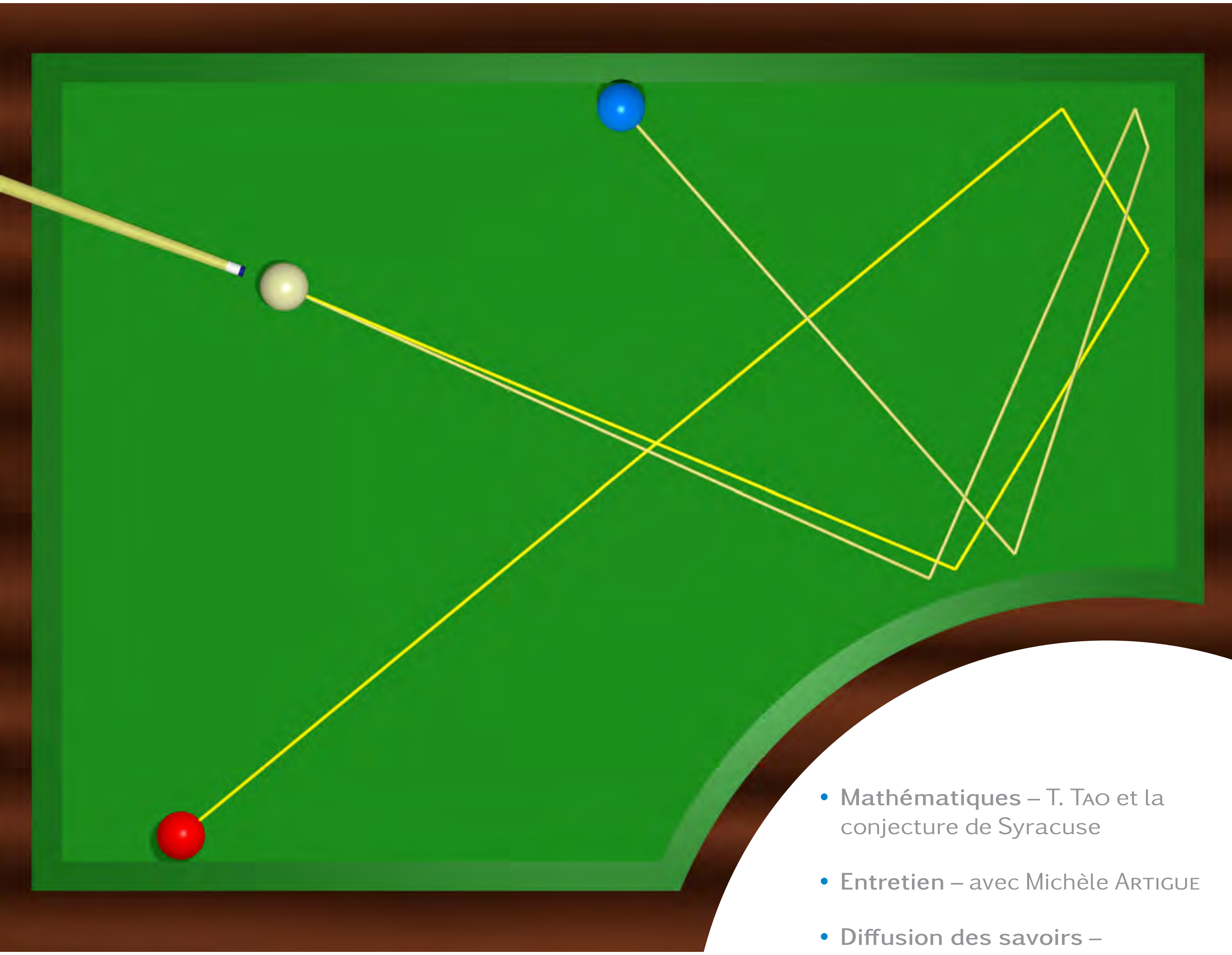
AVRIL 2021 – N° 168

la Gazette des Mathématiciens



- **Mathématiques** – T. Tao et la conjecture de Syracuse
- **Entretien** – avec Michèle Artigue
- **Diffusion des savoirs** – L'importance des questions éthiques en mathématiques
- **Raconte-moi...** le *Compressive Sensing*

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette
des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Fabien Durand

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. L'image de la couverture est une table de billard rectangulaire à laquelle on a retiré une partie de disque. C'est un exemple de billard dispersif, c'est-à-dire que cet obstacle a tendance à disperser les orbites des boules de billard qui le rencontrent. Ce type de systèmes dynamiques a été introduit par Sinai dans un article aux Russian Mathematical Surveys en 1970 et a initié l'étude des systèmes dynamiques hyperboliques avec des singularités. Parmi les propriétés marquantes de ces systèmes hyperboliques, on trouve l'abondance d'orbites périodiques et le fait que celles-ci sont liées à plein d'autres quantités dynamiques, géométriques ou analytiques, e.g. le spectre du Laplacien. On peut alors se demander si les longueurs de ces orbites déterminent complètement la géométrie de notre table de billard. On parle de problèmes inverses géométriques. (crédit : Jos Leys).

Nº 168

Éditorial

J'avoue, je suis un maniaque des sources. Alors quand nous avons reçu l'article que nous publions ici au sujet de la fameuse *conjecture de Syracuse*, je me suis souvenu de cette bonne blague à son sujet : la conjecture de Syracuse aurait été créée par les Soviétiques dans les années soixante pour ralentir la recherche mathématique américaine. Évidemment et comme souvent avec internet, la blague n'est pas du tout sourcée mais aveuglément répétée. Avec un peu de persévérance (légèrement obsessionnelle...), j'ai fini par la trouver, cette source : *S. Kakutani, private communication 1981* qui se trouve dans la bibliographie d'un article de 1985 de Jeffrey Lagarias dans *The American Mathematical Monthly*. Bref, l'article publié dans cette *Gazette* présente une percée par notre Tao international concernant cette suite absurdement simple au comportement invraisemblablement mal compris. L'auteur relate, avec humour et simplicité, les idées naturelles, culs-de-sacs et autres chausse-trapes, mais également les bonnes idées et avancées précédant celles de Tao. Les amatrices et amateurs de curiosités se régaleront. Elles et ils trouveront un $\ln\ln\ln\ln n$ (c'était mon premier), une lettre anonyme décourageant l'auteur de travailler sur cette conjecture, ou une comparaison étonnante avec les équations aux dérivées partielles. En conclusion, c'est un petit bijou d'article.

Si je classe la blague ci-dessus comme l'une des meilleures dans le règne mathématique, *Peut-on entendre la forme d'un tambour ?* de Marek Kac (1966) est selon moi l'un des plus beaux titres d'articles de l'histoire des mathématiques (le pire étant sans aucun doute *Ignition de l'atmosphère par des bombes nucléaires* de E. Konopinski et E. Teller (1946), mais c'est de la physique). Un article présente dans cette nouvelle *Gazette* ce magnifique thème des liens entre spectre et forme, mais également entre forme et longueurs des géodésiques, ces chemins si particuliers dont on a peine à penser qu'ils puissent caractériser la géométrie d'un espace. Vous y trouverez des résultats contre-intuitifs, des contre-exemples saisissants et des théorèmes positifs spectaculaires, le tout agrémenté de démonstrations parfois pimentées mais toujours bien dosées.

Avertissement : *puriste de la francophonie, passe ton chemin. Enfin disons ce paragraphe*. L'infatigable Tao revient dans notre Raconte-moi porté sur un concept rarement traduit, le *compressive sensing*. Après une introduction vantant les usages de ce terme pour la médecine, l'auteur présente le problème très simplement et guide ses lectrices et lecteurs pas à pas, exhibant les fausses bonnes idées naturelles tout comme les astuces fécondes pour résoudre ce problème de reconstruction de données, à l'intersection de l'algèbre, de l'algorithmique et des probabilités. On y verra se traduire des vertus bourgeoises comme la parcimonie ou la stabilité en de fines entités et outils mathématiques.

Dans la catégorie « titre étrange », *Diffusions hypercontractives* fait plus penser aux néophytes comme moi à de la médecine du cœur qu'à des équations aux dérivées partielles. Il s'agit pourtant de mathématiques et le travail associé est mentionné dans un quatrième article de mathématiques de cette *Gazette*, dévoilant des aspects insoupçonnables d'une entité née dans les vapeurs de la thermodynamique : l'entropie. De Boltzmann et ses gaz agités aux inégalités de Sobolev, en passant par le transport optimal, on découvrira la présence constante et multiforme de l'élégante et énigmatique entropie.

Nous publions dans ce numéro une interview passionnante de la mathématicienne et didacticienne Michèle Artigue, qui retrace sa vie d'écolière, d'étudiante puis de chercheuse. Ce témoignage précis, touchant, sans langue de bois, décrit son parcours, fruit subtile de ses goûts (la logique puis la didactique), de son énergie (inextinguible) et de ses rencontres intellectuelles (nombreuses). Mais cet interview fournit également un panorama historique et contemporain de la didactique en France (et de ses liens, parfois chahutés, avec les collègues), et même des problèmes que pose son unité au niveau mondial. On y trouvera un livre de logique à la maternité, un contre-sens à ne surtout pas faire quand on traduit *didactique* en anglais, d'étranges *agrégibles*... Par ailleurs savez-vous de quand date le premier DEA de didactique ? Connaissez-vous un point commun substantiel entre le fameux psychologue Jean Piaget, le célèbre philosophe Ferdinand Gonseth et l'inénarrable Jean Dieudonné ? Connaissez-vous la *théorie des situations didactiques* ? Et au fait, savez-vous *rajouter l'oeil au dragon* dans vos cours magistraux ?

Mathématiques, mathématiciennes et mathématiciens et leur environnement toujours, dans un article très bien écrit (et très bien traduit !) de collègues britanniques que nous reproduisons dans cette *Gazette*. Il débute par un direct *Les mathématiques sont en train de transformer la société*. L'article décrit en effet les problèmes éthiques que pose notre discipline chérie. Et le mot *dangers* arrive très vite. Des exemples ? La crise financière de 2008 et un thème assez nouveau et peu discuté, celui de la publicité ciblée. Puis la liste des conséquences sur nos vies des algorithmes et des choix associés par ceux qui les codent, devient vite angoissante : octroi au crédit, vote, estimation de la récidive par exemple. Mais les universitaires sont aussi conviés au débat : si vous trouvez un algorithme de factorisation rapide des nombres entiers, le publiez-vous immédiatement ?

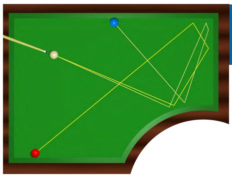
Éthique et politique reviennent dans trois tribunes de thèmes vraiment, mais alors vraiment très différents. La première concerne la condamnation politique et dramatique d'un jeune mathématicien russe, l'autre la bien trop faible proportion de collègues noir·e·s en France, et la troisième... les affirmations bien hâtives de Science et Vie concernant le problème des trois corps !

Toujours dans la veine « mathématiques, sociétés, politiques et individus », un article fourni et éclairant relate un moment important des débuts de notre sainte SMF : le parcours d'un président un peu oublié, Charles-Ange Laisant, mais cheville ouvrière, à travers notamment son réseau de polytechniciens et son internationalisme politique, de la transformation de la SMF dans les années 1890. Quelques questions pour vous appâter : saviez-vous que les polytechniciens représentaient la moitié des sociétaires de la SMF à ses débuts ? Quel était l'étonnant âge moyen des présidents de la SMF avant Laisant ? À votre avis, y avait-il une heure légale commune en France en 1888 ? Quel est le lien avorté entre l'espéranto et Le Congrès international de mathématiques de 1900 ? Et au fait, aviez-vous remarqué que quand on parle d'un polytechnicien décédé, sa date de promotion passe avant ses dates de naissance et de mort ?

En attendant l'avènement de l'espéranto en mathématiques, toute l'équipe de la *Gazette* se joint à moi pour vous souhaiter une bonne lecture de cette *Gazette* dynamique ! *Bona legado !*

Damien Gayet

la Gazette des Mathématiciens



Nº 168

Sommaire

Société Mathématique de France

N° 168

Mot du président

Chères et chers collègues,

L'an passé dans son « Mot du président » du mois d'avril, mon prédécesseur, Stéphane Seuret, commençait par évoquer la situation singulière dans laquelle nous venions d'entrer. Nous n'en sommes toujours pas sortis. J'espère que vous n'avez eu à subir que la monotonie de ces semaines qui se ressemblent et que nous pourrons dans un avenir proche nous retrouver pour écouter quelques exposés, même ennuyeux, puis échanger lors de la pause café. Et évidemment poursuivre nos discussions au restaurant, nous ne serons même pas difficiles sur son choix.

Évoquer ces activités qui nous manquent nous amène au CIRM. Vous l'avez sans doute appris. En raison de la directive ministérielle interdisant les réunions à plus de six fonctionnaires, les conférences étant considérées comme de telles réunions, le CIRM a dû fermer ses portes le 8 mars dernier. Évidemment la fréquentation du CIRM a considérablement baissé en 2020 et en ce début d'année. Mais grâce à une volontariste capacité d'adaptation et des investissements informatiques conséquents, l'équipe du CIRM et son récent directeur, Pascal Hubert, avaient réussi à maintenir une activité minimale permettant un exercice financier raisonnable. Cette décision du 8 mars vient contrecarrer ces efforts. La SMF, comme elle l'a toujours fait, est au côté du CIRM afin de passer cet épisode (d'une série qui s'éternise) dans les meilleures conditions possibles.

En avril de chaque année commence la période des auditions, puis celle des classements, à nos concours d'enseignant-chercheur et enseignante-chercheuse. La SMF a été alertée récemment que certaines vice-présidences d'universités estimaient illégal l'affichage, sur la plateforme Opération Postes (OP), des classements issus des comités de sélection. C'est apparemment une idée qui redevient à la mode. En effet, il y a 10 ans, en 2011, ce problème de l'affichage sur OP avait déjà créé quelques tensions. J'aimerais donc signaler, parce que cela pourrait vous être utile, que la SMAI avait alors consulté un cabinet d'avocat pour analyser cette situation. Vous retrouverez son analyse et d'autres arguments très utiles ici :

`http://postes.smai.emath.fr/argumentaire/index.php`

Il me semble que jusqu'à aujourd'hui nous n'en avions que très peu à nouveau entendu parler. On peut donc imaginer que cet argumentaire eut un effet. Il convient donc de vous le rappeler. Je remercie Fabrice Planchon, président de la Section CNU 25, de m'avoir fourni le lien. Vous y lirez qu'en 2010 le comité de suivi de la loi LRU écrivait : « En outre, l'autonomie des universités doit aller de pair, là encore, avec une exigence de transparence des établissements sur leurs pratiques et critères de recrutement et d'évaluation ». C'est cocasse.

Rappelons au passage la chance que nous avons, en mathématiques, d'avoir la plateforme Opération Postes qui depuis plus de vingt ans participe à cet effort de transparence. Notre ministère devrait s'en inspirer.

La SMF vient de lancer la campagne de renouvellement de son Conseil d'Administration. Vous avez reçu un courrier électronique à ce sujet. Entrer au CA de la SMF est l'occasion de découvrir l'envers d'activités qui font le quotidien de notre métier comme l'édition d'une revue, connaître le coût réel d'un séjour au CIRM ou de la composition d'un livre, aider les docteurs-agrégés ayant obtenu un refus de détachement de leurs rectorats, prendre des positions fortes et visibles sur les droits humains ou l'enseignement, comment aller vers la *Science Ouverte*, comment intéresser nos jeunes aux sciences... La SMF est un porte-voix efficace. Demandez aux docteurs-agrégés ayant obtenu un refus l'an passé et qui ont demandé le soutien de la SMF. Alors n'hésitez pas, proposez votre candidature et si ce n'est pas encore fait, adhérez !

Bien à vous

Le 3 avril 2021

Fabien Durand, président de la SMF

Société Mathématique de France

150 ANS DE LA SMF (1872-2022)

En avant-première du 150e anniversaire de la Société Mathématique de France qui aura lieu en 2022, la *Gazette* accueille une série d'articles proposés par des spécialistes en histoire des mathématiques

En avant-première du 150e anniversaire de la Société Mathématique de France qui aura lieu en 2022, la *Gazette* accueille une série d'articles proposés par des spécialistes en histoire des mathématiques, l'objectif étant de fournir divers éclairages sur l'histoire de la SMF depuis sa création en 1872 jusqu'à la période actuelle. Il s'agira par exemple de reconstituer des réseaux d'acteurs ayant favorisé le développement de la SMF à certaines périodes, mais aussi de mieux cerner comment ont évolué les fonctions et les buts de la SMF au cours du XXe siècle. Ces courtes contributions nous fourniront également quelques clés pour comprendre les rapports de la SMF avec le milieu mathématique à certains moments de son histoire, en revenant par exemple sur la création en 1983 de la Société de mathématiques appliquées et industrielles. Dans le présent numéro de la *Gazette*, l'historien des mathématiques Jérôme Auvinet aborde les premières décennies d'existence de la SMF à travers la figure du mathématicien Charles-Ange Laisant (1841-1920). Jérôme Auvinet décrit les réseaux savants au sein desquels Laisant jouait un rôle de premier plan, tout en montrant comment de tels réseaux ont contribué à façonner la SMF à ses débuts.

Christophe Eckes, Hélène Gispert

Jeunesse de la Société Mathématique de France : l'éclairage donné par Charles-Ange Laisant et ses réseaux

• J. Auvinet

Lors de sa création en 1872, la Société Mathématique de France choisit Michel Chasles comme premier président. Ce dernier, s'inspirant de la *London Mathematical Society*, avait émis le souhait de la création d'une société savante nationale explicitement dédiée à la promotion des mathématiques en France dans son *Rapport sur les progrès de la géométrie* de 1870 [9, 7]. Seize ans plus tard, c'est Charles-Ange Laisant (1841-1920)[2] qui accède à la présidence de la Société. Diffuseur de la méthode des équipollences et du calcul des quaternions, sujet de sa thèse en 1877, mais également député depuis 1879, son parcours permet un éclairage pertinent sur les débuts de la SMF, son fonctionnement et son développement. En particulier, les nombreux réseaux qu'il tisse avec d'autres sociétaires illustrent des dynamiques latentes à l'œuvre au sein de la SMF.

Nous présenterons tout d'abord les chemins empruntés par Laisant depuis son entrée à la SMF en 1873 à cette année 1888, qui, si elle n'est pas un point de rupture, symbolise une inflexion dans son parcours, tant dans celui de savant que de sociétaire. Nous aborderons ensuite son engagement administratif qui ne cesse de s'affirmer durant les années 1890 où sa position s'ancre dans plusieurs réseaux qui composent la France mathématique de cette Troisième République en plein essor. Enfin, la figure de Laisant nous donne à voir les dynamiques à l'œuvre dans des micro-communautés de sociétaires qui permettent des échanges au sein et au-delà des frontières de la SMF. C'est notamment ici que réside l'intérêt du parcours et des actions de Laisant vis-à-vis de l'histoire de la Société Mathématique de France dans ses vingt-cinq premières années.

1. Être acteur dans la communauté mathématique de la SMF

Charles-Ange Laisant est né en 1841, près de Nantes. Après son passage par l'École polytechnique (X 1859), il poursuit ses travaux mathématiques, notamment en géométrie et en arithmétique, en publiant principalement dans une revue intermédiaire fortement liée au milieu des classes préparatoires : les *Nouvelles annales de mathématiques* (*NAM*). C'est néanmoins en tant que promoteur de la méthode des équipollences que Laisant marque une première étape de sa carrière scientifique en traduisant l'ouvrage éponyme de l'Italien Giusto Bellavitis en 1874. Parallèlement, après avoir été capitaine du Génie, notamment en Algérie, et conseiller général, il accède à son premier mandat de député en Loire-Inférieure sous l'étiquette républicaine. Sa carrière politique mouvementée se poursuivra jusqu'en 1893 et se terminera par une forte implication dans le mouvement boulangiste [1]. Laisant est d'ailleurs un cas rare d'homme politique sociétaire de la SMF : avec lui, ce sont quatre autres députés, tous issus de la gauche, qui apparaissent dans les recensements des membres de la Société (Wilson et Marquiset, tous deux parrainés par Laisant pour accéder à la SMF, mais également Dreyfus et Picart).

La SMF est la première communauté nationale mathématique accueillant Laisant. Il est présenté à la Société le 5 février 1873, sans que nous connaissions les deux sociétaires qui, selon les statuts de la SMF, l'ont parrainé. Il est élu à la séance suivante du 19 février, rejoignant ainsi les 148 membres déjà présents. En 1875, il investit également l'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS) [6], dont il deviendra un grand communiquant. Cette association, dont il sera président en 1904, est créée comme la SMF en 1872 suite au traumatisme de la défaite de Sedan et promeut les sciences grâce à des congrès annuels organisés partout sur le territoire. Elle apparaît pour Laisant comme le pendant associatif de la SMF : à l'institutionnalisation qu'apporte l'appartenance sélective à la SMF, les communications aux congrès de l'AFAS lui permettent d'aborder des thèmes variés pour un large public. Il apparaîtra, avec d'autres tels l'arithméticien Édouard Lucas (1842-1891) [5] (principalement) ou Ernest Laquière (X 1858), comme membre d'une charnière entre ces deux communautés.

Laisant ne profite pas pleinement avant 1888 de l'espace offert par le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, en n'y publiant que neuf articles sur le total de ses 47 contributions à la revue [2]. La Société qui « a pour objet l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées » (article premier de ses statuts) souhaite pourtant, en plus du cadre d'autorité qu'elle crée, offrir explicitement, via la création de son *Bulletin* bimestriel, un espace de diffusion efficient pour ses sociétaires, prolongeant les communications de la vingtaine de ses séances annuelles. Laisant est alors exemplaire de cette génération de polytechniciens qui investissent la Société à ses débuts, ces derniers représentant la moitié des sociétaires [8], mais qui publient peu dans le *Bulletin*.

Cependant, son engagement administratif s'y affirme progressivement : s'il n'en est pas un membre fondateur, il participe dès 1879 au conseil d'administration de la Société pour une période remarquable de 28 ans et en devient vice-président en 1880. Déjà lors de la séance du 2 février 1887 du conseil [3], la discussion initiée par le président d'alors, Georges Fouret, sur « l'utilité d'obtenir pour la Société la reconnaissance d'utilité publique », pousse Laisant à « faire ressortir les avantages » d'un tel statut. Henry Picquet rédige une notice et la liste des sociétés mathématiques échangeant leur publication avec la SMF qui seront jointes à la demande adressée au ministère de l'Intérieur : le dé-

1. Séduit par le projet du Général Boulanger, il rejoint un ensemble très disparate issu notamment d'une vague antiparlementariste souhaitant l'établissement d'un gouvernement fort.

2. Ces articles placent le *Bulletin* comme la revue privilégiée par Laisant dans l'ensemble de sa production (environ 176 textes), à égalité avec les *Comptes rendus* des congrès de l'AFAS[3]. Elles font de Laisant un des grands contributeurs de l'époque à la revue, comme par exemple Maurice d'Ocagne.

3. Un recueil manuscrit de 170 pages contient, comme unique source archivistique, les procès verbaux des séances du conseil pour la période 1876-1924.

cret du 11 février 1888 reconnaîtra ainsi la Société d'utilité publique. Les années 1890 vont ensuite voir une progression nette de l'implication de Laisant dans les instances décisionnelles de la SMF.

2. Une présidence et un réseau d'administrateurs

Lors de sa séance du 7 décembre 1887, le conseil recueille, comme à l'accoutumée, une unique candidature à la présidence de la SMF, celle de Laisant alors âgé de 46 ans, cinq ans de plus que l'âge moyen des quinze présidents l'ayant précédé. Laisant ne fait pas alors partie des grandes figures de la communauté mathématique nationale institutionnalisée : notons que, comme la grande majorité des précédents présidents de la SMF, Laisant accède à la présidence alors qu'il n'appartient pas à l'Académie des Sciences ; mais contrairement à la plupart de ses prédécesseurs, il n'y sera jamais élu malgré sa tentative de 1907.

2.1 – Une année de présidence

Laisant, en tant que président de la SMF pour un an, va ainsi accompagner des changements administratifs opérant au sein de la SMF. De nouveaux statuts sont adoptés le 20 juin 1888, portant le nombre d'articles de 15 à 21 et redéfinissant les conditions d'accès (le conseil ayant dès lors un regard sur les nouvelles nominations), le nombre de séances annuelles du conseil, les ressources financières et l'action de la SMF. Par l'article 14, « La Société se réserve d'employer tous les moyens d'action pouvant contribuer au développement des Mathématiques » (publication du *Bulletin*, de mémoires, réimpression d'œuvres, prix et récompenses). Alors que la SMF est établie depuis sa création au 11, rue Pierre Curie, le conseil s'empare de la question du changement de locaux : une commission formée de Laisant, Fouret et l'archiviste De Presle est nommée. Ce dernier indique lors de la séance du 21 novembre 1888 que l'installation dans les locaux de l'Hôtel des Sociétés savantes, au 8 rue Danton, acceptée en principe, est différée. Si l'Hôtel accueille, entre autre, la Société astronomique de France, la SMF ne s'y établira finalement pas.

Remarquons que cette question est récurrente au conseil, comme celle de la gestion de la bibliothèque de la SMF [4]. Elle se pose encore lors de la séance du 29 décembre 1897 avec un bail proposé par la Société géologique, un espace supplémentaire pour la bibliothèque de la SMF étant alors souhaité. L'enquête à ce sujet se poursuit jusqu'en 1899 (conseil du 5 juillet), alors que les négociations avec la Sorbonne, par l'intermédiaire de Gaston Darboux, progressent (conseil du 18 juillet). Laisant s'opposera à l'abandon des ouvrages de la SMF à la bibliothèque de la Sorbonne (conseil du 22 novembre) et Émile Borel fera de même lors de la séance du 3 janvier 1900. Les séances de la SMF auront ainsi lieu dans une salle accordée par la Sorbonne à partir du 1er mars 1900 (le siège de la Société reste inchangé). La bibliothèque de la SMF fera l'objet d'un don à la celle de la Sorbonne (conseil du 21 novembre 1900), malgré de nouvelles protestations d'Henry Picquet (conseil du 1er mai 1901).

Le 5 décembre 1888, le président Laisant communique à la SMF un projet de loi ayant pour objet l'adoption d'une heure légale en France [5]. Le Bureau des longitudes s'est emparé initialement de la question en nommant le 4 janvier 1888 une « commission chargée de l'adoption légale de l'heure de Paris pour tous les points de la France ». L'AFAS, lors de son congrès d'Oran, avait adopté le 3 avril 1888 un vœu similaire. C'est donc une réforme réclamée par le monde savant comme il est rappelé lors de sa discussion à l'Assemblée le 20 novembre 1888. Le projet de loi est adopté le 14 mars 1891 et la SMF, bien que ne traitant que de questions mathématiques (article 2 des statuts de 1872), participe à cette réflexion présentée par Laisant, député et président de la SMF.

2.2 – Une implication pérenne

Laisant poursuit son engagement dans les séances du conseil, relayant la vie mathématique du pays au sein même de la SMF, s'adjoignant la collaboration d'autres sociétaires. Lors de la séance du 22 janvier 1890, alors qu'Haton de la Goupillière est président de la SMF, Laisant propose la formation d'une « grande commission » chargée du projet du répertoire bibliographique[10], projet géré par la SMF depuis 1885 et visant à recenser l'ensemble

4. Déjà en 1882, Laisant, Collignon et Laguerre, membres de la commission des archives, sont chargés de rédiger un catalogue de cette bibliothèque.

5. Le projet d'unifier les différentes heures locales alors en usage, heures élaborées à partir de la course moyenne d'un soleil fictif en un lieu donné, est devenu nécessaire, notamment au vu du transport ferroviaire qui ne peut s'accomoder d'une telle disparité entre les heures d'un lieu en province à un autre.

de la production mathématique. Cette commission serait composée de membres de la Société et de ceux de la commission permanente élus lors du congrès international de bibliographie des sciences mathématiques de juillet 1889 dont les résolutions sont exposées par Henri Poincaré. Haton de la Goupillière, Laisant, Fouret, Louis Raffy et Gabriel Koenigs sont élus au sein de cette commission en tant que membres de la SMF, garants de son regard sur la suite du projet. C'est le début pour Laisant d'une forte implication dans cette entreprise très présente dans les débats du conseil, notamment par son aspect financier (avec par exemple une demande de subvention adressée à l'AFAS le 21 novembre 1888).

Les séances du conseil illustrent en fait tant le militantisme de Laisant que sa posture d'homme de réseaux. En 1895, il saisit le conseil des projets de premier congrès international des mathématiciens et d'un dictionnaire général des Sciences mathématiques (conseils du 6 février et du 6 mars). Seul le projet de congrès sera exposé à l'ensemble des sociétaires le 17 juillet par Charles Bioche qui mentionne l'action de Laisant. La proposition d'une adhésion de principe et « d'y prendre une part active » est votée à l'unanimité. C'est précisément Laisant, associé à un autre sociétaire, Émile Lemoine (X 1860 ; 1840-1912), condisciple à l'École polytechnique et co-fondateur de *L'Intermédiaire des mathématiciens*, et à l'Allemand Georg Cantor, qui sera à l'origine du congrès de Zurich de 1897[4]. Pour préparer le congrès international suivant, celui de Paris en 1900 placé sous les auspices de la SMF, Laisant dépose le 16 février 1898 une note résumant une série d'observations sur le sujet. Il sera membre, avec 22 autres sociétaires, de la commission administrative nommée pour l'organisation du congrès (conseil du 2 mars 1898). Internationaliste et espérantiste, Laisant propose encore, lors de la séance du conseil du 2 juillet 1902, d'engager la SMF dans une délégation ayant pour objectif de faire adopter lors d'une prochaine réunion des Académies le principe d'une langue auxiliaire internationale (les délégués seront Raffy et Désiré André).

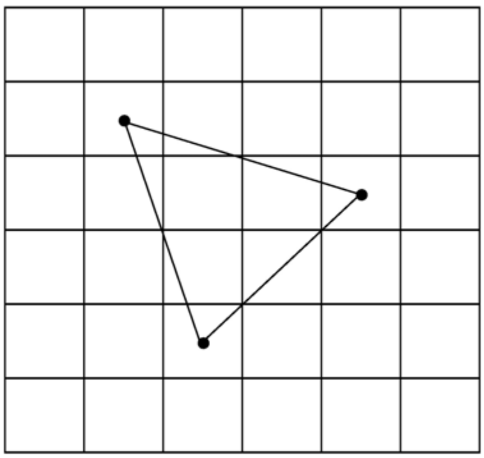
3. Échanges et réseaux de sociétaires au sein et au-delà de la SMF

Si Laisant s'approprie durablement les instances administratives de la SMF, l'année 1888 marque une évolution de son activité scientifique, particulièrement lors des séances de la Société et dans les pages du *Bulletin*.

3.1 – La SMF comme théâtre de nouvelles recherches

Remarquons que cette production mathématique relève souvent de nouvelles collaborations mises en œuvre. Délaissant les questions de géométrie infinitésimale ou de cinématique, Laisant présentait déjà à la SMF en 1878 une « Note sur la géométrie des quinconces » où il montrait que les sommets d'un triangle équilatéral ne peuvent être situés aux centres de trois cases d'un échiquier. À partir de cette notion de « *figure inscriptible dans un échiquier* », il prouve que « Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés ».

Figure 1 – Première référence à l'échiquier par Laisant

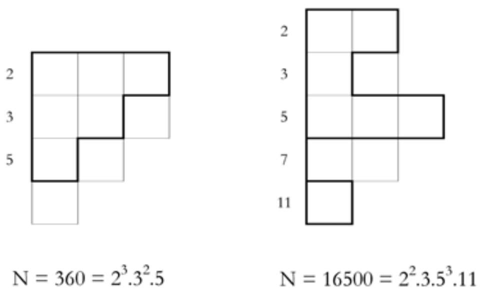


De même, en 1882, il expose ses « Remarques sur la théorie des régions et des aspects » où il propose un majorant du nombre d'aspects sous lequel un observateur du plan peut voir des points disposés autour de lui. L'origine de ces deux interventions consiste en des échanges avec deux autres sociétaires, respectivement Lucas et Georges Halphen (X 1861 ; 1844-1889). Le problème des régions et des aspects sera notamment repris par Raoul Perrin (X 1859 ; 1841-1910), président de la SMF en 1908, à partir des observations d'Halphen et Laisant.

Ainsi, Laisant va investir en 1888 les mathématiques discrètes (arithmétique, théorie des nombres, combinatoire...) et surtout leur visualisation :

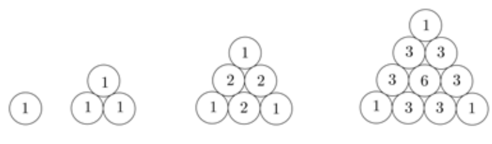
thème appelé à devenir récurrent mais nettement sous-représenté dans la production des sociétaires. Il publie dans le *Bulletin* ses « Remarques arithmétiques sur les nombres composés », où sa visualisation de la décomposition d'un entier en facteurs premiers apparaît comme un outil pédagogique pertinent pour l'enseignement des bases de l'arithmétique [6], alors que les débats pédagogiques sont par nature exclus des discussions à la SMF.

FIGURE 2 – « Voir » la décomposition en facteurs premiers par Laisant



Son article « Sur la numération factorielle, application aux permutations » expose un système de numération permettant de classer les permutations de n objets selon un procédé semblable à celui que Lehmer adoptera pour son code au milieu du XX^e^ siècle. Suivront plusieurs autres communications : par exemple en 1891, Laisant généralise à l'espace le triangle de Pascal à travers son « Tétraèdre arithmétique » constitué de n couches de sphères empilées dont les coefficients sont obtenus par somme des coefficients des sphères de la couche supérieure qui leur sont tangentes : les coefficients à sa base donnent le développement de $(x+y+z)^n$.

FIGURE 3 – Les quatre premières couches du tétraèdre de Laisant



Dans l'article « Sur deux problèmes de permutation », il détermine le nombre de façons de placer n couples autour d'une table, sans que deux conjoints ne se retrouvent côte à côte, étude également publiée dans la *Théorie des nombres* de son ami Lucas. Avec Henri Delannoy (X 1853 ; 1833-1915) et Lemoine, Laisant fera partie de la commission mise en place par la SMF pour traiter les écrits scientifiques de Lucas après sa mort [1] : les deux derniers volumes des *Récréations mathématiques* seront ainsi publiés.

3.2 – Construire des réseaux de sociétaires

S'ils soutiennent de nouvelles orientations dans sa production mathématique, les réseaux construits par Laisant au sein de la SMF sont visibles dans le système de parrainage auquel il participe. Entre 1879 et 1913, Laisant parraine pas moins de 71 nouveaux sociétaires (notamment 9 en 1888). Leur liste nous semble en partie représentative d'évolutions marquantes au sein de la SMF, alors que ses effectifs passent de 172 à 278 sur la même période [7]. Parmi les 71 nouveaux sociétaires introduits grâce à Laisant, on dénombre 15 mathématiciens d'origine étrangère : Russie, Inde, Japon, États-Unis, Portugal, Royaume-Uni. Ces arrivées paraissent naturelles à double titre. Elles correspondent à une évolution sur l'ensemble de la Société où le nombre de sociétaires étrangers passe de 12 à 100 entre 1874 et 1914. Elles illustrent en sus l'action internationaliste de Laisant en préfigurant la création en 1899 avec le Suisse Henri Fehr d'une revue mathématique, portée selon ses fondateurs par un « grand mouvement de solidarité scientifique » et qui revendique un caractère international : *L'Enseignement mathématique*. Les professions des membres parrainés sont aussi à noter : ainsi parmi les 71 personnes recensées, si la part d'ingénieurs (11), de militaires (7) et de sociétaires liés à la sphère polytechnicienne (6) reste importante au vu de l'itinéraire de Laisant, un grand nombre (27) sont enseignants (par exemple à l'école J.-B. Say) : la part des enseignants à la SMF passe en effet de 49 à 72 % entre 1874 et 1914.

On voit également se composer autour de Laisant un clan formé de collaborateurs avec lesquels il a abordé les mathématiques discrètes : Delannoy et l'amateur Gabriel Arnoux (1831-1913) dont les travaux généralisent les carrés magiques. Avec

6. Par exemple, la superposition des figures obtenues permet de visualiser aisément le *pgcd* de deux entiers.
7. Sur l'évolution des effectifs de la SMF, nous renvoyons aux tableaux du chapitre 7 dans l'étude d'H. Gispert [8].

d'autres, il s'associe pour différentes publications : Fehr, Élie Perrin (co-auteur de manuels), Ernest Duporcq (X 1892 ; 1872-1903), Raoul Bricard (X 1888 ; 1870-1943) - tous deux co-rédacteurs des *NAM* avec Laisant – ou encore Georges Maupin, Maurice-Ernest Leméray (1860-1926) et André Gérardin (1879-1953). Rappelons que lorsque Laisant entre à la SMF, il rejoint des proches eux-mêmes polytechniciens : Lemoine, Amédée Manheim (X 1848 ; 1831-1906), Henri Brocard (X 1865 ; 1845-1921) et que les co-parrains avec Laisant sont eux aussi des proches, comme Lucas. Un réseau de sociétaires se constitue ainsi autour de Laisant, sous-tendu par des centres d'intérêts qu'il promeut : la SMF joue pleinement son rôle de lieu de sociabilité, ici pour et par Laisant.

Laisant entretient cet aspect réticulaire en exhortant son ami Delannoy à entrer à la SMF où il sera l'auteur d'articles sur les probabilités, ou encore en transmettant lors de séances des notes du capitaine d'artillerie Laquière resté en poste en Algérie, alors que lui-même avait bénéficié lors de son affectation en Algérie du relais de Brocard pour présenter son compas trisecteur. D'ailleurs, la Société est le cadre de formation de réseaux internes où les interventions lors des séances ou les articles de son *Bulletin* sont autant de répliques d'un même dialogue. Laisant, Lucas et Laquière sont trois sociétaires qui interviennent sur la géométrie des quinconces, « la peinture graphique de la théorie des nombres » suivant l'expression de ce dernier. C'est à travers la SMF que Laisant inaugure des collaborations fortes avec Lucas, on l'a vu, mais aussi avec Maurice d'Ocagne (X 1880 ; 1862-1938), enseignant à l' École polytechnique alors que Laisant y est examinateur d'entrée : chacun ne manque pas de commenter et prolonger les communications de l'autre.

Enfin, Laisant illustre la situation de ces sociétaires qui s'investissent également dans d'autres communautés, en particulier à l'AFAS, et ce de manière d'autant plus frappante que son engagement dans les deux cercles est véritable. Des communications aux congrès de l'AFAS trouvent leur prolongement lors de séances de la SMF (c'est le cas de travaux sur les équipollences en 1877 et 1881), ou inversement (la géométrie des quinconces ou encore des généralisations du triangle de Pascal entamées en 1891 pour la SMF sont aussi développées au congrès de l'AFAS en 1893).

Dans le cas de Laisant, la SMF va ainsi donner un cadre à de nouveaux échanges avec des sociétaires, dépassant les premières collaborations individuelles comme celle, au moment des équipollences, avec Jules Houël (1823-1886), membre de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux et co-rédacteur avec Darboux du *Bulletin des sciences mathématiques*.

Laisant apparaît comme un maillon central de divers réseaux spécialisés au sein de la SMF qu'il construit et consolide au cours des années, tant du point de vue scientifique qu'administratif. Initiateur de projets collaboratifs, promoteur de ponts entre différentes communautés institutionnalisées à divers degrés, attentif à la diversité des pratiques mathématiques au sens large, il permet un éclairage de facto de l'évolution de la SMF. Il introduit au cœur des discussions de ces instances et de son activité des sujets spécifiques, élargissant les strictes préoccupations fixées par ses statuts. On y voit la volonté d'établir la Société Mathématique de France comme une force inhérente à la vie mathématique dans sa globalité à la fin du XIXe siècle.

Références

[1] J.-M. Autebert, A.-M. Décaillot et S. Scwher. « Henri-Auguste Delannoy et la publication des œuvres posthumes d'Édouard Lucas ». *La Gazette des mathématiciens* **95** (jan. 2003), p. 51-62.

[2] J. Auvinet. *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République*. Hermann, 2013.

[3] J. Auvinet. « Empreintes d'échanges au sein de la Société mathématiques de France dans les pages de son Bulletin : le cas de Charles-Ange Laisant ». *Philosophia Scientiæ* **19**, no 2 (2015), p. 135-153.

[4] A.-M. Décaillot. « Zurich 1897 : premier congrès international de mathématiciens ». *Revue germanique internationale* **12** (2010), p. 123-137.

[5] A.-M. Décaillot-Laulagnet. « Édouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXe siècle ». Thèse de doct. Université René Descartes, Paris V, 1999.

[6] H. Gispert, éd. *« Par la science, pour la patrie ». L'Association française pour l'avancement des sciences (1872-1914) : un projet politique pour une Société savante*. Presses Universitaires de Rennes, 2002.

[7] H. Gispert. « La création de la SMF et la fabrication d'une périphérie mathématique ». *La Gazette des mathématiciens* **86** (2000), p. 81-88.

[8] H. Gispert. *La France mathématique de la IIIe République avant la Grande Guerre*. Société Mathématiques de France, 2015.

[9] H. Gispert. « Les débuts des sociétés mathématiques en Europe ». *La Gazette des mathématiciens* **53** (1992), p. 25-31.

[10] L. Rollet et P. Nabonnand. « Une bibliographie mathématique idéale? Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques ». *La Gazette des mathématiciens* **92** (2002), p. 11-26.

Jérôme Auvinet

Laboratoire de mathématiques Jean Leray, université de Nantes

christophe.eckes@univ-lorraine.fr

Jérôme Auvinet est professeur de mathématiques dans le secondaire et auteur d'une thèse sous la direction d'E. Barbin : « Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920) ». Il s'intéresse tout particulièrement à l'histoire des récréations mathématiques, de l'enseignement des mathématiques, des sociétés savantes de mathématiciens et des périodiques mathématiques dans la deuxième moitié du xixe siècle.

L'entropie, de Clausius aux inégalités fonctionnelles

• I. Gentil

Nous nous intéressons dans ce document à l'entropie [1]. L'entropie est multiple, l'idée est de la décrire dans le prolongement de sa définition proposée par le physicien Clausius. En effet, Clausius expose en 1865 le second principe de la thermodynamique et propose aussi le concept d'entropie. Au lieu de définir simplement une fonctionnelle, point central pour l'élaboration du second principe, il va en fait définir un concept suffisamment général pour qu'il soit utilisé dans de nombreux domaines des mathématiques.

Dans ces quelques pages, je souhaite faire apparaître le rôle joué par l'entropie dans le domaine de l'étude des flots de gradient et des inégalités fonctionnelles. Partant de la définition de Clausius en 1865, je vais tenter d'expliquer comment des inégalités fonctionnelles fondamentales comme l'inégalité de Sobolev, point clé en analyse, sont des inégalités de structures naturelles reliées à une certaine entropie. Ce cheminement me permet de donner un aperçu de l'utilisation des flots de gradient en dimension finie ou infinie, de la théorie de Bakry-Émery et plus récemment du calcul d'Otto.

1. L'entropie proposée par Clausius

On retrouve 6 millions de fois le terme Entropy sur le moteur de recherche Ecosia et près de 40 millions sur Google. Il apparaît 41000 fois dans Zentrablatt, ce qui représente un peu plus de 1% des entrées. Ce terme est tellement utilisé que l'on ne peut pas être exhaustif dans une courte introduction, il en existe d'ailleurs bien d'autres.

Une fois n'est pas coutume, on sait quand ce mot a été inventé, c'est en 1865 dans un article de Rudolf Julius Emmanuel Clausius, physicien allemand du milieu du XIXe siècle, cf. [4].

Avant de parler du contenu scientifique de l'article, arrêtons-nous sur sa forme. Cet article est publié dans la revue de mathématiques *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* en 1865. Rappelons que c'est un des plus vieux journaux de mathématiques existants, fondé par Joseph Liouville en 1836, juste après le journal de Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik) qui a été fondé, lui, en 1826. On peut se demander pourquoi Clausius choisit un journal de mathématiques et pourquoi celui-ci en langue française. Le journal de Crelle existe et est allemand! Est-ce le prestige de ce nouveau journal français? C'est d'autant plus étonnant car Clausius a publié la très grande majorité de ses articles en allemand, dans *Annalen der Physik*, dont la publication commence dès 1790 et aussi dans le journal de Crelle. Ce qui est certain c'est qu'à cette époque, le choix du journal est fondamental pour une diffusion rapide des idées contrairement à maintenant, où le choix d'une revue est plus lié à son prestige et à la carrière du chercheur. Clausius n'écrivait probablement pas assez bien le français puisque son article a été traduit par un traducteur qui semble professionnel et non mathématicien.

Cet article est clairement important car Clausius y formule le second principe de la thermodynamique en définissant l'entropie. On peut en dégager deux points importants.

1. Il participe à l'élaboration du second principe de la thermodynamique : l'irréversibilité des phénomènes physiques lors d'échanges thermiques. Il s'appuie sur des travaux précédents du physicien Sadi Carnot, mort à 36 ans en

1. Ce document a été préparé à l'occasion d'un colloquium donné le 12 avril 2019 à l'université Paris Descartes que je remercie pour l'invitation.

1832. Notons que Carnot n'a publié qu'un seul ouvrage en 1824 intitulé *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, livre fondateur de la thermodynamique, même si ce mot n'a été inventé que plus tard. Carnot souhaite, dans son livre, améliorer ce qu'il appelle la machine à feu, dont l'exemple fondamental est la machine à vapeur développée à la fin du XVIII[e] siècle.

2. Pour démontrer ce second principe Clausius introduit le concept d'entropie : exhiber une fonctionnelle qui montrera l'irréversibilité d'un phénomène physique. Il comprend qu'il y a deux notions importantes, l'énergie et ce nouveau concept. Il a donc cherché un mot proche du mot *énergie*. Son idée est d'utiliser la racine du mot grecque $\eta\tau\rho o\pi\eta$ qui signifie transformation, ou plutôt *en transformation*. L'utilisation de cette racine grecque lui donne une consonance universelle et le mot « entropie » s'écrit presque de la même façon dans toute les langues utilisant l'alphabet latin. Il pense, et l'histoire lui a donné raison, que ce mot représente un concept général.

   Ce mot va effectivement rester et être largement utilisé dans de nombreux domaines. Clausius note l'entropie S et l'assimile à *du désordre qui ne peut que croître*. Citons l'exemple récent et emblématique de Perelman qui définit aussi sa propre entropie, fonctionnelle centrale dans sa preuve de la conjecture de Poincaré. Dans sa célèbre prépublication [9] de 2002, Perelman note aussi l'entropie S, comme Clausius.

Clausius termine son papier par des considérations générales, bien connues maintenant, qui sont les deux principes de la thermodynamique. Nous les reproduisons tels qu'ils sont écrits dans son article page 400 :

- *l'énergie de l'univers est constante,*
- *l'entropie de l'univers tend vers un maximum.*

À l'école, j'ai plutôt appris que *l'entropie d'un système isolé est croissante*.

Illustrons simplement le concept proposé par Clausius avec l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$. Partant d'une mesure de probabilités μ_0 dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une mesure positive de masse 1, l'équation de la chaleur est l'équation aux dérivées partielles suivante,

$$\partial_t \mu_t = \Delta \mu_t,\ t > 0.$$

Dans le cadre de cet article, on peut allègrement remplacer les mesures de probabilité par des fonctions positives ayant une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue égale à 1. Rappelons que partant d'une mesure de probabilités μ_0 sur $\mathbb{R}^n$, l'équation de la chaleur admet une unique solution régulière sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, qui est un flot dans l'ensemble des mesures de probabilité dans $\mathbb{R}^n$, noté $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$,

$$[0,\infty) \ni t \mapsto \mu_t \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n).$$

Dès 1872, soit seulement quelques années après l'article de Clausius, Boltzmann a compris les deux points fondamentaux de Clausius : *l'irréversibilité du phénomène physique* et le *concept de l'entropie*. Ainsi il définit sa propre entropie, appelée maintenant entropie de Boltzmann. Pour toute mesure de probabilité $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ admettant une densité (que l'on note abusivement aussi μ) par rapport à la mesure de Lebesgue λ,

$$\mathrm{Ent}(\mu) = \int \mu \ln \mu = \int \ln \frac{d\mu}{d\lambda}\, d\mu \in [0,\infty]. \quad (1)$$

Cette entropie est proposée par Boltzmann en 1872 dans son célèbre théorème H, (nous proposons ici seulement une version simplifiée). L'entropie de Boltzmann diffère de l'entropie thermodynamique de Clausius mais c'est la même que celle utilisée par Shannon au XX[e] siècle, avec un signe opposé. Citons aussi le cas de Nash qui utilise aussi l'entropie de Boltzmann en 1958 pour démontrer, dans un article fondateur et de façon surprenante, la régularité d'équations elliptiques et paraboliques.

Ainsi, pour simplifier, partant d'une donnée initiale μ_0 à densité régulière (par exemple dans l'espace de Schwartz), si on dérive l'entropie de Boltzmann le long du flot de la chaleur, on obtient pour $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Ent}(\mu_t) &= \int (1+\ln \mu_t)\partial_t \mu_t = \int \Delta \mu_t \ln \mu_t \\ &= -\int \nabla \mu_t \cdot \nabla \ln \mu_t = -\int \frac{|\nabla \mu_t|^2}{\mu_t}, \quad (2)\end{aligned}$$

où le point clé est l'utilisation d'une intégration par parties dans la troisième égalité. L'entropie du système est toujours décroissante. On ne peut pas revenir en arrière dans une évolution naturelle. Si la condition initiale est par exemple une masse de Dirac en 0 ($\mu_0 = \delta_0$ et dans ce cas le calcul donné en (2) n'est valable que pour $t > 0$), la chaleur va se diffuser dans l'espace tout entier. Il est impossible de revenir à une masse de Dirac, autrement dit la diffusion de la chaleur a un sens, celui donné par *la flèche du temps*. Nous concluons que **l'évolution de cette transformation physique est irréversible.** Il est important de remarquer que pour démontrer l'irréversibilité de l'équation de la chaleur, la fonctionnelle d'entropie est seulement un outil. L'entropie de Boltzmann est une fonctionnelle remarquable, comme nous le verrons en section 3, mais il y en d'autres qui montrent d'irréversibilité de l'équation de la chaleur, comme par exemple la norme L^p ($p > 1$) de la densité, $\mu \mapsto \int \mu^p$.

Bien entendu, toutes les transformations physiques ne sont pas forcément irréversibles. Par exemple, la chute libre d'un corps satisfait à l'équation de Newton qui est, elle, une équation réversible. Si on renvoie le corps avec une vitesse inversée, il retournera à sa place initiale!

En conclusion, le concept d'entropie est un outil qui s'adapte à ce que l'on veut étudier. Nous allons illustrer, dans les sections suivantes, son utilisation remarquable dans l'étude des flots de gradient, en dimension finie qui est un cadre simple pour énoncer les propriétés et en dimension infinie, où l'on retrouve des résultats importants d'analyse fonctionnelle.

2. Flots de gradient en dimension finie et entropie

Nous explorerons maintenant le cas simple d'un flot de gradient, permettant d'illustrer la théorie de Bakry-Émery proposée en 1985 dans [2].

Considérons une fonction de classe $\mathscr{C}^2$,

$$E : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R},$$

vérifiant pour un certain $\rho > 0$, la condition

$$\operatorname{Hess} E \geqslant \rho \operatorname{Id}, \tag{3}$$

où l'inégalité est vue dans le sens des matrices symétriques. Cette fonction est alors coercive, elle vérifie $\lim_{|x|\to\infty} E(x) = \infty$, et admet donc un minimum global atteint en un unique point $\beta \in \mathbb{R}^n$. On garde en mémoire l'exemple typique, $E(x) = |x|^2/2$ où $\rho = 1$ et $\beta = 0$.

• Flot de gradient

On note $(S_t(x))_{t\geqslant 0}$, $x \in \mathbf{R}^n$, la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \dot{X}_t = -\nabla E(X_t); \\ X_0 = x. \end{cases}$$

On utilise la notation provenant de la mécanique $\dot{X}_t = \frac{d}{dt} X_t$, désignant le vecteur vitesse de la trajectoire $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

On dit que $(S_t)_{t\geqslant 0}$ est *le flot de gradient de E par rapport à la métrique euclidienne, celle qui définit le gradient usuel*. Dans l'exemple classique, $E(x) = |x|^2/2$, la solution partant de x est simplement $S_t(x) = e^{-t}x$, solution d'une équation différentielle ordinaire, linéaire et de degré 1.

• Identité de de Bruijn

Nous appelons E la fonctionnelle d'entropie du système, on a

$$\frac{d}{dt}E(S_t(x)) = \nabla E(S_t(x))\cdot \frac{d}{dt}S_t(x) = -|\nabla E(S_t(x))|^2 \leqslant 0. \tag{4}$$

L'opposé du terme de droite est appelé *la production d'entropie* (appelé parfois énergie, peut-être à tort) et cette identité porte parfois le nom de de Bruijn.

Pour les mêmes raisons que précédemment, ce phénomène physique est irréversible. Si on imagine $S_t(x)$ comme étant la position d'une bille à l'instant t, celle-ci va descendre vers β, le point où E réalise son unique minimum global. C'est exactement la même chose que la chaleur, la bille ne remontera pas la pente.

• Méthode de Bakry-Émery

Clausius invente le concept d'entropie, Boltzmann propose de dériver l'entropie le long du flot. L'idée fondamentale de Bakry et Émery est de dériver une seconde fois l'entropie le long du flot,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}E(S_t(x)) &= -\frac{d}{dt}|\nabla E(S_t(x))|^2 \\ &= -2\nabla E(S_t(x))\cdot \frac{d}{dt}\nabla E(S_t(x)) \\ &= 2\nabla E(S_t(x))\cdot \operatorname{Hess} E(S_t(x))\nabla E(S_t(x)). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $\operatorname{Hess} E \geqslant \rho \operatorname{Id}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}|\nabla E(S_t(x))|^2 \leqslant -2\rho|\nabla E(S_t(x))|^2,$$

soit donc après intégration sur l'intervalle $[0,t]$,

$$|\nabla E(S_t(x))|^2 \leqslant e^{-2\rho t}|\nabla E(x)|^2. \tag{5}$$

Sous la condition de convexité (3), la production d'entropie décroît vers 0 avec une vitesse exponentielle et explicite.

• Inégalité entropie-production d'entropie

On peut montrer que $\lim_{t\to\infty} S_t(x) = \beta$. En effet, $\nabla E(S_t(x))$ tend vers 0 grâce à l'inégalité (5) et β est le seul point qui annule le gradient de E.

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
E(x)-E(\beta) &= E(S_0(x)) - E(\lim_{t\to\infty} S_t(x)) \\
&= -\int_0^\infty \frac{d}{dt} E(S_t(x))dt \\
&= \int_0^\infty |\nabla E(S_t(x))|^2 dt \\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-2\rho t} |\nabla E(x)|^2 dt = \frac{1}{2\rho}|\nabla E(x)|^2.
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré l'inégalité suivante

$$E(x)-E(\beta) \leqslant \frac{1}{2\rho}|\nabla E(x)|^2 = -\frac{1}{2\rho}\frac{d}{dt}E(S_t(x))\Big|_{t=0}, \quad (6)$$

qui est une inégalité entre l'entropie et la production d'entropie. Elle peut apparaître comme une simple inégalité de convexité mais elle a des conséquences intéressantes.

On remarque que cette inégalité est optimale au sens où pour l'exemple classique, $E(x) = |x|^2/2$ on a une égalité. Par ailleurs, le flot de gradient $(S_t(x))_{t\geqslant 0}$ est une interpolation remarquable entre x et β (lorsque $t = 0$ et $t = \infty$), permettant de démontrer une inégalité de type (6).

- **Convergence à l'équilibre du flot de gradient**

De cette inégalité (6) on exhibe un taux explicite de la convergence à l'équilibre du flot de gradient. Nous savions déjà que le flot $(S_t(x))_{t\geqslant 0}$ convergeait vers β mais on peut maintenant préciser la vitesse et l'espace naturel. En effet, il est facile de démontrer que l'inégalité entropie-production d'entropie (6) (pour un certain β) est équivalente à la convergence exponentielle en entropie du flot de gradient. Plus précisément pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \geqslant 0$,

$$0 \leqslant E(S_t(x)) - E(\beta) \leqslant e^{-2\rho t}(E(x)-E(\beta)).$$

Notons que l'équivalence n'est plus vérifiée si la convergence est de la forme $Ce^{-2\rho t}$ avec $C > 1$ au lieu de simplement $e^{-2\rho t}$, dans ce cas on parle d'hypocoercivité et ces techniques doivent alors être modifiées.

Cette simple méthode a été utilisée un très grand nombre de fois depuis 1985 l'année de parution du papier de Bakry-Émery au *Séminaire de probabilités*, [2]. Nous l'illustrerons avec deux exemples remarquables dans la section suivante.

3. Que se passe-t-il en dimension infinie ?

Une généralisation intéressante aux flots de gradient en dimension infinie a été proposée par Félix Otto en particulier dans [7] et plus tôt dans l'algorithme JKO proposé par Jordan, Kinderlehrer et Otto, cf. [6]. C'est Villani qui lui a donné son nom, *le calcul d'Otto*, dans son ouvrage de référence [10, Chapitre 15].

Ces travaux apportent une nouvelle utilisation de la distance de Wasserstein. Depuis les travaux de Kantorovich en 1942, cette distance sur l'espace des mesures de probabilité était largement utilisée en théorie des probabilités et en statistique pour estimer des convergences ou des déviations mais peu en EDP. L'idée d'Otto est simple : montrer qu'un flot de mesures comme par exemple l'équation de la chaleur est simplement le flot de gradient d'une fonctionnelle sur l'espace des mesures, considéré avec une métrique adaptée. Considérer l'équation de la chaleur comme un flot de gradient n'est pas une idée nouvelle mais Otto propose une nouvelle métrique, plus naturelle que nous détaillons ici.

Nous nous permettons ici, de ne pas être rigoureux. De nombreux problèmes techniques ont été réglés en partie dans les travaux de Ambrosio, Gigli et Savaré, on pourra par exemple consulter l'ouvrage de référence [1]. Soit $M = \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des mesures de probabilités dans $\mathbb{R}^n$, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et ayant un moment d'ordre 2 fini. On confond de nouveau la mesure de probabilité avec sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Otto a l'idée de considérer M comme une variété riemannienne de dimension infinie où la distance de Wasserstein est simplement la distance riemannienne.

- **Équation de continuité et vélocité**

Soit un chemin dans l'ensemble des mesures de probabilité,

$$t \mapsto \mu_t \in M = \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n),$$

alors il existe une unique fonction $t \mapsto \Phi_t$ (à une constante près) telle que

$$\partial_t \mu_t = -\mathrm{Div}(\mu_t \nabla \Phi_t), \quad (7)$$

où Div est l'opérateur divergence dans $\mathbb{R}^n$. Bien entendu, pour que l'équation de continuité (7) soit vérifiée, le chemin $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ doit vérifier quelques propriétés. Sans entrer dans les détails, il suffit que le chemin soit absolument continu dans l'espace de Wasserstein dans un sens expliqué dans [1, Chap. 8], et dans ce cas l'équation (7) est vérifiée au sens faible.

Nous allons identifier la quantité $\partial_t \mu_t$ par la fonction $\nabla \Phi_t$ et on note la vélocité du chemin par l'identification suivante

$$\dot{\mu}_t = \nabla \Phi_t,$$

où on utilise comme en dimension finie la notation provenant de la mécanique. Cette représentation permet de voir l'évolution d'un flot de probabilités, où $\dot{\mu}_t$ est un vecteur qui montre la direction et la vitesse d'un élément de masse. Cette notion provient de la mécanique des fluides. Utilisée de cette façon, *la vélocité* (velocity) peut apparaître un anglicisme plaisant, il pourrait être remplacé par *le vecteur vitesse*.

• **Espace tangent et métrique**

Par l'équation de continuité, on a défini la vélocité du chemin $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ (ayant suffisamment de régularité). L'espace tangent est donc naturellement défini à partir de la vélocité, soit $\mu \in M$, alors

$$T_\mu M = \{\nabla \Phi, \Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}\}.$$

De façon rigoureuse, l'espace tangent est l'adhérence de cet espace pour des fonctions régulières à support compact. La métrique proposée par Otto est la suivante, pour tout $\nabla \Phi, \nabla \Psi \in T_\mu M$,

$$\langle \nabla \Phi, \nabla \Psi \rangle_\mu = \int \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \, d\mu. \tag{8}$$

• **Distance de Wasserstein**

La distance de Wasserstein, qui s'appelle aussi (plus justement) distance de Monge-Kantorovich, est définie par : soit $\mu, \nu \in M$,

$$W_2(\mu, \nu) = \inf \sqrt{\iint |x-y|^2 \, d\pi(x,y)},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités $\pi \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ ayant pour marginales μ et ν.

Dans [3], J.-D. Benamou et Y. Brenier montrent que pour $\mu, \nu \in M$, mesures régulières et ayant un moment d'ordre 2,

$$W_2(\mu, \nu) = \inf \sqrt{\int_0^1 \int |\nabla \Phi_t|^2 \, d\mu_t \, dt},$$

où l'infimum, pris sur l'ensemble des chemins $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ joignant μ à ν et $\nabla \Phi_t$, est la vélocité du chemin $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ considéré.

En d'autres termes, la distance de Wasserstein est la distance riemannienne sur M associée à la métrique définie précédemment en (8). La métrique définie par le produit scalaire (8) est souvent appelée métrique d'Otto.

• **Gradient et hessienne d'une fonctionnelle**

De la métrique, on peut calculer le gradient d'une fonctionnelle, élément de l'espace tangent. Prenons par exemple l'entropie de Boltzmann définie en (1). Si on prend un chemin $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ de vélocité $\dot{\mu}_t = \nabla \Phi_t$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{Ent}(\mu_t) &= \frac{d}{dt}\int \mu_t \ln \mu_t \\ &= -\int \ln \mu_t \mathrm{Div}(\mu_t \nabla \Phi_t) = \int \nabla \ln \mu_t \cdot \nabla \Phi_t \, \mu_t \\ &= \langle \nabla \ln \mu_t, \dot{\mu}_t \rangle_{\mu_t}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ainsi, le gradient de l'entropie au point $\mu \in M$, que l'on note dans ce contexte $\mathrm{grad}_\mu \mathrm{Ent}$, est donné par,

$$\mathrm{grad}_\mu \mathrm{Ent} = \nabla \ln \mu.$$

De la métrique, on peut aussi définir une dérivée covariante, reposant sur une connexion riemannienne. Par ce biais, on peut définir les géodésiques (appelées géodésiques de McCann) dans l'espace de Wasserstein et pour finir la hessienne d'une fonctionnelle.

En effet si $\mathscr{F} : M \mapsto \mathbb{R}$ est une fonctionnelle sur M, et si $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ une géodésique (à vitesse constante) de vélocité $(\dot{\mu}_s)_{s\in[0,1]}$, on peut définir la hessienne au point μ_s, appliquée au vecteur tangent $\dot{\mu}_s$, de la façon suivante :

$$\mathrm{Hess}_{\mu_s} \mathscr{F}(\dot{\mu}_t, \dot{\mu}_t) = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{F}(\mu_s),$$

si tout est assez régulier pour dériver deux fois. Pour obtenir une formule explicite nous avons besoin de l'équation des géodésiques. Sans entrer dans les détails techniques, en particulier les problèmes délicats de régularité, une géodésique $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ vérifie de façon formelle le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \partial_s \mu_s + \mathrm{Div}(\mu_s \nabla \Phi_s) = 0, \\ \partial_s \Phi_s + \frac{1}{2}|\nabla \Phi_s|^2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Par ce biais, au moins de façon formelle, on peut calculer explicitement $\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{F}(\mu_s)$ et obtenir une expression de la hessienne.

Reprenons l'exemple de l'entropie de Boltzmann. Soit $(\mu_s)_{s\in[0,1]}$ une géodésique de vélocité $(\nabla\Phi_s)_{s\in[0,1]}$, on a vu précédemment que

$$\frac{d}{ds}\mathrm{Ent}(\mu_s) = \int \nabla \ln \mu_s \cdot \nabla\Phi_s\, \mu_s = \int \nabla\mu_s \cdot \nabla\Phi_s.$$

Ainsi, de façon formelle en supposant que tout est régulier, en particulier pour le système (10),

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2}\mathrm{Ent}(\mu_s) &= \int \nabla\partial_s\mu_s \cdot \nabla\Phi_s + \int \nabla\mu_s \cdot \nabla\partial_s\Phi_s\\ &= -\int \nabla\mathrm{Div}(\mu_s\nabla\Phi_s)\cdot\nabla\Phi_s - \frac{1}{2}\int \nabla\mu_s\cdot\nabla|\nabla\Phi_s|^2\\ &= \int\left(-\nabla\Phi_s\cdot\nabla\Delta\Phi_s + \frac{1}{2}\Delta|\nabla\Phi_s|^2\right)\mu_s,\end{aligned}$$

où la dernière ligne s'obtient après 3 intégrations par parties.

Par ce calcul, au point $\mu \in M$ et appliquée au vecteur tangent $\nabla\Phi \in T_\mu M$, l'expression de la hessienne de l'entropie est donnée par

$$\mathrm{Hess}_\mu\mathrm{Ent}(\nabla\Phi,\nabla\Phi) = \int\left(\frac{1}{2}\Delta|\nabla\Phi|^2 - \nabla\Phi\cdot\nabla\Delta\Phi\right)\mu.$$

On a donc maintenant tous les ingrédients pour appliquer en dimension infinie, ce qui a été fait précédemment en dimension finie.

Illustration avec deux exemples remarquables

Même si ce qui précède est formel, dû en particulier aux problèmes de régularité, dans les deux exemples suivants, les résultats sont rigoureux car ils reposent sur des équations de types paraboliques qui ont des solutions régulières.

1. **Équation de la chaleur.**
   Considérons l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$,

$$\partial_t\mu_t = \Delta\mu_t = \mathrm{Div}(\nabla\mu_t) = \mathrm{Div}(\mu_t\nabla\ln\mu_t).$$

   Ainsi, dans le calcul d'Otto, la vélocité du chemin de probabilité $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \mu_t$, est donnée par

$$\dot\mu_t = -\nabla\ln\mu_t.$$

   Si on reprend l'entropie de Boltzmann $\mathrm{Ent}(\mu) = \int\mu\ln\mu$, on a vu précédemment que $\mathrm{grad}_\mu\mathrm{Ent} = \nabla\ln\mu$, on a

$$\dot\mu_t = -\mathrm{grad}_{\mu_t}\mathrm{Ent}.$$

Ainsi l'équation de la chaleur est le flot de gradient de l'entropie de Boltzmann dans la métrique d'Otto. Ce résultat est fondamental, démontré dans [6], article précurseur de ce domaine. Il permet aux auteurs de proposer un algorithme, reposant sur la distance de Wasserstein, pour approcher la solution de l'équation de la chaleur.

Ainsi, tout ce qui a été démontré dans le cas fini dimensionnel s'applique. Il reste à comprendre quand la hessienne de la fonctionnelle Ent est uniformément minorée par une constante strictement positive. On a vu précédemment que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hess}_\mu\mathrm{Ent}(\nabla\Phi,\nabla\Phi)\\ &\quad= \int\left(\frac{1}{2}\Delta|\nabla\Phi|^2 - \nabla\Phi\cdot\nabla\Delta\Phi\right)\mu\\ &\quad= \int \|\mathrm{Hess}\,\Phi\|^2\mu,\end{aligned}$$

où $\|\mathrm{Hess}\,\Phi\|^2 = \sum_{i,j=1}^n(\partial_{i,j}\Phi)^2$. Maintenant, si on souhaite obtenir une inégalité de type (3), soit donc

$$\mathrm{Hess}_\mu\mathrm{Ent}(\nabla\Phi,\nabla\Phi) = \int\|\mathrm{Hess}\,\Phi\|^2\mu \geqslant \rho\int|\nabla\Phi|^2\mu,$$

pour toute fonction Φ. Cette inégalité n'est malheureusement possible que si $\rho = 0$ (prendre par exemple $\Phi(x) = a\cdot x$, $a\in\mathbb{R}^n$).

C'est assez naturel car, dans $\mathbb{R}^n$, la solution de l'équation de la chaleur tend vers 0 (qui n'est pas une probabilité, de la masse a été perdue). Pour éviter ça, on peut, soit se placer dans une variété riemannienne compacte, soit modifier l'équation de la chaleur et ajouter une force de rappel, lui permettant de converger vers une distribution non nulle.

Ainsi, pour rester dans l'espace euclidien, nous considérons l'équation de Fokker-Planck,

$$\partial_t\mu_t = \Delta\mu_t + \mathrm{Div}(x\mu_t) = \mathrm{Div}\left(\mu_t\nabla\left[\ln\mu_t + \frac{|x|^2}{2}\right]\right).$$

Cette équation admet une solution explicite et régulière partant par exemple d'une donnée initiale dans l'espace de Schwartz. Elle admet une unique solution stationnaire de masse 1, la mesure gaussienne standard,

$$d\gamma(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,d\lambda(x).$$

La vélocité de la solution $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ est par définition,

$$\dot{\mu}_t = -\nabla\left(\ln\mu_t + \frac{|x|^2}{2}\right),$$

et est le flot de gradient de la fonctionnelle

$$\mathscr{F}(\mu) = \int \mu\ln\mu + \frac{|x|^2}{2}\mu,$$

par rapport à la métrique d'Otto. En effet, le gradient d'une fonctionnelle est une application linéaire et on obtient à la mesure de probabilité μ,

$$\mathrm{grad}_\mu\mathscr{F} = \nabla\ln\mu + \nabla\frac{|x|^2}{2}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que la hessienne de $\mathscr{F}$ est uniformément minorée par la constante $\rho = 1$, c'est-à-dire dans le langage d'Otto on peut montrer que

$$\mathrm{Hess}_\mu\mathscr{F}(\nabla\Phi,\nabla\Phi) = \int \|\mathrm{Hess}\,\Phi\|^2\mu + \int \mathrm{Hess}\left(\frac{|x|^2}{2}\right)(\nabla\Phi,\nabla\Phi)\mu \geqslant \int |\nabla\Phi|^2\mu.$$

De façon condensée, cette inégalité s'écrit simplement

$$\mathrm{Hess}_\mu\mathscr{F} \geqslant \mathrm{Id}_\mu,$$

où Id_μ représente la métrique au point $\mu\in M$. On retrouve la même inégalité qu'en dimension finie, l'inégalité (3) avec la constante $\rho = 1$.

Le minimum de la fonctionnelle $\mathscr{F}$ est atteint pour la mesure gaussienne standard γ. Ainsi, en imitant ce qui se passe en dimension finie, la méthode de Bakry-Émery permet de démontrer l'inégalité suivante

$$\int \left|\nabla\left(\ln\mu_t + \frac{|x|^2}{2}\right)\right|^2\mu_t \leqslant e^{-2t}\int \left|\nabla\left(\ln\mu_0 + \frac{|x|^2}{2}\right)\right|^2\mu_0,$$

inégalité équivalente à (5) dans le cas fini dimensionnel. L'inégalité entropie-production d'entropie s'écrit de la façon suivante, pour tout $\mu\in M$,

$$\mathscr{F}(\mu) - \mathscr{F}(\gamma) \leqslant \frac{1}{2}|\mathrm{grad}_\mu\mathscr{F}|_\mu^2 = \frac{1}{2}\int\left|\nabla\left(\ln\mu + \frac{|x|^2}{2}\right)\right|^2\mu.$$

Après un changement de fonction, $\mu = \exp(-|x|^2/2)f$, cette inégalité prend la forme suivante, pour toute fonction f positive,

$$\int f\ln\frac{f}{\int f\,d\gamma}\,d\gamma \leqslant \frac{1}{2}\int\frac{|\nabla f|^2}{f}\,d\gamma.$$

Celle-ci s'appelle l'inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure gaussienne γ et a été démontrée par Gross en 1975 dans [5]. Cette inégalité a de nombreuses propriétés remarquables et est utilisée en EDP, probabilités, géométrie, etc.

2. **L'équation des milieux poreux avec une force de rappel.**

Considérons maintenant l'équation de Fokker-Planck non linéaire dans $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, ou équation des milieux poreux avec une dérive (en fait plutôt appelée équation des diffusions rapides puisque l'exposant, ici $1 - 1/n$, est dans l'intervalle $]0,1[$),

$$\partial_t\mu = \frac{1}{n}\Delta\left(\mu^{1-1/n}\right) + \frac{n-1}{n}\mathrm{Div}(\mu x) = \frac{n-1}{n}\mathrm{Div}\left[\mu\nabla\left(-\mu^{-1/n} + \frac{|x|^2}{2}\right)\right]. \quad (11)$$

Partant d'une donnée initiale qui est une probabilité, la vélocité du flot est donc donnée par

$$\dot{\mu}_t = -\frac{n-1}{n}\nabla\left(-\mu_t^{1/n} + \frac{|x|^2}{2}\right).$$

Il n'est pas trop difficile de voir que

$$\dot{\mu}_t = -\mathrm{grad}_{\mu_t}\mathscr{F},$$

où

$$\mathscr{F}(\mu) = \int\left(-\mu^{-1/n} + \frac{n-1}{n}\frac{|x|^2}{2}\right)\mu.$$

Un calcul un peu plus compliqué, si on ne s'y prend pas mal, permet de calculer la hessienne de $\mathscr{F}$. Au point μ et pour $\nabla\Phi$, élément de l'espace tangent, on obtient

$$\mathrm{Hess}_\mu\mathscr{F}(\nabla\Phi,\nabla\Phi) = \frac{1}{n}\int(\|\mathrm{Hess}\,\Phi\|^2 - \frac{1}{n}(\Delta\Phi)^2)\mu + \frac{n-1}{n}\int|\nabla\Phi|^2\mu,$$

calcul effectué par exemple dans [8]. Puisque $\|\mathrm{Hess}\,\Phi\|^2 = \sum_{i,j}(\partial_{ij}\Phi)^2$, par une inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\mathrm{Hess}\,\Phi\|^2 - \frac{1}{n}(\Delta\Phi)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi on obtient,

$$\mathrm{Hess}_\mu \mathscr{F}(\nabla\Phi,\nabla\Phi) \geqslant \frac{n-1}{n}\int |\nabla\Phi|^2\mu,$$

ce qui s'écrit aussi de la façon suivante,

$$\mathrm{Hess}_\mu \mathscr{F} \geqslant \frac{n-1}{n}\mathrm{Id}_\mu.$$

On retrouve encore le cas de la dimension finie (3) avec la constante $\rho = \frac{n-1}{n}$. Un calcul indépendant montre que la solution $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ converge, lorsque t tend vers l'infini, vers l'état stationnaire $\mu_\infty = (C+|x|^2/2)^{-n}$ où C est une constante de normalisation pour que μ_∞ soit une mesure de probabilité. On peut alors montrer une inégalité d'entropie-production d'entropie, pour toute mesure $\mu_0 \in M$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\mu_0)-\mathscr{F}(\mu_\infty) &\leqslant \frac{n-1}{2n}\int\left|\nabla\left(\mu_0^{-1/n}-\frac{|x|^2}{2}\right)\right|^2\mu_0\\ &= -\frac{n}{2(n-1)}\frac{d}{dt}\mathscr{F}(\mu_t)\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

Cette inégalité de convexité n'est rien d'autre qu'une forme un peu « barbare », et équivalente, de l'inégalité de Sobolev optimale dans $\mathbb{R}^n$, pour toute fonction $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, régulière à support compact,

$$\|f\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\lambda)} \leqslant C_{op}\|\nabla f\|_{L^2(\lambda)}.$$

Cette dernière inégalité se retrouve simplement après un changement de fonction et une intégration par parties. Notons que cette inégalité est attribuée à Sobolev en 1938 et que la constante optimale a été calculée par Aubin et Talenti en 1976.

Il est remarquable de voir qu'une telle inégalité, si importante en analyse, en EDP et en géométrie, n'est qu'une inégalité de convexité le long d'un flot de gradient. On s'aperçoit aisément dans la preuve de cette inégalité que d'autres cas assez similaires peuvent être traités, par exemple on retrouve naturellement par cette méthode la famille des inégalités de Gagliardo-Nirenberg optimales démontrées par M. del Pino et J. Dolbeault en 2002 ou bien l'inégalité de Sobolev dans une variété riemannienne avec des conditions de courbures, démontrée par J. Demange en 2008.

L'interaction entre l'entropie et le calcul d'Otto est toujours un domaine très actif en mathématiques. Pour l'illustrer, écrivons en détail ce récent théorème de S. Zugmeyer qui démontre une inégalité de type Sobolev sur un ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$, mettant à profit le calcul d'Otto pour généraliser les résultats précédents.

Théorème ([11]). *Soit $H:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, strictement convexe, vérifiant $H(0)=0$ et posons $\Psi = H'$. Choisissons un ensemble convexe fermé $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ($n\geqslant 1$) et une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, $v:\Omega\mapsto(0,+\infty)$. Supposons que*

- *pour tout $x\geqslant 0$, $xU'(x)+\frac{1-n}{n}U(x)\geqslant 0$, où $U(x)=x\Psi(x)-H(x)$;*
- *il existe une constante $C>0$, telle que $-\mathrm{Hess}(\Psi(v))\geqslant C\mathrm{Id}$.*

Alors pour tout fonction strictement positive $u\in\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega u = \int_\Omega v$,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (H(u)-H(v)-(u-v)\Psi(v))d\lambda\\ &\qquad\leqslant \frac{1}{2C}\int_\Omega \|\nabla(\Psi(v)-\Psi(u))\|^2 u\,d\lambda.\end{aligned}$$

Terminons ces quelques pages par une citation de Ievgueni Zamiatine, tirée de *Nous autres* (1920), « Alors voici : il y a deux forces en ce monde – l'entropie et l'énergie. L'entropie vise la paix et la béatitude, l'équilibre heureux – l'autre recherche la rupture des équilibres, la torture du mouvement infini. » C'est très probablement la première utilisation de l'entropie en littérature. On peut se demander si l'auteur de ce remarquable livre d'anticipation reprend les mêmes notions de l'entropie que celles proposées par Clausius. Si Clausius n'a pas pu donner son avis sur cette question, le régime soviétique, lui, n'a pas apprécié cette œuvre satirique dénonçant le totalitarisme.

Références

[1] L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré. *Gradient flows : in metric spaces and in the space of probability measures*. Basel : Birkhäuser, 2nd edition, 2008.

[2] D. Bakry et M. Émery. « Diffusions hypercontractives ». In : *Séminaire de Probabilités XIX, Univ. Strasbourg 1983/84, Proc., Lect. Notes Math.* Springer, 1985, p. 177-206.

[3] J.-D. Benamou et Y. Brenier. « A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem ». *Numerische Mathematik* **84**, n° 3 (2000), p. 375-393.

[4] R. Clausius. « Sur diverses formes facilement applicables qu'on peut donner aux équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur. » *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1865), p. 361-400.

[5] L. Gross. « Logarithmic sobolev inequalities ». *American Journal of Mathematics* **97**, n° 4 (1975), p. 1061-1083.

[6] R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto. « The variational formulation of the Fokker–Planck equation ». *SIAM journal on mathematical analysis* **29**, n° 1 (1998), p. 1-17.

[7] F. Otto. « The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation ». *Communications in Partial Differential Equations* **26**, n° 1-2 (2001), p. 101-174.

[8] F. Otto et M. Westdickenberg. « Eulerian calculus for the contraction in the Wasserstein distance ». *SIAM journal on mathematical analysis* **37**, n° 4 (2006), p. 1227-1255.

[9] G. Perelman. « The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications ». *preprint* (2002).

[10] C. Villani. *Optimal transport : Old and new*. **338**. Berlin, Springer, 2009.

[11] S. Zugmeyer. « Entropy flows and functional inequalities in convex sets ». *Preprint hal-02407995* (2019).

Ivan Gentil

Institut Camille Jordan, université Claude Bernard Lyon 1

gentil@math.univ-lyon1.fr

http://math.univ-lyon1.fr/~gentil/maths.html

Ivan Gentil est professeur et sa recherche se situe en analyse, notamment autour du transport optimal en lien avec les probabilités et la géométrie.

Je tiens à remercier Louis Dupaigne et Laurent Miclo pour leurs remarques pertinentes lors de la rédaction de ces quelques pages.

Rigidités spectrales : un bref état de l'art

• C. GUILLARMOU

La question de déterminer une métrique riemannienne à partir de son spectre du laplacien ou des longueurs des géodésiques périodiques est étudiée depuis longtemps, nous donnons dans ce texte un bref état de l'art sur ce sujet.

1. Le problème de Kac

Un problème classique de géométrie spectrale est de savoir à quel point le spectre des fréquences propres d'un tambour détermine sa forme. En 1966, Mark Kac publie un article intitulé *Can one hear the shape of a drum?* [11] qui a influencé un certain nombre de travaux remarquables. Pour exprimer mathématiquement ce problème, faisons d'abord un bref rappel sur le spectre du laplacien d'un domaine compact.

1.1 – Le spectre du laplacien

Supposons que M soit un domaine compact à bord lisse de $\mathbb{R}^n$ (le tambour) et définissons l'opérateur laplacien $\Delta_M = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ agissant sur l'espace $C_0^\infty(M)$ des fonctions $C^\infty(M)$ qui s'annulent sur le bord. On dira qu'on met la *condition de Dirichlet* au bord. L'opérateur Δ_M est symétrique sur $C_0^\infty(M)$ et positif au sens où pour tout $u, v \in C_0^\infty(M)$,

$$\langle \Delta_M u, v\rangle_{L^2(M)} = \langle u, \Delta_M v\rangle_{L^2(M)},$$
$$\langle \Delta_M u, u\rangle_{L^2(M)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(M)} \geqslant 0.$$

On dira que $\lambda \geqslant 0$ est une valeur propre de Δ_M s'il existe $u \in C_0^\infty(M)$ non identiquement nulle telle que $(\Delta_M - \lambda)u = 0$. Comme le domaine M est compact, il est classique en utilisant un peu d'analyse fonctionnelle (l'injection compacte de Sobolev $H^1(M) \to L^2(M)$) de montrer que les valeurs propres forment un ensemble discret non borné de $\mathbb{R}^+$ et que $\dim\ker(\Delta_M - \lambda)$ est finie pour toute valeur propre λ. On notera

$$\mathrm{Sp}(\Delta_M) := \{\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j \leqslant \ldots\} \subset (0, +\infty)$$

l'ensemble des valeurs propres ordonnées et répétées avec leur multiplicité (la dimension de $\ker(\Delta_M - \lambda)$) et on l'appellera *spectre du laplacien*. Pour donner un exemple concret, qui ne rentre pas complètement dans notre cadre à cause du bord singulier, mais pour lequel la théorie marche de la même façon, on peut prendre le carré $K = [0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$. Les fonctions propres sont

$$u_{n,m}(x_1, x_2) = \sin(n\pi x_1)\sin(m\pi x_2)$$

avec $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$ et le spectre est

$$\mathrm{Sp}(\Delta_K) = \{\pi^2(n^2 + m^2) \,|\, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dans les cas à bord lisse, l'expression des valeurs propres est en général plus compliquée : par exemple, même dans le cas du disque unité $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leqslant 1\}$, les valeurs propres de Δ_D sont des zéros de fonctions de Bessel de premier type.

Ces fréquences propres, ou spectre de Δ_M, apparaissent par exemple dans la solution de l'équation des ondes pour $f \in L^2(M)$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \Delta_M)u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ \partial_t u(x,0) = 0 \end{cases}$$

donnée par $u(t,x) = \sum_{j=1}^\infty \cos(t\sqrt{\lambda_j})\langle f, u_j\rangle_{L^2} u_j(x)$ où u_j est une base orthonormale de fonctions propres de Δ_M associées aux valeurs propres λ_j. Elles peuvent aussi être vues comme des niveaux « quantiques » d'énergie, puisque le laplacien est en mécanique quantique l'opérateur qui quantifie l'énergie cinétique.

1.2 – La question de Kac

Dans son article [11], Kac s'interroge sur l'information géométrique contenue dans le spectre du laplacien. Il demande plus précisément si deux domaines *isospectraux* (i.e. ayant le même spectre du laplacien avec condition de Dirichlet) M_1 et M_2 sont nécessairement l'image l'un de l'autre par une isométrie euclidienne, on dit alors que les domaines sont congruents. Kac mentionne que ce problème lui avait été communiqué par Bochner dix ans plus tôt, et il écrit : *before I go any further, let me say that as far as I know the problem is still unsolved. Personally, I believe that one cannot « hear » the shape of a tambourine but I may well be wrong and I am not prepared to bet large sums either way.*

Domaines planaires spectralement déterminés. Il existe un cas relativement simple pour lequel on peut donner un résultat positif, il s'agit du cas où M_1 est un disque du plan et M_2 un domaine de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse. Comme il est difficile d'obtenir des informations sur les valeurs propres individuellement, l'approche générale pour traiter ce problème est plutôt de considérer des fonctions (en particulier des séries) construites à partir des valeurs propres. Le premier exemple, qui découle d'estimées a priori sur les valeurs propres λ_j (par exemple en comparant au cas du carré K mentionné ci dessus) est celui de la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-t\lambda_j}$, appelée trace de l'opérateur de chaleur [1], qui converge pour $t>0$ mais diverge en $t\to 0^+$. L'asymptotique de la trace de l'opérateur de chaleur a été calculée par Pleijel et Mc Kean-Singer : ils montrent que quand $t\to 0^+$

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{2\pi t} - \frac{\ell(\partial M)}{4\sqrt{2\pi t}} + o(1/\sqrt{t})$$

où $\mathrm{Vol}(M)$ et $\ell(\partial M)$ sont respectivement le volume de M et la longueur de ∂M. Par conséquent, si les deux domaines ont même spectre du laplacien, ils ont même développement asymptotique et donc leur volume et périmètre coïncident. On peut alors utiliser l'inégalité isopérimétrique qui nous assure que $\ell(\partial M)^2 \geqslant 4\pi\mathrm{Vol}(M)$ avec égalité si et seulement si M est un disque. Ceci montre directement le résultat de rigidité suivant :

Théorème 1. *[11] Un disque est spectralement déterminé parmi les domaines euclidiens du plan à bord lisse.*

Il existe en fait très peu d'autres exemples de domaines spectralement déterminés. Récemment, en utilisant des résultats de systèmes dynamiques sur les billards proches d'une ellipse par Avila-De Simoi-Kaloshin [1], Hezari-Zelditch ont étendu en 2019 ce résultat de Kac aux ellipses proches du disque :

Théorème 2. *[10] Les domaines dont le bord est une ellipse avec une excentricité suffisamment petite sont spectralement déterminés parmi les domaines euclidiens à bord lisse du plan.*

Ce résultat demande beaucoup plus de technologie et de travail, il repose cette fois sur l'étude de la trace de l'opérateur d'onde [2]

$$W(t) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}. \tag{1}$$

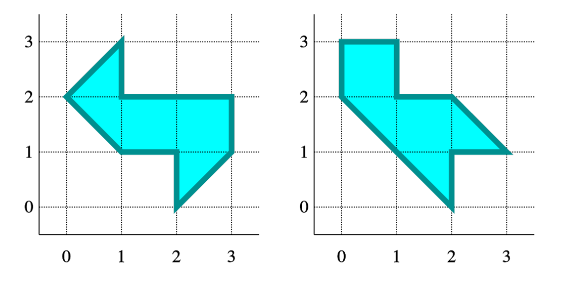
Cette quantité doit en fait être considérée comme une distribution de la variable $t\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire que la quantité qui converge est $\langle W,\varphi\rangle := \sum_j \hat{\varphi}(\sqrt{\lambda_j})$ pour chaque $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi}$ étant la transformée de Fourier de φ. Nous discuterons de cette distribution dans la section suivante, mais son intérêt principal réside dans le fait que ses singularités sont localisées exactement sur (la fermeture de) l'ensemble des longueurs $\ell(\gamma)$ des orbites périodiques γ du flot de billard [3] dans le domaine M. La structure de système dynamique intégrable de l'ellipse peut alors être utilisée et l'on se ramène à une question de système dynamique.

Domaines planaires non spectralement déterminés. Les premiers contre-exemples de domaines planaires isospectraux mais non congruents sont donnés en 1992 par Gordon-Webb-Wolpert :

Théorème 3. *[5] Il existe des domaines du plan, à bord lisse par morceaux, qui ne sont pas congruents mais sont isospectraux.*

Ces domaines ne sont ni lisses ni convexes, ils sont polygonaux (cf. figure 1).

Figure 1 – Des domaines isospectraux mais non congruents [5].



1. L'opérateur de chaleur est l'opérateur $e^{-t\Delta_M} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} u_j\langle\cdot,u_j\rangle_{L^2}$, il résout l'équation de chaleur au sens où $(\partial_t+\Delta_M)e^{-t\Delta_M} = 0$ et sa trace est la somme $\sum_j e^{-t\lambda_j}$ de ses valeurs propres.
2. L'opérateur d'onde est défini par $e^{-it\sqrt{\Delta_M}}$, il résout l'équation d'onde au sens où $(\partial_t^2+\Delta_M)e^{it\sqrt{\Delta_M}} = 0$.
3. Les trajectoires du billard sont les droites avec rebond au bord suivant la loi de Snell-Descartes.

1.3 – Le problème de Kac riemannien

Le même problème se pose naturellement pour les géométries non euclidiennes : on peut se demander si le spectre du laplacien $\Delta_g = d^*d$ sur une variété riemannienne (M,g) compacte (avec ou sans bord) détermine la métrique à isométrie près. Rappelons qu'une métrique riemannienne $x \mapsto g(x)$ est un champ de produits scalaires sur chaque espace tangent T_xM et que deux métriques g_1, g_2 sont dites isométriques s'il existe un difféomorphisme $\psi : M \to M$ tel que $\psi^* g_1 = g_2$. L'opérateur d est la dérivée extérieure sur les fonctions sur M et l'adjoint d^* est pris par rapport à la mesure induite par g sur M. Dans un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur un petit ouvert simplement connexe de M, on peut écrire pour $f \in C^\infty(M)$

$$\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{\det g(x)}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(g^{ij}(x)\sqrt{\det g(x)}\partial_{x_j} f)$$

où $(g^{ij})_{ij}$ est la matrice inverse de $(g_{ij} = g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}))_{ij}$. Par exemple, sur le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique $g_{\mathbb{R}^2} = dx_1^2 + dx_2^2$ et sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > 0\}$ muni de la métrique $g_{\mathbb{H}^2} = (dx_1^2 + dx_2^2)/x_2^2$, cela donne

$$\Delta_{g_{\mathbb{R}^2}} = -\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2, \quad \Delta_{g_{\mathbb{H}^2}} = x_2^2 \Delta_{\mathbb{R}^2}.$$

Dans le cas à bord, on utilise la condition de Dirichlet mentionnée auparavant ; notons que le cadre de la section 1.2 correspond au cas particulier où les métriques sont euclidiennes [4].

On dira que deux métriques sont *isospectrales* si elles ont le même spectre du laplacien (avec multiplicité), la question de Kac dans ce cadre riemannien se résume donc en

$$g_1 \text{ et } g_2 \text{ isospectrales} \iff g_1 \text{ et } g_2 \text{ isométriques ?}$$

En 1964, Milnor donna l'exemple de tores euclidiens de dimension 16 qui ne sont pas isométriques mais sont isospectraux, montrant qu'en général le spectre du laplacien ne détermine pas la classe d'isométrie de la métrique. Pour les variétés à courbure négative, les premiers contre-exemples sont dus à Vignéras :

Théorème 4. *[15] Il existe des surfaces compactes sans bord, à courbure de Gauss -1, qui ne sont pas isométriques mais sont isospectrales.*

En 1985, Sunada donne une construction générale, reposant sur des revêtements, de variétés non isométriques mais isospectrales, et obtient de nouveaux exemples en dimension 2 et 4.

Pour reprendre la petite discussion de la section 1.2 de façon un peu informelle, on a construit deux fonctions/distributions à partir des λ_j, et leurs singularités contiennent les informations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \Longrightarrow \text{Invariants géométriques locaux,}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \Longrightarrow \text{Invariants dynamiques globaux.}$$

Par invariant local on entend une quantité géométrique obtenue comme intégrale d'une fonction universelle $F(x, g(x), \partial_x g(x), \ldots, \partial_x^k g(x))$ de la métrique $g(x)$ (par exemple volume, courbure, longueur du bord etc.), alors qu'un invariant global ne peut pas s'exprimer de cette façon (les orbites périodiques du billard dépendent de la géométrie globale du billard et sont en général sensibles aux petites variations du billard).

On va voir maintenant qu'une autre quantité spectrale est très utile.

Déterminant du laplacien et compacité des métriques isospectrales. Puisque $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ ne détermine pas en général la métrique riemannienne g, on peut se demander quelle est la structure de l'ensemble des métriques isospectrales à une métrique g_0 donnée. Une réponse est donnée par Osgood-Phillips-Sarnak en 1988, suivant une première note de Melrose écrite en 1983 pour les domaines à bord :

Théorème 5. *[13] Un ensemble de métriques riemanniennes isospectrales sur une surface M est séquentiellement compact pour la topologie C^∞ des classes d'isométrie : si g_n est une suite de métriques isospectrales sur M, alors il existe une sous-suite g_{n_j} et une suite de difféomorphismes ψ_{n_j} tels que $\psi_{n_j}^* g_{n_j}$ converge vers une métrique g dans C^∞.*

L'un des aspects de la preuve repose sur le fait que les invariants de la chaleur, i.e. les coefficients du développement de $Z(t) := \sum_{\lambda_j \in \mathrm{Sp}(\Delta_g)} e^{-\lambda_j t}$ quand $t \to 0^+$, contrôlent des invariants géométriques tels que le volume et les dérivées de la courbure de

4. On peut aussi voir les domaines planaires euclidiens de la façon suivante : on fixe le domaine, par exemple le disque unité D, et on considère des métriques à courbures nulles sur D, de sorte qu'on se ramène à un problème d'identification de métriques plutôt que de domaines.

Gauss. Puisqu'une suite g_n de métriques isospectrales a la même fonction $Z(t)$, les métriques g_n ont donc toutes le même volume et les mêmes dérivées de courbure. Ceci n'implique pas complètement la compacité : en effet, à volume fixé les métriques à courbure constante -1 (dites *hyperboliques*) ont tous ces invariants constants, mais ne forment pas un ensemble compact après quotient par l'action des difféomorphismes. En effet, il existe des suites de métriques hyperboliques $(g_\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui sont égales, sur un cylindre $Y = (-1,1)_x \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})_\theta$ plongé dans M, à la métrique

$$g_\epsilon = \frac{dx^2}{x^2+\epsilon^2} + (x^2+\epsilon^2)d\theta^2, \tag{2}$$

elles dégénèrent donc vers une métrique singulière en $x = 0$ quand $\epsilon \to 0$. La dégénérescence de g_ϵ est liée au fait que la courbe $\gamma := \{(0,\theta) \in Y \,|\, \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ non contractile est de longueur ϵ (pour g_ϵ) qui tend vers 0, et les courbes $c_\theta := \{(x,\theta) \in Y \,||x| < 1\}$ ont une longueur d'ordre $2|\ln\epsilon|$. Le cylindre (Y, g_ϵ) devient très long et très fin au milieu (voir figure 2), ce qui empêche la convergence dans l'espace des métriques lisses sur M.

Pour traiter ce problème, Osgood-Philipps-Sarnak [13] utilisent un autre invariant spectral important : le *déterminant du laplacien* $\det\Delta_g$. Celui-ci se définit par un prolongement méromorphe de la fonction zeta spectrale $\zeta_{\Delta_g}(s) := \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^{-s}$ de $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ à $s \in \mathbb{C}$ ($(\lambda_j)_{j\geqslant 2}$ étant les valeurs propres non nulles de Δ_g), qui a la bonne propriété d'être analytique en $s = 0$, puis en posant

$$\det\Delta_g := \exp(-\partial_s \zeta_{\Delta_g}(s)|_{s=0}).$$

Notons qu'il s'agit d'une régularisation du produit infini $\prod_{j=2}^{\infty} \lambda_j$ des valeurs propres non nulles de Δ_g. Il s'agit d'un invariant de type global, mais qui a une variation conforme locale (voir la formule (4)). Regardons par exemple les surfaces de genre $\geqslant 2$. Le théorème d'uniformisation de Poincaré nous dit que pour chaque métrique g sur une surface M de genre $\geqslant 2$, il existe une unique métrique h à courbure de Gauss constante -1 et $\omega \in C^\infty(M)$ tels que $g = e^\omega h$, de plus la courbure de Gauss K_g de g s'exprime sous la forme

$$K_{e^\omega h} = e^{-\omega}(\tfrac{1}{2}\Delta_h \omega - 1). \tag{3}$$

Le déterminant $\det\Delta_g$ est relié d'une manière simple à $\det(\Delta_h)$ via la formule dite « de Polyakov » [5]

$$\frac{\det\Delta_{e^\omega g_h}}{\det\Delta_h} = \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{\mathrm{Vol}(M,h)} e^{-\frac{1}{48\pi}\left(\int_M (|\nabla\omega|_h^2 - 4\omega)\, dv_h\right)}. \tag{4}$$

L'idée est de montrer que $\det(\Delta_{e^\omega h})$ contrôle la *systole* de h, i.e. la longueur de la courbe [6] fermée non contractile la plus courte sur (M,h), ce qui permettra d'éviter le problème mentionné au dessus. Les métriques isospectrales ayant le même volume, on peut commencer par étudier $\omega \mapsto \det\Delta_{e^\omega g}$ à volume fixé $\mathrm{Vol}(M, e^\omega h) = \mathrm{Vol}(M,h)$, et en particulier chercher ses extrema. Parmi les métriques $g = e^\omega h$ dont le volume $\mathrm{Vol}(M,g) = \int_M e^\omega \mathrm{dv}_h$ est égal à $\mathrm{Vol}(M,h)$, on a en dérivant (4) par rapport à ω que ω_0 est un point critique de $\omega \mapsto \det\Delta_{e^\omega h}$ si et seulement si

$$\int_M (2\Delta_h\omega_0 - 4)u\,\mathrm{dv}_h = 0,$$

$$\forall u \in C^\infty(M) \text{ telle que } \int_M u e^{\omega_0} \mathrm{dv}_h = 0,$$

ce qui signifie que $2\Delta_h\omega_0 - 4 = \lambda e^{\omega_0}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc que $K_{e^{\omega_0} h}$ est constante en utilisant (3). Ceci force donc $\omega_0 = 0$ et on peut montrer que la fonctionnelle $\omega \mapsto \det(\Delta_{e^\omega h})$ avec condition $\mathrm{Vol}(M, e^\omega h) = \mathrm{Vol}(M,h)$ est maximale en son point critique 0 :

$$\det\Delta_h \geqslant \det\Delta_{e^\omega h}. \tag{5}$$

Ceci implique que si g_n est une suite de métriques isospectrales, que l'on peut écrire (par uniformisation) $g_n = e^{\omega_n} h_n$ avec h_n hyperbolique et $\omega_n \in C^\infty(M)$, alors

$$\forall n \geqslant 1, \quad \det\Delta_{g_1} = \det\Delta_{g_n} \leqslant \det\Delta_{h_n}$$

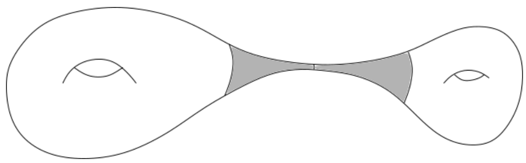
et on a donc une suite de métriques hyperboliques h_n dont le déterminant est borné inférieurement. Pour les métriques hyperboliques h_n, la formule de Selberg (voir section 2) relie le spectre de Δ_{h_n}, et donc son déterminant, aux longueurs des géodésiques périodiques de h_n et en particulier à la systole de h_n. Ceci a permis à Wolpert de montrer que $\det(\Delta_{h_n}) \leqslant C(M) e^{-\frac{c(M)}{\ell_0(h_n)}}$ pour des constantes $c(M), C(M)$ ne dépendant que de M et où $\ell_0(h_n)$ est la systole de h_n : on obtient donc, pour une suite de métriques isospectrales $g_n = e^{\omega_n} h_n$, que la systole $\ell_0(h_n)$ de h_n est bornée

5. On remarquera que si ω est constante, le changement est non trivial : $\det\Delta_{e^\omega h}/\det\Delta_h = e^{\omega(1-\frac{\chi(M)}{6})}$ en utilisant Gauss-Bonnet pour relier $\mathrm{Vol}_h(M)$ à la caractéristique d'Euler $\chi(M)$.

6. Cette courbe est nécessairement une géodésique, i.e. une courbe minimisant localement la fonctionnelle longueur associée à la métrique (cf. section 2 pour la notion de géodésique).

inférieurement par la constante positive uniforme $c(M)/|\ln(\det\Delta_{g_1}/C(M))|$. Cela permet d'éviter la dégénérescence évoquée en (2). Plus précisément, les régions de *l'espace des modules* (i.e. l'espace des métriques hyperboliques modulo difféomorphismes sur M) avec systole $\ell_0(h) > \epsilon > 0$ sont compactes, on peut donc extraire une sous-suite de métriques h_{n_j} et de difféomorphismes ψ_j sur M tels que $\psi_j^* h_{n_j}$ converge dans C^∞ vers une métrique hyperbolique. Le fait que les dérivées de la courbure K_{g_n} soient toutes bornées indépendamment de n permet d'extraire une sous-suite de ω_{n_j} qui converge dans C^∞ si $g_n = e^{\omega_n} h_n$ (rappelons la formule (3) reliant courbure K_{g_n} à ω_n), d'où la compacité du théorème 5.

Figure 2 – Une métrique hyperbolique (à courbure −1) avec un cylindre Y (en gris) muni de la métrique (2); la courbe au milieu est de longueur ϵ et le diamètre du cylindre est d'ordre $2|\ln\epsilon|$.



Conjectures, rigidité locale. Dans [13], les auteurs conjecturent que pour les métriques à courbure négative [7], un résultat plus fort que la compacité devrait même être vrai :

Conjecture 1. *[13] L'ensemble des classes d'isométrie de métriques à courbure négative ayant le même spectre du laplacien qu'une métrique g_0 fixée à courbure négative est un ensemble fini.*

Une approche possible, en dimension 2 en utilisant la compacité mentionnée ci-dessus, serait de montrer la conjecture suivante :

Conjecture 2 (Rigidité locale de $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$). *Si (M, g_0) est une variété compacte sans bord à courbure négative, il existe un voisinage V de la classe d'isométrie de g_0 pour la topologie C^∞ tel que pour toute métrique g dans V, $\mathrm{Sp}(\Delta_g) = \mathrm{Sp}(\Delta_{g_0})$ si et seulement si g et g_0 sont isométriques.*

Autrement dit, le spectre du laplacien devrait déterminer la métrique à isométrie près parmi les métriques qui lui sont proches. Notons que cela ne contredit pas les contre-exemples de Vignéras, qui ne sont pas des métriques proches l'une de l'autre.

2. Spectre des longueurs

Après avoir parlé de spectre du laplacien Δ_g sur les variétés riemanniennes (M, g), nous abordons une autre notion de spectre qui lui est liée de façon intrigante et hautement non triviale : il s'agit du spectre des longueurs, défini comme l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de (M, g). Commençons par rappeler que les géodésiques d'une métrique riemannienne g sont les courbes qui minimisent localement la fonctionnelle longueur (7) parmi les courbes $\gamma : [0,1] \to M$ de classe C^1 avec extrémités fixées; elles sont solutions d'équations différentielles d'ordre 2 avec données initiales $(\gamma(0), \partial_t\gamma(0))$. On dit que γ est une géodésique périodique si $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ est C^1 et son image est une géodésique. Par exemple un méridien sur la sphère ronde canonique $\mathbb{S}^2$ et la courbe horizontale $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sur le tore euclidien sont des géodésiques périodiques. En courbure négative, l'ensemble des géodésiques périodiques est dénombrable et l'ensemble de leurs longueurs est discret dans $\mathbb{R}^+$.

Courbure constante négative. En courbure constante −1, sur une surface compacte de genre ⩾ 2, la formule de trace de Selberg s'écrit de la façon suivante : soit f une fonction holomorphe dans une bande $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im}(z)| < 1/2 + \epsilon\}$ (pour un $\epsilon > 0$) contenant l'axe réel, satisfaisant $f(-z) = f(z)$ et une estimée de la forme $|f(z)| = \mathcal{O}((1+|z|)^{-2-\delta})$ pour un $\delta > 0$, alors

$$\sum_{\lambda_j \in \mathrm{Sp}(\Delta_g)} f\left(\sqrt{\lambda_j - 1/4}\right) = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{th}(\pi t)\, t\, dt + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh(k\ell(\gamma)/2)} \hat{f}(k\ell(\gamma)) \qquad (6)$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des géodésiques périodiques primitives [8], $\ell(\gamma)$ leurs longueurs et $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ détermine l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques

$$\mathrm{LS}(g) := \{\ell_g(\gamma) \,|\, \gamma \text{ géodésique périodique de } g\},$$

que l'on appelle *spectre des longueurs* de g.

7. Par négative, on entend strictement négative.
8. On dit que γ est primitive si elle ne peut pas s'écrire comme une géodésique périodique parcourue plus d'une fois.

Courbure négative variable. De manière plus générale, pour une variété à courbure négative variable, les travaux de Colin de Verdière (1973), Chazarain (1974) et Duistermaat-Guillemin (1975)[9] montrent que la trace des ondes $W(t) = \sum_j e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}$ est une distribution de la variable $t \in \mathbb{R}$ avec support singulier (i.e. là où elle n'est pas C^∞) est

$$\mathrm{Singsupp}(W) \subset \{0\} \cup \mathrm{LS}(g).$$

De plus, la singularité de $W(t)$ en $t = T \in \mathrm{LS}(g)$ est donnée par[10]

$$W(t) \sim \frac{1}{t-T} \sum_{(\gamma,k)\in\mathscr{P}\times\mathbb{N},\, k\ell(\gamma)=T} \frac{\ell(\gamma)}{2\pi|\det(1-P_\gamma^k)|^{1/2}}$$

avec P_γ l'application de Poincaré (premier retour) du flot géodésique linéarisé en γ. De façon heuristique, la présence des $\ell(\gamma)$ comme singularités de $W(t)$ est liée au fait que les singularités des solutions de l'équation des ondes suivent les géodésiques et que $W(t)$ peut se voir comme l'intégrale $\int_M E(t;x,x)\mathrm{dv}_g(x)$ du noyau intégral $E(t;x,x')$ de l'opérateur d'onde au temps t sur la diagonale. Ce résultat sur $W(t)$ implique que $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ détermine $\mathrm{LS}(g)$ en courbure négative, du moins si l'on considère $\mathrm{LS}(g)$ sans prendre en compte la multiplicité[11]. Notons que les métriques pour lesquelles la multiplicité des longueurs des géodésiques périodiques est triviale sont génériques parmi les métriques à courbure négative.

Les contre-exemples de Vignéras et Sunada ont aussi les mêmes spectres de longueurs. Cependant, tout comme pour la conjecture 2, il est naturel de postuler la

Conjecture 3 (Rigidité locale de $\mathrm{LS}(g)$). *Si (M, g_0) est une variété compacte sans bord à courbure négative, il existe un voisinage V de la classe d'isométrie de g_0 pour la topologie C^∞ tel que pour toute métrique g dans V, $\mathrm{LS}(g) = \mathrm{LS}(g_0)$ (avec multiplicité) si et seulement si g et g_0 sont isométriques.*

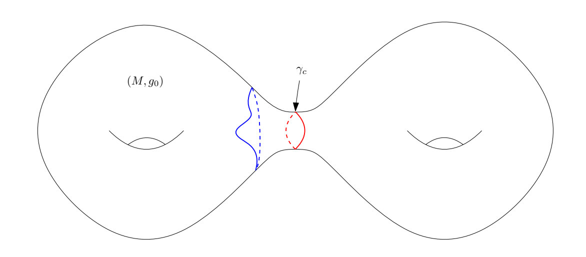
3. Spectre marqué des longueurs

La difficulté dans l'étude du spectre des longueurs est qu'il ne donne pas vraiment d'informations sur la façon dont les géodésiques de M sont réparties sur M. Cette répartition est encodée dans une application appelée *flot géodésique* que l'on introduit ci après, et qui est liée de près à la métrique g. Pour obtenir une information sur le flot géodésique à partir des longueurs de géodésiques périodiques, il nous faut également ajouter une information supplémentaire de type topologique pour chaque géodésique périodique : sa classe d'homotopie libre. Rappelons que deux courbes fermées $c_0(t), c_1(t)$ ($t \in [0,1]$) sont librement homotopes s'il existe une déformation continue $(s,t) \mapsto \gamma(s,t)$ telle que $\gamma(0,t) = c_0(t)$ et $\gamma(1,t) = c_1(t)$. En courbure négative, pour toute classe c d'homotopie libre il existe une unique géodésique γ_c dans la classe c, qui est obtenue en minimisant la fonctionnelle longueur (on notera $\dot\gamma(t) := \partial_t\gamma(t)$)

$$\gamma \in c \mapsto \ell_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}dt \qquad (7)$$

sur les courbes $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ de classe C^1 dont l'image appartient à c.

Figure 3 – Une surface de genre 2. La classe d'homotopie libre c des courbes ne s'enroulant qu'une unique fois autour de la partie centrale contient une unique géodésique périodique γ_c (en rouge).



Par exemple sur la figure 3, la courbe bleue et la courbe rouge sont librement homotopes, et la rouge est la géodésique γ_c dans la classe d'homotopie libre c. Une façon de trouver cette géodésique γ_c est de déformer la courbe bleue par le flot de gradient de la fonctionnelle $\gamma \in c \mapsto \ell_g(\gamma)$. La courbure négative est importante pour l'unicité de γ_c : on voit sur l'exemple du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de la métrique euclidienne $dx_1^2 + dx_2^2$ (à courbure nulle) que les segments verticaux $c_s(t) = (s,t)$ pour $t \in [0,1]$ sont des géodésiques librement homotopes si $s \in [0,1]$.

9. Des résultats similaires avaient été obtenus auparavant dans la littérature physique pour les domaines planaires par Balian-Bloch.

10. On pourra comparer avec la formule de Selberg, qui calcule explicitement $\mathrm{Tr}(e^{-i\sqrt{\Delta-1/4}})$ plutôt que $\mathrm{Tr}(e^{-i\sqrt{\Delta}})$. On y observe les singularités aux longueurs $\ell(\gamma)$ des géodésiques périodiques.

11. La mutiplicité de γ est le nombre de géodésique périodiques avec longueur $\ell_g(\gamma)$.

L'existence et unicité de γ_c nous permet de définir le *spectre marqué des longueurs*.

Définition 1. Le spectre marqué des longueurs de (M,g) est l'application

$$L_g : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^+, \quad L_g(c) = \ell_g(\gamma_c)$$

où $\mathscr{C}$ est l'ensemble des classes d'homotopie libre de M. On peut noter que $L_{\psi^* g} = L_g$ si ψ est un difféomorphisme isotope à l'identité. De plus, L_g dépend de façon lisse de g.

Comme le spectre des longueurs $\mathrm{LS}(g)$ ne détermine pas g à isométrie près (dans le théorème 4 les contre-exemples ont le même LS), une question sans doute plus naturelle et raisonnable a été posée dans un article de Burns et Katok de 1985 :

Conjecture 4. *[2] Soit (M,g_0) une variété compacte sans bord à courbure négative. Si g est une autre métrique à courbure négative telle que $L_g = L_{g_0}$, alors g et g_0 sont isométriques.*

Notons que la résolution de cette conjecture n'impliquerait pas de résultats directement sur le problème d'isospectralité posé par Kac car $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ ne détermine a priori pas L_g : en effet, $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ ne détermine que l'image $L_g(\mathscr{C}) \subset \mathbb{R}^+$ de L_g par l'étude des singularités de la trace des ondes $W(t)$ en section 2.

Nous allons maintenant interpréter l'égalité des spectres marqués de deux métriques en terme de propriétés de leur flot géodésique. Sur le fibré unitaire $S_gM := \{(x,v) \in TM \,|\, g_x(v,v) = 1\}$, l'application $\varphi_t^g : (x,v) \in S_gM \mapsto (\gamma_{x,v}(t), \dot\gamma_{x,v}(t)) \in S_gM$ définit un flot que l'on appelle *flot géodésique*, où $\gamma_{x,v}(t)$ est l'unique géodésique avec conditions initiales $\gamma(0) = x, \dot\gamma(0) = v$. Le fibré unitaire est feuilleté par les lignes de flot, qui sont des géodésiques relevées. Il s'avère que deux métriques riemanniennes g_1, g_2 à courbure négative ont leurs flots géodésiques $\varphi_t^{g_1}, \varphi_t^{g_2}$ topologiquement conjugués (voir par exemple Hamenstadt [9]), au sens où il existe un *homéomorphisme* (non unique) $\psi : S_{g_1}M \to S_{g_2}M$ qui envoie les géodésiques de g_1 sur celles de g_2. La configuration topologique des géodésiques relevées est donc globalement la même pour g_1 et g_2. Il y a cependant a priori une distorsion (un étirement géodésique) $\kappa \in C^0(S_{g_1}M, \mathbb{R}^+)$ entre les deux

$$\varphi^{g_2}_{\kappa(y,t)}(\psi(y)) = \psi(\varphi_t^{g_1}(y)), \quad y = (x,v) \in S_{g_1}M.$$

Donc si $L_{g_1} = L_{g_2}$, on obtient que

$$\kappa(y, \ell_{g_1}(\gamma)) = \kappa(y,0) + \ell_{g_1}(\gamma) \tag{8}$$

pour chaque géodésique périodique γ de g_1 et $y \in \mathrm{Im}(\gamma,\dot\gamma) \subset S_{g_1}M$. On remarque que n'importe quelle fonction de la forme $\kappa(y,t) = t + f(\varphi_t^{g_1}(y)) - f(y)$ pour $f \in C^0(S_{g_1}M)$ vérifie (8). Le théorème de Livsic dit précisément la réciproque, i.e. $\kappa(y,t) = t + f(\varphi_t^{g_1}(y)) - f(y)$ pour une fonction f hölderienne. Cela utilise le fait que les géodésiques périodiques en courbure négative sont denses dans le fibré unitaire. En changeant ψ en $\widetilde\psi(y) := \varphi^{g_1}_{-f(y)}(\psi(y))$, on obtient $\varphi_t^{g_2}(\widetilde\psi(y)) = \widetilde\psi(\varphi_t^{g_1}(y))$ et on dit dans ce cas que les flots $\varphi_t^{g_1}, \varphi_t^{g_2}$ sont *conjugués* par $\widetilde\psi$. Réciproquement, si les flots sont conjugués, alors on voit facilement que $L_{g_1} = L_{g_2}$, on a donc équivalence

$$\varphi_t^{g_1} \text{ conjugué à } \varphi_t^{g_2} \iff L_{g_1} = L_{g_2}.$$

La conjecture de Burns-Katok peut donc se formuler sous la forme suivante : deux métriques à courbure négative dont les flots géodésiques sont conjugués sont-elles isométriques ?

Rigidité du spectre marqué. Cette conjecture de Burns-Katok est toujours ouverte en dimension $n > 2$, mais elle a été résolue par Otal et Croke en 1990 en dimension 2.

Théorème 6. *[14, 3] Une surface compacte sans bord à courbure négative est déterminée, à isométrie près, par son spectre marqué des longueurs.*

Otal donne en particulier une construction de l'isométrie entre g_1 et g_2 avec même spectre marqué à partir de la conjugaison des flots, par des méthodes d'intersection de mesures et le théorème de Gauss-Bonnet. Auparavant, Guillemin-Kazhdan [8] avaient montré en dimension 2 une version infinitésimale de ce résultat : il n'y a pas de familles lisses $(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$ de métriques à courbure négative ayant le même spectre marqué, hormis les déformations isométriques. L'idée est de différencier $L_{g^s}(c)$ pour une classe $c \in \mathscr{C}$ fixée : si $\gamma_s(t)$ est la géodésique pour g^s de classe c et $g' = \partial_s g^s|_{s=0}$, alors

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_s L_{g^s}(c)|_{s=0} \\
&= \partial_s \Big(\int_0^1 \sqrt{g^s_{\gamma_s(t)}(\dot\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t))}\, dt \Big)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{g'_{\gamma_0(t)}(\dot\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))}{\sqrt{g^0_{\gamma_0(t)}(\dot\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))}}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\ell(\gamma_0)} g'_{\alpha(t)}(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t))\, dt
\end{aligned} \tag{9}$$

où l'on a d'abord utilisé que γ_0 est un point critique de (7) pour g_0 puis on a fait un changement de variable de sorte que $\alpha(t)$ soit la géodésique γ_0 paramétrée par longueur d'arc. L'identité (9) dit que la fonction $f : (x,v) \mapsto g'_x(v,v)$ représentant la variation de g^s sur $S_{g^0}M$ est donc d'intégrale nulle sur chaque géodésique périodique de g^0. Une application du théorème de Livsic et des identités intégrales faisant intervenir la courbure permettent à Guillemin-Kazhdan de conclure que $g' = \mathscr{L}_V g^0$, avec V un champ de vecteurs sur M et $\mathscr{L}_V$ la dérivée de Lie dans la direction de V. En utilisant cet argument de linéarisation en tout s, on obtient un champ de vecteur V_s dépendant du temps tel que $\partial_s g^s = \mathscr{L}_{V_s} g^s$ et on peut intégrer cette identité en $g^s = \psi_s^* g^0$ où ψ_s est la famille de difféomorphismes qui intègre V_s. Ce résultat infinitésimal a été généralisé par Croke-Sharafutdinov [4] en dimension quelconque. En dimension $n \geqslant 2$, Katok [12] a aussi démontré que deux métriques conformes $g_2 = e^\omega g_1$ (pour $\omega \in C^\infty$) à courbure négative ont même spectre marqué si et seulement si $g_1 = g_2$. Enfin Hamenstädt [9] a utilisé les résultats de rigidité entropique des espaces localement symétriques de Besson-Courtois-Gallot pour obtenir le

Théorème 7. *[9] Si (M, g_0) est un espace localement symétrique compact à courbure négative, alors si g est une métrique à courbure négative sur M telle que $L_g = L_{g_0}$, nécessairement g est isométrique à g_0.*

Récemment, avec Thibault Lefeuvre, nous avons montré un résultat de rigidité locale en toute dimension, qui répond « localement » à la conjecture de Burns-Katok.

Théorème 8. *[7, 6] Si (M, g_0) est une variété compacte sans bord à courbure négative, il existe $k \in \mathbb{N}$ dépendant de* $\dim M$ *seulement et $\epsilon > 0$ tels que, pour toute métrique g satisfaisant $\|g - g_0\|_{C^k} < \epsilon$, si $L_g = L_{g_0}$ alors g est isométrique à g_0. Plus précisément, si $\mathscr{C}$ est l'ensemble des classes d'homotopie libre, il existe $C > 0$ tel que pour chaque g vérifiant $\|g - g_0\|_{C^k} < \epsilon$, il existe un difféomorphisme ψ de M tel que*

$$\|\psi^* g - g_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(M)} \leqslant C\Big(\sup_{c \in \mathscr{C}} \Big|\frac{L_g(c)}{L_{g_0}(c)} - 1\Big|\Big)^{1/2}. \quad (10)$$

Les constantes C, ϵ sont localement uniformes en g_0, l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(M)$ est l'espace de Sobolev d'ordre $-1/2$ dont la norme est construite en utilisant g_0. Une estimée du même type est aussi obtenue (par interpolation) en remplaçant $H^{-\frac{1}{2}}(M)$ par $C^\alpha(M)$ pour $\alpha < k$, mais où la puissance du membre de droite est un $\beta \in (0, 1/2)$ qui dépend de α et k.

La démonstration se décompose en cinq étapes.

1) *La jauge.* D'abord, on choisit une bonne jauge pour éviter le problème d'invariance par l'action des difféomorphismes sur les métriques : on montre par un théorème de fonction implicite que pour chaque g près de g_0 (en norme C^k avec k fixé assez grand), il existe un unique difféomorphisme $\psi : M \to M$ proche de l'identité (en norme C^{k+1}) tel que

$$\delta_{g_0}(\psi^* g - g_0) = 0$$

où δ_{g_0} est l'opérateur de divergence sur les tenseurs symétriques défini par la formule

$$\delta_{g_0} h := -\mathrm{Tr}(\nabla^{g_0} h).$$

Cela signifie que localement près de g_0, on représente les classes d'isométries comme l'espace vectoriel $\ker \delta_{g_0}$ des tenseurs à divergence nulle.

2) *Développement de Taylor de $\mathscr{L}$.* Dans un deuxième temps on fait un développement de Taylor à l'ordre 1 de l'application [12]

$$\mathscr{L} : g \in \mathrm{Met}(M) \mapsto \frac{L_g}{L_{g_0}} \in \ell^\infty(\mathscr{C}),$$

qui est C^∞, et on obtient, avec $g' := \psi^* g$,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(g) &= \mathscr{L}(g') \\ &= \mathscr{L}(g_0) + d\mathscr{L}_{g_0}(g' - g_0) + \mathcal{O}(\|g' - g_0\|^2_{C^5}) \quad (11)\end{aligned}$$

où $d\mathscr{L}_{g_0}$ est la différentielle de $\mathscr{L}$ en g_0. Comme on l'a vu via le calcul simple (9), on a pour h un 2-tenseur symétrique

$$\begin{aligned}\forall c \in \mathscr{C}, (d\mathscr{L}_{g_0} h)(c) \\ = \frac{1}{2L_{g_0}(c)} \int_0^{L_{g_0}(c)} h_{\gamma_0(t)}(\dot\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\, dt\end{aligned}$$

avec $\gamma_0(t)$ la géodésique de g_0 dans la classe d'homotopie libre c. Pour montrer l'injectivité locale de $\mathscr{L}$ près de $g = g_0$, on aimerait utiliser un théorème d'inversion locale, et comme l'espace $\mathrm{Met}(M)$ des métriques sur M est de dimension infinie, il nous faut une estimée quantitative de l'injectivité du linéarisé $d\mathscr{L}_{g_0}$.

3) *L'opérateur de variance.* Pour cela on va introduire un opérateur de variance, qui on le verra plus tard, est lié à $d\mathscr{L}_{g_0}$. On remarque

12. On peut remarquer que cette application est bornée en utilisant que $C^{-1} g_0 \leqslant g \leqslant C g_0$ sur M pour un $C > 0$ uniforme, et le fait que la géodésique dans c est le minimiseur de la fonctionnelle longueur.

d'abord que les 2-tenseurs symétriques lisses, dont l'espace est noté $C^\infty(M;S^2(T^*M))$, peuvent se voir comme des fonctions sur $S_{g_0}M$ par l'application $\pi_2^*: C^\infty(M;S^2(T^*M)) \to C^\infty(S_{g_0}M)$ définie par $(\pi_2^* h)(x,v) := h_x(v,v)$ si $h \in C^\infty(M;S^2(T^*M))$. On définit alors l'opérateur dit *de variance*[13]

$$\begin{cases} \Pi : C^\infty(S_{g_0}M) \to C^{-\infty}(S_{g_0}M) \\ \langle \Pi u, v\rangle := \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \int_{S_{g_0}M} u(\varphi_t^{g_0}(y))v(y)d\mu(y)dt \end{cases},$$

où $d\mu$ est la mesure de Liouville, une mesure naturelle de type Lebesgue sur $S_{g_0}M$, invariante par le flot géodésique $\varphi_t^{g_0}$, et où l'on a supposé aussi $\int_{S_{g_0}M} u\,d\mu = 0$. La limite $T \to \infty$ existe grâce à la propriété de mélange du flot, qui est une conséquence de la courbure négative. On montre par des outils d'analyse microlocale et la théorie des espaces de Sobolev anisotropes que c'est un opérateur borné $\Pi : H^s(S_{g_0}M) \to H^{-s}(S_{g_0}M)$ sur des espaces de Sobolev pour tout $s > 0$, et que $\Pi X_{g_0} = X_{g_0}\Pi = 0$ si $X_{g_0} = \partial_t \varphi_t^{g_0}|_{t=0}$ est le champ de vecteur du flot géodésique. D'autre part on montre que, si Π_2 est défini sur les 2-tenseurs symétriques sur M par

$$\langle \Pi_2 h, h'\rangle := \int_{S_{g_0}M} (\Pi\pi_2^* h).\pi_2^* h'\, d\mu$$

alors Π_2 est un opérateur non local sur M (pseudo-différentiel d'ordre -1) elliptique sur le sous-espace[14] $E = \{h \in C^\infty(M;S^2(T^*M)) | \delta_{g_0}h = 0, \int_{S_{g_0}M} \pi_2^* h\, d\mu = 0\}$ au sens où l'on a les estimées suivantes : pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $C_1 > 0$ qui ne dépend que de g_0 tel que pour tout $h \in E$

$$\|\Pi_2 h\|_{H^s(M)} \geqslant C_1 \|h\|_{H^{s-1}(M)} \qquad (12)$$

où $H^s(M)$ est l'espace de Sobolev d'ordre s sur les 2-tenseurs symétriques. Cet opérateur Π_2 ressemble à une puissance $\Delta_{g_0}^{-1/2}$ du Laplacien sur les tenseurs à divergence nulle. Cette estimée elliptique va servir en quelque sorte à montrer une injectivité « quantitative » de $d\mathcal{L}_{g_0}$.

4) *Théorème de Livsic : les intégrales sur les orbites périodiques donnent une information globale.* La quatrième étape est de relier les opérateurs $d\mathcal{L}_{g_0}$ et Π_2. Il faut passer d'une information sur les géodésiques périodiques à une information sur le flot sur $S_{g_0}M$, cela peut se faire par une version quantitative du théorème de Livsic démontrée par Gouëzel-Lefeuvre (ou par un théorème de Livsic positif dû à Lopes-Thieullen). Cette information nous permet d'obtenir une estimée reliant $d\mathcal{L}_{g_0}$ à Π_2 : il existe $\theta \in (0,1)$ et $C_2 > 0$ ne dépendant que de g_0 tels que pour tout $s > 0$ petit et tout $h \in C^\infty(M;S^2T^*M)$

$$\|\Pi_2 h\|_{H^{-s}(M)} \leqslant C_2 \|d\mathcal{L}_{g_0} h\|^{\theta}_{\ell^\infty(\mathscr{C})} \|h\|^{1-\theta}_{C^1(M)}.$$

On voit que cette estimée n'est pas tout à fait un contrôle linéaire de Π_2 par $d\mathcal{L}_{g_0}$, mais cela suffira. En appliquant ce résultat à $h := \pi_2^*(g'-g_0)$, puis en utilisant (12) (première ligne) et (11) (deuxième ligne), on obtient

$$\begin{aligned} C_1\|g'-g_0\|_{H^{-1-s}(M)} &\leqslant \|\Pi_2(g'-g_0)\|_{H^{-s}(M)} \\ &\leqslant C_2\|d\mathcal{L}_{g_0}(g'-g_0)\|^{\theta}_{\ell^\infty(\mathscr{C})}\|g'-g_0\|^{1-\theta}_{C^1(M)} \\ &\leqslant C_2\|g'-g_0\|^{1-\theta}_{C^1(M)}(\|\mathcal{L}(g')-\mathcal{L}(g_0)\|^{\theta}_{\ell^\infty(\mathscr{C})} \\ &\qquad + C_3\|g'-g_0\|^{2\theta}_{C^5(M)}) \qquad (13) \end{aligned}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes qui ne dépendent que de g_0. Ce qui est important dans cette estimée est que si on suppose

$$\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g_0),$$

alors $\|g'-g_0\|_{H^{-1-s}(M)}$ est controlée par un $\mathcal{O}(\|g'-g_0\|^{1+\theta}_{C^5(M)})$. Si les normes $\|\cdot\|_{H^{-1-s}(M)}$ et $\|\cdot\|_{C^5(M)}$ étaient des normes équivalentes, on conclurait directement que si $g'-g_0$ est assez petit il doit être nul. Comme ces normes ne le sont pas, on va devoir utiliser un théorème d'interpolation entre espaces fonctionnels pour les comparer.

5) *Interpolation.* La dernière étape est un exercice d'interpolation entre espaces de Sobolev. Fixons d'abord $s = 1$ et notons $n = \dim M$, alors en supposant que $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g_0)$ dans l'inégalité (13) et en utilisant l'injection de Sobolev $H^{n+5}(M) \subset C^5(M)$, on voit qu'il existe $C_3 > 0$ ne dépendant que de g_0 tel que

$$\|g'-g_0\|_{H^{-2}(M)} \leqslant C_3\|g'-g_0\|^{1+\theta}_{H^{5+n}(M)}.$$

En interpolant entre $H^k(M)$ et $H^{-2}(M)$ pour un k assez grand (qui ne dépend que de θ et n) et en utilisant notre hypothèse que $\|g'-g_0\|_{H^k(M)}$ est borné par une constante fixée (car g est proche de g_0 en norme $C^k(M)$), on obtient que $\|g'-g_0\|_{H^{5+n}(M)}$ est controlé par un $\mathcal{O}(\|g'-g_0\|^{1-\theta/2}_{H^{-2}(M)})$, donnant

$$\|g'-g_0\|_{H^{-2}(M)} \leqslant C_4\|g'-g_0\|^{1+\theta(1-\theta)/2}_{H^{-2}(M)}$$

13. $C^{-\infty}(S_{g_0}M)$ est l'espace des distributions sur $S_{g_0}M$.
14. Rappelons que δ_{g_0} est la divergence sur les tenseurs symétriques.

pour un $C_4 > 0$ qui ne dépend que de g_0. Puisque $\theta(1-\theta)/2 > 0$, on voit que cela implique que $g' = g_0$ ou $\|g' - g_0\|_{H^{-2}(M)} > C_4^{-\frac{2}{\theta(1-\theta)}}$. Ceci montre que pour $\|g - g_0\|_{C^k}$ assez petit, $g' = g_0$ et conclut la preuve.

Cette preuve donne une estimée de stabilité hölderienne semblable à (10) mais en terme de la norme $\|\mathscr{L}(g) - \mathscr{L}(g_0)\|_{\ell^\infty(\mathscr{C})}$ et avec des puissances moins explicites. L'outil fondamental dans cette preuve est l'opérateur Π_2 et en particulier l'estimée (12). L'estimée de stabilité (10) est obtenue dans l'article [6] en combinant les idées de [7] avec des outils du formalisme thermodynamique comme la pression topologique, ceci évite l'utilisation du théorème de Livsic approché ou positif.

Références

[1] A. Avila, J. De Simoi et V. Kaloshin. « An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse ». *Ann. Math. (2)* **184** (2016), p. 527-558.

[2] K. Burns et A. Katok. « Manifolds with nonpositive curvature ». *Ergodic Theory Dynam. Systems* **5**, nº 2 (1985), p. 307-317. issn : 0143-3857. doi : 10.1017/S0143385700002935. url : https://doi.org/10.1017/S0143385700002935.

[3] C. B. Croke. « Rigidity for surfaces of nonpositive curvature ». *Comment. Math. Helv.* **65**, nº 1 (1990), p. 150-169. issn : 0010-2571. doi : 10.1007/BF02566599. url : https://doi.org/10.1007/BF02566599.

[4] C. B. Croke et V. A. Sharafutdinov. « Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold ». *Topology* **37**, nº 6 (1998), p. 1265-1273. issn : 0040-9383. doi : 10.1016/S0040-9383(97)00086-4. url : https://doi-org.revues.math.u-psud.fr/10.1016/S0040-9383(97)00086-4.

[5] C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert. « Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. » *Invent. Math.* **110**, nº 1 (1992), p. 1-22.

[6] C. Guillarmou, G. Knieper et T. Lefeuvre. « Geodesic stretch, pressure metric and marked length spectrum rigidity ». *arXiv :1909.08666* (2019). À paraître Ergodic Th. and Dyn. Syst.

[7] C. Guillarmou et T. Lefeuvre. « The marked length spectrum of Anosov manifolds ». *Ann. of Math. (2)* **190**, nº 1 (2019), p. 321-344. arXiv : 1806.04218 [math.DG].

[8] V. Guillemin et D. Kazhdan. « Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds ». *Topology* **19**, nº 3 (1980), p. 301-312.

[9] U. Hamenstädt. « Cocycles, symplectic structures and intersection ». *Geom. Funct. Anal.* **9**, nº 1 (1999), p. 90-140. issn : 1016-443X. doi : 10.1007/s000390050082. url : https://doi.org/10.1007/s000390050082.

[10] H. Hezari et S. Zelditch. « One can hear the shape of ellipses of small eccentricity ». *arXiv 1907.03882.* (2019).

[11] M. Kac. « Can one hear the shape of a drum? » *American Mathematical Monthly.* **73**, nº 4 Part 2 (1966).

[12] A. Katok. « Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics ». *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8***, nº Charles Conley Memorial Issue (1988), p. 139-152. issn : 0143-3857. doi : 10.1017/S0143385700009391. url : https://doi.org/10.1017/S0143385700009391.

[13] B. Osgood, R. Philipps et P. Sarnak. « Compact isospectral sets of Riemann surfaces ». *J. Funct. Anal.* **80** (1988), p. 212-234.

[14] J.-P. Otal. « Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative ». *Ann. of Math. (2)* **131**, nº 1 (1990), p. 151-162. issn : 0003-486X. doi : 10.2307/1971511. url : https://doi.org/10.2307/1971511.

[15] M.-F. Vignéras. « Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques ». *Ann. Math. (2)* **112**, nº 1 (1980), p. 21-32.

Colin Guillarmou

Université Paris-Saclay

colin.guillarmou@universite-paris-saclay.fr

Colin Guillarmou est dr cnrs au laboratoire de mathématiques d'Orsay. Il travaille en analyse, géométrie et systèmes dynamiques, il s'intéresse par ailleurs aux mathématiques en lien avec la physique.

T. TAO et la conjecture de Syracuse

• J.-P. ALLOUCHE

Nous commençons par rappeler l'énoncé de la conjecture de Syracuse (aussi appelée « problème $3n+1$ ») et par faire un très rapide tour d'horizon de ce qui est connu sur le sujet. Puis nous essayons de donner une idée d'un récent résultat remarquable de T. Tao sur cette conjecture.

1. Introduction

La conjecture de Syracuse, aussi appelée conjecture de Collatz, conjecture de Kakutani, problème $3x+1$ (il y a même un article de B. Thwaites intitulé *My conjecture*), est une de ces questions mathématiques extraordinairement attirantes car la simplicité de leur énoncé le dispute à la difficulté de leur démonstration, au point que beaucoup (la plupart) desdites questions sont encore ouvertes. On peut ainsi penser par exemple à la conjecture de Goldbach ou au théorème de Fermat(-Wiles). Une caractéristique commune à ces conjectures très difficiles, mais ayant un énoncé simple, est qu'elles attirent beaucoup d'amateurs, bien intentionnés certes, mais qu'il est parfois difficile de convaincre que leur approche est aussi naïve qu'hélas fausse. On peut, malgré tout, difficilement leur en vouloir, puisque même des « mathématiciens professionnels » se laissent tenter par ces conjectures, et s'aperçoivent que leurs tentatives de démonstration n'aboutissent pas. Il est vrai qu'ils ne savent pas forcément que P. Erdős a dit un jour à J. C. Lagarias en parlant de cette conjecture : « Hopeless. Absolutely hopeless. », ce qui est... très peu encourageant.

Rappelons l'énoncé de cette conjecture de Syracuse-Collatz-Kakutani-($3x+1$)-Thwaites :

Conjecture. *Soit f la fonction définie sur les entiers strictement positifs par*

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{3n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\[2ex] \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Alors les orbites de f sont toutes ultimement égales à $(1,2,1,2,1,2,\ldots)$.

[Autrement dit, en notant f^k la k-ième itérée de f, l'orbite de tout entier n sous f, c'est-à-dire la suite $(n, f(n), f^2(n), \ldots)$, contient le nombre 1, à partir duquel elle prend alternativement les valeurs 1 et 2.]

Remarque.

(i) Cette conjecture est clairement équivalente à la suivante. *Notons $\nu_2(n)$ la valuation 2-adique de l'entier n (autrement dit le plus grand entier a tel que 2^a divise n) et g la fonction définie sur les entiers impairs par $\mathrm{Syr}(n) = (3n+1)/2^{\nu_2(3n+1)}$. Alors, pour tout entier n impair, il existe un entier ℓ tel que $\mathrm{Syr}^{\ell}(n) = 1$.*

(ii) L'histoire de cette conjecture et pratiquement tous les résultats avant celui de T. Tao (qui est l'objet de cet article) se trouvent dans le livre de J. C. Lagarias [9].

Nous nous proposons ici de rappeler les résultats démontrés jusqu'ici et de tenter de résumer le résultat de T. Tao, qui est énoncé comme suit dans [12] :

Théorème (Tao). *Presque toutes les orbites de f contiennent un élément presque borné.*

2. Premiers pas

La simplicité de l'énoncé de cette conjecture fait qu'on ne peut probablement pas s'empêcher de « jouer » avec et de faire des expériences. Si on calcule les itérées de f sur les entiers assez petits, on voit vite que les orbites atteignent 1 et sont donc ultimement égales à $(1,2,1,2,1,2,\ldots)$. On s'aperçoit aussi que la pré-période (c'est-à-dire la partie qui précède la partie périodique) de l'orbite de 27 est (curieusement ?) beaucoup plus longue que celle des petits entiers testés.

Une autre évidence, générale celle-là, est que « la moitié des entiers », à savoir les entiers pairs, donnent au bout d'une application de f une valeur plus petite que l'entier de départ. Puis, si l'on regarde les entiers de la forme $(4m+1)$, on obtient par applications successives de f :

$$4m+1 \to 6m+2 \to 3m+1.$$

Comme $3m+1 < 4m+1$ (au moins pour $m>0$) on obtient ainsi que « le quart des entiers » donne après deux itérations de f un nombre plus petit que l'entier de départ. Au total « 3/4 des entiers » (au moins) sont donc dans l'ensemble $S := \{n>0,\ \exists k,\ f^k(n) < n\}$. Plus précisément la densité naturelle d'un ensemble A d'entiers est par définition la limite si elle existe de $\mathrm{Card}\{n \in A,\ n \leqslant x\}/x$ (et l'on définit la densité supérieure et la densité inférieure en remplaçant la limite par la limite supérieure et la limite inférieure). Nous venons de voir que la densité inférieure de l'ensemble S est supérieure ou égale à 3/4. On peut continuer en regardant les entiers de la forme $8m+j$ avec $j \in [0,7]$, puis les entiers dans les classes résiduelles modulo 2^a, on obtient des minorants de la densité inférieure de S de plus en plus proches de 1. L'auteur de ces lignes a fait ces expériences dans la deuxième moitié des années 1970 avec une des premières calculatrices programmables (une TI 58) : en laissant tourner l'engin quarante-huit heures ou plus, on obtenait des valeurs tellement proches de 1 qu'il était tentant d'essayer de le démontrer, en espérant que ce serait plus simple que la conjecture initiale. Il serait temps de *faire des mathématiques* – simples pour le moment – en énonçant le résultat :

Théorème. *La densité inférieure de S est égale à* 1 *(il en est donc de même pour la densité de S).*

La démonstration repose sur l'étude des classes résiduelles modulo 2^a. L'esquisse ci-dessus pour les entiers modulo 2 ou 4 se généralise facilement par récurrence sur a :

Proposition.

(i) *Soit* $\alpha(a,j) := \mathrm{Card}\{v \in [0,a-1],\ f^v(j)\ \text{impair}\}$, *alors*

$$f^a(2^a n + j) = 3^{\alpha(a,j)} n + f^a(j).$$

(ii) *Pour tout i dans* $[0,a]$, *on a*

$$\mathrm{Card}\{j \in [0, 2^a - 1],\ \alpha(a,j) = i\} = \binom{a}{i}.$$

On voit grâce à cette proposition que l'étude de $f(n)/n$ pour $n \leqslant x$ va faire intervenir des sommes tronquées de coefficients binomiaux. Pour estimer ces sommes, on utilise le lemme suivant :

Lemme. *Pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$, *il existe un* $\eta \in]0,1[$ *tel que*

$$\frac{1}{2^a} \sum_{|i-a/2|>\varepsilon a} \binom{a}{i} \leqslant \eta^a$$

pour a assez grand.

Une démonstration de ce lemme qui nous avait été suggérée par G. Tenenbaum utilise la relation

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{a}{i} = (a-m)\binom{a}{m} \int_1^2 t^m (2-t)^{a-m-1} \mathrm{d}t \text{ pour } m \leqslant a-1$$

qui peut être démontrée par récurrence finie sur m et qui est d'ailleurs un exercice dans le beau livre de L. Comtet (voir [4, exercice 12, p. 91]). Pour plus de détails on pourra consulter l'article de l'auteur paru au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux [1]. Le résultat sur la densité 1 a aussi été démontré indépendamment par C. J. Everett en 1977 [5], H. Möller en 1977 [10] et E. Heppner en 1978 [6], sans oublier R. Terras avec ses articles de 1976 et 1979 [13, 14], soit pour le problème initial, soit pour la généralisation due à H. Hasse, voir la remarque à la fin de ce paragraphe 2. Ces différents articles écrits indépendamment à peu près à la même époque sont un signe que le résultat sur la densité 1 n'est pas très difficile, il repose sur un passage à la limite non trivial mais raisonnablement aisé. Ils montrent aussi l'absence d'outils électroniques à cette époque (même si *Zentralblatt* existait sous forme papier ainsi que *Mathscinet* qui s'appelait alors *Mathematical Reviews*). Je me souviens néanmoins que M. Mendès France me signala après coup le papier de Heppner et/ou celui de Möller et qu'il mit dans mon casier une lettre « anonyme » à l'écriture facilement reconnaissable : *Laisse tomber ce problème. Un ami qui te veut du bien* – ce qui confirme l'opinion d'Erdös rapportée par Lagarias.

Pourquoi ceci ne donne pas la conjecture ? C'est le terme reste dans la limite pour le calcul de la densité qui gâche la fête : on obtient en fait

$$\mathrm{Card}\{n \leqslant x,\ \exists k,\ f^k(n) < n\} = x + O(x^{1-\delta})$$

pour un δ dans $]0,1[$, alors que, même si on avait $O(1)$, on n'obtiendrait qu'une forme faible de la conjecture, à savoir que toute orbite « boucle » (c'est-à-dire est ultimement périodique [1]), mais il pourrait y avoir plus d'une boucle. On peut même raffiner en faisant dépendre le k ci-dessus de n (logarithmiquement), mais on est toujours loin de la

1. Rappelons qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est dite ultimement périodique si elle est périodique pour les indices assez grands, i.e. s'il existe $n_0 \geqslant 0$ et $T \geqslant 1$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $k \geqslant 0$ on ait $u_{n+kT} = u_n$.

conjecture, même sous sa forme faible. En fait, ce que l'auteur n'avait pas vu, c'est que le résultat qu'il avait obtenu dans [1] (un peu plus précis que ce qui est énoncé ci-dessus) donnait mieux, à savoir que l'ensemble $S_c := \{n,\ \exists k,\ f^k(n) < n^c\}$ est de densité 1 pour $c > 0{,}8691$. C'est I. Korec qui indique en 1994 dans [7] que le rapporteur de son article lui a signalé ce résultat. Korec améliore d'ailleurs la valeur $0{,}8691$ en $\log 3/\log 4$ soit à peu près $0{,}7925$ (voir la recension MR1290275 par Lagarias sur *Mathscinet*).

Remarque. Une formulation plus générale de la conjecture, due à H. Hasse, est de remplacer « multiplier par 3 et ajouter 1 puis diviser par 2, ou diviser par 2, suivant la parité de l'entier de départ », par « multiplier par m et ajouter un résidu convenable dans un système complet de résidus fixé puis diviser par d, ou diviser par d, suivant que l'entier de départ n'est pas ou est divisible par d ». La conjecture est alors qu'il existe une fonction Φ telle que si $m < \Phi(d)$, alors toutes les orbites sont ultimement périodiques et il y a un nombre fini de périodes possibles, et si $m > \Phi(d)$ alors il existe au moins une orbite non ultimement périodique. Möller [11] propose la fonction $\Phi(d) = d^{d/(d-1)}$. (On remarquera que $m = 3$ est « juste » sous le seuil $d^{d/(d-1)}$ pour $d = 2$.) Certains des auteurs cités ci-dessus donnent aussi des résultats de densité pour cette généralisation.

3. Un petit peu plus loin

Nous donnons maintenant de brèves indications sur d'autres résultats (le livre de Lagarias déjà cité est très complet et comprend en particulier une imposante bibliographie annotée). Nous ne reviendrons pas sur les résultats numériques qui donnent des entiers gigantesques N tels que la conjecture soit vraie pour tous les entiers $n \leqslant N$, ni sur ceux qui montrent que le nombre d'éléments d'une période éventuelle autre que $(1,2)$ pour les orbites de la fonction f est nécessairement fantastiquement grand.

Une question théorique intéressante est : peut-on dire quelque chose des entiers n pour lesquels il existe k tel que $f^k(n) = 1$? Autrement dit on regarde les pré-images de 1 par les itérées de f, et on se demande s'il y en a beaucoup. Notre peu de compréhension de cette fonction f fait qu'on ne peut même pas dire que cet ensemble est de densité 1. Le mieux qu'on ait pu démontrer est une minoration du type

$$\mathrm{Card}\{n \leqslant x, \exists k\ f^k(n) = 1\} > x^d$$

pour x assez grand, avec l'une des plus récentes valeurs obtenues pour d, [8] : $d = 0{,}84$.

4. Le résultat de T. Tao

4.1 – Remarques préliminaires

Comme c'est le cas pour les conjectures « classiques » rappelées au début de ce survol, à défaut d'obtenir le résultat attendu, on essaie toujours d'obtenir des « formes faibles ». Que l'on pense à la conjecture de Goldbach, dont J. R. Chen [3] a démontré une forme faible : *tout nombre pair assez grand est somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers.* De même avec le grand théorème de Fermat(-Wiles), où l'on a essayé de se limiter au « premier cas » (si $x^p + y^p = z^p$, alors $xyz \equiv 0 \bmod p$). Ce sont un peu des résultats de cette sorte qui ont été décrits plus haut, en particulier celui qui stipule que la densité de l'ensemble $\{n \leqslant x,\ \exists k\ f^k(n) < n^c\}$ est égale à 1 pour $c > 0{,}7925$.

Ce dernier résultat peut s'exprimer sous la forme : *presque tous les entiers ont dans leur orbite par f un élément plus petit que la puissance* $(0{,}7925)$*-ième de l'entier considéré*. Il s'agit bien sûr d'un abus de langage (commode) puisque la densité n'est pas une probabilité sur les entiers. Avec cette terminologie, quelle est la « meilleure » fonction B que l'on puisse obtenir pour remplacer n^c dans l'ensemble $\{n,\ \exists k\ f^k(n) \leqslant n^c\}$, tout en gardant la densité naturelle de cet ensemble égale à 1 ? En d'autres termes B doit être telle que presque tout entier n ait dans son orbite par f un élément $\leqslant B(n)$. Un *caveat* s'impose : comme souligné par exemple dans l'article de Tao, on ne peut pas « améliorer » $n \to n^c$ en « itérant ». En effet, même s'il est vrai que pour presque tout entier n il existe un élément $n' = f^k(n)$ avec $n' \leqslant n^c$, on ne peut pas appliquer le résultat « du presque tout » à n' pour obtenir un élément $n'' = f^\ell(n')$ tel que $n'' \leqslant (n')^c$, et donc $f^{k+\ell}(n) = f^\ell(n') = n'' \leqslant (n')^c \leqslant (n^c)^c = n^{c^2}$, car n' pourrait très bien être dans l'ensemble exceptionnel du « presque tout » et ne pas avoir de n'' associé. Notons aussi qu'on ne sait pas comment obtenir $B(n) = 1$, puisque l'on ne sait pas (fin de la section précédente) que la conjecture de Syracuse est vraie pour presque tout entier. Le tour de force de Tao est de montrer, *quitte à remplacer la densité naturelle par la densité logarithmique* (voir ci-dessous), que l'on peut prendre pour B *n'importe quelle fonction qui tende vers l'infini* pour un argument infiniment grand, aussi lentement que l'on veuille, par exemple, écrit Tao, peut-être dans un clin d'œil aux estimations à la Erdős, $B(n) = \log\log\log\log n$. Ce qu'il résume de façon imagée, en écrivant qu'on peut prendre B « presque bornée ».

Définition. Un ensemble d'entiers $A \subset \mathbb{N}$ est dit avoir une densité logarithmique, égale à δ, si la limite, lorsque x tend vers l'infini de

$$\frac{1}{\log x} \sum_{n \leqslant x,\, n \in A} \frac{1}{n}$$

existe et vaut δ.

Remarque. Si la densité naturelle d'un ensemble d'entiers existe, sa densité logarithmique existe également et elle lui est égale. La réciproque n'est pas vraie.

4.2 – Le théorème de T. Tao

Comme nous l'avons vu plus haut, Tao stipule dans son théorème un énoncé frappant, voire médiatique (au sens non péjoratif du terme...) : *presque toutes les orbites de f contiennent un élément presque borné*, et cela signifie que pour toute fonction B qui tend vers l'infini la densité *logarithmique* de l'ensemble $\{n,\ \exists k\ f^k(n) < B(n)\}$ est égale à 1. Nous allons tenter de décrire (comme le fait lui-même Tao dans les premières pages de son article) **de manière heuristique** en évitant les détails techniques (l'article fait 49 pages) les étapes de la démonstration et les petites améliorations qu'elle laisse entrevoir.

1. Étudier la fonction f revient classiquement à étudier la fonction que Tao appelle Syr. Soit $\nu_2(n)$ la valuation 2-adique de l'entier n, c'est-à-dire $\nu_2(n) = a$ si 2^a divise n et 2^{a+1} ne divise pas n. On définit la fonction Syr sur les entiers impairs par si n est impair, alors

$$Syr(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}} = f^{\nu_2(3n+1)}(n).$$

Bien sûr la conjecture de Syracuse est que pour tout entier impair n il existe un entier k tel que $\mathrm{Syr}^k(n) = 1$. Et l'énoncé initial de Tao est équivalent à celui-ci : *soit B une fonction définie sur les entiers impairs qui tend vers l'infini à l'infini, alors pour presque tout entier N, il existe un entier k tel que* $\mathrm{Syr}^k(N) < B(N)$ (ici « presque tout » signifie que l'ensemble des entiers impairs pour lesquels la propriété est vraie est de densité logarithmique 1/2 dans l'ensemble des entiers).

2. Comment calcule-t-on les itérées de Syr sur un entier N impair ? Notons $a_1(N) := \nu_2(3N+1)$, $a_2 := \nu_2(3\mathrm{Syr}(N)+1)$, $a_3 := \nu_2(3\mathrm{Syr}^2(N)+1)$, etc. Clairement

$$\begin{aligned}\mathrm{Syr}(N) &= (3N+1)2^{-\nu_2(3N+1)}\\ &= 3.2^{-a_1(N)}N + 2^{-a_1(N)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Syr}^2(N) &= (3\mathrm{Syr}(N)+1)2^{-\nu_2(3\mathrm{Syr}(N)+1)}\\ &= 3^2.2^{-a_1(N)-a_2(N)}\\ &\quad + 3.2^{-a_1(N)-a_2(N)} + 2^{-a_2(N)}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Syr}^n(N) &= 3^n 2^{-a_1(N)-a_2(N)-\cdots-a_n(N)} N\\ &\quad + F_n(a_1(N), a_2(N), \cdots a_n(N))\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}&F_n(a_1(N), a_2(N), \cdots a_n(N))\\ &\quad := 3^{n-1} 2^{-a_1(N)-a_2(N)\cdots-a_n(N)}\\ &\quad + 3^{n-2} 2^{-a_2(N)-a_3(N)-\cdots-a_n(N)}\\ &\quad + \cdots + 3^1 2^{-a_{n-1}(N)-a_n(N)} + 2^{-a_n(N)}.\end{aligned}$$

Cette formule peut être comparée à celle vue plus haut pour f : $f^a(2^a n + j) = 3^{\alpha(a,j)} n + f^a(j)$, qui dit essentiellement qu'on peut estimer les valeurs des images successives d'un entier dans une classe modulo 2^a à partir des images d'un représentant de cette classe, et ce jusqu'à un nombre d'itérations égal à a (ce nombre est donc de l'ordre du logarithme de l'entier considéré, si on a pris soin de prendre le représentant dans $[0, 2^a[$).

3. Posons comme ci-dessus

$$a_j(N) = \nu_2(3\mathrm{Syr}^{j-1}(N) + 1).$$

Alors, heuristiquement : *pour un entier « typique » N impair assez grand, et n beaucoup plus petit que $\log N$, le vecteur $(a_1(N), a_2(N), \cdots, a_n(N))$ se comporte comme un vecteur aléatoire géométrique de taille n et de paramètre 2, c'est-à-dire un n-uplet de variables aléatoires indépendantes toutes géométriques de paramètre* 1/2. Plus précisément, le « se comporte comme » est à prendre au sens d'une petite distance entre variables aléatoires, où la distance entre deux variables aléatoires discrètes X et Y prenant leurs valeurs dans un même espace discret R est la variation totale

$$\sum_{r\in R} |\mathbb{P}(X=r)-\mathbb{P}(Y=r)|.$$

Une proposition démontrée dans l'article de Tao stipule que la propriété heuristique énoncée en italique au début de cette étape 3 est justifiée si N est uniformément réparti modulo 2^m pour m légèrement plus grand que $2n$. Ceci permet d'obtenir un bon contrôle de $\mathrm{Syr}^n(N)$ pour presque tout N et pour n de l'ordre de $\gamma \log N$ avec une petite constante γ. Comme on a heuristiquement une estimation du genre $\mathrm{Syr}^n(N) \approx (3/4)^n N$, en fait $\mathrm{Syr}^n(N) = e^{O(\sqrt{n})}(3/4)^n N$ (par le théorème de la limite centrée ou par la borne de Chernoff), on peut déjà ainsi obtenir à nouveau le résultat de Korec rappelé ci-dessus : la densité de l'ensemble $S_c := \{n,\ \exists k,\ f^k(n) < n^c\}$ est 1 pour $c > 0{,}8691$. Comme l'indique Tao, un résultat de ce genre est un peu l'analogue de « résultats sur des équations aux dérivés partielles d'évolution localement bien posées presque partout », dans lesquelles on a un bon contrôle sur des temps courts pour presque toutes les conditions initiales. Et le théorème que l'on veut démontrer s'apparente à un « résultat pour un caractère globalement bien posé presque partout ». Comment alors passer du « local » au « global » ?

4. La dernière étape, la plus difficile, consiste à répondre à la question ci-dessus via l'introduction d'une fonction qui « accélère » encore les applications f et Syr vues plus haut. Cette fonction « de premier passage » Pass est définie comme suit. Pour $x \geqslant 1$ et N entier impair, on pose

$$T_x(N) := \inf\{n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Syr}^n(N) \leqslant x\}$$

avec la convention usuelle que $T_x(N) := +\infty$ si $\mathrm{Syr}^n(N) > x$ pour tout n. La fonction de premier passage est alors

$$\mathrm{Pass}_x(N) := \mathrm{Syr}^{T_x(N)}(N).$$

Tao s'inspire alors d'un travail de J. Bourgain [2] qui passe d'un local presque partout à un global presque partout grâce à la construction d'une mesure de probabilité invariante. Las ! c'est impossible ici, mais l'auteur s'en sort en introduisant une *famille* de mesures de probabilités qui sont approximativement transportées l'une vers l'autre en itérant Syr un nombre variable de fois. C'est cela qui va permettre d'utiliser un argument itératif, ce qui n'était pas possible « directement » comme nous l'avons indiqué au début du paragraphe 4.1 avec le n^c et le $(n^c)^c$.

Nous n'irons pas plus loin dans cette tentative de démystifier un tout petit peu la belle démonstration de Tao, dont nous avons à peine effleuré la haute technicité, mais surtout l'inventivité. Pour tenter de la résumer – trop schématiquement – commençons par décrire une tentation partagée et par le mathématicien professionnel qui découvre la conjecture de Syracuse et par l'amateur : au fond itérer l'application f du début semble consister *grosso modo* une fois sur deux (cas d'un entier impair) à remplacer n par approximativement $3/2 \cdot n$, et une fois sur deux (cas d'un entier pair) à remplacer n par $1/2 \cdot n$; autrement dit appliquer f^2 revient à multiplier n approximativement par $3/4$, par exemple (avec un entier de départ pas trop mal choisi) :

$$17 \xrightarrow{f} 26 \xrightarrow{f} 13 \xrightarrow{f} 20 \xrightarrow{f} 10 \ldots$$

c'est-à-dire

$$17 \xrightarrow{f^2} 13 \xrightarrow{f^2} 10 \ldots$$

L'orbite d'un entier typique semble donc pouvoir être obtenue approximativement par une suite de multiplications par 3/4. C'est cette tentation, qui ne constitue évidemment pas une démonstration, qu'au prix d'un effort et d'une technicité inouïs pour un énoncé d'apparence aussi innocente, Tao a transformée en démonstration pour presque tout entier. Que l'on ne se méprenne surtout pas sur le sens de cette remarque : passer de « on multiplie en gros par 3/4 » à la démonstration de Tao et sa demi-centaine de pages est au moins aussi difficile que transformer une grenouille ou un crapaud en princesse charmante ou en prince charmant.

5. Et ensuite ?

Que peut-on espérer maintenant pour cette conjecture ? Tao indique qu'en raffinant encore son approche, on doit pouvoir remplacer le presque tout pour la densité logarithmique par un presque tout pour la densité naturelle. Mais il ne laisse guère d'espoir sur la possibilité de remplacer la fonction qui tend vers l'infini aussi lentement que l'on veut dans son énoncé par une constante ; autrement dit même l'énoncé : *l'orbite de presque tout entier est ultimement périodique* est encore tout à fait hors d'atteinte.

Références

[1] J.-P. Allouche. « Sur la conjecture de “Syracuse-Kakutani-Collatz” ». In : *Séminaire de Théorie des Nombres, 1978–1979*. 1979, Exp. N°. 9, 15.

[2] J. Bourgain. « Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures ». *Comm. Math. Phys.* **166**, nº 1 (1994), p. 1-26.

[3] J. R. Chen. « On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes ». *Sci. Sinica* **16** (1973), p. 157-176.

[4] L. Comtet. *Analyse combinatoire. Tomes I, II.* **5**. Collection SUP : “Le Mathématicien”, 4. Presses Universitaires de France, Paris, 1970, Vol. I : 192 pp., Vol. II : 190.

[5] C. J. Everett. « Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$ ». *Adv. Math.* **25**, nº 1 (1977), p. 42-45.

[6] E. Heppner. « Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse-Algorithmus ». *Arch. Math. (Basel)* **31**, nº 3 (1978/79), p. 317-320.

[7] I. Korec. « A density estimate for the $3x+1$ problem ». *Math. Slovaca* **44**, nº 1 (1994), p. 85-89.

[8] I. Krasikov et J. C. Lagarias. « Bounds for the $3x+1$ problem using difference inequalities ». *Acta Arith.* **109**, nº 3 (2003), p. 237-258.

[9] J. C. Lagarias. *The ultimate challenge : The* $3x+1$ *problem*. American Mathematical Soc., 2010.

[10] H. Möller. « F-Normalreihen ». *J. Reine Angew. Math.* **289** (1977), p. 135-143.

[11] H. Möller. « Über Hasses Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutanis Problem) ». *Acta Arith.* **34**, nº 3 (1977/78), p. 219-226.

[12] T. Tao. « Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values ». *arXiv preprint arXiv :1909.03562* (2019). url : `https://arxiv.org/abs/1909.03562`.

[13] R. Terras. « A stopping time problem on the positive integers ». *Acta Arith.* **30**, nº 3 (1976), p. 241-252.

[14] R. Terras. « On the existence of a density ». *Acta Arith.* **35**, nº 1 (1979), p. 101-102.

Jean-Paul Allouche

cnrs, imj-prg, Sorbonne Université, Paris

jean-paul.allouche@imj-prg.fr

Jean-Paul Allouche est directeur de recherche émérite au cnrs (imj-prg). Il s'intéresse aux liens entre théorie des nombres, mathématiques discrètes et informatique théorique (par exemple à la transcendance en caractéristique positive et aux « suites automatiques »).

L'auteur remercie Sophie Grivaux et Damien Gayet pour l'avoir convaincu de présenter l'article de T. Tao ainsi que pour leur enthousiasme. Il remercie aussi les deux rapporteurs pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer la première version de ce texte.

Un entretien avec Michèle Artigue

Propos recueillis par René Cori et Cécile Ouvrier-Buffet

Es-tu consciente du moment où tu as su que ta vocation, c'était les mathématiques ?

Non, mais j'ai aimé les maths très tôt. Petite, quand ma sœur faisait ses devoirs, il paraît que je grimpais sur la table en disant : « Je veux faire des petits problèmes ! ». Après, à l'école, j'étais très bonne élève... sauf en couture, où j'étais nulle ! Ma mère aurait aimé faire des maths et les enseigner. Mais dans son milieu social on ne pouvait pas se permettre de faire des études avancées. Elle et sa sœur ont fait l'école normale d'institutrices. Pour ma mère, une femme devait être indépendante, avoir un métier. L'injure suprême, quand ma petite sœur avait des difficultés à l'école, c'était : « Il ne te restera plus qu'à trouver un mari ! ». Mon père était fils de paysans, dans les Pyrénées. Il s'est engagé dans la Coloniale puis, après la guerre, est devenu employé de bureau à l'arsenal de Tarbes. Il parlait peu mais rêvait que ses enfants sortent du monde dans lequel il s'était senti enfermé. Un jour que nous passions à côté d'un court de tennis, il m'a dit : « Ça, ce n'est pas mon monde, mais ce sera le tien… ». Cela m'a marquée.

C'était une enfance simple, heureuse, sans problèmes, avec beaucoup de liberté, plus en un certain sens que n'en ont les jeunes d'aujourd'hui.

Plus tard, au lycée Marie-Curie à Tarbes, ce sont mes professeurs de maths et de physique qui ont dit à mes parents qu'il faudrait que je fasse maths sup et maths spé. Nous ne savions pas ce que c'était, à l'époque. Mes professeurs voulaient aussi me présenter aux concours généraux de maths et de physique. J'ai refusé : je n'aimais pas les compétitions. Comme ma sœur était professeur de sciences naturelles à Castres, je suis allée en prépa au lycée Fermat à Toulouse, pour deux années. Je m'y suis plu. Cela ne me dérangeait pas que nous soyons peu de filles au milieu de tous ces garçons.

Je n'étais pas très fixée au départ : enseignante ? ingénieure ? Mais, après le premier cours de dessin industriel que j'ai détesté, mon choix était fait. Malgré l'inquiétude de mes parents, j'ai décidé de me concentrer sur les ÉNS. En Sup, j'ai eu un jeune professeur de mathématiques, M. Laurent. Avec lui, j'ai découvert les mathématiques modernes, les structures. En Spé, ensuite, j'ai eu comme professeur M. Paintandre. Il était impressionnant mais il m'a pris sous son aile.

Les seuls concours que j'ai passés ont donc été l'ENSET (devenue ensuite l'ÉNS Cachan) et Sèvres (l'École normale supérieure de jeunes filles). À l'ENSET, où les oraux étaient publics, j'ai assisté à un oral de chimie. J'étais assez timide. L'idée de passer un oral devant tant de personnes m'a effrayée et j'ai renoncé. Évidemment, ma mère a sauté au plafond ! Mais finalement tout s'est bien terminé puisque j'ai passé avec succès l'oral de Sèvres.

À l'époque, l'ÉNS offrait quels débouchés ?

Je ne m'étais pas posé la question. J'étais portée par la vague. Mais jusque-là, les élèves devenaient essentiellement professeures dans le secondaire, après avoir passé l'agrégation en fin de troisième année. Quelques élèves obtenaient une 4e année pour amorcer de la recherche. À l'ÉNS, ce qui m'a marquée, au début, c'est l'entrée dans un autre monde avec d'autres codes. La première année, j'ai ainsi appris à boire du thé et à jouer au bridge ! Nous n'étions que quelques-unes d'origine modeste. Marie-Jeanne Glorian, Jacqueline Robinet, Florence Duchêne, toutes trois provinciales, sont rapidement devenues mes amies. Les parisiennes avaient vu beaucoup plus de choses que moi en prépa, mais ça ne me faisait pas peur. Il suffisait d'apprendre. Nous avions une grande liberté. Nous suivions les cours de la faculté des sciences et avions comme enseignants des mathématiciens prestigieux : Choquet, Cartan, Neveu, Schwartz... Nous avions en plus quelques cours spécifiques à Sèvres, avec André Revuz et Pierre Samuel notamment. J'ai aussi découvert le syndicalisme avec Nicole Schvartz (Nicole El Karoui), qui était déléguée syndicale.

Pendant ma seconde année, en décembre, mon père est mort. Et je me suis retrouvée enceinte à peu près au même moment. Je me suis mariée. Francis, mon mari, venait du même village des Pyrénées, et il était en école d'ingénieurs (le CESTI). Là, j'ai cessé d'être pensionnaire à l'École. À cette époque, à l'École, on passait les 5 certificats de licence en première année et, en deuxième année, on préparait des AEA (Attestations d'Études Approfondies). Certains cours avaient lieu à Orsay, notamment celui d'analyse harmonique de Varopoulos. Je me souviens que mes copines tricotaient ostensiblement de la layette pour moi pendant ses cours… J'ai aussi découvert cette année-là la logique, avec les cours donnés à l'IHP. Ceux de Krivine ont été pour moi une véritable révélation ! Quand je l'écoutais, j'avais l'impression que tout était limpide et j'étais subjuguée par cette limpidité. En même temps, c'était profond, et il restait beaucoup de travail à faire pour bien comprendre. C'est là qu'est né mon amour pour la logique. J'ai même emmené le Kreisel-Krivine de théorie des modèles à la maternité !

En troisième année, on passait l'agrégation. Olivier était né et ma mère, qui était maintenant seule, m'a proposé de le garder. J'ai accepté. Et puis, cela a été mai 68. Ma mère était venue à Paris avec Olivier, et elle a passé tout mai 68 avec nous, à la résidence universitaire de Bagneux. J'ai donc fait partie des « agrégibles », les grévistes de l'oral de l'agrégation. Bien sûr, quand j'ai annoncé que je n'allais pas passer l'oral, ma mère a été une fois de plus furieuse.

Je l'ai passé l'année d'après, comme les autres agrégibles. J'avais obtenu une quatrième année à Sèvres et j'ai donc aussi commencé à m'initier à la recherche en suivant des séminaires et lisant des articles. À la fin de l'année, j'ai eu un poste d'assistante à la faculté des sciences de Paris, détachée du corps des agrégés de l'enseignement secondaire. C'était possible à l'époque avant même d'avoir soutenu une thèse. Notre génération de normaliennes a été la première à bénéficier de cette ouverture à l'enseignement supérieur. C'était bien avant la fusion avec la rue d'Ulm, qui a fermé cet espace écologiquement protégé.

Tu peux nous parler de ta recherche en logique ?

J'aurais aimé faire ma thèse de troisième cycle avec Krivine, mais il m'a orientée vers Daniel Lacombe dont j'avais aussi suivi le cours à l'IHP. Il a accepté et m'a dit : « Réfléchissez à un sujet possible, et quand vous aurez des idées, venez me voir ». J'étais toute jeune, timide. J'ai cherché, j'ai lu, j'ai vu qu'il y avait des problèmes ouverts en récursivité, et une nouvelle technique pour les aborder, la méthode de priorité. J'ai travaillé dans cette direction. Je voyais Lacombe régulièrement aux séminaires, mais n'osais pas lui poser de questions. Il ne m'en posait pas non plus. Au bout de 2 ans, j'avais avancé et je lui ai montré ce que j'avais trouvé. Il a regardé et dit : « Oui, cela doit faire une thèse. » Mais il partait aux États-Unis et il a chargé Bernard Jaulin de me suivre, vérifier les démonstrations, m'aider à finir de rédiger et organiser la soutenance. Nous avons bien sûr envoyé le manuscrit à Lacombe. Mais, vu ses questions lors de la soutenance, j'ai compris qu'il ne l'avait lue que superficiellement ! Ce n'était pas grave, parce que Bernard Jaulin m'avait prise sous son aile. Il était vraiment très gentil, très professionnel. Après la thèse, je me suis quand même sentie un peu perdue.

Puis il y a eu un congrès de logique à Orléans. J'y suis allée avec Marie-Jeanne Perrin et Anne Strauss et nous avons rencontré Emmanuel Isambert [1] qui venait de passer sa thèse. Nous avons formé un petit groupe de travail et nous avons travaillé sur des questions de théorie des ensembles et de modèles non standard, pendant plusieurs années. Puis, l'inspiration s'est tarie, et le contraste entre cette recherche en logique, devenue pénible, et la recherche didactique que je commençais à découvrir, et dont j'avais l'impression qu'elle pouvait changer les choses, est devenu de plus en plus fort. J'ai basculé vers la didactique.

Ton entrée en didactique s'est faite lors du développement de la didactique en France ?

Oui. André Revuz avait été nommé à la faculté des sciences à l'automne 1968 pour y créer et diriger un des trois premiers IREM [2]. Il a fait venir à l'IREM ses anciennes élèves de Sèvres recrutées à l'université, d'abord Marie-Jeanne Perrin et Jacqueline Robinet qui étaient entrées comme agrégibles, puis moi. J'ai d'abord collaboré au cours de maîtrise « Enseignement des mathématiques » donné par Revuz aux futurs enseignants. À l'époque, mon contact avec le monde de l'enseignement secondaire se résumait à mon stage d'agreg au lycée Lakanal en Terminale avec le professeur Condamine de la célèbre collection de manuels Condamine et Vissio. J'y avais fait une leçon sur les déterminants 3x3 en terminale

1. Hélas décédé accidentellement en 2006.
2. Les deux autres étant Lyon et Strasbourg.

et il m'avait dit que j'étais visiblement douée pour l'enseignement. C'était peu comme expérience !

Puis, au milieu des années 70, Revuz nous a proposé, à Jacqueline Robinet et à moi, de rejoindre François Colmez à l'école expérimentale de l'Almont I, près de Melun. C'est là que la didactique [3] a réellement commencé pour moi. Le contexte était vraiment exceptionnel. Nous avions toute liberté pour organiser l'enseignement. La seule condition était que nos élèves apprennent autant que les autres. Les enseignants avaient du temps pour travailler avec nous car il y avait plus d'enseignants que de classes, comme à l'école Michelet, à Bordeaux, où travaillait Guy Brousseau, le fondateur avec Gérard Vergnaud de la recherche didactique en France. Colmez était son ami et nous avons ainsi pu exploiter des situations issues de ses recherches.

J'ai eu alors l'impression que la recherche en didactique pouvait changer l'enseignement des mathématiques. Dans ces classes expérimentales, il n'y avait pas d'élèves en échec en maths. Au cours élémentaire dont nous nous occupions avec Jacqueline, ils faisaient de la logique avec des boitiers électriques que nous fabriquait mon mari, à l'IUT de Cachan, étudiaient des pavages d'Escher, des transformations géométriques, et faisaient même un peu de probabilités. On se permettait plein de choses. Les élèves rencontraient de belles mathématiques, pas des mathématiques formelles, de vrais problèmes. On avait le temps d'observer, de se poser des questions, de réfléchir, d'analyser les productions, de piloter et de réguler cet enseignement avec les enseignants. C'étaient des enseignants experts, motivés, et qui partageaient notre vision.

Et il y avait aussi le contact avec Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin, qui travaillaient à l'école de Montrouge.

Sans les IREM, l'école Michelet de Talence, le COREM [4]..., le développement de la didactique en France n'aurait pas été le même. Le rôle des IREM a été essentiel pour que la didactique se développe au contact des classes. Ce n'était pas une science de laboratoire.

La didactique est une discipline scientifique, comment a-t-elle émergé ?

En France, les 3 premiers DEA ont été créés en 1975, à Paris, Bordeaux et Strasbourg, mais la recherche était alors naissante. Brousseau, à Bordeaux, voulait fonder la didactique comme science et ses cours de DEA ont participé à l'institutionnalisation. Un bond a été fait avec la création du séminaire national en 78, de l'école d'été et de la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* en 80. Au séminaire national, les discussions scientifiques entre Brousseau et Vergnaud, c'était épique... Et en même temps, il y avait cette impression de participer à une aventure commune. Les scientifiques n'ont pas tous la chance de vivre un tel moment où un champ émerge, où l'on a l'impression de participer à un projet collectif qui nous dépasse.

À l'international, c'est aussi dans les années 70 que la didactique a vraiment émergé comme un champ de recherche, avec notamment la création de la revue *Educational Studies in Mathematics* en 1969.

À ce moment-là, au niveau international, il y avait deux organismes différents plus ou moins concurrents...

Plus ou moins. En 1950, la CIEAEM [5] a été créée. Ses membres voulaient réfléchir à l'évolution nécessaire à leurs yeux de l'enseignement des mathématiques, et aller plus loin que le travail de l'ICMI à l'époque. Parmi les fondateurs, il y avait le pédagogue Caleb Gattegno, le psychologue Jean Piaget, l'épistémologue Ferdinand Gonseth, les mathématiciens Gustave Choquet, Jean Dieudonné, Hans Freudenthal, André Lichnerowicz, et aussi des enseignants comme Emma Castenuovo, Lucienne Félix et Willy Servais. Guy Brousseau y a été introduit par Lucienne Félix à qui il avait soumis certains de ses travaux. C'est elle qui l'a mis en relation avec André Lichnerowicz, et cette rencontre allait jouer un rôle dans l'émergence de la théorie des situations didactiques comme Brousseau l'a expliqué dans un entretien réalisé en 2016, accessible sur le site de la CFEM. La CIEAEM existe toujours et son président actuel est Gilles Aldon. Elle a maintenant le statut d'organisation affiliée à l'ICMI, un statut possible depuis 1999.

3. Note de Michèle Artigue : le mot « didactique » vient de la *Didactica Magna*, de Comenius. Il est utilisé en Europe continentale mais pas dans le monde anglo-saxon, où *didactique* est synonyme de *dogmatisme*.

4. Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, créé par Brousseau à l'école primaire Jules Michelet à Talence.

5. Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques. `http://www.cieaem.org/?q=fr/node/20`

Quelle a été selon toi l'évolution de la perception de la didactique par les mathématiciens ?

Dès le début, des mathématiciens ont compris qu'il y avait besoin de cette recherche, qu'elle était spécifique, qu'il y avait intérêt à ce qu'elle reste proche des mathématiques, et qu'il fallait la soutenir. Ces mathématiciens étaient intéressés par les questions d'enseignement sans avoir forcément envie d'en faire leur domaine de recherche, mais ils en comprenaient l'utilité.

C'étaient ceux qui allaient déjà dans les IREM, alors ?

Oui. Il y en a eu beaucoup en France. Les IREM ont constitué un terreau favorable. Le contact a pu être ainsi maintenu avec la communauté mathématique, ce qui n'a pas été le cas dans d'autres pays. Cela dit, il y a aussi des mathématiciens qui pensent qu'on est didacticien parce qu'on n'est pas capable de faire de la recherche mathématique, et qui vous le font sentir ! J'ai été très longtemps confrontée à cela. J'ai malgré tout l'impression d'avoir eu des relations plus faciles avec les mathématiciens, ne serait-ce que parce que j'avais fait un peu de recherche mathématique. Mais convaincre de l'intérêt, de la légitimité de la recherche en didactique, du fait qu'elle puisse produire des résultats intéressants et scientifiquement valides, cela a été compliqué. Heureusement, cela a évolué !

Dans le bon sens, d'après toi ?

Oui, dans le bon sens. Dans de nombreux pays, les relations se sont pacifiées. Les gens comprennent que si l'on veut avancer, il faut mettre en synergie les compétences et les efforts de tous.

Au CNU, beaucoup de didacticiens sont dans la section 26 (maths appliquées) et les discussions y sont saines. Dans mon université, nous sommes dans une école doctorale avec historiens, épistémologues, philosophes des sciences, c'est positif aussi. C'est difficile, dans une école doctorale de mathématiques, de trouver des personnes capables d'expertiser des travaux de didactique, de voir s'ils sont originaux par rapport à l'état des connaissances, si la méthodologie utilisée respecte les critères scientifiques en vigueur dans le domaine, de juger de la profondeur des résultats... Cela ne s'improvise pas. En tout cas, la section 26 du CNU et les enseignants-chercheurs qui y représentent la didactique ont joué un rôle extrêmement important. J'en ai été membre 12 ans [6]. Et les débuts ont été durs ! Parce qu'il y a eu des discours...

... assassins ?

Oui. Il y avait l'implicite et l'explicite. Je me souviens d'un collègue disant : « Mais si on promeut les didacticiens, ils vont se reproduire comme des lapins ! ». C'était parfois dur, mais cela a été un terrain où des batailles ont été gagnées, avec le soutien des mathématiciens. Ce qui était compliqué, c'était que, pendant un temps, tous les quatre ans, à chaque renouvellement du CNU, il fallait pratiquement recommencer à zéro. Mais il y a eu dans la 26 des mathématiciens, comme Jean-Pierre Raoult, Monique Pontier et bien d'autres, des présidents successifs, qui ont été des soutiens pour une vision de la didactique telle que nous la voyions : une didactique qui reste liée aux maths, qui ne devienne pas juste dépendante des sciences de l'éducation, et qui soit un domaine de recherche spécifique.

À mon avis, il ne faut pas se contenter d'examiner cette question des relations entre matheux et didacticiens à un niveau local, mais se placer à un niveau national et international. C'est là qu'on mesure les évolutions. Localement, c'est très dépendant des personnes. Tandis qu'au niveau national et international, on voit des mouvements d'ensemble. Et on constate des évolutions convergentes, y compris dans des pays où les relations ont été longtemps très conflictuelles, comme en Amérique latine.

Qu'en est-il des didactiques des autres disciplines en France ?

Dès les années 70, à l'IREM, j'ai été en relation avec des didacticiennes de la physique, Edith Saltiel et Laurence Viennot. Puis, nous avons participé ensemble à la mise en place d'une section expérimentale de DEUG à Paris 7. Cela a motivé notre recherche commune sur les procédures différentielles et intégrales au sein du GRECO didactique du CNRS. Mais il y avait d'autres collaborations en France, avec les didacticiens de la physique, dès les années 70. Elles se sont élargies à d'autres didactiques au fil du temps. Notre équipe, le LDAR, regroupe aujourd'hui des didacticiens et didacticiennes de la physique, de la chimie, des SVT et de la géographie. Et il y a de plus en plus de contacts avec des didacticiens du français et des langues pour les questions linguistiques ou de multilinguisme. C'est un enrichissement.

Cela dit, j'ai l'impression que la didactique des maths bénéficie toujours d'un statut un peu particulier, peut-être parce que la communauté y est plus nombreuse et plus structurée institutionnellement.

6. Au départ c'était la section 18. C'est devenu la 26 par la suite.

Parle-nous de tes plus belles rencontres, celles qui ont changé quelque chose pour toi.

Il y en a tellement… Si on parle de mathématiciens par rapport à la didactique, il y a d'abord André Revuz. C'est grâce à lui que je suis devenue didacticienne. J'ai toujours admiré sa passion pour l'enseignement des mathématiques. À l'ICMI, j'ai fait de très belles rencontres, en premier lieu, Hyman Bass et Bernard Hodgson, qui étaient président et secrétaire-général les deux mandats où j'ai été vice-présidente. J'ai beaucoup d'admiration pour Hyman Bass. Lorsque nous avons été élus au bureau exécutif d'ICMI, en 1998, c'était le clash entre ICMI et l'IMU, qui avait refusé le programme proposé par ICMI pour le congrès international des mathématiciens à Berlin. Comme il l'explique dans la lettre de l'ICMI de juillet 2020 [7], Hyman Bass ne connaissait que très peu l'ICMI quand on lui a proposé d'en prendre la présidence. Il a trouvé anormal que la présidence de l'ICMI soit imposée de l'extérieur (par l'IMU) au lieu d'être décidée par les personnes concernées, et que le président soit toujours un mathématicien n'ayant pas d'autre rapport avec la didactique que l'intérêt qu'il portait aux questions éducatives. Il a tout de même accepté la proposition, mais avec l'idée qu'il fallait absolument que les choses changent. Et effectivement, cela a bougé en huit ans, grâce aux efforts de part et d'autre. Au fil de ces années, j'ai pu apprécier la force de l'engagement d'Hyman Bass, sa finesse, ses talents de négociateur. Finalement, nous avons eu gain de cause. L'IMU a accepté que le comité exécutif d'ICMI soit élu par l'assemblée générale d'ICMI, sur la base d'un comité de nomination dans lequel l'IMU serait bien sûr représentée. Hyman Bass souhaitait aussi qu'un didacticien lui succède. Mais il prévoyait que ce ne serait pas facile de l'emporter à l'AG de l'IMU en 2006, vu les préventions de nombreux mathématiciens vis-à-vis de la didactique. J'étais pour lui l'option la moins risquée. Et c'est ainsi que je suis devenue le dernier président de l'ICMI élu par l'AG de l'IMU, mais aussi la première femme et didacticienne.

Il y aurait bien d'autres rencontres à citer au-delà de ces trois mathématiciens, et notamment toutes celles que j'ai eues avec des didacticiens de pays en développement, en Amérique latine comme en Afrique, et qui ont profondément changé ma vision du monde.

Que dis-tu aujourd'hui à un jeune qui veut faire de la didactique ?

D'abord, je lui demande pourquoi. Parce que c'est important de voir comment il se représente la didactique, quelles sont ses motivations. Il n'y a pas de réponse uniforme. Si j'ai l'impression que la personne se fait une idée un peu fausse de la didactique, j'essaierai de rectifier le tir pour qu'elle fasse son choix en connaissance de cause. Après, je n'ai aucune raison de décourager, au contraire. Il y a énormément de questions ouvertes, avec de vrais problèmes à résoudre. On peut faire de la belle recherche et de la recherche utile. Et puis, il y a des débouchés !

En même temps, je soulignerai que c'est une recherche qui a un rôle social à jouer, et pas juste une fonction de connaissance fondamentale. Pour quelqu'un qui choisit ce champ, cette question de responsabilité sociale, d'engagement social, me semble importante.

Si je te dis « Je veux faire de la didactique parce que je suis convaincu(e) que cela va contribuer à améliorer de façon significative l'enseignement des maths », que réponds-tu ? C'est ce que tu pensais, toi, au départ ?

Bien sûr, c'est l'une de mes motivations, encore aujourd'hui. Mais j'ai assez vite compris que ce serait plus difficile que je ne le pensais au début.

As-tu l'impression que l'enseignement des maths aujourd'hui est en meilleur état que ce qu'il était avant ?

Je dirais que l'enseignement des maths bouge avec les sociétés. On connaît aujourd'hui beaucoup plus de choses sur son fonctionnement. Pour ce qui est de le changer, les didacticiens peuvent y contribuer, mais ne peuvent absolument pas le faire seuls. Penser, quand tu es didacticien, que tu vas changer les choses, c'est une vision fausse. Tu peux apporter des connaissances qui, si elles sont mises en synergie avec d'autres, si on arrive à trouver les moyens d'agir, de façon cohérente et dans la durée, peuvent effectivement changer les choses.

Il y a des résultats de la recherche didactique. On peut éprouver chacun, individuellement, le pouvoir de ces connaissances. Moi, je l'éprouve, par exemple, dans mes rapports avec mes petits-enfants. Quand l'un de mes petits-fils avait 4 ans, ses parents ont été convoqués dans son école maternelle. On leur a dit qu'il aurait des problèmes en

7. `https://www.mathunion.org/icmi/icmi-news-july-2020#on-page-9`

maths plus tard parce qu'il n'arrivait pas à réciter la liste des nombres jusqu'à 10. J'étais horrifiée! J'ai utilisé mes connaissances didactiques pour l'aider, lui donner confiance en lui et, au CP, dès qu'il s'est agi de calculer, de s'appuyer sur la numération, tout a changé. Depuis, il est très bon en mathématiques. Quand j'ai eu la médaille Klein, un jour, il est allé à une soirée pyjama chez un copain et il a dit à ses parents : « Vous savez, ma grand-mère a eu un super prix. » On lui a demandé pourquoi et il a répondu : « Tu lui donnes un nul en maths, il passe quelques jours chez elle et devient un génie. » Cela, un didacticien peut l'éprouver dans sa vie. Il ne pourra pas forcément changer le système, parce que pour cela, il faut des appuis. Il peut arriver à changer des choses, puis tomber à un moment sur un ministre qui va détruire le travail de plusieurs années et il faudra recommencer.

Aujourd'hui, comment enseigner les nombres, on sait; comment enseigner l'algèbre, on sait à peu près. C'est dommage que le système n'en profite pas plus.

Tu dis : « On sait ». Mais est-ce qu'on sait vraiment?

On sait, oui. Il n'y a pas une façon de faire unique. Mais on connaît des stratégies efficaces. On connaît les obstacles et les moyens de les surmonter. Donc, oui, on sait des choses. On peut penser que, petit à petit, cette connaissance va diffuser à travers la formation initiale et continue des enseignants, et que les conditions institutionnelles dans l'enseignement permettront de l'exploiter. Mais ce n'est pas juste si simple et nous ne sommes sans doute pas assez nombreux.

Il faut former les enseignants qui auront à exploiter ces connaissances dans des contextes tous différents, et avec des contraintes qui ne sont pas celles des expérimentations des chercheurs. Il faut que les conditions le permettent. La formation des professeurs d'écoles, par exemple, est très insatisfaisante. Et plus généralement, nous savons tous bien que le métier d'enseignant est de plus en plus difficile, dévalorisé, que les enseignants sont soumis à un flux incessant de réformes dont il est difficile de penser qu'elles vont améliorer l'enseignement des mathématiques, aider le travail des enseignants, améliorer leur formation. Par rapport à cela, nous didacticiens nous sentons souvent impuissants.

Mais on ne peut pas regarder l'avenir de la recherche didactique juste à travers ce qui se passe en France. La didactique se développe partout dans le monde. Il y a de l'accumulation de connaissances. Bien sûr, la capitalisation des connaissances n'est pas facile, et rendre ces connaissances pratiquement efficaces, c'est encore plus difficile. C'est aussi une des responsabilités des didacticiens, et elle nécessite des travaux spécifiques, insuffisamment développés et valorisés. Il ne suffit pas de raconter ce que l'on sait pour que cela puisse servir à d'autres.

Qu'a représenté la médaille Felix Klein pour toi? Comment as-tu reçu cela?

C'est un honneur personnel. J'ai été bien sûr très fière de la recevoir. Mais pour moi et je l'ai dit quand je l'ai reçue c'était une médaille que je partageais avec toute une communauté, celle dans laquelle j'ai grandi et à laquelle j'ai contribué.

En plus, ce ne sont pas seulement mes résultats de recherche qui m'ont valu cette médaille. Elle m'a aussi été donnée pour mon action plus générale au service de la didactique, au service de l'enseignement. Nous sommes trois Français à avoir eu une médaille ICMI, Guy Brousseau, Yves Chevallard et moi; nous avons tous les trois des profils très différents, des apports très différents.

Parlons de théories didactiques. On sait qu'il y en a beaucoup (même si on ne saisit pas toujours les nuances entre elles...). N'y aurait-il pas pu avoir une « théorie Artigue » comme celles de Brousseau, Chevallard, Vergnaud... ?

Il y a des chercheurs qui sont effectivement créateurs de théories et approfondissent leur construction au fil de décennies de travail. Je ne fonctionne pas ainsi. Quand je m'attaque à une question, j'essaie d'avoir des outils qui me permettent d'y répondre. Et, ces outils, souvent, je ne les trouve pas dans une seule théorie.

N'y a-t-il pas une théorie avec laquelle tu as été nourrie plus particulièrement « quand tu étais petite » en didactique?

Si, bien sûr, comme toutes les personnes de ma génération qui ont grandi en France – ce serait autre chose ailleurs – j'ai démarré avec la théorie des situations didactiques de Brousseau. En même temps j'étais très proche de Régine Douady qui introduisait d'autres concepts comme la dialectique outil-objet et les jeux de cadres. Cela résonnait avec ma propre pratique mathématique. Ce qui me plaisait dans ces approches théoriques, c'était que les mathématiques y étaient prises au sérieux. Il y avait aussi le fait que c'étaient des approches systémiques; on ne se concentrait pas juste sur l'élève, on essayait de comprendre le fonctionnement des systèmes didactiques.

Par ailleurs, j'avais l'occasion de discuter de maths avec Adrien Douady qui venait grimper avec nous le dimanche. Il m'a initiée à l'étude qualitative des équations différentielles et aux systèmes dynamiques. Avec sa sœur Véronique Gautheron à l'irem, nous avons réalisé des tracés avec une table traçante, puis écrit un livre. C'est ce qui a motivé ensuite ma recherche didactique dans ce domaine à Lille 1 avec Marc Rogalski et ses collègues. Plus globalement, voir les systèmes didactiques comme des systèmes dynamiques non linéaires, m'interroger sur les niveaux de régularités possibles, cela a nourri ma recherche plus théorique sur la reproductibilité des situations didactiques, un lien entre la didactique et les maths.

J'ai puisé dans les approches théoriques de Brousseau, de Chevallard, de manière pragmatique, mais j'ai moins utilisé les travaux de Gérard Vergnaud. La théorie anthropologique de Chevallard enrichissait la vision systémique de la théorie des situations en orientant le regard plus largement vers les institutions, la circulation des connaissances entre elles. Elle mettait bien l'accent sur la relativité des rapports institutionnels au savoir. Savoir ici, ce n'est pas la même chose que savoir là, même s'il s'agit des mêmes notions. J'ai vraiment compris son potentiel quand j'ai encadré la thèse de Brigitte Grugeon, sur les enseignements de transition entre lycée professionnel et lycée technologique. C'était un grand pas en avant d'un point de vue didactique. On ne s'interrogeait plus seulement sur les difficultés des élèves à résoudre des équations. On regardait comment le lycée professionnel avait façonné leur rapport à l'algèbre et on comprenait à quel point le nouveau rapport institutionnel était différent, sans que ces différences soient prises en compte. Cela a permis à Brigitte d'élaborer une nouvelle stratégie didactique et de faire réussir ces élèves qui perdaient rapidement confiance en eux et échouaient massivement.

À la même époque, le début des années 90, j'ai été sollicitée par le ministère pour accompagner un groupe d'enseignants experts de l'usage de logiciels de calcul formel, chargé d'envisager comment ces logiciels pouvaient aider les apprentissages mathématiques. J'ai découvert à cette occasion les travaux en ergonomie cognitive de Pierre Rabardel qui avait fait sa thèse avec Vergnaud et collaborait déjà avec des didacticiens. Je me suis dit que si j'arrivais à combiner ces perspectives avec ce qui faisait la force de la didactique que je connaissais, à savoir ses perspectives systémiques et institutionnelles, j'allais pouvoir avancer dans la compréhension des questions d'intégration des outils technologiques dans l'enseignement des maths. Et, effectivement, cela a permis d'avancer ; de comprendre les réticences des enseignants ; de révéler des obstacles ; de se rendre compte que le discours dominant, affirmant que le recours aux logiciels permettait de se débarrasser du travail technique pour se concentrer sur une activité conceptuelle et stratégique, était vraiment faux et contre-productif. C'est devenu ce qui est connu maintenant comme l'approche instrumentale. Mais comme je l'ai expliqué dans les modules vidéo du projet amor de l'icmi, cela a été une élaboration collective, avec Jean-Baptiste Lagrange, Luc Trouche, et bien d'autres chercheurs, en France et aussi à l'étranger car cette approche s'est rapidement diffusée. La diversité théorique ne me gêne pas, mais l'explosion de théories, oui. Et aussi le fait qu'on valorise à ce point le travail théorique par rapport au travail empirique. C'est particulièrement vrai en France. On a aussi besoin de travaux qui reproduisent des études didactiques déjà menées pour consolider les résultats, pour éprouver leur résistance à des changements de contextes, et des travaux pour mieux comprendre comment rendre les résultats des recherches utiles aux enseignants.

À part cela, depuis presque quinze ans, j'ai travaillé dans ce qu'on appelle le networking, pour bâtir des connexions entre les cadres théoriques, pour faciliter la communication entre les chercheurs. Si l'on veut capitaliser les connaissances, il faut des discours partagés. Et c'est aussi important pour la communication avec ceux qui ne sont pas chercheurs, pour que ces connaissances puissent être utilisées.

Parlons-en, justement, de ce « jargon » des didacticiens.

Je pense qu'il faut distinguer deux choses. Au sein d'une communauté scientifique, il y a toujours un langage technique. Les didacticiens en ont besoin, comme les matheux, les physiciens... Il faut avoir des mots pour parler des choses, et un mot est un condensé d'idées et de pratiques. C'est Jean-Pierre Kahane qui a fait un très bel exposé pour expliquer tout ce que condensait la phrase de trois mots : « L^2 est complet ». C'est vrai aussi en didactique. Les expressions *contrat didactique, ingénierie didactique*, sont des condensés. Et j'ai besoin de tels mots pour parler avec mes pairs sans être obligée d'utiliser sans arrêt des périphrases qui sont beaucoup moins précises que ces termes techniques.

Mais il faut élaborer d'autres niveaux de discours, pour l'extérieur de la communauté, comme le font les physiciens, les biologistes, et certains matheux. Il n'y a aucune raison que les didacticiens ne le fassent pas, et ils s'y essaient d'ailleurs dans les publications d'interface, pour les enseignants et les formateurs.

Et pour communiquer au niveau international ?

Au niveau international, il y a des efforts à faire car la didactique n'est pas un champ unifié. Il coexiste une multiplicité d'approches, avec leur terminologie propre, et bien que les échanges se soient multipliés, la communication ne va pas de soi. Depuis une quinzaine d'années, comme je l'ai dit, je travaille avec d'autres chercheurs européens pour bâtir des connexions entre approches, ce que nous appelons le networking. Par ailleurs, il y a cinq ans, avec trois collègues du LDAR et deux animateurs de l'IREM de Poitiers, je me suis lancée dans le projet international *Lexicon*, lancé par David Clarke, en Australie. Dix pays y participent. Il s'agit d'identifier le vocabulaire pédagogico-didactique raisonnablement partagé par des enseignants de collège expérimentés pour décrire ce qui se passe dans une classe de mathématiques, dans chacun de ces pays, puis de comparer les lexiques correspondants. Ce n'est pas le vocabulaire des chercheurs, mais si on regarde la France, il y a quand même des mots du vocabulaire de la recherche qui se sont propagés, par la formation, par les IREM, les publications d'interface. C'est un projet fascinant par la diversité qu'il met en évidence, et ce qu'elle nous révèle sur chaque contexte, chaque langue. Un premier livre va paraître en mai 2021 chez Routledge avec les dix lexiques, et pour chacun un chapitre expliquant sa réalisation et les analyses associées.

Le mot que j'aime le plus, c'est le mot chinois qui dit « rajouter l'œil au dragon » ! C'est quand le prof, à la fin d'un exo ou autre, rajoute une petite touche dans ses commentaires et qu'avec cela tout le paysage s'éclaire.

Un mot sur Femmes et maths ?

Cette association fait un super travail. Les mathématiciennes en ont besoin. Tout le monde en a besoin. C'est une chance pour nous, en France, de pouvoir compter sur cette association, sur des initiatives comme les journées *Filles et Mathématiques, une équation lumineuse*. Je me sens tout à fait en phase avec l'esprit de *Femmes et Maths*, d'ailleurs j'en suis membre depuis longtemps. Et, même si je ne vais aux réunions qu'une fois de temps en temps, je suis ce qu'elles font, en lisant la lettre d'informations que l'association publie régulièrement, lors des échanges à la CFEM, et je suis de tout cœur avec elles.

Plus largement, te reconnais-tu dans les mouvements féministes actuels ? Les protestations du genre « Metoo » ? As-tu l'impression qu'au sein des milieux éducatifs, les violences faites aux femmes sont moindres ou penses-tu que c'est pareil ?

J'ai sans doute toujours vécu dans un monde un peu misogyne, mais je n'en ai pas souffert. J'ai eu d'autres problèmes à affronter. Je ne me suis pas sentie dépréciée par rapport à des collègues hommes qui faisaient la même chose que moi. Mais je me sens solidaire de toutes les femmes qui subissent discriminations et violences, et je sais qu'il en existe beaucoup. Comme je me sens solidaire de tous ceux qui subissent des violences dans la société. Cela existe aussi dans l'éducation et il faut absolument le dénoncer. C'est bien qu'il y ait des cellules qui se mettent en place, qu'on soit attentifs systématiquement à cela, que les victimes puissent s'exprimer et soient soutenues. Les réseaux sociaux ont bien montré leur utilité dans ce domaine, mais les dynamiques incontrôlées qu'ils génèrent m'inquiètent quand même.

La montagne, une passion pour toi ?

J'ai commencé à faire du ski vers l'âge de 10 ans. La montagne, je l'ai commencée beaucoup plus tard, quand ma sœur aînée est devenue professeur au lycée climatique d'Argelès-Gazost. Mais surtout quand je suis rentrée à l'ÉNS. À Ulm, Gérard Viennot connaissait très bien les Pyrénées où il allait depuis longtemps. C'est avec lui que mon mari et moi avons commencé à faire sérieusement de la montagne et de l'escalade. Après, c'est devenu une passion. Quand on fait une nouvelle voie, c'est un peu comme quand on démontre un théorème, il y a de l'excitation, de l'adrénaline. La montagne, c'est devenu très important pour moi, et cela l'est toujours. Je vais m'y ressourcer et si je peux passer une journée seule à randonner dans des coins sauvages, j'adore cela.

Mathématicienne et didacticienne, Michèle Artigue est née le 31 août 1946 à Bordères-sur-l'Échez dans les Hautes-Pyrénées. Ancienne élève de l'École normale supérieure de jeunes filles (Sèvres), elle est recrutée à la Faculté des sciences de Paris en 1969. Elle intègre l'université Paris 7 à sa création, devient professeur des universités à l'iufm de Reims en 1991 avant de regagner l'université Paris 7 en 1999 où elle est professeur émérite depuis 2010 et chercheure associée au Laboratoire de Didactique André Revuz. Titulaire d'un doctorat de troisième cycle en logique mathématique (dir. Daniel Lacombe) et d'un doctorat d'état en didactique des mathématiques (dir. André Revuz), ses travaux de recherche sont internationalement reconnus.

Distinctions

- Médaille Felix Klein attribuée par l'icmi (*International Commission on Mathematical Instruction*), sous-commission de l'imu (*International Mathematical Union*), 2013.
- Docteur Honoris Causa de l'université Nationale de San Martin en Argentine (2013).
- Médaille Luis Santaló de l'iacme (*Inter American Committee on Mathematics Education*), 2014.
- Chevalier de l'ordre national de la Légion d'honneur, 2015.

L'importance des questions éthiques en mathématiques

Ce texte est la traduction par Christian Kassel d'un article paru dans le n° 484 (septembre 2019) de la *Newsletter of the London Mathematical Society*.

• M. Chiodo
• T. Clifton

L'utilité des mathématiques tient aux applications que nous pouvons leur trouver. Leur impact sur notre monde pose néanmoins des questions éthiques. Plus que jamais il nous faut, nous mathématiciens, en être conscients car les mathématiques, et nos étudiants, sont en train de transformer la société. Dans ce premier article nous expliquons pourquoi il convient de réfléchir aux aspects éthiques de nos activités mathématiques.

Les mathématiques et le monde extérieur

Notre science est l'une des plus abstraites de la connaissance humaine : les mathématiques sont la poursuite de la vérité absolue et font indiscutablement autorité. Les vérités absolues ont-elles un sens ? Si $2 + 3 = 5$ est une vérité absolue, que signifie-t-elle vraiment ? Son sens et son utilité apparaissent seulement lorsque ceux qui en comprennent l'énoncé le relient au monde physique. Ce sont les personnes formées aux mathématiques qui les interprètent et les appliquent au monde réel, en leur donnant sens et utilité.

Les mathématiques sont un des outils les plus utiles et les plus raffinés que l'on ait jamais développés. Un objet utile peut toutefois s'avérer dangereux, soit par un usage abusif, soit par l'ignorance des risques. Illustrons notre propos à l'aide d'un simple couteau ; pour nous en servir de manière responsable, il nous faut apprendre à connaître ses dangers potentiels, auprès de ceux notamment qui nous ont initiés à son usage. Si un outil aussi primitif qu'un couteau est à la fois utile et dangereux, que dire des mathématiques ? Ces dernières ont bien plus d'applications et présentent de ce fait bien plus de risques. Pourtant, on nous met peu en garde contre eux, alors que des disciplines comme le droit, la médecine, les sciences de l'ingénieur ont depuis longtemps réfléchi aux dangers inhérents à leur domaine. En tant que mathématiciens nous devrions, nous aussi, y réfléchir, sans quoi notre travail pourrait avoir des effets pernicieux. Mais quels dangers les mathématiques peuvent-elles présenter ?

Dans cet article nous porterons une attention particulière aux mathématiques fondamentales bien que nos arguments s'appliquent également aux mathématiques appliquées, à la statistique et à l'informatique. Certains d'entre nous sont motivés par la beauté et les qualités intrinsèques des mathématiques plutôt que par leurs applications à la science et à l'industrie. C'est comme si nous pratiquions une forme d'art abstrait, éloigné du monde réel et apprécié d'un petit nombre à sa juste valeur. Pourtant le gouvernement et l'industrie rémunèrent notre travail ; nous nous doutons bien qu'ils ne le font pas simplement pour stimuler notre esprit. Si notre travail était totalement abstrait – une forme d'art, en quelque sorte –, ne devrions-nous pas chercher plutôt des financements auprès de ceux qui financent l'art abstrait ? En fait, ce qu'apprécient les institutions scientifiques et l'industrie, ce ne sont pas seulement nos résultats mathématiques, mais aussi les compétences des mathématiciens que nous formons. Nos mathématiques ont un impact positif et nos étudiants, une fois formés, sont opérationnels. Si notre travail est financé pour son apport manifeste, il nous faut chercher à savoir précisément pourquoi.

La communauté mathématique a eu de nombreuses discussions déjà sur des questions éthiques. En général ces discussions ne portent que sur des problèmes internes à la communauté. Nous les connaissons bien : comment améliorer la diversité et l'inclusion, comment développer l'intérêt pour les mathématiques, comment régler les cas de plagiat et réagir aux manquements en matière de publications ? Ce sont des questions importantes et chaque discipline s'occupe de questions éthiques *intrinsèques* de ce type. Ce n'est pas le propos de notre article. Les mathématiques font partie de ce petit nombre de disciplines qui oublient de s'attaquer aux questions éthiques *extrinsèques*, celles qui concernent l'impact de notre science sur la société. Ceci inclut les implications éthiques des applications des mathématiques et de notre travail. C'est la conscience de ces questions éthiques extrinsèques que nous essayons d'éveiller. Nous pensons que les mathématiciens, loin de le faire délibérément, ont du mal à accepter l'existence de questions éthiques extrinsèques. En effet, si la plupart de ceux que nous avons rencontrés refusent d'agir de manière non éthique, bien peu admettent que l'activité mathématique *puisse* avoir des effets discutables.

Études de cas

Étant entendu que les mathématiques sont utiles en raison de leurs applications et que ces dernières posent des questions éthiques extrinsèques, examinons deux exemples concrets : la crise financière mondiale de 2007-2008 et le ciblage en marketing.

Cette crise financière est un événement qui a fortement marqué l'économie mondiale moderne. Ses répercussions se sont fait sentir dans le monde entier et beaucoup de gens ont vu leur niveau de vie décliner. Bien que les causes de la crise soient complexes, il y a un consensus sur le fait que les mathématiques y ont joué un rôle décisif. L'utilisation abusive de titres de créance collatéralisés [1] (TCC) a été un facteur important de la crise. À l'origine, des mathématiciens ont réuni un grand nombre d'actifs rapportant des intérêts (principalement des prêts hypothécaires) pour les débiter et les écouler en produits rémunérateurs. Du point de vue mathématique, ces produits représentaient un risque global moindre, donc une valeur plus élevée que les actifs d'origine. Ils ont été échangés sans contrôle. Leur fabrication repose sur des mathématiques hautement non triviales, nécessitant calcul stochastique, équations différentielles, etc. Des chercheurs ont déduit des travaux de Black et Scholes, plus tard de Li, un modèle et une formule de tarification pour les TCC. Bien que des connaissances approfondies en mathématiques aient été nécessaires pour construire ces modèles, une compréhension plus basique (de niveau licence) suffisait pour les appliquer et les échanger. En conséquence, les utilisateurs de ces modèles ont pu en méconnaître les limites et le fonctionnement interne. La plupart des utilisateurs s'en contentèrent car les modèles leur paraissaient validés mathématiquement, de manière exacte et indiscutable. Malheureusement, certaines des hypothèses n'étaient pas les bonnes. C'est ainsi que le modèle supposait l'absence de dépendance de queue dans le risque de crédit des actifs ; pourtant cette dépendance existe, par exemple quand deux maisons hypothéquées se trouvent dans la même rue. Au bout du compte on n'a pas évalué correctement les risques, et lorsque le prix des logements a baissé, il en est résulté une dépréciation de 700 milliards de dollars de TCC entre 2007 et 2008. On connaît la suite.

Notre second exemple est la publicité ciblée. Les annonces publicitaires ont toujours été conçues pour attirer l'œil du public. Cependant, depuis que l'on dispose d'appareils mobiles reliés à internet et de comptes sur les réseaux sociaux, il est possible de cibler les annonces au niveau individuel. On peut de nos jours adapter celles-ci à des données démographiques spécifiques, et l'on peut même sélectionner un groupe de consommateurs qui *ne verront pas* une publicité donnée. Ceci engendre des campagnes publicitaires sélectives, contenant des annonces contradictoires et indétectables. Bref, la publicité peut désormais manipuler les individus, ce qui est particulièrement dangereux lorsqu'il s'agit de publicité politique. Les grandes bases de données obtenues à partir des réseaux sociaux permettent de reconstruire le profil politique d'un individu. L'outil utilisé est essentiellement l'apprentissage automatique (*machine learning*). Là ce sont des gens avec une formation mathématique qui sont à l'œuvre [1]. Des annonces publicitaires, neutres en apparence, peuvent être trompeuses. On peut par exemple envoyer une publicité du type « voter est important ; n'oubliez pas d'aller voter » uniquement aux sympathisants présumés d'un parti donné.

1. En anglais, *collateralised debt obligations*. (N.D.T.).

Quelle que soit la stratégie adoptée, ce type de publicité est de plus en plus répandu ; certains estiment que cette tactique a pu être utilisée pour tenter de fausser l'élection présidentielle américaine de 2016 et le référendum sur le retrait du Royaume-Uni de l'Union européenne. C'est bien nous les mathématiciens qui rendons ces abus possibles. *Cambridge Analytica*, l'une des entreprises soupçonnées d'être impliquées dans ce genre de publicité, disposait d'une petite équipe d'une centaine de spécialistes des données [3], dont des mathématiciens. De quelque bord politique que l'on soit, on peut s'accorder sur le fait que ce genre de travail, bénéficiant de l'aide de mathématiciens, est malhonnête et dangereux. Ce sont bien des mathématiciens qui participent à ce ciblage et le mettent en œuvre.

L'impact des mathématiciens

Plus que jamais le travail des mathématiciens a des conséquences inédites, immédiates et de grande portée grâce à internet et aux capacités de calcul rapide facilement disponibles. Un mathématicien travaillant dans une grande entreprise de technologie peut modifier un algorithme, puis le déployer presque immédiatement sur une base d'utilisateurs pouvant compter plusieurs milliards de personnes. Même à petite échelle, on voit que l'action d'un petit nombre de mathématiciens aux ressources limitées peut avoir un impact mondial considérable ; la publicité ciblée en fournit un exemple.

Si nous modélisons un système physique comme la gravité, notre modèle est réfutable. Si notre modèle ne traduit pas exactement le système physique, par exemple pour le lancement d'une fusée, il échouera. Nous saurons que notre modèle est bon si notre fusée arrive à se poser sur la Lune et à revenir sur la Terre. La modélisation d'un système financier est plus difficile à réaliser car l'utilisation même du modèle affecte le système. Si un algorithme de tarification est utilisé à grande échelle pour acheter ou vendre un produit, il influence le marché du produit en question. Comment un modèle peut-il modéliser son propre impact ?

Si nous modélisons le comportement futur d'un individu poursuivi par la justice, pourrons-nous déterminer s'il risque ou non de récidiver dans les vingt-quatre mois ? Pouvons-nous nous appuyer sur cette modélisation pour décider de la manière de poursuivre cet individu et de fixer sa peine [2] ? Si nous prédisons qu'il récidivera dans les vingt-quatre mois et qu'il ne le fait pas (après avoir été libéré ou acquitté), nous pouvons vérifier si notre algorithme est correct. Si au contraire il a été condamné à vingt-cinq mois de prison après un processus judiciaire fondé sur notre prédiction, comment vérifier la validité de notre algorithme ? Nous avons là un problème éthique sérieux : nous appliquons un raisonnement mathématique à des personnes pour prendre des décisions qui ont un impact sur leur vie, et nous ne pourrons souvent pas savoir si les décisions prises étaient appropriées. Est-il moral d'utiliser ainsi les mathématiques sans une réflexion approfondie ?

Nous sommes face à un dilemme éthique. Devons-nous nous contenter d'affirmations réfutables, ou pouvons-nous risquer des affirmations, des décisions et des actions impossibles à réfuter ? Dans ce dernier cas nous aurons manifestement perdu toute certitude mathématique, ce qui nous impose d'ouvrir notre réflexion et notre formation aux questions sociales.

Nos inquiétudes pour le futur

Que se profile-t-il à l'horizon des mathématiciens ? Suffira-t-il de consulter la liste de cas déjà répertoriés comme ci-dessus pour en éviter les écueils ? Malheureusement non ; chaque jour de nouvelles avancées en mathématiques engendrent de nouveaux problèmes éthiques. Prenons l'exemple de l'évaluation des risques-clients [3]. On voit émerger des entreprises sans accès aux ensembles de données standard (documents financiers, historique de paiement des factures, etc.) dont disposent les agences d'évaluation des risques-clients reconnues. Faute de mieux, ces nouvelles agences utilisent des profils de réseaux sociaux, allant parfois jusqu'à solliciter un accès complet aux comptes hébergés sur les réseaux sociaux [4]. La plupart des personnes concernées refuseront ces demandes d'accès, mais pour certains l'obtention d'un crédit est vitale. Ce nouveau type d'agence fouille les réseaux sociaux utilisés par le candidat au crédit, recherchant des opérations qui

2. La police de Durham a développé un outil d'évaluation des risques délictueux (The Harm Assessment Risk Tool) qui utilise l'apprentissage par arbre de décision. Il est employé pour décider si l'on peut proposer à un prévenu d'intégrer le programme *Checkpoint* (`tinyurl.com/y4vxrd77`) qui vise à réduire la récidive et offre une alternative aux poursuites pénales.

3. En anglais, *credit scoring*. (N.D.T.).

selon elles reflètent sa solvabilité. Cette intrusion peut inclure les sites visités par le candidat, ses heures de sommeil, la « qualité » de ses amis, etc. Une telle approche n'est pas réfutable, n'est pas réglementée et elle peut très bien causer un préjudice social, car l'octroi de crédit est un des mécanismes permettant la mobilité au sein de la société. Si un tel processus, rendu possible par des experts formés en mathématiques, peut avoir un impact négatif, qui en sera tenu responsable ? En fin de compte, il nous faut vivre dans le monde que nous et nos étudiants créons, et dans lequel nous pourrions devoir rendre des comptes.

Les questions éthiques concernent-elles le monde universitaire ?

Voyons si les mathématiciens travaillant dans les universités sont concernés par les problèmes éthiques. Prenons un mathématicien « pur », disons un théoricien des nombres, et supposons qu'il développe un algorithme de factorisation rapide des entiers. Doit-il le publier ? Si oui, quand, où et comment ? Si non, que doit-il faire ? Nous avons posé ces questions à de nombreux mathématiciens. La réponse typique a été : « Je le rendrai immédiatement public sur arXiv. C'est mon droit de publier mon travail mathématique, quel qu'il soit. » Lorsque l'on insiste sur les conséquences de la publication d'un tel algorithme – par exemple, casser le chiffrement RSA entraînerait l'effondrement du commerce sur internet, donc de l'économie mondiale – l'un d'eux nous a répondu : « Eh bien, c'est leur faute s'ils utilisent RSA. Ce n'est pas mon problème. » Bien sûr, une divulgation responsable est un sujet compliqué qui est vivement débattu par les chercheurs en sécurité de l'information. Mais cet exemple montre bien comment les questions éthiques s'insinuent dans le monde du chercheur en mathématiques fondamentales.

Si un domaine aussi abstrait que la théorie des nombres n'est pas « à l'abri » de considérations éthiques, qu'en sera-t-il des autres ? Un mathématicien « pur » peut-il échapper aux problèmes éthiques ? Et un statisticien, un mathématicien appliqué ? Ces problèmes ne se posent-ils pas à tous les mathématiciens, quel que soit leur domaine ?

Pourquoi l'administration ne peut nous guider

Certains mathématiciens (à l'université ou dans l'industrie) n'étant pas directement concernés par les applications, ils pensent pouvoir ignorer les implications éthiques extrinsèques de leurs recherches. Après tout, nous ne faisons que des mathématiques, ce qui nous permet de penser que « ce n'est pas notre problème ». Cette conviction va généralement de pair avec l'idée qu'il existe des garde-fous (administration, gestionnaires, comités consultatifs, etc.) pour nous prémunir contre toute dérive non éthique de notre travail. *Nous* travaillons sur des problèmes abstraits ; *eux* s'occupent des problèmes éthiques. Mais pouvons-nous compter sur eux pour le faire efficacement ? Vont-ils vérifier notre travail pour s'assurer que son utilisation est conforme aux valeurs de la société ? Un gestionnaire aura du mal à saisir l'ensemble de notre travail mathématique et à comprendre les limites de ses applications, n'ayant par la nature même de sa fonction qu'une connaissance partielle de notre travail. Il n'y aurait d'ailleurs aucun intérêt à ce qu'un gestionnaire reproduise le travail de tous ceux dont il a la charge, et les mathématiques sont telles que celui qui n'en est pas l'auteur a peu de chances de les comprendre. Pour ces raisons, un mathématicien devrait toujours prendre en compte lui-même les implications éthiques de son activité. Il faut aussi garder à l'esprit que les gestionnaires ont d'autres objectifs que nous, davantage dictés par les priorités de leur institution que par celles de la société.

Certains gestionnaires pourraient même tenter de nous manipuler en opposant par exemple à nos objections l'argument classique : « si tu ne le fais pas, quelqu'un d'autre le fera ». À première vue, cet argument est imparable ; on peut cependant y apporter deux objections. D'une part, il n'y a pas tant de mathématiciens que cela dans le monde. Nous possédons un ensemble d'aptitudes et de compétences uniques, et il faut des années de formation pour produire un bon mathématicien. Compte tenu de la relative rareté des mathématiciens, l'argument ne tient pas la route. D'autre part, la contraposée de l'énoncé précédent est « si personne d'autre ne le fait, c'est toi qui le feras ». Ce qui sous-tend cet argument absurde est l'hypothèse implicite que la tâche demandée sera menée à son terme. Si personne ne fabrique d'arme nucléaire, est-ce à moi de le faire ? Ce qu'ici nous devrions vraiment examiner de plus près, c'est l'argument « si tu ne le fais pas, quelqu'un d'autre *pourrait* le faire ». Certes, mais il se peut que ce quelqu'un ne soit pas facile à trouver, ou n'existe pas. Le mathématicien dispose alors d'une objection pertinente. Qu'on adopte l'objection pragmatique du petit nombre de mathématiciens ou celle, logique, de la contraposée, les deux ont du sens. Certains mathématiciens vont plus loin en prenant la décision de s'asseoir à la table du pouvoir dans l'intention d'obtenir des changements positifs au niveau managerial, que ce soit dans les universités, dans l'industrie ou même en politique. Ce moyen d'action est traité en détail dans [2] sous l'appellation « le troisième niveau de l'engagement éthique ».

Pourquoi la loi ne peut nous guider

Le problème ne se réduit pas au domaine de la gestion. C'est également de la loi qu'on pourrait attendre une description claire de ce qui est acceptable ou non pour la société, donc de ce qui est éthique on non. Il n'en est rien. En effet, la loi n'est pas un système axiomatisé ; elle est interprétée par les tribunaux, non par des machines. C'est un type de système dont les rouages ne sont en général pas familiers aux mathématiciens. De plus, la loi sera toujours à la traîne du développement technologique ; nous ne pouvons pas espérer que le législateur soit en avance sur nous, d'autant que l'élaboration des lois est (délibérément) lente car elle nécessite des consultations publiques, des votes et des périodes de mise en œuvre. Prenons le cas au Royaume-Uni du Règlement général sur la protection des données [4]. Mis en route en 2011, il n'est entré en vigueur qu'en 2018, et beaucoup le considèrent déjà comme dépassé. Il se peut enfin que les législateurs n'aient pas une entière compréhension du sujet. C'est ainsi que Stephen Metcalfe, membre du *UK Science and Technology Select Committee*, a déclaré lors d'une séance de sensibilisation du public : « Une solution au biais des algorithmes est d'utiliser des algorithmes pour vérifier les algorithmes et d'utiliser des algorithmes pour vérifier les données d'apprentissage ». Pour conclure, la loi n'est pas là pour servir d'appui moral : on peut commettre des actes immoraux sans enfreindre la loi. Ainsi, on ne peut y puiser de conseils en matière éthique.

Si nous ne pouvons compter sur les gestionnaires, ni sur les législateurs, sur qui alors ? La réponse est aussi évidente que difficile à admettre : sur nous-mêmes. La seule façon d'éviter que notre travail ne soit utilisé à des fins dommageables est d'y réfléchir nous-mêmes. Personne ne peut le faire à notre place.

Une conscience éthique qui se développe en mathématiques

L'idée que les mathématiciens doivent réfléchir aux problèmes éthiques extrinsèques se répand dans la communauté. En 2018 à l'occasion d'une table ronde, le professeur Mike Giles, directeur du Département de mathématiques d'Oxford, a fait le commentaire suivant : « L'affaire *Cambridge Analytica* est intéressante du fait que si, il y a vingt ans, vous m'aviez posé la question de former les doctorants en mathématiques aux questions éthiques, j'aurais dit : "C'est hors de propos pour les mathématiciens". Aujourd'hui je suis d'un avis opposé. De même que les ingénieurs ont des cours sur ce que signifie être un ingénieur professionnel et sur les responsabilités des ingénieurs, je pense que nous les mathématiciens devons désormais réfléchir à ces questions. » Signalons aussi que *arxiv.org* est actuellement en train de réviser la rubrique *History and Overview* et d'y inclure une sous-rubrique intitulée *Ethics in Mathematics*.

Peu de mathématiciens ont entendu parler d'éthique extrinsèque au cours de leur formation. Les générations antérieures de mathématiciens ont éludé ces questions cruciales, et ce faisant n'ont pas rendu service à la société. C'est aux générations actuelles et futures de reprendre le flambeau avant qu'il ne soit trop tard.

Il a toujours fallu aux mathématiciens une ou plusieurs générations pour adopter une idée nouvelle concernant la nature des mathématiques ; songeons aux débats sur la légitimité du zéro comme nombre. Nous sommes à un point de jonction similaire. On pourrait dire « il ne sert à rien d'examiner les questions éthiques en mathématiques », mais le jour où nos étudiants seront devenus professeurs ou cadres dirigeants, ils pourraient bien dire « c'est évident, il faut réfléchir à ces questions ! » Pourquoi la communauté mathématique ne s'est-elle emparée plus tôt de ces questions ? Pourquoi des personnalités comme Gödel et Russell ne l'ont-elles fait il y a cent ans déjà ? Deux explications nous viennent à l'esprit. D'une part, les dangers étaient éloignés car

4. En anglais, *General Data Protection Regulation*. (N.D.T.)

la technologie actuelle n'existait en grande partie pas ; d'autre part, les étudiants de licence avaient des cours de philosophie dans leur formation universitaire. Il était donc moins urgent de les former à l'éthique en mathématiques en tant que telle.

Puisque l'éthique est devenue aussi importante pour les mathématiciens, il se pose la question de savoir comment l'enseigner de manière utile sans imposer de passer un diplôme de philosophie. Dans des disciplines comme le droit, la médecine et l'ingénierie on enseigne depuis longtemps aux étudiants de licence l'éthique extrinsèque relevant de leurs domaines respectifs. Dans l'article qui suit, nous chercherons à comprendre pourquoi un tel enseignement n'a pas encore été mis en place en mathématiques et comment on pourrait y remédier.

Références

[1] « Cambridge Analytica : how did it turn clicks into votes ». *The Guardian* **6** (2018). URL : https://www.theguardian.com/news/2018/may/06/cambridge-analytica-how-turn-clicks-into-votes-christopher-wylie.

[2] M. Chiodo et P. Bursill-Hall. « Four levels of ethical engagement ». *Ethics in Mathematics Discussion Papers* **1** (2018). URL : https://www.ethics.maths.cam.ac.uk/assets/dp/18_1.pdf.

[3] « Secrets of Silicon Valley : The Persuasion Machine, BBC documentary » (2017). (voir l'enregistrement à la minute 30 :17).

[4] *Systems and methods for using online social footprint for affecting lending performance and credit scoring*. US Patent 8,694,401. Avr. 2014.

Maurice Chiodo

université de Cambridge

mcc56@cam.ac.uk

Maurice Chiodo est post-doc à l'université de Cambridge. Il dirige le projet *Cambridge University Ethics in Mathematics* (ethics.maths.cam.ac.uk) et développe un programme destiné à enseigner aux mathématiciens les implications éthiques de leurs travaux.

Toby Clifton

Cambridge University Ethics in Mathematics Society

cmtc3@cam.ac.uk

Toby Clifton est diplômé en astrophysique. Il préside actuellement la *Cambridge University Ethics in Mathematics Society* (cueims.soc.srcf.net).

Les auteurs tiennent à remercier Piers Bursill-Hall et Dennis Müller pour les discussions utiles qu'ils ont eues avec eux au cours des dernières années, tout particulièrement Dennis pour les suggestions et les commentaires qu'il a faits sur les versions antérieures de l'article.

… le *Compressive Sensing*

• S. Foucart

Aux alentours de 2005, la communauté scientifique et technologique s'enflamma pour un nouveau sujet appelé *compressive sensing*[1], terme interchangeable avec *compressed sensing* et *compressive sampling*. En ce début de 2021, une recherche combinée de ces trois termes sur Google Scholar produit à peu près dix-sept mille résultats. Si cette profusion s'explique par un intérêt venu de nombreuses disciplines, il est bon de noter que le sujet possède bel et bien une origine mathématique dans les travaux fondateurs de Candès, Romberg, et Tao (par exemple [2]) et de Donoho (par exemple [5]). Une quinzaine d'années après ces travaux, il est opportun de faire un point sur la théorie développée depuis. De nombreux lecteurs ont entendu vaguement parler du *compressive sensing*, y associant sans doute les mots-clefs de parcimonie, minimisation ℓ_1, et matrices aléatoires, peut-être réduisant le sujet à (un sous-ensemble de) ces trois notions. Je vais m'atteler à en donner une description plus large, mais forcément incomplète. Les lecteurs souhaitant approfondir trouveront plus de détails dans les ouvrages [4, 6, 8] ou dans l'article [7].

Introduction

Dans cette section, nous présentons de manière informelle le problème au centre de la théorie du *compressive sensing*.

Motivation

Le principe de base du *compressive sensing* consiste à effectuer la compression des données en même tant que leur acquisition (d'où le nom). Prenons l'exemple d'un appareil photo numérique, capturant tous les pixels au déclenchement pour immédiatement compresser l'image. C'est une forme de gâchis : la théorie du *compressive sensing* justifie que l'on puisse acquérir juste les données qu'il faut. Si le principe n'est pas implémenté industriellement dans ce cas précis, il l'a été en imagerie par résonance magnétique, brandie comme la *success story* du *compressive sensing*. Le processus d'acquisition étant fastidieux (le patient ne doit pas bouger) et potentiellement dangereux, il est important de limiter le temps d'observation. Certains appareils, actuellement en service, réduisent ce temps par un facteur huit au moins. Cette réussite vient, encore une fois, du fait qu'une image est compressible, c.-à-d. qu'elle peut être décrite de manière satisfaisante avec seulement une fraction de son contenu d'information. Par exemple, une image JPEG 2000, représentée par ses coefficients en ondelettes, est compressée en éliminant une grande partie de ces coefficients pour ne garder qu'un vecteur peuplé principalement de zéros – un vecteur parcimonieux.

Le problème standard

Dans le problème ci-dessus comme dans d'autres, on s'intéresse à des objets qui peuvent être modélisés par des vecteurs $x \in \mathbb{K}^N$ de grande dimension, $\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les données sont acquises au travers d'observations linéaires, disons

$$y_i = \langle a_i, x \rangle, \qquad i \in \{1, \dots, m\}. \tag{1}$$

Ces observations peuvent s'écrire sous la forme $y = Ax$, où $a_1, \dots, a_m$ constituent les lignes d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{m \times N}$ représentant le processus d'acquisition. Le nombre m d'observations est restreint à cause, par exemple, de leur coût élevé. Est-il possible de déduire les vecteurs $x \in \mathbb{K}^N$ à partir de leurs vecteurs $y = Ax \in \mathbb{K}^m$ d'observations quand $m \ll N$? Non, bien sûr : le système linéaire $Ax = y$

1. J'utiliserai ici le terme anglophone car une traduction acceptée de *compressive sensing* en français ne semble pas exister, bien qu'« acquisition compressive » soit fidèle aux principes de base.

étant sous-déterminé, il possède une infinité de solutions. Mais si nous savons a priori que les vecteurs $x \in \mathbb{K}^N$ sont parcimonieux de niveau s, c.-à-d. que

$$\|x\|_0 = |\mathrm{support}(x)| \leqslant s,$$

où

$$\mathrm{support}(x) = \{j \in \{1, \ldots, N\} : x_j \neq 0\}, \tag{2}$$

cette information va nous permettre d'accomplir une tâche qui semblait impossible. Bref, le problème considéré dans cet article est un problème d'algèbre (presque) linéaire qui devrait trouver sa place dans une formation scientifique moderne, à savoir :

$$\text{Résoudre le système sous-determiné } y = Ax$$

$$\text{sachant que } \|x\|_0 \leqslant s. \tag{3}$$

Cela requiert évidemment $m \geqslant s$, même si le support de x était connu d'avance, ce qui n'est pas le cas. En théorie, le problème (3) peut être résolu en parcourant tous les $\binom{N}{s}$ supports de taille s, mais cette approche naïve est loin d'être pratique. Du point de vue de la complexité algorithmique, le problème (3) est même NP-difficile dans toute sa généralité. Cependant, le *compressive sensing* n'a pas pour ambition de résoudre ce problème dans toute sa généralité. En effet, un des piliers de la théorie – la possibilité de choisir des processus d'observation favorables – rend le problème abordable. En réalité, nous avons devant nous deux sous-problèmes intimement liés :

(i) Comment choisir une matrice $A \in \mathbb{K}^{m \times N}$ de sorte que l'application $x \mapsto Ax$ soit, au moins, injective sur l'ensemble

$$\Sigma_s^N := \{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_0 \leqslant s\}$$

des vecteurs parcimonieux de niveau s ?

(ii) Étant donnée une telle matrice A, comment reconstruire de manière efficace les vecteurs $x \in \Sigma_s^N$ à partir des observations $y = Ax \in \mathbb{K}^m$?

Le processus d'observation

Dans cette section, nous débutons une discussion détaillée à propos du sous-problème (i), quelque peu étendu.

Nombre minimal d'observations

En fixant les paramètres $s \ll N$, nous nous interrogeons sur le nombre minimal m_{inj} d'observations qui permet de trouver une matrice $A \in \mathbb{K}^{m \times N}$ injective sur Σ_s^N. Il n'est pas difficile de voir que cette injectivité est équivalente au fait que $\Sigma_{2s}^N \cap \ker(A) = \{0\}$, ou encore au fait que $2s$ colonnes de A soient toujours linéairement indépendantes. Cette dernière condition implique directement que $m \geqslant 2s$. De plus, on peut mettre en évidence des matrices A de taille $2s \times N$ vérifiant cette condition, par exemple en sélectionnant $2s$ lignes d'une matrice totalement positive de taille $N \times N$. De ce fait, nous avons

$$m_{\mathrm{inj}} = 2s. \tag{4}$$

C'est assez intuitif : localiser le support nécessite s unités d'information et déterminer les valeurs non nulles en nécessite s autres. Par ailleurs, si les observations sont prises comme les $m_{\mathrm{inj}} = 2s$ premiers coefficients de Fourier discrets, nous avons même à notre disposition un algorithme de reconstruction, inspiré de la méthode bi-séculaire de Prony [10], qui paraît tout à fait convenable au premier abord. Pour autant, le problème standard n'est pas complètement résolu...

Stabilité et robustesse

La méthode de Prony est numériquement réalisable, mais elle dégénère quand de petites perturbations sont introduites. Nous voulons des processus d'observation permettant une reconstruction qui soit à la fois stable quand les vecteurs $x \in \mathbb{K}^N$ ne sont pas exactement parcimonieux et robuste quand les observations $y = Ax + e \in \mathbb{K}^m$ contiennent des erreurs $e \in \mathbb{K}^m$ non nulles. Pour simplifier, nous ne discuterons ci-après que de la stabilité. Dans cette optique, nous sommes à la recherche de matrices $A \in \mathbb{K}^{m \times N}$ pour lesquelles il existe des processus de reconstruction $\Delta : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^N$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\|x - \Delta(Ax)\|_p \leqslant \frac{C}{s^{1-1/p}} \min_{z \in \Sigma_s^N} \|x - z\|_1. \tag{5}$$

L'indice p se trouve dans $[1, 2]$ et nous n'élucidons pas la présence de $s^{1-1/p}$ ni le choix de la norme ℓ_1 dans la partie droite de (5). Notons simplement que si x est parcimonieux de niveau s, ce terme est nul, donc $\Delta(Ax) = x$, ce qui signifie que x est parfaitement reconstruit à partir de Ax. La condition d'existence de $\Delta : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^N$ permettant (5) ne dépend en fait que du noyau de la matrice A. Elle est en effet équivalente à

$$\forall v \in \ker(A),\ \forall S \subseteq \{1,\dots,N\} \text{ avec } |S| \leqslant 2s,$$
$$\|v_S\|_p \leqslant \frac{C'}{s^{1-1/p}} \|v_{S^c}\|_1, \tag{6}$$

où la notation $v_T \in \mathbb{K}^N$ est utilisée pour le vecteur défini par $(v_T)_j = v_j$ si $j \in T$ et $(v_T)_j = 0$ si $j \in T^c$. Partant de (6), nous pouvons ensuite établir que le nombre minimal d'observations rendant possible une acquisition/reconstruction stable au sens de (5) est quasi-linéaire en s, c.-à-d.

$$m_{\text{sta}} \asymp s \ln(N/s). \tag{7}$$

Le premier argument montrant que $m_{\text{sta}} \geqslant C'' s \ln(N/s)$ reposait sur l'estimation de l'épaisseur de Gelfand de la boule ℓ_1 dans ℓ_p^N quand $p > 1$. Un argument ultérieur couvrant aussi le cas $p = 1$ évite ce détour, tout en offrant une explication plus intuitive, basée sur le *compressive sensing*, de l'estimation de cette épaisseur de Gelfand. La justification de $m_{\text{sta}} \leqslant C''' s \ln(N/s)$ découle de l'existence de matrices $A \in \mathbb{K}^{m\times N}$ ayant une propriété d'isométrie restreinte (voire ci-après) dans le régime de paramètres $m \asymp s\ln(N/s)$ et de la stabilité (et robustesse) des algorithmes de reconstruction que nous allons maintenant discuter. Juste avant ça, mentionnons que les observations (1) considérées jusqu'ici sont non adaptatives, dans le sens où le choix de a_i ne dépend pas de $a_1, y_1, \dots, a_{i-1}, y_{i-1}$. Autoriser des observations adaptatives ne réduirait toutefois pas l'estimation (7) du nombre d'observations garantissant la stabilité.

Le processus de reconstruction

Dans cette section, nous nous focalisons sur le sous-problème (ii) : en fixant la matrice $A \in \mathbb{K}^{m\times N}$, nous exposons l'intuition derrière quelques algorithmes de reconstruction fréquemment utilisés.

Mimimisation ℓ_1

Formellement, le problème (3) se résout en minimisant le niveau de parcimonie $\|z\|_0$ d'une variable vectorielle $z \in \mathbb{K}^N$ qui doit satisfaire $Az = y$. Comme ce problème d'optimisation n'est pas abordable en pratique, on peut penser à remplacer $\|z\|_0$ par une (quasi)-norme $\|z\|_q$ pour $q > 0$, puisque $\|z\|_q^q$ tend vers $\|z\|_0$ quand q tend vers zéro. Un tel problème étant non convexe tant que $q < 1$, nous sommes amenés à minimiser la norme ℓ_1 de z, laquelle peut être interprétée comme la relaxation convexe de $\|z\|_0$. Plus précisément, la très populaire minimisation ℓ_1, aussi appelée *basis pursuit*, consiste à associer à $y \in \mathbb{K}^m$ une solution du problème

$$\underset{z\in\mathbb{K}^N}{\text{minimiser}} \sum_{j=1}^N |z_j| \quad \text{sous la contrainte } Az = y. \tag{8}$$

Le succès de cette stratégie se schématise souvent par la figure 1. Cette figure est quelque peu trompeuse, car tous les $x \in \mathbb{K}^N$ parcimonieux de niveau 1 ne peuvent pas être reconstruits de la sorte à partir de $y = Ax$ – il faudrait que l'espace affine soit une droite plutôt qu'un plan. Néanmoins, l'interprétation géométrique est valide en dimension supérieure, la boule ℓ_1 devenant de plus en plus pointue.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une autre explication intuitive du succès de la minimisation ℓ_1 provient du fait que le problème (8) ait toujours une solution parcimonieuse de niveau au plus m. En ayant l'algorithme du simplexe en tête, cela peut se justifier en remarquant que (8) est équivalent au problème d'optimisation linéaire écrit sous la forme standard

$$\underset{z^+,z^-\in\mathbb{R}^N}{\text{minimiser}} \sum_{j=1}^N (z_j^+ + z_j^-) \quad \text{sous les contraintes}$$
$$A(z^+ - z^-) = y,\ z^+ \geqslant 0,\ z^- \geqslant 0. \tag{9}$$

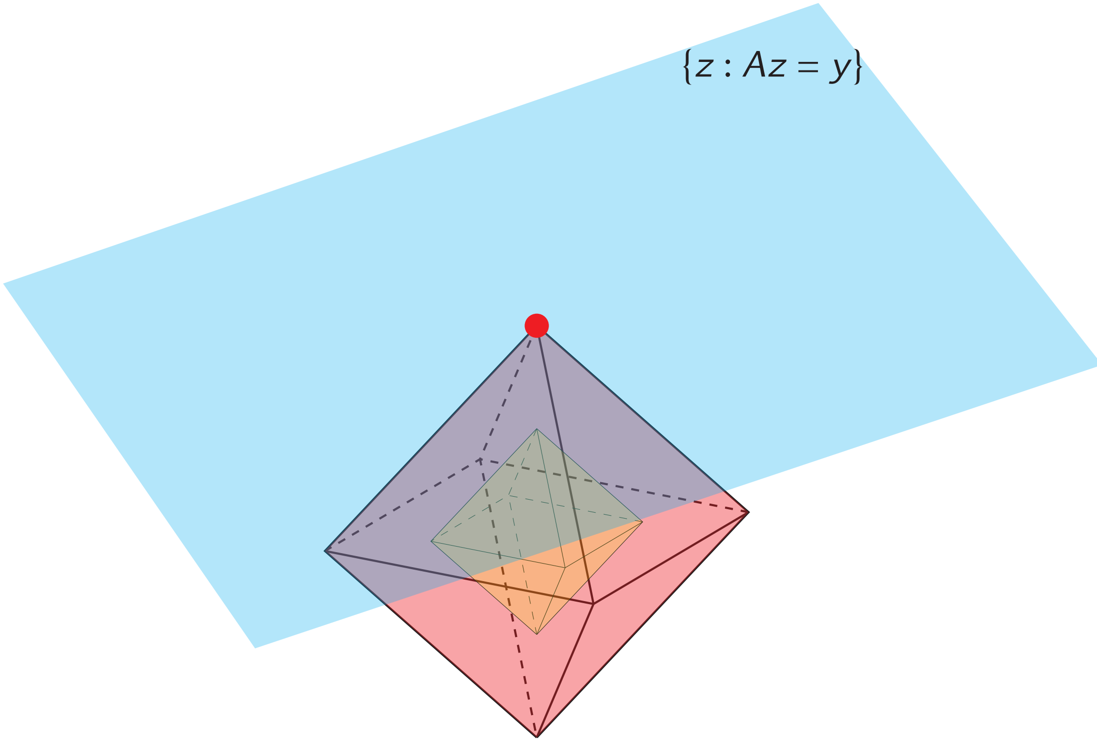
Il y a une condition nécessaire et suffisante pour que la minimisation ℓ_1 puisse reconstruire tous les vecteurs parcimonieux $x \in \mathbb{K}^N$ de niveau au plus s à partir de $y = Ax$. Cette condition dépend encore une fois uniquement du noyau de A et s'appelle d'ailleurs la *null space property* d'ordre s. Elle s'énonce comme suit :

$$\forall v \in \ker(A),\ \forall S \subseteq \{1,\dots,N\} \text{ avec } |S| \leqslant s,$$
$$\|v_S\|_1 \leqslant \|v_{S^c}\|_1. \tag{10}$$

Cette condition est clairement nécessaire, puisque $Av = 0$ donne $A(v_S) = A(-v_{S^c})$, donc $\|v_S\|_1 \leqslant \|v_{S^c}\|_1$ si un vecteur parcimonieux possède toujours la norme ℓ_1 la plus petite parmi les vecteurs partageant les mêmes observations. Il n'est pas trop difficile de voir qu'elle est aussi suffisante. En fait, un renforcement de la condition (10), à savoir

$$\forall v \in \ker(A),\ \forall S \subseteq \{1,\dots,N\} \text{ avec } |S| \leqslant s,$$
$$\|v_S\|_p \leqslant \frac{\rho}{s^{1-1/p}} \|v_{S^c}\|_1 \tag{11}$$

Figure 1 – La boule ℓ_1 de plus petit rayon qui intersecte l'espace affine $\{z \in \mathbb{K}^N : Az = y\}$ la touche en un vecteur parcimonieux, ici de niveau 1



avec une constante $\rho < 1$ est suffisante pour garantir la stabilité de la minimisation ℓ_1 au sens de (5). L'analogie entre (11) et (6) – il n'y a que la taille de S et les constantes qui changent – suggère une certaine universalité de la minimisation ℓ_1. Précisément, s'il existe un processus de reconstruction parcimonieuse stable à un niveau s, alors la minimisation ℓ_1 sera également stable à un niveau cs.

Algorithmes itératifs

Si le côté boîte-noire de la stratégie de minimisation ℓ_1 déplaît, on peut se tourner vers des algorithmes de reconstruction plus explicites et pouvant présenter certains avantages, notamment en terme de vitesse. Un premier exemple est l'*Orthogonal Matching Pursuit*. Cet algorithme cherche à reconstruire le support du vecteur parcimonieux en créant un nouvel indice à chaque itération et en produisant, étant donné le support courant, le vecteur qui s'accorde le plus avec les observations disponibles. Commençant avec $S^0 = \emptyset$ et $x^0 = 0$, l'algorithme s'écrit

$$S^k = S^{k-1} \cup \{j^k\}, \quad j^k = \underset{j \in \{1,\ldots,N\}}{\operatorname{argmax}} \{|(A^*(y - Ax^{k-1}))_j|\},$$

$$x^k = \underset{z \in \mathbb{K}^N}{\operatorname{argmin}} \{\|y - Az\|_2 : \operatorname{support}(z) \subseteq S^k\}.$$

Dans la première étape, choisir l'indice j^k correspondant à la plus grande composante (en module) de la matrice adjointe $A^* = \bar{A}^\top$ multipliant le résidu permet une réduction presque optimale de $\|y - Ax^k\|_2^2$ à chaque itération ; dans la seconde étape, le problème des moindres carrés se résume à la résolution d'un système linéaire de taille $k \times k$.

Un deuxième exemple est l'*Iterative Hard Thresholding*. Il imite une méthode itérative visant à résoudre le système linéaire carré $A^*Ax = A^*y$, mais incorpore une étape de seuillage parcimonieux à chaque itération. Partant par exemple de $x^0 = 0$, l'algorithme s'écrit

$$x^{k+1} = H_s(x^k + A^*(y - Ax^k)), \tag{12}$$

où l'opérateur H_s conserve les s plus grandes composantes (en valeur absolue) et remplace les autres par des zéros. Le fait que l'algorithme n'implique aucune résolution de système linéaire est assurément un avantage. Mais si de telles résolutions ne sont pas vues comme des obstacles, comme dans *Orthogonal Matching Pursuit*, d'autres avantages apparaissent en considérant une variante appelée *Hard Thresholding Pursuit*. Commençant avec $S^0 = \emptyset$ et $x^0 = 0$, cette variante s'écrit

$$S^k = \{\text{ indices des s plus grands } |A^*(y - Ax^{k-1})|\},$$
$$x^k = \underset{z\in\mathbb{K}^N}{\operatorname{argmin}}\{\|y - Az\|_2 : \operatorname{support}(z) \subseteq S^k\}.$$

Succès des algorithmes de reconstruction

Dans cette section, nous retournons au sous-problème (i) et nous introduisons des conditions sur la matrice $A \in \mathbb{K}^{m\times N}$ qui garantissent le bon fonctionnement des stratégies qui viennent d'être présentées.

Cohérence et propriété d'isométrie restreinte

La notion de cohérence $\mu(A)$ d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{m\times N}$ formalise le fait que ses colonnes sont deux à deux presque orthogonales. Pour tous les algorithmes ci-dessus, on peut montrer qu'une cohérence $\mu(A) < c/s$ garantit le succès de la reconstruction parcimonieuse de niveau s. Cependant, la cohérence ne peut pas être aussi petite que désirée : la borne de Welch stipule que $\mu(A) \geqslant c'/\sqrt{m}$ quand $N \geqslant Cm$. Dès lors, les conditions basées sur la cohérence ne s'appliquent que dans le régime $m \geqslant c''s^2$, bien loin du régime recherché où m est quasi-linéaire en s.

La percée est venue de l'introduction dans [3] de la notion de propriété d'isométrie restreinte. Celle-ci formalise le fait que tout jeu de s colonnes de A forme un système presque orthogonal. Plus rigoureusement, on dit que la matrice A satisfait à la propriété d'isométrie restreinte d'ordre s avec constante $\delta > 0$ si

$$\forall z \in \Sigma_s^N, (1-\delta)\|z\|_2^2 \leqslant \|Az\|_2^2 \leqslant (1+\delta)\|z\|_2^2 \qquad (13)$$

et on écrit $\delta_s(A)$ pour le plus petit $\delta > 0$ tel que (13) soit valide. Pour tous les algorithmes ci-dessus, on peut montrer qu'une condition du type $\delta_{\kappa s}(A) < \delta_*$ garantit le succès de la reconstruction parcimonieuse de niveau s. Pour *Iterative Hard Thresholding* et *Hard Thresholding Pursuit*, $\kappa = 3$ et $\delta_* = 1/\sqrt{3}$ conviennent. Pour *Orthogonal Matching Pursuit*, $\kappa = 13$ et $\delta_* = 1/6$ conviennent (ce qui est sans doute améliorable). Étonnamment, il faut effectuer plus de s itérations afin de reconstruire les vecteurs parcimonieux de niveau s. Néanmoins, le nombre d'itérations est au plus proportionnel à s, ce qui est aussi le cas pour *Hard Thresholding Pursuit*. Pour *Basis Pursuit*, $\kappa = 2$ et $\delta_* = 1/\sqrt{2}$ conviennent, ce dernier choix ne pouvant pas être amélioré. D'autres choix de κ et δ_* permettent de déduire la version stable (11) de la *null space property* d'ordre s avec un argument assez élémentaire, mais juste un peu trop long pour être inclus ici. L'argument aurait cependant été instructif pour s'apercevoir que la norme choisie sur Az dans (13) ne joue presque aucun rôle.

Matrices avec la propriété d'isométrie restreinte

Pour boucler la boucle, il nous faut mettre en avant des matrices $A \in \mathbb{K}^{m\times N}$ qui satisfont à la propriété d'isométrie restreinte d'ordre s avec $m \asymp s\ln(N/s)$. Ceci se fait via des arguments probabilistes : considérant un certain type de matrices aléatoires $A \in \mathbb{K}^{m\times N}$, on veut montrer que (13) est valide avec une faible probabilité d'échec dès que m dépasse un certain seuil. Par exemple, si A est peuplée de variables indépendantes gaussiennes de moyenne nulle et de variance $1/m$, alors la probabilité d'échec est $\exp(-cm)$ et le seuil est $s\ln(N/s)$, comme espéré. Le résultat s'étend aux variables sous-gaussiennes, dont les variables de Rademacher. Pour les variables sous-exponentielles, dont les variables de Laplace, la propriété d'isométrie restreinte (13) n'est pas valide dans le régime $m \asymp s\ln(N/s)$, mais la *null space property* l'est néanmoins, même dans sa version stable (11) avec $p \in [1,2]$.

Les arguments sont plus subtils si l'on considère des observations de Fourier, que l'on rencontre notamment en imagerie par résonance magnétique. Les sous-matrices aléatoires de taille $m \times N$ d'une matrice de Fourier discrète, construites en sélectionnant m lignes au hasard, satisfont bien à la propriété d'isométrie resreinte d'ordre s, mais la probabilité d'échec est N^{-c} et le seuil est $s\ln^3(N)$. Déterminer s'il peut être réduit à $s\ln(N)$ est un problème ouvert.

Malheureusement, bien que presque toutes les matrices de taille $m \times N$ satisfassent à la propriété d'isométrie restreinte d'ordre s dans le régime optimal $m \asymp s\ln(N/s)$, personne n'est capable à l'heure actuelle d'en construire une de façon déterministe. Découvrir une telle construction est le grand défi auquel la théorie du *compressive sensing* doit faire face. Même le régime $m \asymp s^\alpha$ avec $\alpha < 2$ semble pour l'instant hors de portée – à l'exception de [1], qui donne un exposant α extrêmement proche de 2 pour certaines sous-matrices de Fourier presque carrées. Si l'on est uniquement intéressé par la reconstruction parcimonieuse de niveau s, il y a cependant de meilleures nouvelles : pour tout $\alpha > 1$, les graphes bipartis expanseurs donnés explicitement dans [9] fournissent des matrices d'adjacence $A \in \{0,1\}^{m\times N}$ qui satisfont à la version stable (11) de la *null space property* dans le régime $m \asymp s^\alpha$. L'inconvénient est de devoir imposer $p = 1$ sans parvenir à couvrir le domaine $p \in [1,2]$ en entier.

Quelques extensions

En guise de conclusion, nous évoquons brièvement quatre variations du problème standard, variations toujours conformes au principe de base consistant à effectuer l'acquisition et la compression des données simultanément.

Représentations parcimonieuses par rapport à un dictionnaire

Il n'est pas rare que l'étape de modélisation nous amène à considérer des vecteurs de la forme $f = Dx \in \mathbb{K}^n$ pour un dictionnaire $D \in \mathbb{K}^{n\times N}$, $n < N$. En supposant sans perdre beaucoup de généralité que $DD^* = I_n$, la parcimonie de f par rapport à D peut être comprise de deux façons : soit un des vecteurs $x \in \mathbb{K}^N$ vérifiant $Dx = f$ est parcimonieux, soit le vecteur $D^*f \in \mathbb{K}^N$ (qui vérifie $D(D^*f) = f$) est parcimonieux. Dans le premier cas, on parle de parcimonie en synthèse, et dans le deuxième cas de parcimonie en analyse. La théorie n'est pas complètement satisfaisante pour des dictionnaires arbitraires car chacun de ces deux scénarios présente des inconvénients à surmonter.

Acquisition compressive de matrices de rang faible

Hormis le fait que les vecteurs $x \in \mathbb{K}^N$ de niveau de parcimonie s sont supplantés par des matrices $X \in \mathbb{K}^{N\times N}$ de rang r, la situation est extrêmement similaire au problème standard. L'analogie découle du fait que le rang de X n'est autre que $\|\sigma(X)\|_0$, où $\sigma(X)$ dénote le vecteur des valeurs singulières de X. En particulier, la minimisation de $\|z\|_1$ peut être remplacée par la minimisation de $\|Z\|_* = \sum_{j=1}^N \sigma_j(Z)$, qu'on appelle la norme nucléaire. En pratique, cette minimisation s'effectue via programmation semi-définie. La théorie, qui peut également se construire autour d'une propriété d'isométrie restreinte, met en évidence que le nombre minimal d'observations pour la reconstruction stable de matrices $X \in \mathbb{K}^{N\times N}$ de rang au plus r est $m_{\mathrm{sta}} \asymp rN$. Il s'agit essentiellement du nombre de degrés de liberté d'une matrice de taille $N \times N$ et de rang r, sans facteur logarithmique supplémentaire.

Acquisition sans phase compressive

Nous retournons dans le monde vectoriel et supposons que les vecteurs $x \in \mathbb{C}^N$ sont acquis au travers d'observations non linéaires de la forme $y_i = |\langle a_i, x\rangle|$, $i \in \{1,\dots,m\}$, c.-à-d. que l'amplitude des $\langle a_i, x\rangle$ est conservée mais pas leur phase. Si ces vecteurs sont parcimonieux de niveau s, il est encore une fois possible de les reconstruire de manière stable en utilisant $m \asymp s\ln(N/s)$ observations. Sans parcimonie, le problème peut être traité en remarquant que $y_i^2 = \mathrm{tr}(a_i a_i^* X)$, $X = xx^*$, ce qui permet de reconstruire la matrice $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$ de rang 1, puis d'en déduire $x \in \mathbb{C}^N$.

One-bit compressive sensing

Ce problème est en quelque sorte complémentaire du précédent : au lieu de conserver l'amplitude d'observations linéaires $\langle a_i, x\rangle$, celle-ci est perdue. En nous plaçant dans le cas réel, les vecteurs $x \in \mathbb{R}^N$ parcimonieux de niveau s sont donc acquis au travers de $y_i = \mathrm{sgn}(\langle a_i, x\rangle) \in \{-1,+1\}$, $i \in \{1,\dots,m\}$. Ceci représente un cas extrême et un peu artificiel de quantification. Puisque les observations binaires $y_1,\dots,y_m$ ne dépendent que de la direction de x, nous supposons à présent que $\|x\|_2 = 1$. La reconstruction exacte de x n'étant bien entendu plus envisageable, nous souhaitons être capables d'utiliser $y \in \{-1,+1\}^m$ afin de produire algorithmiquement des vecteurs $\hat{x} \in \mathbb{R}^N$ pour lesquels l'erreur de reconstruction ait la forme $\|x - \hat{x}\|_2 \leqslant C[(s\ln(N/s))/m]^\gamma$. Il est possible d'atteindre l'exposant $\gamma = 1/2$, tandis que des arguments plus simples présentés dans [7] permettent d'obtenir $\gamma = 1/4$. Ces arguments s'appuient sur une variation de la propriété d'isométrie restreinte (13) dans laquelle la norme sur Az est une norme ℓ_1.

Références

[1] J. Bourgain et al. « Explicit constructions of RIP matrices and related problems ». *Duke Mathematical Journal* **159**, nº 1 (2011), p. 145-185.

[2] E. Candès, J. Romberg et T. Tao. « Robust uncertainty principles : Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information ». *IEEE Transactions on Information Theory* **52**, nº 2 (2006), p. 489-509.

[3] E. Candès et T. Tao. « Decoding by linear programming ». *IEEE Transactions on Information Theory* **51**, nº 12 (2005), p. 4203-4215.

[4] D. Chafaï et al. *Interactions between compressed sensing, random matrices, and high dimensional geometry*. Société Mathématique de France, 2012.

[5] D. Donoho. « For most large underdetermined systems of linear equations the minimal ℓ_1-norm solution is also the sparsest solution ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* **59**, nº 6 (2006), p. 797-829.

[6] Y. Eldar et G. Kutyniok. *Compressed sensing : theory and applications*. Cambridge University Press, 2012.

[7] S. Foucart. « Flavors of compressive sensing ». In : *Approximation Theory XV : San Antonio 2016*. Vol. 201. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2016, p. 61-104.

[8] S. Foucart et H. Rauhut. *A mathematical introduction to compressive sensing*. Birkhaüser, 2013.

[9] V. Guruswami, C. Umans et S. Vadhan. « Unbalanced expanders and randomness extractors from Parvaresh–Vardy codes ». *Journal of the ACM* **56**, nº 4 (2009), p. 1-34.

[10] R. Prony. « Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures ». *J. École polytechnique* **1** (1795), p. 24-76.

Simon Foucart

Texas A&M Université, États-Unis

`foucart@tamu.edu`

Simon Foucart est professeur à l'université A&M du Texas. Au-delà du *compressive sensing*, il s'intéresse aux sciences des données vues sous l'angle de la théorie de l'approximation.

Des mathématiciens écrivent aux organisateurs du Congrès International des Mathématiciens à St Pétersbourg en 2022 concernant le cas d'Azat Miftakhov

Aux membres du Comité d'organisation exécutif et du Comité d'organisation local du Congrès international des mathématiciens (cim).

Chers organisateurs et organisatrices du cim,

La communauté mathématique internationale s'inquiète sérieusement de la situation d'Azat Miftakhov, étudiant de master à l'université d'état de Moscou, qui est détenu depuis près de deux ans par les autorités russes.

Azat est un jeune mathématicien talentueux originaire du Tatarstan (Fédération de Russie). Dès l'école, il a remporté des prix dans plusieurs concours de mathématiques et reçu le soutien offert aux jeunes talents par le ministère de l'Éducation et de la Science. Étudiant à Moscou, il s'est impliqué dans le mouvement anarchiste. En février 2019, juste après son retour d'une conférence à Nizhni Novgorod où il avait donné son premier exposé en anglais, Azat a été arrêté par la police et accusé d'avoir fabriqué des explosifs. Il a été torturé au poste de police. Après trois jours, Azat a été relâché, le tribunal n'ayant trouvé aucune preuve justifiant sa détention. Moins de deux jours plus tard, le 9 février 2019, il a été à nouveau arrêté et accusé cette fois de la destruction d'une fenêtre d'un bureau du parti politique « Russie unie », événement qui s'était produit plus d'un an auparavant. Il est depuis maintenu en prison. Le manque de preuves dans le cas d'Azat nous préoccupe, ainsi que son maintien en détention préventive pour la plus grande partie du temps qui a suivi son arrestation.

Azat plaide non coupable. Pendant sa détention il a réussi à écrire deux prépublications mathématiques, qui sont en ligne sur le site arxiv.

Azat Miftakhov a été reconnu prisonnier politique par l'organisation russe de défense des droits humains « Memorial ». L'American Mathematical Society et la Société Mathématique de France ont rendu publiques des déclarations manifestant leur inquiétude sur son cas. Une récente pétition en soutien d'Azat a été signée par plus de 2000 mathématiciens et mathématiciennes de plus de 15 pays.

Le 23 décembre 2020, il a été annoncé qu'Azat risque six ans de prison s'il est condamné.

Alors que la Russie va accueillir le cim dans moins de deux ans, le procès de Miftakhov nous rappelle les fréquentes violations des droits humains et la répression des libertés dans le pays-hôte, qui sont régulièrement condamnées par les organisations de défense des droits humains. Rappelons qu'en 1982, le cim de Varsovie a été retardé d'un an, pendant lequel diverses actions ont été entreprises par la communauté mathématique internationale afin de faire libérer des prisonniers politiques en Pologne.

Pour nous, scientifiques, la liberté est l'une des valeurs les plus hautes. Assister au congrès alors que notre collègue Azat Miftakhov est arbitrairement détenu nous poserait un sérieux dilemme, ainsi qu'à toute la communauté mathématique. Nous vous demandons de bien vouloir prendre une position active sur cette affaire et de communiquer avec les autorités d'état afin de faire libérer Azat.

La lettre et la liste des 47 signataires sont disponibles sur le site web de la campagne pour Azat Miftakhov : `https://caseazatmiftakhov.org/`

Pourquoi avons-nous si peu de collègues noir·e·s ?

• I. Ekeland

Je suis arrivé à Dauphine en 1970. L'université était toute jeune, moi aussi, la stratification sociale était déjà bien établie, et correspondait curieusement aux six étages du bâtiment. Au rez-de-chaussée on rencontrait les appariteurs, tous de couleur, en général antillais, mais pas toujours. Au fur et à mesure qu'on montait dans les étages, l'air se raréfiait, et quand on atteignait les étages « nobles », il fallait arriver tôt le matin ou partir tard le soir pour rencontrer des personnes de couleur : c'étaient les « techniciens de surface », en général des femmes, sous contrat précaire avec des prestataires extérieurs pour nettoyer le bâtiment.

Nous sommes en 2021, cinquante ans après, l'université est toujours là, moi aussi, beaucoup de choses ont changé, mais pas la stratification sociale. Les appariteurs sont noirs, il y a quelques noirs parmi les étudiants, et pas du tout parmi les enseignants-chercheurs. En 1970 il y avait bien un assistant noir au département de mathématiques, aujourd'hui il n'y en a plus, et je ne crois pas que, parmi les professeurs en poste à Dauphine, de quelque discipline que ce soit, il y ait un seul noir.

Cela fait cinquante ans que cela dure, et cela fait cinquante ans que cela me choque. Comment se fait-il que ce pays, en cinquante ans, ne soit pas arrivé à faire monter les étages à ses citoyens noirs ? Comment se fait-il qu'il y ait si peu de noirs parmi les professeurs d'université français ?

On sait que les statistiques ethniques sont interdites en France, ce qui interdit justement de mesurer le problème. Personnellement, mis à part les collègues de l'université des Antilles et de la Guyane, je ne connais qu'un professeur de mathématiques noir en poste en France. Je ne dis pas qu'il n'y en a pas d'autres, mais j'ai quand même pas mal roulé ma bosse dans le milieu académique depuis cinquante ans, et s'il y en a davantage, il ne doit pas y en avoir des masses (les statistiques seraient bien utiles). Je connais bien des professeurs de mathématiques noirs d'expression française, fort éminents d'ailleurs, mais ils sont en poste à l'étranger, aux USA et au Canada.

Je vous rassure : le problème n'est pas propre aux matheux. Je me rappelle avoir demandé à un collègue économiste : « Est-ce que tu connais un professeur d'économie noir ? ». Il m'a répondu : « Mais qui tu verrais ? ». C'est bien le cercle vicieux qui emprisonne les victimes de toute discrimination, et qui permet de les écarter avec bonne conscience : il n'y a personne justement parce qu'il n'y a personne. Dans l'enseignement secondaire, combien d'élèves doués se sont détournés des filières d'excellence parce qu'ils ne voulaient pas être les seul(e)s noir·e·s de la classe ?

Pour les recrutements du supérieur, il n'y a personne parce qu'il n'y a pas de candidat, et il n'y a pas de candidat justement parce qu'il n'y a personne. Comme il n'y pas de professeur noir (ou professeure femme, ou professeur handicapé, par exemple), les jeunes noirs (ou jeunes femmes, ou jeunes personnes handicapées) comprennent bien que ce n'est pas une voie qui leur est ouverte, et si par aventure un individu particulièrement audacieux se présente malgré les obstacles, il n'aura pas les codes propres au milieu dans lequel il souhaite rentrer, et il n'y aura au jury pas de noir (ou de femme, ou de personne handicapée) capable de comprendre ce qu'il vit et de faire la traduction. Il est extraordinairement difficile de faire une lettre de motivation ou un exposé de présentation, il faut trouver un juste milieu entre la mise en valeur de ses propres travaux et les hommages rendus aux grands anciens et aux membres du département dans lequel on postule, sans même parler des biais cognitifs qui font dire qu'un exposé est « clair » quand c'est un homme qui le fait, et « agréable » quand il s'agit d'une femme.

Bien entendu, le problème est plus complexe que la simple couleur de la peau, et a une dimension sociologique. Il n'y a pas des noirs, il y a des citoyens français qui viennent de milieux différents. Parmi les appariteurs de Dauphine, il y a des antillais, mais aussi des congolais, des camerounais ou des ivoiriens qui sont venus en France en des temps plus heureux et qui ont obtenu la nationalité. Les familles noires sont en général pauvres, leurs options en matière d'éducation sont très réduites, et les enfants, notamment les filles, font leurs choix sous des contraintes sociales, familiales et financières très fortes. Qui va s'engager dans des études longues quand la famille a du mal à joindre les deux bouts ? Si on sort indemne de l'enseignement secondaire, on s'orientera plutôt vers un BTS ou un IUT. Pour surmonter ce problème, beaucoup d'universités, dont PSL et Dauphine, ont des partenariats avec des lycées, pour repérer les jeunes talentueux et leur permettre de poursuivre des études longues grâce à des bourses. Ces programmes sont nécessaires, et l'on ne saurait trop les encourager et féliciter les collègues qui s'en occupent. Ils amènent au niveau bac+5 nombre de jeunes qui n'y seraient pas arrivés autrement, et qui servent de « role model » aux générations qui les suivent. Mais ceux qui ont réussi, en mathématiques par exemple, ne s'orienteront pas vers l'enseignement ou la recherche. Le niveau de salaire et le prestige social d'un professeur de mathématiques, fût-ce dans le supérieur, ne correspondent en rien à la difficulté des études et à ce qu'ils peuvent obtenir en allant dans le privé.

Ceci dit, la représentation des noirs dans les hautes sphères de l'administration ou de l'entreprise est aussi évanescente qu'à l'université. Combien y a-t-il de commissaires de police noirs, de procureurs, de préfets, de généraux, de directeurs d'administration centrale, de PDG du CAC 40, de rédacteurs en chef ? De nouveau, comme les statistiques ethniques sont interdites, on ne le sait pas. On m'objectera qu'il y a des députés de couleur et même des ministres. Certes, mais les règles de la politique sont différentes : le candidat qui se présente aux élections sera jugé par un panel beaucoup plus large qu'un jury d'experts ou un comité de pairs, et on peut espérer que parmi les électeurs il y en aura un certain nombre qui partageront son expérience de vie et le jugeront pour ce qu'il est.

Je voudrais souligner ici qu'il n'y a pas besoin que les individus soient racistes pour que le fonctionnement des institutions soit discriminatoire. Dans un livre très célèbre, *Micromotives and Macrobehaviour,* Thomas Schelling, prix Nobel d'économie en 2005, nous invite à faire l'expérience suivante, et à la faire physiquement, avec des jetons, non numériquement, sur un ordinateur. Prenons un réseau carré, par exemple un échiquier avec ses 64 cases, et posons-y 40 jetons de deux couleurs différentes, disons 20 rouges et 20 bleus, peu importe comment. Il y aura des cases vides, et chaque jeton a le droit de se déplacer vers une case libre voisine. Il voudra se déplacer si ses voisins ne lui conviennent pas, et là on imagine des règles. Disons que parmi ses huit voisins immédiats, chacun souhaite que la moitié au moins soit de la même couleur. Il faut adapter cette règle aux arrondis [1], décider dans quel ordre on déplace les mécontents, et on y va. Le résultat final, au bout de quelques itérations, est une ségrégation, tous les rouges d'un côté et tous les bleus de l'autre.

L'intérêt de cette expérience est de montrer que des préférences très légères au niveau individuel, qui peuvent parfaitement être inconscientes, comme des biais cognitifs, aboutissent au niveau collectif à des séparations brutales en groupes distincts, c'est-à-dire des discriminations de fait, d'autant plus difficiles à combattre qu'elles ne résultent pas de convictions affichées, encore moins d'une politique délibérée. Non, la discrimination résulte de l'accumulation de petites choses sur le long terme, chacune d'elles fragile et vacillante, presque insignifiante, mais l'ensemble étant massif et inexorable, comme les gouttes d'eau, tombant une à une, usent les pierres les plus robustes. On n'empêche pas les filles de faire des études scientifiques, on pense juste que les filles ne sont pas faites pour les sciences, personne ne le dit ouvertement mais le message passe de manière subliminale, et les filles, constatant d'ailleurs qu'il n'y a pas beaucoup de femmes au premier plan dans les carrières scientifiques, s'en détournent, avec le résultat qu'il n'y aura pas davantage de femmes au premier plan dans ces carrières, ce qui conforte l'idée que les filles ne sont pas faites pour les sciences.

Que faire pour lutter contre cela ? La première chose, la plus importante et la plus difficile, est de prendre conscience du problème. Qu'il existe, il suffit d'ouvrir les yeux pour s'en apercevoir ; quand on va au restaurant, par exemple, les noirs sont à la cuisine bien plus souvent qu'en salle. Qu'on veuille le reconnaître, c'est une autre histoire. Au plus haut sommet de l'état, c'est le déni total, conforté par l'interdiction des statistiques ethniques : le ministre de l'Éducation nationale a porté plainte en diffama-

1. Schelling propose la règle suivante. S'il n'y a qu'un seul voisin, il doit être de la même couleur. S'il en a deux, l'un doit être de la même couleur. S'il en a trois, quatre, ou cinq, deux doivent être de la même couleur. Et s'il y en a plus, trois doivent être de la même couleur.

tion contre un syndicat enseignant qui avait soulevé ces problèmes en parlant de « racisme d'état ». La communauté mathématique française, si elle ne manifeste pas au problème la même hostilité active et bornée que notre ministre, se cantonne dans une indifférence que l'on peut mesurer si on la compare à d'autres, aux scientifiques américains par exemple.

Le 2 juin, la présidente de l'AMS écrivait à tous les membres de la Société pour marquer le soutien de celle-ci au mouvement Black Lives Matter contre le racisme anti-noir et les violences policières. À cette occasion, elle écrivait « we must accept the shared responsibility of changing our world for the better, and examining our own biases as part of that ». Le 3 juin, la présidente de la SIAM faisait de même et écrivait : « we recognize that we are all accountable for making change happen, and we offer our solidarity to those who are deeply impacted, especially our Black colleagues, students, and staff in the SIAM community ». Le 4, le directeur de l'Institute of Advanced Studies de Princeton parlait au nom de l'institution : « at IAS, we all must stand together against racism – in the U.S. and in all parts of the world – and, in our work, strive to be leaders in understanding and dismantling the ways that discrimination and injustice are perpetuated. »

Ils ont raison ! Mais ces prises de position, et le mouvement BLM en général, n'ont eu aucun écho dans le milieu scientifique français. Aucune de nos prestigieuses institutions, ni l'Académie des Sciences, ni le Collège de France, ni l'IHÉS n'ont suivi, il n'y a eu aucun débat dans la communauté mathématique française. Notre pays prend du retard, pas seulement en recherche scientifique, comme en témoigne le fiasco des vaccins, mais aussi dans l'intelligence de notre société et dans les nouvelles normes qui s'imposent de part le monde.

Il est grand temps de réagir et de sortir du déni, comme on a tenté de le faire pour d'autres, comme les femmes ou les personnes handicapées. Les syndicats, les départements et même, à l'instar de ce qui se passe à l'étranger, les sociétés savantes devraient ouvrir le débat et rassembler les informations. Le premier objectif est de sortir du déni et de sensibiliser les collègues ; la lecture du livre récent de Lilian Thuram, « La pensée blanche », constitue une excellente entrée en matière. À partir de là on peut envisager des mesures concrètes : pourquoi les comités de parité, qui existent dans nombre de départements, n'ajouteraient-ils pas à leur agenda la question de la sous-représentation des personnes de couleur aux niveaux élevés ? En l'absence de « role model » français, on pourrait aussi en faire venir de l'étranger, par des invitations ciblées qui pourraient susciter des vocations. Il y a aussi une politique de bourses à mener pour attirer ces étudiant(e)s vers les mathématiques et leur ouvrir des perspectives de carrière.

Bref, il y en a des choses à faire ! Le chemin à parcourir est long, c'est pour cela qu'il faut commencer tout de suite. En attendant, je vais retourner à Dauphine, où je serai, comme d'habitude depuis cinquante ans, accueilli par les appariteurs noirs du rez-de-chaussée, avec lesquels je ferai un brin de causette avant de monter dans les étages faire des mathématiques avec mes collègues blancs.

Le niveau baisse ...

• A. Chenciner

... non celui des étudiants, mais celui de l'éthique de certains éditeurs. En voici deux exemples.

Sciences et Vie ne répond pas

La lettre qui suit, adressée le 9 janvier 2018, est restée sans réponse [1].

À propos de l'article « Découverte : le problème astronomique des "trois corps" possède des centaines de solutions » (novembre 2017).

> Madame, Monsieur, un titre peut suffire à décider de la nature d'un texte. Paradoxalement, celui de l'article mentionné ci-dessus attirera à la fois le néophyte de par son caractère accrocheur et le spécialiste qui, éberlué, voudra vérifier si le reste de l'article est au même niveau. Or c'est malheureusement le cas : déjà l'omission de l'adjectif « périodique » à la fin du titre vide celui-ci de toute substance puisque, comme toute équation différentielle, celle du problème des trois corps a une infinité de solutions (théorème dit de Cauchy-Lipschitz); d'autre part, sans entamer une polémique stérile à propos de l'importance de la découverte numérique (c'est-à-dire non étayée par une preuve rigoureuse de leur existence) de dizaines, centaines, voire milliers de nouvelles solutions périodiques du problème, on sait depuis longtemps que ce problème possède une infinité de solutions périodiques et que Poincaré était même allé jusqu'à se demander si toute solution bornée du problème ne pourrait pas être approchée pendant un temps fixé arbitrairement grand par une solution périodique. Ainsi, l'affirmation quant au *présupposé sur la quasi-inexistence de solutions périodiques des systèmes à trois corps* devrait raisonnablement être remplacée par le *présupposé sur la quasi-omniprésence des solutions périodiques des systèmes à trois corps*. Enfin, si l'on voulait être précis – mais à un tel niveau d'à peu près, faut-il s'en soucier ? – il eut été intéressant de remarquer qu'il s'agit du problème à masses égales et moment cinétique nul, problème pour lequel, si l'on sait certes montrer numériquement qu'au voisinage de certaine solution particulière existent une infinité de solutions périodiques, je ne sache pas qu'existe une démonstration mathématique de ce fait.

Disparition... dans l'Encyclopédie Universalis

En 1981 et 1985 j'y avais publié deux articles, *Singularités des fonctions différentiables* et *Systèmes dynamiques différentiables*, dont la longueur (respectivement 11 et 37 pages) et la technicité n'avaient pas effrayé le maître d'œuvre Jean-Louis Verley. Dès le début, les mathématiques avaient joué, sous l'impulsion en particulier de Jean Dieudonné, un rôle important au sein de cette encyclopédie : en témoignent les deux dictionnaires publiés par Albin Michel en 1997 et 1998 qui rassemblaient l'ensemble des articles correspondants. Au début de l'année 2018, recherchant en ligne un détail que je savais trouver dans l'article *Systèmes dynamiques différentiables*, j'ai eu la surprise de constater que l'article n'existait plus et que, cerise sur le gâteau, l'index ne me mentionnait plus que comme l'auteur du seul article *Singularités des fonctions différentiables*. Ayant fait part à Émilie Picaudé, responsable de la production et de la coordination éditoriales, et à Sylvie Mazeaud, du secrétariat éditorial, de mon étonnement devant de telles pratiques, j'ai reçu en mars

1. Des lettres de deux autres collègues à ce même propos sont elles aussi restées sans réponse.

2018 la réponse suivante : « *Nous comprenons tout à fait votre étonnement. Actuellement, votre article Systèmes dynamiques différentiables n'est pas visible sur nos sites car nous rencontrons des difficultés techniques à afficher certains de ses caractères spéciaux et formules.* » Il faut croire qu'écrire mon nom dans un index est l'une de ces difficultés techniques. En juin 2018 la réponse à une nouvelle demande fut : « *Nous sommes en train de chercher une solution technique pour résoudre les différents problèmes d'affichage de votre article. Nous transcrivons actuellement les formules en MathML (sous Word)...* ». En février 2021 rien n'a changé et chercher *Systèmes dynamiques, Universalis* sur Google donne comme premier résultat `https://www.universalis.fr/encyclopedie/systemes-dynamiques-differentiables` que je laisse au lecteur de cette lettre d'humeur le plaisir de découvrir.

N.B. Pour qui désirerait voir l'article censuré, il se trouve à l'année 1985 dans la rubrique « Articles » de ma page `https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/`.

Enquête sur les chercheurs/chercheuses en mathématiques recruté.e.s par le CNRS entre 2008 et 2015

• O. Goubet

Il s'agit ici du troisième volet d'une enquête commandée par l'Insmi sur le devenir des chargé.e.s de recherche (CR) recruté.e.s via la section 41 du comité national. La précédente enquête portait sur la période 2000-2007 et celle d'avant (effectuée par Stéphane Cordier) portait sur la période 1992-1999. Les modes opératoires des enquêtes sont similaires. Les chercheurs ou chercheuses recruté.e.s en mathématiques sur la période 2008-2015 ont été contacté.e.s par courrier électronique au printemps 2020. Deux relances espacées dans le temps ont été ensuite effectuées. Au total 100 personnes ont été contactées. L'analyse porte sur les 76 personnes qui ont répondu, soit un taux de réponses de 76%. On peut observer une légère diminution (5%) du nombre de réponses. Au-delà des considérations portant sur la crise sanitaire due au coronavirus, on peut se demander si la diminution du nombre de réponses parvenues n'est pas un biais dû à l'internationalisation accrue des recrutements au CNRS en mathématiques, les chercheurs ou chercheuses internationaux recruté.e.s comme CR et reparti(e)s dans un pays tiers ont peut-être moins d'appétence à répondre à une enquête concernant spécifiquement la communauté mathématique française. À noter que pour la présente enquête le questionnaire a été envoyé aussi en anglais quand nécessaire.

Le questionnaire adressé portait sur les questions suivantes

- Date de naissance.
- Thème de recherche (avec un maximum de 80 caractères).
- Laboratoire de première affectation (numéro d'UMR, localisation).
- Situation professionnelle actuelle (grade, corps d'exercice, date de prise de fonction).
- Laboratoire d'affectation actuel.
- Le cas échéant : date de soutenance d'une HDR et titre de cette HDR.
- Qualification CNU éventuelle : si oui, dans quelle section CNU et en quelle année.

Nous présentons ci-dessous quelques données issues des résultats de l'enquête.

Répartition nationale et mobilité géographique

Sur ces 76 chercheurs ou chercheuses recruté.e.s, 25 ont été affecté.e.s initialement en Île-de-France (et 17 en Auvergne-Rhône-Alpes). À l'heure actuelle 31 sont en poste en Île-de-France, 36 en province et 9 à l'étranger (certain(e)s en détachement; difficile de savoir par conséquent s'il s'agit de départs provisoires ou définitifs). Plus précisément 13 chercheurs ou chercheuses ont rejoint l'Île-de-France en partant de la province, quand 3 faisaient le chemin inverse. De province à province 5 chercheurs ou chercheuses ont connu une mobilité, quand 6 ont changé d'affectation à l'intérieur de l'Île-de-France même. Un(e) recruté(e) sur deux à peu près a connu une mobilité.

Quelle comparaison est pertinente avec les résultats des enquêtes précédentes ? On ne peut que constater une attractivité un peu plus grande de la région Île-de-France pour les questions de mobilité (voir 1).

Tableau 1 – Pourcentage d'affectation en Île-de-France

	1992-1999	2000-2007	2008-2015
Affectation initiale en Île-de-France	43%	44%	33%
Affectation en Île-de-France au moment de l'enquête	40%	43%	41%

Évolution dans la carrière. Habilitation à diriger des recherches et nomination à l'université.

Sur les 76 chercheurs ou chercheuses recruté.e.s sur la période d'étude, 19 occupent des postes à l'université, le plus souvent un poste de professeur(e) (ce chiffre comprend les nominations à l'étranger, parfois sur des postes d'assistant-professeur(e), parfois en détachement). Sur les 10 personnes recrutées en France sur des postes de professeur(e) (PR), seules 2 n'ont pas changé de lieu d'exercice. Par ailleurs 10 chercheurs/chercheuses sont devenu(e)s directeur/directrice de recherche (DR) CNRS. Sur ces 10 recrutements au titre de DR, 7 ont été accompagnés d'une mobilité. Par ailleurs, sur les 56 personnes encore chargé.e.s de recherche à l'heure actuelle, 14 ont connu une mobilité.

Pour comparaison avec les enquêtes précédentes (2) : il y a eu moins de mobilité du CNRS en direction des universités françaises. Deux explications peuvent être avancées. La diminution notable du nombre d'emplois en mathématiques dans les universités françaises, mais aussi un changement de stratégie possible des chargés de recherche ciblant plutôt un recrutement DR (nous rediscuterons aussi ce point au moment de regarder les qualifications au CNU).

À noter aussi les deux chiffres suivants. Parmi les chercheurs ou chercheuses recruté.e.s PR à l'université, le temps moyen entre le recrutement initial au CNRS comme chargé(e) de recherche et le recrutement PR est de 5,5 années, alors que le temps moyen entre recrutement CR et le recrutement DR au CNRS est de 8,85 années. La différence est notable et l'écart est stable par rapport à la précédente enquête.

Soutenir une habilitation à diriger des recherches (HDR) est un passage obligé pour une carrière universitaire française (notons que même si ce n'est pas obligatoire l'usage est aussi d'avoir une HDR pour être recruté DR). Parmi les 76 chercheurs ou chercheuses concerné.e.s par l'étude, 40 ont d'ores et déjà soutenu une HDR, soit un taux de 53%. Le temps moyen pour soutenir une HDR après recrutement comme CR au CNRS est de 5,7 années. Enfin la qualification au CNU (essentiellement en 25e ou 26e section, mais aussi parfois dans des sections voisines comme traitement d'image) concerne 25 chercheurs ou chercheuses, soit 62,5% de ceux qui sont titulaires de l'HDR.

Rattachement aux sections du conseil national des universités (CNU)

25 chercheurs ou chercheuses ont obtenu leur qualification au CNU pour concourir sur les postes de PR. La ventilation des informations par section est donnée dans le tableau 3.

Ce chiffre en diminution de 29% par rapport à l'enquête précédente corrobore l'idée de la préférence d'une carrière au CNRS à un recrutement PR. Néanmoins, les chiffres du tableau ci-dessus sont à considérer avec précaution. Il est incongru de faire des statistiques sur des petits échantillons. La même remarque s'applique avec plus d'acuité encore à la section suivante.

Quelques questions relatives au genre

Sur les 76 personnes ayant répondu au questionnaire, 16 sont de genre féminin. Ce chiffre est encore faible mais en nette augmentation par rapport à l'enquête précédente. Seules 4 ont soutenu une HDR (durée moyenne écoulée entre le recrutement comme CR au CNRS et la soutenance de l'HDR 6 ans). Une personne est devenue professeure des universités, trois directrices de recherche au CNRS, deux occupent des postes dans des universités étrangères (ne nécessitant pas une HDR). Pour les questions liées à la mobilité, 7 ont changé d'unité de recherche entre la date de leur recrutement comme chargée de recherche CNRS et leur affectation actuelle. Certaines chercheuses au CNRS concernées par l'enquête m'ont signalé à juste titre le biais important lié aux maternités sur la période de l'enquête ; à titre d'illustration 25% des chercheuses et 60% des chercheurs ont soutenu une HDR au moment de l'enquête.

Tableau 2 – Évolution de carrière. Pourcentage de nomination PR en DR

	1992-1999	2000-2007	2008-2015
Nomination à l'université comme professeur	41%	33%	13%
Recrutement comme DR au CNRS	7%	16%	9%

Tableau 3 – Nombre de qualifications au CNU

Qualification obtenues	2000-2007	2008-2015
CNU 25	22	11
CNU 26	12	14

Olivier Goubet
Université de Picardie Jules Verne, chargé de mission à l'Insmi.

Merci à Philippe Briand, Catherine Matias et Michèle Morot (INSMI CNRS) pour leur concours à cette enquête.

Bilan des sessions 2020 du CNU section 25

1. Qualifications et CRCTS

La session d'examen des qualifications, qui comporte désormais également l'examen des demandes de CRCTS au titre du contingent national, s'est déroulée le 21 et le 22 janvier 2020 à l'IHP, que la section remercie pour son accueil.

1.1 – Qualifications

Concernant les qualifications, aux fonctions de maître de conférences d'une part et de professeur des universités d'autre part, le tableau qui suit résume les données des trois dernière années, y compris 2020. La section a pour pratique de qualifier les dossiers qui présentent des éléments tangibles d'activité de recherche et d'enseignement relevant du CNU25 : les dossiers non qualifiés sont majoritairement des dossiers qui ont été considérés comme ne relevant pas des champs disciplinaires couverts par la 25, à l'exception d'une poignée de dossiers insuffisants ou insuffisamment renseignés (sur le volet recherche notamment). La section accepte, notamment pour des dossiers venant de soutenir, la présence de prépublications comme attestant d'une activité de recherche avérée, au-delà de la simple soutenance. Le même principe s'applique aux qualifications PR : dans les situations où il s'agit d'une demande de renouvellement de qualification, la section considère indispensable la présence d'éléments d'activité sur la période couverte par la qualification précédente.

Enfin, des dossiers apparaissent naturellement comme relevant de plusieurs sections : le cas le plus fréquent est celui de 25 et 26, mais l'on rencontre également 25 et 27, ainsi que 25 et 72. Dans tous ces cas, les dossiers peuvent tout à fait être qualifiés en 25 et dans l'autre section.

Tableau 1 – Maître de conférences

	Qualifiés	Hors section	Non qualifiés	Non transmis	Autres cas non étudiés	Total	re- -qualif.
2018	209	19	7	14	12	261	13 (5%)
2019	248	27	13	34	2	324	27 (8,3%)
2020	229	25	4	26	7	291	19 (6,5%)

Tableau 2 – Professeur des universités

	Qualifiés	Hors section	Non qualifiés	Non transmis	Autres cas non étudiés	Total	re- -qualif.
2020	229	25	4	26	7	291	19 (6,5%)

Notons qu'après une baisse du nombre de candidat.e.s dont la thèse a été soutenue à l'étranger en 2018 (24,9%) on note une légère croissance : 29% en 2019 et 33,6% en 2020.

1.2 – Congés pour recherche et conversion thématique

Rappelons que les CRCTS sont attribués de deux façons différentes : par les sections CNU sur un contingent national, et par les établissements (dans un second temps) sur un quota qui leur est propre. Le CNU25 disposait en 2020 de 7 semestres de CRCTS à distribuer : c'est bien peu en regard du nombre de demandes, près de 70. Le bon déroulement de l'examen de ces demandes a été perturbé par des décisions abruptes de la DGRH, qui a fait disparaître en cours de route les demandes de CRCT au titre des retours de congé maternité ou maladie longue durée. Trois demandes se sont ainsi volatilisées, et ce alors que la section avait voté le principe de donner une priorité à ce type de demandes. Après la tenue de la session, et donc la saisie des sept semestres attribués, le président de section s'est vu demander un avis du jour au lendemain sur ces trois dossiers, « pour transmission aux établissements ». La gestion par les établissements de ce type de demande (de façon générale, au-delà de la section 25) semble avoir été faite de façon erratique, certains les agrégeant aux demandes spécifiques de congés pour projet pédagogique (que le ministère avait doté d'une enveloppe spécifique), d'autres ne semblant pas être au courant de la procédure court-circuitant l'examen du CNU. Cette cacophonie administrative, malgré les assurances réitérées du cabinet du MESRI et de la DGESIP que ce sujet leur tenait à cœur, illustre les difficultés rencontrées par le CNU dans son fonctionnement quotidien, indépendamment de la pandémie. Il est d'ailleurs triste de constater que pour la session 2021, il a été explicitement notifié que ces demandes réintégraient le contingent « normal », malgré les assurances données et les circulaires qui ne peuvent se substituer aux arrêtés existants[1].

Malgré ce contexte difficile, la section a privilégié dans son examen des dossiers les demandes s'appuyant sur un véritable projet, que ce soit un déplacement de longue durée, la préparation de l'HDR, ou un virage scientifique.

Bénéficiaires : Dominique Hulin, Cécile Dartyge, Pierre Fima, Thierry Gallay, Emmanuel Opshtein, Ronan Terpereau, Mihai Tibar.

2. Avancement de grade

La session « Avancement de grade » s'est tenue du 8 au 10 juillet 2020, accueillie par le Département de Mathématiques et Applications de l'ÉNS Ulm, remercié ici pour son hospitalité. Environ la moitié des membres convoqués étaient présents, les autres participant à distance. Le bureau souligne qu'il s'agit de circonstances exceptionnelles dues à la pandémie, et que de telles réunions doivent normalement se dérouler en présentiel pour une meilleure qualité de discussion.

Chaque dossier est étudié par deux rapporteurs désignés au préalable par le bureau. L'évaluation tient principalement compte des activités réalisées depuis la dernière promotion obtenue. La section est attentive à l'équilibre des dossiers entre recherche, enseignement, responsabilités administratives, encadrements, diffusion, etc. Elle apprécie les informations détaillées sur le devenir et les publications des doctorants, la liste des interventions dans les conférences, ou encore la teneur exacte des responsabilités administratives pour pouvoir en apprécier l'importance. Elle favorise également la qualité des publications sur leur quantité. Les congés maternité ou maladie longue durée (plus généralement, les événements pouvant impliquer un retard de carrière) sont à indiquer de façon qu'il puisse en être tenu compte à leur juste hauteur. Enfin, les dossiers non promus n'ont pas été accompagnés cette année d'un avis détaillé, suivant la pratique établie par les sections précédentes. La section réfléchit à une évolution de cette position en fonction d'une analyse des retours des universités.

1. cf. Arrêtés NOR : ESRH1927748A, JORF n° 0270 du 21 novembre 2019 et NOR : ESRH1900274A du 29 octobre 2019.

Tableau 3 – Panorama

	MCHC	MCE	PR1	PRCE1	PRCE2
Candidats	70	41	63	46	30
dont candidates	10 (14%)	10 (24%)	4 (6%)	1 (2%)	2 (7%)
Promus	20	12	10	10	8
dont promues	3 (15%)	5 (42%)	2 (20%)	0 (0%)	0 (0%)
Âge Min-Max	38-52	53-63	40-64	41-61	55-66

Conformément à l'engagement pris à l'unanimité en début de mandat, aucun membre du CNU n'a été promu.

2.1 – Promotion à la hors classe des maîtres de conférences

Les promotions à la hors classe présentent un éventail large de candidats aux profils variés. L'ensemble des activités est pris en compte et un investissement continu au cours de la carrière, dans des directions pouvant évoluer, est prépondérant. Le CNU est attentif à une répartition harmonieuse dans les différentes catégories d'âges et d'avancement de carrière des candidats retenus. L'obtention de l'HDR est un réel atout, sans être un pré-requis.

Liste des promus : Marc Arconstanzo, Michel Belliart, Farrell Brumley, Guilhem Castagnos, Thierry Daudé, Anne-Gwenaelle De Roton, Thomas Dedieu, Martin Deraux, Jérôme Dubois, Sébastien Gauthier, Jérémie Guilhot, Taoufik Hmidi, Vincent Humilière, Florian Ivorra, Sophie Morier-Genoud, Lionel Nguyen Van The, Marc-Hubert Nicole, Nicole Raulf, Mihai Stancu, Gabriel Vigny.

2.2 – Promotion à l'échelon 7 dit « exceptionnel » des maîtres de conférences

La promotion à l'échelon 7 dit « exceptionnel » est en place depuis 4 ans et n'a pas encore atteint sa vitesse de croisière. Cet échelon doit représenter dans 3 ans 10% de l'effectif du corps des Maîtres de conférences (classe normale et hors classe). Les promotions proposées résulteront alors uniquement du flux sortant, principalement composé des départs à la retraite.

Si l'âge a été déterminant pour les premières promotions à l'échelon exceptionnel afin d'assurer un renouvellement régulier, on assiste actuellement à un rajeunissement du vivier des candidats avec des profils de premier plan en recherche, en partie provoqué par la pénurie de postes de professeur. Face à cette pression forte, la section reste attentive à promouvoir également des profils plus âgés, notamment pour continuer à assurer un roulement dans les années qui viennent. Le critère d'âge n'est cependant pas exclusif, chaque dossier étant étudié soigneusement, et son importance sera probablement amené à encore diminuer dans les années qui viennent.

Liste des promus : Christian Ballot, Saïd Benayadi, Rachel Boumaaz, Maria Cuesta, Frédéric Fauvet, Françoise Géandier, Isabelle Liousse, François Métayer, Marie-Hélène Mourgues, Laurent Niederman, Alain Rivière, Franck Wielonsky.

2.3 – Promotion à la première classe des professeurs

La promotion à la première classe des professeurs est soumise à une pression extrêmement forte qui rend les choix très difficiles. La qualité scientifique, attestée par les publications, le rayonnement et l'animation scientifique, l'encadrement doctoral, les responsabilités administratives et pédagogiques importantes sont des éléments clés. Les candidats sont appelés à rédiger leur dossier de façon à mettre clairement en avant toutes leurs activités saillantes. Les dossiers avec au moins trois ans d'ancienneté de professeur sont privilégiés.

Liste des promus : François Béguin, Bruno Deschamps, Jean Fasel, Olivier Guichard, Nicolas Jacon, Philippe Jaming, Julien Marché, Nicole Mestrano, Viet Anh Nguyen, Galina Perelman.

2.4 – Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des professeurs

La promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des professeurs récompense les collègues qui se sont distingués dans leurs activités tout au long de leur carrière. On y évalue l'importance des contributions scientifiques, des services rendus à la communauté, l'influence de l'activité de formation doctorale. Les dossiers avec au moins trois ans d'ancienneté de professeur première classe sont privilégiés.

Liste des promus : Pascal Boyer, Christophe Cheverry, François Dahmani, Christian Maire, Grégory Miermont, Petru Mironescu, Christophe Mourougane, Paul-Émile Paradan, Leonid Potyagalo, Nicolas Ressayre.

2.5 – Promotion au second échelon de la classe exceptionnelle des professeurs

Le principal critère pour cette promotion, lorsque l'activité scientifique est incontestable, est l'ancienneté dans le grade, avec une barre se situant actuellement entre la sixième et la septième année.

Liste des promus : François Berteloot, François Dumas, Benjamin Enriquez, Vincent Franjou, Oussama Hijazi, Johannes Kellendonk, Dimitri Markouchevitch, Pol Vanhaecke.

3. Primes d'encadrement doctoral et de recherche

La session d'examen des demandes de PEDR s'est tenue à la Faculté des sciences de l'université de Montpellier, du 7 au 9 septembre. La section remercie le président de l'université, la Faculté des sciences et le laboratoire de mathématiques pour leur accueil, malgré les conditions sanitaires compliquées. Comme la session des promotions, cette session s'est déroulée avec une partie des membres en distanciel, ce qui ne facilite pas la qualité des discussions.

Il convient de rappeler que ce n'est pas le CNU qui attribue les PEDR : les sections rendent une série de « notes d'item » sur chaque dossier, libellées Publications, Encadrement, Diffusion, Responsabilités, ainsi qu'un avis global qui, contrairement aux notes d'item, est soumis à quota. Ces quotas sont appliqués séparément pour chaque corps : ainsi, pour 101 dossiers PR examinés, nous disposions de 20 avis globaux A, 30 avis globaux B, et 51 avis globaux C. Les quotas étaient identiques pour 102 dossiers MCF examinés (avec 52 C). Ces quotas sont donc calculés sur le nombre de demandes déposées, et non pas sur le nombre de candidats éligibles à faire une demande (contrairement aux promotions de grade). Pour mettre ces données en perspective, il y a environ 500 PRs en activité en section 25, ainsi que 850 MCFs. Il y a donc une très forte auto-censure, notamment chez les MCFs.

La section considère que la quasi-totalité des dossiers examinés ont une activité scientifique avérée, de bonne voire très bonne qualité. La très grande majorité des dossiers présente également un profil émargeant à tous les items (seul un dossier véritablement exceptionnel sur un item peut espérer rattraper un manque sur un autre... ces dossiers sont très rares). Il faut donc comprendre la bien mal choisie notation C comme signifiant « dossier qui a été considéré comme étant dans la seconde moitié de ceux examinés cette année », et rien d'autre.

Les 40 dossiers notés A se sont vus attribuer la prime par leur établissement. Parmi les 60 dossiers notés B, 43 (25 PRs et 18 MCFs) se sont vus attribuer la prime par leur établissement, et enfin, 3 dossiers (1 PR et 2 MCFs) notés C se sont vus attribuer la prime par leur établissement (ces données ne préjugent pas des montants, qui ne sont pas communiqués dans le retour fait au CNU par le ministère). Ainsi, 86 dossiers sur 203 examinés ont obtenu une PEDR dans leur établissement, soit un taux de 42%. Il y a cependant de grandes disparités dans le traitement fait par les établissements pour les notes B, sans parler de la prise en compte très variable des notes d'item. Le CNU n'a aucune prise sur ces décisions, et il ne dispose pas en amont des critères établissement par établissement (qui peuvent de surcroît changer d'une année sur l'autre). Cette situation rend le travail extrêmement pénible pour la section qui n'est pas décisionnaire et travaille en aveugle, cependant que les candidats malheureux ont le sentiment compréhensible d'avoir été sous-notés ou maltraités. La section ne peut que déplorer un tel système, générateur de frustrations de tous ordres.

Tableau 4 – Panorama parité

	MC	PR
Candidats dont candidates	102 11 (10,7%)	101 3 (3%)
20% dont candidates	21 3 (14,2%)	20 0 (0%)
30% dont candidates	30 4 (12,9%)	30 1 (3,3 %)
50% dont candidates	51 4 (8%)	51 2 (4%)

Où y avait-il des mathématiques à Paris en 1992 ?

(paru dans la *Gazette* numéro 53, juin 1992)

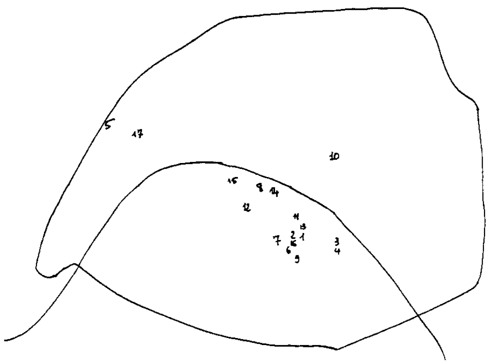
Pour les congressistes de l'E.C.M. :

où trouve-t-on des mathématiciens à Paris ?

À PARIS :

Départements de mathématiques des universités :

1. Université Paris I, 1 place de la Sorbonne, Paris 5
2. Université Paris V (René Descartes), UFR de math., logique formelle et informatique, 12 rue Cujas Paris 5
3. Université Paris VI (Pierre et Marie Curie), place Jussieu, Paris 5



4. Université Paris VII, place Jussieu, Paris 5
5. Université Paris IX, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, Paris 16

Grandes Écoles :

6. École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, Paris 5
7. École Nationale des Mines, 60 Bd Saint-Michel, Paris 6
8. École des Ponts et Chaussées, 28 rue des Saints-Pères, Paris 6
9. Institut National Agronomique, 16 rue Claude Bernard, Paris 5
10. Centre National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin, Paris 3

Autres centres de recherche :

11. Collège de France, place Marcelin Berthelot, Paris 5
12. Centre de Mathématiques Sociales, 54 boulevard Raspail, Paris 6
13. Centre d'Économétrie 1 rue Descartes, Paris 5
14. Bureau des Longitudes, 3 rue Mazarine, Paris 6
15. Centre de Mathématiques Financières de la Caisse des Dépôts, 110 rue de l'Université, Paris 7
16. École Pratique des Hautes Études, 11 rue Pierre et Marie Curie, Paris 5
17. Centre Scientifique IBM, 36 avenue Raymond Poincaré, Paris 16

DANS LA RÉGION PARISIENNE :

Départements de mathématiques des universités :

Université Paris X, 200 avenue de la République 92000 Nanterre
Université Paris XI, Bâtiment 425, 15 avenue Georges Clémenceau 91405 Orsay
Université Paris XIII, avenue Jean-Baptiste Clément 93430 Villetaneuse
Université de Versailles, 45 Av des États-Unis 78000 Versailles
Université d'Évry, Bd des Coquibus 91205 Evry

Grandes Écoles :

École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique (ENSET), 61 avenue du Président Wilson, 94230 Cachan
École Polytechnique, plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau
École Centrale, Grande Voie des Vignes 92290 Chatenay-Malabry
École Supérieure d'Électricité, laboratoire des signeaux et systèmes, Plateau du Moulon 91190 Gif sur Yvette
École des Ponts et Chaussées, avenue Mont d'Est, 93160 Noisy le Grand

École Supérieure des Sciences Économiques et Commerciales (ESSEC), département de statistiques, rue des Écoles, 95201 Cergy-Pontoise

Autres centres de recherche :

Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), 35 route de Chartres, 91440 Bures sur Yvette

Institut National de la Recherche Agronomique, 78350 Jouy en Josas

Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), Domaine de Voluceau 78153 Le Chesnay.

Centre d'Études Nucléaires, institut de recherche fondamentale, 91191 Gif sur Yvette

CNET 38 rue du Général Leclerc, 92131 Issy les Moulineaux

Électricité de France, Division études et recherches, 1 avenue du général de Gaulle, 92141 Clamart

Institut Géographique National, département de traitement de l'information géodésique, 2 avenue Pasteur, 94160 Saint-Mandé. ■

Livres

Dans la tête d'un mathématicien
Pierre-Louis Lions
Humensciences Editions, 2020. 253 p. ISBN : 978-2379311314

J'ai appris récemment que Pierre-Louis Lions, né en 1956, médaillé Fields 1994, venait d'écrire un livre intitulé « Dans la tête d'un mathématicien ». Les publications non scientifiques de cette rockstar de l'analyse non linéaire sont si rares que je me suis empressé, par curiosité, de me procurer un exemplaire.
Il ne s'agit pas d'un roman ou de littérature, l'intérêt du livre est ailleurs. On y découvre une personnalité scientifique de premier plan, à la fois puissante et séduisante, passionnée, pleine d'humour, axée sur le concret. On y découvre également une histoire personnelle riche et étonnante, assez éclairante. On y découvre enfin les analyses et opinions de Pierre-Louis Lions sur toutes sortes de sujets, y compris sur des questions d'actualité. Sa liberté de pensée et d'expression, souvent loin des conformismes habituels, fait vraiment plaisir intellectuellement. À titre d'exemple, sa position sur le réchauffement climatique et sur le nucléaire, courageuse, rejoint celle de Jean-Marc Jancovici, à rebrousse poil d'un dogme symbolique de l'écologie politique actuelle. Sa position sur la réforme LRU est tout aussi courageuse et à contre-courant.

Led Zeppelin, pour vibrer avec la génération née dans les années 1950

De manière générale, PL^2 s'intéresse avec sérieux à toutes sortes de thèmes en rapport avec les sciences et les technologies, sans avoir la prétention de tout comprendre, fait appel à son intuition et expérience de chercheur et de modélisateur, prône à la fois la recherche de haut niveau et les approches globales, et n'hésite pas à penser par lui-même, à donner son avis. Ce livre donne envie d'en savoir plus, d'engager la discussion, de lire, de penser.

Le passage sur ses grandes découvertes en analyse non linéaire, sa manière de les relier à des motivations concrètes, et le peut-être trop bref récit de ses collaborations est véritablement passionné et passionnant : mécanique des fluides et solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi avec Michael Crandall, mécanique quantique et atomique et principe de concentration-compacité suite à une inspiration de Srinivasa Varadhan resté dans l'ombre, théorie cinétique des gaz et approche de DiPerna-Lions pour l'équation de Boltzmann, etc.

Rares sont les mathématiciens du niveau de Pierre-Louis Lions à avoir une telle passion pour les mathématiques appliquées, une passion partagée, silencieusement, avec son illustre père Jacques-Louis Lions.

Les célébrités sont souvent en décalage avec leur image publique, et c'est par ce type de livre très personnel qu'un rééquilibrage devient possible, qu'une sorte de réhumanisation s'opère avec tout ce que cela comporte. Mais ceci ne vaut ici que pour le peuple des mathématiciens, car les célébrités des mathématiques sont rarement des célébrités tout court. Ce type de livre permet aussi et surtout au grand public de découvrir un mathématicien de premier plan en action.

Tout comme Cédric Villani, Pierre-Louis Lions est une singularité dans le paysage des mathématiques, mais une singularité à la fois en prise avec le réel et à l'écart des médias – ne pas manquer le chapitre Lady Gaga et moi, à déguster avant ou après *Théorème vivant*.

Ce texte est une adaptation d'un billet de blog sur `https://djalil.chafai.net/blog/`

Djalil Chafai
Université Paris-Dauphine

Quels livres emporter sur une île déserte ?

Damien Gayet

2021

À la suite d'un auteur qui parlait de livres de mathématiques à emporter sur une île déserte, j'ai lancé un petit sondage pour connaître les ouvrages que choisiraient les lectrices et lecteurs de la *Gazette*. Comme promis, voici un petit bilan des retours que j'ai reçus.

C'est peut-être un biais dû aux gens que je fréquente, mais clairement, les livres de géométrie ont la cote ! Milnor et son célébrissime *Morse theory* est la star incontestée de ce sondage. W. Thurston est revenu également pas mal de fois, avec *The Geometry and topology of three-manifolds*, ses *Notes*, mais également avec son exégèse *Thurston's work on surfaces* d'A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poenaru. Un collègue emmènerait « les œuvres de Maryam Mirzakhani que je téléchargerais sur arxiv et ferais relier avant le débarquement. » M. Berger et sa *Géométrie vivante (ou l'échelle de Jacob)* est plébiscitée, mais également *A panoramic view of Riemannian geometry*, « à feuilleter » (seulement ?). *Non commutative geometry* d'A. Connes conteterait un collègue dont ça n'est pas la spécialité. M. Gromov est plusieurs fois choisi avec son *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, « livre clef de la géométrie moderne » d'après l'un de ses adorateurs. Certains livres ne sont mentionnés qu'une fois, mais avec quelle ferveur ! *An introduction to curvature* de J. M. Lee a été lu

« en trois soirs avant de me coucher, et je me suis forcé à m'arrêter de lire ». Netflix devrait le diffuser en série ! Un sobre *Nœuds. Genèse d'une théorie mathématique* d'A. Sossinsky est revendiqué, comme le célébrissime *Principles of algebraic geometry* de Griffiths & Harris. *Riemannian geometry* de Gallot, Hulin, & Lafontaine, « pour lire de la première à la dernière page ». Et puis un *Mirror symmetry* de Hori et al., « 1000 pages environ, toujours utile en cas de survie s'il faut démarrer un feu. Ça peut aussi faire un petit escabeau pour cueillir des fruits. »

Il y a les érudits ou ceux qui ont peur de s'ennuyer avec *Les Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques*, édition commentée de K. Chemla et S. Gao, 1140 pages, « ça permet de voir venir » me dit son zélateur, ou encore *History of topology* édité par I. James, « un pavé, mais le peu que j'en ai lu est passionnant » me dit la personne qui le promeut.

Les livres généraux d'algèbre ont la cote : *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry* d'Eisenbud, « exemplaire pour ce qui concerne le style et la pédagogie », quelques Serre, dont *Topics in Galois theory* « dans l'édition originale polycopiée du cours qu'il a fait à Harvard en 1988. Assez romantique ? » m'écrit un fan du livre. Toujours en algèbre, un simple mais efficace *Algèbre générale* de A.G. Kurosh, au contenu « inépuisable », un *Basic notions of algebra* de Shafarevich, « un masterpiece ». « Si l'île déserte est aride », un collègue emporterait *Groupes algébriques* de Demazure et Gabriel, « aride [...] mais plein de trésors cachés ». Il y a aussi un énigmatique *Topology of numbers* de A. Hatcher. Les auteur·e·s français·e·s ne sont pas beaucoup choisi·e·s, mais il y a par exemple *Topics in geometric group theory* de P. de la Harpe. Il y a aussi un inquiétant *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker* d'A. Weil... « C'est sublime » a tenté de me convaincre son fan. Je lui fais confiance ! Il y a aussi un effrayant *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants* d'I. M. Gelfand, M. M. Kapranov et A. V. Zelevinsky. Là, on aurait aimé des explications, parce qu'on n'est pas convaincu ! Une non-mathématicienne me propose « le bien illustré » *Groupes stables* de B. Poizat « pour rigoler (et faire du feu) ».

Les analystes ont eux aussi leurs classiques à emporter, *Topics in harmonic analysis* d'E. Stein, *Initiation à l'analyse fonctionnelle* de V. Avanissian, des encore plus classiques comme *Analyse réelle et complexe* de Rudin ou « Le Brézis », on sait bien de quoi on parle ! Et puis aussi, de T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, pour qui le lecteur qui le mentionne « a un faible ».

Les probabilistes ne sont pas en reste avec un rude *Upper and lower bounds for stochastic processes* de M.Talagrand (dont il faut absolument lire l'interview publié dans un numéro déjà *collector* de la Gazette), mais également *Calcul des probabilités* de D. Foata et A. Fuchs, ou encore un titre qui fait un peu planer, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures* d'A. G. Savar. Il y a aussi les fans d'étrangeté qui emmèneraient *The Banach–Tarski Paradox* par S. Wagon, mais ils sont peu nombreux. Bon, ils sont un.

Il y a celles et ceux qui préfèrent voir plus large, avec *What is mathematics ? An elementary approach to ideas and methods* de R. Courant & H. Robbin, « universel, et absolument magnifique ». Dans la veine « Grands Classiques », *La Science et l'hypothèse* d'H. Poincaré fait une timide apparition. Il y a aussi celles et ceux qui préfèrent des titres sympathiques comme *A mathematician's miscellany* de J. E. Littlewood, ou encore le positif *Winning ways for your mathematical plays* de E. R. Berlekamp, J. H. Conway et R. K. Guy. *Proofs from the book* d'Aigner et Ziegler semble très populaire, il a été par ailleurs choisi « sans hésiter » par l'un de ses fans. *The Princeton companion to mathematics* par T. Gowers, J. Barrow-Green et I. Leader a été mentionné.

Il y a les rebelles à la question, celles et ceux qui veulent prendre *À la recherche du temps perdu*, ou bien « dix milles pages blanches et des stylos » ou encore *Voyage au bout de la nuit*. Les rebelles conciliants ont opté pour *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach* d'A. Doxiadis. Et puis il y a celles et ceux pour qui l'idée de faire des mathématiques seul·e·s est tellement triste qu'ils préfèrent faire autre chose sur une île déserte !

Un grand merci pour toutes vos réponses !

Tangente 198

Tangente HS 77

Les deux numéros du magazine de la culture mathématique en vente chez votre marchand de journaux et en ligne sur tangente-mag.com

Actuellement en librairie ou disponible avec l'abonnement SUPERPLUS

***Bib Tangente* 73**

Maths et emploi

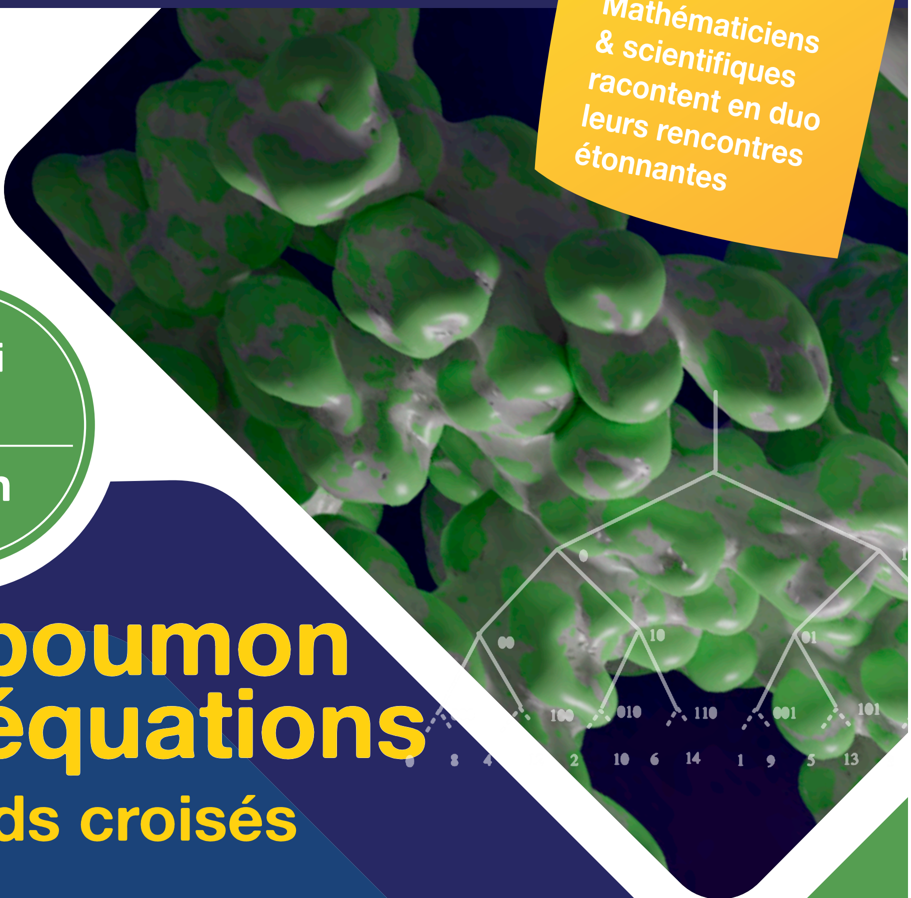
160 pages mettant en valeur l'importance des formations mathématiques dans le monde du travail

Pour recevoir *Tangente*, abonnez-vous sur

www.infinimath.com/librairie

MATHÉMATIQUES ÉTONNANTES

Mathématiciens & scientifiques racontent en duo leurs rencontres étonnantes



4 mai 2021

à 18h

Le poumon en équations

regards croisés

Bertrand MAURY

université Paris-Saclay / Éns Paris

Sam BAYAT

université Grenoble Alpes / CHU Grenoble / Inserm

Renseignements et inscription :
smf.emath.fr/conference-poumon

Sur place et en ligne • IHP
11 rue P. et M. Curie 75005 Paris

Société Mathématique de France

FONDATION BLAISE PASCAL

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LaTeX *`gztarticle`* fournie par les distributions TeX courantes (TeX Live et MacTeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTeX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TeX à jour.

Classe LaTeX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.