disponibles dans chaque campagne. Le mot disponible est particulièrement approprié tellement la baisse est significative sur les 5 dernières années que ce soit en MCF, en PU et dans les deux sections CNU 25 et 26. Sur le site du ministère de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation, on dispose de chiffres de 1993 à 2018 qui montrent la situation en effectif, c'est-à-dire le nombre de postes section par section. Ces postes, lorsqu'ils deviennent vacants, sont susceptibles de ne pas être publiés par les établissements (gel ou transformation) ou affichés dans d'autres sections suite à des redéploiements. Sur ces 25 ans, on observe une augmentation de 40% du nombre de postes toutes sections confondues, de 52% du nombre de postes dans le groupe 5 (CNU 25, 26, 27),

de 17% du nombre de postes en CNU 25 et 26, de 0% pour les postes en section 25. On pourrait objecter qu'en 25 ans la situation n'est plus comparable. En effet, les années qui ont suivi 1993 ont connu l'arrivée massive d'étudiantes et étudiants à l'université, et donc de postes, comme conséquence de la politique « 80% d'une classe d'âge au baccalauréat ». La même analyse sur 10 ans (2008-2018) donne les taux suivants respectivement : 0,2% ; 0,1% ; -4,7% ; -12,6%. On peut évidemment affiner en déclinant pour les MCF et les PU.

L'INSMI concentre sa politique de recrutements sur les CR, pour offrir des possibilités aux jeunes, mais le volume de tels postes est nécessairement limité avec une moyenne d'environ 16 postes par an sur les 10 ans passés. Le constat d'un chercheur ou une chercheuse CNRS pour huit enseignantes-chercheuses ou enseignants-chercheurs en mathématiques fait que la qualité de la recherche française en mathématiques dépend pour beaucoup de nos collègues universitaires, certaines et certains étant d'ailleurs passés par le CNRS en début de carrière. Les risques découlant des chiffres ci-dessus sont réels : possible trou générationnel au niveau doctorat vu les débouchés académiques (sauf si les évolutions actuelles de la reconnaissance du doctorat et de la formation par la recherche amènent une plus grande employabilité des docteurs et docteuses dans le secteur privé) et de non-renouvellement en matière de recherche par l'arrivée de jeunes collègues sur des postes enseignement-recherche en nombre suffisant. Se greffe à ce premier constat une évolution déséquilibrée des profils recherche pour répondre à des besoins d'enseignement, en section 26 comme en 25.

Fort de la mission nationale¹, et dans le cadre des UMR, l'INSMI rappelle toujours aux établisse-

1. Le ministère a confié par arrêté en 2010 à l'INSMI la mission nationale d'animation et de coordination dans le domaine des mathématiques.

ments partenaires sa politique pour le maintien de la recherche à son meilleur niveau. L'INSMI ne peut néanmoins pas dire à chaque établissement, qui a ses propres contraintes, ce qu'il doit faire en matière de recrutement. La mission de l'INSMI lui permet en revanche de les alerter sur les risques que la tendance expliquée ci-dessus fait courir à l'excellence (dont beaucoup se félicitent) de la recherche en mathématique en France. L'INSMI est donc allé porter ces messages en montrant ces constats au bureau recherche de la Conférence des Présidents d'Universités.

Tout ne repose pas que sur la politique des établissements et notre communauté doit aussi prendre sa part de responsabilité. Notre chance est que les mathématiques sont nécessaires à l'enseignement de filières extra-disciplinaires, professionnalisantes, etc. Encore faut-il s'en saisir lorsque c'est possible et qu'elles soient enseignées par des mathématiciennes et mathématiciens qui pourraient faire leur recherche dans nos laboratoires. Convaincre en interne demande de l'énergie à celles et ceux de nos collègues qui s'impliquent dans ces discussions sans cesse à reprendre et qui portent les demandes émanant des départements d'enseignement et des laboratoires. Pour satisfaire à la fois les besoins en enseignement et la politique des laboratoires, il faut parfois savoir dissocier profil enseignement et profil recherche. Bien des enseignements jusqu'à un niveau licence peuvent être dispensés quel que soit le profil recherche. Encore faut-il que notre communauté accepte cela et joue le jeu devant les étudiantes et étudiants pour convaincre que de tels recrutements seront au bénéfice de leur établissement : ce n'est pas forcément perçu comme cela partout pour de bonnes ou mauvaises raisons. Il nous appartient, à tous et toutes, individuellement et collectivement, de faire changer cette perception.

1.2 – Affectation des chercheurs et chercheuses

La direction de l'INSMI a la responsabilité d'affecter les chercheurs et chercheuses nouvellement recrutés. Ces affectations se font en tenant compte de 2 critères principaux :

- les besoins de développement des laboratoires ;
- la mission nationale de l'INSMI qui doit soutenir les mathématiques et leur développement sur tout le territoire national. Une attention

particulière est portée à la province versus la région parisienne (par extension le pôle région parisienne + région lyonnaise versus reste de la France), aux laboratoires peu dotés en chercheurs et chercheuses CNRS et ceux hors des grands sites de recherche.

Ceci peut donc amener l'INSMI à vouloir ré-équilibrer les affectations dans l'ensemble de ses unités.

L'INSMI utilise pour sa réflexion un indice : le ratio entre le nombre de chercheurs et chercheuses CNRS et le nombre de chercheurs, chercheuses, enseignantes-chercheuses et enseignants-chercheurs dans chaque laboratoire. La moyenne nationale en mathématiques de ce ratio est de l'ordre de 12% (un chercheur ou une chercheuse CNRS en mathématiques pour huit enseignantes-chercheuses ou enseignants-chercheurs), tandis que dans les UMR de l'INSMI, il se situe à 13% (la médiane est plus faible, à 10% seulement). Cette moyenne cache cependant de grandes disparités entre les 43 laboratoires de l'INSMI. On peut noter par exemple que :

- 7/43 laboratoires, soit 11%, ont au plus un chercheur ou une chercheuse CNRS ;
- 11/43 laboratoires, soit 25%, ont moins de 2 chercheurs ou chercheuses CNRS ;
- 2 laboratoires ont des ratios qui dépassent les 50% (resp. 54 et 58% de chercheurs et chercheuses). Il s'agit des laboratoires des ÉNS Paris et Lyon, qui jouent un rôle particulier dans la formation des élèves normaliens. Ce ratio impressionnant est à relativiser avec la taille modeste de ces laboratoires ;
- 1 seul laboratoire concentre 11% des chercheurs et chercheuses de l'INSMI et 6 laboratoires en concentrent 40%.

L'INSMI est également attentif à l'historique des entrées-sorties de chercheurs et chercheuses CNRS dans chaque laboratoire au cours des 5 dernières années. Cependant, le nombre de chercheurs et chercheuses à l'INSMI n'augmentant pas, le ré-équilibre souhaité par l'INSMI n'est pas compatible avec un maintien de l'historique des laboratoires, en particulier de ceux qui sont les mieux dotés.

Il convient de souligner que la granularité considérée par l'INSMI est celle du laboratoire et pas des équipes. Même s'il serait souhaitable de prendre en compte un équilibre des affectations de chercheurs et chercheuses au sein des équipes d'un même laboratoire, ceci est actuellement concrètement impossible.

L'affectation des CR et celle des DR répondent à des logiques sensiblement différentes. Concernant les CR, la direction actuelle de l'INSMI est attentive à la présence d'au moins un membre « senior » dans la thématique du jeune CR pour pouvoir envisager son affectation. L'attractivité des laboratoires (réelle ou perçue par les candidates et candidats) joue un rôle fondamental dans les demandes d'affectation. D'une part, les laboratoires moins dotés doivent déployer de gros efforts pour se faire connaître des jeunes docteurs et docteuses et nous leur rappelons qu'ils ont un rôle actif à jouer en ce sens. Dans ces laboratoires, les membres « senior » sont invités à prospecter parmi les jeunes étudiantes et étudiants brillants de leurs collègues et leur faire connaître leur unité. Pour autant, l'INSMI a conscience que malgré tous les efforts qu'ils déploient, la visibilité de ces laboratoires auprès des jeunes collègues reste inférieure à celle d'autres unités (qui ont des masses critiques plus importantes). Pour assumer sa mission nationale, l'INSMI est attentif à proposer une affectation à un chercheur ou une chercheuse dans l'un de ces laboratoires, dès que cela fait sens scientifiquement.

L'affectation des DR répond à une logique différente. Les mathématiques étant une science où la transmission par l'enseignement est essentielle, une stratégie qui a porté ses fruits avait été mise en place par nos pairs pour répondre à une double exigence recherche-enseignement. Donner du temps recherche dans les plus jeunes années par des postes au CNRS, puis mobilité vers l'université pour devenir PU, ce qui, de plus, libère des postes qui peuvent être mis à profit pour recruter d'autres jeunes chercheurs et chercheuses, etc. Cette politique est toujours celle soutenue par l'INSMI : nous répétons aux CR qu'une vocation naturelle pour la suite de carrière est le métier d'enseignant-chercheur. Un nombre important de tels départs assurera un nombre de postes de CR plus élevé que ce que donne la mécanique des départs à la retraite. Pour que ce système fonctionne, il nous paraît important que les laboratoires et départements d'enseignement continuent à solliciter aussi les CR dans leurs démarches prospectives. Le CNRS offrant aussi des postes de DR, certaines et certains CR auront une préférence pour rester au CNRS et passer le concours de DR (mais tous et toutes ne le deviendront pas).

C'est dans ce cadre que l'INSMI demande aux nouveaux DR un effort tout particulier dans l'animation scientifique des laboratoires et les respon-

sabilités collectives. L'INSMI attend d'un ou une DR qu'il ou elle impulse une dynamique scientifique qui puisse bénéficier en particulier à de plus jeunes collègues. En particulier, la présence de collaborateurs et collaboratrices de rang A dans une unité n'est en aucun cas un argument d'affectation d'un DR.

1.3 – Opération mobilité chercheurs et chercheuses 2019

L'opération mobilité chercheurs et chercheuses mise en place par l'INSMI au printemps 2019 visait à l'objectif d'équilibrage (évoqué dans la section précédente) de l'affectation des chercheurs et chercheuses CNRS dans les laboratoires. Plus spécifiquement, il s'agit d'attirer des chercheurs et chercheuses à la mutation dans des laboratoires où l'INSMI en affecte trop peu. Pour cette opération, une première liste de 6 laboratoires a été constituée : il s'agit des laboratoires de l'INSMI qui ont au plus un chercheur ou une chercheuse CNRS (hors région parisienne). Pour chaque laboratoire, des discussions avec les vice-présidentes et vice-présidents recherche des établissements ont eu lieu pour personnaliser l'offre. À l'issue de cette campagne, le bilan est le suivant : aucune candidature officielle, 3 prises de contact par des chercheurs et chercheuses intéressés par cette opération à l'avenir. À l'heure où nous écrivons ce texte, il n'est pas certain que l'opération puisse être formellement reconduite. Cependant, tant que la direction actuelle de l'INSMI sera en place, il est envisageable de discuter de ce type d'opérations dans le cadre que nous nous sommes fixé.

1.4 – Accueils en délégation au CNRS

À chaque campagne annuelle, le CNRS finance un total d'environ 475 années d'accueils en délégation dans l'une de ses structures. Ce total est partagé entre les dix instituts du CNRS avec une pression uniforme sur chaque institut (calculée en termes d'ETP = équivalent temps plein. Une demande d'un an compte donc comme deux demandes de 6 mois). Bien qu'il soit le plus petit des dix instituts du CNRS, l'INSMI bénéficie d'environ 20 à 25% du total de ces possibilités. En effet, la communauté mathématique très universitaire postule massivement à ces accueils en délégation. C'est aussi un choix politique du CNRS de soutenir fortement les mathématiques.

Année	2016	2017	2018	2019
Nb. de demandes (Nb ETP demandés)	248 (160,5)	253 (165,5)	277 (175,5)	232 (153,5)
Nb. de personnes ayant obtenu 6 mois	174	159	157	143
Nb. de personnes ayant obtenu 1 an	23	25	28	23
Total des délégations INSMI en année	110	104,5	106,5	94,5

Rappelons quelques détails techniques du processus. L'institut qui gère la demande est l'institut principal de rattachement du laboratoire d'accueil envisagé. Tout collègue mathématicien ou toute collègue mathématicienne qui souhaiterait être accueilli dans un laboratoire ne relevant pas de l'INSMI est invité à prendre contact avec l'INSMI en amont de sa demande. Chaque candidat, chaque candidate sélectionne (au moins) une section d'évaluation du Comité National qui aura en charge l'expertise scientifique de son dossier. Pour un accueil en délégation dans une structure de l'INSMI, il convient de systématiquement demander l'avis de la section 41. Une liste de critères, élaborée conjointement par l'INSMI et la section est publiée sur le site internet de cette dernière. Le projet scientifique est un élément déterminant de l'évaluation du dossier. Les informations concernant les services faits lors des années précédentes, les décharges, les CR et les délégations auprès d'autres organismes de recherche (INRIA par exemple) doivent apparaître clairement dans les dossiers de candidature. Enfin, concernant les accueils en Unité Mixte Internationale (UMI), il faut penser à se signaler auprès du directeur adjoint scientifique en charge de l'international (Jean-Stéphane Dhersin). Pour mémoire, un appel d'offre spécifique est envoyé aux laboratoires via les correspondantes et correspondants internationaux en parallèle.

L'étape finale d'attribution des accueils en délégation se fait au niveau des sites (universitaires) et est arbitrée par le directeur ou la directrice scientifiques référents (DSR) du site. En particulier, la pression de sélection se veut uniforme à travers les instituts mais également uniforme à travers les sites (géographiques). À l'issue de l'analyse des dossiers par les sections du comité national, les instituts effectuent un premier arbitrage, puis les DSR dialoguent avec les directions d'établissements. Cette pression uniforme sur les sites peut expliquer que des collègues n'obtiennent pas d'accueil en délégation malgré un projet scientifique pertinent. Elles et ils sont invités à ne pas se décourager et à réitérer leur candidature.

2. Soutien sur projets

2.1 – Doctorantes et doctorants CNRS

Le CNRS a souhaité relancer un recrutement de doctorantes et doctorants et les positionner sur des actions transversales dans des domaines où il souhaitait renforcer sa capacité de pilotage scientifique. Il a ainsi lancé un programme de 200 doctorantes et doctorants en 2019 avec une perspective de 100 en 2020 et un objectif de se donner les moyens d'atteindre aussi 200 doctorantes et doctorants en 2020. En 2019, trois axes considérés comme prioritaires ont été annoncés : l'interdisciplinarité, le soutien aux actions internationales et certaines actions transverses en appui d'une demande sociétale. L'INSMI a essentiellement participé au deuxième axe, le soutien aux actions internationales. Cela s'est traduit au travers de deux types d'appels.

- **Un renforcement des liens entre nos UMR et nos UMI.**

Pour cela, l'INSMI a lancé fin 2018 un appel à manifestation d'intérêt (AMI). Il était demandé non seulement un sujet de thèse, avec programmation de séjours du doctorant ou de la doctorante dans une UMI du CNRS, mais également le nom d'un référent ou d'une référente scientifique appartenant à cette UMI. Ce référent ou cette référente était responsable, en lien avec le directeur ou la directrice de thèse, de l'avancement des travaux du doctorant ou de la doctorante lors de sa(ses) visite(s) dans l'UMI. Nous avons reçu de nombreuses réponses à cet AMI. L'arbitrage final, rendu par le CNRS, a attribué 8 allocations doctorales pour cet appel.

- **Un renforcement des partenariats entre le CNRS et certaines institutions.**

Le CNRS avait décidé qu'une partie de ces allocations internationales allaient être attribuées pour consolider des partenariats entre le CNRS et certaines institutions, toutes avec le même format. En lien avec un partenaire privilégié (Weizmann, ANU, NTU, ISSER Pune

ou Chicago), le CNRS demandait le dépôt d'un projet scientifique entre un chercheur ou une chercheuse (ou enseignant-chercheur ou enseignante-chercheuse) d'une UMR et un chercheur ou une chercheuse de l'institution partenaire, avec financement d'une allocation doctorale par le CNRS pour un étudiant ou une étudiante en France, et financement d'une allocation doctorale par le partenaire pour un étudiant ou une étudiante dans l'institution partenaire. Ces appels d'offres, arrivés au fil de l'eau avec des délais très courts, étaient peu adaptés au mode de fonctionnement en mathématiques, et nous avons eu assez peu de candidatures, et aucun dossier retenu par les comités mixtes CNRS/institution partenaire pour les appels dont les résultats sont connus à ce jour. D'autres appels vont être lancés.

2.2 – Actions de l'INSMI

Chercheurs et chercheuses invités et ingénieurs et ingénieures sur projets

Tous les ans au moment de la campagne de demande de moyens, les unités (UMR, UMS, FR) peuvent faire des demandes de postes de chercheurs ou chercheuses invités (« postes rouges »), qui permettent de faire venir un ou une collègue de l'étranger sur un contrat à durée déterminée de 3 mois, au niveau CR ou DR. Les demandes (projet de recherche + curriculum vitæ de la personne invitée) sont évaluées par la section 41 du comité national.

Pour l'année 2018, 44 demandes ont été reçues (dont 4 inéligibles), 20 contrats ont été attribués, et 18 ont été finalement effectués. Pour 2019, 47 demandes ont été reçues (dont 6 inéligibles), 19 contrats ont été attribués (dont deux désistements) et 13 effectués à ce jour (août 2019). Pour l'année 2020, 52 demandes ont été reçues et sont en cours d'arbitrage.

Ces postes de chercheurs et chercheuses associés correspondent annuellement à près de 5 emplois à temps plein. À cela, il faut ajouter 18 mois concernant l'organisation des semestres à l'IHP, et autour de 2 années de chercheurs et chercheuses issus de nos UMI/LIA. Au total, c'est 8,5 ETPT (équivalent temps plein travaillé) qui sont consacrés à ces invitations.

Depuis 2018, l'INSMI a par ailleurs proposé un volant de CDD d'une durée de 6 mois pour recruter des ingénieurs et ingénieures afin de mener à bien des

projets de développement informatique. Là aussi, les demandes transitent via la demande de moyens de l'unité et sont évaluées par la section 41. Pour 2018, 4 CDD de 6 mois ont été financés (sur 9 demandes dont une hors cadre) tandis que pour 2019, seulement deux demandes ont été faites (plus une hors cadre), financées toutes les deux. Pour l'année 2020, nous avons reçu 4 demandes en cours d'arbitrage.

Programme Exploratoire de Premier Soutien Jeunes Chercheurs et Jeunes Chercheuses (PEPS-JCJC)

Depuis 2016, l'INSMI a reconduit annuellement un Programme Exploratoire de Premier Soutien (PEPS) dédié aux jeunes chercheurs et jeunes chercheuses de ses laboratoires (conditions d'ancienneté calquées sur la catégorie « starting » de l'ERC). L'objectif de ce programme est d'aider les jeunes collègues à développer leur recherche (en particulier en nouant des collaborations en France et à l'international) et amorcer des projets de plus grande ampleur pouvant mener à terme à un dépôt de projet auprès d'une agence de moyens. Le PEPS-JCJC a pris de l'ampleur ces deux dernières années avec une augmentation significative du nombre de candidatures.

Année	2016	2017	2018	2019
Nb. de demandes (non retenus)	50(8)	53(1)	66(7)	98(20)
Montant total des demandes (k€)	361	353	395	470
Montant total distribué (k€)	178	178	179	246

Le financement est versé sous forme de subvention d'état au laboratoire et les crédits doivent donc être consommés dans l'année civile, en respectant les règles habituelles de la comptabilité publique.

PEPS Intelligence Artificielle et Apprentissage Automatique - 2018

Début 2018, l'INSMI s'est associé à AMIES et à l'INS2I pour lancer un PEPS en Intelligence Artificielle et Apprentissage Automatique. Les projets proposés pouvaient concerner une collaboration avec une entreprise, auquel cas des indemnités de stage pouvaient être envisagées (via un financement AMIES). Sur cet appel,

- au titre d'un financement INSMI, 15 dossiers ont été déposés, pour une demande totale de

95k€. Parmi ceux-ci, 9 projets ont été retenus pour un financement total de 70k€ ;

- au titre d'un financement AMIES, 12 dossiers ont été déposés, pour une demande totale de 116k€. Parmi ceux-ci, 7 projets ont été retenus pour un financement total de 41k€.

Dans le contexte de développement des centres 3IA, des appels chaires IA et contrats doctoraux en IA par le PIA3, ce PEPS n'avait pas vocation à être reconduit.

Appel de Rio - 2018

En 2018, l'INSMI (avec le Réseau Franco-Brésilien en Mathématiques qui est un International Research Network de l'INSMI) a souhaité accompagner nos collègues désirant participer au congrès international des mathématiciens ICM 2018 qui avait lieu à Rio de Janeiro en août 2018. Nous avons proposé un co-financement aux laboratoires et co-financé un total de 60 collègues pour un montant total de 70k€ (58k€ provenant directement de l'INSMI et 12k€ du RFBM).

Accompagnement des dépôts de projets au conseil européen de la recherche (ERC)

L'auto-censure est très présente chez les mathématiciennes et mathématiciens dans les réponses aux appels à projets. L'ERC n'échappe pas à cette règle, ce qui est dommage (en particulier, les répartitions des financements entre les différents comités d'évaluation étant faite en fonction du nombre de dépôts par comité, les mathématiques voient leur dotation relative diminuer). Les raisons de cette auto-censure sont nombreuses. L'INSMI, comme les autres instituts, a décidé depuis quelques années d'accompagner les candidates et candidats. Jusque récemment, cet accompagnement se limitait à la préparation à l'oral dans les catégories starting et consolidator. Depuis peu, nous proposons la relecture des documents écrits (en général en demandant l'aide d'un ancien lauréat ou d'une ancienne lauréate ou d'un ou une ancien membre de comité ERC).

L'accompagnement ne s'arrête pas à la préparation, puisque depuis un peu plus d'une année a été créée sur suggestion de l'INSMI une liste de diffusion math-ERC où les lauréates et lauréats, anciennes lauréates et anciens lauréats peuvent échanger sur les différents problèmes auxquels elles et ils sont confrontés dans la gestion de leur ERC.

2.3 – Programmes interdisciplinaires

Le tableau ci-dessous résume des financements reçus par des laboratoires de l'INSMI via des programmes interdisciplinaires, en k€ et par année. Entre parenthèses figure, lorsque l'information est disponible, le nombre de projets financés sur le nombre de projets éligibles (relevant de l'INSMI à titre principal).

	2016	2017	2018	2019
Momentum	-	49*(2/9)	111*(1/13)	-
80prime	-	-	-	98 (7/37)
MITI (autres)	153 (16/-)	217 (21/-)	120 (15/-)	89 (8/-)
Tellus	52 (8/-)	0	15 (3/-)	-

En 2018, la mission pour l'interdisciplinarité (MI) du CNRS a été rebaptisée Mission pour les initiatives transverses et interdisciplinaires (MITI). La MITI conduit une réflexion coordonnée et transversale au sein du CNRS afin d'assurer la mise en œuvre d'une politique de soutien et de renforcement de l'interdisciplinarité. Les initiatives de la MITI se regroupent principalement autour de quelques dispositifs qui sont par définition évolutifs car ils s'adaptent aux opportunités détectées : défis, PEPS en réseau, etc.

Les appels d'offre sont relayés dans la lettre de l'INSMI et/ou sur son site internet. Globalement, on observe une faible pression du côté des mathématiques dans ces différents programmes et les collègues sont vivement encouragés à postuler. Les dossiers de candidature sont légers (4 à 6 pages) et nécessitent un faible niveau de détails. Les projets portés par nos jeunes collègues sont très appréciés par les évaluateurs et évaluatrices. Ces appels étant interdisciplinaires, les projets sont évalués par des expertes et experts d'au moins deux disciplines et il est donc important que le projet soit rédigé de façon compréhensible et pertinente pour un non-mathématicien ou une non-mathématicienne.

Le programme Momentum lancé durant 2 années consécutives en 2017 et 2018 a soutenu des jeunes chercheurs et jeunes chercheuses, titulaires du CNRS ou non-titulaires, déposant un projet sur une des thématiques émergentes et transdisciplinaires listées dans le programme. D'une durée de 3 ans, ces projets ont financé, outre le salaire des lauréates et lauréats non titulaires, deux ans de salaire d'un post-doctorant, d'une post-doctorante, d'un ingénieur ou d'une ingénieure et des frais de fonctionnement (* seul ce montant annuel est indiqué dans le tableau ci-dessus). On note que les 3 lauréates et lauréats INSMI sont à présent CR au CNRS.

Le programme 80prime a été lancé en 2019 pour les 80 ans du CNRS. Il s'agissait d'un programme « top-down » pour lequel chaque institut devait sélectionner des projets de recherche inter-instituts multi-équipes (Prime) et destiné à faire émerger de nouvelles questions scientifiques et méthodologiques sur des thématiques stratégiques pour le CNRS. L'INSMI a choisi de procéder via un appel à manifestation d'intérêt, sur la base duquel une sélection a été faite. Le programme sera reconduit l'année prochaine.

Le PEPS Tellus INSMI-INSU a fonctionné de 2016 à 2018 inclus. Le thème en était : modélisation de la surface terrestre, fluides géophysiques, astronomie.

3. Accompagnement et structuration

3.1 – Appels à projets structurants

L'année universitaire 2018/2019 a été marquée par plusieurs événements importants pour la structuration de la communauté mathématique française à laquelle il convient d'associer les collègues d'informatique.

Le premier d'entre eux est la prolongation des LABEX. Sur les 171 LABEX existants, 114 ont déposé au mois de septembre 2018 un dossier de prolongation auprès de l'ANR (42 LABEX rattachés à l'une des quatre IDEX pérennisées ne l'ont pas fait de même que 15 autres LABEX, notamment ceux liés à une EUR labellisée en 2017). Si l'attente a été un peu longue, les résultats ont été globalement bons avec 103 LABEX prolongés dont 18 assortis de conditions et excellents pour notre communauté puisque tous les LABEX en mathématique ou mathématique et informatique ont été prolongés. Ces résultats récompensent la qualité des actions menées, la dynamique positive amenée par les LABEX en mathématique/informatique ainsi que le travail formidable accompli par les équipes des LABEX en collaboration avec les directions d'UMR. L'INSMI se félicite de cet excellent résultat et remercie tous les collègues impliqués pour leur investissement et la qualité du travail effectué. Il va sans dire que l'INSMI demeure extrêmement vigilant quant au devenir des « LABEX » intégrés à l'une des quatre IDEX pérennisées.

Un 2^e appel à projets pour les Écoles Universitaires de Recherche (EUR) a également été lancé au cours de l'année universitaire écoulée. Cet appel

concernait les établissements en dehors du périmètre de l'établissement cible d'une initiative d'excellence IDEX ou ISITE. L'appel SFRI (structuration de la formation par la recherche dans les initiatives d'excellence) réservé à ces derniers établissements et davantage sur une logique d'examen que de concours sera publié d'ici la fin de l'année 2019. Les résultats du 1^{er} appel à projets pour les EUR de 2017 avaient surpris et quelque peu ému notre communauté puisqu'aucun projet ayant pour thématique principale les mathématiques ou les mathématiques et l'informatique n'avait été retenu. Les résultats de ce 2^e appel sont plus positifs ! Sur 81 candidatures, 24 projets ont globalement été sélectionnés pour un budget de 109 M€. Parmi ces 81 candidatures, trois dossiers portaient principalement sur les mathématiques et l'informatique et deux d'entre eux ont été retenus par le jury international pour le label EUR : il s'agit du projet d'EUR de Paris Nord en mathématiques et informatique et du projet d'EUR « Mathématiques et interactions à Toulouse ». Il faut également souligner la participation de trois autres UMR de l'INSMI à des projets d'EUR pluridisciplinaires retenus.

Enfin, en ce qui concerne les appels à projets structurants, l'Intelligence Artificielle a occupé une place très importante cette année. Tout d'abord, l'appel 3IA (Institut Interdisciplinaire en Intelligence Artificielle), au terme d'un processus de sélection en deux étapes, a conduit à la création de 4 instituts : 3IA Côte d'Azur à Nice, ANITI à Toulouse, MIAI@Grenoble-Alpes à Grenoble et PRAIRIE à Paris. Ces instituts reposent sur un mécanisme de chaires et, dans chacun des instituts lauréats, certaines d'entre elles sont portées par des mathématiciennes et mathématiciens. Il faut également souligner l'implication, dans ces instituts, des collègues des UMR des sites concernés. Elles et ils tentent d'apporter, aux algorithmes les plus performants, les fondements théoriques nécessaires pour répondre aux questions de pertinence, de confiance, d'expliquabilité, d'interprétabilité, de biais, de stabilité et de robustesse qui sont posées. À noter également, pour ce qui est de l'IA, les 12 projets de « chaires de recherche et d'enseignement en IA » portées par des collègues des UMR de l'INSMI et soutenues par l'institut ainsi que la quinzaine de projets impliquant les UMR de l'INSMI déposés en réponse à l'appel à programmes « contrats doctoraux en textscia - établissement ».

Finalement, l'INSMI considère comme l'une de ses priorités le développement des mathématiques

en interaction avec l'humain et la planète Terre. Ceci fait suite à l'Atelier de Réflexion Prospective (ARP) « MathsInTerre » lancé en janvier 2013 (<http://mathsmonde.math.cnrs.fr>) ainsi qu'à une initiative portée par la fédération de recherche en mathématiques Auvergne Rhône-Alpes (MARA). Cela répond également à la recommandation formulée par le conseil scientifique de l'INSMI du 5 juin 2019 (<http://www.cnrs.fr/comitenational/csi/reco/insmi.htm>). L'objectif de l'INSMI est de créer un institut de portée nationale visant le développement de mathématiques pour l'humain et la planète Terre et leurs interactions avec les autres disciplines concernées par ces problématiques. Arnaud Guillin, actuel directeur de la fédération MARA, est chargé de mission auprès de l'INSMI pour conduire les réflexions et la mise en place de cet institut.

3.2 – IHP+ et CIRM

Dans le cadre d'un contrat plan état-région (CPER) de 3,46M€, dont 1,46M€ apporté par le CNRS (dont 1,3M€ par l'INSMI) une extension du CIRM a été construite. Les autres partenaires du CPER sont la Société Mathématique de France (SMF) et la région Provence Alpes Côte d'Azur. Dans le même temps, la SMF a financé un projet d'agrandissement et rénovation du restaurant. Un « bâtiment-passerelle » permet d'augmenter la capacité d'accueil du CIRM, de relier les bâtiments entre eux et apporter ainsi cohérence et accessibilité à l'ensemble du site. Le CIRM dispose désormais d'une salle de conférences supplémentaire d'une capacité de 100 places, d'une salle de travail et de visioconférences et de nouvelles chambres et studios. Ceci permet de répondre à la pression devenue trop grande et d'organiser simultanément deux conférences, l'une devant être auto-financée.

Un deuxième CPER de 14M€, dont 1M€ apporté par le CNRS, permettra l'une des plus importantes mutations de l'IHP. Les autres partenaires de ce projet sont la ville de Paris, la région Île-de-France et l'État. Lorsqu'il sera achevé, en principe en 2021, ce projet offrira une extension de plus de 1700 m² dans le bâtiment Jean Perrin, situé en face du bâtiment actuel de l'institut. C'est ainsi 1100 m² supplémentaires qui seront dédiés aux activités et échanges scientifiques, avec des bureaux de 1 à 6 places, des salons avec tableau, une salle de conférences, une salle de séminaires, des galeries, des terrasses et un jardin. Une salle d'exposition perma-

nente de 400 m² au rez-de-chaussée et un espace de médiation et d'exposition temporaire de 200 m² permettront de plus l'accueil du grand public. Dans le même temps, le rez-de-chaussée du bâtiment Borel qui abrite actuellement l'IHP est rénové et celui-ci est mis aux normes permettant un meilleur accueil des personnes à mobilité réduite.

4. L'année des mathématiques 2019-2020

Sur proposition de l'INSMI, et à l'occasion des 80 ans du CNRS, le ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse, a déclaré « année des mathématiques » l'année scolaire 2019-2020. Pour l'INSMI, l'objectif est double : créer des liens, ou les renforcer lorsqu'ils existent déjà, entre les unités mixtes de recherche en mathématiques et les enseignantes et enseignants du secondaire ; mettre en valeur les actions portées par de nombreux acteurs et de nombreuses actrices de la diffusion.

L'INSMI soutient déjà la diffusion des mathématiques et un groupement de soutien est dédié à la diffusion, AuDiMATH. Celui-ci développe en particulier deux actions phares. Un journal en ligne, Images des mathématiques, dont le but est de présenter la recherche mathématique et le métier de mathématicien, à l'extérieur de la communauté scientifique. Son rédacteur en chef est Aurélien Alvarez. VideoDiMath rassemble des ressources audiovisuelles de diffusion des mathématiques destinées à tous et toutes, la porteuse de ce projet est Amandine Aftalion. Par ailleurs, le CNRS est co-fondateur de la fondation Blaise Pascal, avec l'université de Lyon et INRIA. Cette fondation nationale a pour vocation de promouvoir, soutenir, développer et pérenniser les actions de médiation scientifique en mathématiques et informatique à destination de tout citoyen et toute citoyenne. Le délégué général de la fondation est Stéphane Gaussent.

Le rapport Torossian-Villani interpellant le CNRS, mentionne que les chercheurs et chercheuses sont de plus en plus désireux de s'engager davantage dans la formation des enseignantes et enseignants ou le développement des activités auprès des publics extra-universitaires. Pour répondre à cet appel, l'INSMI a labélisé près de 80 formations ouvertes au plan académique de formation sous le label « année des mathématiques ». Ces formations sont ouvertes à toutes les enseignantes et tous les enseignants du secondaire. Chaque UMR s'est dotée d'un correspondant ou une correspondante année des

mathématiques et le réseau ainsi formé est animé par Louise Nyssen, chargée de mission année des mathématiques à l'INSM. Une journée d'ouverture a eu lieu le 2 octobre à la Sorbonne à destination de cadres et personnels de l'Éducation nationale. Ces formations ont pour objectif de rappeler ce qu'aucun lecteur ni aucune lectrice de ce texte n'ignore : les mathématiques sont une science vivante!

Dans les laboratoires, avec les sociétés savantes, au sein d'associations, à titre personnel... mathématiciennes et mathématiciens participent à une myriade d'actions de diffusion et partagent les mathématiques. D'une place de village à une galerie commerciale, dans une salle de théâtre ou une salle de classe, dans un champ ou dans la rue, ces actions couvrent tout le territoire, s'adressent à

tous et à toutes. Pendant toute une année scolaire, l'INSM mettra en avant ces actions, en particulier, sur le site de l'année des mathématiques (<https://annee.math.cnrs.fr>), dans sa lettre mensuelle ou sur le compte Twitter « Les maths au CNRS ».

D'autres grands événements se dérouleront pendant cette année, notamment une semaine mathématiques et numérique du 27 au 31 janvier, la semaine des mathématiques du 9 au 15 mars et le grand forum des mathématiques à Lyon du 13 au 20 mai.

La direction scientifique de l'INSM : Pascal Ausercher, Philippe Briand, Jean-Stéphane Dhersin, Catherine Matias, Emmanuel Royer.

Bilan des activités 2019 et de la mandature du CNU 26

L'actuel Conseil National des Universités (CNU) a été mis en place à la fin de l'année 2015 pour un mandat de quatre ans.

La section 26 est composée de 48 membres titulaires et de 48 membres suppléants, elle est chargée du domaine « Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques » et représente environ les trois cinquièmes des enseignants-chercheurs en mathématiques en France. Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la CP-CNU¹. La section dispose également d'un site propre²

L'année 2019 était la dernière année du mandat de ce CNU, aucun changement particulier n'est intervenu dans son fonctionnement, mais un débat sur le mandat écoulé a été organisé à la fin de la session promotions et fait l'objet d'un paragraphe de ce bilan

1. Suivi de carrière

Les sections 25 et 26 ont décidé de reconduire la décision prise en 2017 de ne pas mettre en place le suivi de carrière en 2019.

1. <https://www.conseil-national-des-universites.fr>

2. <http://cnu26.emath.fr>

2. Bilan de la session qualifications

Les candidats ont connaissance des deux rapporteurs désignés par le bureau de la section, il est important de préciser que la décision de qualification, ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, le rôle des rapporteurs étant avant tout de présenter les éléments factuels du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification.

Les critères de qualification ne sont pas toujours bien connus des candidats, les candidats sont invités à les consulter sur les pages web mentionnées ci-dessus.

Depuis 2018 les candidats déposent leur dossier en ligne et la recevabilité des dossiers est étudiée par le ministère, au fur et à mesure du dépôt des pièces par les candidats et alors que les rapporteurs ont déjà accès au dossier. Plusieurs candidats ont vu leur dossier déclaré irrecevable bêtement, parce que manquait une attestation du diplôme de thèse, *le procès verbal ne suffisant pas* ou, dans le cas de candidats étrangers, du fait de l'absence de traduction du diplôme. Il est à noter qu'une traduction par le candidat lui-même est suffisante. La

souplesse dont faisait preuve la section lorsque l'examen de la recevabilité lui incombait n'est plus de mise, et des erreurs parfaitement innocentes ne sont plus rattrapables.

2.1 – Qualification aux fonctions de Maître de Conférences

Résultats de la session 2019. Le nombre de dossiers MCF effectivement examinés par la section (404) est en nette augmentation par rapport à l'an dernier (333), qui était une année assez atypique, peut-être à cause de la mise en place de la dématérialisation et le nombre de cas d'irrecevabilité qu'elle a entraîné.

Nombre de dossiers : 449. Irrecevables ou non transmis : 45. Hors-section : 126. Non qualifiés : 11. Qualifiés : 267.

Le pourcentage de dossiers qualifiés parmi les dossiers examinés est de 66% contre 75% en 2018, 85% en 2017, 67% en 2016, 69% en 2015.

Nous n'avons pas comptabilisé les dossiers avec thèse à l'étranger cette année. Ils étaient au nombre de 77 en 2018.

Critères de qualification. Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrit pas de façon canonique dans les thématiques de la section. D'une part l'aptitude à enseigner les mathématiques. D'autre part l'activité scientifique, qui dans les domaines d'application des mathématiques ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

L'activité de recherche est évaluée à partir :

1. Des travaux de la thèse en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat français récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification.
2. Des publications. Si la présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes.

3. L'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considéré comme suffisant à lui seul pour la qualification en Section 26. (C'est en général ce critère qui entraîne le plus de refus de qualification). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26^e section.

Par ailleurs le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soient aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci est particulièrement examiné en cas de requalification).

Enfin, il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

2.2 – Qualification aux fonctions de Professeur

Résultats de la session 2019. En ce qui concerne les PR, la répartition est la suivante.

Le nombre de dossiers était de 132 (126 en 2018), dont 103 qualifiés, 6 non qualifiés, 9 hors section, 9 irrecevables ou non transmis, et 5 dispenses refusées (il s'agit de dossiers étrangers sans HDR, dont la section estimait qu'il ne correspondait pas au niveau de l'HDR).

Le pourcentage de dossiers qualifiés est de 78%, comme en 2018. Il était de 80% en 2017, 78% en 2016, de 77% en 2015.

L'examen des dossiers a révélé un nombre important (environ 1/4) de dossiers de requalification, comme les années précédentes. Ceci est la traduction de l'embouteillage qui se forme depuis plusieurs années au niveau des recrutements PR.

Critères de qualification et recommandations aux candidats. Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de Professeur sont les suivants : l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'au niveau Master, l'activité et le rayonnement scientifiques, la démonstration d'une réelle autonomie

scientifique, l'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

L'activité de recherche en mathématiques appliquées est évaluée selon plusieurs aspects.

1. Une production scientifique régulière et significative, qualitativement et quantitativement suffisante, sous forme d'articles publiés ou de logiciels (une attention particulière sera portée aux travaux postdoctoraux des quatre dernières années).
2. Le rayonnement, estimé entre autres critères par la participation aux colloques, les invitations dans les conférences internationales, les séjours à l'étranger, les collaborations internationales.
3. Les rapports de l'habilitation.

L'autonomie scientifique est en particulier évaluée par le nombre et la qualité des publications (hormis celles issues de la thèse), ainsi que la variété des thèmes abordés et leur nouveauté par rapport aux travaux de thèse.

La capacité à encadrer des doctorants est évaluée à travers l'expertise scientifique, l'autonomie, l'expérience d'encadrement ou coencadrement de thèses ou de mémoires de Master...

En ce qui concerne les dossiers relevant pour une grande part d'une autre discipline que les mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal...), le dossier doit faire clairement apparaître la contribution du candidat dans le domaine des mathématiques appliquées, et préciser la nature de l'apport des mathématiques au domaine d'application.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Il est demandé que les rapports préalables à la soutenance de l'HDR soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des HDR françaises).

Pour les candidats étrangers non titulaires de l'HDR française, le CNU a l'obligation en cas de qualification de délivrer une dispense. Pour les candidats provenant d'un pays où existe un deuxième doctorat du niveau de l'HDR, il paraît souhaitable qu'ils l'aient obtenu. Par ailleurs il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

Dans tous les cas, le niveau du dossier scientifique reste un critère déterminant.

3. Promotions

Les candidatures se font par voie électronique. Avant l'examen par le CNU les dossiers sont préalablement examinés par les conseils académiques des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement des candidats. La section 26 du CNU a choisi de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion. Elle a donc transmis aux établissements l'avis suivant pour les candidats non promus « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué ». Pour les membres du CNU, la section indique à l'établissement qu'elle n'examine pas les dossiers de candidature à une promotion émanant de ses membres.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Pour les dossiers examinés plusieurs années consécutives par notre section, et sauf impossibilité due à une thématique peu représentée au CNU, les rapporteurs sont différents d'une année à l'autre.

Nous attirons l'attention sur les points importants suivants.

1. Le dossier de candidature à une promotion doit contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière et **faire apparaître clairement les éléments nouveaux par rapport à la dernière promotion.**
2. En ce qui concerne l'encadrement doctoral, le dossier doit préciser pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
3. En ce qui concerne les conférences, il doit distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

De façon générale, chaque élément du dossier doit être décrit de façon suffisamment claire et précise, et lorsque cela est pertinent par des éléments chiffrés, pour permettre sa juste prise en compte par la section.

Le bilan chiffré de la session promotions est résumé dans le tableau suivant :

	MCF HC	MCF EX	PR 1C	PR EX1	PR EX2
Promouvables	281	74	186	218	115
Candidats	87	35	95	72	45
dont Candidates	27	11	21	5	6
Promus	22	14	14	14	10
dont Promues	6	5	5	1	0
Âges min et max	38-62	58-66	37-57	41-61	46-64

3.1 – Promotions à la hors-classe des MCF

Liste des promus : Emmanuel Audusse, Luc Barbet, Séverine Bernard, Adrien Blanchet, Guillemette Chapuisat, Jean-François Coeurjolly, Louis Dupaigne, Fabien Emprin, Céline Helbert, Irina Ignatiouk, Mourad Ismail, Pierrick Legrand, Jean-Philippe Mandallena, Mathieu Merle, Christine Orsola, Rachid Ouïja, Christian Paroissin, Jacques Printems, Ulrich Razafison, Aude Rondepierre, Jean-François Scheid, Christian Silvy.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et l'activité d'enseignement, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

Promus au nouvel échelon MCF EX

Liste des promus : Sergio Alvarez-Andrade, Said Belmehdi, Sylvie Champier, Marie-Françoise Delcroix, Dariush Ghorbanzadeh, Fouzia Kabbaj, Yvon Lafranche, Françoise Lefevre, Ana Mendes Mena de Matos, Assi N'guessan, Louis Randriamihamison, Thierry Raoux, Michel Salaun, Jean-Pierre Varenne.

L'effectif du nouvel échelon doit à terme représenter 10% de l'effectif du corps des MCF, cet effectif devant être atteint au bout de 7 ans, cette année étant la troisième. Au terme des 7 années, les promotions proposées résulteront uniquement du flux sortant des promus du corps des MCF, essentiellement par départs en retraites. C'est pourquoi la section a décidé, cette année encore, d'utiliser de façon prépondérante mais non exclusive le critère de l'âge pour cette promotion. Il nous a semblé qu'après quelques années la dynamique du système apparaîtrait plus clairement et permettrait des choix différents, en toute connaissance de cause. Le critère de l'âge a été choisi plutôt que l'ancienneté dans le grade MCF-HC, et a été modulé

au vu de l'investissement des candidats dans tous les aspects du métier d'enseignant-chercheur, avec un souci de prendre en compte les difficultés particulières de la carrière des collègues femmes.

3.2 – Promotions à la première classe des PR

Liste des promus : Mihai Bostan, Lalina Coulange, Anne-Laure Dalibard, Arnaud Guyader, Ying Jiao, Bénédicte Haas, Arnaud Heibig, Aurélien Latouche, Pierre Marechal, Benoît Merlet, Rémi Rhodes, Mathieu Rosenbaum, Marie-Luce Taupin, Grégory Vial.

Pour l'examen des promotions à la première classe des Professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants : domaine scientifique, âge et ancienneté comme Professeur, faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques, activité et responsabilités pédagogiques, responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...), activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapports de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales, activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications), encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistique), ce qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le CNU est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donnée la pression très forte sur ce type de promotion, les candidats qui étaient professeurs depuis au moins trois ans ont été privilégiés. Cette promotion est clairement celle où l'embouteillage est devenu le plus critique, et il sera peut-être nécessaire de privilégier pour le résorber les candidats ayant 4 ans d'ancienneté à l'avenir. Ce sera au CNU suivant de le déterminer.

3.3 – Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Christophe Ambroise, Jean-François Aujol, Stéphane Crepey, Laurent Denis,

François Dubois, Olivier Gaudoin, Olivier Glass, François Jouve, Amaury Lambert, Eva Locherbach, Marc Massot, Luc Molinet, Yue Jun Peng, Bruno Portier.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils se soient particulièrement distingués dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus et a privilégié les candidats qui étaient professeurs de 1^{re} classe depuis au moins trois ans.

3.4 – Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Joseph Abdou, François Alouges, Eric Bonnetier, François Hamel, Ying Hu, Serguei Pergamenchikov, Jean-Michel Poggi, Rachid Touzani, Nikolay Tzvetkov, Dalibor Volny.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle.

3.5 – Promotions hors CNU

Le bilan des promotions locales pour l'année 2019 n'est pas encore disponible. En 2018, il y a eu en promotions locales :

Promotions MCF Hors Classe : Abdessamad Barbara, Vlad Barbu, Mireille Echerbault, Laurence Ghier, Véronique Hedou, Sophie Jacquot, Jérôme Lemoine, Anne Eyraud Loisel, Pierre-Yves Louis, Julia Sobreiro Louro de Ma Martel, Myriam Maumy-Bertrand, Sophie Wantz Meziere, Malika More, Landy Rabehasaina, Farida Hocine Said, Laurent Smoch, Patricia Spinelli, Julien Worms, Elie Youndje, soit 19 promotions contre 23 promotions au CNU.

Promotions MCF échelon exceptionnel : Larbi Ait Hennani, Brahim Amaziane, Jean-Pascal Ansel, Denise Aregba, Pascal Azerad, Anne Beaulieu, Moulay Driss Benchiboun, Jean-Charles Canonne, Michel Cristofol, Naima Debit, Christine Georgelin, Bernard Gleyse, Stéphane Godts, Rejeb Hadiji, Gilles

Hunault, Mohammed Jai, Cédric Luan Jaupi, Françoise Richard Jung, Sidi-Mahmoud Kaber, Christine Bernier, Georges, El Haj Laamri, Aime Lachal, Gilles Lacombe, Abdely Leguesdron, Michel Levy, Laurent Mazliak, Mustapha Mourragui, Myriam Normand, Frédéric Pons, Marie-Anne Poursat, Laure Quivy, Daniel Ruiz, Michèle Thieullen, Isabelle Trouve, Guy Vallet, soit 35 promotions contre 28 promotions au CNU.

Promotions PR 1^{re} classe : Nicolas Curien, Jean-Guillaume Dumas, Romuald Elie, Sébastien Gadat, Pascal Gourdel, Olivier Gueant, Mounir Haddou, Olivier Lopez, Valérie Monbet, Arnaud Munch, Claudia Negulescu, Soit 11 promotions, contre 14 au CNU.

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 1^{er} échelon : Samir Adly, Fayssal Benkhaldoun, Christophe Berthon, Myriam Ducret Comte, Stéphane Descombes, Abdellatif El Badia, Patricia Gaitan, Michel Geoffroy, Serge Gratton, Patrick Hild, Dragos Iftimie, James Ledoux, Sophie Mercier, Jérôme Renault, Jean-Rodolphe Roche, soit 15 promotions, contre 15 au CNU.

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 2^e échelon : Fatiha Boussouira-Alabau, Moulay-Ahmed Aziz-Alaoui, Christine Graffigne, Witold Respondek, Étienne Sandier, Mircea Sofonea, Soit 6 promotions contre 9 au CNU.

4. Attribution de semestres de congés pour recherche ou conversion thématique

Les semestres de CRCT étaient attribués en février, lors de la session qualifications. Il y a eu 19 candidats PR et 44 candidats MCF, pour 9 semestres attribués : 3 PR et 6 MCF.

Liste principale : Ion Grama, Paul Armand, Faïcel Chamroukhi, Ilaria Lucardesi, Marco Mazzola, Emmanuel Schertzer, Benedetta Noris, Fabien Caubet, Manon Costa.

Liste complémentaire : 1) Irène Votsi, 2) Olivier Glass, 3) Aude Maignan, 4) Anatoli Iouditski, 5) Jean-Charles Quinton, 6) Ying Hu.

L'attribution d'un CRCT nécessite un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini. Le CNU privilégie particulièrement les dossiers comportant

des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques... Le conseil favorise également les candidats qui n'ont pas ou ont peu bénéficié de CRCT ou de délégations dans le passé, ainsi que les demandes suite à un congé maternité ou longue maladie.

Il est indispensable que les CRCT et délégations passées des candidats soient clairement mentionnés. Il est choquant que des collègues encore en délégation CNRS fassent une demande de CRCT sans le mentionner. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui de ces projets : lettres d'invitation, programme des semestres...

5. Bilan de la session PEDR

Depuis 2014, ce sont les sections du CNU qui évaluent les candidats des établissements souhaitant faire appel au CNU : en 2019, toutes les universités l'avaient fait sauf 4 établissements (Corte, Toulouse 1, Sorbonne Universités et l'École pratique des hautes études). Le CNU 26 a dès le début estimé qu'il serait préférable que les PEDR soient évaluées par une commission distincte de celle évaluant les promotions. Hormis le président de section, aucun membre du CNU n'a participé à la fois à la session promotions et à la session PEDR en 2019.

Chaque section du CNU doit classer les candidats dans trois catégories désignées par les seuls quotas qu'elles représentent : « 20% », « 30 % » et « 50 % ». Ces quotas doivent être respectés dans chaque corps : MCF et PR.

Comme en 2018, la section a procédé à un examen séparé des dossiers de candidats ayant postulé trois fois sans succès à la PEDR. Nous avons à cette fin demandé aux candidats qui étaient dans cette situation de le mentionner explicitement dans leur dossier de candidature. Ces candidats ont été classés dans les catégories 20%, 30% et 50% en fonction des notes intermédiaires uniquement. Ceci concernait 21 dossiers MCF (sur 171), dont 6 ont été classés dans les 20% et 10 dans les 30%. Parmi les 137 dossiers PR, ceci concernait 10 dossiers, dont 6 ont été classés dans les 20%, et 3 dans les 30%.

En plus du classement dans une des catégories globales précédentes, chaque candidat se voit attribuer une appréciation A (De la plus grande qualité), B (Satisfait pleinement aux critères), C (Doit être consolidé en vue d'une prime) ou X (Insuffisamment renseigné) pour chacune des rubriques **P** : Publi-

cations / production scientifique, **E** : Encadrement doctoral et scientifique, **D** : Diffusion des travaux, **R** : Responsabilités scientifiques.

Le classement de chaque candidat dans une des catégories (« 20% », « 30% », « 50% ») et les appréciations de chaque critère sont ensuite transmis aux universités qui décident souverainement de l'attribution éventuelle de primes et de leur montant. Les informations remontées des universités montrent une certaine disparité concernant l'utilisation des notes fournies par le CNU pour cette attribution finale. En 2018, deux candidats classés dans les 20% par le CNU (sur 62) n'ont pas eu de prime attribuée. Parmi les 94 candidats classés dans les 30% par le CNU, 20 n'ont pas obtenu de prime. Enfin, parmi les 151 candidats classés dans les 50% par le CNU, 5 ont obtenu une prime.

L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années. En cas de congé maternité pendant cette période, l'appréciation porte sur les cinq années précédentes (plus s'il y a plusieurs congés dans la période).

5.1 – Fonctionnement de la section

L'examen des dossiers PEDR a eu lieu sur deux jours au mois de mai. Il a été convenu que les membres du CNU présents ne s'exprimeraient pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils auraient été trop proches. Le bureau de la section avait nommé deux rapporteurs par dossier. L'un était proche de la spécialité du candidat, l'autre était un rapporteur commun à tous les candidats (dans certains cas tous les candidats PR ou tous les candidats MCF) d'un même établissement (ou plus largement d'un même site géographique), de manière à assurer une cohérence inter-disciplinaire et interne aux établissements.

Les notes intermédiaires A, B, C ont été attribuées en tenant compte de l'ancienneté des candidats, par souci d'inclure dans le dispositif de façon équilibrée les enseignants-chercheurs à tous les stades de leur carrière, et de maintenir une certaine attractivité des postes de jeunes enseignants-chercheurs. Ceci conduit à un niveau d'exigence élevé pour les PR2 voire très élevé pour les PR1/PREX. Ce mode de fonctionnement n'est pas généralisé dans les autres sections du CNU.

Le niveau des dossiers déposés est globalement très bon et a conduit à classer dans les 30% plusieurs dossiers de recherche *de tout premier plan* et

dans les 50% des dossiers de collègues *très actifs* effectuant bien leur métier selon les quatre critères. Être classé dans les 50% ne doit donc pas être interprété comme une appréciation négative, d'autant plus que de nombreux dossiers se situant à la limite des 30% sont de niveaux proches, et que donc l'ordre du classement entre eux comporte une part d'arbitraire inévitable.

Soulignons que des MCF récemment recrutés ont obtenu, cette année comme la précédente, des évaluations « 20% » ou « 30% », car la jeunesse de leur dossier a été prise en compte. Ils ne doivent donc pas hésiter à postuler.

La section a décidé d'attribuer les notes intermédiaires A, B, C sans tenir compte des quotas, afin qu'elles reflètent réellement la valeur du dossier dans une catégorie donnée. Cela aboutit naturellement à ce que des dossiers ayant des notes intermédiaires excellentes aient une note globale décevante. C'est le reflet d'un niveau moyen des dossiers de candidature élevé, et ceci est accentué par le fait qu'une faible proportion de collègues postule. Par ailleurs les universités attribuent les PEDR selon des critères qui varient assez fortement, notamment en ce qui concerne l'utilisation des notes intermédiaires. Néanmoins nous n'en avons pas tenu compte pour attribuer ces notes, estimant que cela rendrait les avis du CNU illisibles.

5.2 – Résultats de la session

Il y a eu cette année 171 candidats MCF et 137 candidats PR (contre 169 MCF et 141 PR en 2017). Sur les 171 candidats MCF il y avait 44 femmes. Il y a eu 10 femmes classées dans les 20% et 14 femmes dans les 30%. Sur les 137 candidats PR il y avait 16 femmes. Il y a eu 6 femmes classées dans les 20% et 6 femmes dans les 30%.

Il est important de noter qu'un congé de maternité pendant les 4 années précédant la candidature conduit à prendre en compte l'activité sur une période de 5 ans au lieu de 4. Les candidates doivent en tenir compte dans la constitution de leur dossier.

5.3 – Recommandations aux candidats

Le CNU 26 a rendu public sur le site du CNU <http://www.cpcnu.fr/web/section-26> et sur le site <http://cnu26.emath.fr/> des conseils aux candidats. En particulier il était précisé comment il serait tenu compte des rubriques P, E, D et R.

Ces quatre rubriques sont évaluées de manière différenciée suivant que le candidat appartienne à l'une des trois catégories suivantes : MCF, PR2 ou PR1-PREX, et selon l'ancienneté du candidat. Pour les maîtres de conférences récemment nommés les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'ont en général pas grand sens. Cependant, la présence d'éléments comme les encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire... sera un élément crucial d'appréciation pour certains jeunes MCF particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/-travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Les rubriques encadrement doctoral (E) et responsabilités scientifiques (R) sont particulièrement prises en compte pour les professeurs. L'absence de responsabilités administratives ou d'encadrement doctoral dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX est une anomalie qui peut éventuellement être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Il est anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives, la même analyse sera appliquée aux MCF « expérimentés » (recrutés depuis au moins 6 ans).

Comme dans le cas des dossiers de promotion, nous attirons l'attention sur les points suivants.

1. En ce qui concerne l'encadrement doctoral, le dossier doit préciser pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
2. En ce qui concerne les conférences, il doit distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

De façon générale, chaque élément du dossier doit être décrit de façon suffisamment claire et précise, et lorsque cela est pertinent par des éléments chiffrés, pour permettre sa juste prise en compte par la section.

6. Bilan du mandat

Les travaux de ce CNU se sont déroulés dans un climat toujours respectueux, et globalement consensuel. Des débats, parfois animés, ont également eu lieu, sur des sujets variés. Un débat organisé en fin de mandat a été l'occasion pour les

membres de la section de s'exprimer sur notre fonctionnement et faire des recommandations au prochain CNU.

Suivi de carrière

Ce mandat a vu la mise en place du suivi de carrière. Après un débat en session, et une discussion avec les collègues de 25^{ème} section, les deux sections ont organisé un vote sur cette mise en place. Plus des trois quarts des membres des deux sections ont voté pour ne pas mettre en place ce suivi de carrière. Ce vote a été renouvelé une fois, et la décision a été tacitement reconduite une dernière fois en 2019. L'argument dominant dans les débats et les remontées de collègues non membres du CNU était le peu d'utilité du dispositif, en comparaison du travail qu'il implique pour les candidats et la section. L'autre facteur de rejet étant une méfiance sur l'utilisation de ce suivi de carrière par les établissements.

Qualifications et CRCT

La section 26 a traditionnellement un taux de qualification important (environ 70%, le taux pour toutes les sections confondues étant de 65%). Ceci correspond au fait que la section souhaite être ouverte aux candidats à l'interface d'autres sections. Ceci donne chaque année lieu à des débats animés sur certains candidats, qui sont invariablement conclus à l'avantage du candidat s'ils se prolongent. Des débats récurrents concernent les candidats relevant principalement de la 25^e section, qui sont tranchés au cas par cas.

La session se déroule sur 2 jours pour les MCF, les demandes de CRCT étant traitées aussi pendant ces deux journées. Les demandes de CRCT sont évaluées par 4 rapporteurs, qui sont renouvelés par moitié chaque année, et qui proposent à la section un classement, en expliquant son élaboration.

La session qualification pour les PR se déroule sur une journée, elle donne lieu à moins de débats sur les frontières de la section.

Promotions

Comme les précédents CNU, celui-ci a décidé lors de son installation de ne pas proposer à la promotion ses membres. Il est également traditionnel que le vice-président rang B préside les sessions de promotion des MCF.

La section ne transmet pas d'avis aux établissements sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion, comme elle pourrait le faire. Ce choix, qui fait l'objet de discussions chaque année avec des arguments dans les deux sens, est lié à la difficulté de donner des avis cohérents sur un nombre de dossiers important, de ne pas transmettre un avis qui puisse nuire aux collègues, le tout en fournissant un avis qui ne soit pas une formule insignifiante, donc inutile.

Ce mandat a vu la création de l'échelon exceptionnel des maîtres de conférences. Des débats ont eu lieu sur la politique à adopter pour cette promotion. Dans un contexte où le passage PR est très difficile, certains collègues ont défendu la possibilité de promouvoir des collègues jeunes qui ne peuvent passer PR malgré des dossiers scientifiques de premier plan. Néanmoins, en raison du fonctionnement spécifique à cet échelon et détaillé plus haut, il a paru plus sage, au moins dans un premier temps, de privilégier l'âge comme critère. Il est aussi à noter que les nouveaux échelons créés pour les PR font, eux, l'objet d'un avancement à l'ancienneté.

La promotion la plus problématique actuellement est la promotion PR1c. Un embouteillage s'y est créé et certains collègues subissent un retard critique pour cette promotion. Il est important que le prochain CNU en soit conscient dès son installation. Une façon de résorber ce bouchon pourrait être de ne promouvoir qu'exceptionnellement les collègues ayant moins de 4 ans d'ancienneté dans le corps. Ce CNU comme le précédent a privilégié les collègues ayant au moins 3 ans d'ancienneté.

PEDR

La PEDR est un dispositif qui suscite beaucoup de ressentiment chez les collègues. Si son objectif est de motiver les enseignants-chercheurs, il aboutit au résultat exactement inverse. Le classement dans la catégorie 50% est très mal vécu et décourage de postuler de nombreux collègues. De fait, on peut estimer par un rapide calcul qu'un enseignant-chercheur sur trois seulement participe au dispositif.

Ce CNU a décidé pour pallier ce problème d'examiner séparément les dossiers de candidats ayant échoué 3 fois, en les classant dans les catégories 20%, 30% et 50% sans tenir compte du contingentement. Le débat de fin de mandat a confirmé le soutien à un dispositif de ce type. Plusieurs suggestions pour l'accentuer ont émergé, comme d'exa-

miner séparément les dossiers de candidats 2 fois malheureux au lieu de trois, ou d'imposer une année d'attente pour le renouvellement afin de faire de la place pour de nouveaux entrants, ou d'appliquer des quotas sur les candidats en fonction du nombre d'années de refus.

Conclusion

Les fondements du fonctionnement du CNU sont la collégialité et la transparence, assurée par la

publication de critères précis et de bilans. Il est également important que les collègues le perçoivent comme une institution proche d'eux. Les collègues souhaitant un retour sur l'examen de leur cas par la section, soit qu'il en contestent le résultat, soit qu'ils souhaitent des conseils personnalisés pour une candidature future, peuvent écrire au président ou à un des vice-présidents. Ils obtiendront toujours une réponse.

Le Bureau de la Section

Rapport sur les sessions du CNU 25 pour l'année 2019

1. Le Bureau de la section 25

- Président, Philippe Briet, université de Toulon
- 1^{er} vice-président, David Hernandez, université Paris-Diderot
- Assesseur, Caroline Gruson, université de Lorraine
- 2^e vice-président, Olivier Ruatta, université de Limoges
- Assesseur, Gioia Vago, université de Dijon
- Assesseur, Constantin Vernicos, université de Montpellier

La section arrive au terme de sa mandature (2016-2019). De nouvelles élections ont eu lieu, la nouvelle section devrait être mise en place fin novembre 2019. Toutefois la section regrette qu'au niveau des universités, les élections CNU aient été organisées de manière disparate, les collègues devant souvent récupérer le matériel de vote auprès des DRH dont les messages à cet effet n'étaient pas toujours suffisamment clairs. Par ailleurs les professions de foi des différentes listes n'étaient pas fournies et peu d'information était donnée pour les récupérer.

2. Le suivi de carrière (SDC)

Pour rappel, en 2016 la plupart des sections dont la 25 n'avaient pas mis en place le SDC dû à un certain cafouillage au sein du ministère, puis en 2017 et 2018, la Section 25 et la Section 26, après

consultation de l'ensemble de leurs membres (titulaires et suppléants) avaient adopté la position suivante : *les sections CNU 25 et 26 ne feront pas le SDC tant que ses objectifs ne seront pas précisés et que des garanties suffisantes, sur la non-utilisation pour la modulation de service notamment, ne seront pas données.*

Pour l'année 2019, les Bureaux des Sections 25 et 26 ont décidé de reconduire la même position que celle adoptée par les deux sections en 2017 et 2018. Toutefois il avait été précisé que cette position pouvait être reconsidérée à la demande des collègues. N'ayant eu aucun retour dans ce sens, les sections 25 et 26 n'ont pas organisé de session SDC.

3. Les Qualifications

Pour cette année 2019, comme en 2018, la campagne de qualification était entièrement dématérialisée. Un certain nombre de dysfonctionnements au niveau de l'application GALAXIE ont encore eu lieu, ce qui a malheureusement conduit à des irrecevabilités pour des candidats ayant des dossiers scientifiques d'un excellent niveau mathématique.

L'introduction de la dématérialisation par la DGRH en 2018 est un changement notable de la procédure de qualification. En particulier la DGRH s'est montrée intransigeante sur le respect du format des pièces dites obligatoires, ce qui a posé de nombreux problèmes aux candidats et à la section. Malgré nos nombreuses interventions, la situation

n'a pas beaucoup évolué en 2019.

Les critères de qualification sont ceux discutés en 2016, cf. rapport d'activité 2016¹. Ils sont hérités en grande partie du précédent CNU.

3.1 – Qualifications aux fonctions de Maître de conférences

Il y avait 291 candidats à la qualification aux fonctions de MCF, dont 62 femmes (21,3%). Parmi les 287 dossiers examinés, 20 n'ont pas été qualifiés et 19 dossiers ont été déclarés hors section. Le taux de réussite pour 2019 est de l'ordre de 87%.

3.2 – Qualification aux fonctions de Professeur

Le nombre de candidats à la qualification aux fonctions de Professeur était de 90, dont 5 candidates (5,6%). Nous avons examiné 83 dossiers. Parmi eux, 2 dossiers ont été jugés hors section et 2 candidats n'ont pas été qualifiés. Ce qui donne un taux de réussite de l'ordre de 95%.

Nous rappelons que le taux de réussite à la qualification Professeur était de l'ordre de 90% en 2016, 93% en 2017 et 88% en 2018. La plupart des échecs sont dus à des dossiers hors section, le taux de dossiers jugés insuffisants pour la qualification est assez faible, il se situe entre 1 % et 4 %.

3.3 – Congés pour Recherches ou Conversions Thématiques (CRCT)

À partir de 2018, l'attribution des CRCT est couplée avec la session qualification. Cette année nous devons distribuer 7 semestres pour 66 demandes. Le nombre de semestre dont dispose la section reste faible étant donné le nombre de demandes. Dans ces conditions il a été très difficile pour la section de mettre en place une véritable politique d'attribution. Cependant une priorité a été accordée aux demandes de CRCT qui font suite à un retour de maternité, congé pour adoption, congé parental, longue maladie ... La section demande qu'un contingent de CRCT soit systématiquement destiné à ces collègues sans imputer le nombre de CRCT accordé par le CNU et par les universités (motion votée à l'unanimité en session plénière, en février 2017).

1. <http://cnu25.emath.fr/comptes-rendus/rapport-2016-7.pdf>

Les candidats suivants ont obtenu un CRCT de 6 mois : Vladimir Fock (PR), Dietrich Hafner (PR), François Bruneau (MCF), Loren Coquille (MCF), Nguyen Viet Dang (MCF), Hélène Eynard-Bontemps (MCF), Olivier Legal (MCF).

4. Promotions

Un des points important concernant la carrière des MCF est la création d'un échelon terminal dans la carrière des MCF Hors Classe (Bulletin Officiel 12 du 22 mars 2018). Toutefois la section regrette que ce passage soit contingenté et non automatique, contrairement au cas des Professeurs Agrégés du secondaire et des Professeurs des Universités de 2^e classe. En 2018, la section avait voté une motion dans ce sens (cf. rapport 2018 de la Section 25).

Concernant la carrière des PR, un des points noirs est le passage PR2C/PRC1 qui reste très faible, de l'ordre d'une promotion pour environ 10 candidatures. Cela engendre un sentiment de frustration chez beaucoup de nos collègues dont le dossier montre une activité soutenue depuis de nombreuses années, d'autant que les politiques des universités sur les promotions locales des E.C. ne sont pas souvent favorables à notre discipline.

Durant la mandature les critères d'attribution des promotions ont dû être revus en particulier lors de l'attribution de l'échelon exceptionnel aux MCF-HC. Dans ce cas, outre les critères habituels et le cadre défini par l'article 16 n° 2017-854, nous avons pris en compte l'ancienneté des candidats dans l'échelon et de leur situation vis-à-vis de la retraite. Comme toujours, la section a également été vigilante sur les questions de parité.

4.1 – Avancement à l'échelon exceptionnel pour la hors classe du corps des Maîtres de Conférences

Nous disposons de 22 avancements à l'échelon B, pour 42 candidats dont 14 femmes (33%). Les candidats suivants, dont 9 (41%) femmes, ont été proposés à la promotion :

MCF HC 7^e : Benoist Hulin Dominique, Benyounes Michèle, Berger Clemens, Boularas Driss, Coquio Agnès, Douai Antoine, Fieux Étienne, Carotta Odile, Klughertz Martine, Kostov Vladimir, Le Stum Bernard, Michel

Vincent, Mossé Brigitte, Paoli Jean-Martin, Porzio Anna, Ramond Thierry, Saby Nicolas, Salem Eliane, Slupinski Marcus, Soret Marc, Toubiana Éric, Varagnolo Michela.

4.2 – Promotion à la Hors Classe des Maîtres de conférences

Le nombre de candidats était de 70 , dont 12 femmes (17%); 18 candidats ont été proposés à la promotion, dont 2 candidates (11%).

Liste des candidats retenus :

MCF HC : Bailleul Ismael, Balacheff Florent, Bauval Anne, Bedaride Nicolas, Bihan Frederic, Brandolese Lorenzo, Brunat Olivier, Calmès Baptiste, Edo Éric, Jean dit Teyssier Loïc, Keller Julien, Lemeur Patrick, Malbos Philippe, Maubon Julien, Meilhan Jean Baptiste, Popovici Dan, Vespa Christine, Wiest Bertold.

4.3 – Promotion à la Première Classe des Professeurs

Le nombre de candidats était de 64, dont 3 femmes (5%); 10 candidats ont été proposés à la Première Classe des Professeurs, dont 1 candidate (10%). Comme nous l'avons déjà signalé le nombre de passages PRC2 vers PRC1 est très faible, ce qui crée des situations anormales de collègues qui se retrouvent bloqués au passage PRC1.

Liste des candidats retenus :

PR1 : Amerik Ekatarina, Barbaroux Jean-Marie, Charles François, Duquesne Sylvain, Dimitrov Mladen, Franz Uwe, Hauswirth Laurent, Pajitnov Andrei, Pravda-starov Karel, Riche Simon.

4.4 – Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des Professeurs

Le nombre de candidats était de 41, dont 1 femme (2%); 10 candidats ont été proposés à la promotion, dont aucune femme.

Liste des candidats retenus :

PREX1 : Bayart Frédéric, Bichon Julien, Dumistrecu Sorin, Gerard-Varet David, Herzlich Marc, Ma Xionan, Saralegui Martin, Sécherre Vincent, Thieullen Philippe, Zimmermann Alexander.

4.5 – Promotion au deuxième échelon de la classe exceptionnelle des Professeurs

Le nombre de candidats était de 41, dont aucune femme; 7 candidats ont été retenus.

Liste des candidats retenus :

PREX2 : Bruguières Alain, Carron Gilles, Helein Frédéric, Hindry Marc, Keller Bernhard, Movahedi Abbas, Rugh Hans.

5. Session PEDR

Cette session reste la plus difficile, étant donné les arbitrages imposés par les quotas ministériels. Les dossiers sont en général d'un niveau scientifique élevé, mais seulement la moitié d'entre eux obtiennent une note finale A ou B. Ceci conduit à de nombreuses interrogations bien compréhensibles chez nos collègues, dont certains se portent candidats depuis de nombreuses années sans succès. Cela se traduit chez eux par une forme de lassitude qui peut les amener à arrêter de déposer leur candidature à la PEDR.

Nous rappelons que chaque année le ministère détermine le nombre de notes A et B par rapport au nombre de candidats réels à la PEDR et non pas par rapport au nombre de candidats potentiels. Dès lors on comprend l'effet dévastateur de la baisse du nombre de candidatures. La section avait demandé de changer ce mode de calcul mais sans succès.

En 2019, dans le but d'encourager les collègues à continuer à se porter candidats, et au regard de ce que pratique la Section 26, nous avons décidé à l'unanimité d'examiner à part les dossiers des collègues dont c'était la troisième candidature consécutive.

La section a continué à se baser sur les critères qu'elle avait déjà utilisés les années précédentes (cf. rapport d'activité 2016²).

Étant données ces conditions imposées, être classé C, aussi bien pour les MCF que pour les PR, ne doit pas être considéré comme une mauvaise appréciation du dossier par la section, mais comme le résultat de choix difficiles et fortement contraints. Cela ne doit en aucun cas décourager les futures candidatures à la PEDR.

2. <http://cnu25.emath.fr/comptes-rendus/rapport-2016-7.pdf>

Nous rappelons enfin que les sections du CNU ne donnent qu'une évaluation des dossiers, l'attribution des primes est de la responsabilité des établissements. Les sections n'ont toujours pas de retour de la part universités sur les attributions finales.

Cette année nous avons 109 candidats PR dont 6 femmes et 111 candidats MCF dont 11 femmes. La section se félicite de l'augmentation du nombre de candidats PR. Cela a donné 22 notes finales A, 33 notes finales B pour le corps des PR, et 22 notes finales A et 33 notes finales B pour le corps des MCF.

Années antérieures :

- 2018 : 88 candidatures PR et 117 candidatures MCF;
- 2017 : 102 candidatures PR et 133 candidatures MCF;
- 2016 : 107 candidatures PR et 111 candidatures MCF;
- 2015 : 86 candidatures PR et 88 candidatures MCF.

6. Motions

Lors de la session du 31 janvier 2019, la motion suivante s'opposant à l'augmentation des frais

d'inscription pour les étudiants non-européens a été adoptée.

Le CNU 25 s'oppose fermement à la décision du gouvernement d'augmenter les frais d'inscription à l'université des étudiants non européens. Cette mesure implique une sélection sur des critères financiers à l'entrée des différents cycles de formation en Mathématiques, elle introduit des inégalités entre des étudiants étrangers et elle se traduira nécessairement par une baisse des inscriptions (en particulier dans les Masters et les Doctorats) des étudiants venant des régions les plus pauvres. Le CNU 25 demande au gouvernement de revenir sur cette décision discriminatoire, qui diminue notre ouverture à l'international, en freinant brutalement le développement de relations scientifiques fragiles avec les pays non européens.

Le Bureau de la Section

Séminaires et Congrès



Vol. 33
SMF 2018 : Congrès de la Société Mathématique de France
 E. BREUILLARD ed.

ISBN 978-2-85629-912-8
 2019 - 432 pages - Softcover. 17 x 24
 Public: 65 € - Members: 46 €

Ce volume rassemble les actes du 2^e congrès de la Société Mathématique de France, qui a eu lieu à Lille en juin 2018.

This volumes gathers the proceedings of the 2nd Congress of the French Mathematical Society (SMF), which took place in Lille in June 2018.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris

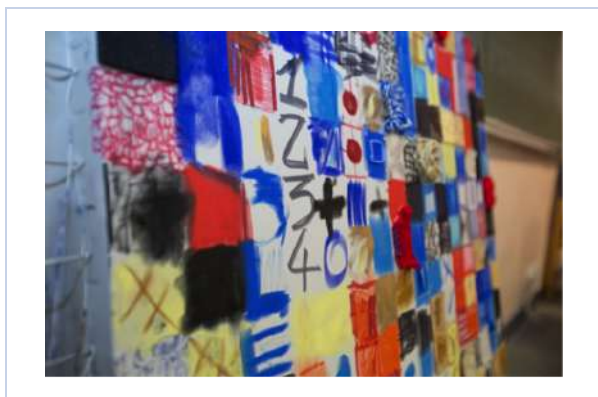


Créations chaotiques

• A. ROSSILLE



La Jam du chaos, un événement exceptionnel de production créative et scientifique autour du chaos, des mathématiques et de leur transmission, a eu lieu les 11 et 12 octobre 2019 à l'Institut Henri Poincaré, dans le cadre de la Fête de la Science. Quel était le but de la Jam? Créer une nouvelle forme d'expression scientifique et créative autour de la théorie du chaos! Une thématique riche d'inspiration et d'interprétation, s'appuyant sur un contenu scientifique évocateur et l'ouvrant à une multitude de domaines et de secteurs d'activités. Les participants, venant de tous les horizons (artistes, musiciennes et musiciens, vidéastes, scientifiques, étudiantes et étudiants, médiatrices et médiateurs...) ont eu 24h pour créer cette forme d'expression scientifique, tous les formats étant permis.



La Jam s'est terminée par une séance de restitution pendant laquelle chaque groupe a présenté son travail aux autres participants. Le défi? Faites ce que vous voulez, mais c'est 5 minutes chrono!

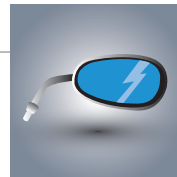
L'occasion de se rendre compte de la formidable émulation qui a animé ces deux journées, avec des créations extrêmement variées, entre jeux vidéo, musique, arts plastiques, cinéma expérimental, spectacle vivant... Nous avons été impressionnés par toutes les créations, et pouvons citer à titre d'exemple un tableau créé de manière procédurale (photo ci-contre), un jeu vidéo textuel pour faire apparaître du chaos dans un texte (jouable ici¹), ou encore un snapcode pour visualiser dans Snapchat un attracteur de Lorenz.



Vous pouvez retrouver la captation de cette séance de restitution ainsi que le détail des créations des groupes sur le site web de l'IHP². L'événement était parrainé par Tania Le Goff, ingénieure et artiste, et Étienne Ghys, mathématicien (ÉNS Lyon). La Jam du chaos était un événement gratuit et ouvert à tous, sur inscriptions. Une cinquantaine de participants ont été accueillis à l'Institut Henri Poincaré. La première édition de cette Jam a été organisée en collaboration avec l'AMIES (Agence pour les mathématiques en interaction avec l'entreprise et la société), Animath, le Fonds de dotation de l'Institut Henri Poincaré, MATH.en.JEANS, la Société Française de Statistique, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et la Société Mathématique de France.

1. <http://maspero.blue/chaos/>

2. <http://www.ihp.fr/fr/toutpublic/jamduchaos>



LAURENT SCHWARTZ
37, rue Pierre Nicole
F - 75005 Paris
Tel. (1) 354 50 30

Paris, le 24 janvier 1985

Monsieur SCHIFFMANN
Université de Strasbourg
Rue René Descartes
67000 STRASBOURG

Mon cher Schiffmann,

Voici une petite histoire que tu jugeras peut-être assez amusante pour la publier dans la Gazette.

Il y a quelques jours, j'envoyais un télégramme. J'ai donné mon nom, mon adresse, l'adresse du destinataire, le texte du télégramme, puis ma signature : Laurent Schwartz, mathématicien. Le dialogue suivant s'est alors engagé entre la téléphoniste et moi :

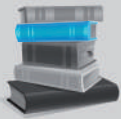
- la téléphoniste : "Oh, Laurent Schwartz, mathématicien, c'est merveilleux ; devinez mon nom."
- moi : "Je ne sais pas, Schwartz peut-être ?"
- la téléphoniste : "Non, mais un nom très lié au vôtre."
- moi : "Je ne sais."
- la téléphoniste : "Cauchy".

Cette personne n'est pas une descendante du mathématicien Cauchy (il y a dans l'annuaire du téléphone vingt Cauchy habitant Paris). Mais elle a fait un peu d'études après la sortie du lycée et savait qu'il existait une propriété de Cauchy-Schwarz ; elle savait que Schwarz n'était pas moi, que d'ailleurs l'orthographe était différente, que c'était un mathématicien du siècle dernier et que Cauchy avait été un des plus grands mathématiciens français.⁽¹⁾

Avec mes meilleures amitiés.

Laurent SCHWARTZ

(1) Elle avait plusieurs fois transmis des messages pour des Schwartz, mais la conversation n'avait pas eu de sens avec eux. C'était la première fois qu'il s'agissait d'un mathématicien Schwartz.



LIVRES



L'élite sous la mitraille

David AUBIN

Éditions rue d'Ulm, 2018. 362 p. ISBN : 978-2728806034

À l'ÉNS s'élève un monument gravé des trop nombreux noms des normaliens morts pour la France lors de la Première Guerre Mondiale. Le livre de David Aubin s'efforce de révéler ce que masque cette dramatique litanie de noms : qui étaient ces jeunes hommes ? comment ont-ils réagi quand on les a appelés au front ? comment la science, et plus spécifiquement les mathématiques françaises, se sont-elles relevées de la mort de tant de jeunes normaliens ?

David Aubin se penche d'abord sur les chiffres. Ces chiffres qui dénombrent ces dizaines d'élèves de l'école tués dès les premiers jours de combat.

Puis, il creuse au-delà des chiffres, analysant, à travers de nombreuses lettres, l'état d'esprit dans lequel ces normaliens partaient au front. La plupart des lecteurs seront sans doute étonnés par le patriotisme, la détermination, parfois même l'enthousiasme, des mobilisés. Comment ne pas être frappé par ces déclarations d'une fermeté sans faille, d'une générosité admirable et effrayante, de la part de jeunes hommes qui partent au front et y laisseront souvent leur vie ? « Nous sommes les riches. C'est à nous de payer. » « Je suis démocrate. J'ai prêché la démocratie. Je dois donner l'exemple de l'égalité pleinement, joyeusement consentie. »

David Aubin ne s'en tient pas là. Son but – comme l'indique le sous-titre du livre – n'est pas seulement de mesurer l'impact dramatique de la Grande Guerre sur les destins individuels des normaliens. Il s'agit surtout de discuter des conséquences de la guerre sur le développement des mathématiques françaises. À l'origine du livre, il y a ce que David Aubin nomme la « thèse Bourbaki » : la Première Guerre Mondiale aurait saigné à blanc les mathématiques françaises, laissant derrière elle un véritable désert mathématique en France au début des années 1920 – situation dramatique qui aurait motivé, en partie, la refondation des mathématiques dans laquelle s'est lancé le groupe Bourbaki au milieu des années 1930. Ce récit, forgé semble-t-il par les premiers membres de Bourbaki, a largement été diffusé dans les années 1960-70 par Dieudonné. David Aubin veut aller voir sous cette chape de mémoire officielle coulée par Bourbaki, qui nous masque la réalité concrète des mathématiques françaises après la Grande Guerre.

Comme souvent, la réalité semble plus complexe que ce qu'on en a retenu. Au-delà du drame des vies fauchées, la mort de vingt-deux agrégés de mathématiques ne saurait à elle seule expliquer le désert mathématique décrit par les membres de Bourbaki. Les recherches de David Aubin montrent que beaucoup de ces jeunes hommes se destinaient à l'enseignement ; ils n'étaient pas voués à construire des œuvres mathématiques qui auraient irrigué ce désert. Et ceux qui ont eu le temps de publier des articles de recherche l'ont tous fait dans des domaines fort éloignés des préoccupations des fondateurs du groupe Bourbaki qui ne se sont jamais intéressés à ces articles. En fait, il n'est pas besoin de réfléchir longtemps pour réaliser que les mathématiques qui intéressaient le plus les fondateurs de Bourbaki (l'algèbre, la théorie des nombres...) s'étaient développées, à la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e, en Allemagne bien plus qu'en France. La France d'après guerre n'était pas un désert mathématique ; mais les mathématiques qu'on y cultivait n'étaient pas celles que le groupe Bourbaki considérait comme les plus belles et les plus importantes.

Bien sûr, la thèse Bourbaki n'est pas non plus dénuée de fondement. Au-delà des jeunes normaliens tués au front, ou gravement blessés, il y eut tous ceux qui, après la guerre, ne trouvèrent plus de sens à entreprendre ou poursuivre des recherches en mathématiques fondamentales. Comment se lancer dans une thèse de mathématique, quand vous avez été arraché à vos études, quand vous avez passé quatre années au front à côtoyer la mort, quand la moitié de vos camarades ne sont pas revenus de la guerre? La vie mathématique ne put bien sûr pas reprendre en 1918 comme si rien ne s'était passé.

Le paysage humain et mathématique esquissé par les recherches de David Aubin est complexe et nuancé. Lisez son livre.

François BÉGUIN
Université Paris 13

Société Mathématique de France

PRIX D'ALEMBERT

PRIX JACQUELINE FERRAND

Pour encourager la diffusion
des mathématiques vers un large public
deux prix de 2000 euros chacun
décernés tous les deux ans



- **Le prix d'Alembert** récompensera une action destinée à mieux faire connaître et comprendre les mathématiques et leurs développements récents auprès d'un large public

- **Le prix Jacqueline Ferrand** récompensera une opération pédagogique innovante dans le domaine des mathématiques

dossiers à déposer avant le :
31 mars 2020
par les candidats ou par des tiers



SMF - IHP - 11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris cedex 05
smf.emath.fr/la-smf/prix-dalembert

Société
Mathématique
de France



Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (gazette@smf.emath.fr), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier \TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe \LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions \TeX courantes (\TeX Live et Mac \TeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK \TeX), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution \TeX à jour.

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

