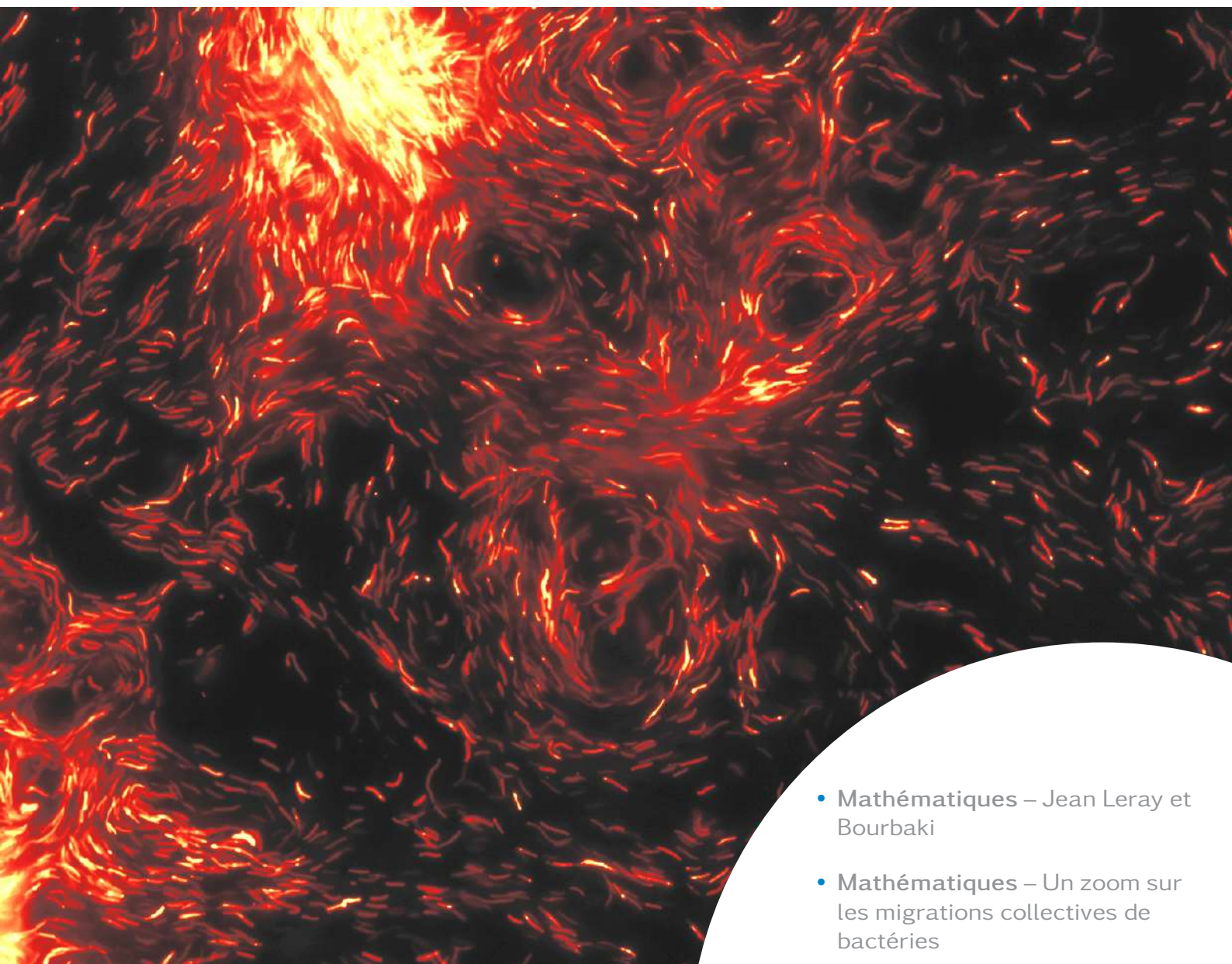


la Gazette

des Mathématiciens



- Mathématiques – Jean Leray et Bourbaki
- Mathématiques – Un zoom sur les migrations collectives de bactéries
- Raconte-moi... la géométrie tropicale
- Tribune – Le cas de Laila Soueif

Société
Mathématique
de France



Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Rédacteurs

Maxime BOURRIGAN

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles
maxime.bourrigan@gmail.com

Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Sébastien GOUËZEL

Université de Nantes
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Lille
grivaux@math.univ-lille1.fr

Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Mylene MAÏDA

Université de Lille
mylene.maida@univ-lille.fr

Gabriel RIVIÈRE

Université de Nantes
Gabriel.Riviere@univ-nantes.fr

Romain TESSERA

Université Paris-Sud
romain.tessera@math.u-psud.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05

Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96

gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Fabien DURAND

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. Colonie de *Myxococcus xanthus*, une bactérie dite « sociale » au cycle de vie remarquable. Après une phase de prédation, la population s'agrège en corps fructifères (en forme de champignons) afin d'échapper au manque de ressources dans le milieu. Des phénomènes remarquables de migration à grande échelle sont observables au cours de cette phase de réorganisation spatiale de la colonie. L'image de couverture représente un détail de la colonie à ce stade du cycle de vie. L'un des enjeux de la modélisation mathématique consiste à décortiquer la manière dont chaque individu répond à son environnement proche en vue de comprendre la dynamique globale de la population. (crédit : umr 7283 cnrs/Aix-Marseille Université. THE MIGNOT LAB Laboratoire de Chimie Bactérienne).

N° 167

Éditorial

Dans son livre très personnel et grand public *Faire des mathématiques*¹, Claire Voisin écrit :

En tant que mathématicienne, je suis frappée par le fait qu'il n'y a pas d'abstraction qui résiste à la pratique. Certaines définitions peuvent paraître difficiles à digérer, mais [...] on finit par se familiariser avec les objets et à les utiliser en toute confiance, de même qu'un enfant peut apprendre à pratiquer des additions.

Cette phrase contre-intuitive et optimiste omet avec délicatesse le problème du temps que cette acclimatation conceptuelle prend. J'y ai repensé en lisant notre premier article sur le comptage de fibrés. Les lectrices et lecteurs de culture algébrique, qui ont poussé beaucoup plus loin que les autres la familiarisation avec les objets de l'algèbre, se régaleront de cet article. Tout y est pour comprendre cette histoire mêlant polynômes aux coefficients mystérieusement entiers, corps finis, carquois, groupes de Lie et autres joyeuseries algèbro-géométriques. Pour les autres, dont je fais partie, il faudra sans doute plus de persévérance, mais l'article peut se lire sans rentrer dans les détails, avec un point de vue presque mélancolique : on nous annonce dès le début qu'il faut abandonner tout espoir de *classifier*, et qu'il faut se résigner à *compter*. Et comme le dit l'auteur, nous voyons se dérouler sous nos yeux, même béotiens, le *déraisonnable pouvoir de l'analogie en mathématiques*.

Le second thème de cette *Gazette* est clairement aux antipodes des courbes algébriques sur les corps finis, puisqu'il s'agit de bactéries, ces petits êtres grouillant et féconds. La modélisation de leur comportement a fourni la terrifiante couverture de cette *Gazette*. Amatrices et amateurs de paréidolie sauvage, j'espère que vous voyez comme moi dans cette image un chien de l'enfer. Sinon il faut consulter, car objectivement c'est un chien de l'enfer. L'article associé est une promenade bien rythmée à travers le petit monde sympathique des bactéries. Ces créatures s'avèrent être à la fois

1. Claire Voisin, *Faire des mathématiques*, CNRS Éditions, 2019.

grégalaires et affamées, le tout avec un petit grain stochastique. Vous y trouverez, entre autres, d'intrigants *taux de culbute*, des *odeurs alléchantes* (pas bien crédibles!), et d'inquiétantes *bandes organisées*. Une fois n'est pas coutume, tous ces modèles sont contrôlés par des expériences bien réelles. Je ne veux pas éventer toutes les surprises de l'article, mais ces bactéries sont censées éclairer... les invasions de crapeaux-buffles en Australie... et la transition néolithique! Hybris de l'analogie ou profonde connexion platonicienne? À vous de juger!

Par une coïncidence assez étonnante, l'article suivant de mathématiques partage un mot peu banal avec le précédent, *amibe*. Dans ce Raconte-moi sur la géométrie tropicale, il ne s'agit pas de bestioles ni de climat exotique, mais bien de géométrie. Les amibes sont les intermédiaires entre la géométrie que nous connaissons toutes et tous et cette étonnante géométrie, très facile d'accès et générant de jolis dessins et de profonds concepts.

D'amibe ou de bactérie, il n'en n'était pas question dans les rencontres de Bourbaki à la fin des années 30, certainement pas! Un dense article d'histoire des mathématiques retrace, à la lueur d'une lettre explosive (historiquement parlant, Unabomber n'y est pour rien) récemment exhumée d'André Weil, les luttes de pouvoir et de postes du microcosme (à l'époque) mathématique français, avec pour épice Paris. Autour du schisme entre Bourbaki et le séminaire de Gaston Julia, se dressent deux titans combattants principaux : André Weil et Jean Leray. On verra apparaître dans ces aventures politico-scientifiques l'Observatoire de physique du globe du... Puy-de-Dôme, un physiologiste fondateur du CNRS, et même... tremblez mortels, un Lebesgue menaçant!

Science et politique toujours, mais actuelles et plus cruelles : nous publions une lettre de soutien à Laila Souef, une mathématicienne égyptienne militante, harcelée ainsi que sa famille par le pouvoir égyptien. Vous trouverez dans la lettre des façons simples de la soutenir. Rappelons qu'un autre collègue maltraité par le pouvoir, Tuna Altinel, mathématicien lyonnais, a été libéré le 30 juillet 2019 après 81 jours de détention en Turquie pour ses opinions politiques. Cependant la préfecture de Balikesir refuse toujours de lui rendre son passeport, si bien qu'il ne peut pas revenir en France.

Le carnet témoigne d'une autre façon de ce caractère transnational et humain des mathématiques. Il célèbre la mémoire de Jia-Rong Yu, dont l'histoire et les origines traversent l'histoire de la Chine, de l'empire à nos jours en passant par la seconde guerre mondiale et la révolution culturelle. De nombreux témoignages retracent, avec des angles différents, la vie et les mathématiques du fondateur du centre mathématique sino-français de Wuhan.

Terminons cet édito par le rétroviseur, un savoureux texte de 1987 nommé *Big Sister Gazette*, clin d'œil à 1984 qui venait de passer. Le texte débute par un délicieux *La Gazette est à la pointe des techniques modernes*, et commente avec un brin de fierté non dissimulée, mais amplement méritée, le passage de notre revue à \TeX , à *bitnet* et aux ordinateurs, à une époque où le secrétariat se faisait sur machine à écrire. Si vous êtes fan de la *Gazette*, vous vous souvenez sans doute que nous avons déjà publié ce rétroviseur en 2015 ; mais cette fois, nous avons demandé aux acteurs de cette époque de témoigner : la secrétaire de rédaction, le rédacteur en chef et un membre de l'Institut Fourier bien au fait de la technologie. Plongez-vous dans la préhistoire de notre cybermonde actuel, bitnet avant internet, les tout premiers messages électroniques, et les disquettes molles 5 pouces $\frac{1}{4}$!

Avant de vraiment terminer, je voudrais m'excuser de m'être trompé dans mon dernier édito au sujet des prix Jacqueline-Ferrand et d'Alembert, qui sont des prix de notre auguste SMF, et non pas de notre grande académie des sciences, comme je l'ai écrit.

Pour clore cette fin un peu longue, j'aimerais confesser que mon appel *Quel livre de mathématiques emporteriez-vous sur une île déserte ?* a été un quasi fiasco. Ma demande gisait au fond d'une note de bas de page, là elle est dans les abîmes d'une fin qui n'en finit pas, mais si vous lisez ceci, merci de m'envoyer le nom de votre livre préféré. Merci en tout cas aux collègues qui m'ont envoyé leur choix ; je repousse donc le bilan au prochain numéro.

Avant de conclure, j'aimerais remercier chaleureusement Sébastien Gouëzel, qui a servi fidèlement, énergiquement et efficacement la *Gazette* depuis sa refonte en 2014. Comme Fanny Kassel, il est invité au pique-nique traditionnel du Jardin du Luxembourg pour la réunion du numéro de juillet.

Au nom de toute l'équipe de la *Gazette*, je vous souhaite une bonne lecture, ainsi qu'une heureuse année qu'on espère déconfinée !

Damien GAYET

« Un texte, un mathématicien », c'est reparti !

À la BnF, dans votre établissement scolaire ou même depuis chez vous grâce à la diffusion interactive et en direct.

Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien 2021

mercredi 20 janvier 18h30
Julie Delon
Université Paris-Descartes
*Des tas de sable aux pixels,
deux siècles et demi
de transport optimal depuis Monge*

mercredi 10 février 18h30
Vincent Beffara
Université Grenoble Alpes
*J.W. Gibbs :
les mathématiques
du hasard au cœur
de la physique ?*

mercredi 17 mars 18h30
Patrick Popescu-Pampu
Université de Lille
*René Thom
et le dynamisme
des formes instables*

mercredi 14 avril 18h30
Marie Theret
Université Paris-Nanterre
*Hammersley,
feux de forêt,
porosité et réseaux*

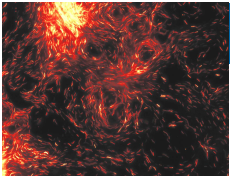
(BnF)

Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium
Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque
Entrée libre sur inscription : affluences.com (BnF Événements culturels)
<http://smf.emath.fr/BNF2021>

Société
Mathématique
de France

Nous cherchons des volontaires dans toute la France pour donner des exposés préparatoires dans les lycées (éventuellement par visio).

Renseignements et inscriptions : <https://smf.emath.fr/BNF/2021>



N° 167

Sommaire

SMF	6
Mot du président	6
MATHÉMATIQUES	8
Comptage de fibrés vectoriels sur les courbes – <i>O. SCHIFFMANN</i>	8
Jean Leray et Bourbaki – <i>G. RICOTIER</i>	23
Un zoom sur les migrations collectives de bactéries – <i>V. CALVEZ</i>	39
RACONTE-MOI	51
... la géométrie tropicale – <i>A. RENAUDINEAU</i>	51
TRIBUNE LIBRE	60
Le cas de Laila SOUEIF	60
INFORMATION	62
Bilan 2020, et mise en place du nouveau CNU section 26	62
RÉTROVISEUR	71
La <i>Gazette</i> en 1987	71
Le point de vue du rédacteur en chef – <i>M. ANDLER</i>	72
Souvenirs de Jean-Pierre Demailly – <i>J.-P. DEMAILLY</i>	73
La <i>Gazette</i> à la pointe des technologies modernes – <i>M. MARCHAND</i>	74
CARNET	75
Jia-rong Yu	75
Xavier FERNIQUE – <i>M. LEDOUX</i>	78

Chères et chers collègues,

Je vous souhaite une excellente et sereine année 2021.

Cette année ne fut pas un millésime, c'est un euphémisme. Alors tournons-nous vers celle qui commence. La SMF va reprendre ses cycles de conférences que sont « Un texte, un mathématicien », « Une question, un chercheur » ou encore « Mathématiques étonnantes ». Afin de toucher un public plus étendu géographiquement, certains de ces événements seront diffusés en ligne. Dans le même esprit, pour étendre le spectre de ses interventions, la SMF sera en 2021 l'opérateur et le financeur des stages *MathC2+*. Elle sera accompagnée d'Animath. En 2020 très peu de stages ont pu avoir lieu alors réfléchissez-y dès maintenant et n'hésitez pas à en proposer pour 2021.

La reprise des enseignements à l'université fera partie des attentes de ce début d'année. L'université, ses étudiants, son personnel, ont été peu considérés par le gouvernement et les médias alors qu'étaient prises des mesures d'exception. La situation est délicate à plus d'un titre et la SMF a pris position à deux reprises récemment sur ce sujet. Je cite ce que nous réclamons dans notre dernière lettre : « Nous demandons, par respect envers ceux qui constituent l'avenir de notre pays, et pour ne pas les accabler davantage, la reprise des cours dès le début du mois de janvier pour tous les étudiants et sous les mêmes contraintes sanitaires que tous les autres secteurs comparables. »

Nous espérons que d'autres sociétés savantes accompagneront notre signature. C'est pour que ce type de textes résonne le plus largement possible que la SMF s'est associée à d'autres sociétés savantes pour créer ce qui deviendra en 2021 une association, Sociétés Savantes Académiques (SOCACAD). La SOCACAD a montré sa capacité à obtenir des consensus multidisciplinaires sur de nombreuses questions liées à la LPR et à faire porter sa voix au plus près de nos politiques. Il est vrai, pour un impact sur les décisions gouvernementales... nul. Mais cela a suscité l'intérêt de certains médias et de certains secteurs de l'État. Il est important de poursuivre cet effort sans quoi on ne peut espérer faire bouger les lignes.

La SMF a beaucoup œuvré ces dernières années pour obtenir une meilleure représentativité des femmes dans l'ensemble de ses activités. Nous poursuivons ce travail. On peut parcourir le site de la SMF pour se convaincre que les transformations sont déjà remarquables.

La SMF appartient à ses adhérentes et adhérents. Le bureau et le conseil d'administration peuvent être sollicités sur ces sujets et bien d'autres. Mieux encore, si vous avez à cœur de faire progresser la SMF vous pouvez vous engager dès maintenant dans l'une de nos actions ou vous porter candidates et candidats aux prochaines élections qui auront lieu en juin 2021. Les candidatures devront être déclarées au plus tard courant mars 2021.

Pour finir je vous souhaite de prendre du plaisir en 2021. Portez-vous bien.

Le 3 janvier 2021

Fabien DURAND, président de la SMF



Comptage de fibrés vectoriels sur les courbes

• O. SCHIFFMANN

1. Introduction

Cet article se propose d'illustrer l'existence de structures cachées de théorie des représentations dans la géométrie des espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes algébriques. Au passage, ceci fournira une illustration supplémentaire – si besoin en était – du déraisonnable *pouvoir de l'analogie* en mathématiques.

On se situe ici dans le domaine de la *théorie géométrique des représentations*, dont le but est de construire et d'étudier par des moyens géométriques les représentations des groupes et algèbres de Lie – aussi bien *classiques* tels que $GL(n, k)$, $\mathfrak{gl}(n, k)$, $SL(n, k)$, $\mathfrak{sl}(n, k)$, ... qu'*exceptionnels* tels que $E_8, \mathfrak{e}_8, G_2, \mathfrak{g}_2, \dots$, voire même certains groupes et algèbres de Lie de dimension infinie apparaissant notamment en physique théorique (physique statistique, théorie des cordes ...) tels que les algèbres de Heisenberg et Virasoro.

Afin de donner une idée de cette théorie, commençons par en énoncer un des résultats fondateurs : le *théorème de Borel-Weil-Bott*. Pour simplifier, on se contentera d'en exposer le cas des groupes $SL(n, \mathbb{C})$, mais il est valable pour tout groupe algébrique semi-simple complexe. Notons \mathcal{B} la variété algébrique paramétrant les drapeaux complets

$$L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = \mathbb{C}^n, \quad \dim(L_i) = i$$

de sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n . Le choix de L_1 détermine un point de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$, puis celui de L_2 un point de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n/L_1)$, etc. En d'autres termes, \mathcal{B} s'obtient comme une fibration itérée en espaces projectifs $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2, \dots, \mathbb{P}^{n-1}$. On

en déduit facilement que \mathcal{B} est une variété projective lisse. Avec un peu plus de travail, on peut aussi voir que cette variété admet une *décomposition cellulaire*, i.e il existe une stratification $\mathcal{B} = \bigsqcup_w C_w$, où chaque C_w est une sous-variété localement fermée, isomorphe à un espace affine $\mathbb{C}^{l(w)}$. De plus, l'ensemble d'indices w parcourt le groupe symétrique \mathfrak{S}_n et $l(w)$ est la longueur de la permutation w (i.e. le nombre d'inversions). Enfin, il est facile de se convaincre que $SL(n, \mathbb{C})$ opère transitivement sur \mathcal{B} , le stabilisateur d'un drapeau étant un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{C})$ conjugué au sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires supérieures (au sens large). La variété de drapeaux \mathcal{B} a ceci de canonique qu'elle est la plus grande variété projective (forcément lisse) sur laquelle le groupe $SL(n, \mathbb{C})$ agit transitivement. Le théorème de Borel-Weil-Bott fournit une construction géométrique des représentations irréductibles de dimension finie de $SL(n, \mathbb{C})$ comme espaces vectoriels des *sections* de certains fibrés vectoriels sur \mathcal{B} . Un *fibré vectoriel* $SL(n, \mathbb{C})$ -*équivariant* sur \mathcal{B} est la donnée d'un fibré vectoriel $\pi : V \rightarrow \mathcal{B}$ muni d'une action de $SL(n, \mathbb{C})$, linéaire le long des fibres¹ et relevant l'action de $SL(n, \mathbb{C})$ sur \mathcal{B} . L'espace des sections globales $H^0(\mathcal{B}, V)$ d'un fibré équivariant est un $SL(n, \mathbb{C})$ -module de façon naturelle. Comme $\mathcal{B} \simeq SL(n, \mathbb{C})/B$, un tel fibré vectoriel est totalement déterminé par la donnée de sa fibre V_e au point $eB \in SL(n, \mathbb{C})/B$ et de l'action de B sur V_e . Il en résulte une équivalence entre les catégories de B -modules de dimension finie et de fibrés vectoriels $SL(n, \mathbb{C})$ -équivariants sur \mathcal{B} . Les B -modules de dimension un sont paramétrés par les caractères du tore maximal $T \subset B$ constitué des matrices diagonales; en effet, toute représentation de dimension un de B se factorise par le quotient

1. En d'autres termes, pour tous $g \in SL(n, \mathbb{C})$ et $x \in \mathcal{B}$ on se donne un isomorphisme $\phi_{g,x} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(gx)$ et les $\phi_{g,x}$ doivent satisfaire à des contraintes d'associativité naturelles.

$B/[B, B] \simeq T$. Résumons : à un caractère $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ on peut associer un fibré en droites équivariant \mathcal{L}_χ sur \mathcal{B} (et vice-versa). Identifions le groupe des caractères de T à $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(1, 1, \dots, 1)$ via

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \chi_\lambda : (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^{\lambda_1} \cdots z_n^{\lambda_n}$$

et notons simplement \mathcal{L}_λ le fibré en droites associé. Un caractère χ_λ sera dit *anti-dominant* si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Nous pouvons maintenant énoncer le :

Théorème 1 (Borel-Weil-Bott). *L'application $\lambda \mapsto H^0(\mathcal{B}, \mathcal{L}_\lambda)$ induit une bijection entre les caractères antidominants de T et les représentations irréductibles de dimension finie de $SL(n, \mathbb{C})$. De plus, pour de tels λ on a $H^i(\mathcal{B}, \mathcal{L}_\lambda) = \{0\}$ pour tout $i > 0$.*

On a ainsi paramétré et réalisé, de façon géométrique, toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $SL(n, \mathbb{C})$. On peut maintenant appliquer l'arsenal de la géométrie algébrique pour étudier ces représentations. Par exemple, on peut démontrer aisément la formule des caractères de H. Weyl exprimant les dimensions des espaces de poids (sous l'action de T) de ces représentations en calculant, à l'aide de la formule de localisation aux T -points fixes d'Atiyah-Bott, l'image directe $p_*(\mathcal{L}_\lambda)$, où $p : \mathcal{B} \rightarrow \{pt\}$ est la projection. Mieux, on peut varier les plaisirs et remplacer \mathbb{C} par un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et espérer ainsi étudier les représentations des groupes réductifs sur ces corps. On peut aussi remplacer les fibrés vectoriels équivariants par la notion plus générale de D -modules (i.e. de faisceaux (quasi)cohérents munis d'une action du faisceau des opérateurs différentiels sur \mathcal{B}) et obtenir les représentations irréductibles de dimension *infinie* (de plus haut poids) de $SL(n, \mathbb{C})$. C'est le fameux *théorème de localisation*, dû indépendamment à Beilinson-Bernstein et Brylinski-Kashiwara, qui permet d'exprimer les caractères de ces représentations de dimension infinie en termes des non moins fameux *polynômes de Kazhdan-Lusztig*.

Dans l'exemple, classique s'il en est, de théorie géométrique des représentations décrit ci-dessus, on est parti d'un groupe ($SL(n, \mathbb{C})$) auquel on a associé – de façon canonique ou « tautologique » – une variété algébrique (la variété des drapeaux \mathcal{B}), sur laquelle on a fait des constructions géométriques (fibrés vectoriels, D -modules, etc.), dont on a extrait des représentations du groupe de départ en

considérant un invariant (ici l'espace des sections $H^0(\mathcal{B}, -)$). La grande majorité des résultats de la théorie géométrique des représentations procèdent de cette même manière ...

... mais pas tous! Il arrive que des structures de théorie de Lie apparaissent, à *l'improviste*, dans des contextes de géométrie *a priori* sans lien direct avec les groupes algébriques. Le but de cette note est de fournir une illustration de ce propos, dans le cadre des espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes projectives lisses².

Voici ce que nous nous proposons de faire ici : partant du problème géométrique – insoluble! – de la classification de tous les fibrés vectoriels sur une surface de Riemann donnée (Section 2) nous serons amenés à considérer et à répondre à la question suivante, plus simple : étant donnée une courbe projective lisse définie sur un corps fini, *combien* y a-t-il de fibrés vectoriels indécomposables, de rang et degré fixés (Section 3)? Pour comprendre la signification d'un tel comptage, on discutera d'une situation très analogue à celle des fibrés vectoriels sur une courbe : les représentations de carquois (Section 4). Là, le comptage en question se trouve être directement relié, via la construction catégorique et combinatoire de l'*algèbre de Hall*, aux algèbres de Lie de *Kac-Moody* et à leurs déformations quantiques (Section 5). Par analogie, et renversant quelque peu la logique, il devient alors naturel d'étudier les algèbres de Hall dans le cadre des courbes. Ceci révèle l'existence de nouvelles algèbres de Lie et groupes quantiques très intéressants, dont les caractères sont donnés – au moins de façon conjecturale – par les comptages de fibrés vectoriels indécomposables sur les courbes (Sections 6 et 7). La dernière section donne une autre interprétation de ces comptages de fibrés, géométrique cette fois, en termes de nombres de Betti d'espaces de modules de fibrés de Higgs.

Le texte qui suit contient plusieurs encadrés, dans lesquels nous développons ou illustrons quelques points techniques. Ceux-ci sont le plus souvent destinés aux plus experts et peuvent être sautés (ou admis comme boîte noire) sans que la lecture de l'article n'en soit trop perturbée.

2. Bien sûr qui dit « fibré vectoriel » sous-entend $GL(n)$ ou $SL(n)$ comme groupe de structure des fibrés, mais ces groupes sont bien distincts des groupes – ou plutôt des algèbres de Lie – qui nous intéressent ici.

2. Classification de fibrés vectoriels sur les courbes

Soit X une courbe projective lisse et connexe de genre g , définie sur un corps k . Voici une question déraisonnable : « Comment peut-on classifier, à isomorphisme près, les fibrés vectoriels sur X ? » Le théorème de Krull-Schmidt nous fournit une première réduction : tout fibré vectoriel est une somme directe de fibrés vectoriels *indécomposables*, et ces derniers (ainsi que leur multiplicité) sont déterminés de façon unique. Insistons ici sur la différence entre « indécomposable » et « simple » : un objet d'une catégorie abélienne³ est simple s'il ne contient pas de sous-objet propre ; un objet est indécomposable s'il n'est pas isomorphe à la somme directe de deux (sous-)objets non triviaux. La différence entre les deux notions provient de l'existence d'*extensions non triviales*, i.e. de suites exactes courtes non scindées

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \quad (1)$$

qui peuvent donner lieu à des indécomposables non simples. Les extensions comme ci-dessus sont classifiées, à équivalence naturelle près, par les éléments du groupe d'extension $\text{Ext}^1(M'', M')$; ainsi par exemple, la trivialité de ce groupe implique que toute suite exacte courte (1) est scindée. Revenons au cas des courbes : un fibré en droites est bien sûr indécomposable.

Classifier les fibrés vectoriels revient donc à classifier les fibrés vectoriels indécomposables. Une telle classification existe lorsque $g = 0$, i.e. que $X = \mathbb{P}^1$, ou lorsque $g = 1$, i.e. que X est une courbe elliptique ; ces résultats, que l'on énoncera précisément un peu plus bas, sont respectivement dus à Birkhoff-Grothendieck et à Atiyah. Les fibrés de rang un (et de degré fixé) sont classifiés par les points de la *Jacobienne* Jac_X – une variété algébrique de dimension g associée à X et étudiée classiquement en géométrie complexe. On peut également tirer des travaux de Tyurin une classification en tout genre des fibrés vectoriels de rang 2, mais la question semble réellement sans espoir dans le cas général.

Théorème 2 (Birkhoff-Grothendieck [12]). *Soit k un corps. Les fibrés vectoriels indécomposables sur \mathbb{P}^1/k sont les fibrés de Serre $\mathcal{O}(d)$ pour $d \in \mathbb{Z}$.*

3. De façon informelle, une catégorie abélienne est une catégorie dans laquelle on peut parler d'image et de noyau d'un morphisme, de suite exacte courte, de sous-objet, etc. L'exemple principal est la catégorie des représentations d'une algèbre A sur un anneau. Les catégories considérées ici, de faisceaux cohérents sur une variété algébrique en sont un autre exemple typique.

En particulier, tout fibré indécomposable sur \mathbb{P}^1/k est de rang un, et il n'y a qu'un seul fibré en droites indécomposable de degré d fixé.

Le cas des courbes elliptiques est plus délicat : **Théorème 3 (Atiyah [1]).** *Soit k un corps algébriquement clos et X/k une courbe elliptique. Pour tout $r \geq 1$ et $d \in \mathbb{Z}$ il existe une bijection entre les fibrés vectoriels indécomposables sur X de rang r et de degré d et l'ensemble $X(k)$ des points de X .*

La classification d'Atiyah est constructive (cf. encadré 1.). Elle a été étendue au cas des corps parfaits par Pumplün ([28]).

1. La construction d'Atiyah (1957). Soit X/k une courbe elliptique définie sur un corps algébriquement clos k . On va décrire succinctement la méthode d'Atiyah pour construire tous les fibrés vectoriels indécomposables sur X . Notons $\text{Ind}_{r,d}$ l'ensemble des fibrés vectoriels indécomposables de rang r et de degré d . Quitte à tensoriser par un fibré en droites de degré positif, on peut se ramener au cas des fibrés de degré strictement positif. Soit $x \in X(k)$ un point de X et notons $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}(x)/\mathfrak{m}_x$ le faisceau cohérent grasse-ciel de degré un supporté en x . Atiyah considère deux types d'opérations sur un fibré vectoriel V sur X , toutes deux dépendant du choix d'un autre fibré vectoriel W : l'*extension universelle à gauche* $V \mapsto L_W(V)$ définie par la suite exacte tautologique

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow L_W(V) \longrightarrow W \otimes \text{Ext}^1(W, V) \longrightarrow 0$$

et l'*extension universelle à droite* $V \mapsto R_W(V)$, provenant de la suite exacte

$$0 \longrightarrow W \otimes \text{Ext}^1(V, W)^* \longrightarrow R_W(V) \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

L'idée est maintenant de partir de la classification (connue) des fibrés en droites de degré zéro ainsi que des faisceaux de torsion de degré un (tous deux en bijection avec $X(k)$), et d'obtenir des fibrés indécomposables par une succession d'extensions universelles (à droite ou à gauche). Par exemple, si l'on se fixe un faisceau de torsion k_x alors les fibrés en droites de degré un sont les

$\{L_{k_x}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}(x)\}$ pour $\mathcal{L} \in \text{Pic}^0(X)$, les fibrés en droites de degré deux sont les $\{L_{k_x}(\mathcal{L})\}$, pour $\mathcal{L} \in \text{Pic}^1(X)$ etc. On construit ainsi tous les fibrés en droites de degré positif. D'un autre côté, si $\mathcal{L}_0 \in \text{Pic}^0(X)$ est fixé, alors les $\{R_{\mathcal{L}_0}(\mathcal{L})\}$ pour $\mathcal{L} \in \text{Pic}^1(X)$ sont des fibrés de rang deux et degré un (en effet, le théorème de Riemann-Roch donne $\text{Ext}^1(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0) = \mathbf{k}$) dont on peut montrer qu'ils sont indécomposables. Les fibrés vectoriels $\{R_{\mathcal{L}_0}^2(\mathcal{L})\}$ obtenus en appliquant encore une fois l'opérateur $R_{\mathcal{L}_0}$ sont maintenant indécomposables, de rang 3 et degré un (on a encore $\text{Ext}^1(R_{\mathcal{L}_0}(\mathcal{L}), \mathcal{L}_0) = \mathbf{k}$), etc. On construit ainsi en fait tous les fibrés indécomposables de degré un. La structure combinatoire qui apparaît lorsqu'on examine les couples (rang, degré) des fibrés ainsi construits est celle des suites de Farey; rappelons que celles-ci sont définies de façon itérative à partir de la suite $F_0 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$ en insérant entre chaque paire d'entrées consécutives $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ de F_n l'entrée $\frac{a+c}{b+d}$. Ainsi,

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \right\}, \quad F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0} \right\},$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0} \right\}, \quad \text{etc.}$$

Atiyah prouve que si $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ sont des entrées successives d'une suite de Farey et si $\mathcal{V}_{\frac{a}{b}}, \mathcal{V}_{\frac{c}{d}}$ sont des fibrés indécomposables de rang b et degré a , resp. de rang d et degré c alors

$$\text{Ind}_{b+d, a+c} = \left\{ R_{\mathcal{V}_{\frac{a}{b}}}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \in \text{Ind}_{d,c} \right\} \\ = \left\{ L_{\mathcal{V}_{\frac{c}{d}}}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \in \text{Ind}_{b,a} \right\}.$$

Comme toute fraction réduite positive apparaît dans F_n pour $n \gg 0$ on obtient ainsi la classification de tous les fibrés indécomposables de rang et degrés (r, d) premiers entre eux. Enfin, Atiyah montre aussi que si \mathcal{V} est un fibré indécomposable de rang lr et degré ld avec $\text{pgcd}(r, d) = 1$ alors il existe un (unique) fibré indécomposable \mathcal{V}' de rang r et degré d et une filtration

$$0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 \subset \dots \subset \mathcal{W}_l = \mathcal{V}$$

tel que $\mathcal{W}_i/\mathcal{W}_{i-1} \simeq \mathcal{V}'$ pour tout i ; de plus,

la correspondance $\text{Ind}_{lr, ld} \rightarrow \text{Ind}_{r, d}, \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}'$ est bijective.

La démonstration de ces résultats fait intervenir, en langage moderne, des auto-équivalences de la catégorie dérivée $D^b(\text{Coh}(X))$. Plus précisément, les opérateurs $R_{\mathcal{V}}$ et $L_{\mathcal{V}}$ sont des cas particuliers d'auto-équivalences $T_{\mathcal{V}} \in \text{Aut}(D^b(\text{Coh}(X)))$ engendrant un groupe d'auto-équivalences isomorphe au groupe de tresse B_3 , groupe qui opère sur les couples (rang, degré) $\in \mathbb{Z}^2$ via le quotient $B_3 \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. En particulier, on peut toujours, à l'aide d'une équivalence dérivée, se ramener au cas $r = 0$, i.e. au cas des faisceaux de torsion sur X . Noter que les auto-équivalences dérivées préservent l'ensemble des objets indécomposables.

3. Comptage de fibrés vectoriels sur les courbes

Si on ne peut pas classifier ou construire tous les fibrés vectoriels indécomposables sur une courbe, on peut néanmoins les compter! Dès que $g > 0$, si le corps de définition est infini, ce nombre sera infini (ne serait-ce qu'en rang un, penser aux points de la Jacobienne). Pour avoir une chance que ce nombre soit fini, il faut donc travailler sur un corps fini $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$, ce que l'on supposera dans ce paragraphe. Il résulte de la théorie de Harder-Narasimhan ([13]) que cette condition est également suffisante (cf. encadré 2.).

2. Théorie de la réduction de Harder-Narasimhan et finitude du nombre de fibrés indécomposables. La pente d'un fibré vectoriel \mathcal{V} sur X est par définition le nombre rationnel $\mu(\mathcal{V}) = \frac{\text{deg}(\mathcal{V})}{\text{rang}(\mathcal{V})}$. On dira d'un fibré vectoriel de pente ν qu'il est *semistable* si tout sous-faisceau $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ (qui est nécessairement un fibré vectoriel) vérifie $\mu(\mathcal{W}) \leq \nu$. On notera $\text{Bun}^{\text{ss}, \nu}$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les fibrés semistables de pente ν . En voici quelques propriétés importantes :

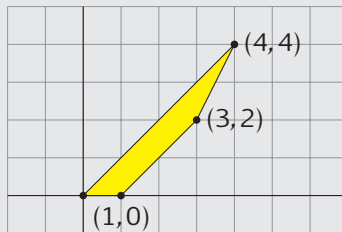
- i) c'est une catégorie abélienne et stable par extension;
- ii) tout objet \mathcal{V} de $\text{Bun}^{\text{ss}, \nu}$ est de longueur finie, i.e il existe une filtration finie $0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_s = \mathcal{V}$ avec $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ un objet simple de $\text{Bun}^{\text{ss}, \nu}$;

- iii) pour r, d fixés, il n'existe qu'un nombre fini^a de fibrés semistables de rang r et degré d ;
- iv) si $\mathcal{V} \in Bun^{ss, \nu}, \mathcal{V}' \in Bun^{ss, \nu'}$ alors $Hom(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = \{0\}$ si $\nu > \nu'$ et $Ext^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = \{0\}$ si $\nu + 2(g-1) < \nu'$;
- v) tout fibré vectoriel \mathcal{V} sur X admet une unique filtration

$$0 = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_l = \mathcal{V}$$

vérifiant : pour tout $i \geq 1$, $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ est semistable et les pentes $\mu_i := \mu(\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1})$ sont ordonnées, i.e. $\mu_1 > \mu_2 > \dots$ (c'est la *filtration de Harder-Narasimhan* de \mathcal{V}).

Grâce au v), on peut partitionner l'ensemble des fibrés vectoriels de rang r et degré d en strates selon le *type de Harder-Narasimhan*, c'est-à-dire selon la suite $(r_i, d_i)_i$ des rangs et degrés des sous-quotients $\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ de la filtration de Harder-Narasimhan. Il est courant de représenter cette suite de degrés par un polygone convexe reliant les points $(r, d), (r - r_1, d - d_1)$, etc. Par exemple, une filtration $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3$ avec $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ de rangs et degrés respectifs 1, 3, 4 et 2, 4 correspond au polygone suivant :



D'après iv), un fibré vectoriel \mathcal{V} dont le polygone a un « saut de pente » supérieur à $2(g-1)$ en un sommet i est forcément décomposable : en effet, l'annulation des groupes d'extensions $Ext^1(\mathcal{V}_j/\mathcal{V}_{j-1}, \mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1})$ pour $k \leq i < j$ entraîne que sa filtration de Harder-Narasimhan est scindée, i.e. $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_{>i} \oplus \mathcal{V}_{\leq i}$. Il est facile de voir que, pour un couple (r, d) fixé, il n'existe qu'un nombre fini de polygones convexes reliant $(0,0)$ à (r, d) et n'ayant que des sauts de pentes inférieurs à $2(g-1)$. Ainsi, seul un ensemble *fini* de strates peuvent contenir un fibré vectoriel indécomposable. Finalement, il résulte de iii) et de la finitude des groupes d'extensions (car k est fini et X

est projective) que chaque strate de Harder-Narasimhan ne contient qu'un nombre fini de fibrés. Au final, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de fibrés indécomposables de rang r et degré d .

a. Si k n'est plus supposé fini, alors on doit remplacer iii) par le fait que $Bun_{r,d}^{ss}$ est un champ algébrique de type fini.

Lorsque le corps de définition k est fini (en particulier, pas algébriquement clos) il est important de distinguer la notion d'indécomposable de celle d'*absolument indécomposable* : un faisceau cohérent \mathcal{V} est absolument indécomposable si $\mathcal{V} \otimes \bar{k}$ est encore un faisceau indécomposable sur $\bar{X} = X \otimes \bar{k}$. À charge d'exemple, considérons le cas d'un faisceau gratte-ciel k_z associé à un point fermé z de X . Alors k_z est toujours indécomposable. En revanche, il est absolument indécomposable si et seulement si z est un point k -rationnel ; sinon $k_z \otimes \bar{k} \simeq \bigoplus_i \bar{k}_{z_i}$ où $\{z_1, \dots, z_{deg(z)}\}$ sont les différents points de l'orbite du groupe de Galois $Gal(\bar{k}/k)$ dans $X(\bar{k})$ correspondante à z .

Notons $I_{r,d}(X)$ et $A_{r,d}(X)$ les nombres de fibrés vectoriels indécomposables, resp. absolument indécomposables sur X de rang r et degré d . Un argument simple de théorie de Galois montre que $I_{r,d}(X) = A_{r,d}(X)$ si $pgcd(r, d) = 1$ (mais ces deux nombres sont distincts dans tous les autres cas dès que $g > 0$). Un argument plus compliqué de théorie de Galois permet de déterminer de façon combinatoire les $I_{r,d}(X)$ à partir des $A_{r',d'}(X^{(l)})$, où on a posé $X^{(l)} = X \otimes k_l$, avec $[k_l : k] = l$ (et vice-versa). Les théorèmes de Birkhoff-Grothendieck et Atiyah (et son extension par Pumplün) donnent,

$$A_{r,d}(\mathbb{P}^1) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}, \tag{2}$$

et pour X une courbe elliptique

$$A_{r,d}(X) = |X(k)| \quad \forall (r, d). \tag{3}$$

Comme on le voit sur l'exemple des courbes elliptiques, le nombre $A_{r,d}(X)$ dépend du choix particulier de X parmi l'ensemble des courbes de même genre, mais il est donné par une formule « universelle ». Pour exprimer ceci de manière rigoureuse, il nous faut introduire une notion supplémentaire. À une courbe X projective lisse de genre g et définie sur un corps fini k est associée une

4. Pour être précis, nous devrions fixer un nombre premier $l \neq char(k)$ ainsi qu'une identification $\bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$.

famille de $2g$ nombres algébriques $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2g}\}$ (les *nombres de Weil*⁴ de X), vérifiant $\sigma_{2i-1} = \overline{\sigma_{2i}}$ et $\sigma_{2i-1}\sigma_{2i} = |\mathbf{k}| = q$ pour $1 \leq i \leq g$. Les nombres de Weil ne sont uniquement déterminés qu'à permutation près à l'intérieur de chaque paire $(\sigma_{2i-1}, \sigma_{2i})$, et à permutation près de ces paires entre elles. Posons⁵

$$T_g = \{(z_1, \dots, z_{2g}) \in (\mathbb{C}^*)^{2g} \mid z_{2i-1}z_{2i} = z_{2j-1}z_{2j} \quad \forall i, j\},$$

$$W_g = (\mathbb{S}_2)^g \ltimes \mathbb{S}_g,$$

puis $R_g = \mathbb{Q}[T_g]^{W_g}$, l'espace des polynômes W_g -invariants en les variables $z_i^{\pm 1}$. On peut évaluer un polynôme $P \in R_g$ de façon non ambiguë en les nombres de Weil d'une courbe X , ce que nous noterons $P(\sigma_X)$. Par exemple, on a $q = |\mathbf{k}| = P(\sigma_X)$ avec $P = z_1z_2$; on a également, pour tout $l \geq 1$, $|X(\mathbf{k}_l)| = P(\sigma_X)$ pour

$$P = 1 - (z_1^l + z_2^l + \dots + z_{2g}^l) + z_1^l z_2^l \in R_g.$$

Lorsque $g = 0$, il n'y a pas de nombres de Weil; on posera alors simplement $R_g = \mathbb{Q}[q]$.

Théorème 4 (S. [31], Mellit [21]). *Pour tout $g \geq 0$ et $r \geq 1$ il existe un (unique) polynôme $A_{g,r} \in R_g$ tel que pour toute courbe projective lisse connexe X de genre g définie sur un corps fini on ait $A_{r,d}(X) = A_{g,r}(\sigma_X)$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$. De plus, $A_{g,r}$ est un polynôme à coefficients entiers et positifs en les variables $-z_i$.*

Donnons ici deux exemples des polynômes $A_{g,r}$:

$$A_{g,1} = \prod_{i=1}^{2g} (1 - z_i),$$

$$A_{g,2} = \prod_{i=1}^{2g} (1 - z_i) \cdot \left(\frac{\prod_i (1 - qz_i)}{(q-1)(q^2-1)} - \frac{\prod_i (1 + z_i)}{4(1+q)} \right. \\ \left. + \frac{\prod_i (1 - z_i)}{2(q-1)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q-1} - \sum_i \frac{1}{1-z_i} \right] \right)$$

où on a posé $q = z_1z_2$. La première formule est classique, c'est le nombre de points de la Jacobienne Jac_X de X . À titre d'exemple, par la deuxième formule, le nombre de fibrés absolument indécomposables de rang 2 et degré fixé sur une courbe de

genre 2 est égal à

$$A_{2,2} = |\text{Jac}_X(\mathbf{k})|(q+1) \left(q^2 - \sum_{i=1}^4 z_i + 2 \right).$$

L'existence même d'un polynôme $A_{g,r,d} \in R_g$ comptant le nombre de fibrés (absolument) indécomposables de rang r et degré d sur une courbe de genre g a de quoi surprendre. D'un point de vue géométrique, les fibrés absolument indécomposables ne forment qu'un sous-ensemble *constructible* du champ des fibrés vectoriels et, qui plus est, on les compte ici à *isomorphisme près*. Cette existence est démontrée dans [31], où l'on trouvera aussi une formule compliquée pour $A_{g,r,d}$; A. Mellit a par la suite grandement simplifié la combinatoire de cette formule. Notons que si l'indépendance de $A_{r,d}(X)$ en le degré d résulte de cette simplification, on ne dispose pas pour l'instant d'explication conceptuelle à ceci⁶.

Détailler la démonstration du théorème 4 nous mènerait trop loin, mais en voici les grandes lignes pour le lecteur curieux. Compter les fibrés indécomposables de rang r et degré d pour tout (r, d) revient, par le théorème de Krull-Schmidt, à compter tous les fibrés vectoriels de rang r et degré d pour tout (r, d) ; malheureusement, contrairement aux fibrés indécomposables, il y a une *infinité* de fibrés vectoriels de rang r et degré d pour peu que r soit supérieur à un. Pour pallier ceci, on introduit une sous-catégorie additive $\text{Coh}^+(X)$ de $\text{Coh}(X)$ qui possède les propriétés suivantes : il n'y a qu'un nombre fini de fibrés vectoriels de rang r et degré d fixés dans $\text{Coh}^+(X)$ et tout fibré vectoriel indécomposable de rang r fixé et de degré d suffisamment grand appartient à $\text{Coh}^+(X)$. On calcule le nombre de fibrés vectoriels de rang r et degré d dans $\text{Coh}^+(X)$ par des méthodes issues de la théorie des formes automorphes sur les corps de fonctions⁷.

Maintenant, quel sens donner aux polynômes $A_{g,r}$? Pourquoi ceux-ci sont-ils entiers et à coefficients positifs en les $-z_i$? Au lecteur familier avec la théorie des motifs, cela donne à penser que les fibrés vectoriels absolument indécomposables sont paramétrés par une variété algébrique $\mathcal{X}_{r,d}$

5. L'expert aura reconnu ici le tore maximal, le groupe de Weyl, puis l'anneau des représentations du groupe $GSp(2g, \mathbb{C})$; ceci n'est pas une surprise : l'élément de Frobenius appartient à $GSp(H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l))$ où l'on munit $H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ de la forme d'intersection.

6. Le fait que $A_{g,r,d}$ ne dépende que du reste de la division de d par r est, par contre, clair : cela provient de l'autoéquivalence $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}(x)$ de $\text{Coh}(X)$ pour n'importe quel $x \in X(\mathbf{k})$.

7. Similaire au calcul, par Harder, du volume des champs $Bun_{r,d}(X)$ des fibrés vectoriels sur X .

construite à partir du motif de X . Cela peut, plus simplement, laisser penser que $A_{g,r}$ est la dimension graduée⁸ d'un espace vectoriel gradué canonique ne dépendant que de g et r . Mais alors quel est cet espace gradué et comment peut-on le construire ?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous allons nous aider d'une analogie étonnamment efficace entre les courbes (projective lisses) et les *carquois* (sans relations). Plus précisément, nous allons passer du problème de compter les fibrés vectoriels indécomposables à celui de compter les représentations indécomposables de carquois, et voir comment ce dernier problème est intimement lié à la théorie des *algèbres de Kac-Moody*, une classe d'algèbres de Lie de dimension infinie.

4. Comptage de représentations de carquois et polynômes de Kac

Soit $Q = (I, \Omega)$ un carquois, i.e. un graphe orienté (fini). Ici I désigne l'ensemble des sommets et Ω l'ensemble des flèches ; pour tout $h \in \Omega$ on notera $s(h)$ sa source et $t(h)$ son but. Si \mathbf{k} est un corps, une \mathbf{k} -représentation de Q de dimension $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ est par définition la donnée d'un \mathbf{k} -espace vectoriel I -gradué $V = \bigoplus_i V_i$ de dimension \mathbf{d} et d'une collection d'applications linéaires $x_h \in \text{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)})$ pour $h \in \Omega$. En d'autres termes, on place un \mathbf{k} -espace vectoriel de dimension finie en chaque sommet du carquois, et on associe à chaque flèche une application linéaire entre les espaces correspondants. Par exemple, pour tout sommet $i \in I$ on a la représentation S_i de dimension un au sommet i , zéro ailleurs et dont toutes les flèches sont nulles. Les \mathbf{k} -représentations d'un carquois forment une catégorie abélienne (pour les notions de morphismes évidentes) : les objets S_i en sont des objets simples⁹.

À titre d'exemple, considérons deux carquois fondamentaux. Le premier est le carquois à deux sommets $\{1, 2\}$ et une flèche $h : 1 \mapsto 2$. Par définition, une représentation de dimensions (d_1, d_2) est la donnée d'une paire de \mathbf{k} -espaces vectoriels V_1, V_2 de dimension respectives d_1, d_2 , et d'un élément $x \in \text{Hom}(V_1, V_2)$. Quitte à fixer des bases dans V_1 et V_2 , une représentation est donc une matrice $M \in M_{d_2, d_1}(\mathbf{k})$. Deux représentations M, M' sont isomorphes si et seulement si il existe des matrices inversibles $g_1 \in GL_{d_1}(\mathbf{k})$ et $g_2 \in GL_{d_2}(\mathbf{k})$ telles que

$M' = g_2 M g_1^{-1}$. Un résultat bien connu d'algèbre linéaire affirme qu'une matrice $M \in M_{d_2, d_1}(\mathbf{k})$ est ainsi équivalente à la matrice de la forme

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où le nombre de 1 sur la diagonale est égal au rang de M . En termes de carquois, cela veut dire qu'il y a exactement trois représentations indécomposables, dont les vecteurs dimension sont $(1, 0), (0, 1)$ et $(1, 1)$. Les deux premières sont également simples, la dernière est l'unique extension non triviale de S_1 par S_2 . Considérons à présent le carquois de Jordan, qui a un sommet et une boucle. Une représentation de dimension d est à présent une matrice $M \in M_{d, d}(\mathbf{k})$ et deux représentations M, M' sont isomorphes si et seulement si il existe $g \in GL_d(\mathbf{k})$ tel que $M' = g M g^{-1}$. La classification des indécomposables revient donc essentiellement à la théorie des formes normales de Jordan. Notons au passage qu'ici la notion d'absolument indécomposable prend un sens très naturel : on sait bien que les valeurs propres d'une matrice sont parfois dans une extension de corps de \mathbf{k} ; ainsi par exemple, pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, une matrice 2×2 de rotation correspond à une représentation indécomposable mais pas absolument indécomposable.

On peut penser à un carquois comme étant une version « discrétisée » d'une courbe et à une représentation d'un carquois comme étant un analogue discret de la notion de fibré vectoriel (ou plutôt de faisceau cohérent). Notons une différence importante entre les carquois et les courbes : ces dernières forment un espace de modules « continu » alors que les carquois forment un ensemble discret (dénombrable). De façon moins naïve, l'analogie entre les catégories de représentations de carquois et les catégories de faisceaux cohérents sur une courbe projective lisse provient du fait que dans les deux cas, les groupes d'extensions $\text{Ext}^i(M, N)$ sont de dimension finie et nuls pour $i > 1$; d'un point de vue géométrique, cela se traduit par le fait que le champ des \mathbf{k} -représentations d'un carquois (de dimension fixée), comme celui des faisceaux cohérents sur une courbe (de rang et degré fixés) est lisse.

Supposons maintenant \mathbf{k} fini et notons $A_{Q, \mathbf{d}}(\mathbf{k})$ le nombre (clairement fini) de \mathbf{k} -représentations absolument indécomposables de dimension \mathbf{d} .

8. En un sens à préciser.

9. Et s'il n'y a pas de cycle orienté, ce sont même tous les objets simples.

Théorème 5 (Kac [18], Hausel-Letellier-Rodriguez-Villegas [16]). *Pour tout $Q = (I, \Omega)$ et pour tout $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^I$ il existe un (unique) polynôme $A_{Q,\mathbf{d}} \in \mathbb{N}[t]$ tel que pour tout corps fini \mathbf{k} on ait*

$$A_{Q,\mathbf{d}}(\mathbf{k}) = A_{Q,\mathbf{d}}(|\mathbf{k}|).$$

L'existence du polynôme $A_{Q,\mathbf{d}}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ est due à Kac. La démonstration de la positivité des coefficients de $A_{Q,\mathbf{d}}(t)$ est bien plus récente ([16]) et utilise des résultats profonds de géométrie algébrique ainsi que la théorie des *variétés carquois de Nakajima* ([23], [24]). Dans le cas des carquois, et contrairement aux courbes¹⁰, les polynômes de Kac $A_{Q,\mathbf{d}}(t)$ sont parfois nuls. La théorie de Lie, et en particulier la théorie des algèbres de Lie de Kac-Moody fait son apparition lorsqu'on cherche à savoir pour quels vecteurs dimension \mathbf{d} le polynôme de Kac $A_{Q,\mathbf{d}}(t)$ est non nul (i.e. quels sont les vecteurs dimension des représentations indécomposables).

Soit

$$C = (c_{ij})_{i,j \in I},$$

$$c_{ij} = |\{h \in \Omega \mid s(h) = i, t(h) = j\}| \\ + |\{h \in \Omega \mid t(h) = i, s(h) = j\}|$$

la matrice d'adjacence de Q et posons $A = 2I\mathbf{d} - C$. Supposons pour simplifier que Q est sans boucles, i.e. que $s(h) \neq t(h)$ pour tout $h \in \Omega$. Dans ce cas, A est une matrice de Cartan généralisée symétrique, à laquelle est associée une algèbre de Kac-Moody \mathfrak{g}_Q (cf. encadré 3. ci-dessous). Notons Δ^+ son système de racines positives, et $\{\alpha_i, i \in I\}$ l'ensemble des racines simples. Si $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^I$ est un vecteur dimension, on note $\alpha(\mathbf{d}) = \sum_i d_i \alpha_i$.

Théorème 6 (Kac [18], Hausel [15]). *On a $A_{Q,\mathbf{d}}(t) \neq 0$ si et seulement si $\alpha(\mathbf{d}) \in \Delta^+$. De plus, on a alors $A_{Q,\mathbf{d}}(0) = m_{\alpha(\mathbf{d})}$.*

Le premier énoncé du théorème ci-dessus est dû à Kac, qui a également conjecturé le deuxième. Cette « conjecture du terme constant » a finalement été démontrée 25 ans plus tard par T. Hausel, en utilisant la théorie des variétés de Nakajima. Dans le cas particulier d'un carquois de type Dynkin (fini), i.e. lorsque \mathfrak{g}_Q est une algèbre de Lie semi-simple on retrouve le célèbre théorème de Gabriel, à l'origine du lien entre carquois et algèbres de Lie.

10. De genre strictement positif.

3. Algèbres de Kac-Moody ([19]) Les algèbres de Kac-Moody sont une généralisation naturelle en dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples complexes, introduites de façon indépendante par V. Kac et R. Moody à la fin des années 1960. Tout comme ces dernières, les algèbres de Kac-Moody sont déterminées par une *matrice de Cartan généralisée* $A = (a_{ij})_{i,j \in I'}$, soumise ici aux seules conditions suivantes :

- i) $a_{ii} = 2$ pour tout $i \in I$,
- ii) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$,
- iii) $a_{ij} \in -\mathbb{N}$ pour tout $i \neq j$.

Notons que, contrairement aux matrices de Cartan usuelles, on n'impose aucune condition de positivité sur la forme bilinéaire associée à A . Nous n'aurons besoin ici que du cas particulier des matrices A *symétriques*. La manière la plus simple de définir l'algèbre de Kac-Moody \mathfrak{g}_A est via sa présentation, dite *de Serre*, par générateurs et relations. Ainsi, \mathfrak{g}_A est l'algèbre de Lie engendrée^a par des éléments $e_i, f_i, h_i, i \in I$ soumis aux seules relations suivantes, pour tout $i, j \in I$:

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \quad [h_i, h_j] = 0 \\ [e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i$$

et les relations de Serre

$$ad^{1-a_{ij}} e_i(e_j) = 0, \quad ad^{1-a_{ij}} f_i(f_j) = 0. \quad (4)$$

La sous-algèbre abélienne $\mathfrak{h} = \bigoplus_i \mathbb{C} h_i$ est la sous-algèbre de Cartan, les générateurs $\{e_i, i \in I\}$ (resp. $\{f_i, i \in I\}$) engendrent une sous-algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{n}_+ (resp. \mathfrak{n}_-) et on a une décomposition triangulaire

$$\mathfrak{g}_A = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-.$$

L'algèbre \mathfrak{g}_A admet une \mathbb{Z}^I -graduation pour laquelle $\deg(e_i) = \epsilon_i, \deg(f_i) = -\epsilon_i$ et $\deg(h_i) = 0$ pour tout i (ici $\{\epsilon_i\}_i$ est la base canonique de \mathbb{Z}^I) :

$$\mathfrak{g}_A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^I} \mathfrak{g}_A[\alpha].$$

Le système de racines (positives) est le sous-ensemble

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \mathbb{N}^I \mid \mathfrak{g}_A[\alpha] \neq 0\}.$$

À moins que A ne soit une matrice de Cartan usuelle, Δ^+ est infini. Contrairement encore au cas des algèbres de Lie semi-simples, les multiplicités

$$m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_A[\alpha]$$

pour $\alpha \in \Delta^+$ ne sont pas toujours égales à un. Bien qu'il existe une formule combinatoire pour ces multiplicités (*la formule du dénominateur de Kac*) déterminer concrètement Δ^+ et plus encore les multiplicités m_α reste, en dehors de certains cas particuliers, un problème difficile du domaine. La théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody est encore un sujet de recherches très actif.

a. Pour simplifier, nous présentons ici la version dérivée, notée usuellement \mathfrak{g}'_A de \mathfrak{g}_A .

Résumons : en prenant le terme constant du polynôme de Kac $A_{Q,d}(t)$ pour chaque vecteur dimension \mathbf{d} on retrouve le caractère de l'algèbre de Kac-Moody \mathfrak{g}_Q associé à Q . Une question naturelle se pose : comment reconstruire toute l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_Q uniquement à partir de la catégorie des représentations de Q ? Si reconstruire directement \mathfrak{g}_Q s'avère délicat en général, on peut néanmoins, comme l'a découvert Ringel [29], construire une déformation *quantique* $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}_Q)$ de l'algèbre enveloppante $\mathbf{U}(\mathfrak{g}_Q)$ – c'est-à-dire l'algèbre associative engendrée par les éléments e_i, f_i, h_i soumis aux mêmes relations que \mathfrak{g}_Q – au moyen de la théorie des *algèbres de Hall*. C'est ce que nous expliquons au prochain paragraphe.

5. Algèbres de Hall des carquois

Soit de nouveau $Q = (I, \Omega)$ un carquois (toujours supposé sans boucles pour simplifier), et $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$ un corps fini. Pour chaque vecteur dimension $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^I$, notons \mathcal{M}_d l'ensemble (fini) des classes d'isomorphisme de \mathbf{k} -représentations de Q de dimension \mathbf{d} . Notons enfin

$$\mathbf{H}_Q[\mathbf{d}] = \{f : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^{\mathcal{M}_d}, \quad \mathbf{H}_Q = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^I} \mathbf{H}_Q[\mathbf{d}].$$

L'idée de Ringel est de munir \mathbf{H}_Q de la multiplication suivante :

$$(f \star g)(V) = \sum_{W \subseteq V} q^{\frac{1}{2}\langle W/V, V \rangle} f(W/V)g(V) \quad (5)$$

où la somme porte sur l'ensemble (fini) des sous-objets d'un représentant de la classe d'isomor-

phisme de V , et où le facteur $q^{\frac{1}{2}\langle W/V, V \rangle}$ est un certain facteur de renormalisation (facteur d'Euler) qui ne dépend que des dimensions de V/W et W . Il est facile de voir que cette multiplication est associative, et additive sur les degrés (i.e $\mathbf{H}_Q[\mathbf{d}_1] \star \mathbf{H}_Q[\mathbf{d}_2] \subseteq \mathbf{H}_Q[\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2]$). Il est instructif d'écrire le produit de deux fonctions caractéristiques $1_S, 1_T$, où $S \in \mathcal{M}_{d_1}, T \in \mathcal{M}_{d_2}$:

$$1_S \star 1_T = \sum_{R \in \mathcal{M}_{d_1+d_2}} q^{\frac{1}{2}\langle d_1, d_2 \rangle} P_{S,T}^R 1_R$$

avec

$$P_{S,T}^R = |\{N \subseteq R \mid N \simeq T, R/N \simeq S\}|. \quad (6)$$

Noter que l'ensemble des sous-objets d'un objet est fini, donc (6) est bien défini. Ainsi, le produit $1_S \star 1_T$ est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'objets R qui sont des *extensions* de T par S (avec des coefficients indiquant précisément le nombre de manières de réaliser ces objets comme extensions de T par S). De même, il découle par exemple directement des définitions que le produit de trois fonctions caractéristiques $1_S \star 1_T \star 1_V$ est une combinaison linéaire d'objets R qui admettent une filtration à deux crans $N_1 \subseteq N_2 \subseteq R$ telle que $N_1 \simeq V, N_2/N_1 \simeq T$ et $R/N_2 \simeq S$. etc.

La structure de l'algèbre de Hall \mathbf{H}_Q d'un carquois dépend fortement du choix du corps fini (par exemple, la dimension de $\mathbf{H}_Q[\mathbf{d}]$ est égale au nombre d'objets de vecteurs dimension \mathbf{d}). Afin d'obtenir un objet plus canonique, Ringel considère la sous-algèbre *sphérique* \mathbf{H}_Q^{sph} de \mathbf{H}_Q engendrée par les fonctions caractéristiques 1_{S_i} des objets simples (de dimension un) $\{S_i \mid i \in I\}$.

Théorème 7 (Ringel [29], Green [11]). *L'application $E_i \mapsto 1_{S_i}, i \in I$ s'étend en un isomorphisme d'algèbres $\mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g}_Q) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}_Q^{sph}$ (cf. encadré 4).*

En d'autres termes, la structure fine des extensions entre représentations d'un carquois Q est précisément encodée par le groupe quantique $\mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g}_Q)$, et le corps fini n'apparaît plus que comme paramètre de déformation quantique! Ce lien entre l'algèbre homologique, la géométrie des espaces de modules de représentations de carquois d'une part et les algèbres de Kac-Moody et leurs groupes quantiques d'autre part est à l'origine d'un pan très actif de la théorie géométrique des représentations avec des ramifications importantes aussi bien en géométrie algébrique qu'en physique théorique (notamment en théorie des cordes) ou en combinatoire (algèbres amassées).

4. Algèbres de Hall et groupes quantiques.

Commençons par définir les déformations quantiques des algèbres de Kac-Moody, introduites par Drinfeld et Jimbo (cf. [6] pour une introduction au domaine). Soit A une matrice de Cartan généralisée symétrique et q un nombre complexe non nul. Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{g}_A)$ est l'algèbre associative engendrée par des éléments $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}, i \in I$ soumise aux seules relations, pour tout $i, j \in I$

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad K_i K_j = K_j K_i,$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{\frac{1}{2} a_{ij}} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^{-\frac{1}{2} a_{ij}} F_j,$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}},$$

et les relations de Serre déformées

$$\sum_{l=1}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix}_q E_i^l E_j E_i^{1-a_{ij}-l} = 0 \quad (7)$$

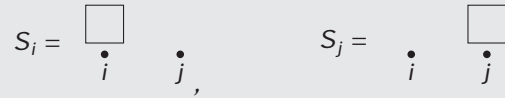
(idem pour F_i, F_j au lieu de E_i, E_j). Ici, les q -nombres binomiaux sont définis par les formules classiques

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q!}{[m]_q! \cdot [n-m]_q!}, \\ [l]_q! &= [1]_q \cdot [2]_q \cdots [l]_q, \\ [u]_q &= \frac{q^{\frac{u}{2}} - q^{-\frac{u}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

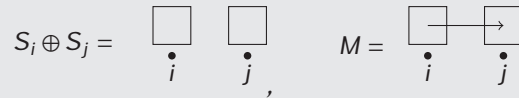
Lorsque $q = 1$ on a $[u]_q = u$ pour tout entier u , (7) se spécialise en (4) et l'algèbre associative $U_q(\mathfrak{g}_A)$ se spécialise en l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_A)$. On note $U_q^+(\mathfrak{g}_A)$ la sous-algèbre associative engendrée par $E_i, i \in I$, déformation de l'algèbre enveloppante $U^+(\mathfrak{g}_A) = U(\mathfrak{n}_{A,+})$. Il est légitime, à la vue de (7), de se demander en quoi cette déformation est « naturelle ». On pourrait invoquer un théorème profond de Drinfeld affirmant que c'est l'unique déformation ^a de $U(\mathfrak{g}_A)$ vérifiant une certaine condition d'autodualité. Nous préférons ici illustrer cette définition en montrant comment ces relations de Serre déformées apparaissent dans le contexte des algèbres de Hall.

Considérons le cas le plus simple, i.e. de la relation de Serre entre deux générateurs E_i, E_j pour lesquels $a_{ij} = -1$. Ceci correspond au

cas de deux sommets i, j d'un carquois, reliés par une unique flèche : $h : i \rightarrow j$. Calculons pour commencer les produits $1_{S_i} \star 1_{S_j}$ et $1_{S_j} \star 1_{S_i}$. Afin de mieux visualiser les représentations de carquois, nous représenterons un k -espace vectoriel de dimension un par une boîte \square et les applications non nulles par des flèches ; ainsi par exemple



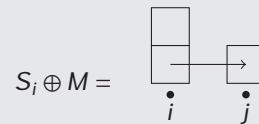
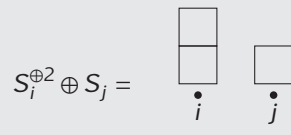
et les représentations de dimension $\epsilon_i + \epsilon_j$ sont



On voit que $S_i \oplus S_j$ admet exactement deux sous-modules propres, S_i et S_j . En revanche, M n'a qu'un seul sous-module propre, S_j . Les facteurs d'Euler étant ici $\langle S_i, S_j \rangle = -1, \langle S_j, S_i \rangle = 0$, en déduit

$$1_{S_i} \star 1_{S_j} = q^{\frac{1}{2}} 1_{S_i \oplus S_j} + q^{\frac{1}{2}} 1_M, \quad 1_{S_j} \star 1_{S_i} = 1_{S_i \oplus S_j}.$$

En dimension $2\epsilon_i + \epsilon_j$ il y a encore deux représentations :



Maintenant, $S_i^{\oplus 2} \oplus S_j$ admet $|\mathbb{P}^1(k)| = q + 1$ sous-modules isomorphes à S_i et pour chacun le quotient résultant est isomorphe à $S_i \oplus S_j$. Au contraire, $S_i \oplus M$ admet un unique sous-module isomorphe à S_i (le noyau de l'application $h : V_i \rightarrow V_j$), et le quotient résultant est isomorphe à M . On en déduit cette fois

$$1_{S_i \oplus S_j} \star 1_{S_i} = q^{\frac{1}{2}}(q+1) 1_{S_i^{\oplus 2} \oplus S_j},$$

$$1_M \star 1_{S_i} = q^{\frac{1}{2}} 1_{S_i \oplus M}$$

puis

$$1_{S_j} \star 1_{S_i}^2 = q^{\frac{1}{2}}(q+1) 1_{S_i^{\oplus 2} \oplus S_j},$$

$$1_{S_i} \star 1_{S_j} \star 1_{S_i} = (q+1)1_{S_i^{\oplus 2} \oplus S_j} + 1_{S_i \oplus M}.$$

Un calcul similaire donne

$$1_{S_i}^2 \star 1_{S_j} = q^{-\frac{1}{2}}(q+1)(1_{S_i^{\oplus 2} \oplus S_j} + 1_{S_i \oplus M})$$

d'où l'on tire aisément la relation (7) pour $E_i = 1_{S_i}, E_j = 1_{S_j}$.

a. En un sens précis, cf. [8].

Se laissant guider par l'analogie courbes-carquois, il est naturel de conjecturer l'existence, pour chaque genre $g \geq 0$, d'une algèbre de Lie \mathbb{Z}^2 -graduée \mathfrak{g}_g dont le caractère $\sum_{r,d} \dim \mathfrak{g}_{r,d} w^r z^d$ serait donné par les termes constants des polynômes $A_{g,r}$. Et pour construire une telle algèbre de Lie, il est tout aussi naturel d'étudier l'algèbre de Hall des courbes projectives lisses définies sur les corps finis. Comme nous allons nous efforcer de l'illustrer dans le prochain paragraphe, on obtient ainsi des algèbres (nouvelles dès que $g \geq 1$) fort intéressantes.

6. Algèbres de Hall de courbes; les cas de genre zéro et un

La définition des algèbres de Hall s'étend sans difficulté au cadre des fibrés vectoriels (ou faisceaux cohérents) sur une courbe projective lisse X définie sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. On pose ainsi

$$H_X[r, d] = \{f : \mathcal{M}_{r,d} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp}(f) < \infty\},$$

$$H_X = \bigoplus_{r,d} H_X[r, d]$$

où $\mathcal{M}_{r,d}$ désigne l'ensemble des faisceaux cohérents de rang r et degré d sur X (à isomorphisme près). La multiplication est encore définie par (5). Nous renvoyons à l'article fondateur [20] de Kapranov dans lequel les algèbres de Hall des courbes sont considérées pour la première fois, et où le lecteur trouvera une traduction littérale en termes de la théorie des fonctions automorphes sur les corps de fonctions, pour les groupes $GL(r)$.

Notons $H_X^{sph} \subset H_X$ la sous-algèbre engendrée par les fonctions caractéristiques

$$1_{Pic^l} = \sum_{\mathcal{L} \in Pic^l} 1_{\mathcal{L}}, \quad 1_{0,d} = \sum_{\substack{\tau \text{ de torsion} \\ \text{deg}(\tau)=d}} 1_{\tau}.$$

Ces générateurs vérifient toujours une famille de relations algébriques (connues dans la théorie des

formes automorphes comme *équation fonctionnelle des séries d'Eisenstein et relations de Hecke*); pour écrire ces relations il est pratique d'introduire les fonctions génératrices

$$E(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} 1_{Pic^l} z^l, \quad \psi(z) = \sum_{d \geq 0} 1_{0,d} z^d.$$

On a alors

$$\zeta_X(s/t)E(t) \star E(s) = \zeta_X(t/s)E(s) \star E(t) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \psi(s) \star E(t) &= \zeta_X(q^{-\frac{1}{2}}s/t)E(t) \star \psi(s), \\ \psi(z) \star \psi(w) &= \psi(w) \star \psi(z) \end{aligned} \quad (9)$$

où

$$\zeta_X(z) = \frac{\prod_{i=1}^{2g} (1 - z\sigma_i)}{(1-z)(1-qz)}$$

est la fonction zêta de X .

On peut montrer que lorsque $g = 0$, (8) et (9) fournissent une présentation complète de H_X^{sph} par générateurs et relations. Or comme l'a remarqué Kapranov, ces mêmes relations apparaissent dans la théorie des groupes quantiques, dans la présentation due à Drinfeld des algèbres quantiques de lacets. En particulier, il en déduit le théorème suivant, (redémontré directement par la suite par Baumann et Kassel) :

Théorème 8 (Kapranov [20], Baumann-Kassel [2]). *L'algèbre de Hall sphérique $H_{\mathbb{P}^1}^{sph}$ est isomorphe au groupe quantique $U_q^+(L\mathfrak{sl}_2)$, où $L\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.*

5. Un exemple de calcul dans l'algèbre de Hall de \mathbb{P}^1 .

Établissons, à titre d'exemple, une des relations apparaissant comme coefficient de (8) dans le cas de la courbe $X = \mathbb{P}^1$. Calculons les produits $1_{\mathcal{O}(i)} \star 1_{\mathcal{O}(j)}$ pour $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. Comme $\text{Ext}^1(\mathcal{O}(0), \mathcal{O}(1)) = \{0\}$, toute extension $0 \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O}(0) \longrightarrow 0$ est scindée, i.e. $\mathcal{V} = \mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(1)$. Comme $\text{Hom}(\mathcal{O}(1), \mathcal{V}) = k$, il n'existe qu'un seul sous-module de \mathcal{V} isomorphe à $\mathcal{O}(1)$. On en déduit que $1_{\mathcal{O}(0)} \star 1_{\mathcal{O}(1)} = q1_{\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(1)}$. Le même raisonnement montre que

$$1_{\mathcal{O}(i)} \star 1_{\mathcal{O}(j)} = q^{(j+1-i)/2} 1_{\mathcal{O}(i) \oplus \mathcal{O}(j)}$$

si $i < j$. On a aussi $Ext^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(0)) = \{0\}$ ce qui implique que là encore toute extension $0 \rightarrow \mathcal{O}(0) \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0$ est scindée, mais à présent $Hom(\mathcal{O}(0), \mathcal{V}) = \mathbf{k}^3$ et il y a $|\mathbf{k}^2| = q^2$ sous-faisceaux de \mathcal{V} isomorphes à $\mathcal{O}(0)$, dont le quotient associé est isomorphe à $\mathcal{O}(1)$. On en déduit que $1_{\mathcal{O}(1)} \star 1_{\mathcal{O}(0)} = q^2 1_{\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(1)}$. On a de même $1_{\mathcal{O}(0)} \star 1_{\mathcal{O}(-1)} = q^2 1_{\mathcal{O}(0) \oplus \mathcal{O}(-1)}$ et il est facile de voir que $1_{\mathcal{O}(0)}^2 = q^{\frac{1}{2}}(q+1) 1_{\mathcal{O}(0) \oplus 2}$. Pour finir, calculons $1_{\mathcal{O}(1)} \star 1_{\mathcal{O}(-1)}$. Ici on a $Ext^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(-1)) = \mathbf{k}$ et il existe une (unique) extension non scindée

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O}(0)^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0.$$

On a $Hom(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(0)^{\oplus 2}) = \mathbf{k}^2 \otimes \mathbf{k}^2$ donc il y a $|\mathbb{P}(\mathbf{k}^2 \otimes \mathbf{k}^2)|$ sous-faisceaux \mathcal{F} de $\mathcal{O}(0)^{\oplus 2}$ isomorphes à $\mathcal{O}(-1)$. Pour que le quotient $\mathcal{O}(0)^{\oplus 2} / \mathcal{F}$ soit sans torsion (i.e. isomorphe à $\mathcal{O}(1)$), il faut et il suffit que le point correspondant de $\mathbb{P}(\mathbf{k}^2 \otimes \mathbf{k}^2)$ ne soit pas inclus dans un des plans $L \otimes \mathbf{k}^2$, pour L une droite de \mathbf{k}^2 , ce qui exclut $|\mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{k})| = (q+1)^2$ possibilités. Au final, on trouve

$$1_{\mathcal{O}(-1)} \star 1_{\mathcal{O}(1)} = q^{\frac{5}{2}} 1_{\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)} + q^{\frac{1}{2}}(q^2 - 1) 1_{\mathcal{O}(0) \oplus 2}.$$

On laissera au lecteur le soin de déduire des calculs ci-dessus les relations suivantes dans $\mathbf{H}_{\mathbb{P}^1}^{sph}$:

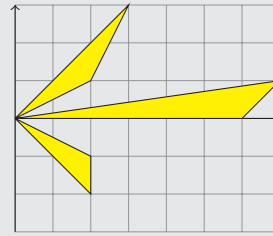
$$q 1_{\mathcal{O}(0)} \star 1_{\mathcal{O}(1)} = 1_{\mathcal{O}(1)} \star 1_{\mathcal{O}(0)},$$

$$q 1_{\mathcal{O}(-1)} \star 1_{\mathcal{O}(1)} - 1_{\mathcal{O}(0)}^2 = 1_{\mathcal{O}(1)} \star 1_{\mathcal{O}(-1)} - q 1_{\mathcal{O}(0)}^2.$$

Passons à présent au cas d'une courbe X de genre un. L'algèbre de Hall sphérique \mathbf{H}_X^{sph} a été étudiée dans [4]. Les relations quadratiques (8, 9) ne sont plus suffisantes ici, il faut rajouter des relations cubiques (cf. [30]). La présentation de loin la plus utile, néanmoins, fait intervenir un nouveau type de combinatoire, liée aux chemins convexes et aux triangles dans le plan \mathbb{Z}^2 (cf. encadré 6.).

6. Présentation combinatoire de l'algèbre de Hall elliptique. Soit X une courbe elliptique et σ_1, σ_2 ses nombres de Weil. L'algèbre \mathbf{H}_X^{sph} contient, et est engendrée par les fonctions caractéristiques $1_{r,d}^{ss}$ des faisceaux semistables de rang r et degré d . En termes

de ces générateurs^a on obtient la présentation suivante. On appellera *quasi-primitif* un triangle entier dans \mathbb{Z}^2 sans point intérieur. Pour $x = (r, d)$ on pose $deg(x) = pgcd(r, d)$.



Triangles quasi-primitifs

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$c_n = (\sigma_1^n - \sigma_1^{-n})(\sigma_2^n - \sigma_2^{-n})[n]_q/n.$$

Soit $\mathcal{E}_{\sigma_1, \sigma_2}^+$ l'algèbre associative engendrée par des éléments $\{t_{r,d} \mid r > 0, d \in \mathbb{Z} \text{ ou } r = 0, d > 0\}$ soumis aux relations suivantes :

- i) $[t_x, t_y] = 0$ si $0, x, y$ sont alignés,
- ii) si $deg(x) = 1$ et si $0, x, x+y$ forment un triangle quasi-primitif alors

$$[t_x, t_y] = \epsilon_{x,y} c_{deg(y)} \frac{\theta_{x+y}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

où les éléments θ_z sont déterminés par les relations suivantes

$$1 + \sum_{l \geq 1} \theta_{lz_0} s^l = \exp \left((q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \sum_{l \geq 1} t_{lz_0} s^l \right)$$

pour tout z_0 de degré un.

Théorème 9 (Burban-S. [4]). Il existe un isomorphisme canonique d'algèbres $\mathcal{E}_{\sigma_1, \sigma_2}^+ \simeq \mathbf{H}_X^{sph}$.

a. À un petit changement de variables près.

Grâce à cette présentation combinatoire, on peut facilement construire une base de \mathbf{H}_X^{sph} ainsi qu'une identification d'espaces vectoriels entre \mathbf{H}_X^{sph} et l'algèbre des polynômes symétriques en deux jeux infinis de variables

$$\mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty}$$

où le groupe symétrique infini \mathfrak{S}_∞ opère par permutation simultanée des variables $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$. Cette

algèbre de fonctions symétriques joue un rôle très important en combinatoire depuis quelques années (cf. [3]). L'algèbre de Hall elliptique H_X^{sph} en fournit une déformation quantique (à deux paramètres σ_1, σ_2) intéressante, fortement liée à la théorie des polynômes de Macdonald et des algèbres de Hecke affines doubles (algèbres de Cherednik). Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 10 (S.-Vasserot). *Soit X une courbe elliptique définie sur un corps fini k , et soient σ_1, σ_2 les nombres de Weil de X . L'algèbre de Hall sphérique H_X^{sph} est isomorphe à l'algèbre de Cherednik sphérique $SH_{\sigma_1, \sigma_2}^+(GL(\infty))$.*

Depuis son introduction, l'algèbre de Hall elliptique a été utilisée en théorie des nœuds (invariants de nœuds toriques [10], algèbre skein des tores [22]), en physique mathématique (conjecture AGT, cf. [34], [26]), en géométrie algébrique (schéma de Hilbert de points sur A^2 , [36], [25]) ainsi que dans la théorie de la catégorification ([5]).

Que peut-on dire des algèbres de Hall sphériques associées à des courbes de genre supérieur ? Ici, non seulement les relations (8, 9) ne sont plus suffisantes, mais la structure de l'algèbre de Hall sphérique, i.e. le nombre minimal de relations supplémentaires, dépend de manière subtile des nombres de Weil $\{\sigma_i, i = 1, \dots, 2g\}$ (en particulier des relations de \mathbb{Z} -dépendance linéaire entre les phases $\ln(\sigma_i)$) ! On peut néanmoins toujours donner un modèle algébrique pour H_X^{sph} sous la forme d'algèbre de battage, cf. [35].

7. Algèbres de Lie associées aux courbes

Bien que l'on ne sache pour l'instant que peu de choses concernant la structure des algèbres de Hall des courbes de genre $g > 1$, on dispose d'analogues très satisfaisants du théorème de Ringel (Thm. 7) dans le cadre des fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^1 ou sur une courbe elliptique. Qu'en est-il du rapport avec le polynôme de Kac $A_{g,r}$, i.e. d'un éventuel analogue du Théorème 6 ? Dès que $g > 0$ il existe des fibrés absolument indécomposables en tout rang et degré, donc l'analogue du théorème de Kac (ou de Gabriel) n'est pas intéressant. Par contre, pour $g = 0$, H_X^{sph} est une déformation de l'algèbre enveloppante¹¹ de l'algèbre de lacets $Ls\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ et pour $g = 1$, H_X^{sph} est une déformation de l'algèbre enve-

loppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u} = \bigoplus_{r,d} \mathbb{C}u_{r,d}$ munie du crochet de Lie $[u_{r,d}, u_{s,l}] = (rl - sd)u_{r+s, d+l}$. Représentons les dimensions des espaces gradués de ces deux algèbres de Lie en fonction du rang (en abscisse) et du degré (en ordonnée); on se restreint à $r > 0$ ou $r = 0, d > 0$:

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \vdots \\ \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdots \\ \cdot 1 \cdot 0 \\ \cdot 1 \cdot 0 \\ \vdots \end{array} &
 \begin{array}{c} \vdots \\ \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ g = 1: \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots \\ \cdot 1 \cdot 1 \\ \cdot 1 \cdot 1 \\ \vdots \end{array}
 \end{array}$$

L'analogue du théorème du terme constant est bien vérifié pour $g = 0, 1$! En effet, $A_{0,r} = 1$ si $r = 1$ et $A_{0,r} = 0$ si $r > 1$ et $A_{1,r} = 1 - z_1 - z_2 + q$ pour tout r (cf. (2)). En genre supérieur, on ne sait pas encore construire une algèbre de Lie \mathfrak{g}_g dont H_X^{sph} serait une déformation (à $g + 1$ paramètres) de l'algèbre enveloppante; on peut néanmoins prédire que les dimensions graduées d'une telle algèbre doivent être données par les $A_{g,r}(0, \dots, 0)$; cela donne, pour $r \leq 3$ les multiplicités suivantes :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \cdot 1 \cdot 1 \cdot g \cdot 2g^2 - g \\
 \cdot 1 \cdot 1 \cdot g \cdot 2g^2 - g \\
 g: \cdot 1 \cdot 1 \cdot g \cdot 2g^2 - g \cdots \\
 \cdot 1 \cdot g \cdot 2g^2 - g \\
 \cdot 1 \cdot g \cdot 2g^2 - g \\
 \vdots
 \end{array}$$

Terminons ce paragraphe par le surprenant énoncé suivant, qui résulte d'un calcul direct à partir des formules explicites pour les polynômes de Kac, et qui illustre bien la profonde analogie entre courbes et carquois :

Théorème 11 (Rodriguez-Villegas). *Soit $g \geq 0$ et S_g le carquois à un sommet et g boucles. On a $A_{S_{g,r}}(1) = A_{g,r}(0)$.*

11. ...de la moitié positive...

8. Conclusion et pointeurs

Le lecteur s'en sera rendu compte : la structure des algèbres de Hall des courbes (sphériques ou pas) est encore loin d'être bien comprise. Quelle est la structure de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_g qui soutend H_X^{sph} pour un g arbitraire? En existe-t-il une construction géométrique reposant sur la géométrie des espaces de modules de fibrés sur X ? Que peut-on dire des représentations de \mathfrak{g}_g et de leur lien avec les dits espaces de modules? Si cette algèbre de Lie \mathfrak{g}_g correspond au terme constant $A_{g,r}(0, \dots, 0)$ du polynôme de Kac, quelle est la struc-

ture algébrique associée à *tout* le polynôme de Kac $A_{g,r}$? Il existe plusieurs réponses, parfois conjecturelles, à ces questions et nous renvoyons le lecteur intéressé à [32]. On est en droit de se poser une autre question : les polynômes de Kac $A_{g,r}$ contiennent-ils une information géométrique plus tangible que le nombre de fibrés indécomposables? La réponse est « oui! » : ils sont égaux aux polynômes de Poincaré des *espaces de modules de Hitchin* et des *variétés de représentations de groupe fondamental* associés à la courbe et aux groupes $GL(n)$; nous renvoyons ici le lecteur à l'article [31] et au survol [14].

Références

- [1] M. F. ATIYAH. « Vector bundles over an elliptic curve ». *Proceedings of the London Mathematical Society* **3**, n° 1 (1957), p. 414-452.
- [2] P. BAUMANN. « The Hall algebra of the category of coherent sheaves on the projective line ». *J. Reine Angew. Math* **533** (2001), p. 207-233.
- [3] F. BERGERON et al. « Some remarkable new plethystic operators in the theory of Macdonald polynomials ». *J. Comb.* **7**, n° 4 (2016), p. 671-714.
- [4] I. BURBAN et O. SCHIFFMANN. « On the Hall algebra of an elliptic curve, I ». *Duke Math. J.* **161**, n° 7 (2012), p. 1171-1231.
- [5] S. CAUTIS et al. « The elliptic Hall algebra and the deformed Khovanov Heisenberg category ». *Selecta Math. (N.S.)* **24**, n° 5 (2018), p. 4041-4103.
- [6] V. CHARI et A. PRESSLEY. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, p. xvi+651.
- [7] W. CRAWLEY-BOEVEY et M. VAN DEN BERGH. « Absolutely indecomposable representations and Kac-Moody Lie algebras ». *Invent. Math.* **155**, n° 3 (2004). With an appendix by Hiraku Nakajima, p. 537-559.
- [8] V. G. DRINFELD. « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ». *Algebra i Analiz* **2**, n° 4 (1990), p. 149-181.
- [9] P. GABRIEL. « Unzerlegbare darstellungen I ». *Manuscripta mathematica* **6**, n° 1 (1972), p. 71-103.
- [10] E. GORSKY et A. NEGUT. « Refined knot invariants and Hilbert schemes ». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **104** (2015), p. 403-435.
- [11] J. A. GREEN. « Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups ». *Inventiones mathematicae* **120**, n° 1 (1995), p. 361-377.
- [12] A. GROTHENDIECK. « Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann ». *American Journal of Mathematics* **79**, n° 1 (1957), p. 121-138.
- [13] G. HARDER et M. S. NARASIMHAN. « On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves ». *Mathematische Annalen* **212**, n° 3 (1975), p. 215-248.
- [14] T. HAUSEL. « Global topology of the Hitchin system ». In : *Handbook of moduli. Vol. II. Vol. 25. Adv. Lect. Math. (ALM)*. Int. Press, Somerville, MA, 2013, p. 29-69.
- [15] T. HAUSEL. « Kac's conjecture from Nakajima quiver varieties ». *Inventiones mathematicae* **181**, n° 1 (2010), p. 21-37.
- [16] T. HAUSEL, E. LETELLIER et F. RODRIGUEZ-VILLEGAS. « Positivity for Kac polynomials and DT-invariants of quivers ». *Annals of Mathematics* (2013), p. 1147-1168.
- [17] J. HUA. « Counting representations of quivers over finite fields ». *Journal of Algebra* **226**, n° 2 (2000), p. 1011-1033.
- [18] V. G. KAC. « Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory ». *Inventiones mathematicae* **56**, n° 1 (1980), p. 57-92.
- [19] V. G. KAC. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Second. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [20] M. M. KAPRANOV. « Eisenstein series and quantum affine algebras ». In : vol. 84. 5. Algebraic geometry, 7. 1997, p. 1311-1360.
- [21] A. MELLIT. « Poincaré polynomials of moduli spaces of Higgs bundles and character varieties (no punctures) ». *arXiv preprint arXiv:1707.04214* (2017).

- [22] H. MORTON, P. SAMUELSON et al. « The HOMFLYPT skein algebra of the torus and the elliptic Hall algebra ». *Duke Mathematical Journal* **166**, n° 5 (2017), p. 801-854.
- [23] H. NAKAJIMA et al. « Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras ». *Duke Mathematical Journal* **76**, n° 2 (1994), p. 365-416.
- [24] H. NAKAJIMA et al. « Quiver varieties and Kac-Moody algebras ». *Duke Mathematical Journal* **91**, n° 3 (1998), p. 515-560.
- [25] A. NEGUT. « Moduli of flags of sheaves and their K -theory ». *Algebr. Geom.* **2**, n° 1 (2015), p. 19-43.
- [26] A. NEGUT. « The q -AGT-W relations via shuffle Algebras ». *arXiv preprint arXiv:1608.08613* (2016).
- [27] A. OKOUNKOV. « On some interesting Lie algebras ». *Symmetries in Mathematics and Physics II, IMPA* (2013). <http://video.impa.br>.
- [28] S. PUMPLÜN. « Vector bundles and symmetric bilinear forms over curves of genus one and arbitrary index ». *Mathematische Zeitschrift* **246**, n° 3 (2004), p. 563-602.
- [29] C. M. RINGEL. « Hall algebras and quantum groups ». *Inventiones mathematicae* **101**, n° 1 (1990), p. 583-591.
- [30] O. SCHIFFMANN. « Drinfeld realization of the elliptic Hall algebra ». *Journal of Algebraic Combinatorics* **35**, n° 2 (2012), p. 237-262.
- [31] O. SCHIFFMANN. « Indecomposable vector bundles and stable Higgs bundles over smooth projective curves ». *Annals of Mathematics* (2016), p. 297-362.
- [32] O. SCHIFFMANN. « Kac polynomials and Lie algebras associated to quivers and curves ». *arXiv preprint arXiv:1802.09760* (2018).
- [33] O. SCHIFFMANN. « Lectures on Hall algebras ». In : *Geometric methods in representation theory. II*. Vol. 24. Sémin. Congr. Soc. Math. France, Paris, 2012, p. 1-141.
- [34] O. SCHIFFMANN et E. VASSEROT. « Cherednik algebras, W -algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on \mathbb{A}^2 ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* **118**, n° 1 (2013), p. 213-342.
- [35] O. SCHIFFMANN et E. VASSEROT. « Hall algebras of curves, commuting varieties and Langlands duality ». *Mathematische Annalen* **353**, n° 4 (2012), p. 1399-1451.
- [36] O. SCHIFFMANN, E. VASSEROT et al. « The elliptic Hall algebra and the K -theory of the Hilbert scheme of \mathbb{A}^2 ». *Duke Mathematical Journal* **162**, n° 2 (2013), p. 279-366.
- [37] O. SCHIFFMANN et E. VASSEROT. « The elliptic Hall algebra, Cherednik Hecke algebras and Macdonald polynomials ». *Compositio Mathematica* **147**, n° 1 (2011), p. 188-234.



Olivier SCHIFFMANN

Université Paris-Saclay
 Olivier.Schiffmann@math.u-psud.fr

Olivier Schiffmann est directeur de recherches au CNRS et à l'université Paris-Saclay (nom de jeune fille : université Paris-Sud). Il travaille dans le domaine de la théorie des représentations, avec un penchant pour des méthodes géométriques et combinatoires ; en fait, ce qu'il aime vraiment, c'est compter.

Jean Leray et Bourbaki : exemple d'une lutte de pouvoir sur fond d'avancement de carrière à la fin des années 1930

• G. RICOTIER

Introduction

Dans le présent article, je reviens sur des éléments de contexte datant de la fin des années 1930 qui contribuent à expliquer de manière décisive la scission des membres fondateurs du groupe Nicolas Bourbaki avec certains de leurs aînés, à commencer par le mathématicien Gaston Julia, ce dernier occupant alors une position dominante dans le champ mathématique. Les circonstances de cette distanciation nécessitent de revenir sur des dissensions opposant les fondateurs de Bourbaki au mathématicien Jean Leray, dans le cadre du *séminaire Julia* (1933-1939)¹ et de candidatures à des postes universitaires.

Les travaux des historiennes des mathématiques Hélène Gispert et Juliette Leloup ont montré que l'entre-deux-guerres a principalement été décrit, jusqu'à une période très récente, à travers deux types de sources : les « récits, souvent autobiographiques, de quelques-unes des plus célèbres figures de l'après seconde guerre mondiale » et des « discours, dont la fonction est par nature hagiographique, [qui] ont été prononcés lors de différents jubilé ou cérémonies en l'honneur de personnages importants des mathématiques de l'entre-deux-guerres ou devenus tels juste après la seconde guerre »². En partant à la recherche des « patrons » de la scène mathématique française, Hélène Gispert et Juliette Leloup ont proposé une vision plus complexe, plus diverse et moins sévère

que celle véhiculée par Bourbaki – notamment au sujet du « vide générationnel » causé par la guerre ou de l'absence d'ouverture aux mathématiques étrangères³.

Des divergences intéressantes ont également pu être relevées parmi les souvenirs de protagonistes de l'époque concernant l'initiative et l'organisation du séminaire Julia et les débuts du projet bourbachique⁴. Il ne s'agit pas ici d'étudier à nouveaux frais celles-ci, mais plutôt d'en exposer un peu mieux le contexte à l'aide d'un témoignage inédit, à savoir une lettre d'André Weil à Jean Coulob datée du 24 mai 1938⁵.

Comme nous allons le voir, cette lettre permet de mieux comprendre pourquoi les membres fondateurs de Bourbaki ne participent plus au séminaire Julia durant l'année 1938-1939 et elle aide à cerner d'autres changements notables dans l'organisation de ce séminaire. Cette lettre permet de contextualiser le rôle joué par Jean Leray, normalien de la même génération que les membres fondateurs de Bourbaki et également orateur du séminaire Julia, dans la mise en œuvre de tels changements. Elle documente enfin toute une série de dissensions entre les membres fondateurs de Bourbaki et Jean Leray, qui fut un participant actif aux premières réunions proto-bourbachiques avant de se séparer rapidement du projet.

Dans une première partie, je reviens succinctement sur l'historique du séminaire Julia ainsi

1. Gaston Julia – qui est alors professeur à la faculté des sciences de l'université de Paris – met en place à partir de 1933 un séminaire thématique animé principalement par des jeunes mathématiciens issus de l'École normale supérieure. Le livre [4] regroupe une présentation du séminaire et de son contexte, ainsi que les textes des exposés.

2. Voir, respectivement, [14, pp. 40 et 41].

3. Catherine Goldstein arrive à des conclusions similaires dans son étude consacrée à la théorie des nombres en France durant l'entre-deux-guerres [15]. Pour une autre analyse méthodologiquement rigoureuse sur les notes historiques du traité bourbachique qui ont participé à la construction de cette image, voir [2]. D'autre part, [1] analyse les conséquences de la Première Guerre mondiale sur les normaliens et les mathématiques en France durant l'entre-deux-guerres.

4. Voir [14, pp. 88-89] pour une critique du témoignage de René Garnier, ainsi que [4, Chapitre 5] pour une présentation de différents témoignages d'André Weil, Gaston Julia, Claude Chevalley, Paul Dubreil, Claude Chevalley et des façons de raconter la même histoire.

5. Elle fut déposée sous pli fermé par les soins de Jean Coulob aux *Archives de l'Académie des Sciences* dans le dossier biographique d'André Weil en 1984 et elle ne fut ouverte qu'en 2009. Elle est actuellement conservée sous la cote 1J52. Je remercie Christophe Eckes de me l'avoir communiquée et de m'avoir aidé à l'analyser.

que son changement notable d'orientation en 1938. J'aborde dans une deuxième partie les problématiques auxquelles sont soumis ces « meilleurs des jeunes [mathématiciens de] l'ÉNS »⁶ dans leur carrière académique. En parallèle, je rappelle dans une troisième partie les débuts du groupe Nicolas Bourbaki, en mettant l'accent sur des protagonistes tels que Paul Dubreil, Jean Leray, Szolem Mandelbrojt et Jean Coulomb. Enfin, dans une quatrième partie, je fournis les éléments de contexte permettant d'éclairer la rupture entre Bourbaki et Gaston Julia, sur fond de dissensions entre les membres fondateurs du groupe et Jean Leray, en m'appuyant sur la lettre d'André Weil à Jean Coulomb de mai 1938.

1. Des débuts du séminaire Julia à un changement d'orientation notable en 1938

1.1 – Les premières années du séminaire Julia

Entre la fin de la Première Guerre mondiale et les années 1930, Gaston Julia connaît une carrière fulgurante qui en fait l'un des principaux patrons des mathématiques de l'entre-deux-guerres. Il soutient sa thèse en décembre 1917, obtient le grand prix des sciences mathématiques de l'Académie des sciences en 1918 et est chargé du cours Peccot au Collège de France en 1918 et 1920⁷. Il est nommé professeur à la faculté des sciences de l'université de Paris en 1925. Au moment de la mise en place du séminaire Julia (1933-1939), la « reconnaissance institutionnelle et internationale » de Julia est « au plus haut »⁸. En effet, alors qu'il est

professeur à la Faculté des sciences de Paris, il cumule, à partir de 1937, ce poste avec celui de professeur de géométrie à l'École polytechnique, succédant ainsi à Maurice d'Ocagne. Entre-temps, il est élu membre de l'Académie des sciences le 5 mars 1934 en remplacement de Paul Painlevé, décédé le 29 octobre 1933. [13, p. 274]

Les mathématiciens sollicités par Gaston Julia en 1933 pour participer à son séminaire partagent un intérêt scientifique pour les thématiques qui y sont traitées, mais ils ne peuvent pas manquer de voir là une occasion de se rapprocher davantage d'une figure alors dominante dans le champ mathématique.

Gaston Julia précise les objectifs de ce séminaire dans une lettre circulaire du 8 mai 1933 : « [l]e but poursuivi serait, d'une part de nous mettre mutuellement en état de suivre les recherches modernes, d'autre part de provoquer de nouvelles recherches et, éventuellement, de les exposer »⁹. Il s'agit donc, d'une part, de proposer des exposés élémentaires sur des thématiques contemporaines, d'autre part de présenter des travaux originaux ou d'annoncer des articles ou monographies à venir¹⁰.

Une nouvelle lettre circulaire du 7 juin 1933 annonce le programme du séminaire pour l'année 1933-1934 : « Groupes finis abstraits. Groupes finis linéaires. Algèbre hypercomplexe. ». Figurent également dans cette lettre la date retenue pour la première séance – le lundi 13 novembre 1933 – ainsi que les trois premiers orateurs prévus, à savoir André Weil, Paul Dubreil et Claude Chevalley. Dans une note, Michèle Audin explique :

Le secrétaire a ajouté à la main les listes de ceux à qui la circulaire a été transmise (Boos, Coulomb, Delsarte, Dieu-donné, Dubourdieu, Favard, H. Cartan, Marty, Poncin, de Possel) et de ceux qui ont été prévenus (Weil, Dubreil, Chevalley, Hocquenghem, Blanc, Leray, Ortens (il s'agit certainement d'Émile Ostenc), Pailloux, Bourion), ainsi que la date d'envoi. [4, p. 59]

Ce nouveau séminaire s'adresse à d'anciens élèves de l'ÉNS¹¹ et un sous-ensemble se dégage un peu plus précisément quand il s'agit des orateurs. En effet, lors du jubilé scientifique d'Élie Cartan du 18 mai 1939, Gaston Julia déclare que ceux qui ont collaboré au séminaire sont les « meilleurs des jeunes gens que nous [Élie Cartan et lui, Gaston Julia] avons connus à l'École normale »¹². Ces der-

6. Reprise d'une expression de Gaston Julia donnée dans la sous-section 1.1.

7. Pour plus d'informations sur le début de carrière de Gaston Julia et sa blessure de guerre, voir [16, pp. 22-25].

8. Voir [4, p. 39].

9. Voir [4, p. 29].

10. Par exemple André Weil annonça, longtemps avant sa publication, la parution prochaine de ce qui deviendra [28], dans la bibliographie de l'exposé 2.J du 8 avril 1935.

11. Voir les courtes biographies à la fin de [4], Julia affirmant en outre lors de son jubilé scientifique qu'il s'agissait essentiellement de « [s]es anciens élèves », voir [18, p. 387] cité [14, pp. 87-88].

12. Voir [18, pp. 61-62], reproduit [4, p. 40].

niers se sont donc côtoyés à l'ÉNS ou au séminaire Hadamard¹³, sont parfois camarades de promotion, voire se lient d'amitié dans la durée. Mis à part Szolem Mandelbrojt, tous les membres du « comité rédacteur » du traité d'analyse établi lors de la deuxième réunion proto-bourbachique, à savoir Henri Cartan, Claude Chevalley, René de Possel, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Paul Dubreil, Jean Leray et André Weil,¹⁴ ont exposé dans le cadre du séminaire Julia entre 1933 et 1938. Avec Frédéric Marty¹⁵, ils sont également les seuls orateurs des promotions 1929 et précédentes de l'ÉNS à avoir un poste de professeur ou de maître de conférences dans une université des départements en 1938.

1.2 – Le changement d'orientation du séminaire Julia en 1938

La première année d'existence du séminaire Julia fut donc consacrée à la théorie des groupes et aux algèbres, une thématique vraisemblablement retenue lors de la réunion d'organisation du 15 mai 1933¹⁶. Pour la deuxième année, le programme est étudié le 30 avril 1934 après un exposé de Claude Chevalley et il porte au final sur les espaces de Hilbert¹⁷. Alors que les réunions proto-bourbachiques débutent au cours du mois de décembre 1934, l'empreinte du groupe Bourbaki sur les orientations du séminaire Julia est manifeste jusqu'au printemps 1938. Ainsi, la troisième année du séminaire (1935-1936) est dévolue à la « Topologie » et Michèle Audin note à ce propos que « la topologie a été le point de rencontre, le lieu commun des protagonistes de Bourbaki ». S'agissant de l'année suivante (1936-1937), « il est assez probable que c'est [André Weil] qui a proposé le thème "travaux d'Élie Cartan" », ce qui concorde tout à fait avec ses intérêts mathématiques et son estime pour lui¹⁸. La cinquième année est dévolue aux « fonctions algébriques », l'objectif étant alors de « comprendre ce qui intéressait

André Weil à ce moment-là »¹⁹. En résumé, le rôle joué par les membres fondateurs de Bourbaki, et par André Weil en particulier, est indéniablement central dans le choix des thématiques traitées par les orateurs du séminaire Julia jusqu'en 1938.

Par contraste, la thématique retenue en 1938-1939, à savoir le « calcul des variations », s'avère beaucoup plus classique que l'algèbre abstraite et la topologie des années précédentes. L'analyse des archives du séminaire Julia fournie par Michèle Audin montre plus globalement un changement d'orientation à ce moment-là²⁰. Le « Séminaire de mathématiques » change de nom, devenant le « Cercle mathématique de l'École normale supérieure » ; il a lieu à l'ÉNS et non plus à l'IHP ; le public y est plus jeune et moins international ; enfin, les membres fondateurs de Bourbaki n'y donnent plus d'exposés. Michèle Audin a émis l'hypothèse²¹ que ce changement a pu s'opérer dès 1937, en raison d'opinions politiques ou scientifiques divergentes opposant les membres fondateurs de Bourbaki à Julia. Michèle Audin fait allusion à la participation de Julia au bicentenaire de l'université de Göttingen en juin 1937. Les festivités organisées pour cette occasion à Göttingen prirent la forme d'une autocélébration du régime nazi²².

Dans sa lettre à Jean Coulomb du 24 mai 1938, André Weil présente un point de vue bien différent. Il met en avant le rôle d'un autre protagoniste pour expliquer de tels changements, à savoir Jean Leray. Celui-ci était également un orateur du séminaire Julia et participa aux réunions proto-bourbachiques avant de s'en écarter dès le courant de l'année 1935. André Weil indique très explicitement à Jean Coulomb qu'à la suite de sa candidature malheureuse au Collège de France face à l'un des membres fondateurs de Bourbaki, à savoir Szolem Mandelbrojt, Jean Leray a fait en sorte que Gaston Julia limoge l'équipe Bourbaki lors des deux derniers exposés de l'année 1937-1938, qui se sont tenus les 2

13. Le séminaire Hadamard qui est mis en place dans les années 1910 et s'arrête lorsque Jacques Hadamard prend sa retraite en 1937, est dédié à l'« analyse de mémoires » ; les mathématiciens qui y participent sont d'âges et de nationalités variés, voir [4, pp. 7-27] et <https://images.math.cnrs.fr/Le-seminaire-Hadamard.html?lang=fr> pour plus d'informations à propos du séminaire Hadamard. Tous les urls mentionnés ici ont été sauvegardés sur <https://archive.org/web/>.

14. Voir [7, cote delta002].

15. Frédéric Marty est décédé en 1940. Pour une courte biographie, voir [4, p. 163].

16. Voir [4, pp. 29-30].

17. Voir [4, pp. 66-73].

18. Comme le prouvent ses commentaires [29, pp. 522, 530 et 531] sur son étude des travaux d'Élie Cartan entre 1932 et 1935, ou la dédicace au début de son livre [28], qu'il voulait offrir le 18 mai 1939 à l'occasion du jubilé scientifique d'Élie Cartan, voir [29, p. 549].

19. Voir [4, pp. 76, 84 et 88].

20. Voir [4, pp. 47 et 116].

21. Voir [4, p. 115].

22. Voir [13, pp. 276-289], et toute la première section de cet article pour une mise en contexte plus globale des activités de Gaston Julia dans cette période.

et 16 mai 1938. D'après la lettre de Weil, l'exposé du 2 mai a été prononcé par Claude Chevalley²³, celui du 16 mai par Charles Pisot, lequel participera au congrès Bourbaki de Dieulefit de septembre 1938 en tant que « chrysalide »²⁴.

Cette lettre d'André Weil à Jean Coulomb est, à ma connaissance, la seule trace venant documenter à ce jour le profond remaniement que subit le séminaire Julia au printemps 1938, d'où l'importance historique de cette pièce. Le fonds du groupe Bourbaki pour la période 1934-1952, qui est actuellement conservé aux Archives de l'Académie des sciences, ne fournit aucun élément sur les changements d'orientation du séminaire Julia en 1938. Comme André Weil et Henri Cartan travaillaient tous les deux à Strasbourg à ce moment-là, ils ne semblent avoir échangé aucune lettre durant cette période, ainsi qu'en atteste leur correspondance publiée par Michèle Audin en 2011. Les autres papiers d'André Weil disponibles aux Archives de l'Académie des sciences²⁵ ne contiennent pas de document évoquant cette rupture entre Gaston Julia et les membres fondateurs de Bourbaki. Enfin, la correspondance scientifique d'Henri Cartan déposée aux Archives de l'Académie des sciences au début des années 2010 est toujours en cours de traitement et n'est pas encore accessible aux historiens des mathématiques pour cette raison.

L'intervention de Jean Leray dans cette affaire mérite des explications, ce qui est l'objectif des prochaines sections. D'après cette lettre d'André Weil à Jean Coulomb de mai 1938, on peut d'ores et déjà souligner que les dissensions entre Bourbaki et Jean Leray sont bien antérieures à l'élection de ce dernier au Collège de France face à André Weil en février 1947²⁶. Elles remontent en réalité à la fin des années 1930 et elles sont étroitement liées aux conditions permettant à une élite normalienne d'accéder à un poste universitaire dans la capitale. Les rapports conflictuels entre Jean Leray et les membres fondateurs de Bourbaki doivent en conséquence être examinés à la lumière des luttes de pouvoir qui caractérisent le champ mathématique dans les années 1930.

2. L'ascension académique d'une élite normalienne à la fin de l'entre-deux-guerres

Afin de mieux cerner ces luttes de pouvoir, il est tout d'abord nécessaire de préciser les étapes qui marquent le parcours académique des premiers participants au séminaire Julia, jusqu'à l'éventuelle obtention d'un poste très prisé à la Faculté des sciences de Paris ou au Collège de France. L'implantation académique des membres fondateurs de Nicolas Bourbaki est par ailleurs caractérisée par la création dans les années 1930 d'une section de l'Est de la Société Mathématique de France regroupant des mathématiciens qui exercent dans les universités de Nancy et de Strasbourg. Elle s'explique enfin à travers les publications de l'institut mathématique de l'université de Strasbourg, un des organes de diffusion de travaux produits par des membres de Bourbaki à partir de 1937.

2.1 – De l'ÉNS à la reconnaissance académique dans la capitale : une ascension stratégique

Les premiers participants au séminaire Julia appartiennent à la fabrique de l'élite mathématique française de cette période et ont donc de bonnes chances d'accéder à l'excellence scientifique et aux prestiges académiques. Comme le souligne l'historien Christophe Charle, « le profil dominant et la réussite maximale » dans les disciplines les plus classiques et les plus théoriques des facultés de sciences sur la période 1870-1940 correspond à « [c]eux qui ont été reçus jeunes rue d'Ulm, ont obtenu des bourses ou des postes dans l'enseignement supérieur facilement et ont ainsi été titularisés en province avant 35 ans; ils ont alors de bonnes chances²⁷ d'être élus jeunes à la faculté des Sciences de Paris (ainsi 49,9% des normaliens professeurs à Paris avaient été titularisés avant 35 ans). » Pour pouvoir obtenir un poste à Paris et ainsi espérer accéder à l'excellence académique²⁸, les jeunes chercheurs en mathématiques de la fin de

23. Aucune trace écrite de cet exposé n'a été conservée dans les Archives du séminaire. Michèle Audin a émis l'hypothèse que cet exposé avait été prononcé par le mathématicien Frédéric Roger, alors secrétaire du Séminaire Julia [4].

24. Voir [7, cote deldi008]. La version écrite de l'exposé de Claude Pisot ne comporte aucune trace des propos de Gaston Julia rapportés par la lettre d'André Weil à Jean Coulomb du 24 mai 1938.

25. Il s'agit des fonds 45J et 33J.

26. S'agissant des circonstances de cette élection, voir [3, p. 556].

27. Les chances ne sont pas égales en fonction des universités de province, voir [10, pp. 152-153].

28. Voir [14, p. 56].

l'entre-deux-guerres devaient donc commencer par trouver, rapidement, un poste dans une université des départements²⁹.

Après quelques années de compétition, cette position était acquise, en 1938, pour la plupart des orateurs du séminaire Julia des cinq premières années et, en particulier, pour tous les participants à la deuxième réunion proto-bourbachique du 14 janvier 1935. Par exemple, André Weil est maître de conférences à la faculté des sciences de l'université de Strasbourg à partir de 1933, tandis que Jean Leray devient maître de conférences puis professeur à la faculté des sciences de Nancy à partir de 1937. L'usage veut qu'avant leur recrutement dans les universités des départements, les candidats effectuent des « tournées de visites » des membres des conseils de ces facultés³⁰. En effet, l'organisation juridique des nominations universitaires implique un très fort contrôle disciplinaire³¹ par les professeurs des facultés. Ils classent les candidats à un poste vacant puis le ministre de l'éducation, sur recommandation du *Conseil supérieur de l'Instruction publique*, entérine leur nomination³².

Il y a, par exemple, une compétition cordiale entre Henri Cartan et André Weil à la fin des années 1920 lors de la mise au concours d'un poste de chargé de cours à l'université de Strasbourg. Dans ses souvenirs en hommage à André Weil parus dans la *Gazette des mathématiciens* en 1999, Henri Cartan écrit à ce propos :

À cette époque les postes dans l'enseignement supérieur étaient peu nombreux et les nominations se faisaient à n'importe quel moment de l'année. C'est ainsi qu'un poste de « chargé de cours » fut annoncé pour le mois d'avril 1929 à la faculté des sciences de Strasbourg et Weil et moi-même eûmes tous deux l'idée d'y être candidat. Nous voici donc en compétition; j'avais a priori une chance de l'emporter, non pas pour mes mérites personnels, mais parce que Georges Valiron, professeur à Strasbourg, s'intéressait plus aux fonctions

d'une variable complexe qu'aux travaux d'André Weil. C'est ce qui arriva. [9]

Les premières lettres qui composent la correspondance entre Henri Cartan et André Weil documentent d'ailleurs de manière saisissante les démarches qu'ils devaient effectuer pour obtenir un poste dans une université des départements³³. Il n'en reste pas moins qu'à l'exception d'Eugène Blanc (ÉNS 1923), qui soutiendra sa thèse en 1938, les premiers orateurs du séminaire Julia ont tous entamé une carrière universitaire en province, parfois de longue date à l'image de Jean Delsarte qui est nommé à Nancy dès 1928, parfois beaucoup plus récemment à l'exemple de Claude Chevalley qui devient maître de conférences à Rennes en 1937. Certains de ces protagonistes se trouvent désormais en compétition en vue d'une position académique dans la capitale, leur consécration scientifique dépendant alors très directement de l'intervention des principaux patrons des mathématiques de l'entre-deux-guerres, parmi lesquels on peut citer Émile Borel, Élie Cartan, Gaston Julia, Henri Lebesgue, Émile Picard ou encore Henri Vil-
lat. La quatrième section de cet article montrera justement que les dissensions entre les membres fondateurs de Bourbaki d'une part, Gaston Julia et Jean Leray d'autre part, sont étroitement liées à la mise au concours de deux postes dans la capitale au printemps 1938, le premier au Collège de France, le second à la faculté des sciences de Paris.

2.2 – Deux marqueurs d'une ambition professionnelle en mathématiques : la section de l'Est de la SMF et les publications de l'institut mathématique de l'université de Strasbourg

Parallèlement à leur participation aux premières séances du séminaire Julia, certains membres fondateurs de Bourbaki sont également à l'origine d'une autre initiative, révélatrice de leur ambition mathématique et de leur implantation institutionnelle :

29. L'expression « université des départements » est employée pendant tout l'entre-deux guerres et sera remplacée ultérieurement par l'expression « université de province ».

30. On peut se référer à [3], c'est-à-dire la correspondance entre André Weil et Henri Cartan, dans le cas de l'université de Strasbourg ou du Collège de France.

31. Voir [23, pp. 179-191] pour une analyse précise du principe d'organisation en disciplines académiques : voir en particulier le tableau p. 191 pour les sections disciplinaires de la fin de l'entre-deux-guerres : les « sciences mathématiques et l'astronomie » comptent parmi les six sections disciplinaires composant les facultés des sciences.

32. Voir [24, pp. 162-163] pour plus d'informations à ce propos.

33. Voir la partie « Premières lettres 1928-1933 » (et les notes correspondantes) de [3].

Avec Delsarte, qui avait réussi à attirer à Nancy quelques-uns de nos camarades, nous nous occupâmes de mettre sur pied une branche de l'Est de la Société Mathématique de France, qui, jusqu'à la guerre, organisa des réunions alternativement à Nancy et à Strasbourg [...] [30, p. 125]

Il n'existe, à ma connaissance, aucune autre mention des activités de cette « branche de l'Est de la Société Mathématique de France », mis à part dans une partie *Vie de la société* d'un *Bulletin de la SMF* :

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SECTION DE L'EST (1³⁴).

Compte rendu de la Séance du 17 mai 1935 (Strasbourg)

La Section de l'Est de la Société Mathématique de France a tenu sa réunion constitutive à Strasbourg, le 17 mai 1935, à 15^h. Étaient présents : MM. Delsarte, Dubreil, M^{me} Dubreil-Jacotin, MM. Husson et Mentré, du groupe de Nancy; MM. H. Cartan, Cerf, Flamant, Roussel, Thiry, Weil, du groupe de Strasbourg. Le quorum fixé par le Conseil de la société étant rempli, la Section de l'Est de la Société Mathématique est déclarée constituée et procède à l'élection de son bureau. Sont élus, à l'unanimité : MM. Thiry, président; Husson, vice-président; Weil, secrétaire. On décide que la Section n'exigera, jusqu'à nouvel ordre, aucune cotisation spéciale, et qu'elle n'aura pas de trésorier. On décide également que la Section se réunira au moins deux fois par an, une fois à Nancy et une fois à Strasbourg.

Communications :

M. Delsarte fait une communication : *Sur un procédé général de développement des fonctions en série.*

M. Thiry fait une communication, accompagnée de projections et de démonstrations expérimentales : *Sur certains mouvements tourbillonnaires dans une lame fluide.*

La séance est levée à 18^h30^m. [21, volume 63 (1935), pp. 39-40]

La section de l'Est est la première section régionale à être mentionnée dans le Bulletin de la SMF³⁵, qui venait d'autoriser la création de telles sections lors de la réunion du Conseil du 16 janvier de la même année. Cela peut sembler anodin mais, en se saisissant de cette opportunité de créer une section de la SMF, ses principaux instigateurs, à savoir Jean Delsarte et André Weil, témoignent de leur volonté d'être présents sur la scène mathématique nationale. Notons par ailleurs qu'André Weil est, dès son adhésion à la SMF en 1933, « Sociétaire perpétuel »³⁶. Ce choix a pu être motivé par des considérations économiques ou administratives mais il montre surtout qu'André Weil souhaitait faire durablement partie de cette société savante.

À partir de 1937, Bourbaki se dote en outre d'un organe éditorial depuis Strasbourg. En effet, les *Publications de l'Institut de Mathématiques de l'université de Strasbourg* dont les douze premiers volumes paraissent entre 1920 et 1934³⁷, sont repris en main par le groupe, devenant les *Publications de l'Institut de mathématique [au singulier] de l'université de Strasbourg*. L'éditeur choisi est Hermann, soit le même que celui prévu pour les *Éléments de mathématique*, dont le premier fascicule est sous presse en 1939³⁸. Parmi les dix premiers volumes issus des *Publications de l'Institut de*

34. La note est la suivante : « Le Conseil de la Société Mathématique de France a décidé, dans sa séance du 16 janvier 1935, d'autoriser la création de sections régionales de la Société, à condition que ces sections réunissent au minimum dix membres de la Société; les comptes rendus des séances de ces sections pourront, après avis du Bureau, être publiés par le Bulletin de la Société. »

35. Il y aura également une section du Sud-Est, voir [21, volume 65 (1937), p. 38], qui deviendra le groupe Rhodanien, après l'ajout de l'université de Lausanne, en 1938, voir [21, volume 66 (1938), p. 43]. Ce sont les seules mentions de sections jusqu'à la Guerre, où le Bulletin de la SMF ne contient alors plus de partie *Vie de la société*.

36. Voir [21, volume 65 (1937), p. 17]. Le règlement intérieur précise que le sociétaire doit verser « une somme égale à vingt fois la cotisation annuelle s'il est âgé de moins de quarante ans », avec la possibilité de payer « par quart, à des intervalles ne dépassant pas une année », Voir [21, volume 63 (1935), p. 24]. Ce texte est validé le 9 janvier 1935, deux ans après l'adhésion d'André Weil. Le règlement avait précédemment été modifié le 11 janvier 1928, mais le texte n'avait pas été publié dans le Bulletin. De même, le montant de la cotisation annuelle complète n'est publié qu'en 1936 (mais nous supposons que le montant de la cotisation annuelle ou pour être membre à vie est du même ordre de grandeur). Puisqu'il donne son adresse rue Auguste Comte à Paris, André Weil doit être considéré comme un membre résidant. Nous ignorons cependant s'il était membre actif (cotisation annuelle complète de soixante-quinze francs) ou membre adhérent (moitié de la cotisation annuelle complète).

37. Regroupant alors des articles publiés par le personnel de l'Institut, ils sont notamment disponibles à la bibliothèque de mathématiques de Strasbourg sous les cotes 35615 à 35627.

38. Voir [6, p. 139] et [30, pp. 107-109].

mathématique de l'université de Strasbourg, neuf sont rédigés par des membres de Bourbaki, à savoir André Weil, Henri Cartan, Laurent Schwartz et Jean Dieudonné. Ainsi, durant les cinq premières années d'existence du séminaire Julia, on observe une montée en puissance des principaux membres fondateurs du groupe Nicolas Bourbaki dans des universités des départements, en particulier Strasbourg et Nancy ; leur implantation au sein de la SMF est également attestée à travers la création d'une branche de l'Est par les soins de Jean Delsarte et André Weil en 1935 ; enfin, avec la reprise en main des Publications de l'Institut de mathématique de l'université de Strasbourg, ils disposent à partir de 1937 d'un organe éditorial reflétant leurs activités scientifiques. La prochaine section revient sur les premières années d'existence de Bourbaki en se concentrant sur des acteurs qui ont généralement été peu étudiés, à savoir Paul Dubreil, Jean Leray, Szolem Mandelbrojt et Jean Coulomb.

3. Retour sur les débuts du groupe Bourbaki

L'éviction des membres fondateurs de Bourbaki du séminaire Julia au printemps 1938 est d'autant plus spectaculaire que le groupe a commencé à se former en marge de ce séminaire entre décembre 1934 et juillet 1935. Il convient donc de revenir brièvement sur les objectifs et la composition de Bourbaki au cours de la seconde moitié des années 1930, en prenant soin d'isoler un noyau dur, avant d'aborder les cas de protagonistes ayant joué un rôle plus marginal au sein du groupe, pour finalement s'en écarter.

3.1 – Le projet Bourbaki de 1934 à 1937

Les débuts de Bourbaki ont fait l'objet de nombreux témoignages a posteriori de la part de certains de ses membres fondateurs, les plus connus étant ceux d'Henri Cartan, Jean Dieudonné et André Weil. La vaste enquête menée par Liliane Beaulieu dans le cadre de sa thèse sou-

tenue en 1989 a permis de jauger ces déclarations à la lumière de documents produits par le groupe durant cette période, lesquels sont dorénavant accessibles aux adresses suivantes : <http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/> et <http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr>. Ces témoignages concordent tous sur l'objectif initial du rassemblement d'un tel collectif, à savoir la rédaction d'un traité d'analyse³⁹. Pour ces mathématiciens exerçant dans des universités des départements, les séances du séminaire Julia étaient l'occasion de se retrouver dans la capitale. Dans ces circonstances, il n'est pas étonnant que Bourbaki se soit formé en marge du séminaire Julia. Ainsi, la première réunion du groupe a lieu le 10 décembre 1934, quelques heures seulement avant que Jean Delsarte n'expose sur les espaces de Hilbert dans le cadre du séminaire Julia. On peut lire, dans le compte rendu de la première réunion :

WEIL expose son projet – fixer pour 25 ans les matières du certificat de Calcul différentiel et intégral en rédigeant en commun un traité d'Analyse. [7, cote delta001]

Commencent alors de nombreuses discussions techniques lors des dix réunions proto-bourbachiques. En effet, à ce moment, le projet est encore limité à celui de rédaction d'un traité d'analyse⁴⁰. Face à la quantité de travail à effectuer collectivement, les membres décident rapidement d'organiser un « congrès » d'une dizaine de jours, alors appelé « réunion plénière ». Le *congrès fondateur* se déroule à la *Station Biologique de Besse-en-Chandesse* – qui dépend de l'université de Clermont-Ferrand où sont en poste Jean Coulomb, Szolem Mandelbrojt et René de Possel – du 10 au 18 juillet 1935. Le groupe prend officiellement le nom de Bourbaki à cette occasion⁴¹. À la suite de cette plénière, le bulletin du groupe s'appelle, jusqu'au déclenchement de la guerre, le *Journal de Bourbaki*, l'objectif de cet organe interne étant notamment de présenter « l'état des travaux » du groupe. Pour acter la naissance du groupe auprès des patrons des mathématiques de l'entre-deux-guerres, André Weil adresse une note

39. Voir par exemple le témoignage d'Henri Cartan : « André Weil et moi étions tous deux à l'université de Strasbourg, en 1934. Je discutais souvent avec lui du cours de calcul différentiel et intégral que j'avais à enseigner. [...] Je m'interrogeais fréquemment sur la façon de conduire cet enseignement, car les ouvrages existants ne me paraissaient pas satisfaisants, par exemple sur la théorie des intégrales multiples et la formule de Stokes. J'en discutai donc, à plusieurs reprises, avec André Weil. Un beau jour, il me dit "Maintenant, cela suffit ; il faudrait mettre tout cela au point une bonne foi, le rédiger. Il faut écrire un bon traité d'analyse, et après on n'en parlera plus !" », [27, p.17]. D'autres membres ont donné, à de nombreuses reprises, plus ou moins le même discours : voir celui de Jean Dieudonné [11, p. 25], André Weil [30, pp. 103-105], etc.

40. Voir [5] et [6, chapitre II] pour plus de détails sur ces dix réunions proto-bourbachiques.

41. Voir [6, chapitre III] pour plus de détails sur ce congrès fondateur.

signée Nicolas Bourbaki à Élie Cartan, qui la présente à l'Académie des sciences lors de la séance du 23 décembre 1935⁴².

D'après les archives de Bourbaki, les membres du groupe se réunissent le 16 décembre 1935 – à cette date, Jean Leray présente son deuxième exposé dans le cadre du séminaire Julia –, les 22 et 23 mars 1936⁴³ – le dernier exposé de la troisième année du séminaire Julia est donné par Frédéric Marty le 23 mars 1936 – ainsi que le 6 juillet 1936. Lors de cette dernière réunion, André Weil souhaite que la « réunion plénière de septembre » ait lieu à l'Escorial,⁴⁴ près de Madrid. Cependant, avec le déclenchement de la guerre civile espagnole⁴⁵, ce projet fut avorté et les membres se rassemblèrent finalement dans le domaine familial de Claude Chevalley à Chançay en Touraine.

Deux nouvelles réunions sont ensuite attestées par les archives du groupe les 14 décembre 1936 et 15 mars 1937, toujours en marge du séminaire Julia, lequel est alors entièrement consacré aux travaux d'Élie Cartan, avec un exposé d'Henri Cartan le 14 décembre 1936 et un exposé d'Élie Cartan le 15 mars 1937. Après cette date, les archives ne contiennent plus de numéro du « Journal de Bourbaki » jusqu'au déclenchement des hostilités. Un congrès se déroule une nouvelle fois à Chançay en septembre 1937 ; René de Possel et Claude Chevalley soulignent à cette occasion un « certain vieillissement de Bourbaki », déplorant des « compromis de lassitude » dans le travail du groupe⁴⁶. La plénière de septembre 1938 est organisée à Dieulefit dans la Drôme ; elle est finalement « écourtée par un appel aux armes » et Bourbaki ne tint aucune réunion l'année suivante⁴⁷.

3.2 – Caractérisation des premiers participants

Dès les premières réunions proto-bourbachiques, on observe un degré d'implication très variable selon les participants. Il est en conséquence intéressant de distinguer plusieurs sous-ensembles parmi les mathématiciens ayant décidé d'y prendre part, en tenant compte d'autres paramètres tels que leurs interventions dans le cadre du séminaire Julia ainsi que leur carrière académique. Il convient en outre d'avoir à l'esprit que la composition du groupe évolue significativement entre la première réunion proto-bourbachique de décembre 1934 et le congrès de Dieulefit de septembre 1938. La liste des fondateurs retenue sur le site de l'association Bourbaki, à savoir Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt et André Weil,⁴⁸ n'est donc qu'un instantané du groupe au moment de la « plénière de fondation de Besse ». Cette liste doit ainsi être maniée avec précaution.

Tableau des mentions dans le bulletin du groupe

Le tableau 1 est un relevé des mathématiciens présents ou mentionnés dans les comptes rendus et bulletins du groupe entre la première réunion proto-bourbachique, le 10 décembre 1934, et l'avant-dernier congrès d'avant-guerre, en septembre 1937⁴⁹. Les dix premières réunions correspondent aux « dix réunions proto-bourbachiques » qui précèdent le congrès fondateurs de Besse. Pour une meilleure lisibilité, seuls le mois et l'année sont précisés pour les congrès bourbachiques.

Dans ce tableau, je n'ai retenu que les mentions de participants ayant été considérés à un moment ou à un autre comme membres du projet. D'autres scientifiques apparaissent dans ces documents⁵⁰ :

42. Cette note est [8]. Pour plus de détails, voir [6, pp. 282-286], [3, p. 472], ainsi que [4, p. 75].

43. Dans [7, cote deljb004], la date du 14 mars 1936 a été évoquée mais cette réunion a certainement dû être décalée pour une raison inconnue.

44. Voir [26] pour plus d'informations autour de ce congrès et du contexte politique de l'époque.

45. Pour plus de détails, voir [30, pp. 117-118].

46. Voir [7, cote delch009].

47. Voir [6, p. 378] et [30, pp. 129-130].

48. D'après le site <https://www.bourbaki.fr/>.

49. Pour plus de détail entre ce troisième congrès et le premier numéro de la tribu en mars 1940, voir <http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/a-propos-de-la-tribu-n-1-15-mars-1940>. En dehors des rédactions individuelles que l'on peut dater de cette période, seul le compte rendu du congrès de Dieulefit se trouve dans les archives. Puisqu'il s'est tenu en septembre 1938, donc après l'envoi de la lettre d'André Weil à Jean Coulomb, il n'est pas mentionné ici.

50. La présence anecdotique d'autres protagonistes est également attestée par certains documents.

TABLEAU 1 – Mentions de membres de Bourbaki dans les bulletins du groupe jusqu'en 1937

	10-12-1934	14-01-1935	28-01-1935	11-02-1935	25-02-1935	11-03-1935	25-03-1935	08-04-1935
Cartan	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent
Chevalley	Présent	Présent	Mentionné	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent
Coulomb		Mentionné		Mentionné			Mentionné	Mentionné
De Possel	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent
Delsarte	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent
Dieudonné	Présent	Présent	Présent	Présent		Présent	Présent	Présent
Dubreil		Mentionné	Mentionné	Présent				Démission
Leray		Présent	Mentionné		Mentionné	Présent	Mentionné	Mentionné
Mandelbrojt		Présent	Présent	Mentionné				Mentionné
Weil	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent	Présent

	06-05-1935	20-05-1935	07-1935	15-11-1935	15-12-1935	15-01-1936	15-02-1936
Cartan	Excusé	Présent	Intermittent	Mentionné	Mentionné	Mentionné	Mentionné
Chevalley	Présent		Présent	Mentionné	Sans nouvelles	Mentionné	Sans nouvelles
Coulomb	Remplaçant	Présent	Intermittent				
De Possel	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Mentionné	Sans nouvelles	Mentionné
Delsarte	Présent	Présent	Absent	Mentionné	Mentionné	Mentionné	Mentionné
Dieudonné	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Mentionné	Mentionné	Mentionné
Dubreil	Remplacé						
Ehresmann			Mentionné				
Leray	Présent	Présent	Exclu				
Mandelbrojt	Mentionné	Présent	Présent	Mentionné	Sans nouvelles	Mentionné	Mentionné
Weil	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Mentionné	Mentionné	Mentionné

	25-03-1936	06-07-1936	09-1936	27-11-1936	18-12-1936	16-02-1937	16-03-1937	09-1937
Cartan	Présent		Excusé	Mentionné	Présent	Sans nouvelles	Excusé	Présent
Chevalley	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Présent	Mentionné	Présent	Présent
Coulomb			Intermittent	Mentionné	Mentionné	Mentionné	Excusé	Honorariat
De Possel	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Présent	Mentionné	Présent	Présent
Delsarte	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Présent	Mentionné	Présent	Présent
Dieudonné	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Présent	Mentionné	Présent	Présent
Ehresmann	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Présent	Mentionné	Présent	Présent
Mandelbrojt		Sans nouvelles	Présent	Mentionné	Présent	Mentionné	Présent	Présent
Weil	Présent	Présent	Présent	Mentionné	Présent	Sans nouvelles	Excusé	Présent

- Emil Artin qui est « consultant » le 11 février 1935;
- Élie Cartan, père de Henri Cartan, qui est « consultant » le 20 mai 1935 (et André Weil affirme qu'il est également venu au congrès de Dieulefit⁵¹);
- Raoul Husson qui « sert l'apéritif » le 25 mars 1936;
- Yves Rocard qui est « consultant » le 11 mars 1935 et fournit un rapport sur ce qui pourrait intéresser les physiciens dans un tel traité⁵².

À partir de ce tableau, différents sous-ensembles nécessitent d'être contextualisés.

Le « Noyau dur »

Il est intéressant de relever les noms des six mathématiciens ayant participé à la première réunion proto-bourbachique de décembre 1934, à savoir Henri Cartan, Claude Chevalley, René de Possel, Jean Delsarte, Jean Dieudonné et André Weil, dans

la mesure où ils constituent le noyau dur du groupe. Ces six mathématiciens sont mentionnés dans presque tous les bulletins de cette période et sont très impliqués dans le projet, comme en attestent leur assiduité aux réunions ainsi que les rapports produits par leurs soins. Quatre d'entre eux, à savoir Henri Cartan, Jean Delsarte, Jean Dieudonné et André Weil, font partie de la section de l'Est de la SMF qui a déjà été évoquée. Quasiment tous sont des orateurs réguliers du séminaire Julia, à l'exception de Jean Dieudonné qui y intervient en tout et pour tout une seule fois le 24 février 1934. Le relevé fait apparaître d'autres noms. Paul Dubreil et Jean Leray ont par exemple participé à certaines réunions proto-bourbachiques, mais se sont définitivement éloignés du projet avant le congrès de la fondation de juillet 1935. Jean Coulomb, Szolem Mandelbrojt et Charles Ehresmann représentent les trois derniers membres fondateurs du groupe; ils viennent ainsi compléter le noyau dur précédemment mentionné. De fait, Jean Coulomb est appelé

51. Voir [30, p. 129].

52. Voir [7, cote delta006] et [7, cote delms000].

à prendre la succession de Paul Dubreil, tandis que Charles Ehresmann est mentionné pour remplacer Jean Leray lors du congrès de Besse-en-Chandesse. S'il est qualifié de « membre fondateur » sur le site de l'association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, Charles Ehresmann ne rejoindra effectivement le groupe qu'au début de l'année suivante, en mars 1936. En parallèle, sa première intervention dans le cadre du séminaire Julia a lieu le 2 décembre 1935. Charles Ehresmann est donc le premier mathématicien coopté par le groupe Bourbaki. Deux autres mathématiciens rejoignent Bourbaki avant le déclenchement des hostilités, à savoir Claude Chabauty et Charles Pisot, lesquels présentent leurs premiers exposés dans le cadre du séminaire Julia au début de l'année 1938.

Les départs de Paul Dubreil et de Jean Leray avant le congrès fondateur

Paul Dubreil, qui exerce aux côtés de Jean Delsarte à Nancy à partir de 1933, compte parmi les orateurs réguliers du séminaire Julia et il est considéré comme membre du groupe dès la deuxième réunion proto-bourbachique. Il semble cependant n'avoir été présent qu'à la quatrième de ces réunions et n'est pas mentionné dans les trois comptes rendus des suivantes. Sa « démission » est enregistrée lors de la huitième réunion et Jean Coulomb le remplace. Paul Dubreil n'a donc pas concrètement participé au projet⁵³.

Le cas de Jean Leray est différent. Il participe aux deuxième, troisième et dixième réunions et est mentionné lors de trois autres. D'après les comptes rendus, il semble s'investir plus que Paul Dubreil. Jean Leray ne participe cependant pas au congrès de Besse. Au début du compte rendu produit à l'issue de cet événement fondateur, on peut même lire : « Leray, en état de dégonflage est exclu ; on se réserve le droit de le consulter sur des points spéciaux. (N.B. En fin de congrès, on décide de proposer à Ehresmann de prendre la place vacante) »⁵⁴ et

est remplacé par Charles Ehresmann.

En résumé, la participation de Paul Dubreil et Jean Leray au projet de rédaction d'un traité d'analyse semblait évidente : ils font partie d'un cercle de jeunes mathématiciens de l'ÉNS de la même génération et sont des participants privilégiés du séminaire Julia. Ils s'écartent cependant très vite du groupe.

Szolem Mandelbrojt et de Jean Coulomb : deux soutiens institutionnels de Bourbaki

Szolem Mandelbrojt et Jean Coulomb se singularisent parmi les membres fondateurs de Bourbaki en ce qu'ils n'ont pas donné d'exposé dans le cadre du séminaire Julia. Ils suivent en outre des parcours académiques qui les différencient des protagonistes composant le « noyau dur » du groupe. Leur investissement dans ce projet collectif demeure ponctuel et ils s'en écartent d'ailleurs dès avant la fin des années 1930 dans des circonstances qui sont très différentes de celles évoquées dans le cas de Paul Dubreil et de Jean Leray.

Contrairement aux huit autres « fondateurs » de Bourbaki, Szolem Mandelbrojt n'est pas issu de l'ÉNS. Il est, de quelques années, l'aîné du groupe et n'est arrivé en France qu'au moment d'effectuer sa thèse de doctorat, qu'il soutient en 1923. Il assista à des cours donnés par les mêmes professeurs que les autres membres du groupe (Édouard Goursat, Émile Picard, Henri Lebesgue) entre 1920 et 1923, participa activement au séminaire Hadamard et à plusieurs réunions de la SMF⁵⁵. Il est le seul à être professeur (de quatrième classe, à Clermont-Ferrand) lors des premières réunions, alors que les autres sont maîtres de conférences ou n'ont pas encore de poste de titulaire.

Bien qu'il ait peu produit pour le groupe⁵⁶, Szolem Mandelbrojt se charge en 1936 de contacter Émile Borel pour une demande de subvention visant à financer les activités du groupe, dont l'organisation des congrès. Émile Borel conseille alors à Szolem Mandelbrojt de solliciter la Caisse natio-

53. Suite à un entretien réalisé cinquante ans après les faits, Liliane Beaulieu explique, [6, pp. 158-159], que Paul Dubreil a démissionné car sa femme était alors en poste à Rennes et que le ménage devait régulièrement se déplacer d'une ville à l'autre. D'autre part, elle ajoute qu'il avait des réserves avec le choix de la maison d'édition Hermann pour la publication du traité collectif et avec l'ambition de ce projet.

54. Dans un entretien avec Liliane Beaulieu réalisé en décembre 1985 et cité dans [6, pp. 158-160], Jean Leray revient sur ses réticences à participer au « travail en groupe » caractérisant les réunions proto-bourbachiques. Selon le propre témoignage de Leray, son approche orientée alors vers les mathématiques appliquées n'aurait pas eu « bonne audience auprès de certains membres ». Liliane Beaulieu nuance toutefois le propos de Leray, estimant que « le groupe à cette époque ne semblait pas tenir un discours "puriste" sur les mathématiques ». En s'appuyant sur les témoignages d'Henri Cartan, Jean Dieudonné et André Weil, Liliane Beaulieu explique qu'en se séparant du groupe, suite aux conseils des « patrons » de la Sorbonne, Jean Leray « s'assurait le soutien de maîtres dont les autres se distanciaient. »

55. Voir [20, pp. 8-9].

56. Il a été identifié comme étant l'auteur d'une seule rédaction conservée dans les archives Bourbaki.

nale de la recherche scientifique en s'adressant directement au physicien Jean Perrin, alors sous-secrétaire d'État à la recherche scientifique auprès du ministre de l'Éducation nationale de l'époque, à savoir Jean Zay. Cette demande de subvention à hauteur de 10 000 francs est rédigée par Jean Delsarte, signée par l'ensemble du groupe et communiquée par Szolem Mandelbrojt à Jean Perrin. Elle leur sera accordée et sera même renouvelée au moins une fois⁵⁷. Le groupe Bourbaki jouit ainsi d'appuis institutionnels, favorisés par les interventions de Szolem Mandelbrojt auprès de Émile Borel et de Jean Perrin. Comme je l'ai déjà indiqué dans la première section, Szolem Mandelbrojt succède à Jacques Hadamard au Collège de France au printemps 1938 ce qui, comme je l'établirai en détail dans la section suivante, précipite le limogeage des membres fondateurs de Bourbaki du séminaire Julia.

Après avoir été reçu au concours de l'Agrégation de mathématiques en 1926 (comme Paul Dubreil et Henri Cartan), la carrière de Jean Coulomb prend une tournure différente de celles de ses camarades mathématiciens de l'ÉNS. Après une discussion avec Yves Rocard, il se rapproche de Marcel Brillouin qui cherche un mathématicien pour le remplacer comme assistant de physique mathématique. Il soutient une thèse sous la direction de ce dernier en 1931 et, en 1932, il est nommé physicien-adjoint à l'*Observatoire de Physique du Globe du Puy-de-Dôme*⁵⁸. Cela explique pourquoi Jean Coulomb n'a, d'après les archives, jamais donné d'exposé au séminaire Julia. En effet, il se spécialise progressivement en physique mathématique, domaine éloigné des thèmes retenus dans le cadre de ce séminaire. C'est très certainement la raison pour laquelle il ne figure également pas, dès le début, dans la liste des membres produite lors de la deuxième réunion proto-bourbachique⁵⁹. Le nombre de participants étant alors limité à neuf personnes, il est cependant mentionné comme « spécialiste qualifié pour aider à la rédaction de fascicules particulièrement techniques » et conserve ce statut jusqu'à ce que lui soit naturellement proposée la place de Paul Dubreil au moment de la démission de ce dernier.

S'il est régulièrement mentionné, Jean Coulomb ne semble avoir produit qu'un seul document pour le groupe, à savoir un rapport qui se présente sous

la forme d'une lettre envoyée à Jean Delsarte. Ce rapport est intitulé « Équations linéaires. Fuchs. Singularités confluentes (Garnier). Classification. Hypergéométrie. »⁶⁰. Comme il l'explique dans cette lettre, il ne connaît pas vraiment les attentes du groupe sur ces thématiques. À la fin de ce courrier, il répète ce qu'il leur a déjà dit oralement : il ne peut honorer les demandes de rédaction pour l'année suivante. Il ne semble pas avoir participé à d'autres réunions. De fait, en 1937, Jean Coulomb est nommé directeur de l'*Institut de Météorologie et de Physique du Globe de l'Algérie*. Il est promu à l'« honorariat » pour Bourbaki lors du congrès de Chançay de 1937. La lettre d'André Weil à Jean Coulomb du 24 mai 1938 témoigne de leur amitié et à l'instar de Szolem Mandelbrojt, Jean Coulomb demeure un soutien de premier plan pour favoriser l'implantation du groupe dans le champ mathématique.

4. La rupture du printemps 1938

L'ensemble de ces éléments me permettent désormais de faire ressortir les aspects historiquement significatifs de la lettre d'André Weil à Jean Coulomb du 24 mai 1938.

4.1 – Des protagonistes titulaires dans les universités des départements en 1938

D'après les *Tableaux de classement du personnel enseignant et scientifique au 1^{er} janvier 1938*⁶¹, tous les anciens élèves de l'ÉNS qui ont participé à la deuxième réunion proto-bourbachique ont donc un poste de titulaire dans une université des départements :

- Jean Delsarte, Paul Dubreil et Jean Leray sont professeurs de quatrième classe à Nancy, Jean Dieudonné y est maître de conférences de troisième classe ;
- Henri Cartan est professeur de quatrième classe à Strasbourg et André Weil y est maître de conférences de troisième classe ;
- Claude Chevalley est maître de conférences de troisième classe à Rennes ;

57. Voir [6, pp. 372-373] ainsi que [7, cotes delco001-005].

58. Voir <http://annales.org/archives/cofrhigeo/coulomb.html>.

59. Voir [7, cote delta002].

60. Voir [7, cote deles013].

61. L'exemplaire que j'ai consulté est celui conservé sous la cote T4941 aux Archives départementales du Puy-de-Dôme.

- René de Possel est maître de conférences de troisième classe à Besançon.

L'accès à une chaire dans la capitale constitue un enjeu crucial pour ces protagonistes au cours du printemps 1938 dans la mesure où deux postes y sont alors mis au concours : le premier au Collège de France, le second à la Faculté des sciences de l'université de Paris. Pour cette raison, les rapports de concurrence entre les membres fondateurs de Bourbaki et Jean Leray s'exacerbent et prennent, comme je vais le montrer, une dimension politique.

Le début de la lettre d'André Weil à Jean Coulomb donne d'emblée le ton : « Pour une fois que je t'écris, il faut que ce soit encore des ragots universitaires... ». Jean Coulomb apparaît ici comme un confident, auquel André Weil livre avec véhémence l'état des relations conflictuelles opposant Bourbaki à Jean Leray, un point de non-retour ayant manifestement été franchi. André Weil précise avoir écrit les sept pages qui composent cette lettre dans l'urgence à l'aide de sa machine portative, depuis le train au départ de Paris qui le ramène à Strasbourg. Il fait tout d'abord succinctement mention à son destinataire des rapports de concurrence ayant opposé Jean Dieudonné à Jean Leray, tout d'abord à Rennes, ensuite à Nancy.

En effet, après un séjour à l'université de Berlin accompli au cours de l'hiver 1932-1933, Jean Leray soutient en 1933 une thèse en hydrodynamique, son jury étant composé d'Élie Cartan, de Gaston Julia et d'Henri Villat. La même année, d'après la lettre d'André Weil, Jean Leray aurait « fait, en douce et sans prévenir, des cours (à titre gratuit) espérant que ce service rendu le ferait nommer à Rennes avant que ce fût son tour »⁶². De son côté, Jean Dieudonné a soutenu sa thèse deux ans avant Jean Leray et on peut lire, dans la lettre d'André Weil à Henri Cartan du 6 août 1933 : « Dieudonné ira à Rennes parce qu'on pense que ce sera le premier poste libre »⁶³. Le « service rendu » n'a pas permis à Jean Leray d'obtenir le poste à Rennes, Jean Dieudonné y étant bien nommé à partir de l'automne 1933.

Jean Leray est finalement chargé d'enseignement, puis maître de conférences à la Faculté des sciences de l'université de Nancy au cours de l'hi-

ver 1936-1937 sur une chaire de mathématiques appliquées. Jean Dieudonné rejoint à son tour l'université de Nancy en septembre 1937. La lettre d'André Weil à Jean Coulomb du 24 mai 1938 indique que Jean Leray se serait placé sur un terrain politique pour empêcher la nomination de Jean Dieudonné à Nancy, faisant état à Jean Delsarte des opinions communistes de Jean Dieudonné. Et André Weil d'ironiser puisque Jean Leray n'a fait que révéler « à Delsarte... ce que celui-ci, bien sûr, savait depuis longtemps »⁶⁴. Pour anecdotique qu'il soit à première vue, cet épisode préfigure aux yeux d'André Weil l'âpreté des conflits opposant Jean Leray à Szolem Mandelbrojt au printemps 1938, afin de succéder à Jacques Hadamard au Collège de France.

4.2 – L'élection de Szolem Mandelbrojt au Collège de France face à Jean Leray

Au cours des premiers mois de l'année 1938, André Weil entame lui-même des démarches pour postuler au Collège de France⁶⁵. Soutenu par Henri Cartan et Jean Delsarte, André Weil demande alors l'appui des mathématiciens allemands Carl Siegel et Helmut Hasse⁶⁶. Il procède en outre à ses premières visites auprès de professeurs au Collège de France, mais est cependant stoppé net dans son élan après l'intervention d'Henri Lebesgue. Ce dernier a en effet fait en sorte que deux candidatures soient retenues à l'exclusion de toute autre : celle de Jean Leray, qui bénéficie de son appui, et celle de Szolem Mandelbrojt, soutenu par Paul Montel. Comme le précise André Weil dans sa lettre à Jean Coulomb

[Lebesgue] a écrit pour demander [à Leray] d'être candidat pour la deuxième ligne, puis a menacé tous les concurrents, s'ils persistaient dans leurs candidatures, de les mettre en compétition avec Leray pour la 2^e ligne, en jetant tout le poids de son autorité (qui, en la matière, faisait loi au Collège) du côté de Leray ; après quoi, tout le monde s'est retiré, sauf M[andelbrojt] et L[eray] [...]

Henri Lebesgue prépare en réalité le terrain à la

62. Il arrive effectivement que le conseil d'une faculté privilégie un candidat qui a déjà donné des cours dans sa faculté plutôt qu'un autre qui a de plus grands mérites scientifiques. C'est le cas, par exemple, pour l'élection de René de Possel plutôt qu'André Weil à un poste de professeur de calcul différentiel et intégral à l'université de Clermont-Ferrand en 1939, d'après les délibérations du conseil de la faculté des sciences de cette université conservées sous la cote T4942 aux Archives départementales du Puy-de-Dôme.

63. Voir [3, p. 29].

64. André Weil précise d'ailleurs entre parenthèses « il s'est bien estompé depuis lors, d'ailleurs, le stalinisme de Dieudonné ».

65. Voir [30, pp. 125-127].

66. Voir [3, p. 479].

création d'une chaire de mécanique des fluides qui serait spécialement réservée à Jean Leray au Collège de France. Les archives du Collège de France ont d'ailleurs conservé la trace de ce projet de chaire, comme en atteste une série de pièces datant de juin 1938⁶⁷. Au bout du compte ce projet est retoqué au profit d'une chaire d'aérolocomotion mécanique et biologique sur laquelle est élu le naturaliste Étienne Cœhmichen.

Dans sa lettre à Jean Coulomb, André Weil revient ensuite en détail sur les circonstances de l'élection de Szolem Mandelbrojt au Collège de France, précisant qu'une large majorité a voté en sa faveur parmi les professeurs exerçant dans cette institution. Selon André Weil, Jean Leray aurait tout au plus récolté « (pour la 1^{re} ligne) 8 ou 10 voix qu'on a attribuées à des antisémites impénitents ». Vient ensuite la présentation à l'Institut, l'élection de Szolem Mandelbrojt devant en effet être avalisée par les membres de l'Académie des sciences. André Weil précise alors que

Jean Leray s'est retourné vers Émile Picard et Gaston Julia, a fait une campagne acharnée (il a eu le toupet d'écrire à [Henri] Cartan qu'il avait passé 15 jours à Paris à « étudier l'état d'esprit de l'Institut »), et, en faisant valoir (il a eu l'impudence de me le déclarer) l'argument xénophobe et aussi, je crois, l'argument antisémite, il a réussi à récolter 21 voix contre 26 à M[andelbrojt]. Voilà donc Julia et Villat, qui l'ont porté aux nues à l'Institut, et qui ne peuvent plus s'en dédire à la Sorbonne.⁶⁸

Jean Leray aurait donc utilisé des arguments xénophobes, voire antisémites, pour discréditer son adversaire, tout en bénéficiant du soutien de Gaston Julia, Henri Lebesgue, Émile Picard ou encore Henri Villat. Au bout du compte, Jean Leray échoue de peu au Collège de France. Il reste donc le poste mis au concours à la Sorbonne. Une nouvelle campagne acharnée débute alors, précédée par un changement brutal dans l'organisation du séminaire Julia.

4.3 – Le limogage des fondateurs de Bourbaki par Gaston Julia

L'effet le plus spectaculaire des rapports de concurrence entre Jean Leray et Bourbaki peut se résumer en une phrase : Gaston Julia décide brutalement en mai 1938 de limoger de son séminaire le noyau dur de Bourbaki. Ce fait n'est mentionné ni dans la thèse de Liliane Beaulieu, ni dans la publication que Michèle Audin a consacrée au séminaire Julia, faute d'accès à la lettre d'André Weil à Jean Coulomb qui se poursuit en ces termes :

[Leray] s'est arrangé pour faire comprendre à Julia qu'il avait eu grand tort de laisser à Bourbaki la conduite de son séminaire, que le séminaire marchait mal, qu'il n'en sortait pas de Travaux, et qu'avec sa collaboration à lui Leray tout marcherait bien autrement. Ce qui explique qu'à la fin des deux derniers exposés de l'année (Chevalley et Pisot, exposés excellents d'ailleurs) Julia a engueulé les conférenciers avec un parti pris manifeste, et a proprement limogé notre équipe, en annonçant que l'an prochain le séminaire aurait lieu « dans des conditions différentes ».

Ainsi, alors qu'avec l'élection de Szolem Mandelbrojt au Collège de France, l'un des membres fondateurs de Bourbaki accède pour la première fois à une chaire dans la capitale, le groupe se trouve singulièrement affaibli à l'issue de cette campagne. Étant écarté du séminaire Julia, le noyau dur de Bourbaki est de fait éloigné de la scène mathématique parisienne. Dans ces conditions, il n'est pas surprenant d'observer qu'aucun membre fondateur de Bourbaki n'intervient dans le cadre du séminaire Julia en 1938-1939. Si l'on élargit le raisonnement à l'ensemble des membres du groupe, seul Charles Pisot – qui rejoint Bourbaki dans le courant de l'année 1938 – est orateur au séminaire Julia en 1938-1939⁶⁹.

67. Dont un rapport de Lebesgue du 9 juin 1938 en faveur de Jean Leray sur une chaire de mécanique des fluides, conservé sous la cote 4 AP 486 g aux Archives du Collège de France.

68. Cette citation ainsi que les suivantes sont issues de la lettre d'André Weil à Jean Coulomb du 24 mai 1938.

69. Il présente son exposé lors de la séance du 19 décembre 1938. Les recherches publiées de Charles Pisot à cette époque se concentrent sur la théorie des nombres, ce qui est plutôt éloigné du sujet du séminaire cette année-là, le « Calcul des variations ». Il a peut-être simplement eu un intérêt mathématique pour cette thématique à ce moment précis.

4.4 – La mobilisation du réseau bourbachique pour contrer la candidature de Jean Leray à la Sorbonne

Il est désormais possible de mieux comprendre pourquoi André Weil s'adresse dans la précipitation à Jean Coulomb à la fin du mois de mai 1938. André Weil entend activer les soutiens institutionnels dont bénéficie le groupe, pour faire barrage à la candidature de Jean Leray à la Sorbonne. Reste à savoir quel serait le membre fondateur de Bourbaki susceptible de postuler contre Jean Leray, avant de mieux comprendre pour quelles raisons André Weil sollicite l'aide de Jean Coulomb dans cette affaire. La suite de cette lettre du 24 mai 1938 est éclairante sur ces deux aspects.

André Weil précise tout d'abord à son destinataire, qu'« après étude de la situation avec Cartan, il a bien fallu constater que je n'avais pas l'ombre d'une chance⁷⁰ » : il ne peut donc pas se porter lui-même candidat. Outre Jean Leray, le mathématicien Georges Bouligand, qui est en poste à Poitiers depuis 1921 et est de loin leur aîné puisqu'il a soutenu sa thèse en 1914, souhaite également accéder à cette chaire à la Sorbonne. La candidature de Georges Bouligand ne reçoit pas l'assentiment d'André Weil, celui-ci faisant remarquer dans sa lettre à Jean Coulomb qu'« il n'y a pas intérêt à le voir transplanter à Paris la manufacture de thèses vasseuses en série, qu'il avait installée à Poitiers »⁷¹. Parmi les membres du noyau dur de Bourbaki, Jean Delsarte serait le plus à même de concurrencer Jean Leray, en raison de son ancienneté de classement. Jean Delsarte souhaite cependant rester à Nancy⁷². Henri Cartan se porte donc finalement candidat sur le poste à la Sorbonne contre Georges Bouligand et Jean Leray, alors qu'il « aurait préféré rester tranquillement à Strasbourg 2 ou 3 ans encore ». André Weil se montre cependant assez sceptique sur les chances de réussite d'Henri Cartan :

Son affaire ne se présente pas très bien; le voir battu, et surtout voir Le-

ray passer, ce serait, scientifiquement, une injustice à mon avis, et, du point de vue de la propreté, un comble. On ne sait encore l'attitude que prendra Montel, qui est en Roumanie. Malheureusement, l'élection doit se faire le 17 juin; cette précipitation est d'autant plus défavorable à Cartan que Chazy⁷³ (son principal partisan déclaré jusqu'ici) sera déjà parti pour l'Égypte à cette date.

Pour cette raison, André Weil demande à Jean Coulomb de solliciter le soutien du physiologiste et homme politique Henri Laugier et du physicien Charles Maurain. Henri Laugier, qui est le cousin germain de Jean Coulomb, occupe une position stratégique dans le champ scientifique⁷⁴. Jean Perrin lui confie en 1936 la direction du Service central de la Recherche scientifique (ministère de Jean Zay) dont l'objectif est de mettre sur pied le *Centre National de la Recherche Scientifique*. Henri Laugier assure d'ailleurs la direction du CNRS de sa création en octobre 1939 à la débâcle de mai-juin 1940. Henri Laugier devient en outre professeur à la Faculté des sciences de Paris en 1937 et pourrait donc constituer un précieux appui en faveur d'Henri Cartan. Pour sa part, Charles Maurain est le premier directeur de l'Institut de physique du globe de Paris et occupe, à partir de 1926, les fonctions de doyen de la faculté des sciences de Paris. Il a été membre du jury de thèse de Jean Coulomb et correspond régulièrement avec lui. Lorsque Charles Maurain prend sa retraite en 1941, Jean Coulomb lui succède à la direction de l'Institut de physique du globe de Paris en 1941⁷⁵. Il ne m'a pas été possible de déterminer si Henri Laugier et Charles Maurain ont finalement œuvré en faveur d'Henri Cartan par l'intermédiaire de Jean Coulomb.

Toujours est-il qu'au bout du compte, Georges Bouligand est élu à la Sorbonne en juin 1938. C'est effectivement celui qui avait la plus grande ancienneté parmi ces trois candidats. Jean Leray poursuit sa carrière à Nancy jusqu'à sa mobilisation en 1939-

70. Tout d'abord André Weil n'a pas, lui, de poste de professeur à ce moment. D'autre part, comme il l'explique dans un autre passage de cette lettre, ses candidatures à Paris sont compromises par son implication dans l'« affaire des médailles ». Il a en effet été, avec Jean Coulomb, Jean Delsarte et bien d'autres universitaires, un opposant virulent à un système de médailles mis en place par Jean Perrin, voir [17, p. 26], [3, p. 479] ou le début de <http://www.annales.org/archives/cofrhigeo/Coulomb.html>.

71. Pour plus d'informations sur Georges Bouligand et la faculté des sciences de Poitiers dans les années 1930, voir [19, pp. 105-130].

72. Voir notamment [30, p. 116] : « Cartan et moi n'étions pas si fermement résolus à nous implanter définitivement à Strasbourg que l'était dès lors Delsarte de se fixer à Nancy; mais nous n'avions aucune démanaison d'en sortir ».

73. Le mathématicien et astronome Jean Chazy exerce à la Faculté des sciences de Paris depuis 1933 et il est élu membre de l'Académie des sciences (section d'astronomie) le 8 février 1937.

74. Voir [22].

75. Voir [25, pp. 45-48].

1940⁷⁶. Henri Cartan reste à l'université de Strasbourg jusqu'au repli de celle-ci à Clermont-Ferrand en septembre 1939.

Conclusion

Au final, la lettre d'André Weil à Jean Coulomb offre un éclairage inédit sur les cinquième et sixième années d'existence du séminaire Julia, tout en documentant de manière saisissante les positions qu'occupent Jean Leray ainsi que les membres fondateurs de Bourbaki dans le champ mathématique à la fin des années 1930. À l'issue de cet épisode, les membres de Bourbaki ont recentré leurs activités dans l'Est de la France où ils sont installés et regroupés depuis quelques années. Un cahier de brouillon d'Henri Cartan⁷⁷ intitulé « Séminaire Strasbourg 1938-39 », contient les notes de plusieurs exposés :

- 25 novembre 1938, André Weil, « Résumé de topologie combinatoire » ;
- 9 décembre 1938, André Weil, « Théorie des intersections » ;
- 21 décembre 1938, Henri Cartan, « Formes différentielles ; théorèmes de de Rham » ;
- 13 janvier 1939, Jacques Feldbau, « Représentations de S_3 dans S_2 » ;
- 27 janvier 1939, Louis Perrin, « Mémoire de

Lusternik et Schnirelmann (Actual. scientif. Hermann, 1934) » ;

- 78 8 mars 1939, Jacques Feldbau, « Topologie des esp. homogènes » ;
- 24 mars 1939, Charles Ehresmann, « Topologie de certaines variétés » ;
- 21 avril 1939, Jacques Feldbau, « Groupes d'homotopie et groupe fondam. » ;
- 3 mai 1939, Louis Perrin, « Topologie des f. anal. (d'après Stoilow) » ;
- 30 mai 1939, Helmut Hasse, « Hypoth. de Riemann généralisée pour corps de f. ell. à coef. (mod p) »⁷⁹ ;
- 7 juin 1939, Jacques Feldbau, « Espaces fibrés ».

Les orateurs sont moins nombreux et donnent plus d'exposés que lors du séminaire Julia des années précédentes. On peut également remarquer que quelques exposés acquièrent des caractéristiques typiques du futur séminaire Bourbaki, l'objectif étant en effet dans certains cas de présenter les travaux d'autres mathématiciens. Le déclenchement de la Deuxième Guerre mondiale et la période de l'Occupation se traduiront tout à la fois par un éclatement du groupe et maintien de ses activités, son centre de gravité étant désormais la ville de Clermont-Ferrand où l'université de Strasbourg est repliée depuis le début des hostilités⁸⁰.

Références

- [1] D. AUBIN. *L'Élite sous la mitraille. Les Normaliens, les mathématiciens et la Grande Guerre, 1900–1925*. Éditions de la Rue d'Ulm, 2018.
- [2] D. AUBIN et A.-S. PAUMIER. « Polycephalic Euclid? Collective practices in Bourbaki's history of mathematics ». In : sous la dir. de V. R. REMMERT, M. SCHNEIDER et H. K. SØRENSEN. Springer, 2016. Chap. Historiography of Mathematics in the 19th and 20th Centuries, pp. 185-218. URL : <https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-00871784>.
- [3] M. AUDIN. *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928–1991)*. 6. Paris : Société Mathématique de France, 2011.
- [4] M. AUDIN. *Le séminaire de mathématiques 1933–1939*. cedram, 2014. URL : <http://books.cedram.org/MALSM/>.
- [5] L. BEAULIEU. « A Parisian Café and Ten Proto-Bourbaki Meetings (1934–1935) ». *Mathematical Intelligencer* 15/1 (1993), pp. 27-35.
- [6] L. BEAULIEU. « Bourbaki, une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux ». Thèse de doct. Université de Montréal, 1989.
- [7] BOURBAKI. *Archives Bourbaki*. URL : <http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/>.

76. Pour plus de détails sur la trajectoire de Leray durant et juste après la Seconde Guerre mondiale, voir [12].

77. Ces cahiers de brouillons sont conservés à la bibliothèque de mathématiques de l'université de Strasbourg. Celui en question ici est le 6.52 de l'inventaire disponible à l'adresse <https://irma.math.unistra.fr/IMG/pdf/cahierscartan.pdf>.

78. Est rayé, juste avant, « 8 février 39, Weil, Général. sur groupes de Lie ». L'exposé d'André Weil a dû être prévu puis annulé.

79. Répétition d'un exposé donné au séminaire Julia quelques jours plus tôt, voir le texte du séminaire 6-X du séminaire Julia, ainsi que [3, p. 480] et surtout [13, pp. 289].

80. Voir les deux articles de Michèle Audin parus dans *Des mathématiques en Auvergne*, Revue d'Auvergne, 2014, disponibles aux adresses <http://irma.math.unistra.fr/~maudin/MathAuvergne.pdf> et <http://irma.math.unistra.fr/~maudin/BourbakiAuvergne.pdf>, ainsi que les focus que nous avons, avec Christophe Eckes, commencé à ajouter sur le site des archives Bourbaki à l'adresse <http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/focus>.

- [8] N. BOURBAKI. « Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques. » French. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris* **201** (1935), p. 1309-1311.
- [9] H. CARTAN. « André Weil, souvenirs d'une longue amitié ». *André Weil (1906–1998), numéro spécial de la Gazette des Mathématiciens*, n° 80 (1999), pp. 3-7.
- [10] C. CHARLE. *La République des universitaires, 1870–1940*. Seuil, 1994.
- [11] M. CHOUCHAN. *Nicolas Bourbaki – Faits et légendes*. Éditions du Choix, 1995.
- [12] C. ECKES. « Captivité et consécration scientifique : reconsidérer la trajectoire académique du mathématicien prisonnier de guerre Jean Leray (1940-1947) ». *Genèses* (à paraître).
- [13] C. ECKES. « Organiser le recrutement de recenseurs français pour le *Zentralblatt* à l'automne 1940 : les premiers liens entre Harald Geppert, Helmut Hasse et Gaston Julia sous l'Occupation ». *Revue d'histoire des mathématiques* **24/2** (2018), pp. 259-329.
- [14] H. GISPERT et J. LELOUP. « Des patrons des mathématiques en France dans l'entre-deux-guerres ». *Revue d'histoire des sciences*, n° 62 (2009/1), pp. 39-117. URL : <https://www.cairn.info/revue-d-histoire-des-sciences-2009-1-page-39.htm?contenu=article>.
- [15] C. GOLDSTEIN. « La théorie des nombres en France dans l'entre-deux-guerres : De quelques effets de la première guerre mondiale ». *Revue d'histoire des sciences* **62** (2009/1), pp. 143-175. URL : <https://www.cairn.info/revue-d-histoire-des-sciences-2009-1-page-143.htm>.
- [16] C. GOLDSTEIN. « Un mathématicien sur l'isthme d'Hurtebise ». *La Lettre du Chemin des Dames*, n° 23 (2011). URL : https://horizon14-18.eu/wa_files/Lettre_20automne_202011_20LCDD_2023_20web.pdf.
- [17] D. GUTHLEBEN. *Histoire du CNRS de 1939 à nos jours*. 2^e éd. Armand Colin, 2013.
- [18] G. JULIA. *Œuvres de Gaston Julia*. Sous la dir. de M. HERVÉ. Gauthier-Villars, 1970.
- [19] J. LELOUP. « L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie, 2009.
- [20] B. MANDELBROJT. « Souvenirs à bâtons rompus de Szolem Mandelbrojt, recueillis en 1970 et préparés par Benoît Mandelbrot ». *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* **6** (1985).
- [21] NUMDAM, éd. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. URL : <http://www.numdam.org/item/BSMF/>.
- [22] E. PICARD. « Henri Laugier et l'organisation de la recherche française ». *Cahiers pour l'histoire de la recherche* **3** (1995), pp. 63-71. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00585859>.
- [23] E. PICARD. « La profession introuvable ? Les universitaires français de l'Université impériale aux universités contemporaines ». Habilitation à diriger des recherches. Université Paris 1 - Panthéon Sorbonne, jan. 2020. URL : <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-02498327>.
- [24] E. PICARD. « Recovering the History of the French University ». *Revue d'Histoire des Sciences et des Universités* **5**, n° 3 (2012), pp. 156-169. URL : <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00829209>.
- [25] L. PYENSON. « Why Science May Serve Political Ends: Cultural Imperialism and the Mission to Civilize ». In : sous la dir. de F. KRAFFT et C. J. SCRIBA. Franz Steiner Verlag, 1993. Chap. XVIIIth International Congress of History of Science, Hamburg/Munich 1st–9th August 1989, pp. 40-54.
- [26] N. SCHAPPACHER. « Seventy years ago : The Bourbaki Congress at El Escorial and other mathematical (non)events of 1936 ». *The Mathematical Intelligencer, Special issue International Congress of Mathematicians Madrid August 2006* (2006), pp. 8-15. URL : http://irma.math.unistra.fr/~schappa/NSch/Publications_files/MadIntelSchapp.pdf.
- [27] M. SCHMIDT. *Hommes de science : 28 portraits*. Hermann, 1990.
- [28] A. WEIL. *L'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Publications de l'Institut mathématique de Clermont-Ferrand – Hermann, 1940.
- [29] A. WEIL. *Œuvres Scientifiques - Collected Works I 1936–1951*. Springer, 1970.
- [30] A. WEIL. *Souvenirs d'apprentissage*. Birkhäuser Basel, 1991.



Gatien RICOTIER

IRMA, Université de Strasbourg
 ricotiergatien@gmail.com

Gatien Ricotier est doctorant en histoire des mathématiques à l'université de Strasbourg où il est encadré par Norbert Schappacher. Ses travaux se concentrent sur les interactions entre les projets collectifs et individuels autour du groupe Bourbaki.

Je tiens à remercier chaleureusement Christophe Eckes pour ses nombreuses remarques faites sur des versions antérieures de ce texte.

Un zoom sur les migrations collectives de bactéries

• V. CALVEZ

1. Le contexte biologique : des cellules en mouvement

Dans un article fondateur en 1966 [1], Julius Adler a décrit des colonies de bactéries *Escherichia coli* formant des bandes se déplaçant d'une extrémité à l'autre d'un tube capillaire (voir figure 1(a)). Ce mouvement collectif remarquable est le fruit du mouvement aléatoire de centaines de milliers d'individus biaisé dans la direction des gradients d'oxygène ou de sucres. Plus généralement, il s'agit d'appréhender la manière dont un micro-organisme navigue dans un environnement hétérogène. Ce mouvement orienté vers des gradients moléculaires est dénommé chimiotactisme (*chemotaxis* en anglais). C'est la source de nombreuses études en modélisation et analyse mathématique pour la biologie.

Au-delà des micro-organismes, la migration directionnelle des cellules est au cœur du vivant, et en particulier du développement des organismes, au même titre que la division cellulaire et la différenciation (spécialisation des cellules en phénotypes particuliers). À titre d'illustration, après une phase de croissance au premier stade du développement, l'embryon est sujet à une vaste réorganisation spatiale des cellules lors de la phase de gastrulation, qui brise la symétrie de la sphère initiale de cellules.

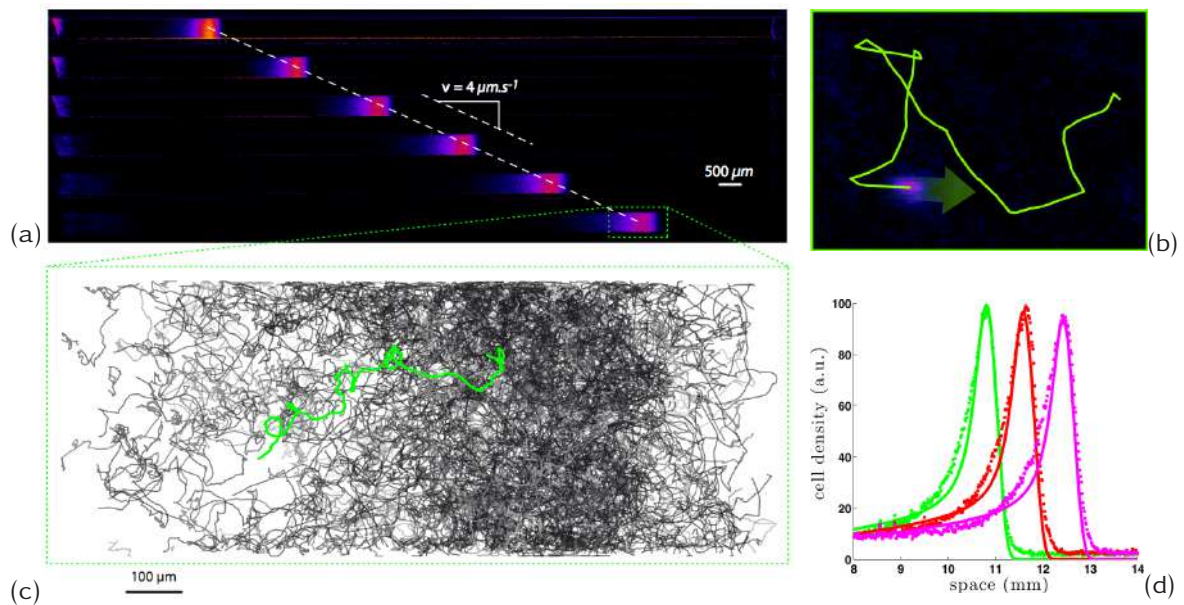
Les progrès spectaculaires de l'expérimentation et de l'imagerie donnent accès au suivi individuel de cellules au sein d'une colonie ou d'un organisme,

jusqu'à la reconstruction 3D des tissus en développement. Au-delà des avancées biologiques directes, ces méthodes appellent des modèles mathématiques à plusieurs niveaux de détails, du macroscopique (le tissu ou la colonie) jusqu'au niveau de la cellule individuelle.

Ces travaux de modélisation et d'analyse mathématique ont généralement pour but de comprendre des phénomènes collectifs à partir de règles de mouvements individuels. La bactérie *E. coli* est exemplaire à ce titre, car le mouvement individuel dans un environnement donné est très bien documenté [8], alors que les propriétés collectives sont encore souvent mystérieuses. Ce texte a pour but d'illustrer cela sur un cas d'étude, avec deux niveaux de détail : une échelle dite macroscopique où seule la densité spatiale est décrite dans le modèle, puis une échelle dite mésoscopique qui met en équation les statistiques de position et de vitesse des cellules au sein du nuage de bactéries.

Cette démarche est illustrée dans la figure 1, avec respectivement : (a) la propagation des bandes à haute densité en bactéries comme dans l'expérience d'Adler ; (b) le suivi individuel d'une bactérie ; (c) la reconstruction de milliers de trajectoires au cours de la propagation ; (d) le résultat d'un travail interdisciplinaire qui permet de valider un modèle EDP sur les données expérimentales après intégration des hypothèses biologiques dans les équations [28].

FIGURE 1 – Mouvement collectif chez *E. coli* [28]. (a) Une onde solitaire à haute densité en bactéries (couleur bleue à mauve) voyage de gauche à droite à vitesse constante avec un profil très bien préservé. (b) Trajectoire typique d'une bactérie de type *E. coli* en milieu liquide. Des phases de nage en ligne droite sont ponctuées par des réorientations rapides (voir Section 3). (c) Un suivi individuel de milliers de trajectoires (ici rapportées dans le référentiel de l'onde) révèle la nature de l'onde à l'échelle mésoscopique : les bactéries ont un mouvement très biaisé à gauche du pic de l'onde, et plutôt diffusif à droite du pic. (Images réalisées par J. Saragosti). (d) Comparaison entre les simulations du modèle cinétique (5) (courbes) et les données expérimentales (points) pour la densité spatiale $\rho(t, x)$ à trois temps successifs. L'adéquation entre le modèle et les données expérimentales est très satisfaisante.



2. Un premier modèle à l'échelle macroscopique : un nuage de particules en interaction

Dans une série d'articles au début des années 70, Lee A. Keller et Evelyn F. Segel ont proposé un modèle macroscopique d'équations aux dérivées partielles (EDP) pour le chimiotactisme, avec des applications à l'auto-organisation de colonies d'amibes [21], ou à la migration collective de bactéries *E. coli* à la suite des expériences d'Adler [22]. Ce modèle décrit une densité spatiale de cellules au cours du temps, notée $\rho(t, x)$, couplée à un ou plusieurs signaux chimiques, dont les concentrations sont notées $S(t, x)$ et $N(t, x)$. Les principaux ingrédients du modèle sont : (i) le mouvement des cellules qui combine de la diffusion (partie symétrique du mouvement aléatoire) et de l'advection dans la direction du gradient de signal (partie biaisée du mouvement); (ii) la diffusion et la synthèse/

dégradation des composants moléculaires. Le modèle de Keller-Segel peut s'écrire de manière générique comme suit (avec une seule composante moléculaire S pour commencer) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\chi \rho \nabla S - D_\rho \nabla \rho) = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial S}{\partial t} = D_S \Delta S + R(S, \rho) \end{cases} \quad (1)$$

Les paramètres sont la sensibilité au gradient χ (facteur de colinéarité entre la vitesse de transport et le gradient ∇S); les coefficients de diffusion D_ρ, D_S ; et la fonction de réaction $R(S, \rho)$. Il est important de garder en tête qu'il s'agit uniquement de mouvement cellulaire (division et mort des cellules ne sont pas prises en compte dans ce modèle). Par conséquent, le nombre total de cellules, $\int \rho \, dx$, est préservé : on a $\int \rho(t, x) \, dx = \int \rho_0(x) \, dx$, où ρ_0 désigne la densité initiale de cellules.

De par sa simplicité et son caractère générique, ce modèle a connu un fort succès à la fois pour la modélisation biologique, et pour l'analyse mathématique de nombreux cas particuliers et variantes. Sous l'hypothèse que la temporalité de la réaction-diffusion moléculaire est nettement plus rapide que celle des mouvements cellulaires (autrement dit, on élimine le terme $\frac{\partial S}{\partial t}$ de la seconde équation), et pour $R(S, \rho) = \beta \rho$ (synthèse du signal proportionnelle au nombre de cellules, sans dégradation), la seconde équation est réduite à $-D_S \Delta S = \beta \rho$. On peut la simplifier un peu plus en $-\Delta S = \rho$ par un simple changement d'unités. Le modèle est alors équivalent à l'équation de Smoluchowski-Poisson, dans lequel ρ désigne un nuage de particules en interaction gravitationnelle, et S est le champ de gravitation.

Le cas de la dimension $d = 2$ est particulièrement intéressant, et s'il ne fallait énoncer qu'un seul résultat pour le modèle de Keller-Segel (1) parmi un vaste corpus, ce serait la dichotomie entre existence globale avec décroissance de la densité ρ en temps long *versus* explosion en temps fini de la solution. Le deuxième cas de figure est intéressant du point de vue de la modélisation, car il traduit l'agrégation cellulaire de manière singulière (plus les cellules sont concentrées, plus le signal est fort, et plus celles-ci répondent au signal jusqu'à former une singularité). Cette dichotomie dépend uniquement de la donnée initiale à travers la masse totale de cellules $\int \rho_0 dx$ (indépendamment de la distribution des cellules, pourvu qu'elle ne soit pas

pathologique). On a en fait le résultat suivant :

Théorème ($d = 2$). *Si la donnée initiale est de variance finie et d'entropie finie :*

$$\int |x|^2 \rho_0(x) dx, \int \rho_0(x) \ln \rho_0(x) dx < \infty,$$

alors on a la dichotomie suivante :

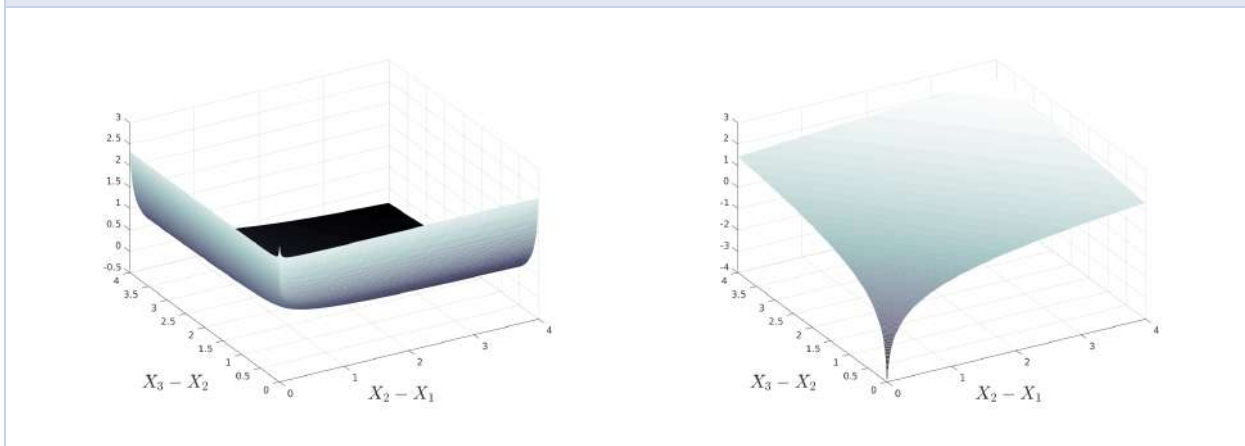
- (i) si $\chi \int \rho_0(x) dx < 8\pi D_\rho$, alors la solution tend vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$;
- (ii) si $\chi \int \rho_0(x) dx > 8\pi D_\rho$ alors la solution explose en temps fini.

Ce résultat a une longue histoire : il a été conjecturé dans les années 80, puis il a été démontré sous des conditions particulières (symétrie radiale, domaine borné, critère de seuil non optimal) dans les années 90, pour être établi sous la forme complète ci-dessus en 2006 [10]. L'élégance de ce résultat vient d'une structure entropique qui rentre formellement dans le cadre des flots gradients dans l'espace des mesures de probabilité muni de la métrique de transport de Kantorovich-Wasserstein [2, 32]. Plus précisément, la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(\rho) = D_\rho \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x) \ln \rho(x) dx + \frac{\chi}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \ln|x-y| \rho(x) \rho(y) dx dy \quad (2)$$

est décroissante le long du flot de l'EDP. Les deux termes dans \mathcal{E} représentent respectivement la diffusion et l'attraction mutuelle des cellules.

FIGURE 2 – Représentation synthétique de la fonctionnelle $\mathcal{E}(\rho)$ pour deux valeurs de χ , ce qui conduit à des dynamiques de flot gradient radicalement opposées : (a) le cas où la diffusion domine, l'écart entre les particules augmente ; (b) le cas où l'attraction mutuelle domine, l'écart entre les particules se resserre jusqu'à s'annuler.



(i) Pour ce qui est de l'existence globale des solutions, la balance entre ces deux contributions est réglée par une inégalité de type Hardy-Littlewood-Sobolev (logarithmique) [16]. Cette inégalité fonctionnelle stipule qu'il existe une constante $C(d)$ qui dépend seulement de la dimension, telle que pour toute fonction raisonnable,

$$\begin{aligned}
 & - \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \ln|x-y| \rho(x)\rho(y) dx dy \\
 & \leq \frac{1}{d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \ln \rho(x) dx \right) + C(d). \quad (3)
 \end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité en dimension $d = 2$, on obtient l'estimation *a priori* suivante de la solution $\rho(t, x)$:

$$\begin{aligned}
 & \left(D_\rho - \frac{\chi}{8\pi} \int \rho_0(x) dx \right) \int \rho(t, x) \ln \rho(t, x) dx - C'(d) \\
 & \leq \mathcal{E}(\rho(t, \cdot)) \leq \mathcal{E}(\rho_0),
 \end{aligned}$$

car d'une part l'intégrale $\int \rho(t, x) dx$ est préservée, et d'autre part, la fonctionnelle \mathcal{E} est décroissante le long du flot. Ainsi, lorsque $\chi \int \rho_0(x) dx < 8\pi D_\rho$, on montre que la quantité $\int \rho \ln \rho dx$ est bornée par au-dessus, ce qui est une information précieuse. En particulier, cela exclut la formation de masses de Dirac (pour lesquelles $\int \rho \ln \rho dx$ exploserait tout en gardant la quantité $\int \rho dx$ constante). De fait, cela suffit à démontrer que la solution existe en tout temps, est régulière, et de plus, tend vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$. C'est le cas où la diffusion domine.

(ii) L'explosion en temps fini, quant à elle, découle directement de l'homogénéité logarithmique de la fonctionnelle \mathcal{E} sous l'action des dilatations de la position ($x \mapsto \lambda x$). Plus précisément, on introduit une famille de densités dilatées $\{\rho^\lambda\}$ paramétrée par $\lambda > 0$: $\rho^\lambda(y) = \frac{1}{\lambda^2} \rho\left(\frac{y}{\lambda}\right)$. Le préfacteur est choisi pour préserver la masse totale $\int \rho^\lambda(y) dy = \int \rho(x) dx$, qui est un invariant du problème (le nombre de cellules est conservé). Alors, on peut calculer par simple changement de variable la relation d'homogénéité $\mathcal{E}(\rho^\lambda) = \mathcal{E}(\rho) - \alpha \ln \lambda$, où la constante $\alpha = 2 \left(\int \rho_0(x) dx \right) \left(D_\rho - \frac{\chi}{8\pi} \int \rho_0(x) dx \right)$ mesure l'influence relative de la diffusion et de l'attraction. Une manière formelle de comprendre la-dite obstruction à l'existence globale consiste à dériver cette relation d'homogénéité par rapport à λ , en $\lambda = 1$. On obtient ainsi $\rho \cdot \nabla \mathcal{E}(\rho) = -\alpha$ dans un certain sens. Par ailleurs,

l'EDP (1) est formellement équivalente au flot gradient $\dot{\rho} = -\nabla \mathcal{E}(\rho)$, d'où il découle que $\rho \cdot \dot{\rho} = \alpha$. Dans le cas d'une structure hilbertienne, nous aurions directement $\rho \cdot \dot{\rho} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|^2$, et la positivité de $\|\rho\|^2$ ne serait plus garantie en temps long si $\alpha < 0$! Pour la métrique de Kantorovich-Wasserstein, la quantité analogue à $\|\rho\|^2$ est la variance de la densité $\int |x|^2 \rho(t, x) dx$ qui décroît linéairement jusqu'à explosion de la solution dans le cas où $\alpha < 0$. C'est une conséquence directe de l'homogénéité du problème et de la structure sous-jacente de flot gradient¹. C'est le cas où l'attraction mutuelle est forte.

Il est possible de caricaturer ce type de dynamique en petite dimension en faisant une approximation numérique très grossière de \mathcal{E} en coordonnées lagrangiennes. Cela correspond grosso modo à remplacer la densité ρ par trois points de masse, et à étudier la dynamique flot gradient des trois positions. Pour cette simplification, on considère la fonction $E(X) = -\ln(X_3 - X_2) - \ln(X_2 - X_1) + \chi[\ln(X_3 - X_2) + \ln(X_3 - X_1) + \ln(X_2 - X_1)]$ définie pour des coordonnées ordonnées $X_1 < X_2 < X_3$, et qui correspond à une discrétisation numérique lagrangienne de (2) en trois points de masses égales. Il est immédiat de voir que la fonction E est logarithmiquement homogène sous l'action des dilatations de la position, $E(\lambda X) = E(X) - \alpha \ln \lambda$, avec $\alpha = 2 - 3\chi$. Chaque graphe de la figure 2 représente E en fonction des distances relatives $(X_2 - X_1, X_3 - X_2)$ pour (a) $\chi = 1/2 < 2/3$, et (b) $\chi = 1 > 2/3$. Ainsi, le flot gradient $\dot{X}(t) = -\nabla E(X(t))$ explose en temps fini lorsque $\chi > 2/3$: il existe un temps T tel que $X_3(T) = X_2(T)$, ou $X_2(T) = X_1(T)$ (ou les deux), cf. (b). En revanche, les particules s'éloignent ($\lim X_j(t) - X_i(t) = +\infty$) lorsque $\chi < 2/3$, cf. (a).

En résumé, la version simplifiée du modèle (1) permet de décrire l'étalement de la population de cellules si l'interaction est faible (la densité tend vers zéro), ou au contraire l'agrégation des cellules (des singularités apparaissent en temps fini) lorsque l'attraction mutuelle est forte.

3. Un second modèle à l'échelle mésoscopique : courses et culbutes

Aussi fascinante que soit la structure géométrique du modèle de Keller-Segel (le flot gradient d'une fonctionnelle homogène dans un espace mé-

1. On peut remarquer que l'action des dilatations permet également de déterminer le facteur $\frac{1}{d}$ dans l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev logarithmique (3), et la boucle est bouclée.

trique), il n'est pas toujours possible de le calibrer pour répondre à une question biologique précise. Du reste, un grand bond expérimental fut réalisé l'année qui suivit la publication du modèle (1), à savoir la détection de trajectoires individuelles de *E. coli*, voir figure 1(b). Cela conduisit à une connaissance de plus en plus précise de la manière dont chaque bactérie répond à un environnement hétérogène, qu'il soit variable dans le temps ou dans l'espace, voir par exemple la monographie [8].

Une série d'expériences réalisées dans les années 70 et 80 a permis de dégager une image assez nette des déplacements de *E. coli* : le mouvement de la bactérie procède d'une succession de nages en ligne droite (phase de *run*) ponctuée de brusques changements de direction (phase de *tumble*), ce qu'on peut résumer en une alternance de courses et culbutes (figure 1(b)). Les détails biophysiques de cette alternance sont désormais connus, et sont déterminés par le sens de rotation des moteurs moléculaires qui font tourner les flagelles qui propulsent la bactérie. Il est intéressant de donner ici quelques chiffres : *E. coli* a une envergure de $2\mu\text{m}$, une vitesse de $20\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, et effectue en moyenne un changement de direction par seconde. Cette stratégie lui permet d'explorer l'espace de manière très efficace (elle parcourt environ 10 fois sa taille en une seule course).

Côté mathématique, ces nouvelles connaissances biologiques se sont déclinées rapidement en une modélisation du mouvement dans l'espace des phases (position, vitesse), analogue à la théorie cinétique des gaz ; citons à titre d'exemple [19], et aussi l'article dans *La Gazette* [5]. Le principe est de décrire la dynamique temporelle de la densité de cellules $f(t, x, v)$ au cours du temps en fonction de la position x et de la vitesse v . Le transport libre ($\dot{x} = v, \dot{v} = 0$), ponctué de réorientations soudaines ($v' \rightarrow v$), est une bonne approximation du mouvement individuel. Pour la densité, cela se traduit par l'équation cinétique ci-dessous :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \int_V (T(t, x, v, v')f(t, x, v') - T(t, x, v', v)f(t, x, v)) dv' \quad (4)$$

La fonction $T(t, x, v, v')$ décrit le taux de transition entre la vitesse antérieure v' et la vitesse postérieure v , autrement dit la fréquence des culbutes et la façon dont la nouvelle direction est distribuée. Le travail de modélisation consiste à fixer une règle

pour $T(t, x, v, v')$, qui traduit fidèlement la manière dont une bactérie navigue dans un environnement hétérogène.

La bactérie *E. coli* répond à de multiples signaux chimiques, exogènes (oxygène, sucres) ou endogènes (acides aminés sécrétés par l'ensemble de la population). De fait, elle mesure les variations temporelles de ces concentrations au cours de ses déplacements. Ainsi, en première approximation, le taux de culbute est fonction de la dérivée matérielle $D_t S|_v = \left(\frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot \nabla_x S\right)$, qui exprime la variation du signal S le long de la trajectoire à vitesse v . De nombreuses expériences réalisées depuis les années 70 ont permis de décrire avec précision la réponse d'une bactérie à ces variations, que l'on résumera succinctement par la règle suivante : *les bactéries passent plus de temps dans les bonnes directions!* Autrement dit, le taux de culbute est une fonction décroissante de la dérivée matérielle $D_t S|_v$: on garde le cap si l'odeur alléchante augmente, et on change au plus vite de direction si celle-ci diminue.

Par ailleurs, la concentration des signaux est elle-même sujette à évolution par diffusion et par la dynamique bactérienne (consommation de sucre, sécrétion d'acides aminés) : le nuage de bactéries modifie son environnement au cours de la propagation.

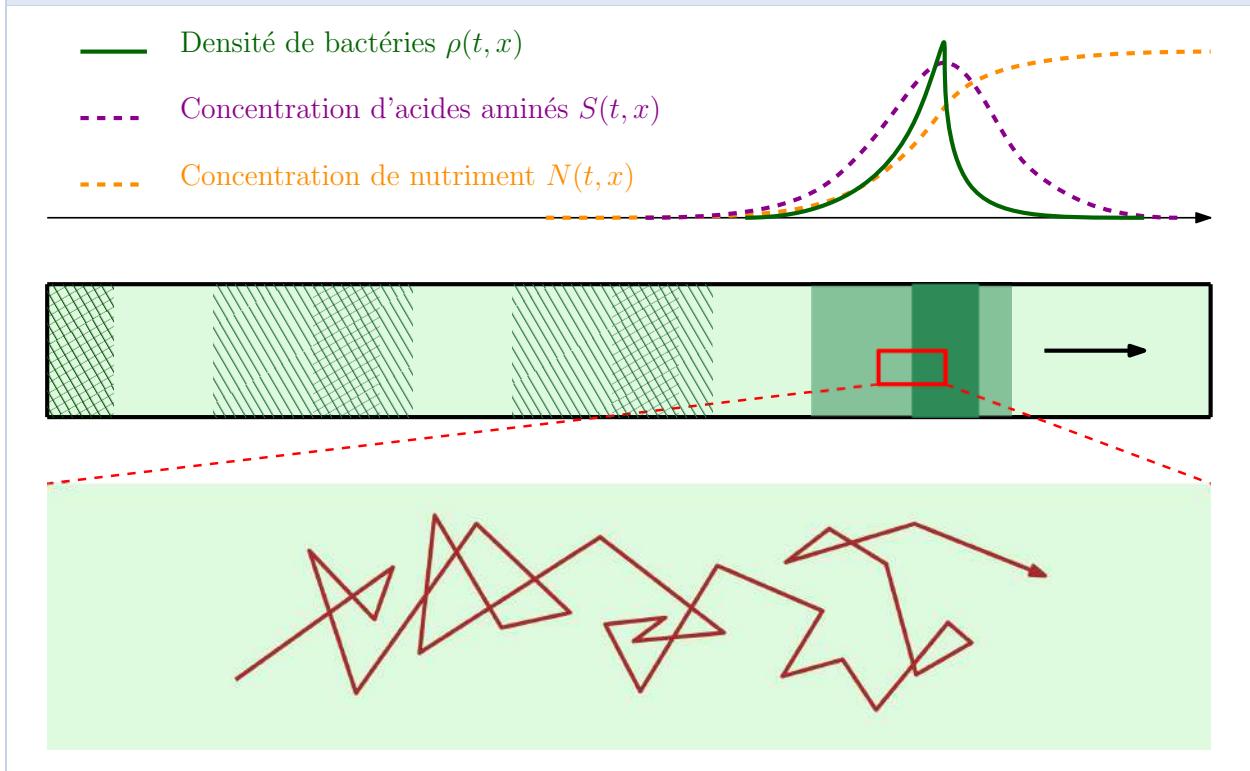
Tout compte fait, il est possible de décrire le mouvement collectif de bactéries par une équation cinétique couplée à une ou plusieurs équations de réaction-diffusion. Un modèle générique, avatar de (1) à l'échelle mésoscopique peut donc se formuler ainsi :

$$\begin{cases} D_t f|_v = \frac{1}{|V|} \int_V (\Phi(D_t S|_{v'})f(v') - \Phi(D_t S|_v)f(v)) dv' \\ \frac{\partial S}{\partial t} = D_S \Delta S + R(S, \rho), \quad \rho(t, x) = \int_V f(t, x, v) dv \end{cases} \quad (5)$$

C'est dans la fonction Φ , manière dont chaque bactérie intègre les variations temporelles des signaux environnants, que se nichent les mécanismes de biologie cellulaire du chimiotactisme. Il existe de nombreux travaux qui déclinent la modélisation à une échelle encore plus fine intra-cellulaire mais cela dépasse le cadre de la présente discussion.

Nous allons voir maintenant comment exploiter cette approche pour répondre à la problématique des ondes de bactéries.

FIGURE 3 – Description schématique de l’onde de concentration de bactéries *E. coli* dans un micro-canal. La population de cellules reste groupée grâce à la sécrétion d’acides aminés et progresse dans la direction où les nutriments sont plus abondants.



4. Mouvement de bactéries en bande organisée

L’expérience d’Adler a été revisitée il y a une dizaine d’années à l’Institut Curie, dans une équipe de biophysique dirigée par Axel Buguin et Pascal Silberzan. Initialement, les bactéries sont situées à l’extrémité gauche du canal après centrifugation, et le nutriment (concentration N) est réparti uniformément dans le domaine. De plus, les bactéries sécrètent constamment des acides aminés qui diffusent dans le milieu (concentration S). Une hypothèse raisonnable est que les bactéries restent groupées (agrégation) en communiquant via « leur propre odeur » S , et qu’elles se déplacent ensemble pour suivre ce qu’il reste de nourriture N . Mais comment le formuler et le quantifier mathématiquement ?

Une première étape consiste à réduire la complexité du problème mathématique. En effet, le système (5) ne possède pas de structure particulière qui puisse guider l’analyse (entropie, énergie, etc). La non-linéarité est relativement inoffensive en ce

qui concerne le caractère bien posé (du moment que Φ est bornée). Cependant, (5) possède un caractère non local très imbriqué : les particules interagissent en se déplaçant dans un champ de signaux S et N , et la dynamique de l’environnement chimique (S, N) dépend lui-même de la densité spatiale ρ , voir figure 3.

Une simplification possible est donnée par les limites d’échelle pour les équations cinétiques [5] : dans le cas où le mouvement est sans biais ou avec un biais très faible, le nuage de bactéries tend à diffuser dans la variable spatiale sur des échelles de temps assez longues. Mathématiquement, cela peut se réaliser par exemple lorsque $\Phi(\cdot) = \Phi_0 + \epsilon\phi(\cdot)$, où Φ_0 est une constante et ϕ est antisymétrique. En effectuant un zoom arrière $x = \mathbf{x}/\epsilon$, et en accélérant le temps $t = \mathbf{t}/\epsilon^2$ pour voir le nuage évoluer, on obtient une équation pour la densité spatiale dans les nouvelles variables lorsque $\epsilon \rightarrow 0$: $\rho(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \rho(t, x)$ est solution de l’équation macroscopique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u} - D_\rho \nabla \rho) = 0. \quad (6)$$

La somme des biais individuels crée un transport à l'échelle macroscopique $\mathbf{u} = -\int_V v\phi(v \cdot \nabla_x \mathbf{S}) dv$. On peut remarquer que l'on retrouve le terme de transport dans (1) si l'on linéarise

$$\mathbf{u} \approx -\phi'(0) \left(\int_V |v|^2 dv \right) \nabla_x \mathbf{S},$$

mais le régime où cette approximation est valide peut être assez restreint.

A contrario, si ϕ est discontinue en zéro, signe que les bactéries distinguent parfaitement les bonnes directions des mauvaises (une petite variation du signal est amplifiée par la machinerie cellulaire pour guider les bactéries dans telle ou telle direction), alors cette approximation n'est jamais valide. Prenons pour illustration le cas à une dimension d'espace ($d = 1$), et la fonction $\phi = -\text{sign}$. Alors, $\mathbf{u} = \chi_S \text{sign} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)$. Autrement dit, le nuage de bactéries détecte le signe du gradient au niveau macroscopique, par accumulation de petits biais dans la direction des signaux croissants. On s'éloigne alors radicalement du modèle standard (1).

À ce stade, nous sommes capables de proposer un premier modèle pertinent pour la migration des bactéries dans l'axe du canal ($d = 1$), incluant la densité spatiale de cellules ρ , et deux signaux chimiques : \mathbf{S} (acides aminés) et \mathbf{N} (nutriment). Nous supposons que les effets des deux signaux sont additifs, avec des paramètres différents. De plus, \mathbf{N} est consommé (terme de réaction négatif) tandis que \mathbf{S} est produit par les cellules (terme positif). Le système d'équations s'écrit naturellement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mathbf{u}) - D_\rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = D_S \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} - \alpha \mathbf{S} + \beta \rho \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = D_N \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} - \gamma \rho \mathbf{N} \end{cases} \quad (7)$$

où la vitesse de transport macroscopique est maintenant $\mathbf{u} = \chi_S \text{sign} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) + \chi_N \text{sign} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)$. Un premier résultat est l'existence de solutions particulières de type onde : il existe une vitesse $c > 0$ (inconnue du problème), et des solutions particulières, non triviales, stationnaires dans le référentiel en mouvement : $\rho(x - ct)$, $\mathbf{S}(x - ct)$, $\mathbf{N}(x - ct)$. De plus, la

vitesse collective c est l'unique solution de l'équation implicite :

$$\chi_N - c = \chi_S \frac{c}{\sqrt{4D_S \alpha + c^2}}. \quad (8)$$

Le terme de gauche exprime la tendance à la migration en réponse au nutriment toujours plus abondant au devant de l'onde, tandis que la partie droite exprime la tendance à l'agrégation, et donc à l'immobilisme par rapport au nuage de bactéries. La confrontation de cette formule avec les données s'est révélée satisfaisante [29]. On peut donc en conclure que le scénario à deux signaux (directionnalité et confinement attractif) est très plausible, voir figure 1(c) et figure 3.

Cependant, cette réduction de complexité et l'analyse afférente ne sont valides que pour des biais faibles ($\epsilon \ll 1$), et par conséquent des ondes lentes. Certaines souches de bactéries génèrent au contraire des ondes rapides, signe de biais importants (comme dans la figure 1(a)), et la limite d'échelle parabolique $(t, x) = (t/\epsilon^2, x/\epsilon)$ n'est plus adéquate. Néanmoins, il est possible de démontrer, modulo un certain effort mathématique, et la perte d'une formulation simple de la vitesse (8), l'existence d'ondes progressives $f(x - ct, v)$, $S(x - ct)$, $N(x - ct)$ pour un modèle mésoscopique tel que (5), couplé à un environnement à deux signaux tout comme dans (7) [14]. Il est crucial de comprendre l'allure des profils en vitesse pour déterminer la propagation spatiale de la population. Autrement dit, il faut décrire finement les hétérogénéités locales des distributions en vitesse pour comprendre la propagation de la population dans son ensemble.

5. Perspectives choisies

Les questionnements ci-dessus ne sont qu'une infime portion d'un vaste corpus sur les mouvements organisés en biologie. Je donne ci-dessous des variations possibles autour du cas d'étude présenté ici, pour la curiosité de celles et ceux qui lisent ces lignes.

Applications à la biologie du développement.

Les expériences biologiques de la figure 1 sont réalisées dans un milieu fermé très contrôlé. A contrario, la migration cellulaire en milieu naturel joue un rôle

2. On renvoie à la notice consacrée à *Dictyostelium discoideum* dans *Current Biology* Vol 20 pour une introduction à l'amibe « sociale » Dicty au cycle de vie fascinant.

[https://www.cell.com/current-biology/pdf/S0960-9822\(10\)01169-3.pdf](https://www.cell.com/current-biology/pdf/S0960-9822(10)01169-3.pdf)

déterminant lors de certaines étapes clés du développement des organismes (l'assemblage d'amibes uni-cellulaires en un « champignon » multi-cellulaire au cours du cycle de vie²; la connexion du fœtus à la circulation sanguine dans l'utérus; la phase de gastrulation, c'est-à-dire le repliement de l'embryon suite à la phase initiale de prolifération cellulaire, pour ne citer que quelques exemples). C'est également le cas pour des pathologies comme le cancer, où la migration en réponse à un faible niveau d'oxygène est en partie responsable de l'initiation de métastases [27].

Naviguer dans un environnement complexe.

À ma connaissance, la plupart des travaux de modélisation sur ces phénomènes de migration dans les tissus vivants font l'hypothèse de gradients de signalisation réguliers, à l'image de (1). Des études récentes considèrent des signaux plus complexes, à l'instar de bouffées odorantes dans un flot turbulent, pour appréhender des stratégies de recherches plus élaborées, voir par exemple une publication générale sur le concept d'*infotaxis* [31], et des articles dédiés aux stratégies de recherches des souris [20] et à la navigation des tortues vers l'île de l'Ascension [24].

Mouvements collectifs émergents. Un grand nombre d'articles récents sont consacrés à l'émergence de mouvements collectifs via des interactions directes entre individus (typiquement l'alignement des vitesses avec les plus proches voisins, ou bien pondéré par la distance relative, avec ou sans aléa). Il s'agit, entre autres, de comprendre et décrire les dynamiques fascinantes de nuées de milliers d'oiseaux.

Ces modèles sont de nature différente des modèles de chimiotactisme présentés ci-dessus, pour lesquels l'interaction s'effectue par l'intermédiaire d'un signal chimique de type champ moyen. Cependant, il me semble intéressant de mentionner que la recherche dans ce domaine se structure également sur plusieurs niveaux de description (micro/méso/macrosopique), avec des idées originales telles que les *invariants collisionnels généralisés* pour pallier le défaut apparent de lois de conservation.

Comme portes d'entrée dans cette vaste bibliographie, on pourra consulter le texte du séminaire Laurent Schwartz [18], ou encore les publications suivantes pour des comparaisons avec des expé-

riences de colloïdes auto-propulsés [13], ou des observations de nuées d'oiseaux [9]. Du reste, un article spécifique de *La Gazette* serait nécessaire pour couvrir ce sujet en plein boom.

Et l'humain dans tout ça? La modélisation des mouvements de foule à différentes échelles est également un sujet foisonnant. Je renverrais simplement à un autre article de *La Gazette* [23], et je mentionnerais l'article plus récent [4] consacré à la description hydrodynamique d'ondes dans les foules compactes au départ du marathon de Chicago (contrôlées par les cordons d'organiseurs), voir aussi³.

D'autres variables mésoscopiques sont possibles. Pour la dernière perspective, je vais revenir sur un sujet auquel j'ai contribué. À la suite de travaux précurseurs [17, 3], nous avons poursuivi l'étude de fronts d'invasion d'espèces avec une forte hétérogénéité dans les capacités de dispersion des individus [6]. L'équation prototype pour l'invasion d'une population nouvelle est l'équation de F-KPP (pour Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov, et qui remonte aux années 1930) qui met dans la balance diffusion spatiale avec coefficient $\theta > 0$ (mouvement sans biais des individus) et croissance de la population au taux $r > 0$ (avec saturation au seuil de densité K) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \theta \Delta \rho = r \rho \left(1 - \frac{\rho}{K} \right). \quad (9)$$

Le point remarquable est que cette équation produit des ondes, au sens où les lignes de niveau de la densité spatiale ρ se propagent asymptotiquement à la vitesse $c = 2\sqrt{r\theta}$. Cela peut sembler surprenant au premier abord car la composante spatiale de (9) (l'équation de la chaleur) conduit à une propagation sous-linéaire où les lignes de niveau progressent seulement comme \sqrt{t} . Dans le cas de (9), c'est l'action combinée de la croissance (r) et de la diffusion (θ) qui fait avancer les lignes de niveau linéairement. Une manière de s'en convaincre est d'étudier l'équation sans saturation ($K = +\infty$). Cette EDP linéaire a pour solution fondamentale

$$\bar{\rho}(t, x) = \frac{1}{(4\pi\theta t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\theta t} + rt\right). \quad (10)$$

Le terme dominant (dans l'exponentielle) peut se factoriser en $rt\left(1 - \frac{|x|^2}{4r\theta t^2}\right)$, ce qui fait apparaître la

3. <https://www.arte.tv/fr/videos/086132-003-A/reconnexion/>

propagation linéaire des lignes de niveau à la même vitesse $c = 2\sqrt{r\theta}$ que pour $K < +\infty$. Ce point mérite d'être souligné : dans l'équation (9), la vitesse de propagation ne dépend pas du seuil de saturation. Ce sont les faibles densités qui contribuent principalement à l'invasion.

Il existe de très nombreux cas bien repertoriés d'invasions décrites par une équation similaire à (9). Citons comme illustration un cas très particulier : l'hypothèse de diffusion démique selon laquelle la transition néolithique en Europe (environ 10 000–5000 AEC) résulterait principalement d'un flux de population, avec relativement peu d'interactions entre agriculteurs et chasseurs-cueilleurs (en op-

position à l'hypothèse de diffusion culturelle pour laquelle les techniques agricoles se seraient propagées par imitation au sein des populations autochtones) voir [26]. Cependant, un cas d'invasion en cours pose un problème singulier : la progression de *Rhinella marina* (crapaud buffle) dans la partie tropicale de l'Australie accélère au cours du temps [25]. La propagation est nettement sur-linéaire, avec un exposant d'environ 1,6 sur une section à latitude constante (et à environnement à peu près homogène). Pour donner un ordre de grandeur, l'invasion a cours depuis les années 1930, suite à l'introduction de cette espèce pour lutter contre un parasite de la canne à sucre, et a parcouru environ 2000 km d'est en ouest, voir figure 4.

FIGURE 4 – Cartographie de l'invasion du crapaud buffle en Australie [30] : (a) la progression de l'espèce invasive par tranches de 5 ans, d'est en ouest (climat tropical); (b) la vitesse d'expansion qui s'accroît avec l'avancée du front (variations de 10 à 50 km/an).

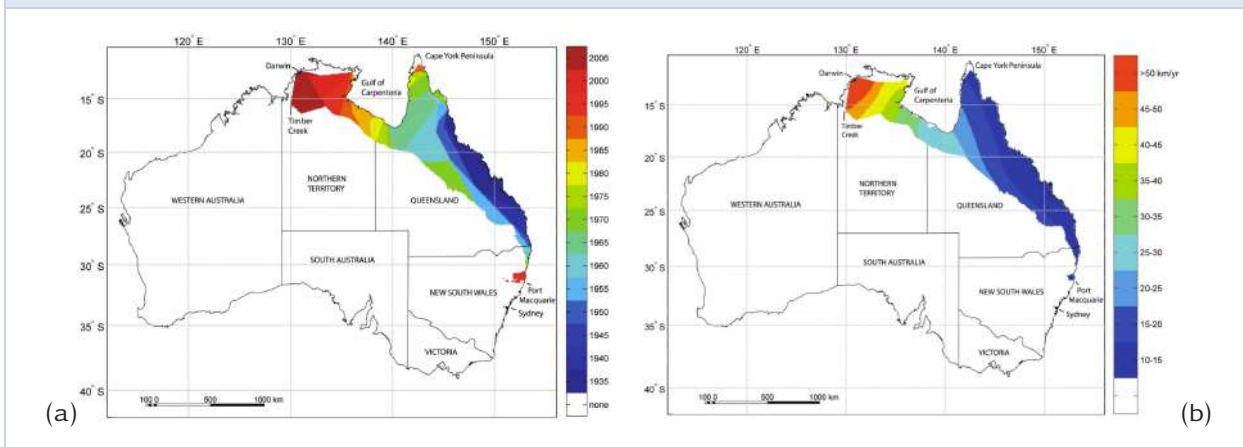
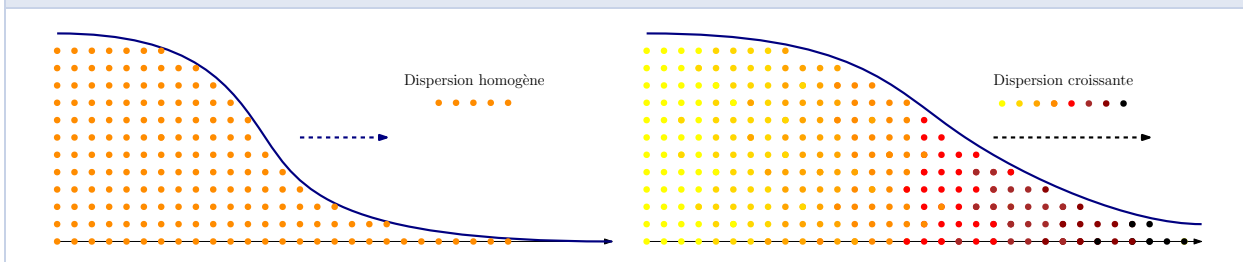


FIGURE 5 – Description schématique de l'évolution de la dispersion au sein d'un front d'invasion : les individus les plus dispersifs sont surreprésentés à l'avant du front, et donnent naissance à des individus potentiellement plus dispersifs, ce qui a tendance à accélérer la propagation.



L'hypothèse communément admise est que la population est sujette à un biais évolutif qui sélectionne des individus de plus en plus dispersifs à l'avant du front d'invasion, voir figure 5. De fait, la forte hétérogénéité vis-à-vis de la capacité de dispersion mesurée au sein de la population, ainsi que le grand nombre de générations depuis le début de l'invasion constituent la base de cette hypothèse. Mathématiquement, on peut s'inspirer des modèles cinétiques tels que (4) pour formuler une telle hypothèse, mais en remplaçant la variable de vitesse v par une variable de diffusion θ . Si $f(t, x, \theta)$ désigne la densité de population au cours du temps en fonction de la position ($x \in \mathbb{R}$) et de la capacité de dispersion (ici mesurée par le coefficient diffusion $\theta > 0$), et si on considère que la capacité de dispersion peut varier aléatoirement (sans biais) à chaque génération, on obtient l'EDP suivante [6] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r \left(f + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\rho}{K} f \right),$$

$$\rho(t, x) = \int_0^{+\infty} f(t, x, \theta) d\theta. \quad (11)$$

On retrouve des termes analogues à (9) à l'exception du terme évolutif $\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ qui génère la diversité au sein de la population au fil des générations. Par exemple, en intégrant le membre de droite par rapport à θ , on obtient précisément $r\rho \left(1 - \frac{\rho}{K}\right)$ tout comme dans (9). Il est important de dire que le terme de saturation quadratique est proportionnel à $-\rho f$ et non pas $-\rho^2$ car il est naturel de supposer que les individus sont en compétition avec tous les individus situés à proximité, et non pas seulement avec les individus ayant les mêmes caractéristiques de dispersion.

L'équation (11) peut être vue comme un modèle minimal pour questionner l'hypothèse de sélection par la dispersion au sein du front. Il a été démontré que la propagation est effectivement sur-linéaire, avec un exposant $3/2$ (proche des observations, donc, mais cela peut être une simple coïncidence), voir [12, 7, 11]. Cet exposant est attaché à l'opérateur laplacien hypoelliptique $-\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$. Cependant, le mécanisme est un peu plus subtil que pour (9), car un raisonnement analogue partant du problème sans saturation ($K = +\infty$) aboutit, via un calcul similaire à (10), à une progression des lignes de niveau comme $\frac{4}{3} t^{3/2}$ (ceci pour $r = \alpha = 1$, la valeur générale se déduisant simplement par un changement d'unités). Or, le préfacteur dans l'accélération de (11) est légèrement en-deçà de $\frac{4}{3}$, de l'ordre de

2% de différence relative (voir [15] pour la valeur exacte obtenue comme racine d'un polynôme de haut degré en les fonctions d'Airy). Cela démontre que la saturation joue un rôle quantitatif dans la propagation, même si le seuil de saturation K , quant à lui, n'intervient pas dans la formule.

Au-delà de cette étude particulière, ce que je trouve intéressant dans (11) est la juxtaposition dans une même équation de phénomènes écologiques (invasion d'une nouvelle espèce dans un habitat), et de phénomènes évolutifs (sélection des individus les plus dispersifs au sein du front). Souvent les deux aspects sont séparés l'un de l'autre en invoquant des échelles de temps très différentes (l'évolution est plus lente que l'écologie). Cependant il existe de nombreux cas de figure où les deux phénomènes sont concomitants, l'invasion de *Rhinella marina* semble en être un exemple concret (du fait de la taille de l'habitat qui permet un grand nombre de générations!). Sur le plan mathématique, les dynamiques dans les différentes variables x (écologie) et θ (évolution) ne peuvent pas être séparées, et il s'agit de comprendre comment la dynamique évolutive façonne la dynamique spatiale, tout comme pour les ondes d'*E. coli* où les profils en vitesse façonnent la propagation spatiale du nuage de bactéries.

Message de conclusion

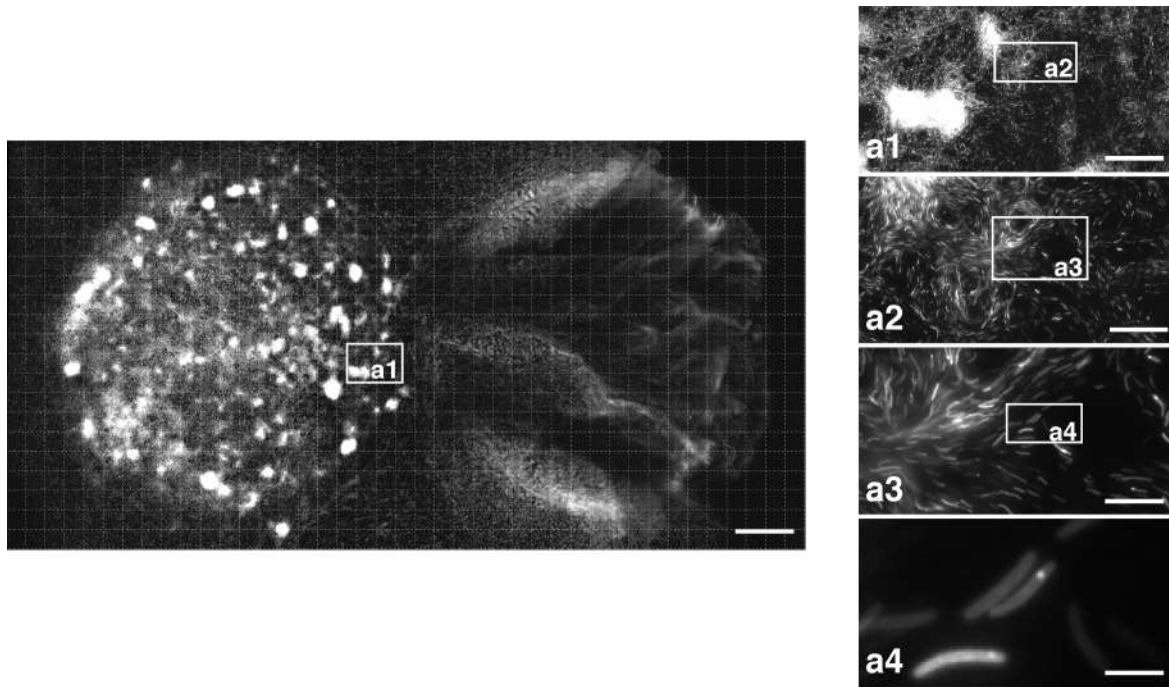
La modélisation à plusieurs niveaux de description est un formidable outil mathématique pour appréhender l'organisation de populations (cellules ou autre) en sciences de la vie. L'avancée des connaissances, ainsi que les techniques d'acquisition d'images, avec toujours plus de finesse et d'information biologique, requièrent des équations nouvelles et une analyse originale pour développer cette démarche scientifique.

Une expérience réalisée au Laboratoire de Chimie Bactérienne à Marseille, dans l'équipe de Târn Mignot, permet d'illustrer, encore, cette façon de voir les choses. La figure 6 représente deux colonies de bactéries circulaires mises en contact au début de l'expérience : à droite, *Escherichia coli* (la proie), à gauche *Myxococcus xanthus* (la prédatrice), qui a déjà digéré toute la proie à ce stade de l'expérience, et qui commence à s'organiser pour échapper à l'épuisement de la ressource. Le système d'acquisition permet de visualiser en même temps la dynamique de la colonie tout entière (grand format) et l'état de chaque bactérie prise individuellement (for-

mat a4), en passant par des niveaux intermédiaires d'organisation (a1, a2, a3). Il y a encore beaucoup de choses à comprendre dans cette expérience type,

et il est vraisemblable que les modèles mathématiques joueront un rôle clé dans ces recherches.

FIGURE 6 – Visualisation du cycle de prédation de la bactérie *M. xanthus* à plusieurs échelles de résolution (Image réalisée dans l'équipe de T. Mignot).



Références

- [1] J. ADLER. « Chemotaxis in Bacteria ». *Science* **153**, n° 3737 (déc. 1966), p. 708-716.
- [2] L. AMBROSIO, N. GIGLI et G. SAVARÉ. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Second. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [3] A. ARNOLD, L. DESVILLETES et C. PRÉVOST. « Existence of nontrivial steady states for populations structured with respect to space and a continuous trait ». *Commun. Pure Appl. Anal.* **11**, n° 1 (2012), p. 83-96.
- [4] N. BAIN et D. BARTOLO. « Dynamic response and hydrodynamics of polarized crowds ». *Science* **363**, n° 6422 (jan. 2019), p. 46-49.
- [5] C. BARDOS et N. J. MAUSER. « Équations cinétiques : une histoire française ». fr. *La Gazette des Mathématiciens* **155** (2018).
- [6] O. BÉNICHOU et al. « Front acceleration by dynamic selection in Fisher population waves ». *Phys. Rev. E* **86** (4 oct. 2012), p. 041908.
- [7] N. BERESTYCKI, C. MOUHOT et G. RAOUL. *Existence of self-accelerating fronts for a non-local reaction-diffusion equations*. 2015. arXiv : 1512.00903 [math.AP].
- [8] H. C. BERG. *E. coli in motion*. Springer, 2004.
- [9] W. BIALEK et al. « Statistical mechanics for natural flocks of birds ». *PNAS* **109**, n° 13 (mars 2012), p. 4786-4791.
- [10] A. BLANCHET, J. DOLBEAULT et B. PERTHAME. « Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions ». *Electron. J. Differential Equations* (2006), No. 44, 32. issn : 1072-6691.
- [11] E. BOUIN, C. HENDERSON et L. RYZHIK. « Super-linear spreading in local and non-local cane toads equations ». *J. Math. Pures Appl. (9)* **108**, n° 5 (2017), p. 724-750.
- [12] E. BOUIN et al. « Invasion fronts with variable motility: phenotype selection, spatial sorting and wave acceleration ». *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **350**, n° 15-16 (2012), p. 761-766.

- [13] A. BRICARD et al. « Emergence of macroscopic directed motion in populations of motile colloids ». *Nature* **503**, n° 7474 (nov. 2013), p. 95-98.
- [14] V. CALVEZ. « Chemotactic waves of bacteria at the mesoscale ». *Journal of the European Mathematical Society* **22**, n° 2 (nov. 2019), p. 593-668.
- [15] V. CALVEZ et al. « Non-local competition slows down front acceleration during dispersal evolution ». *arXiv:1810.07634 [math]* (oct. 2018). arXiv: 1810.07634.
- [16] E. CARLEN et M. LOSS. « Competing symmetries, the logarithmic HLS inequality and Onofri's inequality on n ». *Geometric and Functional Analysis* **2**, n° 1 (mars 1992), p. 90-104.
- [17] N. CHAMPAGNAT et S. MÉLÉARD. « Invasion and adaptive evolution for individual-based spatially structured populations ». *J. Math. Biol.* **55**, n° 2 (2007), p. 147-188.
- [18] P. DEGOND et al. « Macroscopic models of collective motion and self-organization ». *Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications* (2012), p. 1-27.
- [19] R. ERBAN et H. G. OTHMER. « From Individual to Collective Behavior in Bacterial Chemotaxis ». *SIAM J. Appl. Math.* **65**, n° 2 (jan. 2004), p. 361-391.
- [20] D. H. GIRE et al. « Mice Develop Efficient Strategies for Foraging and Navigation Using Complex Natural Stimuli ». *Current Biology* **26**, n° 10 (mai 2016), p. 1261-1273.
- [21] E. F. KELLER et L. A. SEGEL. « Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability ». *Journal of Theoretical Biology* **26**, n° 3 (mars 1970), p. 399-415.
- [22] E. F. KELLER et L. A. SEGEL. « Traveling bands of chemotactic bacteria: A theoretical analysis ». *J. Theor. Biol.* **30** (fév. 1971), p. 235-248.
- [23] B. MAURY. « Grains de foules ». fr. *La Gazette des Mathématiciens* **152** (2017).
- [24] K. J. PAINTER et A. Z. PLOCHOCKA. « Efficiency of island homing by sea turtles under multimodal navigating strategies ». *Ecological Modelling* **391** (jan. 2019), p. 40-52.
- [25] B. L. PHILLIPS et al. « Invasion and the evolution of speed in toads ». *Nature* **439**, n° 7078 (fév. 2006), p. 803-803.
- [26] R. PINHASI, J. FORT et A. J. AMMERMAN. « Tracing the Origin and Spread of Agriculture in Europe ». *PLoS Biol* **3**, n° 12 (nov. 2005), e410.
- [27] E. B. RANKIN et A. J. GIACCIA. « Hypoxic control of metastasis ». *Science* **352**, n° 6282 (avr. 2016), p. 175-180.
- [28] J. SARAGOSTI et al. « Directional persistence of chemotactic bacteria in a traveling concentration wave ». *PNAS* **108**, n° 39 (sept. 2011), p. 16235-16240.
- [29] J. SARAGOSTI et al. « Mathematical Description of Bacterial Traveling Pulses ». *PLoS Comput. Biol.* **6** (2010).
- [30] M. C. URBAN et al. « A Toad More Traveled: The Heterogeneous Invasion Dynamics of Cane Toads in Australia. » *The American Naturalist* **171**, n° 3 (mars 2008), E134-E148. (Visité le 12/08/2015).
- [31] M. VERGASSOLA, E. VILLERMAUX et B. I. SHRAIMAN. « 'Infotaxis' as a strategy for searching without gradients ». *Nature* **445**, n° 7126 (jan. 2007), p. 406-409.
- [32] C. VILLANI. *Optimal transport: old and new*. **338**. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2009.



Vincent CALVEZ

Université Claude Bernard Lyon 1
 Vincent.Calvez@math.cnrs.fr

Vincent Calvez est directeur de recherches au CNRS, affecté à l'Institut Camille Jordan à Lyon. Ses recherches se situent à l'interface des mathématiques et des sciences du vivant.

Ce texte a bénéficié des relectures attentives d'Aurélien Alvarez, Léonard Dekens, Mete Demircigil et Sylvie Méléard, ainsi que du suivi éditorial avisé de Romain Tessera. Leurs nombreux commentaires ont permis de compléter et d'enrichir considérablement le contenu. L'auteur remercie également ses collaborateurs ayant pris part aux travaux mentionnés ci-dessus (et les autres). Târn Mignot a gentiment accepté de fournir l'illustration de couverture, en l'occurrence un détail de la figure 6.



... la géométrie tropicale

• A. RENAUDINEAU

1. Introduction

La géométrie tropicale est un domaine assez récent des mathématiques qui est aujourd’hui un champ de recherche très actif. C’est une géométrie sur une algèbre particulière, l’algèbre max-plus, apparue en mathématique discrète autour des années 1980. En l’honneur de l’informaticien brésilien Imre Simon, des chercheurs français ont décidé de changer l’appellation « max-plus » par « tropicale ». Selon David Speyer et Bernd Sturmfels, « There is no deeper meaning in the adjective tropical. It simply stands for the French view of Brazil. »

Cette algèbre est reliée aux nombres réels par un processus de « déquantification », mis en lumière par Maslov dans les années 90. De fait la géométrie tropicale est étroitement liée à la géométrie algébrique complexe et réelle. De nombreux phénomènes en géométrie algébrique ont une manifestation « tropicale » et il est souvent possible à partir de la combinatoire des « variétés tropicales » de retrouver des invariants sur les variétés algébriques complexes. Nous reviendrons plus loin par quelques illustrations sur ces liens entre la géométrie tropicale et la géométrie algébrique classique. Commençons par définir le semi-corps tropical et la géométrie sur ce semi-corps.

2. Hypersurfaces tropicales

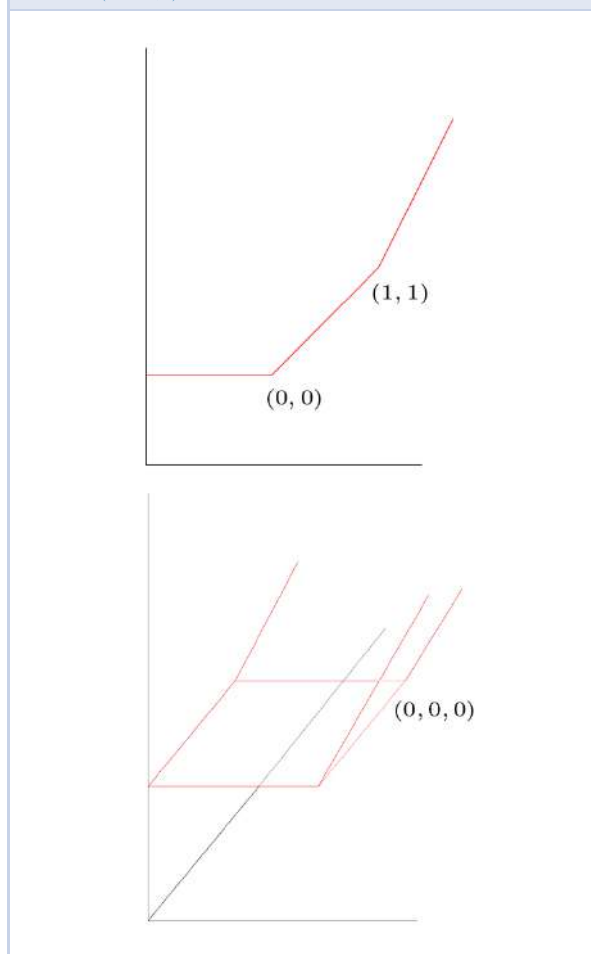
Le semi-corps tropical est $\mathbb{T} := (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$. Cet ensemble muni de ces deux lois satisfait à toutes les propriétés d’un corps commutatif (l’élément neutre pour le maximum étant $-\infty$), mis à part que l’addition tropicale (c’est-à-dire l’opération \max) n’admet presque jamais d’inverse. En effet, comme le maximum est une opération idempotente, si un élément de \mathbb{T} admet un inverse pour cette opération, alors il est égal à $-\infty$.

Un polynôme tropical en n variables prend alors la forme

$$P(x_1, \dots, x_n) = \max_{i=(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} (a_i + i_1 x_1 + \dots + i_n x_n),$$

avec $a_i \in \mathbb{T}$ non égaux à $-\infty$ sur un sous-ensemble fini de \mathbb{N}^n . Voir figure 1 pour quelques exemples de polynômes tropicaux et de leurs graphes.

FIGURE 1 – Graphe de $\max(0, x, 2x - 1)$ et $\max(0, x, y)$



Une petite remarque s'impose : dans cette algèbre, les fonctions polynomiales ne déterminent pas les polynômes. Par exemple les deux polynômes $\max(0, x, 2x)$ et $\max(0, 2x)$ coïncident en tant que fonctions. Nous considérerons à partir de maintenant uniquement les fonctions polynomiales. Notons qu'une fonction polynomiale tropicale est en fait simplement une fonction convexe linéaire par morceaux, chaque monôme étant donné par une fonction linéaire $a_i + i_1 x_1 + \dots + i_n x_n$.

On pourrait alors s'attendre en toute bonne foi à ce qu'une hypersurface tropicale soit donnée par les solutions de l'équation $P(x_1, \dots, x_n) = -\infty$, car $-\infty$ est l'élément neutre pour l'addition tropicale. Or, si le monôme constant de P n'est pas égal à $-\infty$, cette équation n'admet pas de solution, ce qui n'est pas vraiment satisfaisant d'un point de vue géométrique.

On voit en revanche que le graphe de P contient des points particuliers : les points où il se brise. Dans la figure 1, les points où se brise le graphe de $\max(0, x, 2x - 1)$ sont les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$, et les points où se brise le graphe de $\max(0, x, y)$ sont les $(0, a, 0)$ et $(a, 0, 0)$ pour $a \in [-\infty, 0]$. On définit alors l'hypersurface tropicale X_P associée à P comme l'ensemble des points de \mathbb{T}^n autour desquels la fonction P n'est pas linéaire. Autrement dit, un point $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$ appartient à X_P si et seulement si $P(x_1, \dots, x_n)$ est atteint par au moins deux monômes $a_i + i_1 x_1 + \dots + i_n x_n$ et $a_j + j_1 x_1 + \dots + j_n x_n$. Voir figure 2 pour quelques exemples d'hypersurfaces tropicales.

Les hypersurfaces tropicales sont des complexes polyédraux rationnels. Rappelons qu'un complexe polyédral X est un ensemble de polyèdres (intersection de demi-espaces) tel que

1. toute face d'un polyèdre de X est encore dans X ;
2. l'intersection de deux polyèdres est une face de chacun des deux polyèdres.

L'adjectif rationnel signifie que tous les demi-espaces définissant les polyèdres sont à direction entière.

3. Subdivision duale et condition d'équilibre

Ces complexes polyédraux satisfont une condition supplémentaire, appelée condition d'équilibre. Pour voir cela, introduisons un concept fondamental : la subdivision duale. Un outil très utile en géométrie algébrique classique est le *polytope de Newton*. Si $P = \sum \alpha_i z^i \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, alors le polytope de Newton de P est

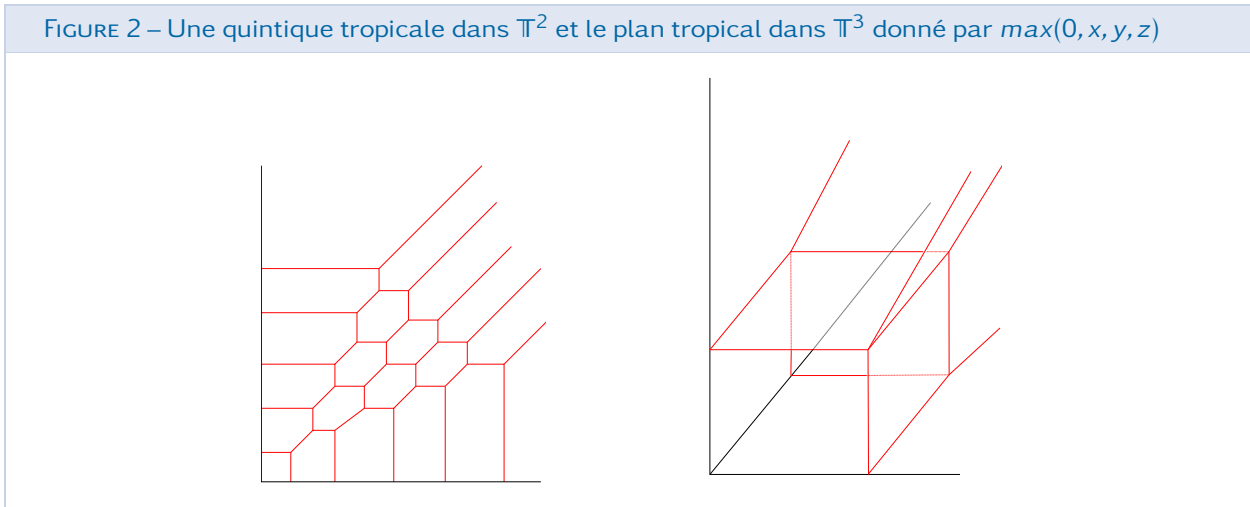
$$\Delta^{\mathbb{C}}(P) := \text{Conv}(i \in \mathbb{N}^n, \alpha_i \neq 0).$$

On peut traduire facilement dans le monde tropical la définition de polytope de Newton : soit $P(x_1, \dots, x_n) = \max_{i=(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} (a_i + i_1 x_1 + \dots + i_n x_n)$ un polynôme tropical. Alors on définit

$$\Delta(P) := \text{Conv}(i \in \mathbb{N}^n \mid a_i \neq -\infty).$$

Par exemple, le plan tropical donné par $\max(0, x, y, z)$ a comme polytope de Newton le simplexe standard dans \mathbb{R}^3 donné par l'enveloppe convexe de $0, e_1, e_2$ et e_3 , où e_i est le i -ième vecteur de la base canonique. De même l'hyperplan tropical donné par $\max(0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ a comme polytope de Newton le n -simplexe, donné par l'enveloppe convexe des points $0, e_1, \dots, e_n$ de \mathbb{R}^n .

FIGURE 2 – Une quintique tropicale dans \mathbb{T}^2 et le plan tropical dans \mathbb{T}^3 donné par $\max(0, x, y, z)$



Une hypersurface tropicale X_P induit une structure de complexe polyédral sur le *tore tropical* $\mathbb{R}^n = (\mathbb{T}^*)^n$: une face est donnée par le lieu où un certain nombre de monômes de P atteignent le maximum parmi tous les monômes de P . Par exemple, la face horizontale du plan tropical est le lieu où $0 = z = \max(0, x, y, z)$, et l'arête de sommet $(0, 0, 0)$ et de direction $(-1, 0, 0)$ est le lieu où $0 = z = y = \max(0, x, y, z)$. À une face, on peut associer un sous-polytope du polytope de Newton, justement l'ensemble convexe des exposants correspondant aux monômes atteignant le maximum

$$\Delta_F := \text{Conv}(i \in \Delta(P) \mid a_i + i_1 x_1 + \dots + i_n x_n = P(x_1, \dots, x_n) \text{ sur } F).$$

Si F est la face horizontale du plan tropical, alors $\Delta(F) = \text{Conv}((0, 0, 0), (0, 0, 1))$ est l'arête verticale du 3-simplexe. Si e est l'arête de sommet $(0, 0, 0)$ et de direction $(-1, 0, 0)$ du plan tropical, alors $\Delta(e) = \text{Conv}((0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0))$ est la face sur le plan $x = 0$ du 3-simplexe.

L'ensemble des Δ_F définit une subdivision de $\Delta(P)$, appelée subdivision duale. Par exemple, une composante connexe du complémentaire de X_P correspond à un point de cette subdivision (la valeur de P n'est atteinte qu'en un seul monôme). Une facette (face de dimension maximale) de X_P correspond à une arête de cette subdivision. Cette arête est à pente entière, et sa longueur entière (le nombre de points à coordonnées entières sur l'arête moins 1) est appelée le *poinds* de la facette. Plus généralement, une face de dimension d de X_P correspond à un polytope de dimension $n - d$ de la subdivision duale. Voir figure 3 et figure 4 pour des exemples de subdivision duale.

FIGURE 3 – Une quintique tropicale dans \mathbb{R}^2 et sa subdivision duale

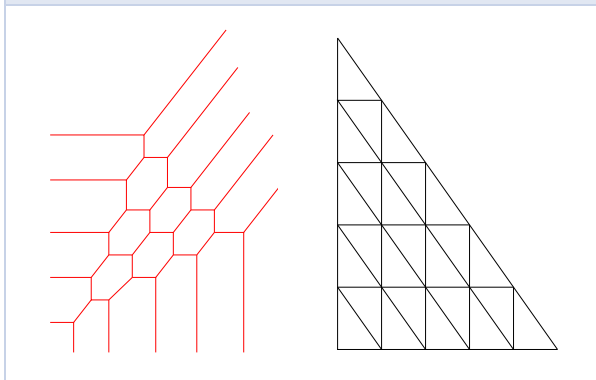
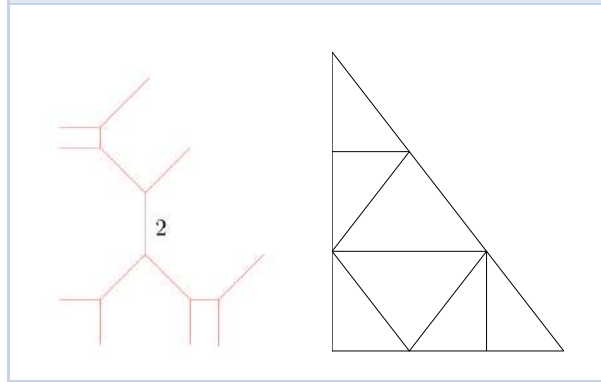


FIGURE 4 – Une cubique tropicale dans \mathbb{R}^2 avec une arête de poids 2 et sa subdivision duale



Nous pouvons maintenant introduire la condition d'équilibre : soit F une face de codimension 1 de X_P et soient F_1, \dots, F_k les facettes adjacentes à F de poids respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. La facette F_i correspond à une arête a_i de la subdivision duale. Ces arêtes ferment le polytope Δ_F de dimension 2 dual à F . Fixons une orientation sur ce polytope, ce qui fournit des vecteurs entiers privilégiés v_1, \dots, v_k de longueurs entières 1, tels que v_i est supporté par a_i . La condition d'équilibre est alors simplement la traduction que les arêtes a_1, \dots, a_k ferment un polytope

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0. \tag{1}$$

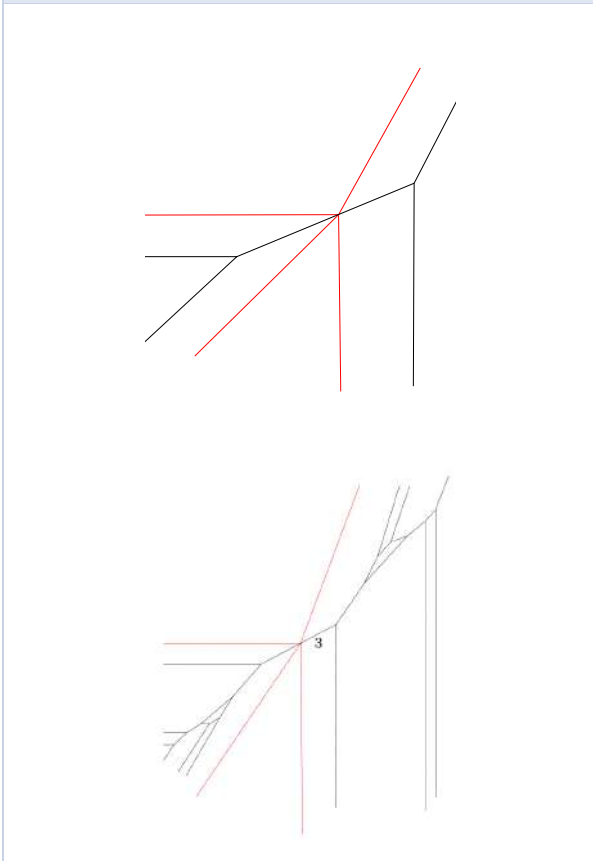
La subdivision duale a une autre propriété très importante : pour toute face F de X_P , les directions de F et Δ_F sont orthogonales. Ceci permet de réexprimer la condition d'équilibre sans faire intervenir la subdivision duale : soit F une face de codimension 1 de X_P et soient F_1, \dots, F_k les facettes adjacentes à F de poids respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Notons par Λ_i le sous-réseau de \mathbb{Z}^n parallèle à F_i , et par Λ_F le sous-réseau parallèle à F . Soit v_i un vecteur de \mathbb{Z}^n de longueur entière 1 tel que Λ_i est engendré par Λ_F et v_i , et pour tout $x \in F$, $x + \varepsilon v_i \in F_i$ pour ε positif assez petit. Alors la condition d'équilibre est équivalente à

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \in \Lambda_F. \tag{2}$$

Cette reformulation permet alors de définir des variétés tropicales en codimension plus grande : un *cycle tropical* de \mathbb{R}^n de dimension d est un complexe polyédral rationnel de dimension d muni de poids entiers sur ces facettes, tel que la condition (2) est satisfaite sur toute face de codimension 1. Une *sous-variété tropicale* de \mathbb{R}^n est un cycle

tropical où tous les poids sont positifs. Voir figure 5 pour deux exemples de cycles tropicaux.

FIGURE 5 – Une droite tropicale dans un plan tropical dans \mathbb{R}^3 et une cubique tropicale de genre 2 dans un plan tropical de \mathbb{R}^3 .



Une remarque s'impose sur la condition d'équilibre. Elle est essentielle pour définir une théorie de l'intersection en géométrie tropicale. Traitons un exemple simple, le cas des courbes dans \mathbb{R}^2 . Soit C une courbe tropicale dans \mathbb{R}^2 et soit D une droite affine dirigée par un vecteur primitif $\vec{v} \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que C et D ne s'intersectent que le long des arêtes de C (on dit que l'intersection est transverse, et c'est le cas génériquement). Alors on peut définir l'intersection de C et D par

$$C \cdot D := \sum_{p \in C \cap D} m_e |\det(\vec{v}_e, \vec{v})|$$

où e est l'arête de C contenant p , m_e est le poids de e , et \vec{v}_e est un vecteur primitif de C . Alors la

condition d'équilibre implique que $C \cdot D$ ne dépend pas de la position de la droite D .

4. Déquantification de Maslov et approximation des variétés tropicales

4.1 – Déquantification de Maslov

Revenons quelques instants au semi-corps tropical et expliquons comment il apparaît comme limite de semi-corps plus classiques. Les nombres réels positifs $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ forment un semi-corps et le logarithme en base t fournit un isomorphisme entre $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ et $(\mathbb{T}, +_t, \times_t)$ où

$$a +_t b := \ln_t(t^a + t^b) \text{ et } a \times_t b := \ln_t(t^a t^b) = a + b.$$

Remarquons que \times_t est déjà la multiplication tropicale et que pour tout $t > 1$, on a les inégalités

$$\forall t > 1 \quad \max(a, b) \leq a +_t b \leq \max(a, b) + \ln_t(2).$$

Ceci montre que $\lim_{t \rightarrow +\infty} a +_t b = \max(a, b)$, autrement dit que l'addition $+_t$ tend vers l'addition tropicale. Dans cet esprit, le semi-corps $(\mathbb{T}, +_t, \times_t)$ (et donc $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ qui lui est isomorphe) apparaît comme une quantification de $(\mathbb{T}, \max, +)$, où le quantificateur est le paramètre t .

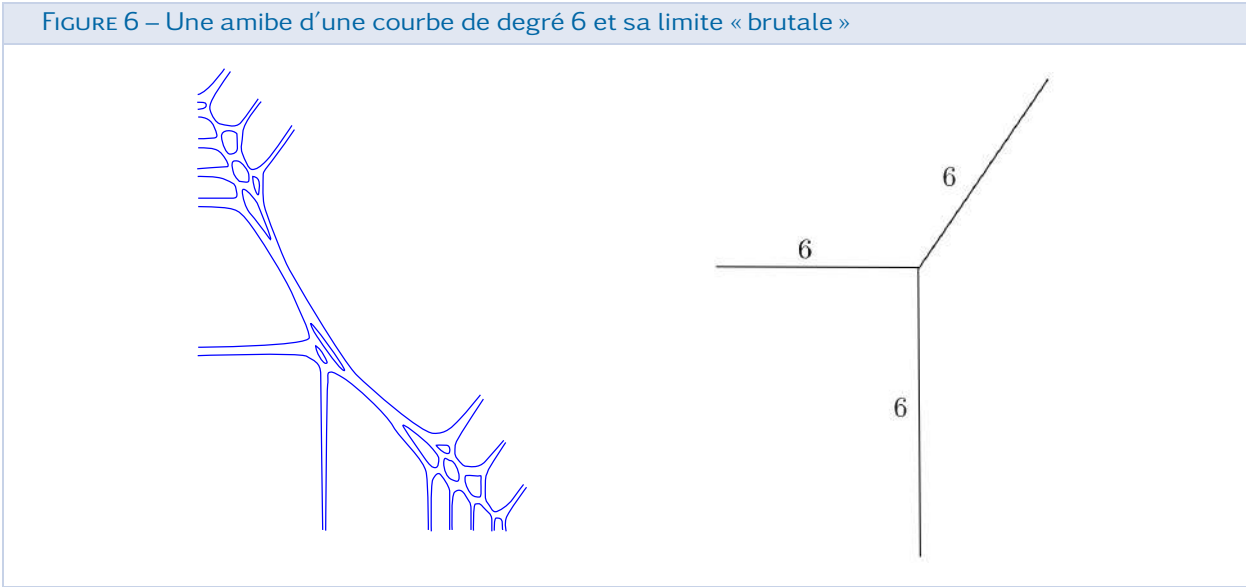
4.2 – Amibes et limite tropicale

Nous allons maintenant appliquer le même procédé de déquantification, mais pour des variétés algébriques complexes. Par souci de simplicité, nous allons nous restreindre au cas où l'espace ambiant est $(\mathbb{C}^*)^n$. Étendons le logarithme en base t à $(\mathbb{C}^*)^n$ coordonnée par coordonnée :

$$\begin{aligned} \text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (\ln_t(|z_1|), \dots, \ln_t(|z_n|)) \end{aligned}$$

L'image d'une variété par cette application est appelée *amibe* (en base t) de la variété. L'amibe en base t est une contraction de facteur $\frac{1}{\ln(t)}$ de l'amibe standard (en base e). Quand on laisse tendre t vers $+\infty$, l'amibe se retrouve contractée vers l'origine, et seulement les asymptotes subsistent. Voir figure 6 pour un exemple d'amibe et de sa contraction.

FIGURE 6 – Une amibe d’une courbe de degré 6 et sa limite « brutale »



Pour contraster ce phénomène assez brutal, on peut considérer des familles de variétés algébriques complexes $V_t \subset (\mathbb{C}^*)^n$, et considérer les familles d’amibes $\text{Log}_t(V_t)$. Alors sous certaines hypothèses, cette limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Log}_t(V_t)$ existe (au sens de Hausdorff sur les compacts) et est une sous-variété tropicale de \mathbb{R}^n . Elle est appelée *limite tropicale* de la famille V_t . Voir figure 7 pour un exemple de limite tropicale. Notamment, on peut associer un poids à chaque facette de cette limite pour que la condition d’équilibre (2) soit vérifiée. Revenons

quelques instants sur le cas où la famille de variétés est constante (ne dépend pas du paramètre t).

4.3 – Espaces linéaires tropicaux

Soit \mathcal{E} un sous-espace affine de \mathbb{C}^n qui n’est contenu dans aucun hyperplan de coordonnée, c’est-à-dire que $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cap (\mathbb{C}^*)^n$ est non vide. En compactifiant \mathcal{E} dans $\mathbb{C}P^n$, on obtient un sous-espace projectif $\overline{\mathcal{E}}$ et un arrangement d’hyperplans \mathcal{A} dans $\overline{\mathcal{E}}$, où chaque hyperplan de \mathcal{A} est l’intersection de $\overline{\mathcal{E}}$ avec un hyperplan de coordonné de $\mathbb{C}P^n$.

FIGURE 7 – Une amibe d’une famille de courbes de degré 6 dépendant de t et sa limite tropicale

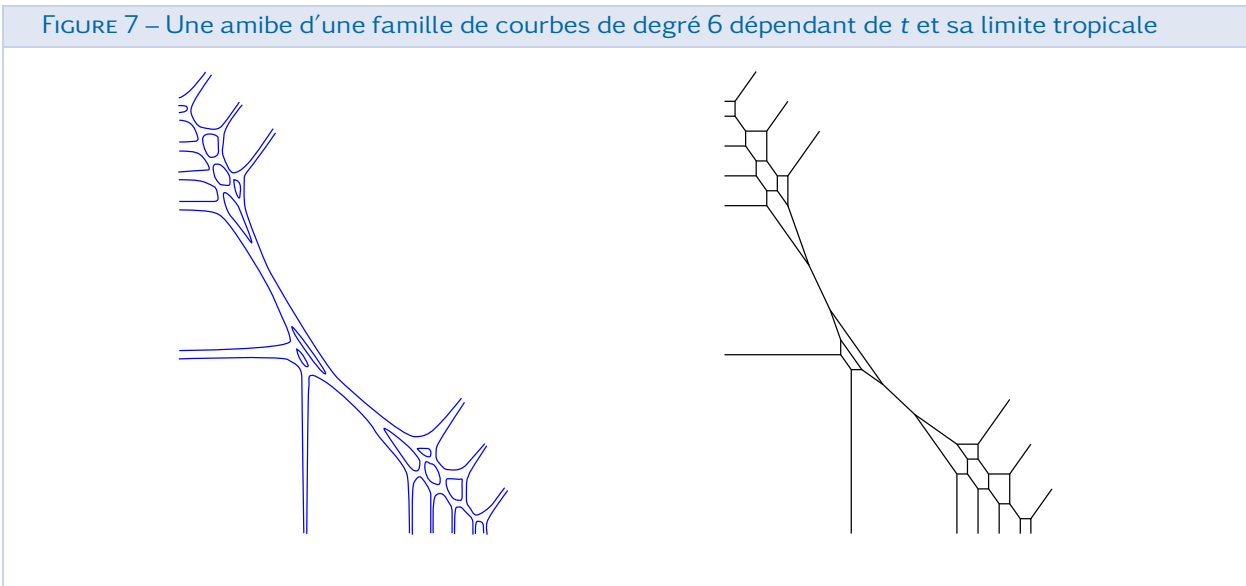
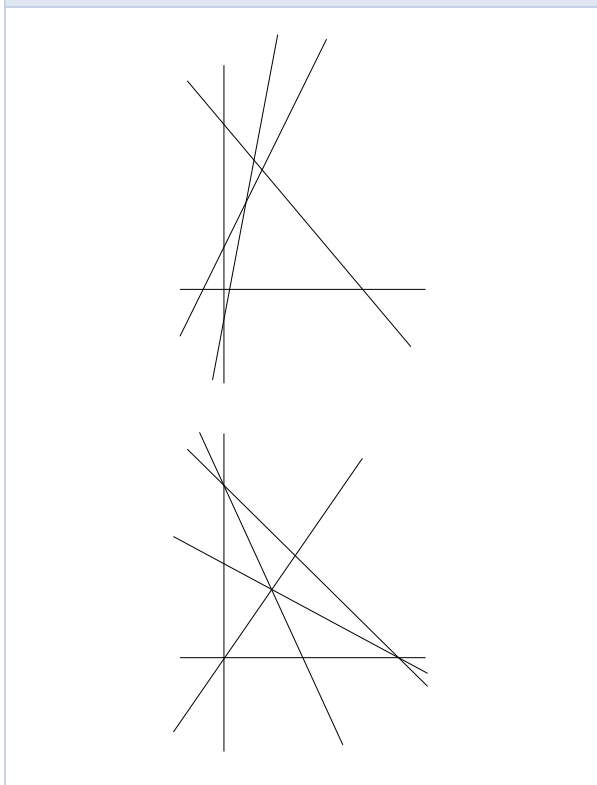


FIGURE 8 – Un arrangement d’un plan générique dans \mathbb{C}^4 , et un arrangement d’un plan dans \mathbb{C}^5



L’arrangement \mathcal{A} est un espace stratifié. Supposons que $\mathcal{A} = \{H_0, \dots, H_n\}$. Une strate S_I de \mathcal{A} est indexée par le sous-ensemble maximum I de $\{0, \dots, n\}$ tel que $S_I = \bigcap_{i \in I} H_i$. L’ensemble des strates forme un ensemble partiellement ordonné, appelé treillis de \mathcal{A} . Il apparaît en fait que la limite tropicale de \mathcal{E}^* ne dépend que du treillis de \mathcal{A} , et peut être obtenu par la construction combinatoire suivante.

Notons par e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n et notons $v_i = -e_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $v_0 = \sum_{i=1}^n e_i$. Si $I \subset \{0, \dots, n\}$, notons $v_I = \sum_{i \in I} v_i$. Alors pour toute chaîne de strates

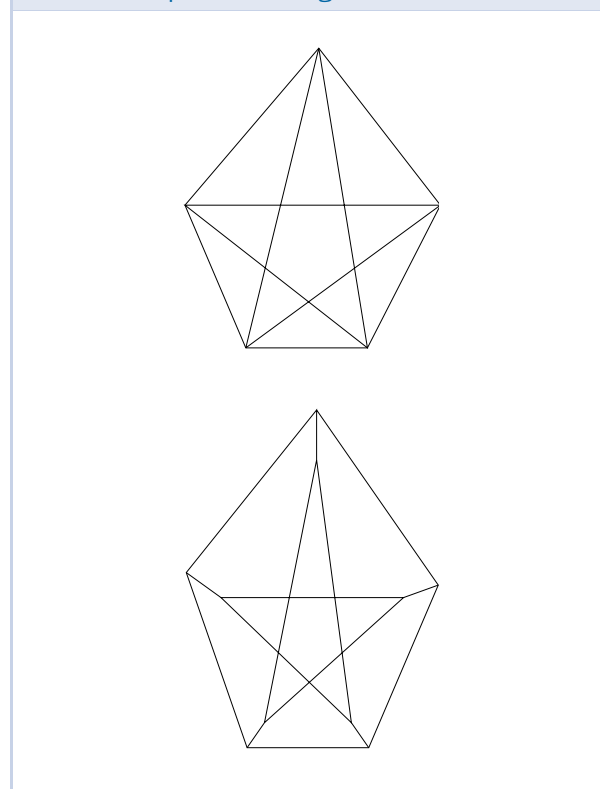
$$S_{I_1} \subset \dots \subset S_{I_k}$$

telle que $\dim(S_{I_{r+1}}) = \dim(S_{I_r}) + 1$, on associe le cône de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs v_{I_1}, \dots, v_{I_k} . La limite tropicale de \mathcal{E} est l’union de tous ces cônes, et les poids sur les facettes sont tous égaux à 1. Ces espaces sont appelés *espaces linéaires tropicaux*.

Une remarque s’impose : le treillis d’un arrangement d’hyperplans encode un objet combinatoire appelé matroïde, introduit par Whitney. Il existe des matroïdes qui ne proviennent pas de treillis d’arrangement d’hyperplans. La construction combinatoire

présentée ci-contre peut être appliquée à n’importe quel matroïde, ce qui en donne une réalisation géométrique, au sens tropical.

FIGURE 9 – Les entrelacs des limites tropicales des plans de la figure 8



4.4 – Approximation d’hypersurfaces

Revenons maintenant aux cas des hypersurfaces tropicales. Soit $P(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme tropical avec coefficients a_i . On peut alors quantifier ce polynôme en introduisant la famille de polynômes suivants, appelés polynômes de Viro en l’honneur du mathématicien Oleg Viro :

$$P_t(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} c_i t^{a_i} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

où les c_i sont des nombres complexes non nuls. Alors il apparaît que la famille d’hypersurfaces définie par les polynômes P_t , c’est-à-dire $V_t := \{P_t = 0\}$ admet comme limite tropicale l’hypersurface X_P définie par P . Autrement dit, toute hypersurface tropicale peut être approchée par une famille d’hypersurfaces algébriques complexes. Un cas remarquable est celui où la subdivision duale de X_P est primitive, c’est-à-dire que la subdivision de $\Delta(P)$ duale à la subdivision de \mathbb{R}^n induite par X_P n’admet

que des simplexes de volume $\frac{1}{n!}$ (volume minimal parmi les simplexes à sommets à coordonnées entières et un simplexe est l'enveloppe convexe de n points affinement indépendant dans \mathbb{R}^n). Autrement dit, au voisinage de chacun de ces sommets, le complexe polyédral X_P est à transformation affine entière près l'hyperplan tropical donné par $\max(0, x_1, \dots, x_n)$. Tous les poids sur les facettes sont alors égaux à 1, et pour t générique, l'hyper-surface V_t est non singulière (c'est une variété complexe). On appelle *non singulière* une hypersurface tropicale dont la subdivision duale est primitive. Plus généralement, une sous-variété tropicale de \mathbb{R}^n est dite non singulière si localement elle est isomorphe à un espace linéaire tropical. Un isomorphisme est ici une transformation affine entière inversible, c'est-à-dire un élément de $GL_n(\mathbb{Z})$ composé avec une translation à coefficient dans \mathbb{R} . Et, de façon similaire aux cas des hypersurfaces, si une sous-variété tropicale non singulière de \mathbb{R}^n peut être approchée, alors pour t générique, l'approximation est lisse.

5. Espaces projectifs tropicaux et nombres de Hodge

5.1 – Espaces projectifs tropicaux et compactification

Tout comme en géométrie algébrique complexe, l'espace projectif joue un rôle très important en géométrie tropicale. On peut le définir de façon complètement analogue à l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, en remplaçant l'addition par le maximum et la multiplication par l'addition :

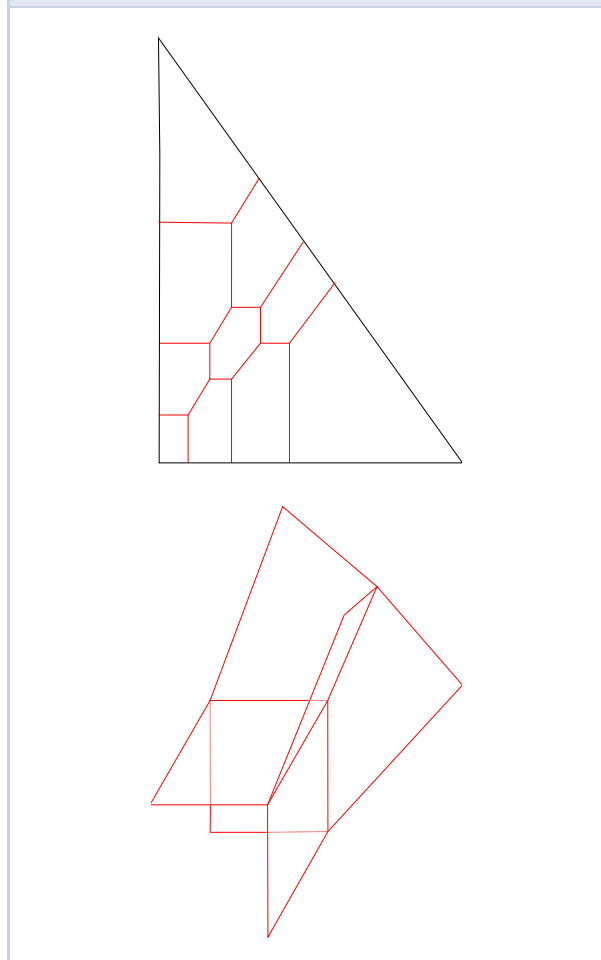
$$\mathbb{T}P^n := \frac{\mathbb{T}^{n+1} \setminus (-\infty, \dots, -\infty)}{\mathbb{T}^*},$$

où l'action de \mathbb{T}^* sur \mathbb{T}^{n+1} est l'action diagonale. C'est-à-dire que deux éléments (x_0, \dots, x_n) et (y_0, \dots, y_n) de \mathbb{T}^{n+1} sont identifiés s'il existe $\lambda \in \mathbb{T}^*$ tel que $y_i = x_i + \lambda$ pour tout i . Rappelons que $\mathbb{T}^* = \mathbb{T} \setminus -\infty$. L'espace $\mathbb{T}P^n$ est homéomorphe au n -simplexe. Similairement à $\mathbb{C}P^n$, on peut mettre des coordonnées homogènes sur $\mathbb{T}P^n$. C'est-à-dire qu'on notera la classe d'équivalence de (x_0, \dots, x_n) par $[x_0 : \dots : x_n]$. L'ensemble $\mathbb{T}P^n$ est naturellement stratifié par les strates

$\mathbb{T}P_I^n = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i = -\infty \text{ si et seulement si } i \in I\}$, pour tout $I \subset \{0, \dots, n\}$. Par exemple, $\mathbb{T}P_\emptyset^n = (\mathbb{T}^*)^n = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{T}P_{\{0, \dots, n-1\}}^n$ est un point. Les strates sont re-

liés par des projections. Si $I \subset J$, notons par π_{IJ} la projection de $\mathbb{T}P_I^n$ dans $\mathbb{T}P_J^n$ qui à x_i associe $-\infty$ si $i \in J$. Toute sous-variété tropicale X dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{T}P_\emptyset^n$ admet une compactification \bar{X} dans $\mathbb{T}P^n$. Une face F de \bar{X} est dite de *sédentarité* I si l'intérieur de F est dans la strate $\mathbb{T}P_I^n$. On notera la sédentarité de F par $\text{sed}(F)$. Cette compactification est dite *transverse* si pour toute face F de X telle que $\bar{F} \cap \mathbb{T}P_I^n \neq \emptyset$, alors $\dim \bar{F} \cap \mathbb{T}P_I^n = \dim F - \#I$. Si une sous-variété tropicale de \mathbb{R}^n est non-singulière, de compactification transverse dans $\mathbb{T}P^n$ et pouvant être approchée par une famille de variétés complexes V_t , alors pour t générique, la compactification de V_t dans $\mathbb{C}P^n$ sera non singulière et transverse aux hyperplans de coordonnées.

FIGURE 10 – Une cubique tropicale transverse dans $\mathbb{T}P^2$ et un plan tropical transverse dans $\mathbb{T}P^3$



5.2 – Groupes de Hodge complexes

En géométrie complexe, les groupes de Hodge revêtent une importance fondamentale. Ils ont été mis en lumière par William Vallance Douglas Hodge, lorsqu’il a découvert que toute forme différentielle de degré r sur une variété complexe pouvait s’écrire uniquement comme somme de formes de type (p, q) (avec $p + q = r$), les formes de type (p, q) s’écrivant localement comme

$$f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q},$$

où f est une fonction différentiable et les z_i des coordonnées holomorphes. De plus, on peut définir une différentielle qui transforme une forme de type (p, q) en une forme de type $(p, q + 1)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \bar{\partial}(f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}) \\ &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}. \end{aligned}$$

Si la variété complexe V vit dans un espace projectif, la théorie de Hodge fournit alors une décomposition canonique de la cohomologie de De Rham des formes différentielles :

$$H^r(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(V),$$

où

$$H^{p,q}(V) := \frac{\ker(\bar{\partial})}{\text{im}(\bar{\partial})}.$$

Les espaces vectoriels complexes $H^{p,q}(V)$ s’appellent les groupes de Hodge de V . On sait depuis De Rham que les espaces vectoriels $H^r(V, \mathbb{C})$ ne dépendent que de la topologie de l’espace topologique sous-jacent à V , et qu’ils sont naturellement définis sur \mathbb{Z} par la cohomologie singulière. Le lien entre topologie de V et les groupes de Hodge est encore mystérieux comme l’illustre la conjecture de Hodge. Il apparaît que toute sous-variété W de V de codimension k définit un élément dans $H^{2k}(V, \mathbb{Z})$, appelé sa *classe fondamentale*. Si on pousse la classe fondamentale de W dans $H^{2k}(V, \mathbb{C})$ alors son image sous la décomposition de Hodge est très simple, elle vit dans le $H^{k,k}(V)$. La conjecture de Hodge prédit la réciproque : tout élément de $H^{k,k}(V)$ provenant d’un élément de $H^{2k}(V, \mathbb{Z})$ provient en fait d’une combinaison linéaire sur \mathbb{Z} de classes fondamentales de sous-variétés de dimension k .

5.3 – Groupes de Hodge tropicaux

Nous allons dans ce dernier paragraphe définir une version des groupes de Hodge pour les sous-variétés tropicales de $\mathbb{T}P^n$ et en donner quelques propriétés. Par souci de simplicité, nous allons définir la version cellulaire des groupes d’homologie tropicale. Soit $V \subset \mathbb{T}P^n$ la compactification transverse d’une sous-variété tropicale non singulière de \mathbb{R}^n . Rappelons en particulier que cela implique que toutes les facettes de V sont de poids 1. Soit F une face de V de sédentarité I . Rappelons que cela signifie que l’intérieur de F est dans $\mathbb{T}P_I^n \simeq \mathbb{R}^{n-\#I}$. On appelle espace tangent tropical à F , le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n-\#I}$ engendré par la direction de la face F . On note cet espace tangent T_F . Comme les directions des faces de V sont à coefficients entiers, les espaces tangents T_F sont en fait définis sur \mathbb{Z} . L’espace multitangent $\mathcal{F}_p(F) \subset \Lambda^p(\mathbb{R}^{n-\#I})$ est le sous-espace vectoriel engendré par les p -vecteurs de la forme $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$, où les v_i sont tous dans un espace tangent T_E pour $E \supset F$ et $\text{sed}(E) = \text{sed}(F)$. Ces espaces multitangents sont naturellement reliés les uns aux autres par des inclusions et des projections. Si $F_1 \subset F_2$ sont deux faces de même sédentarité, alors simplement $\mathcal{F}_p(F_2) \subset \mathcal{F}_p(F_1)$. Si F_1 est de sédentarité J et F_2 de sédentarité I vérifiant $I \subset J$ (et donc $F_1 \subset F_2$), alors $\pi_{IJ}(\mathcal{F}_p(F_2)) \subset \mathcal{F}_p(F_1)$. Rappelons que π_{IJ} est la projection de $\mathbb{T}P_I^n$ dans $\mathbb{T}P_J^n$ qui à x_i associe $-\infty$ si $i \in J$. On peut alors considérer les (p, q) -chaînes cellulaires

$$C_q(V; \mathcal{F}_p) := \bigoplus_{F \text{ face de dimension } q} \mathcal{F}_p(F)$$

et les applications de bords

$$\partial_q^p : C_q(V; \mathcal{F}_p) \rightarrow C_{q-1}(V; \mathcal{F}_p)$$

induites par le bord cellulaire et les inclusions et projections π_{IJ} . Ces applications vérifient $\partial_q^p \circ \partial_{q+1}^p = 0$ et on définit les groupes d’homologie tropicales

$$H_{p,q}(V; \mathbb{R}) := \frac{\text{Ker } \partial_q^p}{\text{Im } \partial_{q+1}^p}.$$

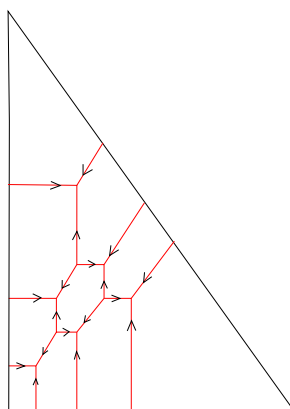
Exemple 1. Calculons les groupes de Hodge tropicaux de la cubique X apparaissant à gauche de la figure 10. $\mathcal{F}_0 = \mathbb{R}$ donc $H_{0,0}(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $H_{0,1}(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, les générateurs étant les six cycles du graphe X . Un générateur de $H_{1,1}(X; \mathbb{R})$ est représentée par X tout entier avec la donnée pour toute arête e de X d’un vecteur primitif le long de l’arête dirigée comme sur la figure 11. Cette classe est appelée classe fondamentale, et $H_{1,1}(X) = \mathbb{R}$.

N'importe quel point sur X avec un vecteur dans $\mathcal{F}_1(\mathbb{R})$ donne un cycle dans $C_0(X; \mathcal{F}_1)$. Il est facile de voir que lorsque le point varie, les cycles sont tous homologues. Donc $H_{1,0}(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Un résultat récent, dû à Itenberg, Mikhalkin, Kat-

zarkov et Zharkov dit que si la variété tropicale V peut être approchée par une famille de variétés $V_t \subset \mathbb{C}P^n$, alors pour t générique, $\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(V_t) = \dim_{\mathbb{R}} H_{p,q}(V)$, créant un pont entre la théorie de Hodge et la géométrie tropicale encore à explorer.

FIGURE 11 – La classe fondamentale d'une cubique dans \mathbb{TP}^2



Si vous avez envie d'aller plus loin

1. Un texte d'introduction : « Tropical mathematics, » de Speyer et Sturmfels. *Mathematics Magazine* 82.3 (2009) : 163-173.
2. Un autre texte d'introduction : « Brief introduction to tropical geometry », de Brugallé, Itenberg, Mikhalkin et Shaw. *For Proceedings of 21st Gökova Geometry-Topology Conference*.
3. Sur les cubiques de genre 2 et généralisations : « Planar Tropical Cubic Curves of Any Genus, and Higher Dimensional Generalisations », de Bertrand, Brugallé et López de Medrano. À paraître dans *L'enseignement mathématique*.
4. Le texte fondateur de l'homologie tropicale : « Tropical homology », de Itenberg, Katzarkov, Mikhalkin et Zharkov. *Mathematische Annalen* 374.1-2 (2019) : 963-1006.
5. Un premier pas vers la conjecture de Hodge en géométrie tropicale : Lefschetz (1,1)-theorem in tropical geometry, de Jell, Rau et Shaw. *EPIGA*, 2018, vol. 2
6. Sur un potentiel contre-exemple à la conjecture de Hodge via la géométrie tropicale : « Tropical Abelian varieties, Weil classes and the Hodge Conjecture », de Zharkov. *Preprint sur arxiv*.
7. Sur un lien avec la géométrie Lagrangienne : « Examples of tropical-to-Lagrangian correspondence », de Mikhalkin. *European Journal of Mathematics* 5.3 (2019) : 1033-1066.
8. Sur un lien récent entre l'homologie tropicale et la géométrie réelle : « Bounding the Betti numbers of real hypersurfaces near the tropical limit », de Renaudineau et Shaw. *Preprint sur arxiv*.



Arthur RENAUDINEAU

Université de Lille
arthur.renaudineau@univ-lille.fr

Arthur Renaudineau est maître de conférences à l'université de Lille et travaille sur les liens entre la géométrie tropicale et la géométrie algébrique classique. En particulier il s'intéresse à la topologie des variétés algébriques réelles et à leurs constructions par des méthodes combinatoires venant de la géométrie tropicale.



Le cas de Laila SOUEIF

La mathématicienne et militante égyptienne Laila Soueif ne connaît aucun répit. Elle est professeure de mathématiques à l'université du Caire et une fondatrice du Mouvement des professeurs du 9 mars pour l'indépendance des universités en Égypte ; elle et sa famille ne connaissent que trop bien la répression politique égyptienne. Dans les années 1980, au moment de la naissance de leur fille Mona, son mari Ahmed Seif El-Islam, éminent avocat et défenseur des droits humains, était en prison pour son engagement politique ancré à gauche. En novembre 2013, après le coup d'état du maréchal Abdel Fattah el-Sisi, le fils de Soueif, Alaa, icône de la révolution égyptienne de 2011, est à nouveau emprisonné. Quelques mois plus tard, en juin 2014, sa fille Sanaa est à son tour arrêtée lors d'une manifestation appelant à la libération de prisonniers politiques, dont Alaa. À peine deux mois plus tard, le mari de Soueif décède, des complications d'une intervention cardiologique. Laila et ses trois enfants, dont deux en prison, entament une grève de la faim de plus de deux mois pour protester contre l'emprisonnement d'Alaa et de Sanaa.

En septembre 2019, Alaa, à peine libéré de prison, est arrêté à nouveau et Laila reprend le combat pour sa libération, parallèlement à son enseignement à l'université. Après avoir organisé une petite manifestation demandant que les prisonniers soient libérés pendant l'épidémie de coronavirus, elle est à son tour arrêtée, puis relâchée le jour sui-

vant. Les visites en prison étant suspendues et les communications avec les familles bloquées, Laila Soueif entame un sit-in devant la prison, en demandant à être autorisée à recevoir une lettre d'Alaa. Elle y est attaquée physiquement, ainsi que ses filles venues la rejoindre. Lorsqu'elles se présentent devant les autorités pour signaler cette agression, Laila voit Sanaa emmenée par des policiers en civil et emprisonnée.

Laila et Mona sont constamment dénigrées dans des journaux d'état, qui publient régulièrement des articles affirmant qu'elles sont des agents étrangers, des sympathisantes du terrorisme, etc.

Quand la presse est sévèrement muselée, les défenseurs des droits humains et de la démocratie ont un besoin impérieux du soutien international. Laila Soueif continue de lutter pour la libération de ses deux enfants. Nous appelons nos collègues et les sociétés mathématiques à la soutenir, ainsi que ses enfants, en écrivant ¹, dans vos pays respectifs, à

- votre ministre des Affaires étrangères ;
- l'ambassade d'Égypte.

Nous vous demandons aussi d'envoyer des messages aux autorités égyptiennes, en particulier :

- au bureau du Procureur général ;
- au ministre de la Justice ;
- au ministre de l'Enseignement supérieur ;
- à la présidence.

Signataires

Ahmed Abbes, mathématicien, directeur de recherche au CNRS, Paris.

Sir John Ball, FRS, professeur de mathématiques à l'université Heriot-Watt, ancien président de l'Union mathématique internationale.

Michel Broué, professeur émérite de mathématiques à l'université de Paris.

Chandler Davis, professeur émérite de mathématiques à l'université de Toronto.

Adrien Deloro, maître de conférences en mathématiques à Sorbonne Université.

Ivar Ekeland, FRSC, professeur émérite de mathématiques et ancien président, Université Paris-Dauphine.

Maria J. Esteban, mathématicienne, Directrice de recherche au CNRS, université Paris-Dauphine et

1. https://drive.google.com/file/d/1rxpukFADr15zWiFHKfEGsdVKnU3_o5Y5/view

université de recherche Paris sciences et lettres.

Catherine Goldstein, directrice de recherche au CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Gauche.

Michael Harris, professeur de mathématiques à l'université Columbia.

Helmut Hofer, professeur de mathématiques à l'Institute for Advanced Study, Princeton.

Dusa McDuff, professeure Kimmel de mathématiques à Barnard College, université de Columbia.

Mary W. Gray, professeure de mathématiques et de statistiques, American University.

Ilya Kapovich, professeur de mathématiques et de statistiques, Hunter College à CUNY, président du Comité des mathématiciens pour les droits humains, American Mathematical Society.

Jair Koiller, professeur de mathématiques, Université fédérale de Rio de Janeiro.

John W. Milnor, lauréat du prix Abel (2011), Distinguished Professor of Mathematics à l'université Stony Brook.

David Mumford, professeur émérite de mathématiques aux universités Brown et Harvard, lauréat de la médaille Fields (1974), ancien président de l'Union mathématique internationale.

Bảo Châu Ngô, professeur de mathématiques à l'université de Chicago, lauréat de la médaille Fields (2010).

Joseph Oesterlé, professeur émérite de mathématiques à Sorbonne Université, Paris.

Arthur Ogus, professeur émérite de mathématiques à l'université de Californie, Berkeley.

Roshdi Rashed, historien des mathématiques, directeur de recherche émérite au CNRS à Paris, professeur émérite à l'université de Mansoura en Égypte et professeur émérite à l'université de Tokyo.

Raphaël Rouquier, professeur de mathématiques à l'université de Californie, Los Angeles.

CNRS, FRS, professeur émérite de mathématiques, All Souls College, Oxford, ancien président de la London Mathematical Society.

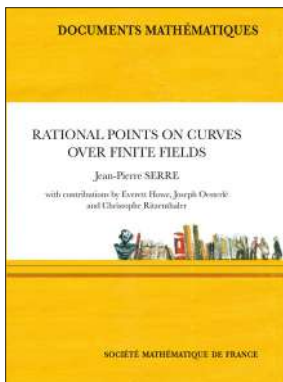
Stephen Smale, professeur émérite de mathématiques à l'université de Californie, Berkeley, lauréat de la médaille Fields (1966).

Cédric Villani, membre de l'Assemblée nationale, lauréat de la médaille Fields (2010).

Claude Viterbo, professeur de mathématiques à l'université de Paris- Saclay et à l'École normale supérieure de Paris.

Masha Vlasenko, professeure de mathématiques à l'institut de mathématiques de l'Académie des sciences de Pologne.

Documents mathématiques - nouveauté



Vol. 18

Rational Points on Curves over Finite Fields

J-P. SERRE, with contributions by E. HOWE, J. OESTERLÉ and C. RITZENTHALER

ISBN 78-2-85629-923-4

2020 - 188 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 45 € - Members: 32 €

In 1985, Jean-Pierre Serre gave a series of lectures at Harvard University on the number of points of curves over finite fields. Based on notes taken at that time by F. Q. Gouvêa, the present revised and completed document provides an insightful introduction to this beautiful topic and to most of the ideas that have been developed in this area during the last 30 years.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





Bilan 2020, et mise en place du nouveau CNU section 26

Le nouveau Conseil National des Universités (CNU) a été mis en place à la fin de l'année 2019 pour un mandat de quatre ans.

La section 26 est composée de 48 membres titulaires (dont 16 nommés) et de 48 membres suppléants (dont 16 nommés); elle compte une moitié de rangs A et une moitié de rangs B; elle est chargée du domaine « Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques » et représente environ les trois cinquièmes des enseignants-chercheurs en mathématiques en France. Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la CP-CNU¹.

La section dispose également d'un site propre².

La mise en place du nouveau CNU s'est faite dans un contexte pré-apocalyptique de grève des transports qui a amené le ministère à repousser la réunion de mise en place au mois de décembre, à deux jours de la date limite de saisie des rapporteurs des dossiers de qualifications. L'effectif théorique de 48 membres (et donc 48 rapporteurs potentiels) n'était pas atteint parce que les membres nommés n'avaient pas tous été désignés.

1. Motions de début de mandat

Motion de fonctionnement. La section 26 en session plénière a reconduit par un vote la motion de non auto-promotion (désormais habituelle) suivante :

La section 26 du CNU s'engage à ne pas promouvoir ses membres pendant la durée de ce mandat et à ne pas leur attribuer de Congé pour Recherche et Conversion Thématique (CRCT), au titre du contingent national.

Cette motion a entraîné la démission immédiate d'un collègue élu qui ignorait cette contrainte. Les

1. <https://www.conseil-national-des-universites.fr>

2. <http://cnu26.emath.fr>

membres du CNU qui postulent à une promotion ne siègent pas, ne sont pas examinés au national, mais peuvent obtenir leur avancement en local.

Motion PEDR. La section 26 a reconduit la pratique mise en place par le précédent CNU d'examen prioritaire des dossiers de demandes de PEDR repérés comme ayant fait trois demandes consécutives infructueuses. Ces dossiers sont classés et évalués sans prendre les quotas en compte, et leurs notes sont figées sans possibilité d'arbitrage lors des discussions pour satisfaire les quotas.

Motion Suivi de carrière. Les sections 25 et 26 ont décidé de reconduire la décision prise depuis 2017, de ne pas mettre en place le suivi de carrière en 2020.

Motion votée le 5 février 2020 en session plénière :

Les sections 25 et 26 décident de ne pas mettre en place le suivi de carrière : faute d'une définition précise des objectifs, des modalités et de l'allocation de moyens dévolus à cette nouvelle mission, celle-ci ne peut être mise en œuvre jusqu'à nouvel ordre.

La section 26 déclare son soutien plein et entier à la motion de la CP-CNU concernant la LPPR votée le 7/01/20 et partage son inquiétude concernant l'évolution de nos missions et métiers.

Rappel. Motion de la CP-CNU du 7/01/2020 sur le Projet de Loi de Programmation Pluri-annuelle de la Recherche (LPPR).

La commission permanente du CNU, réunie le mardi 7 janvier 2020 à Pa-

ris en vue de l'installation de son bureau, rappelle son attachement aux missions nationales du CNU, instance garante d'équité, d'impartialité, d'expertise et de collégialité dans l'appréciation des différents aspects de la carrière des enseignants-chercheurs. L'assemblée s'alarme de certains éléments évoqués dans les rapports préalables au futur projet de loi de programmation pluriannuelle de la recherche : la suppression de la procédure de qualification, de la clause d'accord des intéressés pour la modulation des services, de la référence aux 192 heures (équivalent TD) d'enseignement et donc de la rémunération des heures complémentaires, ainsi que la création de nouveaux contrats de travail d'exception aux dispositions statutaires. Si elles devaient obtenir force de loi, ces dispositions équivaldraient à une remise en cause du statut d'enseignant-chercheur et des fonctions du CNU. L'assemblée demande instamment que la CP-CNU soit désormais associée à la réflexion sur la future loi de programmation pluriannuelle de la recherche.

La section 26 du CNU partage les inquiétudes exposées par le bureau de la CP-CNU (dans son communiqué du 17 janvier reproduit ci-dessous) à l'heure où de nombreux laboratoires et départements de mathématiques se mobilisent contre le projet actuel de réforme des retraites.

Communiqué du bureau de la CP-CNU du 17 janvier 2020.

Le bureau de la CP-CNU, réuni le vendredi 17 janvier 2020 à Paris, émet les plus vives inquiétudes quant au projet de réforme des retraites annoncé par le gouvernement et dont les modalités actuelles aboutiront à une diminution des pensions. La principale piste annoncée pour compenser les pertes particulièrement élevées subies par les enseignants-chercheurs est la voie indemnitaire. Certaines primes ne concernent qu'une minorité d'entre eux. Le bureau de la CP-CNU s'inquiète de

l'amplification des inégalités de rémunération et de pensions qui résulterait de l'instauration de ce système de retraite universel. De par leur travail de gestion des corps, les sections CNU disposent d'une très bonne connaissance de tous les enjeux liés à l'avancement de grade et à l'attribution des primes dans les métiers de l'enseignement et de la recherche. Aussi le bureau demande que la CP-CNU soit associée aux discussions sur la nécessaire revalorisation des carrières quel que soit le devenir du projet de réforme des retraites.

2. Bilan de la session qualifications

Les candidats ont connaissance des deux rapporteurs désignés par le bureau de la section, il est important de préciser que la décision de qualification, ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, le rôle des rapporteurs étant avant tout de présenter les éléments factuels du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification. Les membres du CNU présents ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient proches.

Les critères de qualification ne sont pas toujours bien connus des candidats, ceux-ci sont invités à les consulter sur les pages web mentionnées ci-dessus.

Depuis 2018 les candidats déposent leur dossier en ligne et la recevabilité des dossiers est étudiée par le ministère, au fur et à mesure du dépôt des pièces par les candidats et alors que les rapporteurs ont déjà accès au dossier. Plusieurs candidats ont vu leur dossier déclaré irrecevable par le ministère parce qu'il manquait une attestation du diplôme de thèse, *le procès verbal ne suffisant pas* ou, dans le cas de candidats étrangers, du fait de l'absence de traduction du diplôme. Il est à noter qu'une traduction par le candidat lui-même est suffisante. La souplesse dont faisait preuve la section lorsque l'examen de la recevabilité lui incombait n'est plus de mise, et des erreurs parfaitement bénignes ne sont plus rattrapables (la saisie de décision sur ces dossiers est bloquée par Galaxie).

2.1 – Qualification aux fonctions de Maître de Conférences

Résultats de la session 2020

Le nombre de dossiers MCF effectivement examinés par la section (407) est presque identique à 2019 (405).

Nombre de dossiers : 450. Irrecevables ou non transmis : 43. Hors-section : 80. Non qualifiés : 31. Qualifiés : 268.

Le pourcentage de dossiers qualifiés parmi les dossiers examinés est de 66% comme en 2019.

Critères de qualification

Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrit pas de façon cano-nique dans les thématiques de la section. D'une part l'aptitude à enseigner toutes les mathématiques de licence. D'autre part l'activité scientifique, qui dans les domaines d'application des mathématiques ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

L'activité de recherche est évaluée à partir

1. Des travaux de la thèse en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat français récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification.
2. Des publications. Si la présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes.
3. L'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considéré comme suffisant à lui seul pour la qualification en Section 26. (C'est en

général ce critère qui entraîne le plus de refus de qualification). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26^e section.

Par ailleurs le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soient aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci est particulièrement examiné en cas de requalification).

Enfin, il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

2.2 – Qualification aux fonctions de Professeur

Résultats de la session 2020

En ce qui concerne les PR, le nombre de dossiers était de 126 (contre 132 en 2019), parmi lesquels 99 ont été qualifiés (contre 103 en 2019), 10 non qualifiés, 16 hors section et 1 dispense refusée (il s'agit d'un dossier étranger sans HDR, dont la section a estimé qu'il ne correspondait pas au niveau de l'HDR).

Le pourcentage de dossiers qualifiés est de 78%, le même qu'en 2019.

Un nombre important (environ 1/4) de dossiers concerne des demandes de requalification.

Critères de qualification et recommandations aux candidats

Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de Professeur sont les suivants : l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'au niveau Master, l'activité et le rayonnement scientifiques, la démonstration d'une réelle autonomie scientifique, l'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

L'activité de recherche en mathématiques appliquées est évaluée selon plusieurs aspects.

1. Une production scientifique régulière et significative, qualitativement et quantitativement suffisante, sous forme d'articles publiés ou de logiciels (une attention particulière sera portée aux travaux post-doctoraux des quatre dernières années).

2. Le rayonnement, estimé entre autres critères par la participation aux colloques, les invitations dans les conférences internationales, les séjours à l'étranger, les collaborations internationales.

3. Les rapports de l'habilitation.

L'autonomie scientifique est en particulier évaluée par le nombre et la qualité des publications (hormis celles issues de la thèse), ainsi que la variété des thèmes abordés et leur nouveauté par rapport aux travaux de thèse.

La capacité à encadrer des doctorants est évaluée à travers l'expertise scientifique, l'autonomie, l'expérience d'encadrement ou coencadrement de thèses ou de mémoires de Master...

En ce qui concerne les dossiers relevant pour une grande part d'une autre discipline que les mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal...), le dossier doit faire clairement apparaître la contribution du candidat dans le domaine des mathématiques appliquées, et préciser la nature de l'apport des mathématiques au domaine d'application.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Il est demandé que les rapports préalables à la soutenance de l'HDR soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des HDR françaises).

Pour les candidats étrangers non titulaires de l'HDR française, le CNU a l'obligation en cas de qualification de délivrer une dispense. Pour les candidats provenant d'un pays où existe un deuxième doctorat du niveau de l'HDR, il paraît souhaitable qu'ils l'aient obtenu. Par ailleurs il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

Dans tous les cas, le niveau du dossier scientifique reste un critère déterminant.

3. Attribution de semestres de congés pour recherche ou conversion thématique

Les semestres de CRCT ont été attribués en février, lors de la session qualifications. Il y a eu 20 candidats PR et 42 candidats MCF, pour un contingent de 10 semestres à attribuer.

Liste principale (4 PR et 6 MCF) : Asselah Mohamed, Audigier Vincent, Brunel Nicolas, Chaachoua Abdelhamid, Charlot Grégoire, Gannaz Irène, Mar-

chand Régine, Millon Faure Karine, Omrane Abdennebi, Vallet Guy.

Liste complémentaire :

11 Boritchev Alexandre, 12 Bostan Mihai, 13 Mazliak Laurent, 14 Chaumont Loïc, 15 Frouvelle Amic, 16 Antoine Xavier, 17 Jourdana Clément, 18 Iutzelerl Franck, 19 Le Guevel Ronan, 20 Coulibaly-Pasquier Kolehe.

Il y a eu une démission dans la liste principale.

L'attribution d'un CRCT nécessite un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini. Le CNU privilégie particulièrement les dossiers comportant des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques... Le conseil favorise également les candidats qui n'ont pas ou ont peu bénéficié de CRCT ou de délégations dans le passé, ainsi que les demandes suite à un congé maternité ou longue maladie.

Il est indispensable que les CRCT et délégations passées des candidats soient clairement mentionnés. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui de ces projets : lettres d'invitation, programme des semestres...

Notons que cette année, une rubrique spéciale est apparue dans les demandes, visant à octroyer un CRCT suite à un congé de maternité. Ces dossiers n'ont pas été transmis au CNU et ont dans un premier temps été gardés par le Ministère. Celui-ci avait assuré pouvoir financer le lot de CRCT des candidat(e)s correspondant à cette rubrique. La procédure a eu quelques ratés pour cette première, les établissements ont paru quelque peu perplexes sur la façon de gérer ces demandes, et un avis sur les dossiers a finalement été demandé au CNU début avril. À notre connaissance, les CRCT ont finalement bien été attribués aux personnes concernées, mais la communication a été pour le moins déficiente.

4. Promotions

La session « Avancement de grade » était prévue à l'origine en présentiel les 11, 12, 13 mai. Elle s'est finalement tenue les 24, 25 et 26 juin avec 1/3 des membres présents (à l'Université de Paris, Campus Saint-Germain des Prés) et les autres à distance.

Les candidatures se font par voie électronique. Avant l'examen par le CNU les dossiers sont préalablement examinés par les conseils académiques des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement

des candidats. Cette année, ce calendrier a subi des retards également. La section 26 du CNU a choisi de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion. Elle a donc transmis aux établissements l'avis suivant pour les candidats non promus : « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué ». Pour les membres du CNU, la section indique à l'établissement qu'elle n'examine pas les dossiers de candidature à une promotion émanant de ses membres. Les membres du CNU participant à la session ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient (trop) proches.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Les réunions du bureau se sont tenues à distance, pendant le confinement.

Nous attirons l'attention sur les points importants suivants.

1. Le dossier de candidature à une promotion doit contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière et faire apparaître clairement les éléments nouveaux par rapport à la dernière promotion.
2. En ce qui concerne l'encadrement doctoral, le dossier doit préciser pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
3. En ce qui concerne les conférences, il doit distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

De façon générale, chaque élément du dossier doit être décrit de façon suffisamment claire et précise, et lorsque cela est pertinent par des éléments chiffrés, pour permettre sa juste prise en compte par la section.

Le bilan chiffré de la session promotions est résumé dans le tableau suivant :

Candidats	MCF HC	MCF EX	PR 1C	PR EX1	PR EX2
Candidats	101	38	86	82	53
dont Candidates	28	6	20	6	7
Promus	24	10	13	15	10
dont Promues	10	2	5	2	0
Âges min et max	38-54	56-64	37- 51	43 - 65	49 - 67

4.1 – Promotions à la hors-classe des MCF

Liste des promus : Amstutz Samuel, Avalo Fernandez Marta, Basdevant Anne-Laure, Boussaid Nabile, Cenac-Guesdon Peggy, Chambris Christine, Champion Thierry, Crepeau-Jaisson Emmanuelle, Guillaume Tristan, Renaudie Lagnoux Agnès, Lavancier Frédéric, Le Coz Stefan, Marche Fabien, Pelletier Mariane, Petcu Madalina, Petrelis Nicolas, Chenevoto Quentin Françoise, Sanchez David, Triki Mohamed Faouzi, Unterberger Jérémie, Vandekerkhove Pierre, Vigneaux Paul, Lacroix Violet Ingrid, Zitt Pierre-André.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et l'activité d'enseignement, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

4.2 – Promotions à l'échelon MCF EX

Liste des promus : Boutahar Mohamed, Chau Oanh, Gandolfo Daniel, Gerbi Stéphane, Hardouin Ceccantini Cécile, Luce Robert, Mongeau Marcel, Nachaoui Abdeljalil, Noussair Ahmed, Viguier Pla Sylvie.

L'effectif du nouvel échelon doit à terme représenter 10% de l'effectif du corps des MCF; cet effectif doit être atteint au bout de 7 ans, cette année étant la quatrième. Au terme des 7 années, les promotions proposées résulteront uniquement du flux sortant des promus du corps des MCF, essentiellement par départs en retraites. C'est pourquoi la section a décidé, cette année encore, d'utiliser de façon prépondérante, mais non exclusive, le critère de l'âge pour cette promotion. Ce critère pourrait devenir de moins en moins important. Le critère de l'âge a été choisi plutôt que l'ancienneté dans le grade MCF-HC, et a été modulé au vu de l'investissement des candidats dans tous les aspects du métier d'enseignant-chercheur, avec un souci de prendre en compte les difficultés particulières de la carrière des collègues femmes.

4.3 – Promotions à la première classe des PR

Liste des promus : Arlot Sylvain, Birmele Étienne, Castillo Ismaël, Hubert Ducasse Florence, De Tilière Fassler Béatrice, Faupin Jérémy, Forcadel Nicolas, Louhichi Sana, Lozinski Alexei, Maida Mylène, Malrieu Florent, Salmon Stéphanie, Sueur Franck.

Pour l'examen des promotions à la première classe des Professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants : domaine scientifique, âge et ancienneté comme Professeur, faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques, activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications), encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs), activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapports de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales, activités et responsabilités pédagogiques, responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistique), ce qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le CNU est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donnée la pression très forte sur ce type de promotion, les candidats qui étaient professeurs depuis au moins trois ans ont été privilégiés. Cette promotion est clairement celle où l'embouteillage est devenu le plus critique.

4.4 – Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Biernacki Christophe, Blayo Nogret Eric, Bolte Jérôme, Bouchard-Denize Bruno, Delarue François, Gueudet Ghislaine, Larger Hargus Mariana, Hu Yueyun, Lagoutière Frédéric, Ley Olivier, Loubes Jean-Michel, Masnou Simon, Patilea Valentin, Raynaud de Fitte Paul, Rivoirard Vincent.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils se soient particulièrement distingués dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de re-

cherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges depuis au moins trois ans.

4.5 – Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Amrouche Cherif, Fang Shizan, Grenier Emmanuel, louditskil Anatoli, James François, Lavergne Christian, Roquejoffre Jean-Michel, Soulier Philippe, Vieu Philippe, Zakoian Jean-Michel.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle.

4.6 – Promotions hors CNU

Le bilan des promotions locales pour l'année 2020 n'est pas encore disponible. En 2019, il y a eu en promotions locales :

Promotions MCF Hors classe : Bagland Véronique, Betbeder Jean-Bernard, Castellan Gwennaëlle, Chiron David, Chorro Christophe, Goldberg Daniel, Goufrier Daniel, Haberkorn Thomas, Hamon Agnès, Martin Vincent, Maurel-Segala Edouard, Melot Clothilde, Nagot Isabelle, Rau Clément, Sandier (Chabarchina) Nataliya, soit 15 promotions contre 22 (en 2019) promotions au CNU.

Promotions MCF échelon exceptionnel : Benbourhim Mohammed-Najib, Canon (Viallon) Marie-Claude, Gibel Patrick, Grillot (Mousny) Michèle, Habbal Abderrahmane, Levi Laurent, Meyre Thierry, Sayac Nathalie, soit 8 promotions contre 14 (en 2019) promotions au CNU.

Promotions PR 1ère classe : Abou Chahine (Hayek) Naila, Berzin Corinne, Bich Philippe, Bolley François, Bouhamidi Moulay, Brouste Alexandre, Di Menza Laurent, Didi Biha Mohamed, Franke Brice, Gravejat Philippe, Janvresse Elise, Martin Sébastien, Mophou Loudjom Gisèle, Perchet Vianney, Poncet Philippe, Weil Jacques-Arthur, soit 16 promotions, contre 14 (en 2019) au CNU.

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 1er échelon : Bacro Jean-Noël, Chainais (Hillairet) Claire, Garet Olivier, Jacques Julien, Rosier Carole, Sarda Pascal, Villeneuve Stéphane, soit 7 promotions, contre 14 (en 2019) au CNU.

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 2ème échelon : Comte Fabienne, Cordier Stéphane, Decamps Jean-Paul, soit 3 promotions contre 10 (en 2019) au CNU.

5. Bilan de la session PEDR

Depuis 2014, ce sont les sections du CNU qui évaluent les candidats des établissements souhaitant faire appel au CNU : en 2019, toutes les universités l'avaient fait sauf 4 établissements (Corte, Toulouse 1, Sorbonne Université et l'École pratique des hautes études). Le CNU 26 a dès le début estimé qu'il serait préférable que les PEDR soient évaluées par une commission distincte de celle évaluant les promotions. Hormis la présidente de section, presque aucun membre du CNU n'a participé à la fois à la session promotions et à la session PEDR en 2020. Le « presque » est dû à la ré-organisation consécutive à la crise sanitaire. La session PEDR, initialement prévue le 14 et le 15 mai s'est finalement tenue à l'IHP le 14 et le 15 septembre. Peu de membres étaient à distance (2 PR le 14 septembre et 2PR + 3MCF le 15 septembre).

Chaque section du CNU doit classer les candidats dans trois catégories désignées par les seuls quotas qu'elles représentent : « 20% », « 30% » et « 50% ». Ces quotas doivent être respectés dans chaque corps : MCF et PR.

Comme en 2018 et 2019, la section a procédé à un examen séparé des dossiers de candidats ayant postulé trois fois *consécutives* sans succès à la PEDR. Nous avons à cette fin demandé aux candidats qui étaient dans cette situation de le mentionner explicitement dans leur dossier de candidature. Ces candidats ont été classés dans les catégories 20%, 30% et 50% en fonction des notes intermédiaires uniquement.

Ceci concernait 13 dossiers MCF (sur 199), dont 3 ont été classés dans les 20% et 8 dans les 30%. Parmi les 126 dossiers PR, ceci ne concernait que 4 dossiers, auquel ont été ajoutés 21 dossiers ayant subi deux refus consécutifs : 9 de ces dossiers ont été classés 30%. L'opération se passe visiblement mieux en MCF qu'en PR.

En plus du classement dans une des catégories globales précédentes, chaque candidat se voit attribuer une appréciation A (De la plus grande qualité), B (Satisfait pleinement aux critères), C (Doit être consolidé en vue d'une prime) pour chacune des rubriques P : Publications et production scientifique,

E : Encadrement doctoral et scientifique, D : Diffusion des travaux, R : Responsabilités scientifiques.

Le classement de chaque candidat dans une des catégories (« 20% », « 30% », « 50% ») et les appréciations de chaque critère sont ensuite transmis aux universités qui décident souverainement de l'attribution éventuelle de primes et de leur montant. Les informations remontées des universités montrent une certaine disparité concernant l'utilisation des notes fournies par le CNU pour cette attribution finale, voir https://www.galaxie.enseignementsup-recherche.gouv.fr/ensup/cnu_pedr.htm. Le bureau n'a pas eu accès cette année aux résultats finaux d'attribution des primes par les universités pour les comparer aux répartitions effectuées en 2019, probablement parce que le tableau a été effacé pendant le changement de CNU.

L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années. En cas de congé maternité pendant cette période, l'appréciation porte sur les cinq années précédentes (plus s'il y a plusieurs congés dans la période).

5.1 – Fonctionnement de la section

L'examen des dossiers PEDR a eu lieu sur deux jours au mois de septembre. Les membres du CNU présents ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient (trop) proches. Le bureau de la section avait nommé deux rapporteurs par dossier dans la spécialité du candidat. Compte-tenu des incertitudes sur le mode de tenue des réunions, les rapporteurs ont été encouragés à échanger entre eux sur leurs dossiers pour faciliter l'harmonisation en séance.

Les notes intermédiaires A, B, C ont été attribuées en tenant compte de l'ancienneté des candidats, par souci d'inclure dans le dispositif de façon équilibrée les enseignants-chercheurs à tous les stades de leur carrière, et de maintenir une certaine attractivité des postes de jeunes enseignants-chercheurs. Ceci conduit à un niveau d'exigence élevé pour les PR2 voire très élevé pour les PR1/PR EX. Ce mode de fonctionnement n'est pas généralisé dans les autres sections du CNU.

Le niveau des dossiers déposés est globalement très bon et a conduit à classer dans les 30% plusieurs dossiers de recherche *de tout premier plan* et dans les 50% des dossiers de collègues *très actifs* effectuant bien leur métier selon les quatre critères.

Être classé dans les 50% ne doit donc pas être interprété comme une appréciation négative, d'autant plus que de nombreux dossiers se situant à la limite des 30% sont de niveaux proches, et que donc l'ordre du classement entre eux comporte une part d'arbitraire inévitable.

Soulignons que des MCF récemment recrutés ont obtenu, cette année comme la précédente, des évaluations « 20% » ou « 30% », car la jeunesse de leur dossier a été prise en compte. Ils ne doivent donc pas hésiter à postuler.

La section a décidé d'attribuer les notes intermédiaires A, B, C sans tenir compte des quotas, afin qu'elles reflètent réellement la valeur du dossier dans une catégorie donnée. Cela aboutit naturellement à ce que des dossiers ayant des notes intermédiaires excellentes aient une note globale décevante. C'est le reflet d'un niveau élevé des dossiers de candidature déposés, et ceci est accentué par le fait qu'une faible proportion de collègues postule. Par ailleurs les universités attribuent les PEDR selon des critères qui varient assez fortement, notamment en ce qui concerne l'utilisation des notes intermédiaires. Néanmoins nous n'en avons pas tenu compte pour attribuer ces notes, estimant que cela rendrait les avis du CNU illisibles. Les notes finales sont généralement dans chaque rubrique, la meilleure des deux notes attribuées par les rapporteurs.

5.2 – Résultats de la session

Il y a eu cette année 199 candidats MCF et 126 candidats PR (contre 171 MCF et 137 PR en 2019) : les quotas imposés dans Galaxie par le Ministère étaient donc 40 dans les 20%, 60 dans les 30% et 99 dans les 50% pour les MCF ; 25 dans les 20%, 38 dans les 30% et 63 dans les 52% pour les PR. Sur les 199 candidats MCF il y avait 70 femmes. Il y a eu 15 femmes classées dans les 20% et 26 femmes dans les 30%. Sur les 126 candidats PR il y avait 17 femmes. Il y a eu 5 femmes classées dans les 20% et 4 femmes dans les 30%.

Il est important de noter qu'un congé de maternité pendant les 4 années précédant la candidature *conduit à prendre en compte l'activité sur une période de 5 ans au lieu de 4*. Les candidates **doivent en tenir compte dans la constitution de leur dossier**.

5.3 – Recommandations aux candidats

Le CNU 26 a rendu public sur le site du CNU <http://www.cpcnu.fr/web/section-26> et sur le site <http://cnu26.emath.fr/> des conseils aux candidats. En particulier il était précisé comment il serait tenu compte des rubriques P, E, D et R.

Ces quatre rubriques sont évaluées de manière différenciée suivant que le candidat appartient à l'une des trois catégories suivantes : MCF, PR2 ou PR1-PRÉX, et selon l'ancienneté du candidat dans sa catégorie. Pour les maîtres de conférences récemment nommés les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'ont en général pas grand sens. Cependant, la présence d'éléments comme les encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire... sera un élément crucial d'appréciation pour certains jeunes MCF particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Les rubriques encadrement doctoral (E) et responsabilités scientifiques (R) sont particulièrement prises en compte pour les professeurs. L'absence de responsabilité administrative ou d'encadrement doctoral dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PRÉX est une anomalie qui peut éventuellement être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Il est anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives, la même analyse sera appliquée aux MCF « expérimentés » (recrutés depuis au moins 6 ans).

Comme dans le cas des dossiers de promotion, nous attirons l'attention sur les points suivants.

1. En ce qui concerne l'encadrement doctoral, le dossier doit préciser pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
2. En ce qui concerne les conférences, il doit distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

De façon générale, chaque élément du dossier doit être décrit de façon suffisamment claire et précise, et lorsque cela est pertinent par des éléments chiffrés, pour permettre sa juste prise en compte par la section.

Conclusion

Cette première année s'est globalement déroulée dans des conditions difficiles (grèves de transports puis confinement et crise sanitaire), mais l'ensemble des principes hérités du précédent CNU ont été respectés.

Les fondements du fonctionnement du CNU sont la collégialité et la transparence, assurée par la publication de critères précis et de bilans. Il est également important que les collègues le perçoivent comme une institution proche d'eux. Les collègues souhaitant un retour sur l'examen de leur cas par

la section, soit qu'il en contestent le résultat, soit qu'ils souhaitent des conseils personnalisés pour une candidature future, peuvent écrire à la présidente ou à un des vice-présidents.

Enfin, il faut le redire, la session PEDR est éprouvante pour tous ceux qui y participent car les quotas pris sur le nombre de candidats effectifs sont une aberration. La section milite depuis longtemps pour que les quotas soient pris sur le nombre de candidats éligibles.

Le Bureau de la Section

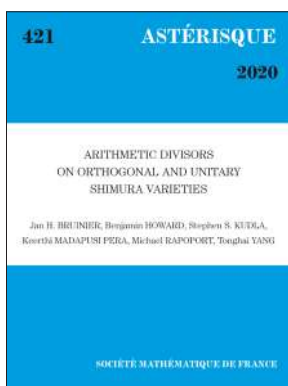
Astérisque - dernières parutions



Vol. 422 Séminaire Bourbaki, volume 2018-2019, exposés 1151-1165

ISBN 978-2-85629-930-2
2020 - 599 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 80 € - Members: 56 €

Ce 71e volume du Séminaire Bourbaki contient les textes des quinze exposés de survol présentés pendant l'année 2018/2019 : réseaux euclidiens et séries thêta, théorie du pluripotentiel, graphes réguliers aléatoires, espaces et groupes non exacts, conjecture des compagnons, C^* -simplicité, géométrie birationnelle des variétés de Fano, réduction stable en dimension supérieure, théorie de Teichmüller supérieure, polynômes HOMFLY et schémas de Hilbert, fonction zêta de Riemann et probabilités, transition de phase en percolation, conjecture de triangulation, homologie des espaces de Hurwitz, hypersurfaces minimales.



Vol. 421 Arithmetic Divisors on Orthogonal and Unitary Shimura Varieties

J.H. BRUNIER, B. HOWARD, S.S. KUDLA, K. MADAPUSI PERA, M. RAPOPORT, T. YANG

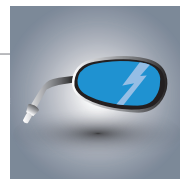
ISBN 978-2-85629-927-2
2020 - 297 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 50 € - Members: 35 €

The three papers in this volume concern the modularity of generating series of divisors on integral models of orthogonal and unitary Shimura varieties.

Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





La Gazette en 1987

BIG SISTER GAZETTE

La Gazette est à la pointe des techniques modernes. Il convient, de plus en plus, d'utiliser les ressources disponibles afin de réduire d'autant le travail du secrétariat de rédaction.

1. La Gazette est composée à l'Institut Fourier à Grenoble en T_EX, sur un ordinateur SM90. Les textes composés en T_EX peuvent donc être envoyés par la poste sur disquette 5 1/4. Inutile dans ce cas d'y inclure vos normes de composition, la Gazette a les siennes. Joignez y toujours en revanche une sortie papier.

*2. On peut aussi envoyer les fichiers T_EX par Bitnet aux adresses suivantes :
monika at fricg71
andler at frulm63.*

3. On peut aussi envoyer (par la poste) des disquettes Macintosh à Martin Andler, qui les transformera, en utilisant le prototype Easytex, en fichiers T_EX, puis les transmettra à Grenoble.

4. On peut joindre le Comité de rédaction par Minitel sur la messagerie du CNRS (MICNRS sur le 36 13), à l'adresse AndlerM1.

5. Tout cela ne veut pas dire que le Comité de rédaction renonce, de quelque façon que ce soit, à son contrôle sur le contenu de la Gazette. Tous les textes doivent lui être soumis avant publication.

6. La Gazette a besoin des mathématiciens pour des articles de toutes natures. N'hésitez pas à nous contacter pour nous faire part de vos propositions, souhaits et projets.

Le point de vue du rédacteur en chef

• M. ANDLER

C'est peu après sa prise de fonction comme président de la SMF, en janvier 1986, que Jean-François Méla m'a demandé de rejoindre le comité de rédaction de la *Gazette*, en omettant soigneusement de me prévenir que, dans la foulée, il comptait bien que j'en devienne rédacteur en chef très rapidement, le rédacteur en chef en fonction souhaitant se retirer.

La *Gazette* était à l'époque en pleine réflexion sur un changement de format. Son rédacteur en chef, Francis Sergeraert, professeur à l'institut Fourier, avait une tex-pertise nettement supérieure à la moyenne, et c'est lui qui a piloté le passage de la composition à \TeX (la *Gazette* était précédemment obtenue par fac-simile de documents dactylographiés, chacun selon ses normes). C'est notamment lui qui a mis au point, à partir d'aucune macro pré-existante, le format en deux colonnes qui paraissait bien préférable.

Le passage à \TeX n'était pas une mince affaire : comme toute mutation technique, cela entraîne des changements dans la manière de travailler. Jusqu'au début des années 1980, les départements et laboratoires de mathématiques avaient des secrétaires dont une des fonctions, ou parfois la fonction unique, était de dactylographier les documents pédagogiques (polycopiés, feuilles d'exercices, énoncés de problèmes et d'examens), les thèses et les articles. Seuls certains collègues s'en chargeaient eux-mêmes, au moins partiellement. Que la *Gazette* ait trouvé en Monique Marchand quelqu'un qui s'y mette avec enthousiasme a été une énorme chance : comme elle le narre, ce n'était pas évident !

À partir de décembre 1986, bouclage du numéro 32, première livraison dans le nouveau format, je suis venu tous les trois mois à l'Institut Fourier travailler pendant deux ou trois jours aux côtés de Monique. Moment intense, mais aussi de bonheur – celui du journaliste qui voit le numéro prendre forme, où il faut tenir en un nombre fixé de pages, 64 ou 96 pages : pas question de faire autre chose que d'imprimer par cahiers de 32 pages !

L'autre mutation technique de la période a été l'introduction du courrier électronique. Il n'y avait

pas de logiciel de mail, donc on travaillait directement sur le shell d'unix, sans autre éditeur que la possibilité d'effacer les caractères précédents. Beaucoup d'entre nous nous souvenons être restés perplexes après avoir fièrement écrit notre premier mail : comment persuader la machine de le faire partir ? La réponse, soufflée par les rares initiés, était qu'il fallait retourner à la ligne et taper un point en début de ligne. Et là, miracle, le message partait et on pouvait suivre son cheminement d'un nœud à l'autre !

1984 n'était pas loin, et c'est le sentiment partagé d'excitation et d'effroi devant la révolution technique en cours qui a dû me suggérer le titre « *Big Sister Gazette* ».

Je ne vais pas m'étendre sur la politique éditoriale que nous avons décidée : outre présenter des maths et donner des informations sur les institutions (comité national du CNRS, CNU – qui s'appelait encore CSU – etc.), la nouvelle *Gazette* allait accorder une large place à des analyses et réflexions sur la politique scientifique et universitaire. Mais il n'est pas inutile de rappeler le contexte. À partir du milieu des années 1970, la période de croissance des universités qui durait depuis la fin des années 1950 s'était brutalement stoppée. Suivirent des années de disette : pas de postes universitaires (encore moins bien qu'aujourd'hui) ; seul le CNRS continuait à recruter, mais très peu en mathématiques, puisque jusque-là la quasi-totalité des mathématiciens ne faisaient que passer par le CNRS pour y préparer leur thèse d'état avant de rejoindre l'université. Les mathématiciens, guère aguerris au combat pour des postes et crédits, s'en sortaient particulièrement mal. Au CNRS, les mathématiques étaient sur un strapontin dans le département de physique. Quand la gauche est arrivée au pouvoir en 1981, il y eut une forte relance, mais dont l'impact ne s'est fait sentir qu'à partir de 1984. Mais le retour de la droite en 1986 ne présageait rien de bon.

On assista à partir de 1986 à un changement dans la communauté mathématique. À l'attitude

aristocratique (en poussant le trait : « on ne va quand même pas s'abaisser à demander des crédits et des postes! ») succéda un activisme militant. Sa manifestation la plus visible fut le colloque Mathématiques à venir organisé avec un grand succès à Polytechnique fin 1987¹ – la première grande opé-

ration de promotion des mathématiques, démontrant au CNRS, aux décideurs politiques et économiques et au grand public, que les mathématiques étaient un atout pour notre pays. C'est dans ce contexte que la nouvelle *Gazette* s'est développée.



Martin ANDLER

Martin Andler a été rédacteur en chef de la *Gazette* de 1986 à 1990, alors qu'il était chargé de recherches au CNRS. Il a notamment été vice-président de la SMF de 1997 à 1999, et présidé l'association Animath de 1998 à 2017.

Souvenirs de Jean-Pierre Demailly à propos de la *Gazette* et des débuts de la composition en $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$

• J.-P. DEMAILLY

Je me souviens parfaitement de cette époque : j'étais déjà à l'Institut Fourier depuis 4 ans, et l'IF était – avec l'IRMA Strasbourg – l'un des premiers laboratoires de mathématiques qui avait entrepris de déployer $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ de manière organisée. Tout ça se passait sous l'énergique impulsion de nos experts de l'époque, Guy Laffaille, qui a ensuite été nommé Professeur à Montpellier, et de Laurent Guillopé, nommé Professeur à Nantes autour des années 1990. Ils sont maintenant tous les deux émérites.

« monika » est l'identifiant de Monique Marchand, qui était alors membre du personnel CNRS du laboratoire, et s'occupait de la saisie en $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ aux côtés de sa collègue Arlette Guttin-Lombard. On utilisait à l'époque un réseau qui s'appelait « bitnet », un précurseur d'internet issu de l'armée américaine – 1987, c'était nettement avant l'arrivée du web!

Quant à la machine SM90 évoquée dans l'éditorial « Big Sister Gazette », je pense que cela a été la première machine Unix installée à l'Institut Fourier. À cette époque, on avait aussi des PC Intel 8086 et 80286 qui n'avaient même pas de disque dur, juste 2 disquettes souples de 5 pouces 1/4 et de 375 KOC-

tets comme mémoire permanente! La SM90 était un gros cube d'environ 1 mètre de côté, qui devait peser quelques dizaines de kilos et qui, si je me souviens bien, compilait le $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ à une vitesse fantastique par rapport aux PC, quelque chose comme 1 page toutes les 4 ou 5 secondes ... C'était quand même un gros progrès par rapport à l'époque antérieure où les formules étaient saisies à la main, et les corrections faites à coup de liquide correcteur, de scotch et de ciseaux!

À côté de l'Institut Fourier, il y avait le cicc (Centre Interuniversitaire de Calcul de Grenoble). Du côté cicc, l'équipe technique avait opté non pas pour des systèmes Unix mais pour un système encore plus monstrueux du nom de Multics – Linux n'existait pas encore et il n'y avait que des systèmes Unix commerciaux propriétaires, fort chers. – Ce système Multics a dû être abandonné au début des années 1990, faute d'interopérabilité avec le reste...

Toutes ces machines étaient très rudimentaires par rapport à ce dont on dispose aujourd'hui, mais il y avait en revanche peut-être davantage d'interactions humaines directes au sein des laboratoires. En tout cas, avant que les mathématiciens ne fi-

1. Voir « J.-F. Méla, Le premier colloque Mathématiques à venir », *Gazette des Mathématiciens* 129, avril 2009.

nissent par se charger eux-mêmes de la saisie mathématique, nous avons la chance de bénéficier d'un secrétariat formé à \TeX et qui était à même de

soulager les chercheurs des travaux de dactylographie. Une autre époque!



Jean-Pierre DEMAILLY

Professeur à l'université Grenoble Alpes, spécialiste de géométrie analytique, pongiste amateur, un peu accro au chocolat et membre de la section de mathématiques de l'Académie des sciences.

La Gazette à la pointe des technologies modernes

• M. MARCHAND

C'était fin des années 80. J'étais alors secrétaire à l'institut Fourier depuis déjà plus de 10 ans. Une routine s'était installée, j'étais sur le point d'aller voir ailleurs... et voilà que l'informatique allait m'apporter quelque chose de nouveau, un regain d'intérêt dans mon travail! Ce fut le passage de la machine à écrire à l'ordinateur et encore plus, à l'apprentissage et l'utilisation du logiciel \TeX pour l'édition des textes mathématiques. Laurent Guillopé et Guy Laffaille furent nos maîtres, patients, toujours à notre écoute... car les questions fusaient!

C'est en 1986 que Francis Sergeraert, professeur à l'institut Fourier me proposa le secrétariat de rédaction de la Gazette dont Martin Andler en devenait le rédacteur en chef. Francis Sergeraert avait rédigé, composé, la matrice de la Gazette au format \TeX . Ce format se présentait sur deux colonnes, ce qui n'était pas sans quelques conséquences à son lancement. La relecture demandait beaucoup d'attention, car il arrivait qu'une partie des textes d'un article disparaisse au moment de la compilation. Mais au fil du temps, l'ensemble progressa.

En même temps que l'apprentissage du logiciel \TeX , ce furent les prémices du courrier électronique. Quelle surprise, étonnement de voir arriver sur une machine des articles venant de diverses universités

françaises et étrangères. Auparavant tous ces articles étaient transmis par voie postale. L'utilisation du courrier électronique était bien loin de nos boîtes mails d'aujourd'hui! Tout fonctionnait sous UNIX! Francis Sergeraert m'initia à cette nouvelle boîte aux lettres électronique. Lire, écrire, envoyer, récupérer un fichier se faisaient par des commandes UNIX. Mon cahier avec toutes les notes ne me quittait pas!

Les articles transmis par cette voie électronique étaient souvent composés au format Word, car très peu de mathématiciens rédigeaient leurs articles en \TeX . Ce fichier Word était transformé au format Mac Write et ensuite au format \TeX . J'incluais alors les commandes du format « Gazette », puis arrivaient la compilation et la visualisation du texte. C'est à ce moment-là que les surprises survenaient... une partie de texte avait disparu, un titre se trouvait au bas d'une colonne, le texte sur la suivante... Il fallait donc user de « bricolage » pour que la présentation soit enfin correcte et l'ensemble du numéro prêt à être remis à l'imprimeur, en version papier pendant les premières années, puis la transmission se fit par disquette et par clé usb. Comme je l'ai noté au début de ces quelques lignes, passer d'une machine à écrire à un ordinateur, fut un pas de géant!



Monique MARCHAND

Monique Marchand a assuré le secrétariat de la Gazette de 1986 à 1993. Elle était alors secrétaire à l'Institut Fourier à Grenoble depuis 1970 qu'elle quittera en 1991 pour venir travailler à la cellule de diffusion de la SMF à Marseille. En 1993, elle retournera à Grenoble et sera affectée à l'IBS (Institut de Biologie Structurale). C'est en 1996 qu'elle retournera vers les mathématiques, lors de la création de la Cellule MathDoc dirigée par Pierre Bérard. Elle y restera jusqu'en 2016, date de son départ à la retraite.



Jia-rong Yu

1920 - 2020



Ai-hua Fan, université de Picardie

Jia-rong Yu, né le 16 novembre 1920, est décédé le 14 octobre 2020, à l'âge de cent ans. Pour notre communauté mathématique, il est connu comme l'initiateur de l'École Mathématique Sino-Française et le directeur du Centre Mathématique Sino-Français, à l'université de Wuhan, de 1980 à 1994. En 1991, grâce à son investissement colossal dans la coopération franco-chinoise, il a été fait officier dans l'ordre des palmes académiques.

Les travaux mathématiques de Jia-rong Yu ont été influencés par G. Valiron et S. Mandelbrojt. Jia-rong Yu a soutenu sa thèse d'État en 1950, sous la direction de G. Valiron, dont le jury était composé de A. Lichnerowicz, P. Montel et G. Valiron. Sa thèse a été publiée en 1951 aux Annales de l'École normale supérieure, sous le titre « Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières » (à l'époque, son nom

était translittéré Chia-rung Yu). Jia-rong Yu rentra en Chine en 1951. Il est resté en contact avec ses maîtres et ses amis de sa génération comme par exemple J.-P. Kahane et P. Malliavin, bien qu'il ne les ait revus que trente ans après son retour en Chine. Il est revenu en France en 1979 comme professeur invité à l'université d'Orsay et puis en 1980 comme membre d'une délégation chinoise grâce à laquelle il a visité de nombreuses universités françaises. Le Centre Mathématique Sino-Français a alors vu le jour à l'université de Wuhan. Rappelons que pendant la révolution culturelle (1966-1976), les universités chinoises étaient fermées (la situation a commencé à changer quelque peu avec la réapparition de Deng Xiaoping en 1973). Malgré l'absence de structures de recherche pendant la révolution culturelle, il réussit à poursuivre ses recherches et recommença à publier dès 1976. À cette époque, il étudiait le théorème d'unicité de S. Mandelbrojt, N. Wiener et P. Malliavin pour les fonctions analytiques de plusieurs variables. Il appliqua les résultats qu'il obtint au problème des moments, y compris au problème des moments de Stieltjes-Hamburger, au problème d'approximation et à la quasi-analyticité. Jia-rong Yu était un expert des séries de Dirichlet et des séries de Dirichlet aléatoires. J.-P. Kahane disait « J'y ai consacré tout un livre, *Some random series of functions*, mais Jia-rong Yu m'a précédé dans l'application de ce sujet aux séries de Dirichlet ».

En 1947, quatre étudiants chinois en mathématiques ont été sélectionnés et envoyés en France par le gouvernement chinois. Deux ont obtenu une thèse d'État, Chia-rung Yu et Wen-tsun Wu. Wen-tsun Wu a intégré l'Académie des Sciences à Pékin à son retour en Chine (après un passage éclair à l'université de Pékin). Le choix de l'université de Wuhan comme université chinoise accueillant la coopération franco-chinoise en mathématiques, qui débuta en 1980, est en partie dû aux relations que Jia-rong Yu a entretenues avec de nombreux collègues français et à sa présence dans cette université.

Pendant la révolution culturelle il a enseigné « clandestinement », à quelques rares étudiants mo-

tivés, à son domicile. Il leur a fourni des repas. La réouverture de la Chine commença en 1977. Avant même que tout soit en ordre, il se proposa d'enseigner, en dehors de son service, l'intégration de Lebesgue aux jeunes enseignants de son équipe, à raison de deux demi-journées par semaine. Jia-rong Yu était un professeur apprécié. Son livre « Fonctions d'une variable complexe », qui en est à sa cinquième édition, est un classique en Chine (sa rédaction a été terminée en 1966 et sa première édition est parue en 1979).

Jia-rong Yu est issu d'une famille de savants. Son grand-père avait réussi les examens mandarins (le système des examens mandarins fut institutionnalisé en 605 et aboli en 1905 ; ces examens permettaient de sélectionner des candidats pour la bureaucratie de l'État Impérial). Il entra dans une école privée à l'ancienne à l'âge de six ans. Cela lui permit d'obtenir une excellente éducation. En 1940, il passa le concours national commun des meilleurs universités. Ayant terminé premier de ce concours national, il entra à l'université centrale nationale, à Nankin (Nankin était alors la capitale et son université était la meilleure de l'époque). C'était la période de l'occupation japonaise. L'université dut être transférée, ainsi que la capitale, à Chongqing, à l'ouest du pays. Quatre ans plus tard, Jia-rong Yu devenait assistant et aspirant chercheur de cette université.

Jia-rong Yu était un grand lettré, un connaisseur de Confucius, un calligraphe. À quatre-vingt-neuf ans, il pouvait encore réciter la bien célèbre, longue et belle prose intitulée « La Tour de Yueyang » de Zhong-yan Fan (989-1052). Ceux qui l'ont vu ces dernières années ont sûrement été impressionnés par sa mémoire et sa grande culture. Il circule sur l'internet une sélection de dix textes classiques. Il pouvait les réciter couramment. Quand on lui demandait son avis sur cette sélection il répondait que ce choix ne couvrait qu'une infime partie des meilleurs textes que la civilisation chinoise, ininterrompue pendant cinq mille ans, a fournis. Un divertissement avec ses petits enfants était de leur lire un passage des « Vingt-Quatre histoires » et puis de le leur raconter en langue moderne (les Vingt-Quatre histoires sont une série d'Annales dynastiques qui couvrent l'histoire de la Chine de 3000 av. J.-C. à la dynastie des Ming au XVII^e siècle). Au cours d'une discussion sur le socialisme et le communisme avec J.-P. Kahane, il lui a fait remar-

quer qu'une société du type communiste avait déjà été décrite par des disciples de Confucius. Ces dernières années, il lisait un ouvrage canonique du bouddhisme et il regrettait que dans sa jeunesse il ne l'ait pas compris. À son aide ménagère, une dame d'une cinquantaine d'années, qui l'a accompagné jusqu'au dernier moment, il enseignait des poèmes et le calcul différentiel. Elle se déclare son dernier disciple.

Jia-rong Yu est un symbole d'une époque chinoise. Il était un homme de conviction et d'action, une personne bienveillante, un sage bien aimé.

Shi-zan Fang, université de Bourgogne

Je ne m'y attendais pas, la nouvelle que le Professeur Jia-rong Yu a quitté ce monde m'a bouleversé. Il était en excellente santé et d'esprit vif l'an dernier tout au long de la fête destinée à célébrer son centenaire à l'université de Wuhan : il nous a même réservé plusieurs surprises. Avant la cérémonie, le comité d'organisation a projeté une vidéo dans laquelle le Professeur Yu récitait un long poème en prose à trois cent soixante huit caractères, intitulé « La Tour de YueYang »¹, la clarté et la justesse de la tonalité de son récit nous ont tous émerveillés. Il a tenu à faire un discours pour saluer tous les participants venus des quatre coins du monde, il a même pris plaisir à une longue séance de photos-souvenirs avec nous. Le lendemain, au moment du départ de l'hôtel, à notre grande surprise, le Professeur Yu a réuni les anciens étudiants de la classe sino-française² ; il n'a pas pu nous reconnaître visuellement, mais se souvenait bien de nos noms : nous avons tous changé avec le temps, alors qu'il gardait toujours en lui les images de notre jeunesse.

Au début des années quatre-vingt du siècle dernier, la Chine a commencé à s'ouvrir au monde occidental : le Professeur Yu a joué un rôle de pionnier dans l'établissement de coopérations universitaires entre la Chine et la France en créant la classe de mathématiques sino-française, qui suivait à l'époque le cursus universitaire français. En tant que directeur du Centre Sino-Français de Mathématiques de Wuhan pendant quinze ans, le Professeur Yu y a consacré toute son énergie : le Centre a recruté huit promotions soit plus de deux cent trente étudiants ; ce programme a laissé une empreinte profonde dans l'histoire de la coopération culturelle

1. Écrit par Zhongyan Fan en l'an 1046 sous la dynastie Song.

2. Je fais partie de la première promotion.

entre la Chine et la France.

Le Professeur Yu a connu un destin hors du commun. Né dans une famille bourgeoise dotée de traditions chinoises possédant des milliers de grands classiques littéraires ou philosophiques, y compris ceux du confucianisme et du taoïsme, il a, grâce à ses qualités exceptionnelles, obtenu une bourse pour faire ses études doctorales en mathématiques à Paris, et a soutenu sa thèse d'État³ en seulement trois ans ; il a su nouer des liens d'amitiés avec des mathématiciens éminents tels que H. Cartan, G. Choquet, J.P. Kahane, P. Malliavin, P.A. Meyer et L. Schwartz pour n'en citer que quelques-uns. La révolution culturelle a bousculé sa carrière scientifique prometteuse, mais lui a aussi fait perdre le trésor familial d'une dizaine de malles de livres. Mais dès que l'occasion le lui permettait, il se remettait à travailler sur les mathématiques ; petit à petit, par tous les moyens, il acquérait de nouvelles éditions des livres de grands classiques qu'il aimait tant.

Le Professeur Yu a gagné le respect, l'estime et l'admiration de ses pairs, de ses étudiants, de tous ceux qui l'ont fréquenté, non seulement par ses qualités d'organisateur, par ses œuvres scientifiques, mais aussi par ce mélange de cultures qu'il incarnait, une culture orientale d'humilité et de politesse combinée avec une culture occidentale d'élégance et de franchise. Selon le sens du Taoïsme, la suprême bonté agit comme de l'eau, cherchant à faire du bien à toute chose sans en tirer bénéfice. J'ai eu la chance de rencontrer cette bonté du Professeur Yu.

Jacques Peyrière, université Paris-Saclay

Jia-rong Yu s'est éteint le 14 octobre 2020 dans sa centième année. Il a soutenu sa thèse de Doctorat d'État en 1950. C'était un élève de Georges Valiron. Il est retourné en Chine très rapidement pour participer à l'essor de son pays.

Lorsque la Chine s'est réouverte, il s'est souvenu des amitiés qu'il avait nouées lors de ses études en France. Il a donc naturellement pris contact avec Jean-Pierre Kahane et Paul Malliavin. Il est venu à Orsay en 1979 pour mettre au point un projet de coopération. En effet beaucoup de choses étaient à construire et les universités chinoises avaient besoin d'aide. Ce projet a abouti lors de la visite en Chine du Président Giscard d'Estaing. Un centre sino-français a été créé à l'université de Wuhan. Il en fut le directeur et sous son impulsion ce centre a prospéré. Pendant un peu plus de dix ans, chaque année, des étudiants ayant suivi à Wuhan un cursus enseigné en français, étaient sélectionnés pour poursuivre leurs études en France. Le bilan est impressionnant. Plus de soixante-dix thèses en mathématiques ont été soutenues. La moitié environ de ces étudiants est retourné en Chine, irriguant ainsi les meilleures universités chinoises de jeunes talents. La France en a également bénéficié : nombre de nos collègues dans nos universités sont issus de cette opération. D'autres étudiants, en moindre nombre, sont devenus physiciens, chimistes, informaticiens ou économistes.

Tous les étudiants qui l'ont connu parlent de lui avec respect, admiration et beaucoup d'affection. Jia-rong Yu était un homme chaleureux, attentif à autrui et profondément passionné par sa tâche. Malgré la lourdeur de ses charges administratives, le temps qu'il consacrait à ses étudiants et le soin extrême qu'il apportait à son enseignement, il a toujours pratiqué les mathématiques. C'était l'un des spécialistes des séries de Dirichlet. Même retraité il a continué à faire de la recherche, en témoigne une note aux Comptes Rendus écrite à quatre-vingt-dix ans passés. C'était aussi un fin lettré, familier du chinois ancien. Il maniait la langue française avec subtilité. Enfin, il était aussi calligraphe, et je garde précieusement la calligraphie qu'il m'a offerte en témoignage de son amitié.

3. Soutenue en 1950.

Xavier FERNIQUE

1934 - 2020

• M. LEDOUX



Xavier Fernique 1975

(Archives Math. Forschungsinst. Oberwolfach)

Xavier Fernique est décédé au mois de mars 2020. Il a été l'un des grands experts mondiaux des mesures et fonctions aléatoires gaussiennes, auxquelles il a consacré presque toutes ses recherches, démontrant des résultats fondamentaux et émettant des conjectures audacieuses et fertiles.

Après une thèse à Strasbourg (où il a effectué toute sa carrière) sous la direction d' Aimé Fuchs, élève de Robert Fortet, Xavier Fernique s'est très tôt intéressé aux propriétés de régularité de processus gaussiens, un peu à l'écart des grands courants probabilistes de l'époque.

En 1970, dans une célèbre Note aux Comptes Rendus de deux pages [2] présentée par Paul Lévy (pendant longtemps la Note aux Comptes Rendus la plus citée au monde – les citations de MathSciNet sont plus approximatives pour les articles d'avant 1997), il démontre l'intégrabilité forte des normes de vecteurs aléatoires gaussiens, ou suprema de processus gaussiens. L'argument, aussi simple qu'élégant, aura des répercussions multiples, jusqu'à ce qui a pris le nom d'inégalité de concentration [6].

Le cours de 1974 [4] de l'École de Probabilités de Saint-Flour (dont il a été un soutien des premières éditions) sur la « Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes » est un monument dont l'impact a été considérable. Les travaux pionniers de Vladimir Sudakov et Richard Dudley sur l'entropie métrique de Kolmogorov initiaient l'étude des processus gaussiens $(X_t)_{t \in T}$ à travers les propriétés métriques de l'espace des paramètres T muni de la (pseudo-) distance $\|X_s - X_t\|_2$, $s, t \in T$, des écarts en norme L^2 . Xavier Fernique démontre,

dans ce cours, que la condition suffisante d'entropie de Dudley est aussi nécessaire pour la bornitude et la continuité presque sûre des trajectoires d'un processus gaussien stationnaire. Ce résultat permettra des progrès définitifs sur les séries de Fourier aléatoires, initiées par Jean-Pierre Kahane, avec les travaux de Michael Marcus et Gilles Pisier [5]. Ce cours développe aussi la notion de « mesure majorante » (sur l'espace métrique des paramètres), dont Xavier Fernique conjectura très tôt la pertinence pour caractériser la continuité presque sûre d'un processus gaussien quelconque. Cette dernière étape sera franchie en 1987 par Michel Talagrand [7]. Le théorème de Fernique-Talagrand est l'un des grands succès de la deuxième moitié du xx^e siècle dans l'analyse des processus gaussiens (et l'entretien à la Gazette [9] en décrit bien sa genèse). Un autre résultat de Xavier Fernique, de la fin des années 80, sur les séries de Fourier aléatoires à coefficients vectoriels [3] a conduit à la conjecture fameuse sur les processus de Bernoulli, longtemps promue par Michel Talagrand et résolue seulement récemment [1]. Le livre de Michel Talagrand [8] (une nouvelle édition est à paraître) sur le « generic chaining », forme épurée des mesures majorantes (sans mesure!), est une somme, aux multiples facettes et ramifications, qui rend pleinement hommage à ces travaux novateurs et féconds.

Les enseignements et écrits de Xavier Fernique entraient dans la tradition classique française, structurés, rigoureux, clairs et concis. Ses cours de mesure et intégration et de probabilités donneront le goût de ces matières à ses jeunes élèves. Ses exposés scientifiques étaient vivants et puissants, le ton de sa voix augmentant souvent au fil des minutes. L'anglais n'était pas son fort, et fréquemment les collègues étrangers lui demandaient une présentation en français, qu'ils jugeaient plus compréhensible. Sa grande et robuste stature faisait autorité. Un jour, comme s'en souvient avec amusement Stanislaw Kwapień, il resta coincé dans la petite Fiat 126 Polski de ce dernier, que le commerce occidental avait infiltré dans le bloc de l'Est.

L'héritage scientifique de Xavier Fernique est multiple, depuis la profonde compréhension métrique de l'aléa des processus gaussiens jusqu'aux méthodes d'intégrabilité et de concentration des mesures gaussiennes, aujourd'hui biens communs

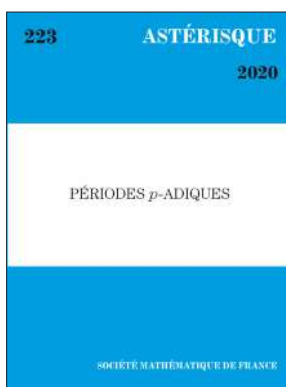
aux origines quelque peu oubliées.

De sa vie personnelle, il laisse aussi orpheline une très grande famille, huit enfants, de nombreux petits-enfants et arrière-petits-enfants.

Références

- [1] W. BEDNORZ et R. LATAŁA. « On the boundedness of Bernoulli processes ». *Ann. of Math. (2)* **180**, n° 3 (2014), p. 1167-1203.
- [2] X. FERNIQUE. « Intégrabilité des vecteurs gaussiens ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **270** (1970), A1698-A1699.
- [3] X. FERNIQUE. « Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires à valeurs vectorielles ». In : *Probability theory on vector spaces, IV (Łańcut, 1987)*. Vol. 1391. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1989, p. 66-73.
- [4] X. FERNIQUE. « Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes ». In : *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, IV-1974*. 1975, 1-96. Lecture Notes in Math., Vol. 480.
- [5] M. B. MARCUS et G. PISIER. *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*. **101**. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981, p. v+151.
- [6] G. PISIER. « Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces ». In : *Probability and analysis (Varenna, 1985)*. Vol. 1206. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1986, p. 167-241.
- [7] M. TALAGRAND. « Regularity of Gaussian processes ». *Acta Math.* **159**, n° 1-2 (1987), p. 99-149.
- [8] M. TALAGRAND. *Upper and lower bounds for stochastic processes*. **60**. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Modern methods and classical problems. Springer, Heidelberg, 2014, p. xvi+626.
- [9] « Un interview de Michel Talagrand. Propos recueillis par Gilles Godefroy ». *La Gazette des Mathématiciens* **160** (2019).

Astérisque - réédition 2020



Vol. 223

Périodes p -adiques (Séminaire de Bures, 1988) - réédition 2020

J.-M. FONTAINE

ISBN 978-2-85629-924-1
2020 - 420 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 65 € - Members: 46 €

Soit K un corps de caractéristique 0 , complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$ et L une clôture algébrique de K . Ce livre est centré sur l'étude des représentations p -adiques de $\text{Gal}(L/K)$, des différentes cohomologies p -adiques associées aux variétés algébriques propres et lisses sur K et des comparaisons entre elles. Il contient notamment : la construction du corps des périodes p -adiques et de certains de ses sous-anneaux ; la définition des représentations p -adiques semi-stables et leur classification ; la définition et l'étude de la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques pour les « log-schéma log-lisses » sur k ; la comparaison entre la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques et cohomologie de de Rham pour une variété propre et lisse X sur K ayant réduction semi-stable ; une version relative du théorème de comparaison p -adique sur un schéma abélien, moyennant des hypothèses générales ; l'étude de la monodromie et des réalisations l -adiques des l -motifs sur K .

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

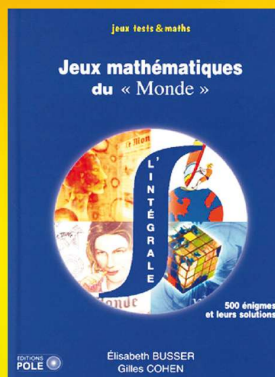
*frais de port non compris



Découvrez *Tangente*, le magazine de la culture mathématique avec l'abonnement

INTÉGRAL MATHS

Et aussi...
sur
affairedelogique.com



400
problèmes
du Monde
et leurs
solutions

19 hors séries

30
nos de *Tangente*



sur
tangente-mag.com



sur
tangente-education.com

53 nos de
Tangente Éducation



5 € par mois

www.infinimath.com/librairie

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (gazette@smf.emath.fr), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier \TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe \LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions \TeX courantes (\TeX Live et \MacTeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que \MiKTeX), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution \TeX à jour.

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

