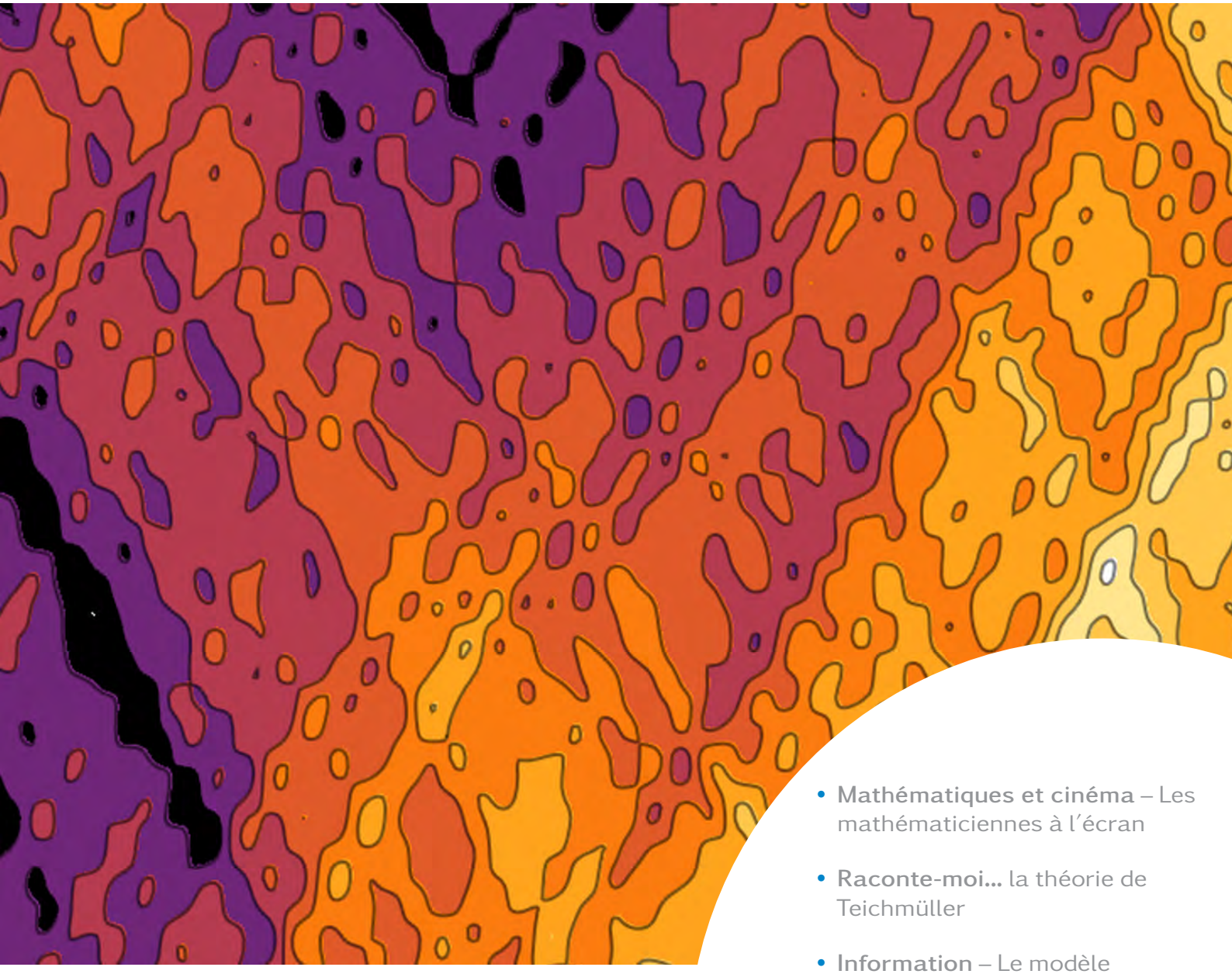
JUILLET 2022 – N° 173

la Gazette de la Société Mathématique de France



- **Mathématiques et cinéma** – Les mathématiciennes à l'écran
- **Raconte-moi...** la théorie de Teichmüller
- **Information** – Le modèle diamant dans l'œil du cyclone

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Damien Gayet
Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@univ-grenoble-alpes.fr

Rédacteurs

Mikael De la Salle
Université de Lyon
delasalle@math.univ-lyon1.fr

Christophe Eckès
Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Magali Ribot
Université d'Orléans
magali.ribot-barre@univ-orleans.fr

Charlotte Hardouin
Université de Toulouse
charlotte.hardouin@math.univ-toulouse.fr

Pauline Lafitte
École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Mylene Maïda
Université de Lille
mylene.maida@univ-lille.fr

Gabriel Rivière
Université de Nantes
Gabriel.Riviere@univ-nantes.fr

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Fabien Durand

ISSN : 0224-8999

À propos de la couverture. Cette image représente l'évolution en temps d'un système de douzaines d'oscillateurs étudiés dans l'expérience pionnière en calcul scientifique de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou. Les équations décrivant ces ressorts contiennent un terme non linéaire quadratique. Elles ont été résolues pour la première fois grâce à l'ordinateur MANIAC. Les couleurs sont proportionnelles aux amplitudes des oscillations. Les parallèles observées sont liées au comportement récurrent du système. Fermi, Pasta et Ulam s'attendaient au contraire à un comportement ergodique. « The Fermi-Pasta-Ulam Experiment » https://demonstrations.wolfram.com/TheFermiPastaUlamExperiment/ (crédit : Enrique Zeleny).

la Gazette
de la Société Mathématique de France

N° 173

Éditorial

Vous trouvez les étudiants amorphes et ingrats ? Vous vous dites même qu'une bonne augmentation des droits d'inscription ne leur ferait pas de mal ? Alors, comme moi et d'enthousiastes collègues géomètres au Congo Brazzaville, engagez-vous dans une école CIMPA avant qu'il ne soit trop tard ! Se retrouver pendant deux semaines devant un public enthousiaste et avide de comprendre ce que vous racontez est une expérience rare et qui peut sauver de la déréliction pédagogique. EDPistes et probabilistes, n'hésitez pas à postuler, vos thèmes sont en très large sous-représentation.

Du Congo, il est également question dans le rapport moral de la SMF. On y trouvera une vue d'ensemble des actions de notre chère SMF, de l'aide aux pays comme le Congo, aux conférences pour les lycéennes et lycéens, en passant par les droits humains. Quelques questions pour vous appâter : à votre avis, les livres en anglais publiés par la SMF ont-ils autant de succès que les livres en français ? À combien estimez-vous le montant des honoraires du commissaire aux comptes et de l'expert comptable de la SMF ? Un article indépendant présente par ailleurs ce qui est maintenant l'un des nouveaux fleurons des actions de diffusions de la SMF, le cycle « *Mathématiques étonnantes* ». Ne serait-ce que pour la liste des titres de conférences (mention spéciale pour celle sur le cœur), l'article vaut le détour.

Prenez carrément le large avec un texte sur l'image des mathématiciennes dans les films. Surdouées, alcooliques, suicidaires ou simplement tueuses, la fiction ne les épargne pas. Selon vous, à quelle mathématicienne est dédiée une mini-série russe ? Quelle théorie très anachronique promeut Hypathia dans le film *Agora* ?

Concernant les mathématiciennes bien réelles, nous publions une synthèse d'une discussion à l'IHÉS au sujet des femmes en mathématiques. Les interventions ont fait la part belle aux expériences individuelles et très concrètes, ce qui rend les thèmes classiques autour de la parité très percutants. Une question m'a semblé nouvelle et très intéressante : que s'est-il passé pour les brillantes étudiantes qui ont abandonné les mathématiques ? Une partie du texte est par ailleurs consacrée aux solutions.

Lecteurs mâles, vous verrez que vous avez votre rôle à jouer !

L'image fantomatique de couverture est d'ailleurs associée à une femme qui a failli passer à la trappe de l'histoire des mathématiques, Mary Tsingou. Il en sera question dans la recension de l'autobiographie du mathématicien au cœur de la bombe H américaine, Stanislas Ulam. Comment un mathématicien formé à la topologie et aux fondements des mathématiques a-t-il pu servir à quelque chose pour une bombe nucléaire ? Lisez la recension pour le savoir.

Le premier article de mathématiques parle de mathématiques bien pures, celles des métriques singulières sur des espaces complexes. En une dizaine de pages qu'on peut qualifier de denses, vous passerez du spectaculaire théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann aux équations de Monge-Ampère sur des variétés singulières, bref tout le XIXe siècle revisité au service de nouveaux objets naturels et contemporains.

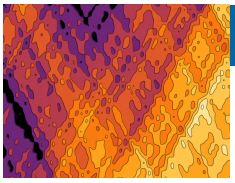
Le *Raconte-moi* de cette *Gazette* traite derechef de géométrie. L'auteur y présente avec douceur la théorie de Teichmüller. Avant de vous ruer sur cet article, dessinez sur un papier une surface compacte de genre g qui vous semble représentative de son espèce. Rendez-vous à la fin de l'article pour savoir si vous êtes dans le bon.

Fidèle à sa tradition, la *Gazette* présente trois textes engagés. L'un de ces textes s'étonne avec raison du peu de discernement, au mieux, de nos politiques, lorsqu'il s'agit des publications scientifiques.

Au nom de toute l'équipe de la *Gazette*, je vous souhaite une excellente lecture de ce numéro qui vous accompagnera cet été à la plage, à la montagne ou même, soyons fous, chez vous.

Damien Gayet

la Gazette
de la Société Mathématique de France



N° 173

Sommaire

SMF 5
Mot du président 5

Rapport moral 7
Rapport moral 7

Mathématiques et cinéma 19
Les mathématiciennes à l'écran – *P. Bellingeri* 19

Mathématiques 28
Géométrie kählerienne et pluripotentiel – *A. Zeriahi* 28

Parité 40
Promouvoir les femmes dans les sciences et en mathématiques – *L. Morhaim* 40

Raconte-moi 48
... la théorie de Teichmüller – *B. Petri* 48

Tribune libre 58
Lettre au comité exécutif de la Société mathématique européenne concernant la Russie et Israël 58
Témoignage d'un collègue ukrainien – *M. Chernodub* 59

Information 61
« Mathématiques étonnantes ». Un premier bilan, une nouvelle impulsion – *J. Buzzi* 61
Le modèle diamant dans l'œil du cyclone – *I. Famechon et M.-E. Herbet* 64

Livres 67

Société Mathématique de France SMF

N° 173

Mot du président

Chères collègues, chers collègues,

L'an passé je commençais le « Mot du président » en me réjouissant de la libération de notre collègue Tuna Altinel et j'indiquais qu'il était important que les sociétés savantes s'impliquent et prennent position pour la défense et le respect des droits humains tel qu'énoncés dans la Déclaration des Droits de l'Homme. L'impensable était malheureusement en marche. Cela fait désormais quatre mois que l'État russe a envahi l'Ukraine en faisant couler le sang des civils et en faisant régner la terreur.

Les sociétés savantes et la communauté ont un poids négligeable dans ces situations, mais ce n'est pas une raison pour se taire. Le négligeable existe et, nous le savons bien, peut apporter des bénéfices inattendus. Je pense ici, par exemple, au cas de Leonid Pliouchtch (lire l'interview de Michel Broué dans la *Gazette* 169). Nous pouvons émettre des positions et les rappeler régulièrement, avec insistance. Pas uniquement lorsque les événements se produisent mais également par la suite et longtemps après pour rappeler aux jeunes générations, ou au moins jeunes (je m'y inclus), qui auraient oublié les exactions perpétrées par nos gouvernants afin de ne pas croire que cela n'arrive qu'ailleurs. Je pense cette fois-ci à toutes les personnes qui ont œuvré pour que la vérité soit faite sur la disparition de Maurice Audin. Il y a évidemment beaucoup d'autres telles situations. Ce sont les raisons pour lesquelles la SMF parraine à nouveau cette année les deuxième *Azat Miftakhov days* spécialement intitulés « Against the war in Ukraine ».

Passons à de réjouissantes nouvelles. La SMF l'a dit à de nombreuses reprises, elle est activement engagée dans la *Science Ouverte*. Pour preuve, et avec le soutien du CNRS, j'ai le plaisir d'annoncer que tous les livres des collections *Cours Spécialisés*, *Panoramas et Synthèses* et *Séminaires et Congrès* parus avant 2020 sont désormais gratuitement accessibles en versions électroniques sur notre site web. Nous espérons que vous soutiendrez cet effort et ce risque financier, en diffusant cette information auprès des jeunes générations et des lectrices et lecteurs ayant des difficultés à accéder à la littérature mathématique, mais également en sollicitant des

adhésions, en achetant ou faisant acheter nos livres, en abonnant vos institutions à nos revues ou en nous proposant des projets de livres à éditer.

Afin de mieux cerner l'ampleur de nos autres activités vous retrouverez dans ce numéro de la *Gazette* notre rapport moral témoin de notre engagement au service de la communauté dans une acception très large. Faites-le savoir !

Je vous souhaite un bel été. Bien à vous

Le 1er juillet 2022

Fabien Durand, président de la SMF

Rapport moral

1. Affaires générales

1.1 – Situation générale

Comme en 2020, cette année 2021 a été très fortement impactée par la crise sanitaire. La SMF a poursuivi son adaptation à cette situation en pérénisant le télétravail.

Contrairement à l'année 2020, la vente des livres a continué mais a été moins importante que d'habitude.

Pour la deuxième fois et conformément aux nouveaux statuts de 2019 le vote électronique a été mis en place pour les élections au Conseil d'Administration. Ce processus de vote donnant toute satisfaction, il a vocation à se pérenniser.

Les célébrations des 150 ans de la SMF ont eu lieu du 16 au 18 mars 2022 à l'IHP. Ces journées, animées par un journaliste, se sont déclinées en exposés scientifiques, tables rondes autour de sujets chers à la SMF (enseignement, édition, droits humains) et spectacles Grand Public ; autant d'activités représentatives de notre association. Le tout a été filmé par une équipe professionnelle afin de conserver une belle trace de ces festivités.

Ces journées ont été un succès et nous remercions ici les institutions et collègues sollicités pour financer et organiser cet anniversaire.

On notera la sortie de la troisième édition du « Zoom des Métiers » sur les mathématiques, les statistiques et l'informatique, en collaboration avec l'Onisep, la SMAI et la SFDS.

Il est important pour la communauté de savoir que la SMF, la SMAI et la SFDS entretiennent d'excellentes relations : leurs présidente et présidents se réunissent brièvement une fois par semaine pour échanger sur l'actualité et coopérer le cas échéant, notamment sur les textes liés à l'enseignement et les droits humains. Il a été décidé d'organiser en 2022 la première journée commune autour d'un thème fédérateur, celui de l'aléa.

Comme tous les ans, durant le mois de juillet 2021, la SMF est intervenue auprès de différents rectorats afin de soutenir des demandes de recours de docteures agrégées et docteurs agrégés à qui des détachements avaient été refusés. En 2020 les dix-huit soutiens demandés avaient tous trouvé une issue favorable. En 2021 la SMF n'a eu à traiter « que » douze dossiers. Ceci est sans doute un effet de la baisse du volume total de mathématiques enseignées dans les lycées induit par la nouvelle réforme du lycée. Onze de ces dossiers ont abouti positivement. Nous sommes sans nouvelles du douzième. Ce soutien étant une action importante de la SMF et qu'il convient de faire connaître, un article a été écrit dans la *Gazette* 170 à l'attention des doctorantes et doctorantes, et de la communauté en général.

Dans le but de promouvoir les travaux de nos docteures et docteurs, la SMF s'est associée au magazine *Tangente* pour créer la rubrique « Ma thèse dans Tangente ». La docteure ou le docteur se prête au jeu de la « vulgarisation » de son travail de thèse dans le format de ce journal pour y être diffusé. Trois articles ont été publiés en 2021.

Le programme *MathC2+* a profité de l'année 2021 et de son activité ralentie par la pandémie pour se réorganiser, avec la mise en place d'un nouveau comité de suivi (en charge de l'évaluation des stages et de l'attribution des labels et financements) et d'un nouveau comité scientifique et d'orientation (qui s'occupe de la politique à plus long terme du programme). Malgré les contraintes, plus de 600 élèves ont bénéficié du label et du soutien de *MathC2+* lors de stages organisés partout en France. Les équipes ont travaillé à la recherche de mécènes pour financer le programme, *MathC2+* fait à présent partie des actions soutenues par la Fondation du Collège de France et la Fondation du CNRS. Tout est en place pour une reprise quasi-normale du rythme de stages pour 2022.

La SMF a été très active sur les droits humains comme vous pourrez le lire plus bas. Elle souhaite apporter de l'aide à nos collègues ukrainiens victime de l'agression de l'État russe. De nombreuses discussions ont eu lieu en Bureau et Conseil d'administration mais également avec la SMAI et la SFDS.

Des soutiens sont envisagés en concertation avec le programme Pause du Collège de France. Les discussions sont en cours.

La SMF s'engage vers la « Science Ouverte ». D'une part, elle a lancé une opération vers les institutions africaines développant des programmes de recherche en mathématiques en leur proposant des accès gratuits à l'ensemble de nos revues en versions électroniques. D'autre part, elle va rendre librement accessible les versions électroniques des ouvrages parus jusqu'en 2020 des collections *Cours Spécialisés*, *Panoramas et Synthèses*, et, *Séminaires et Congrès*. Les livres parus après cette date deviendront électroniquement accessibles à leur tour dès lors qu'un seuil de vente aura été atteint.

Il s'agit d'une première expérience d'ouverture de nos collections. Afin de préserver un équilibre financier et nous encourager à aller plus loin, nous avons besoin du soutien de la communauté. Cela peut se traduire par de nouvelles adhésions, d'individus et d'institutions, que vous, adhérentes et adhérents, sollicitez. L'achat de nos livres en version papier est également une façon de nous soutenir tout comme suggérer, à des collègues étrangers, de s'abonner à nos revues.

Un troisième axe sur lequel la SMF a toujours été très active, mais qui a bénéficié ces derniers mois d'un éclairage médiatique dont la commission enseignement a su s'emparer, est celui de l'enseignement et en particulier de la réforme du lycée. Un excellent article a été écrit par Mélanie Guenais dans la *Gazette* d'avril 2022 et vous retrouverez les éléments principaux de cette activité ci-dessous.

Il me semble que ces actions témoignent de l'engagement de la SMF dans des thèmes chers à nos adhérentes et adhérents mais plus largement à la communauté mathématique.

1.2 – Adhérents

Au 31 décembre 2021 la SMF comptait exactement 1727 adhérentes et adhérents. En 2020 elle en comptait 1800, 1841 en 2019, 1783 en 2018, 1829 en 2017 et 1830 en 2016.

Rappelons

- que la SMF n'a pas augmenté le montant des cotisations de ses adhérents depuis de nombreuses années ;
- que nos adhérents jouissent d'un accès électronique gratuit aux *exposés Bourbaki* ;
- que depuis quatre ans, les doctorantes et doctorants bénéficient de 3 années d'adhésion gratuite. En 2019 environ 125 doctorantes et doctorants avaient profité de cette opportunité. En 2020 ils étaient 185, en 2021, 242. Faites-le savoir !

En raison de l'inflation importante de ce début d'année 2022, il a été décidé que le gel du prix de l'adhésion ne serait pas maintenu en 2023.

Ainsi l'adhésion passera de 70 à 75 euros. Elle n'avait pas augmenté depuis 2014.

1.3 – Parité

La SMF a été interpellée à de nombreuses reprises et depuis plusieurs années sur le manque de neutralité de genre du titre de sa publication à destination des adhérentes et adhérents : la *Gazette* des mathématiciens. La SMF en a pris acte et a décidé qu'elle deviendrait la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Cette décision a été prise en concertation avec le comité éditorial de la *Gazette* et est effective depuis le numéro de janvier 2022.

La parité dans nos comités éditoriaux est systématiquement considérée. En 2022 ils seront nombreux à être renouvelés, ce sera le point de vigilance principal.

Lorsque la SMF parraine un événement scientifique, les oratrices, orateurs, comités scientifiques et d'organisation sont scrutés au regard de la parité. Il est arrivé une fois cette année de refuser un parrainage pour un manquement à ce critère.

1.4 – Droits humains

La SMF, en collaboration avec la SMAI a poursuivi sa mobilisation pour soutenir notre collègue Tuna Altinel, enseignant-chercheur à l'université Claude Bernard Lyon 1 au sein de l'Institut Camille Jordan. Après plus de deux ans retenu en Turquie, Tuna a enfin pu récupérer son passeport et revenir à Lyon en juin 2021. Cependant, la situation en Turquie reste fragile, notamment au sein de la prestigieuse université Boğazici entrée en résistance. Ainsi, la SMF et la SMAI ont rédigé une lettre, adressée au recteur de l'université Boğazici et au YÖK, pour demander la réintégration immédiate et sans condition de Mohan Ravichandran, mathématicien dont le contrat de travail a été annulé arbitrairement en novembre 2021. La pétition de soutien aux universitaires de Boğazici a aussi été signée par la SMF en mars 2022.

Enfin, la cour d'appel vient d'invalider le passeport de Tuna Altinel.

La SMF a également soutenu la mobilisation autour de notre collègue Azat Miftakhov, doctorant en mathématiques à l'université d'état de Moscou en Russie, condamné à six ans de « colonie pénitentiaire » en 2021, en parrainant les journées « The Azat Miftakhov day » dont la deuxième édition se tiendra en juillet 2022.

C'est dans un contexte de guerre en Ukraine, unanimement condamnée, que la table ronde « droits humains » organisée lors du congrès SMF 150 s'est tenue autour de Tuna Altinel, Michèle Audin, Michel Broué et Violaine Roussier Michon. Celle-ci a été l'occasion de rappeler l'engagement des mathématiciens et le rôle de relais que proposent les sociétés savantes dans la défense des libertés académiques.

2. Gazette

Il est de notoriété publique que les entretiens de la *Gazette*, une tradition qui s'était perdue et que nous avons fait renaître il y a quelques années, sont particulièrement lus et même, avec un peu d'optimisme, attendus. Ça n'est donc sans doute pas pour rien que chacun des quatre numéros de la *Gazette* de cette année écoulée en contenait un. À quoi tient l'attrait pour ces interviews (Michel Broué, Nicole El Karaoui, Michèle Audin et Hourya Benis-Sinaceur) ? Peut-être à ce qu'elles s'approchent de près d'un mystère, celui de la naissance d'une créatrice ou d'un créateur qui va marquer son domaine, cette singulière symbiose de culture familiale, de milieu social, de rencontres, de travail, de hasard et de choix.

Plus qu'une tradition, les articles de mathématiques forment depuis longtemps le socle de la *Gazette*. De la pêche durable à la géométrie d'Arakelov en passant par la gravité quantique (et même la topologie quantique) et l'intelligence artificielle, nous avons publié cette année passée une dizaine d'articles de domaines très variés. Ces articles nous fournissent un alibi pour des images de couverture détonnantes et originales. Ces petits univers graphiques sont maintenant une marque de fabrique de la *Gazette*, dont il faut parfois aller chercher les concepteurs un peu loin, puisque sur quatre couvertures, une seule est de facture française, les trois autres ayant été créées sur d'autres continents que le nôtre.

Les textes autour de la vie de notre communauté, avec des sujets classiques comme les bilans institutionnels, mais aussi la défense des droits hummains, représentent bien sûr une autre tradition de la *Gazette*. Plus récents mais en passe de devenir classiques, les thèmes comme la parité ou les publications n'ont pas été en reste. Nous avons vu également apparaître des problématiques nouvelles, comme l'impact écologique de notre façon de faire de la recherche, mais aussi des textes expliquant sans fard les dessous politiques, au sens noble, ainsi que les efforts, d'habitude celés, des protagonistes d'une aventure éditoriale ou d'une tempête médiatique.

Pour terminer, nous remercions chaleureusement Romain Tessera et Sophie Grivaux pour leurs intenses et loyaux services dans le comité ces six dernières années, tandis que nous saluons l'entrée à la *Gazette* de la Toulousaine Charlotte Hardouin, de l'Orléanaise Magali Ribot, et du Lyonnais Mikael de la Salle.

3. Conseil scientifique

Le fonctionnement du Conseil s'effectue essentiellement par courriel car aucune réunion n'a été possible depuis mars 2020. Nous échangeons régulièrement sur le renouvellement des membres des comités de rédaction avec l'objectif de développer une stratégie internationale. Un autre point d'attention est le montage de dossiers de candidatures par le Conseil scientifique et la SMF aux prix mathématiques internationaux. La SMF est souvent sollicitée et souhaiterait soutenir des candidats issus de l'ensemble de la communauté mathématique française, notamment en mettant en valeur des chercheuses et chercheurs dont les travaux n'ont pas encore la reconnaissance méritée. Enfin, en période normale le conseil scientifique de la SMF est appelé à se prononcer sur le parrainage des colloques lorsqu'il est souhaité par les organisateurs. Des critères simples, en particulier les questions liées à la parité, permettent de donner une réponse, positive ou négative, rapide.

4. Le pôle de Luminy

4.1 – La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro, lien entre le routeur et la SMF). Elle gère également l'en-

voi des exemplaires aux auteurs, à l'American Mathematical Society et s'occupe des réclamations.

La maison de la SMF travaille en étroite collaboration avec les secteurs des publications, des publicités et de la comptabilité.

Il faut noter que cette année a été marquée par un nouveau partenariat avec la maison d'édition Spartacus.

De plus, depuis cette année aussi, un nouveau mode de présentation de la SMF aux congressistes du CIRM a été mis en place. La présentation ne se fait plus systématiquement le lundi matin car ce sont les organisateurs qui reçoivent les informations de la SMF et qui peuvent les fournir à leurs participants au moment le plus opportun. Le travail de réalisation d'une courte vidéo officielle de présentation au CIRM de la SMF est en cours de création.

Cette présentation est renforcée par la présence de cinq vitrines au CIRM : deux à la Bastide, une à la bibliothèque et une près de chacun des auditoriums. Il y a aussi un présentoir à la bibliothèque sur lequel les livres sont directement accessibles pour être consultés et feuilletés. Enfin, une nouvelle vitrine a été mise il y a peu de temps dans le hall de l'auditorium A1, vitrine dans laquelle ont été exposés les publications les plus demandées et des mugs. Un kakémono a également été installé près de chaque auditorium avec notre remise automatique de 50% pour toute vente. Des cartons avec QR-codes ont été imprimés et sont régulièrement déposés dans chaque chambre des congressistes avec le petit livret papier des publications de l'année.

Enfin, des goodies SMF (stylos, mugs, porte-clés et carnets) ont été faits à l'occasion de SMF 150 et les carnets et mugs seront disponibles pour la vente au CIRM (c'est déjà le cas des mugs). Notons au passage que Christian Munusami et Marie-Françoise Koussémon ont participé activement à l'organisation de cet évènement des 150 ans de la SMF ! Merci encore à Christian et Marie-Françoise pour leur engagement quotidien au sein de la maison de la SMF !

De juin 2021 à avril 2022, l'activité générale, ralentie durant la période covid, a repris avec une hausse progressive des ventes d'ouvrages sur le site. En effet, les ventes CIRM pour les quatre premiers mois de l'année 2022 se chiffrent à 745 € alors que nous n'avons fait que 839 € pour toute l'année 2021.

En 2022, la maison de la SMF a procédé comme chaque année à un désherbage de ses stocks de livres. Dans ce cadre, la SMF s'est proposée de faire don des livres concernés par ce désherbage à des établissements de pays ayant peu de moyens, et a effectué un appel à dons pour financer les frais d'envoi. De nombreux mécènes ont répondu à cet appel, ce qui permettra d'effectuer l'opération de dons des livres désherbés, au cours de cette année. Merci encore aux nombreux adhérents et aux institutions qui ont répondu à cet appel !

L'année 2022 a aussi été marquée par l'implication nouvelle de la SMF dans le domaine de la « Science ouverte ». À ce propos, la maison de la SMF s'est en partie occupée de la mise en place d'abonnements électroniques gratuits à ses revues aux pays ayant peu de moyens et en particulier aux institutions des pays d'Afrique qui le souhaitent et qui développent un programme de recherche ou de niveau master en mathématiques. De nombreuses demandes ont déjà été reçues et sont en cours de traitement. Merci à tous ceux qui ont participé à ce beau projet. Plus de détails sont donnés ci-dessous.

4.2 – CIRM 2021

Situation générale

Le CIRM a été encore fortement affecté par la pandémie de Covid-19 en début d'année. Pendant le reste de l'année les conférences ont eu lieu en mode hybride. Le CIRM a bénéficié du soutien sans faille de la communauté mathématique ainsi que de ses tutelles (CNRS, AMU, SMF) qui ont débloqué des financements exceptionnels. L'aide de l'état pour la solidarité a aussi été la bienvenue. La subvention du MESRI, des collectivités locales (Région Sud, ville de Marseille) ainsi que le soutien du labex CARMIN et de l'institut ARCHIMÈDE ont aussi permis au CIRM de retrouver une stabilité financière.

Bilan des activités scientifiques 2021

De nombreux événements ont été annulés ou reportés, le CIRM a été fermé en début d'année. Néanmoins l'essentiel des rencontres mathématiques a été réalisé en mode hybride. La réponse à la crise sanitaire a permis de continuer une activité scientifique de qualité. Même si le nombre de présentes et présents aux événements a été faible, la participation en ligne a été très importante.

Voici un bilan chiffré des activités de l'année.

– Annulation : 30 événement annulés (10 conférences et écoles, 1 session de longue durée, 7 workshops, 12 recherches en résidence), 2064 participant.e.s ne sont pas venu.e.s.

– 8 reports en 2022, 3 reports en 2023.
– Événements maintenus : 25 conférences et écoles, 1 session de longue durée, 3 programmes pluri-annuels, 33 workshops, 11 recherches en résidence. 2167 participant.e.s présent.e.s et 2272 en distanciel.
– Événements virtuels : 13 conférences et écoles, 3 programmes pluri-annuels, 3 workshops. 2654 participant.e.s à distance.

Les événements virtuels ou hybrides permettent de toucher des collègues de pays très défavorisés qui ne viennent généralement pas au CIRM.

La Chaire Jean-Morlet [1]. La Chaire Morlet a aussi été extrêmement affectée par la crise sanitaire. Shi Jin (professeur à l'université Jiao Tong de Shanghai) a animé la chaire depuis la Chine. Malgré le décalage horaire, il a néanmoins participé à tous les événements en ligne. De nombreux collègues chinois ont assisté en ligne aux activités de la chaire grâce à l'implication de Shi Jin dans le projet. Le semestre de chaire de Javier Bobadilla (professeur au BECAM, Bilbao) s'est déroulé presque normalement avec de beaux événements et une participation artistique de Sylvie Pic. Bobadilla a aussi démontré une conjecture de Zariski. Ce semestre a été un grand succès.

LabEx CARMIN et ARCHIMEDE. Cette année, l'institut ARCHIMEDE a soutenu financièrement 13 événements. Le LabEx CARMIN a, quant à lui, participé au financement de deux écoles, d'une conférence et à une réalisation audiovisuelle. Le financement du LabEx CARMIN est arrivé très tard c'est pourquoi peu d'événements ont bénéficié de ce soutien financier.

Actions exceptionnelles

Cérémonie pour les 40 ans du CIRM. Le CIRM a fêté ses 40 ans en octobre 2021. Un programme festif a été réalisé pendant un jour et demi : exposés scientifiques, table ronde avec les anciens directeurs du CIRM, exposition de tableaux, pièce de théâtre, concours artistique pour une œuvre d'art, un visuel pour le CIRM. Une journée porte-ouverte pour les lycéens a réuni une centaine de jeunes avec pour point d'orgue une conférence d'Étienne Ghys.

Lancement de la plate-forme carmin.tv. L'inauguration de la plate-forme carmin.tv a eu lieu en décembre 2021 à l'IHP. La mise en place de cette plate-forme a nécessité de nombreuses années de travail. Le but de carmin.tv est de regrouper les vidéos mathématiques produites par les membres du LabEx carmin (IHP, IHES, CIMPA, CIRM) ainsi que celles d'autres partenaires comme la SMF.

Transformation numérique. 2020 a permis au CIRM d'accélérer sa transformation numérique, celle-ci a été consolidée en 2021 (optimisation du réseau informatique, achat de matériel...). Les nombres de vues et d'abonnés sur la chaine Youtube du CIRM ont explosé depuis le premier confinement, la bibliothèque audiovisuelle s'est bien enrichie (plus de 1800 vidéos).

Travaux. Comme en 2020, des travaux d'amélioration ont été effectués grâce à une subvention exceptionnelle de l'INSMI. Un effort particulier a été fait pour améliorer l'accessibilité pour les personnes à mobilité réduite (entrée de la chapelle et entrée sud de la bibliothèque). Le sol de la salle S2 a été rénové ainsi que 20 chambres.

Ressources humaines. L'équipe du CIRM a connu des changements. La cellule informatique a été renforcée par l'arrivée d'un ingénieur de recherche CNRS ainsi que par le recrutement d'un étudiant en alternance effectué par la SMF. La chargée de coopération internationale a effectué une mobilité au printemps. Sa remplaçante est arrivée à l'automne.

En conclusion, si l'activité du CIRM a été encore impactée par la pandémie, le CIRM a maintenant toutes les capacités pour organiser des conférences hybrides. Ce mode de fonctionnement hybride est devenu la norme.

5. Secteur grand public

Conférences publiques

En 2021-2022, les événements publics ont pu retrouver de leur normalité sous l'impulsion de Pierre-Antoine Guihéneuf, le nouveau chargé de mission « conférences ». Chacun de nos cycles a ainsi pu organiser des conférences « en vrai ».

1. www.chairejeanmorlet.com
2. Orateurs : Marie Théret, François Charles, Olivier Druet et Anne-Laure Dalibard.

– *Un texte, un mathématicien* a offert aux lycéennes et lycéens quatre conférences [2] comme prévu dans le grand auditorium de la Bibliothèque nationale de France, dont l'usage a pu nous être conservé grâce au nombre d'élèves mobilisés par ce cycle depuis sa création.
– *Une question, un chercheur*, à l'intention des étudiants de licences et de classes préparatoires, a repris normalement sur la base d'une conférence de mathématiques [3] à l'Institut Henri Poincaré et d'une de physique.
– *Mathématiques étonnantes*, destiné aux étudiants en fin de licence, enseignants du secondaire et autres collègues non mathématiciens, a donné lieu à deux conférences à Orsay et à Jussieu. [4]

La SMF s'efforce de donner à ces conférences remarquables tout le public qu'elles méritent par le travail des comités scientifiques, ensuite grâce aux initiatives de collègues organisant des éditions régionales [5] et enfin par la diffusion en ligne en direct et en différé. Ces questions de diffusion et de participation à distance sont animées par Bruno Duchesne, chargé de mission « communication audiovisuelle ».

Célébration des 150 ans de la SMF

En mars 2022, la Société a fêté ses 150 ans en organisant trois journées alliant :

– un programme scientifique de 9 conférences destinées à présenter des problématiques variées à l'ensemble des collègues ;
– trois tables rondes sur l'action de la SMF dans l'édition, l'enseignement et les droits humains ;
– un cocktail et trois spectacles.

La modération des tables rondes et l'animation générale ont été assurées par un journaliste. Il y a eu plus de deux cents inscriptions et déjà un millier de vues en ligne (en direct et en différé). L'ensemble des interventions et débats est en ligne, constituant une mémoire de cet événement.

Journées diverses

Notre Société participe au *Salon international de la culture et des jeux mathématiques* : nous y tenons un stand « métiers » avec les autres sociétés savantes mais surtout nous participons à son comité de pilotage.

La SMF a organisé avec l'association des journalistes scientifiques, la Bibliothèque nationale de France et plusieurs sociétés savantes (SMAI, SFDS, SCF, SIF, SFP) la 6e journée *Sciences et médias* sur la communication scientifique en temps de crise. Malgré une jauge réduite, la journée a attiré un public exceptionnellement nombreux en ligne.

Enfin, la SMF s'est associée à l'organisation de plusieurs événements comme la *2e jam* (Maths-Santé, IHP, octobre 2021) et l'*École de médiation scientifique en informatique et mathématiques*, portée par la SIF, Jussieu, mars 2022.

En préparation

Les Prix D'Alembert et Jacqueline Ferrand récompensant respectivement la diffusion et la pédagogie seront décernés à la mi-juin et remis lors d'une demi-journée spéciale à l'automne.

La SMF a préparé la nouvelle édition du *concours SMF junior*. Une réflexion a été menée pour en augmenter et en varier la participation en adaptant son règlement, notamment en permettant aux collègues volontaires d'animer des sessions locales et en étudiant un outil informatique pour en simplifier l'administration.

Françoise Pène et Damien Thomine ont lancé un appel à contribution pour un numéro spécial de la *Gazette Ateliers clés en mains*, prévu pour 2023. La diffusion très large de la *Gazette* contribuera ainsi à valoriser les ateliers conçus par nombre de collègues.

6. Enseignement

La SMF est membre de la CFEM [6]. La commission enseignement travaille en collaboration étroite

3. Oratrice : Elisabeth Gassiat.
4. Orateurs de ces conférences en duo : Aline Lefebvre-Lepot et Antoine Seguin (mécanicien des fluides) ; Sylvie Méléard et Meriem El Karoui (biologiste).
5. Trois conférences du cycle *Un texte, un mathématicien* étaient prévues à Nouméa (septembre 2021, annulée pour confinement), à Rouen (octobre 2021) et à Amiens (juin 2022).
6. Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques.
7. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

avec les autres sociétés savantes de mathématiques la SFDS, la SMAI, l'ARDM, le réseau des directeurs d'IREM, l'ADIREM, les professeurs de classes préparatoires de l'UPS et ceux du second degré, l'APMEP [7], ainsi qu'avec l'association Femmes et Mathématiques.

Cette année a été particulièrement marquée par l'impact de la réforme du lycée sur la formation en mathématiques au lycée, dont l'importance prise dans les médias et la campagne politique lors des élections présidentielles est sans précédent. La SMF y a joué un rôle important, et s'est fédérée autour d'un collectif large d'associations scientifiques regroupant toutes les associations partenaires de mathématiques ainsi que des sociétés et associations des disciplines scientifiques voisines et les associations pour promouvoir la place des femmes en sciences (Femmes Ingénieures, Femmes et Sciences) : Astronomie (CLEA, SF2A), Biologie (SFBD, SFB, GEM, UPA), Écologie (SFE2), Informatique (AEIF, EPI, SIF), Physique (SFP, UDPPC) ; et plus largement les Sciences Humaines Économiques et Sociales (APSES), Histoire et Philosophie des Sciences (SFHST, CNFHPST). Ce sont actuellement 27 associations qui sont regroupées dans ce collectif au sein duquel la SMF se trouve coordonnatrice.

Fonctionnement de la commission enseignement. Elle s'est réunie une fois le 18 novembre 2021. De nombreux échanges ont eu lieu par courriel. La prochaine réunion est prévue au mois de juin 2022.

Renouvellements. Deux postes sont à pourvoir en septembre, pour remplacer les départs d'Aurélie Cortez et Louise Nyssen.

Thème de l'année : les étudiants après la réforme du lycée. La commission enseignement s'est principalement focalisée sur la réforme du lycée et l'entrée de la première vague de lycéens issus de la réforme, pour questionner les profils des étudiants et essayer d'évaluer les nouveaux besoins. Elle a élaboré un questionnaire à destination des enseignants et responsables de L1 dans le but de recueillir des données concernant les changements dus à la réforme et permettre une réflexion adaptée. Les premiers retours font état d'une forte augmentation de l'hétérogénéité des niveaux en mathématiques, qui pose des problèmes d'accompagnement.

Médias et la place des mathématiques au lycée. Suite à la rédaction d'un communiqué sur la place des mathématiques et des filles après la réforme du lycée, un relais médiatique sans précédent a plongé la SMF et le collectif associé dans la campagne présidentielle. Il s'agit de l'action la plus importante de l'année côté enseignement, avec des dizaines d'interview des médias, pour les journaux, la radio, la télé, les réseaux sociaux, plus d'une centaine de publications dont un dossier à la Une du journal *Libération* et des tribunes dans les journaux *Le Monde* et *Le Figaro*, de nombreux éditoriaux et relais AFP et AEF.

Publications. Suite au relais médiatique au sujet de la place des mathématiques au lycée, une dizaine de communiqués a été écrite entre janvier et avril 2022 par le collectif auquel est associé la SMF. Ils sont rassemblés dans un dossier sur le site de la SMF et présentent les synthèses chiffrées des effets de la réforme du lycée sur la formation en mathématiques et en sciences des lycéens. Sont joints également une lettre aux candidats qui synthétise les points clés pour la formation en maths et en sciences pour les années à venir, ainsi que les analyses des dernières propositions du ministre du mois de mars 2022 sur l'ajout de mathématiques dans le tronc commun de première pour la rentrée 2022. Un article est paru sur le sujet des filles et des mathématiques au lycée dans la revue *Tangente* du mois de mai. Un article dans la *Gazette* de la SMF du mois d'avril présente une rétrospection de cette action qui se poursuit. Tous les articles ont été regroupés dans un dossier accessible sur le site de la SMF [8].

Rapport sur la formation en mathématiques. La rédaction d'un rapport en collaboration avec la CFEM sur l'impact des réformes du lycée, du bac, de la formation initiale et des concours du CAPES sur la formation en mathématiques est en cours de finalisation. Il devrait être rendu public d'ici septembre 2022.

Journée de rencontre du collectif. À la suite de l'action du collectif sur la formation en mathématiques et en sciences au lycée, une journée est prévue en juillet 2022 pour permettre de dégager des pistes d'aménagement de la structure du lycée qui puissent déboucher sur des solutions concrètes,

8. https://smf.emath.fr/smf-dossiers-et-ressourcesdossiercommuniquesreformemathssciences-collection

équilibrées et pérennes pour permettre d'améliorer la situation actuelle.

Table ronde enseignement - SMF 150. Sur le thème : « Enseignement des mathématiques, où allons-nous ? » avec la participation de Clémence Perronnet, sociologue des questions de genre, Stéphane Mallat, professeur au Collège de France, Renault D'Enfert, historien des mathématiques et des sciences, et Mélanie Guenais, vice-présidente de la SMF. Elle a été l'occasion de rappeler les origines des besoins en formation en mathématiques, intimement liées à la création de la SMF, les différentes évolutions des politiques de formation en mathématiques, en particulier au cours des 60 dernières années, puis des problèmes actuels rencontrés sur le sujet et des besoins croissants des compétences mathématiques pour les années à venir pour répondre aux besoins économiques et technologiques, écologiques, biologiques et humains de la société future. Il y a aussi largement été question de la place des filles et des femmes dans les parcours et les métiers des mathématiques, en lien avec l'actualité du moment sur la place des mathématiques et des filles au lycée, suite à la réforme.

Participation aux Assises des Mathématiques. L'INSMI organise du 14 au 16 novembre 2022 des Assises des Mathématiques autour des mathématiques et de leurs impacts dans la société. La SMF est associée à cet événement, comme la SMAI et la SFDS. Plusieurs thèmes sont abordés dont la formation et l'enseignement des mathématiques pour lesquel la SMF a été interviewée.

Réforme de la formation initiale des enseignants, liste débat-meef. Suite à la réforme de la formation initiale et du concours du CAPES, la SMF a créé en 2019 une liste de référents des masters MEEF Maths qui reste active. En 2022, la nouvelle version du concours de recrutement est mise en place, accompagnée de la nouvelle maquette des filières MEEF. Beaucoup de questionnements restent en suspens sur les conditions d'accueil des futurs M2 devant passer le concours et qui ne seront plus fonctionnaires stagiaires à la rentrée 2022 mais en stage une partie du temps sous différents statuts contractuels possibles, avec des missions différentes de pratique accompagnée ou bien de responsabilité. La question de la proximité de l'établissement d'exercice avec le lieu de formation est posée. L'adéquation des berceaux avec le nombre d'étudiants selon les académies est également en question. Par ailleurs, tous les lauréats avec un master non MEEF devront également bénéficier de la formation proposée aux M2, de même que les redoublants de l'année, ce qui annonce une année extrêmement compliquée. Notons que le report du concours cette année en fin de M2 a tari le vivier de candidatures déjà très bas, ce qui entraîne une chute inédite du nombre d'admissibles, largement inférieur au nombre de postes ouverts. Il semble donc difficile de couvrir les besoins pour l'enseignement des mathématiques à la rentrée prochaine. Le problème est encore plus marqué pour les enseignants du primaire dans les académies déficitaires (Créteil, Versailles entre autres).

Les journées de l'APMEP . Participation à la table ronde sur l'enseignement supérieur organisée par l'APMEP lors de ses journées nationales à Bourges en novembre 2022. Un stand a été mis en place aux côtés de MathEnJeans et de Femmes et Maths pour l'une des journées.

Agrégation. Réunion avec le directoire du jury de l'agrégation en septembre 2021, organisée par la SMF et la SMAI. On retient la suppression des malles qui suscitent un accueil mitigé des formateurs, et la création de l'agrégation d'informatique qui entraîne la suppression de l'option D d'informatique. Les oraux du concours se déplacent cette année à Strasbourg. Enfin, le jury remercie la SMF et la SMAI de lui avoir transmis les demandes tardives de refus de report de stage, ou au contraire cette année, de lauréats sans affectation n'ayant pas obtenu de bourses de thèse. La quasi-totalité des problèmes remontés a pu être résolue.

7. Publications

La SMF gère 9 revues internationales et collections de livres. Elle prend en charge l'ensemble du processus de publication, depuis la soumission, l'édition d'épreuves, jusqu'à la diffusion dans le monde entier. La SMF est donc une maison d'édition indépendante qui ne bénéficie d'aucun soutien financier récurrent de la part d'une institution ou d'une société privée pour cette activité.

7.1 – Bilan de l'année

Grâce à l'implication des deux responsables du suivi éditorial des publications, O. Boubakeur pour la plupart des revues et M.-F. Koussémon pour les

Annales de l'ENS, la crise sanitaire n'a pas affecté le rythme des sorties de nos revues. Néanmoins des retards se sont produits en fin d'année 2021 par la concomitance d'événements variés : défaillances informatiques, problèmes avec l'un de nos imprimeurs et nos composeurs, recherche de nouveaux imprimeurs et composeurs.

Quant aux livres, il y a eu peu de sorties en 2021, sans doute cette fois-ci en raison de la crise que nous avons traversée, mais le premier semestre 2022 est riche en sorties et cela se ressent nettement dans les ventes.

Le planning des sorties est extrêmement serré et il semble difficile d'en produire plus sans augmentation de nos effectifs. C'est un point de réflexion important surtout pour les livres car globalement la SMF en sort peu alors que le potentiel est présent. Un autre point important est la langue dans laquelle sont écrits nos livres. L'observation des ventes de la SMF montre que les livres écrits en français se vendent très peu comparativement à ceux écrits en anglais. Aussi, la publication d'ouvrages en français doit être mûrement réfléchie.

Nous avons noté, dès décembre 2021 et avant même la guerre en Ukraine, une inflation importante, relativement aux vingt années passées. Ceci a mené la SMF à augmenter ses tarifs d'abonnements d'environ 4%. L'évolution de la situation lors du premier semestre 2022, qui a vu une très importante augmentation des coûts d'impression, nous impose de réfléchir à une nouvelle adaptation de nos tarifs en septembre 2022. Les coûts de routage subiront également l'augmentation du prix des carburants.

Un travail important est mené pour optimiser nos coûts d'édition mais il risque d'être balayé par cette inflation. C'est un point de vigilance majeur pour la SMF car avec de telles augmentations des coûts sans augmentation de nos tarifs nous risquerions de vendre à perte et donc de nuire gravement à notre équilibre financier.

Certains éditeurs et/ou comités éditoriaux arrivent au terme de leurs mandats à la SMF : qu'ils soient ici remerciés pour le travail accompli et leur souci permanent de la qualité scientifique des revues et livres publiés par la SMF. Les comités de la *Gazette*, de *Cours Spécialisés* et de *Documents Mathématiques* sont ainsi en cours de renouvellement.

Un contrat de traduction qui liait la SMF à Springer a été dénoncé en 2021. La SMF réfléchit à d'autres possibilités pour traduire les ouvrages initialement rédigés en français. La piste de la traduction assistée par ordinateur et relecture est considérée avec attention.

Avec l'intégration de la chaire Jean Morlet dans la collection *Panoramas et Synthèses*, nous avons procédé, avec l'aide d'une graphiste, au toilettage de la couverture des ouvrages de la collection. Les ouvrages de la sous-collection *Chaire Jean Morlet* auront droit à une couverture spécifique. Le premier volume de cette sous-collection pourrait sortir avant la fin de l'année 2022.

7.2 – Science Ouverte

La communauté mathématique est très soucieuse de l'accessibilité de sa production au plus grand nombre. C'est un sujet majeur pour la SMF. La réflexion sur ce sujet doit être couplée avec le modèle économique qui permet de rémunérer nos salariées.

La SMF est résolument engagée dans cette démarche que l'on appelle communément désormais la « Science Ouverte ». Nous avons mis en place plusieurs initiatives décrites ci-dessous. D'autres verront le jour prochainement.

Actions vers les institutions africaines

La SMF, avec le soutien de l'UNESCO, a lancé, en décembre 2021, une proposition d'abonnements électroniques gratuits à ses revues aux institutions des pays d'Afrique qui le souhaitent et qui développent un programme de recherche ou de niveau Master en mathématiques. Dix-huit institutions ont répondu à notre offre, celles-ci provenant des 12 pays suivants : Algérie, Burkina Faso, Congo, Côte d'Ivoire, Éthiopie, Mali, Maroc, Niger, Nigeria, Sénégal, Togo et Tunisie. Ces abonnements ont été mis en place en avril 2022 et seront actifs jusqu'en 2024.

Forte de ces nouveaux contacts, la SMF va proposer à ces institutions, et à d'autres, des livres issus de ses collections, seul le coût de l'envoi est à prendre en charge par ces institutions ou des tiers. Les adhérents de la SMF ont été sollicités pour la prise en charge de ses frais et la réussite de l'opération.

Buy to Open (B2O)

La SMF a décidé, grâce au soutien de l'INSMI et du Fonds National pour la Science Ouverte (FNSO)

de rendre accessibles toutes les versions électroniques de nos ouvrages des collections *Panoramas et Synthèses*, *Cours Spécialisés* et *Séminaires et Congrès* parus jusqu'en 2020. Pour les suivants, ils seront accessibles librement dès lors qu'un seuil de ventes, relatif à l'équilibre financier de la sortie, sera atteint (c'est le modèle B2O).

Pour cela nous avons dû numériser un certain nombres d'anciens ouvrages dont nous n'avions plus de versions électroniques. En parallèle, nous avons dû apporter des modifications notables à notre site web pour que ce nouveau dispositif soit facile à implémenter par nos salariées. Cette opération devrait être annoncée avant la fin du premier semestre 2022.

Auteurs payeurs

Nous avons proposé dans nos lettres d'informations une nouvelle modalité de financement de nos ouvrages.

L'idée initiale concernait la collection *Séminaires et Congrès* qui est en berne. Nous avons proposé, typiquement pour les colloques, que la publication des actes paraissant dans cette collection soit prise en charge en partie par les autrices. En échange de quoi, la SMF autorise l'accessibilité de la version finale de l'ouvrage sur toutes plateformes et offre un certain nombre d'ouvrages aux autrices. Nous avons un ouvrage en chantier suivant ce modèle.

Ce modèle a vocation à être étendu, mais peut-être pas systématisé, à d'autres collections au gré de discussions avec la SMF.

Une convention de cette nature a été signée pour les cours donnés dans le cadre des chaires de la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris (en lien avec la collection *Cours Spécialisés*).

Nous devrions également avoir une autre sortie « Hors collection » suivant ce modèle.

On peut également inclure dans ce modèle la coédition avec l'IHP de la collection *Regards Mathématiques* de la Maison Poincaré. Ce sont des livrets reflétant les expositions créées par l'IHP pour sa bibliothèque. Le premier a été consacré à Jean Perrin et le suivant concernera Émile Borel.

7.3 – Les projets

Nous réfléchissons à passer à un modèle *Subscribe to Open* (S2O) pour nos revues, c'est-à-dire un modèle de type B2O mais pour des abonnements. Le chiffre d'affaires global du secteur édition de la SMF étant représenté à plus de 90% par les abonnements à nos revues, il convient de bien réfléchir à la pérennité d'un tel modèle économique pour un petit éditeur comme la SMF.

Pour se lancer dans une telle initiative, il faut avoir la « foi » dans le soutien de la communauté. Elle est acquise pour ce qui concerne la France, notamment grâce au soutien de l'INSMI et du RNBM, mais plus incertaine en dehors de l'Amérique du Nord et de l'Europe.

Cela fait partie des réflexions récurrentes menées par la SMF au sein de son bureau et de son conseil d'administration.

Nous l'avons dit plus haut, nous avons dû numériser une partie de nos ouvrages pour les rendre librement accessibles en version électronique. Il s'agit d'une numérisation standard. Nous avons le projet, en collaboration avec MATHDOC, de produire des numérisations plus élaborées avec productions de méta-données.

Enfin, la SMF est en train de réfléchir à la refonte de ses classes LaTeX (celles que nous utilisons actuellement ont fêté leurs 20 ans).

7.4 – Évolutions techniques

Deux modifications techniques d'importance ont été mises en place au cours de l'année écoulée. La première concerne le logiciel de gestion des soumissions. Le logiciel précédent manquait de fonctionnalités indispensables et son fonctionnement, trop dépendant des serveurs de l'IHP, n'était plus garanti toute l'année. Le choix du nouveau logiciel s'est porté sur *Editflow*, mis à disposition par l'éditeur Mathematical Sciences Publishers (MSP), logiciel très utilisé dans le monde de l'édition mathématique (c'est par exemple le logiciel utilisé par l'AMS). De plus, MSP a accepté de développer des outils dont nous avions besoin et qui n'étaient pas encore intégrés, comme par exemple la gestion des épreuves.

L'autre projet important concerne la gestion des DOI (Digital Object Identifier) qui permettent l'identification unique de nos articles. Leur gestion à la SMF était artisanale, et trop dépendante du travail bénévole d'une personne. Nos deux responsables du suivi éditorial des publications ont été formées à renseigner elles-mêmes les DOI dans la base de données de *Crossref*. Ainsi, la gestion des DOI est intégrée à part entière dans la gestion de la chaîne éditoriale et il n'y a plus de délai entre la parution d'un article et la mise en fonction de son DOI.

8. Rapport financier année 2021

La crise sanitaire du Covid-19 continue d'avoir un effet sur les activités de la SMF, en particulier au CIRM, et sur les comptes de résultat 2021. Pour l'année 2021, l'ensemble SMF-CIRM affiche un résultat net comptable de +358 k€. Pour comparaison, le résultat net 2020 était de -85 k€.

Le total des ventes de biens et services s'élève à 1972 k€ pour 2021 dont 505 k€ de chiffre d'affaires pour la SMF et 1467 k€ pour le CIRM. Pour comparaison, le chiffre d'affaires était de 1181 k€ en 2020 dont 499 k€ de chiffre d'affaires pour la SMF et 682 k€ pour le CIRM.

Les paragraphes qui suivent sont destinés à présenter de manière plus détaillée les finances des activités de la SMF, puis celles des activités du CIRM de manière plus globale.

8.1 – La SMF

La vocation de la SMF est de mener à bien des missions que nous répartissons en trois catégories :

- assurer des services aux membres ;
- produire, vendre et diffuser des livres et des revues ;
- communiquer sur les mathématiques auprès du grand public.

Le total des produits s'élève à 1033 k€ (800 k€ en 2020) :

- les produits d'exploitation totalisent 1032 k€ (799 k€ en 2020), dont des ventes de biens et services pour 504 k€ hors cotisations (contre 499 k€ en 2020). Les cotisations passent de 80 k€ en 2020 à 77 k€ en 2021 ;
- auxquels s'ajoute 1 k€ de produit financier.

Le total des ventes est de 504 k€ (contre 499 k€ en 2020), le total des cotisations est de 77 k€ (contre 80 k€ en 2020) et le montant des dons est de 32 k€. Les contributions financières dédiées et non dédiées totalisent 170 k€ dont 87 k€ pour MathsC2+, et l'INSMI a attribué comme en 2020 une subvention de 16 k€. Le total des charges est de 1094 k€ (813 k€ en 2020).

La SMF présente un résultat négatif d'exploitation de 62 k€ en 2021. En 2020, ce résultat était négatif de 13,4 k€. Dans la suite, nous détaillons ces comptes poste par poste.

Produits d'exploitation et produits financiers

1. *Ventes de revues et de livres.* Le montant global est de 428 k€, contre 453 k€ en 2020.
2. *Cotisations.* Le montant global est de 77 k€, contre 80 k€ en 2020. Ce montant a à nouveau légèrement baissé par rapport à 2020 ; l'errosion des cotisations se poursuit donc en 2021.
3. *Subventions.* La SMF a touché 16 k€ de subventions de l'INSMI (16 k€ en 2020). Les contributions financières dédiées et non dédiées totalisent 170 k€ (87 k€ pour MathsC2+).
4. *Recettes diverses.* Le montant global est de 75,6 k€, contre 51,8 k€ en 2020 ; ces recettes proviennent de la facturation des frais de ports et de refacturations variées pour des actions avec des associations partenaires (sociétés savantes, *Animath*...).
5. *Transfert de charges.* Cela correspond au reversement des salaires des personnels du CIRM détachés à la SMF et d'autres charges du CIRM. Le montant global est de 198 k€ contre 151 k€ en 2020.
6. *Produits financiers.* Ces produits correspondent à la rémunération des fonds placés. Le montant global est de 1 k€, stable par rapport à 2020 (1 k€).
7. *Variation de stocks.* La production stockée sur l'exercice s'élève à +16,4 k€, en augmentation par rapport à 2020 (-6,2 k€).

Charges d'exploitation

1. *Masse salariale.* Le montant des salaires et indemnités hors charges de l'ensemble du personnel (SMF +CIRM) est de 372 k€, contre 300 k€ en 2020. Il faut ajouter 122 k€ de charges (85,2 k€ en 2020). Le total s'élève à 494 k€. Ce montant global augmente en raison de plusieurs embauches et de l'utilisation moindre du dispositif de chômage partiel.
2. *Frais de fabrication et composition.* Le montant global des dépenses de fabrication et composition des revues et collections est de 118 k€ (136 k€ en 2020). Tous ouvrages confondus, les frais de fabrication s'élèvent à 85 k€, contre 93 k€ en 2020. Les frais de composition sont de 34 k€, contre 43 k€ en 2020.
3. *Honoraires, assurances, loyers.* Les honoraires pour le commissaire aux comptes et l'expert comptable s'élèvent à 19,8 k€, les frais d'assurances sont de 2,1 k€, et les

loyers versés à l'IHP et à Luminy représentent 16,3 k€.

4. *Affranchissements et routage.* Tous envois confondus, le montant global des affranchissements est de 78,3 k€, contre 76 k€ en 2020.
5. *Impôts et taxes.* Ce poste est de 17,4 k€, contre 7,8 k€ en 2020, dont 10,3 k€ correspondent à la taxe sur les salaires.
6. *Frais bancaires et téléphone.* Le montant global est de 6 k€.
7. *Achat de fournitures.* Il y a eu 7,3 k€ d'achats de fournitures comme en 2020.
8. *Vie de l'Association.* Cette ligne inclut les soutiens aux opérations scientifiques, les frais de déplacement, et divers « frais de mission ». Le montant global est de 6 k€, contre 7,2 k€ en 2020.
9. *Entretien, réparation, maintenance.* Le montant global est de 47,4 k€, contre 42,8 k€ en 2020.
10. *Dépenses diverses.* Cette « ligne » inclut entre autres la sous-traitance générale (7,6 k€), la formation (9,2 k€).
11. *Amortissements sur immobilisations.* Cela correspond pour l'essentiel à l'amortissement du site internet (130 k€ ammortis sur 5 ans, soit un ammortissement de 26 k€ chaque année). Le montant global est de 51,7 k€ contre 46 k€ en 2020.
12. *Provisions diverses.* Le montant total est de 21,1 k€, contre 0,9 k€ en 2020, ce qui correspond à des factures impayées.

8.2 – Le CIRM

Depuis 2000, le CIRM est une Unité Mixte de Service placée sous la responsabilité conjointe du CNRS-INSMI et de la SMF. Une convention signée le 7 décembre 2010 a eu pour objet de fixer la répartition des domaines d'intervention entre l'unité CNRS et la SMF : par l'intermédiaire du CNRS, le CIRM apporte le contenu scientifique des rencontres mathématiques. Par ailleurs le CIRM confie à la SMF l'organisation et la gestion des rencontres mathématiques.

L'exercice 2021 du CIRM est excédentaire de 424 k€, il était déficitaire de 72 k€ en 2020. L'année 2021 reste marquée par la pandémie de Covid et la situation sanitaire ; les rencontres en présence ont repris et la possibilité d'organiser des conférences en hybride est mise en place. Ceci impacte les charges d'exploitation, en particulier de restauration et d'hôtellerie dans la mesure où le CIRM n'est pas revenu au taux de remplissage antérieur à la pandémie, mais la facturation du fonctionnement en hybride permet de revenir à des ventes proches de celles avant la pandémie.

Les produits d'exploitation s'élèvent à 2033 k€ en 2021 (contre 1109 k€ en 2020), auxquels il faut rajouter 1 k€ de produits financiers (1 k€ en 2020) et 86 k€ de « produits exceptionnels » (114 k€ en 2020). Ces produits dits exceptionnels, correspondent à l'étalement des subventions d'investissement perçues lors de précédents travaux et investissements au CIRM.

Les produits comprennent à la fois des ressources propres, 1467 k€ de ventes (682 k€ en 2020) ainsi que des subventions de différents organismes (MENESR, Aix-Marseille université, Conseil Régional, Ville de Marseille) et de l'État s'élevant à 556 k€ (403 k€ en 2020). Cette augmentation des subventions est ponctuelle, puisque motivée par la situation due à la pandémie.

Les charges d'exploitation s'élèvent à 1694 k€ en 2021 contre 1293 k€ en 2020. Ces charges n'ont pas retrouvé le niveau d'avant la pandémie (2367 k€ en 2019).

8.3 – Conclusion

L'ensemble CIRM-SMF affiche un résultat positif de 358 k€, contre un résultat négatif de 85 k€ en 2020. La SMF et le CIRM sont respectivement déficitaires de 66 k€ et excédentaire de 424 k€. En ce qui concerne le CIRM, la reprise des conférences en hybride entraîne une augmentation des ventes mais la progression des charges est plus lente, ce qui explique ce résultat très excédentaire.

Ce rapport moral se veut le bilan de l'ensemble des activités au sein de la SMF depuis un an. Le personnel de la SMF et de très nombreux bénévoles y ont contribué, nous les remercions tous : membres du Bureau, du Conseil d'administration et du Conseil scientifique de la SMF, directeurs et membres des comités de rédaction, ainsi que tous ceux qui interviennent, ponctuellement ou plus régulièrement, et qui offrent leurs compétences sans compter leur temps avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par S. Ballet, F. Bayart, B. Claudon, G. Besson, H. Biermé, J. Buzzi, R. Danchin, D. Dos Santos Ferreira, F. Durand, D. Gayet, M. Guenais, P. Hubert, avec l'aide de S. Albin, O. Boubakeur, M.-F. Koussémon, C. Munusami, E. Iket et C. Ropartz. Remercions enfin F. Petit pour sa relecture attentive (de ce rapport mais aussi des épreuves de la *Gazette* et autres textes tout au long de l'année).

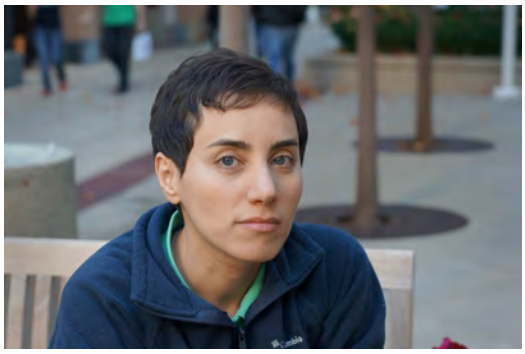
Les mathématiciennes à l'écran

• P. Bellingeri

Tout en restant un phénomène très rare, des mathématiciennes apparaissent dans des films, souvent comme protagonistes, avec un vrai travail dans la construction des personnages. Le but de cet article est de proposer une promenade autour de la représentation des mathématiciennes à l'écran, de tout âge et de tout temps, fictives ou réelles, pour repérer les clichés, observer les changements de perspective ainsi que certaines spécificités qui rendent le rôle féminin particulièrement important, pas seulement au point de vue narratif mais aussi pour le message véhiculé.

En 2020, pendant Parisciences, festival international du film scientifique, on pouvait visionner sur la plateforme TV du festival le documentaire *Secrets of the Surface : The Mathematical Vision of Maryam Mirzakhani*, réalisé par George Paul Csizery avec le soutien du Mathematical Science Research Institute de Berkeley. La crise sanitaire a particulièrement nui à la diffusion de ce documentaire, qui voyage à bas bruit de festival en festival en passant par des congrès de mathématiques, mais qui commence enfin à être de plus en plus connu, grâce en particulier aux différentes actions pour promouvoir les sciences auprès des jeunes filles.

Figure 1 – Maryam Mirzakhani dans *Secrets of the Surface*



Le film est un hommage à l'œuvre mathématique et à la personne de Maryam Mirzakhani (figure 1) : on la suit au lycée pour jeunes filles de Teheran, aux olympiades internationales de mathématiques (et ses deux médailles d'or), pendant ses études à Sharif et à Harvard, et plus tard à Stanford, au moment de sa médaille Fields en 2014, pour revenir vers la fin avec des images et des interviews de jeunes élèves et étudiantes en Iran qui montrent l'impact et l'influence de sa figure dans la diffusion des mathématiques dans son pays natal.

Figure 2 – Étudiantes iraniennes dans *Secrets of the Surface*

Le film propose plusieurs niveaux de lecture : on y « voit » des mathématiques et des lieux mathématiques, on écoute des mathématiciens qui décrivent l'importance et la fécondité des travaux de Maryam Mirzakhani. En même temps on aborde aussi des moments personnels et dramatiques de sa vie en nous faisant ressentir l'émotion de ceux qui ont pu

la côtoyer. Ces différents parcours permettent d'esquisser le portrait de Maryam Mirzakhani dans son ensemble et montrent d'une façon efficace comment les plans mathématique et humain sont entremêlés, en rejetant ainsi le cliché usuel du mathématicien (ou mathématicienne) froid, asocial, isolé dans son monde.

En même temps le film nous propose de découvrir aussi le système éducatif iranien (figure 2), qui était un des buts déclarés du réalisateur et qui pourrait représenter un intéressant point de départ pour une discussion sur la thématique « études scientifiques et jeunes filles ».

George Paul Csizery a dédié une grande partie de sa carrière à la réalisation de documentaires sur la communauté mathématique. Probablement le plus connu de ses documentaires est le premier, *N is a Number : A Portrait of Paul Erdös* (1993), qui présente la vie et les mathématiques de Paul Erdös. La figure de Erdös a passionné Csicsery, qui a ensuite décidé de continuer son voyage parmi les mathématiciens contemporains. Je citerai ici juste *Julia Robinson and Hilbert's Ten-th Problem* (2008), car on y retrouve des thèmes ensuite repris dans *Secrets of the Surface* : les difficultés inhérentes au fait d'être une femme dans un monde d'hommes ainsi que la description parallèle de l'individu et de ses mathématiques, mais surtout la vision des mathématiques comme dépassement des frontières et des différences. Dans ce documentaire on aborde en effet la coopération scientifique de Julia Robinson avec Yury Matiyasevich, en pleine guerre froide. Dans ce sens le documentaire reste fidèle à la vision de Julia Robinson qui voyait les mathématiciens comme citoyens d'une nation sans distinctions de lieux, sexe, religion, voire de temps [1, 4].

Le travail de Csicsery est particulièrement remarquable vu la rareté de documentaires sur des mathématiciennes ; il faut en effet élargir le spectre des supports et chercher plus loin, dans le passé ou dans d'autres cultures cinématographiques. Par exemple on pourrait citer la docu-BD *Je suis Sophie Germain, femme et mathématicienne* (2021) réalisée à l'occasion de la sortie de la bande-dessinée Les Audaces de Sophie Germain [5] ou *Girls who fell in love with Math* (2017) documentaire taïwanais sur les mathématiciennes Alice Zhang and Fan Chung Graham. Même dans le documentaire *Comment j'ai détesté les mathématiques* (2013) de Olivier Peyon on ne voit presque pas de mathématiciennes : la seule femme à avoir un vrai rôle dans ce récit est une psychologue qui traite la phobie des mathématiques chez les enfants…

1. Héroïnes et mathématiciennes, de Agora aux Figures de l'ombre

Si on quitte le monde des documentaires, les films consacrés à des mathématiciennes « réelles » restent des cas isolés et difficiles à dénicher. Prenons par exemple le cas de Sofia Kowalewskaja dont la vie se prête particulièrement bien à une transposition cinématographique, comme ça a été le cas récemment pour John Nash (*A Beautiful Mind* de Ron Howard, 2011), Srinivasa Ramanujan (*The Man Who Knew Infinity* de Matt Brown, 2015) ou encore Alain Turing (*Imitation game* de Morten Tyldum, 2014). Dans [1], travail remarquable sur les mathématiques et le cinéma, on cite trois films sur la mathématicienne russe : du premier réalisé en Russie en 1956 et intitulé *Sofya Kowalevskaya* les auteurs ont pu juste découvrir l'existence et le réalisateur (Joseph Shapiro) tandis que les deux autres sont un film suédois de 1983 (*A Hill on the Dark Side of the Moon* de Lennart Hjulström) et une mini-série russe de 1986 (*Sofya Kovalevskaya* [1]). Des références qui sont donc lointaines, dans le temps et dans la distribution et la diffusion.

Dans ce contexte, deux films font figure d'exception et on peut s'interroger s'ils représentent un changement de perspective et s'ils amorcent une nouvelle tendance : *Agora* (2009) et *Hidden Figures* (2016). Les mathématiques de ces deux films sont minutieusement détaillées dans [3], tandis qu'ici je vais me focaliser sur la représentation des mathématiciennes et de leur activité.

Figure 3 – Hypathie enseigne dans *Agora*

1. Cette mini-série, qui a vu les débuts de l'actrice Yelena Safonova a la particularité d'être un film sur une « vraie » mathématicienne qui a été réalisé par une femme, Ayan Shakhmaliyeva.

Agora (figure 3) est, au point de vue cinématographique, un *péplum*, qui est original par son thème et son approche. L'action est située en Égypte entre 390 et 415 : la protagoniste est Hypathie d'Alexandrie, interprétée par Rachel Weisz, philosophe néoplatonicienne et première mathématicienne dont nous avons connaissance. Si nous avons quelques informations sur ses recherches (en particulier elle avait étudié les textes d'astronomie de Ptolémée, ce qui justifie les discussions dans le film autour de la position de la Terre par rapport au Soleil) et sur sa fin tragique (elle fut assassinée), il ne reste pas de trace écrite de ses travaux. Cela a permis au réalisateur (Alejandro Amenábar) une grande liberté dans la construction du personnage, en particulier du point de vue mathématique : dans le film on parle de mathématiques connues à l'époque (on cite entre autres Euclide et le cône d'Apollonius) mais, comme remarqué dans [3], reste par exemple hautement improbable que Hypathie puisse avoir découvert la trajectoire elliptique de la Terre, et encore moins à travers la démarche proposée dans le film, reposant essentiellement sur la méthode du jardinier pour tracer une ellipse. Même historiquement les libertés prises sont nombreuses : on fait coïncider l'assassinat d'Hypathie avec la destruction du temple de Sérapis (où étaient conservés les restes de la Bibliothèque) et on l'attribue aux chrétiens. Sans rentrer dans des discussions de nature historique ou épistémologique, cet ensemble de choix narratifs, qui contrastent par ailleurs avec la reconstruction minutieuse et esthétiquement réussie d'Alexandrie, transforment le personnage d'Hypathie en pure fiction le réduisant au message que le film veut porter : celui de la science qui fait face à l'obscurantisme et le fanatisme. Ce film reste néanmoins un hommage singulier et intéressant à une figure importante dans l'histoire (pas seulement mathématique) et qui avait été jusqu'alors ignorée par le monde du cinéma.

Hidden Figures (Les Figures de l'ombre) est un film biographique réalisé par Theodore Melfi. Il repose sur le livre de Margot Lee Shetterly sur trois mathématiciennes afro-américaines qui ont travaillé à la NASA pendant la course à l'espace : Mary Jackson (Janelle Monáe), Katherine Johnson (Taraji P. Henson) et Dorothy Vaughan (Octavia Spencer) (ce sont les trois actrices en premier plan en Figure 4). Le film voit aussi la participation, entre autres, de Kevin Costner, Kirsten Dunst et Jim Parsons (incarnant ici encore un rôle de physicien comme dans la série *Big Bang Theory*). Malgré une diffusion au début assez limitée, *Hidden Figures* s'est affirmé comme un des films les plus rentables de l'année 2016 en rapportant 236 millions de dollars dans le monde et en recevant un très bon accueil de la critique avec en particulier trois nominations aux Oscars, dont celui du meilleur film [2].

FIGURE 4 – *Hidden Figures* : les « colored computers »

Mary Jackson, Katherine Johnson et Dorothy Vaughan faisaient partie des « femmes ordinateurs » à la Nasa dont l'engagement a contribué au succès des premières missions spatiales mais qui ont été ensuite négligées par l'histoire. Comme souvent, le film s'accommode de la réalité (ce n'est pas un documentaire) : par exemple, on concentre l'action sur les années 1961 et 1962 tandis que les trois femmes n'ont pas travaillé à la NASA dans la même période, et la chronologie de la plupart des faits cités n'est pas respectée. Mais l'important est que le film reste vrai dans l'essentiel. Dorothy Vaughan est en effet la première femme afro-américaine à être nommée superviseure d'une équipe à la NASA (en programmation) et une des pionnières de la programmation en FORTRAN. En parallèle, Mary Jackson est mise en valeur pour sa lutte pour l'abolition des lois anti-ségrégation aux États-Unis (elle obtient de suivre des cours réservés aux blancs) et son parcours qui la portera à être la première femme noire ingénieur à la NASA. Enfin, le rôle principal est donné dans le film à Katherine Johnson et à son activité comme mathématicienne dans les calculs de trajectoire pour la mission Mercury de John Glen en 1962. Pour ce qui concerne les mathématiques il faut d'abord remarquer qu'elles sont omniprésentes

2. Si *A Beautiful Mind* est pour l'instant le seul film qui parle de mathématiques à avoir gagné l'Oscar, deux autres films « mathématiques » avaient reçu une nomination avant *Hidden Figures* : *Imitation Game* et *Moneyball* de Bennet Miller, 2011.

dans le film, sous forme de toile de fond : on compte une quarantaine de tableaux noirs (figure 5) où sont esquissées des formules allant des équations du second degré aux calculs de trajectoires. Il y a aussi quelques raccourcis ou erreurs, par exemple dans la scène où Katherine Johnson montre ses compétences en calcul en trouvant une bonne approximation des coordonnées d'atterrissage (où l'actrice semble faire confusion entre la donnée initiale et le résultat [3]), ou encore dans la présentation de la méthode d'Euler comme solution pour calculer l'instant de passage pour faire passer la capsule de John Glen d'une trajectoire elliptique à une parabolique (ce sont plutôt des variantes, comme celles de Runge-Kutta, bien plus fiables, qui ont été utilisées). Toutefois cela ne nuit pas au message. On voit trois femmes s'affirmer dans trois domaines différents, les mathématiques appliqués, l'ingénierie spatiale et l'informatique. Et même si on reste dans un récit assez classique du rêve américain, on apprécie la représentation des mathématiques comme outil pour émerger grâce à des compétences personnelles mais aussi collectives, comme dans la scène où les « colored computers » se transfèrent dans la section des calculateurs IBM. Les mathématiques peuvent permettre ainsi de dépasser les discriminations, un peu dans l'idée de Julia Robinson et de sa nation « commune » des mathématiciens, car les trois femmes, dans trois scènes différentes, sont acceptées enfin comme collègues et scientifiques.

Figure 5 – Un tableau dans *Hidden Figures*

Dans ce sens le film rappelle aussi *The Man Who Knew Infinity* quand on décrit le rapport entre Hardy et Ramanujan (d'abord essentiellement mathématique et compliqué par les différences culturelles) et ensuite la lutte de Hardy pour faire reconnaître le travail de Ramanujan. À noter que des thèmes similaires sont traités dans la mini-série *The Bletchley Circle* où on suit quatre femmes (interprétées par Julie Graham, Anna Maxwell Martin, Sophie Rundle et Rachael Stirling), qui ont travaillé à Bletchey Park, site britannique de décryptage pendant la Seconde Guerre Mondiale où se déroule aussi l'action de *Imitation Game*. Après la fin de la guerre, ayant juré de ne pas révéler leurs activités pendant la guerre et obligées à revenir au quotidien pas assez stimulant de femmes au foyer ou de secrétaires, elles se lancent dans la résolution d'enquêtes criminelles en utilisant leurs compétences en logique et raisonnement. Sans être historien, je trouve intéressant d'observer comment, dans les deux cas, les femmes ont pu rentrer dans un monde d'hommes, celui de la guerre ou de la conquête spatiale, grâce à leurs compétences mais aussi à la forte demande pour ensuite, ces circonstances exceptionnelles disparues, être totalement oubliées pour des raisons de secret d'état mais surtout de discrimination manifeste.

2. Mathématiciennes de fiction : clichés et singularités

Après avoir parlé de « vraies » mathématiciennes dans les documentaires et dans les films j'aimerais terminer avec les mathématiciennes de « fiction ». Une remarque à première vue étonnante concerne le pourcentage de mathématiciennes à l'écran qui paraît plus important que dans la vie réelle. En effet dans les films qui touchent aux mathématiques, les mathématiciennes sont en réalité très présentes. Évidemment cette observation doit être relativisée au regard de la (sous)-représentation des mathématiques au cinéma. Le site *Mathematical Fiction* répertorie environ 160 films qui traitent (au moins vaguement) de mathématiques, tandis que *Mathematics in Movies* propose à peu près 170 extraits de mathématiques dans les films [3] : des nombres négligeables relativement à la production cinématographique mondiale. En plus il faut se rappeler que les rares fois qu'on parle au cinéma de mathématiques, c'est pour s'en plaindre. Dans *Hollywood hates maths* Dan Mayer nous rappelle que les mathématiques apparaissent sur l'écran souvent sous forme de petites phrases négatives, un miroir « de fiction » de la relation difficile que le public peut avoir avec les mathématiques. Si les mathématiques sont souvent « maltraitées »

3. Il faut aussi remarquer qu'on trouve plusieurs extraits d'un même film et que certains extraits sont très courts, voire insignifiants.

dans les films et réduites parfois à des effets comiques, les mathématiciennes sont représentées avec des clichés récurrents et qui sont d'ailleurs les mêmes qu'on retrouve pour leurs collègues hommes. Elles sont froides (la grand-mère Antonia dans *Antonia's line* (de Marleen Gorris, 1995)), timides ou maladroites (la protagoniste de *She Wrote the Book* de Charles Lamont, 1946), parfois avec des problèmes d'alcoolisme ou d'autres addictions (Béatrice Dalle, logicienne alcoolique dans *Domaine* de Patric Chiha, 2008) voire suicidaires. Dans la mini-série *The Queen's Gamblit* la mère de la protagoniste (jouée par Chloe Pirrie) est une mathématicienne (on la voit à un certain moment brûler sa thèse de Doctorat en Mathématiques : *Monomial Representations and Symmetric Presentations*) qui souffre de graves problèmes mentaux qui la poussent à se tuer délibérément en voiture, en essayant de se débarasser aussi de sa propre fille (perçue par la mère comme « un problème à résoudre »).

Il arrive parfois que les mathématiciennes soient même des meurtrières [4]. Dans *Presumed Innocent* (1990) de Alan Pakula, Bonnie Bedelia joue une mathématicienne qui n'arrive pas à terminer ses études et qui tue l'amante et collègue de son mari (Harrison Ford). Dans la série coréenne *Sky Castle* (2018, figure 6) Kim Seo-hyung interprète une préparatrice aux concours d'entrée à l'Université Nationale de Séoul (SNU), la plus prestigieuse université de Corée du Sud. Puisque tous ses élèves réussissent à intégrer la SNU, elle est très recherchée et disputée par les riches familles de Séoul. En réalité il s'agit d'une mathématicienne de haut niveau, émigrée aux États-Unis et qui cache un sombre secret. En conflit avec son mari pour l'éducation de leur fille surdouée, elle provoque un accident de voiture dans lequel sera impliquée aussi la fille, qui restera handicapée à vie. De retour en Corée et en recherche de vengeance elle essaie de détruire les familles qui lui confient leurs enfants et elle finira par commettre un autre meurtre après celui de son mari aux États-Unis. Critique féroce du système éducatif coréen et grand succès en Asie, *Sky Castle* montre l'importance de la maîtrise des mathématiques dans la sélection impitoyable des élèves coréens et les scènes d'enseignement (en classe, en cours particulier, entre élèves) sont très nombreuses.

Figure 6 – Les actrices de *Sky Castle*

Dans *Presumed Innocent* et *Sky Castle* la validité du plan meurtrier est « certifiée » par le fait que le tueur est une mathématicienne, et donc « par définition » intelligente et peu empathique. Par contre les motivations des meurtres et le travail sur le personnage sont très différents : dans *Presumed Innocent* le fait que la meurtrière soit mathématicienne est marginal, il ajoute une frustration professionnelle (le travail de thèse inachevé) à celle personnelle (la trahison du mari) du décalage entre la réalité et le désir d'un monde gouverné par des règles claires et immuables. La mathématicienne dans *SkyCastle* est un personnage bien plus complexe : il y a l'affirmation sociale à travers les mathématiques, la difficulté de rentrer en relation avec les autres (à son propre enfant), le châtiment et la vengeance envers une société qui voit les préparateurs (et les mathématiques) comme des moyens essentiels, mais dont on pourra se débarrasser une fois obtenue l'admission à une grande université.

Le cas de *Presumed Innocent* n'est pas isolé, un personnage mathématique est rarement exploré en profondeur au cinéma. La plupart des fois on découvre une femme mathématicienne en la voyant

4. C'est le cas aussi des mathématiciens, qui peuvent même être pluri-meurtriers (*Straw Dogs* de Sam Peckinpah, 1976), tueurs en série (*Bianca* de Nanni Moretti, 1983) ou à gages (*The Accountant* de Gavin O'Connor, 2016).

écrire des mathématiques au tableau noir : des scènes qui créent le contexte, justifiées par le rôle, mais qui restent narrativement secondaires. Cela n'empêche que ces moments peuvent être de bonne qualité, même au point de vu mathématique : dans *It's my turn* (1980) de Claudia Weill la protagoniste est une professeure universitaire (interprétée par Jill Clayburgh) et dans une scène elle démontre à des étudiants le Lemme du serpent [5]. La preuve est correcte et cette scène est citée dans *An Introduction to Homological Algebra* par Charles Weibel [6], qui écrit :

« We will not print the proof in these notes, because it is best done visually. In fact, a clear proof is given by Jill Clayburgh at the beginning of the movie It's My Turn. »

Cependant, comme pour les films sur les vraies mathématiciennes, on voit émerger dans ces dernières années une attention à la construction des personnages. C'est le cas de deux films relativement récents, *Proof* (2005) et *Gifted* (2017), qui s'émancipent de certains stéréotypes et abordent de nouvelles thématiques.

Proof, réalisé par John Madden (figure 7), est une adaptation cinématographique de la pièce homonyme de David Auburn, Prix Pulitzer en 2001. La narration alterne des événements postérieurs à la mort d'un brillant mathématicien (Anthony Hopkins), sombré dans la démence à cause d'une maladie, et des flashbacks révélant la vie qu'il a partagée avec sa fille Catherine (Gwyneth Paltrow). Elle aussi mathématicienne, elle a interrompu ses études pour prendre soin de son père et à cause de problèmes personnels (elle lutte avec l'imposante figure paternelle, dont elle a peur d'avoir hérité la maladie mentale).

Figure 7 – Les protagonistes de *Proof*

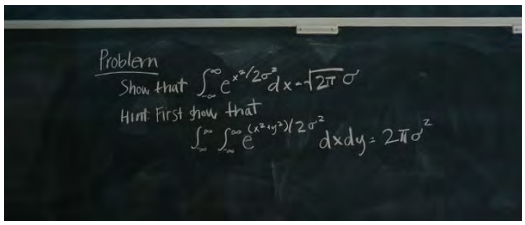
La preuve dont on parle dans le film semble être celle de l'hypothèse de Riemann ; même si ce choix peut nous paraitre incongru, il est fonctionnel à la narration, car il apparaitrait naturel à nous aussi de douter de toute possible preuve ! Dans le film on suit certes le parcours douloureux de Catherine, sa peur de sombrer elle aussi dans la folie, la difficulté de s'affirmer elle-même comme mathématicienne, mais surtout on aborde le problème de la paternité (maternité, dans ce cas) d'une preuve. Catherine fait trouver à Hal (Jake Gyllenhaal), l'ancien étudiant du père, un cahier avec une importante preuve en affirmant que c'est elle qui l'a écrite, et pas son père. Hal et la sœur de Catherine, Claire (Hope Davis), ne la croient pas. Hal et Claire incarnent les peurs de Catherine : ne pas être à la hauteur de son père (Hal pense que les mathématiques utilisées dans le cahier ne sont pas à la portée de Catherine) et être atteinte elle aussi d'une maladie mentale (c'est la suspicion de sa sœur Claire). Ce n'est que vers la fin du film que Hal, après avoir discuté avec des collègues affirme la croire (les mathématiques utilisées sont nouvelles) et vouloir parler de la preuve avec elle. Peu après Catherine fait face à ses peurs en décidant de rester et de ne pas partir avec sa sœur. Dans ce sens le film, sans vraiment montrer des mathématiques, propose un cheminement scientifique qui peut paraître vraisemblable, en décrivant les difficultés qui peuvent se poser pour une femme mathématicienne dans un monde d'hommes (les seuls autres mathématiciens qui apparaissent dans le film, vivants ou morts, sont des hommes). Une discussion sur la carrière de Catherine évoque en outre la sous-représentation des femmes en mathématiques. L'héroïne mentionne alors Sophie Germain comme exemple de grande mathématicienne.

Dans *Gifted* (Mary) de Marc Webb on aborde le sujet des enfants surdoués. La protagoniste est Mary (Mckenna Grace), une petite fille de sept ans qui démontre avoir des capacités hors du commun pour les mathématiques ce qui suscite une violente différence d'opinion quant à la façon de l'élever entre son oncle Frank (Chris Evans) et sa grand-mère Evelyn (Lindsay Duncan). Le premier, qui est son tuteur depuis le suicide de sa sœur, mère de Mary et brillante mathématicienne, voudrait lui permettre de vivre une enfance normale (en se basant aussi sur sa propre expérience) tandis que la grand-mère désire la ramener dans le Massachusetts et l'inscrire dans une école pour génies. Le thème de l'enfant prodige en mathématiques n'est pas nouveau : on le retrouve dans *Dear Brigitte* (de

5. Il est par ailleurs curieux de remarquer les analogies avec *Antonia's Line* de Marleen Gorris : deux films de deux réalisatrices où on voit des mathématiciennes aborder des sujets d'algèbre homologique sur un tableau noir.

Henry Koster, 1965), *Little Man Tate* (de Jody Foster, 1991) ou *Antonia's Line*. L'originalité de *Gifted* réside dans l'attention portée aux mathématiques et à leur contextualisation dans la narration. Le réalisateur Marc Webb, fils d'un mathématicien expert en éducation, a su s'entourer de quatre consultants en mathématiques. Le thème mathématique peut nous étonner, car on parle ici de Navier-Stokes : par ailleurs à la fin du film on découvre que ce problème du millénaire (encore un [6]) a été démontré par la mère de Mary, qui voulait que cela reste secret jusqu'à la mort de sa mère Evelyn. Comme *Proof*, *Gifted* montre donc aussi l'impact dans l'imaginaire collectif des Problèmes du prix du millénaire, mais contrairement à *Proof*, *Gifted* nous plonge dans les mathématiques. Celles-ci sont étonnamment correctes pour une fiction, bien que leur spectre soit très éparpillé (on parle de Trachtenberg, de congruences et d'intégrales). Particulièrement saisissante est la scène dans laquelle un professeur propose à Mary de démontrer l'équation en figure 8 :

Figure 8 – Une question dans *Gifted*



Mary ne répond pas car on lui a conseillé de ne pas corriger les grandes personnes, mais elle revient tout de même et corrige l'équation au tableau en ajoutant un signe « - » devant x^2 et en mettant σ en valeur absolue (figure 9).

Figure 9 – Mary corrige le tableau

La valeur absolue est en réalité inutile car l'écart-type est un nombre positif. Comme remarque Cottanceau [3] « ce petit détail met en évidence que Mary a une intuition formidable… mais pas encore assez d'expérience pour contextualiser les problèmes qu'on lui soumet ». La démonstration semble enfin correcte et cette scène est cohérente, « dans cet univers parallèle où une fillette de CP montre de telles capacités » [3].

3. Conclusions

Le regard que le cinema porte aux mathématiques me semble évoluer ces dernières années vers une approche plus complexe et soignée et donc plus réaliste et vraisemblable. Si on ne peut pas demander au cinéma d'expliquer les mathématiques (ce n'est pas son rôle) on peut apprécier que des œuvres récentes nous montrent qu'il est possible de se passionner pour les mathématiques et que celles-ci peuvent être intéressantes et véhiculer des messages positifs. Même si certains stéréotypes semblent persister, les mathématiciens et les mathématiciennes apparaissent de plus en plus comme des personnages à part entière qui méritent d'être cinématographiquement développés. Les figures de mathématiciennes, vraies ou fictives, sont particulièrement intéressantes car elles permettent aux réalisateurs et scénaristes d'aborder en même temps d'autres thématiques : le rapport conflictuel entre ce qui est rationnel et ce qui est émotif (traditionnellement incarné par la sensibilité féminine dans le cinéma), la discrimination, la difficulté d'émerger scientifiquement dans un monde d'hommes. D'autre part on voit la force d'appartenance à une communauté, d'abord de femmes, comme dans *The Bletchley Circle* ou *Hidden Figures*, ou de façon plus générale, à la « nation » des mathématiques dont parlait Julia Robinson.

Pour conclure, le nombre de documentaires et de films sur des mathématiciennes qui ont réellement existé est extrêmement limité, même à l'intérieur de la niche cinématographique des films « mathématiques ». En ce qui concerne les films réalisés par des femmes, aux quatre films que j'ai cités (*Antonia's line, It's my turn, Sofia Kovalevskaya, Little Man Tate*) on peut ajouter *C'est la tangente que je préfère* (1987) de Charlotte Silvera, où la protagoniste est une jeune fille très douée

6. Un autre problème du prix du millénaire résolu dans le cinéma est « P=NP », et plus précisément dans un épisode de la série *Elementary*. À vrai dire, dans l'épisode en question on précise que le mathématicien trouvé mort en a démontré « un tiers » ce qui, comme remarqué par Jean-Paul Delahaye, est pour nous une affirmation assez étonnante… À noter aussi que l'assassin est, encore une fois, une mathématicienne.

en logique. Cet échantillon n'est pas négligeable et tous ces films ont rencontré un discret succès public et/ou critique. Cela dit ils sont tous concentrés sur une courte période, et, à ma connaissance, aucune autre réalisatrice n'a finalisé un film autour des mathématiques (à diffusion internationale) depuis 1997. Il s'agit en réalité d'un problème plus général : juste à titre d'exemple sur environ 21000 long métrages européens sur la période entre 2003 et 2017 (Observatoire européen de l'audiovisuel) seulement 1 sur 5 serait réalisé (ou co-réalisé) par une femme. Un autre point que les mathématiques et le cinéma ont en commun : le chemin vers la parité reste encore long.

Sitographie

- L'égalité entre hommes et femmes dans la réalisation de films : un long chemin reste à parcourir, Annuaire 2019/2020 Observatoire européen de l'audiovisuel, `https://obs.coe.int`
- Mathematical Fiction (2021) `https://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/all.php`
- Knill, O. (2006) Mathematics in Movies `https://people.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/`
- Mayer. D. (2013). Hollywood hates Maths. `https://www.youtube.com/watch?v=NoaD-eIyC5g`
- Boyer A., Pajot H. et Bastien F. (2021) Je suis Sophie Germain, femme et mathématicienne, `https://www.canal-u.tv/video/institut_fourierje_suis_sophie_germain_femme_et_mathematicienne.60473`
- Delahaye J.-P. (2014) `https://interstices.info/pnp-elementaire-ma-chere-watson/`

Films

- Amenábar, A. (Réalisateur). (2009) *Agora* Espagne : Fox International Production
- Brown, M. (Réalisateur). (2015) *The Man Who Knew Infinity* (L'Homme qui défiait l'infini) Royaume Uni : Pressman Film
- Chiha, P. (Réalisateur). (2010) *Domaine* Autriche/France : Aurora films
- Csicsery, G. (Réalisateur). (1993) *N is a Number : A Portrait of Paul Erdös* États-Unis
- Csicsery, G. (Réalisateur). (2008) *Julia Robinson and Hilbert's Tenth Problem* États-Unis
- Csicsery, G. (Réalisateur). (2020) *Secrets of the Surface : The Mathematical Vision of Maryam Mirzakhani* États-Unis, Zala Films
- Foster J. (Réalisatrice). (1991) *Little Man Tate* (Le Petit Homme) États-Unis : Orion Pictures Coroporation
- Hjulström, L. (Réalisateur). (1983) *Berget på månens baksida* (A Hill on the Dark Side of the Moon) Suède : Moviemakers Sweden AB
- Howard, R. (Réalisateur). (2011) *A beautiful mind* (Un homme d'exception) États-Unis : Universal Pictures
- Gorris, M (Réalisatrice). (1995) *Antonia's Line* Belgique/ Pays Bas : Polygram Video
- Jiing, Y.-J. (Réalisateur). (2017) *Girls who fell in love with Math* Taiwan Film Institute
- Koster, H. (Réalisateur) (1965) *Dear Brigitte* États-Unis : 20th Century Fox
- Lamont, C. (Réalisateur). (1946) *She Wrote the Book* États-Unis : Universal Pictures
- Madden, J. (Réalisateur). (2005) *Proof* États-Unis : Miramax film
- Melfi T. (Réalisateur). (2016) *Hidden Figures* (Les Figures de l'ombre) États-Unis : Fox 2000 Pictures
- Miller, B. (Réalisateur). (2011) *Moneyball* (Le stratège) États-Unis : Columbia Pictures
- Moretti N. (Réalisateur). (1984) *Bianca* Italie : Faso Film / Rete Italia
- O'Connor, G. (Réalisateur). (2016) *The accountant* (Mr Wolff) États-Unis : Warner Bros
- Pakula A. J. (Réalisateur). (1990) *Presumed Innocent* (Présumé Innocent) États-Unis : Warner Bros
- Peckinpah S. (Réalisateur). (1971) *Straw Dogs* (Les chiens de paille) Royaume Uni/États-Unis : 20th Century Fox
- Peyon, O. (Réalisateur). (2013). *Comment j'ai détesté les mathématiques* France : Haut et Court
- Tyldum M. (Réalisateur). (2014) *Imitation Game* États-Unis : Bear Pictures
- Shakhmaliyeva, A. (Réalisatrice). (1997) *Sofia Kovalevskaya* Russie : Gosteleradio
- Shapiro, J. (Réalisateur). (1956) *Sofia Kovalevskaya* Russie
- Silvera C (Réalisatrice). (1997) *C'est la tangente que je préfère* France : Canal + / CNC
- Webb, M. (Réalisateur). (2017) *Gifted* (Mary) États-Unis : FilmNation Entertainment
- Weill, C. (Réalisatrice). (1980) *It's my turn* (C'est ma chance) États-Unis : Columbia Pictures

Séries Télévisées

- *The Bletchley Circle* 2 saisons Royaume Uni : ITV
- *Elementary* saison 2 épisode 2 États-Unis : CBS Television Studios
- *The Queen's Gamblit* (Le jeu de la dame) États-Unis : Netflix
- *Sky Castle* Corée du Sud : JTBC

Références

[1] S. Beccastrini et M. Nannicini. *Il Cinema e la Matematica. Sulle tracce di una promettente amicizia*. Trento, 2010.

[2] P. Bellingeri. « Langages universels, langage commun? Comment le cinéma représente les mathématiques ». In : *École, art et (pop) culture (à paraître)*. Mardaga, Bruxelles, 2022.

[3] J. Cottanceau. *Les maths font leur cinéma*. Dunod, 2021.

[4] M. Du Sautoy. *La symphonie des nombres premiers*. Points, 2003.

[5] A. Ferrari, A. Fillipini et E. Tartaglini. *Les Audaces de Sophie Germain*. Petit à petit, 2021.

[6] C. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge : Cambridge Press, 1994.

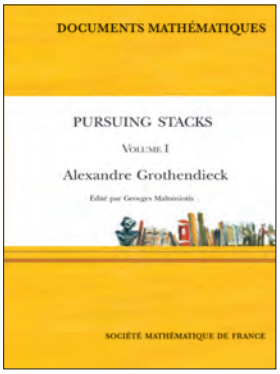
Paolo Bellingeri

Université de Caen-Normandie
paolo.bellingeri@unicaen.fr
https://bellingeri.users.lmno.cnrs.fr/

Paolo Bellingeri est enseignant-chercheur en mathématiques à l'université de Caen-Normandie : ses recherches concernent les groupes de tresses. Il est actuellement directeur de la Fédération de recherche Normandie-Mathématiques. Il participe aux activités de l'équipe de diffusion de la culture mathématique du laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme avec des ateliers, des conférences et des articles autour de la théorie des nœuds, des pavages... et du cinéma.

Je remercie Antoine Derobertmasure, Marc Demeuse et Marie Bocquillon, éditeurs de *École, art et (pop) culture*, à paraître aux éditions Mardaga, de m'avoir permis de reprendre quelques idées et textes tirés de ma contribution [2].

Documents mathématiques - nouveauté



Vol. 20
Pursuing Stacks (volume I)
Alexandre GROTHENDIECK, édité par Georges MALTSINIOTIS

ISBN 978-2-85629-958-6
2022 - 446 pages - Hardcover. 17 x 24
Public: 75 € - Members: 53 €

Despite what its title suggests, Pursuing Stacks (or at least the part of the project that Grothendieck carried out under the name of The Modelizing Story or Histoire de Modèles) is not about the pursuit of stacks. Only the thirteen first sections, as well as, partially, sections 15–21 and 27, are about stacks. Furthermore, it is mainly about ∞-stacks on the point, i.e. weak ∞-groupoids. The only reflections on stacks on arbitrary topoi, as natural coefficients for a non-abelian cohomology, are purely heuristic. The rest of the hundred and forty sections deals with homotopy theory : the search for models for homotopy types (and more particularly for small categories whose presheaf category models canonically homotopy types : the test categories), homotopy structures, contractibility and asphericity structures, abelianization and schematization of homotopy types. Grothendieck was planning to come back later to ∞-stacks on topoi and to develop, in one or two additional volumes, what he had sketched out in his letters to Breen (letters that he included in Pursuing Stacks as an appendix), but he never did it. Nevertheless, the search for models for homotopy types is closely related to ∞-stacks, since according to the "homotopy hypothesis", a fundamental conjecture of Grothendieck, the weak ∞-groupoids model homotopy types.The first volume of this edition consists of the first four chapters (sections 1–91 and 95–98). In a second volume, we will publish the last three chapters, the letters to Breen, as well as the correspondence of Grothendieck with several mathematicians, around the themes of Pursuing Stacks.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : https://smf.emath.fr
*frais de port non compris

Société Mathématique de France

Géométrie kählerienne et pluripotentiel : une aventure singulière

• A. Zeriahi

Introduction

Le célèbre théorème d'uniformisation de Riemann-Poincaré-Koebe fournit une classification (à isomorphisme près) des surfaces de Riemann simplement connexes en trois types : le plan complexe $\mathbb{C}$, la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{P}^1$ ou le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Il en résulte une classification complète (à isomorphisme près) des surfaces de Riemann compactes en trois types :

- les courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda$, où $\Lambda \subset \mathbb{C}$ est un réseau : surfaces de genre $g = 1$, de **caractéristique** d'Euler **nulle** $\chi = 0$;
- la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{P}^1$: surface de genre $g = 0$, de **caractéristique** d'Euler **positive** $\chi = 2 > 0$;
- les surfaces hyperboliques compactes $\mathbb{H}/\Gamma$, où $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe discret : surfaces de genre $g \geqslant 2$ et de **caractéristique** d'Euler **négative** $\chi = 2 - 2g < 0$.

Il en découle que toute surface de Riemann compacte X peut être munie d'une métrique à courbure de Gauss constante, dont le signe est celui de sa caractéristique d'Euler $\chi(X)$. Il faut noter le rôle important joué par la théorie du potentiel dans l'approche de Riemman Poincaré de ces questions.

En dimension supérieure, la situation est plus compliquée, mais dès les années cinquante le problème de l'existence d'une métrique « spéciale » ou « canonique » sur une variété complexe compacte fut posé par E. Calabi pour une classe particulière de variétés complexes compactes, dites variétés *kähleriennes*. E. Calabi a défini plusieurs notions de « métriques canoniques » dont les plus simples sont les métriques de *Kähler-Einstein* pour lesquelles il a formulé plusieurs conjectures, dont la plus célèbre est la *conjecture de Calabi*. Il a notamment observé que ces conjectures se ramènent à la résolution d'EDP elliptiques non linéaires du second ordre de type « équations de Monge-Ampère complexes », et a proposé une stratégie d'approche pour résoudre ces équations, reposant sur la méthode de continuité et les estimées a priori.

En 1978, S.T. Yau [14] a résolu la conjecture de E. Calabi et le problème de l'existence de métriques de Kähler-Einstein Ricci-plate i.e. de courbure de Ricci nulle sur des variétés kähleriennes compactes dont la première classe de Chern est nulle. Peu de temps après et de manière indépendante, S.T. Yau [14] et T. Aubin [1] ont démontré l'existence de métriques de Kähler-Einstein sur les variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est négative, dites de type général. Dans le cas des variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est positive, dites variétés de Fano, il n'existe pas en général de métrique de Kähler-Einstein. Cependant X.X. Chen, S. Donaldson et S. Sun ont récemment démontré la conjecture de Yau-Tian-Donaldson qui caractérise l'existence d'une telle métrique sur une variété Fano par une propriété algébro-géométrique de stabilité au sens de la GIT (Geometric Invariant Theory).

Le théorème d'uniformisation n'a pas d'équivalent en dimension supérieure et la classification des variétés kähleriennes compactes demeure un problème ardu et largement ouvert. Cependant une classe importante de variétés kähleriennes compactes est fournie par les variétés projectives complexes i.e. celles qui se plongent comme des sous-variétés complexes lisses d'un espace projectif complexe $\mathbb{P}^N$. Le problème de la classification de ces variétés, connu sous le nom de programme du modèle minimal de Mori (MMP) a connu récemment des progrès remarquables grâce notamment aux travaux de C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon et J. McKernan, démontrant l'existence d'un modèle canonique pour

les variétés projectives de type général. Il s'avère qu'à partir de la dimension 3, les modèles canoniques qui apparaissent sont des variétés projectives singulières ayant des « singularités faibles » en un sens approprié.

À la suite de ces travaux, J. Song et G. Tian ont proposé une approche analytique du MMP pour les variétés kähleriennes compactes. Le problème de l'existence de métriques de Kähler-Einstein sur des variétés kähleriennes singulières constitue un pas important dans cette direction. La résolution de ce problème se ramène à celle d'équations de Monge-Ampère complexe de type « dégénérées » pour lesquelles l'approche de Calabi ne s'applique pas.

Un tournant décisif s'est opéré grâce aux travaux de S. Kołodziej [12] donnant une nouvelle preuve des estimées uniformes a priori de Yau par une approche reposant sur la théorie du pluripotentiel développée par E. Bedford et B.A. Taylor ([2], [3]). Cette théorie permet , grâce à la théorie des courants positifs, de définir les notions de métriques singulières, de courants de courbure associés et de résoudre des équations de type Monge-Ampère complexes dégénérées. Cette approche a été ensuite adaptée et généralisée au cas des variétés kähleriennes singulières par P. Eyssidieux, V. Guedj et l'auteur [8], aboutissant en particulier à l'existence de métriques de Kähler-Einstein singulières sur des modèles canoniques ayant des singularités faibles au sens du MMP, sous des conditions de signe analogues à celles décrites précédemment dans le cas lisse, comme nous l'expliquerons ci-dessous.

L'objectif de cette note est de rendre compte de cette aventure singulière.

1. La conjecture de Calabi

1.1 – Variétés kähleriennes

Rappelons que le modèle local d'une variété complexe X de dimension $n \geqslant 1$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ muni de ses coordonnées canoniques complexes $z = (z_1, \cdots, z_n)$. Ainsi tout point $x_0 \in X$ admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe un homéomorphisme $\phi_U : U \longrightarrow U' \subset \mathbb{C}^n$ de U sur un voisinage ouvert U' de $\phi_U(x_0)$ dans $\mathbb{C}^n$. On peut faire en sorte que $\phi_U(x_0) = 0$. On notera $z = z(x) := \phi_U(x)$ pour $x \in U$ et on dira que (U, ϕ_U) est une carte locale au voisinage de x_0 ou par abus que (U, z) est un système de coordonnées complexes locales centrées au point x_0.

De plus si (U, ϕ_U) et (V, ϕ_V) sont des cartes locales telles que $U \cap V \neq \emptyset$, alors le changement de cartes

$$\phi_{U,V} := \phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \phi_V(U \cap V) \subset \mathbb{C}^n$$

est un homéomorphisme holomorphe entre les deux ouverts de $\mathbb{C}^n$. Il en résulte que $\phi_{U,V}^{-1} = \phi_{V,U}$ est holomorphe. On dira que $\phi_{U,V}$ est un biholomorphisme et que les deux cartes sont compatibles. On peut alors recouvrir la variété X par un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ de cartes complexes locales compatibles. Il en résulte que toute notion définie sur des ouvert de $\mathbb{C}^n$ et invariante par biholomorphisme fera sens sur une variété complexe.

La structure complexe de $\mathbb{C}^n$ permet de définir les opérateurs différentiels complexes suivants. Si ψ est une fonction C^∞ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, sa différentielle s'écrit : $d\psi = \partial\psi + \bar{\partial}\psi$, où $\partial\psi := \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial z_j} dz_j$ et $\bar{\partial}\psi := \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$. On définit l'opérateur réel d^c en posant $d^c := \frac{i}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial)$, de sorte que $dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}$ est un opérateur réel. La normalisation n'est pas importante mais sera justifiée à la section 1.2.

La forme différentielle

$$\alpha = dd^c\psi = \frac{i}{2\pi} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

est une $(1,1)$-forme différentielle lisse réelle fermée sur Ω i.e. $\bar{\alpha} = \alpha$ et $d\alpha = 0$.

Il est facile de définir ces opérateurs sur une variété complexe en procédant localement dans un système de coordonnées complexes.

Dans toute la suite, X sera une variété complexe compacte connexe de dimension $n \geqslant 1$.

Définition 1. On appelle *métrique hermitienne* sur X, la donnée pour chaque point $x \in X$ d'un produit scalaire hermitien $h(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle_{h(x)}$ sur l'espace tangent complexe $T_x X$ de sorte que si ξ et η sont deux champs de vecteurs locaux, la fonction $x \longmapsto \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_{h(x)}$ soit une fonction de classe C^∞. En fait h est une métrique hermitienne lisse sur le fibré tangent complexe TX (voir exemple 1.5).

Dans un système de coordonnées complexes locales (U, z), h s'écrit $h_{|U} = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} h_{j\bar{k}} dz_j \otimes d\bar{z}_k$, où $(h_{j\bar{k}})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ est une matrice hermitienne positive, à coefficients des fonctions de classe C^∞ sur U. La forme fondamentale associée à h sur X s'écrit localement $\omega_{|U} = (i/2) \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} h_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$. On dit que ω est une $(1,1)$-forme hermitienne (positive) sur X. La $(1,1)$-forme ω_h détermine entièrement la métrique h que l'on identifiera à ω_h.

Définition 2. On dit que la métrique hermitienne h sur X est *kählerienne* si sa forme fondamentale $\omega = \omega_h$ est d-fermée i.e. $d\omega = 0$ sur X.

Toute variété complexe peut être munie d'une métrique hermitienne. En effet si (U_α, ϕ_α) est un atlas de cartes locales, on considère la forme hermitienne $\omega_\alpha := \phi_\alpha^*(\beta)$ sur U_α, où β est la forme de Kähler standard sur $\mathbb{C}^n$, puis on recolle ces métriques locales grâce à une partition de l'unité. Mais l'existence d'une métrique kählerienne est une propriété restrictive.

Exemple 1.

1. *Surfaces de Riemann.* Toute surface de Riemann (variété complexe de dimension 1) est une variété kählerienne. En effet toute métrique hermitienne ω sur X est kählerienne, puisque $d\omega = 0$ en tant que forme différentielle de degré 3 sur une variété réelle de dimension 2.

2. *Espace projectif complexe* $\mathbb{P}^n$. C'est la variété kählerienne compacte la plus simple. Elle est définie comme l'ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par l'origine i.e. $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}_*$ de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ est le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action de $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ par multiplication. Pour chaque $\zeta = (\zeta_0, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[\zeta_0, \cdots, \zeta_n]$ la droite complexe passant par ζ. Observons que $\mathbb{P}^n = \pi(S^{2n+1})$ est un espace compact connexe.

Pour munir $\mathbb{P}^n$ d'une structure de variété complexe de dimension n, on observe que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{0 \leqslant j \leqslant n} \mathbb{U}_j$, où $\mathbb{U}_j := \{\zeta \in \mathbb{P}^n ; \zeta_j \neq 0\}$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$. Pour chaque $0 \leqslant j \leqslant n$, l'application $\phi_j : \mathbb{U}_j \longmapsto \mathbb{C}^n$ donnée par $z = \phi_j(\zeta) := \left(z_0, \cdots, \hat{z}_j \cdots, z_n\right)$, où $z_k := \zeta_k/\zeta_j$ pour $k \neq j$, est un homéomorphisme qui définit les coordonnées locales sur $\mathbb{U}_j$.

De plus pour tout $0 \leqslant j, k \leqslant n$, le changement de coordonnées $\phi_k \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k) \longrightarrow \phi_k(\mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k)$ est biholomorphe.

Pour munir $\mathbb{P}^n$ d'une métrique kählerienne, on définit une forme ω_j sur chaque ouvert de cartes $\mathbb{U}_j$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $j = 0$. L'expression locale de ω dans les coordonnées $z = (z_1, \cdots, z_n)$ de $\mathbb{U}_0$ s'écrit

$$\begin{aligned}\omega_0 &= dd^c \ln(1+|z|^2) \\ &= \frac{i}{2\pi}\Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{1+|z|^2} - \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \frac{\bar{z}_j dz_j \wedge z_k d\bar{z}_k}{(1+|z|^2)^2}\Big). \quad (1)\end{aligned}$$

On vérifie que $\omega_0 > 0$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On montre que les formes kählériennes (ω_j) se recollent en une forme kählerienne globale ω_{FS} sur $\mathbb{P}^n$, appelée la forme de Fubini-Study.

4. *Variétés projectives.* Rappelons qu'une sous-variété projective de l'espace $\mathbb{P}^N$ est définie comme le lieu des zéros communs d'un nombre fini de polynômes homogènes de même degré $d \geqslant 1$, sans points singuliers. Toute sous-variété projective $X \subset \mathbb{P}^N$ de dimension n est une variété kählerienne compacte. En effet la restriction à X de la métrique Fubini-Study sur $\mathbb{P}^N$ fournit une métrique kählerienne sur X. Une variété projective X est par définition une variété complexe compacte qui se plonge comme sous-variété projective complexe d'un espace projectif $\mathbb{P}^N$. Une telle variété est kählerienne, en effet si $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ est un plongement de X, la forme $\omega := \iota^\star(\omega_{FS})$ définit une métrique kählerienne sur X.

5. *Tores complexes.* L'espace $\mathbb{C}^n$ muni de la métrique hermitienne standard de forme fondamentale $\beta = dd^c|z|^2$ est une variété kählerienne non compacte. Si $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ un réseau de $\mathbb{C}^n$ i.e. un sous-groupe discret de rang maximal de $\mathbb{C}^n$ agissant par translation, alors l'espace quotient $T_\Lambda := \mathbb{C}^n/\Lambda$ peut être muni d'une structure de variété complexe compacte de dimension n. La forme kählerienne β est invariante par l'action de Λ sur $\mathbb{C}^n$ et induit une forme kählerienne β_Λ sur T_Λ. Ainsi T_Λ est une variété kählerienne compacte de dimension n.

1.2 – Le fibré canonique

La notion de fibré vectoriel est fondamentale en géométrie. Nous allons rappeler quelques définitions et introduire la notion de fibré canonique d'une variété kählerienne qui joue un rôle essentiel dans notre étude. Le modèle local d'un fibré holomorphe de rang $r \geqslant 1$ est le fibré trivial $p_U : E^U := U \times \mathbb{C}^r \longrightarrow U$ au-dessus d'un ouvert $U \subset X$ muni de la projection naturelle sur le premier facteur. La fibre au-dessus d'un point $x \in U$ est $E_x^U = \{x\} \times \mathbb{C}^r$ muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel complexe de dimension r. Un fibré holomorphe au-dessus d'une variété complexe X est un recollement de tels fibrés par des applications holomorphes compatibles, appelées des trivialisations.

Définition 3. Un fibré holomorphe de rang r au-dessus d'une variété complexe X de dimension n est une variété complexe E de dimension $n + r$ munie d'une projection $p : E \longrightarrow X$ holomorphe et localement triviale au-dessus de X i.e. il existe un recouvrement ouvert (U_α) de X et pour chaque α, il existe un homéomorphisme $\Phi_\alpha : E_{|U_\alpha} := p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ tel que pour chaque $x \in X$, la restriction

de Φ_α induise un isomorphisme d'espace vectoriel $\Phi_\alpha(x,\cdot) : E_x := p^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^r$ et que pour tous (α,β) avec $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, le biholomorphisme de transition $\Phi_{\alpha,\beta} := \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^r \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^r$ soit de la forme $\Phi_{\alpha,\beta}(x,\xi) = (x, g_{\alpha,\beta}(x)\cdot\xi)$, où $g_{\alpha,\beta}$ sont des applications holomorphes sur $U_\alpha \cap U_\beta$ à valeurs dans le groupe linéaire $GL(\mathbb{C}^r)$ des automorphismes de $\mathbb{C}^r$. Les couples $(U_\alpha \cap U_\beta; g_{\alpha,\beta})$ forment un cocycle appelé le cocycle de transition de la trivialisation locale de E. On montre que ce cocycle de transition détermine E à un isomorphisme près. Un fibré holomorphe de rang 1 au-dessus d'une variété complexe X est appelé un fibré holomorphe linéaire ou fibré en droites au-dessus de X.

Exemple 2. Soit X une variété complexe X de dimension n. Le fibré tangent complexe de X est défini par $TX := \bigcup_{x\in X} T_xX$, où T_xX est l'espace tangent complexe à X au point $x \in X$ muni de sa projection naturelle $p : TX \longrightarrow X$. C'est un fibré vectoriel holomorphe de rang n dont une trivialisation locale est définie comme suit. Si (U_α, ϕ_α) est un atlas de X, on définit la trivialisation de TX par $\Phi_\alpha(\xi) := T_x\phi_\alpha(\xi)$ pour $x \in U_\alpha$ et $\xi \in T_xX$. Les cocycles de transition sont donnés par $g_{\alpha\beta}(x) := D(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x)$.

On peut étendre aux fibrés vectoriels toutes les opérations algébriques sur les espaces vectoriels.

Définition 4. Soit $p : E \longrightarrow X$ un fibré holomorphe de rang r défini par les cocycles de transitions $(U_\alpha \cap U_\beta; g_{\alpha,\beta})$.

1. On définit son fibré dual de la façon suivante. L'espace total est défini par $E^\star := \bigcup_{x\in X} E_x^\star$, où $E_x^\star := (E_x)^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_x, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel complexe dual de E_x avec l'application naturelle $p^\star : E^\star \longmapsto X$ et les cocycles de transitions sont $(U_\alpha \cap U_\beta, g_{\alpha,\beta}^{-1})$. On notera $E^{-1} := E^\star$ le fibré dual de E. En particulier on peut définir le fibré cotangent complexe T^*X.

2. On définit de la même façon pour $k \in \mathbb{N}^*$, les puissances tensorielles $E^k := E^{\otimes k}$. L'espace total est défini par $E^k := \bigcup_{x\in X}(E_x)^{\otimes k}$ et les cocycles de transition par $(U_\alpha \cap U_\beta, g_{\alpha,\beta}^{\otimes k})$.

Dans la suite nous ne considérerons que les fibrés holomorphes linéaires.

Définition 5. Soit $p : L \longrightarrow X$ un fibré holomorphe linéaire au-dessus d'une variété complexe. Une section holomorphe locale de L est une application holomorphe $s : W \longrightarrow L$ sur un ouvert $W \subset X$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_W$. En notant $\Phi_\alpha \circ s(x) = (x, s_\alpha(x)$ pour $x \in W_\alpha := W \cap U_\alpha$, on en déduit qu'une section holomorphe de L au-dessus de W est la donnée d'une collection de fonctions holomorphes locales $s_\alpha : W_\alpha := W \cap U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tous α, β tels que $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$, on ait $s_\alpha = g_{\alpha,\beta} \cdot s_\beta$ sur $W_\alpha \cap W_\beta$. On notera $s = (W_\alpha, s_\alpha)$ une section locale.

On notera $H^0(X, L)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes globales de L au-dessus de X. Cet espace peut être réduit à $\{0\}$ (voir l'exemple ci-dessous).

Définition 6. Soit $p : L \longrightarrow X$ un fibré holomorphe linéaire au-dessus d'une variété complexe X.

1. Une métrique hermitienne (lisse) h sur L est la donnée d'un produit scalaire hermitien $h(x)$ sur chaque fibre L_x dépendant de façon C^∞ de $x \in X$. Cela équivaut à la donnée d'une famille $h = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$, où (U_α) est un recouvrement ouvert de X et pour chaque α, $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $\varphi_\alpha = \varphi_\beta + \ln|g_{\alpha,\beta}|^2$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Si $s = (W_\alpha, s_\alpha)$ est une section locale, on a $\|s\|_h^2 = e^{-\varphi_\alpha}|s_\alpha|^2$ sur W_α. Les conditions de compatibilité montrent que cette expression ne dépend pas de α et définit une fonction sur W, notée $\|s\|_h$, de sorte que pour chaque $x \in W_\alpha$ et $\xi \in L_x$ tel que $\Phi_\alpha(\xi) = (x, \xi_\alpha)$, $\|\xi\|_{h(x)}^2 := e^{-\varphi_\alpha(x)}|\xi_\alpha|^2$ soit le carré d'une norme hermitienne sur l'espace vectoriel $L_x := p^{-1}(x)$.

2. Si $h = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une métrique hermitienne sur L, les $(1,1)$-formes locales $dd^c\varphi_\alpha$ définies sur les U_α se recollent en une $(1,1)$-forme globale lisse réelle et fermée sur X, noté $\Theta_{L,h} = \Theta(L,h)$, appelée la forme de courbure de la métrique h. Comme deux métriques hermitiennes sur L sont proportionnelles, la classe de cohomologie

$$c_1(L) := [\Theta(L,h)] \in H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \subset H^2_{dR}(X,\mathbb{R})$$

est indépendante de la métrique hermitienne h sur L. On l'appelle la première classe de Chern du fibré holomorphe linéaire L. On montre qu'en fait cette classe est entière i.e. $c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z})$. C'est ce qui justifie la normalisation $dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial$ adoptée ici.

Observons que si $h = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une métrique hermitienne sur L, alors pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $h^k := (U_\alpha, k\varphi_\alpha)$ est une métrique hermitienne sur L^k telle que $\Theta(L^k, h^k) = k\Theta(L,h)$. D'où $c_1(X, L^k) = k\,c_1(L)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3.

1. Le fibré universel au-dessus de $\mathbb{P}^n$ est défini par $\mathcal{U} := \{([\zeta], \xi) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}; \xi \in \mathbb{C}\cdot\zeta\}$, muni de la projection naturelle sur $\mathbb{P}^n$. La condition $\xi \in [\zeta]$ s'écrit $\xi_\alpha\zeta_\beta = \xi_\beta\zeta_\alpha$ pour $\alpha \neq \beta$. Ainsi $\mathcal{U}$ est une sous-variété complexe de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ de dimension $n+1$ et l'application projection $p : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ est une fibration holomorphe

dont les fibres sont $\mathcal{U}_{[\zeta]} = \{[\zeta]\} \times \mathbb{C} \cdot \zeta$. Le recouvrement trivialisant est donné par les ouverts $U_\alpha := \{[\zeta] \in \mathbb{P}^n; \zeta_\alpha \neq 0\}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant n)$ et les cocycles de transition par $g_{\alpha,\beta}([\zeta]) := \zeta_\alpha/\zeta_\beta$. Une section holomorphe $s = (U_\alpha, s_\alpha)$ de $\mathcal{U}$ au-dessus de X vérifie $s_\alpha(\zeta) = (\zeta_\alpha/\zeta_\beta)s_\beta(\zeta)$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Fixons $\alpha \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Alors la fonction s_α est holomorphe sur l'ouvert $U_\alpha = \mathbb{P}^n \setminus H_\alpha$ complémentaire de l'hyperplan complexe $H_\alpha := \{\zeta_\alpha = 0\}$ et sa restriction à chaque ouvert $U_\beta \setminus H_\alpha = U_\alpha \cap U_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$ se prolonge continument à U_β par 0 sur H_α. Par conséquent s_α se prolonge en une fonction holomorphe sur la variété complexe compacte $\mathbb{P}^n$, nulle sur l'hyperplan H_α. Il en résulte que $s_\alpha = 0$ sur U_α pour tout α et s est la section nulle. On en déduit que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{U}) = \{0\}$. On notera $\mathcal{O}(-1) = \mathcal{U}$ le fibré universel et par $\mathcal{O}(-k) := \mathcal{O}(-1)^{\otimes k}$. Le même raisonnement montre que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-k)) = \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Le fibré dual du fibré universel $\mathcal{U}^{-1}$ sera noté $\mathcal{O}(1)$. Le recouvrement trivialisant de $\mathcal{O}(1)$ est donné par les ouverts U_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant n)$ et ses cocycles de transition par $g^{-1}_{\alpha,\beta}([\zeta]) := \zeta_\beta/\zeta_\alpha$. Une section holomorphe $s = (U_\alpha, s_\alpha)$ de $\mathcal{U}$ au-dessus de X est définie par les relations $\zeta_\alpha s_\alpha([\zeta]) = \zeta_\beta s_\beta([\zeta])$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. On en déduit que les fonction $P_\alpha : U_\alpha \ni \zeta \longmapsto \zeta_\alpha s_\alpha([\zeta])$ se recollent en un polynôme homogène P de degré 1 sur $\mathbb{C}^{n+1}$ unique tel que $s_\alpha([\zeta]) = P(\zeta/\zeta_\alpha)$ sur U_α. On a donc $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{H}_1(\mathbb{C}^{n+1})$, où $\mathcal{H}_1(\mathbb{C}^{n+1})$ est l'espace des polynômes complexes homogènes de degré 1. On note pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}(k) := \mathcal{O}(1)^{\otimes k}$ et on montre de même que $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) \simeq \mathcal{H}_k(\mathbb{C}^{n+1})$, où $\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^{n+1})$ est l'espace des polynômes homogènes de $n+1$ variables complexes, de degré k.

Rappelons qu'un fibré holomorphe linéaire $L \longrightarrow X$ est dit *positif* s'il admet une métrique hermitienne h telle que $\Theta(L, h) > 0$. On vérifie facilement que le fibré $\mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ est positif pour pout $k \geqslant 1$. La notion de positivité correspond à la notion d'amplitude en géométrie algébrique d'après un théorème de Kodaira. De plus si une variété kählerienne est la base d'un fibré holomorphe linéaire positif, alors elle est projective. L'hypothèse de positivité permet de construire suffisamment de sections holomorphes globales de L permettant de plonger X dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$.

Définition 7. Soit X une variété complexe de dimension n. Le fibré canonique de X est défini comme le fibré déterminant $K_X := \bigwedge^n T^*X$ du fibré cotangent-complexe T^*X. C'est un fibré holomorphe linéaire défini par le cocycle suivant. Si (U_α, Φ_α) est un atlas de cartes holomorphes locales de X et si $\Phi_{\alpha,\beta}$ sont les isomorphismes de transition, alors les trivialisations locales de T^*X sont $(U_\alpha \times \mathbb{C}^n, T\Phi_\alpha)$, où $T\Phi_\alpha : T^*X_{|U_\alpha} \longmapsto U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ est définie pour $x \in U_\alpha$ et $\xi \in T_xX$, $T\Phi_\alpha(\xi) := T_x\Phi_\alpha(\xi)$. Les cocycles de transition sont alors donnés par les applications holomorphes

$$G_{\alpha,\beta} := T\Phi_\alpha \circ T\Phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}).$$

Il en résulte que les cocycles de transition de K_X sont donnés par les fonctions holomorphes $g_{\alpha,\beta} := \det G_{\alpha,\beta}$. Les sections holomorphes locales de K_X sont les n-formes holomorphes locales. Le fibré dual $K_X^{-1} \simeq \bigwedge^n TX$ est appelé le fibré anticanonique de X. On note $c_1(X)$ sa première classe de Chern de sorte que $c_1(X) = -c_1(K_X)$. On montre que $K_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(-n-1)$ et K_X^{-1} est donc positif.

1.3 – Courbure de Ricci

Observons qu'il y a une correspondance canonique entre les formes volumes (lisses) sur X et les métriques hermitiennes (lisses) sur K_X. En effet si Ω est une forme volume sur X, on définit la métrique hermitienne $h = h_\Omega$ associée sur K_X comme suit. Soit U un ouvert de carte locale et η un générateur local de K_X au-dessus de U. On pose $\|\eta\|_h^2 := i^{n^2}\eta \wedge \bar{\eta}/\Omega$ sur U. Cette définition est globale et fournit une métrique hermitienne sur K_X. Inversement soit h une métrique hermitienne sur K_X. Si η est un générateur local de K_X, la forme volume définie par $v(h)_U := i^{n^2}\eta \wedge \bar{\eta}/\|\eta\|_h^2$ est indépendante du générateur local η et définit une forme volume globale lisse $v(h)$ sur X, dite forme volume adaptée à la métrique h. Localement on a

$$\Omega := e^u \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} (i/)dz_j \wedge d\bar{z}_j,$$

où u est une fonction lisse sur U. Si $\eta = f_U dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, où f_U est une fonction holomorphe sans zéros sur U, on a $\|\eta\|_h^2 = |f_U|^2 e^{-u}$ sur U. La forme de courbure de cette métrique s'écrit $\Theta(K_X, h_\Omega) = dd^c u$ que l'on écrit abusivement $\Theta(K_X, h_\Omega) = dd^c \ln \Omega$ sur U.

Définition 8. On définit

$$\mathrm{Ric}(\Omega) := -dd^c \ln \Omega = -\Theta(K_X, h_\Omega)$$

de sorte que $c_1(X) = -c_1(K_X) = [\mathrm{Ric}\,\Omega]$. En particulier si ω est une métrique kählerienne sur X, on pose $\mathrm{Ric}\,\omega := \mathrm{Ric}(\omega^n)$ et $c_1(X) = [\mathrm{Ric}\,\omega]$.

Dans une carte locale (U, z), on a $\omega_{|U} = (i/2)\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} h_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$, et la forme vo-

lume associée s'écrit localement

$$\omega^n/n! = \det(h_{j\bar{k}})\, dV(z), \text{ où } dV(z) = \bigwedge_{1\leqslant j\leqslant n} (i/2) dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

On a alors localement

$$\mathrm{Ric}\,\omega_{|U} := -dd^c \ln\Big(\det(h_{j\bar{k}})\Big) = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\ln\Big(\det(h_{j\bar{k}})\Big).$$

Observons que si $\tilde{\omega}$ est une autre métrique kählerienne sur X, on a

$$\mathrm{Ric}\,\omega - \mathrm{Ric}\,\tilde{\omega} = dd^c \ln(\tilde{\omega}^n/\omega^n), \text{ sur } X.$$

Exemple 4.
1. Soit X une surface de Riemann et ω une métrique hermitienne sur X. On montre que

$$\mathrm{Ric}\,\omega = (1/2\pi)\kappa(\omega)\,\omega, \tag{2}$$

où $\kappa(\omega)$ est la courbure de Gauss de la métrique ω. D'après la formule de Gauss-Bonnet, on a $\int_X \mathrm{Ric}\,\omega = \frac{1}{2\pi}\int_X \kappa(\omega)\,\omega = \chi(X)$, où $\chi(X)$ est la caractéristique d'Euler de X.
2. Considérons l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ muni de la métrique de Fubini-Study ω_{FS}. Pour calculer $\mathrm{Ric}\,\omega_{FS}$, il suffit de se restreindre à l'ouvert $\mathbb{U}_0$. D'après (1), la forme volume associée à ω_{FS} s'écrit dans U_0

$$\omega_0^n/n! = (1+|z|^2)^{-n-1}\, dV(z).$$

Il en résulte que

$$\mathrm{Ric}\,\omega_{FS} = (n+1)\,\omega_{FS}, \text{ et } c_1(\mathbb{P}^n) = (n+1)[\omega_{FS}]. \tag{3}$$

3. Soit $T_\Lambda := \mathbb{C}^n/\Lambda$ un tore complexe comme dans l'exemple 6. La forme $\beta = \beta_\Lambda$ est une forme kählerienne sur T_Λ vérifiant $\mathrm{Ric}\,\beta = 0$.

1.4 – Conjectures de Calabi

E. Calabi a formulé plusieurs conjectures qui ont joué un rôle moteur en géométrie kählerienne ([5]).

Rappelons que pour toute métrique kählerienne ω sur X, $\mathrm{Ric}\,\omega \in c_1(X)$. Le problème de la réciproque est l'une de ces conjectures.

Conjecture de Calabi. *Étant donnée une* $(1,1)$*-forme réelle lisse* $\eta \in c_1(X)$*, chaque classe de Kähler sur* X *contient une métrique de Kähler* ω *unique telle que* $\mathrm{Ric}\,\omega = \eta$.

Calabi a également posé le problème de l'existence de « métrique canonique » sur une variété kählerienne compacte comme les métriques de Kähler-Einstein.

Définition 9. Une métrique kählerienne ω sur X est dite métrique de *Kähler-Einstein* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ric}\,\omega = \lambda\,\omega$.

L'existence d'une métrique de Kähler-Einstein ω sur une variété X impose de fortes restrictions sur sa topologie puisque $c_1(X) = [\mathrm{Ric}\,\omega] = [\lambda\omega]$ admet un représentant $\lambda\omega$ qui a un signe, celui de λ.

Lorsque $c_1(X) = 0$, l'existence d'une métrique Rici-plate sur X i.e. $\mathrm{Ric}\,\omega = 0$, est une conséquence de la conjecture de Calabi résolue par S. T. Yau. Lorsque $c_1(X) < 0$ i.e. $-\omega \in c_1(X)$, où ω est une métrique kählerienne, l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein a été démontrée indépendamment par T. Aubin [1] et S.T. Yau [14]. Nous résumons ces résultats dans le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit* X *une variété kählerienne compacte.*

1. Si η *est une* $(1,1)$*-forme lisse réelle fermée sur* X *telle que* $\eta \in c_1(X)$*, toute classe de Kähler* $[\omega_0]$ *contient une métrique kählerienne unique* ω *telle que* $\mathrm{Ric}\,\omega = \eta$*. En particulier si* $c_1(X) = 0$*, on a* $\mathrm{Ric}\,\omega = 0$ *(Yau).*

2. Si $c_1(X) < 0$ *et* ω_0 *est une métrique kählerienne sur* X *telle que* $-\omega_0 \in c_1(X)$*, la classe de cohomologie de* ω_0 *contient une unique métrique de Kähler-Einstein* ω *telle que* $\mathrm{Ric}\,\omega = -\omega$ *(Aubin et Yau).*

Lorsque $c_1(X) > 0$, on dit que X est Fano, il y a des obstructions géométriques à l'existence d'une métrique de Kähler-Einstien sur X. Les variétés Fano ont fait l'objet d'une intense activité ces dernières décennies qui s'est conclue récemment par la résolution de la fameuse conjecture de Yau-Tian-Donaldson par Chen-Donalson-Sun caractérisant l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein sur une variété Fano par des propriétés de stabilité (voir [9]). Le théorème 1 se démontre en réduisant les deux équations $\mathrm{Ric}\,\omega = \eta$ et $\mathrm{Ric}\,\omega = \lambda\omega$ à des équations de Monge-Ampère complexe (voir [9]). On cherche une métrique kählerienne solution ω en déformant ω_0 dans sa classe de cohomologie. D'après le lemme du $\partial\bar{\partial}$ une telle forme s'écrit $\omega = \omega_0 + dd^c\varphi$, où φ est une fonction de classe C^∞ sur X de sorte que les deux équations se ramènent à une équation de type Monge-Ampère complexe :

$$(\omega_0 + dd^c\varphi)^n = e^{-\lambda\varphi}\mu, \text{ avec } \mu := e^v\omega_0^n, \tag{4}$$

où $v \in C^\infty(X)$ est donnée et $\varphi \in C^\infty(X)$ est l'inconnue.

(i) Lorsque $\lambda = 0$, l'équation (4) s'écrit $(\omega_0 + dd^c\varphi)^n = e^v\omega_0^n$, où v vérifie $\mathrm{Ric}\omega_0 = \eta + dd^c v$ et $\int_X e^v\omega_0^n = \int_X \omega_0^n$. Elle a été résolue par Yau [14] et la métrique solution vérifie $\mathrm{Ric}\,\omega = \eta$, confirmant la conjecture de Calabi.

(ii) Lorsque $\lambda = -1$, l'équation (4) s'écrit $(\omega_0 + dd^c\varphi)^n = e^{\varphi+v}\omega_0^n$ et a été résolue indépendamment par T. Aubin [1] et S.T. Yau [1] et la métrique solution vérifie $\mathrm{Ric}\,\omega = -\omega$.

Exemple 5.
1. Soit X une surface de Riemann compacte et ω une métrique hermitienne sur X. On a vu que $\mathrm{Ric}\,\omega = \kappa(\omega)\omega$, où $\kappa(\omega)$ est la courbure de Gauss de de la métrique ω. Une métrique de Kähler-Einstein ω sur X est une métrique à courbure de Gauss constante $\kappa(\omega) = \lambda$.

D'après la formule de Gauss-Bonnet, la constante est donnée par $\lambda = \int_X c_1(X) = \kappa_\omega = \chi(X)$.

2. Soit $X = X_1 \times X_2$ le produit de deux surfaces de Riemann. Alors $c_1(X) = c_1(X_1) + c_1(X_2)$. En particulier si $X_1 = \mathbb{P}^1$ et $X_2 = E$ est une courbe elliptique, alors $c_1(X)$ n'a pas de signe et n'est donc pas de l'un des types considérés plus haut.

3. L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ admet une métrique de Kähler-Einstein, puisque d'après (1), on a $\mathrm{Ric}\,\omega_{FS} = (n+1)\omega_{FS}$. Donc $c_1(\mathbb{P}^n) > 0$.

4. Soit $H_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface de degré d. On montre que $c_1(H_d) > 0$ si $d \leqslant n+1$, $c_1(H_d) = 0$ si $d = n+2$, et $c_1(H_d) < 0$ si $d \geqslant n+3$.

2. La théorie de Bedford et Taylor

Certaines situations géométriques que nous verrons plus loin conduisent à des équations de Monge-Ampère de la forme (4) avec une forme volume μ dégénérée i.e. ayant des zéros ou des pôles. C'est dans ce contexte que la théorie du Pluripotentiel intervient en permettant de développer une approche faible aux équations de Monge-Ampère complexes dégénérées.

2.1 – Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs

Rappelons qu'une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite harmonique si elle vérifie l'équation de Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans Ω. Les fonctions harmoniques sont caractérisées (parmi les fonctions continues) par la propriété de la valeur moyenne sur chaque cercle bordant un disque contenu dans Ω i.e. pour tout disque $\bar{\mathbb{D}}(a,r) \subset \Omega$, on a $u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\,d\theta$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, la partie réelle d'une fonction holomorphe f sur Ω est harmonique sur Ω de sorte que si $f \not\equiv 0$, la fonction $\ln|f|$ est harmonique sur l'ouvert $\Omega \setminus f^{-1}(0)$, complémentaire de son lieu des zéros. En fait cette dernière fonction est sous-harmonique sur Ω au sens de la définition qui va suivre et prend la valeur $-\infty$ en chaque zéro de f.

Définition 10. Une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite sous-harmonique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ si u est semi-continue supérieurement sur Ω et vérifie l'inégalité de sous-moyenne i.e. pour tout disque $\bar{\mathbb{D}}(a,r) \subset \Omega$, on a

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\,d\theta. \tag{5}$$

Notons que l'intégrale est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ car u est localement majorée. Une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, est sousharmonique si et seulement si $\Delta u \geqslant 0$ sur Ω. On démonte grâce à (5) que si u est sousharmonique et non identiquement $-\infty$, elle est localement intégrable et vérifie $\Delta u \geqslant 0$ au sens des distributions sur Ω. Le prototype de fonctions sousharmoniques est la fonction $\ln|z|$ qui est harmonique en dehors de l'origine et a une singularité à l'origine : c'est le noyau logarithmique sur $\mathbb{C}$ dont la dérivée complexe au sens des distributions est le noyau de Cauchy i.e. $\frac{\partial \ln|z|^2}{\partial z} = \frac{1}{z}$ de sorte que $\frac{\partial^2 \ln|z|^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \pi\delta(z)$, au sens des distributions sur $\mathbb{C}$, où δ la mesure de Dirac unité à l'origine.

Définition 11. Une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dite plurisouharmonique (psh en abrégé) si u est semi-continue supérieurement et si pour toute droite complexe $L \subset \mathbb{C}^n$, la restriction de u au domaine planaire $\Omega \cap L$ est sousharmonique i.e. pour tout point $a \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{S}^{2n-1}$, la fonction d'une variable complexe $u_\xi : \tau \longrightarrow u(a+\tau\xi)$ est sousharmonique sur l'ouvert $\Omega_\xi := \{\tau \in \mathbb{C}; a+\tau\xi \in \Omega\} \subset \mathbb{C}$.

Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur Ω, on note $H(u) := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)$ sa matrice Hessienne complexe. On montre que u est psh sur Ω si et seulement si la matrice $H(u)$ est semi-positive i.e. pour tout $z \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\Delta_\xi u(z) = \sum \xi_j \bar{\xi}_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \geqslant 0. \tag{6}$$

Il en résulte qu'une fonction $u(z) = u(x)$ à valeurs réelles ne dépendant que de la partie réelle de $z = x + iy$ est plurisouharmonique si et seulement si elle est localement convexe sur $\Omega \cap (\mathbb{R}^n + i\mathbf{0})$.

Nous noterons $PSH(\Omega)$ l'ensemble des fonctions plurisouharmoniques qui ne sont pas identiquement égales à $-\infty$ sur Ω. En utilisant la propriété de sous-moyenne (5), on montre que $PSH(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ est un cône positif convexe fermé, stable par supremum fini et que pour une fonction $u \in PSH(\Omega)$, la propriété (6) a lieu au sens des distributions sur Ω. Pour mieux exploiter cette propriété, il faudrait introduire la notion de courant positif due à P. Lelong, qui est une généralisation de la notion de distribution positive. Mais nous n'allons pas le faire par manque de place et nous nous contenterons de donner des exemples qui illustrent la puissance de cet outil (voir [7]).

Exemple 6.
1. Soit $u : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction sousharmonique. Le courant $dd^c u = (1/2\pi)\Delta u\,(i/2)dz \wedge d\bar{z}$ s'identifie à la distribution positive $\mu := (1/2\pi)\Delta u$ sur Ω et l'on écrira $dd^c u = (1/2\pi)\Delta u$. Cette mesure s'étend de façon unique en une mesure de Borel positive et on a la formule de représentation de Riesz : si $D \Subset \Omega$,

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} \ln|z-\zeta| d\mu_D(\zeta) + h_D(z) = U_{\mu_D}(z) + h_D(z),\ z \in D, \tag{7}$$

où U_{μ_D} est le potentiel logarithmique associé à la distribution de charges $\mu_{|D}$ et h_D est une fonction harmonique sur D. En particulier, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe non identiquement nulle, $u = \ln|f|^2$ est sousharmonique sur Ω et prend la valeur $-\infty$ sur l'ensemble des zéros de f. On montre facilement que $dd^c \ln|f|^2 = \sum_{a \in Z_f} \mathrm{m}_f(a)\delta_a$, qui est la mesure de comptage des zéros de f avec multiplicités.

2. Soit $u : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction psh sur Ω. Le courant $dd^c u = (i/2\pi)\sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ est un courant positif au sens où les inégalités (6) sont vérifiées au sens des distributions sur Ω. Si $u := \ln|f|^2$, où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe ($f \not\equiv 0$), alors u est psh sur Ω et l'on a $dd^c u = [f = 0]$ au sens des courants sur Ω, d'après la formule de Lelong-Poincaré, où $[f = 0]$ est le courant d'intégration avec multiplicités sur la partie régulière de l'ensemble analytique $\{f = 0\}$ (voir [7]).

3. Soient $L \longrightarrow X$ un fibré holomorphe linéaire muni d'une métrique hermitienne h et $s : W \longrightarrow L$ une section holomorphe locale non identiquement 0 au-dessus d'un ouvert connexe $W \subset X$. On vérifie facilement en appliquant la formule de Lelong-Poincaré que $dd^c \ln\|s\|^2_h + \Theta(L,h) = [s = 0]$ est un courant positif sur W (courant d'intégration sur le lieu des zéros de s).

2.2 – L'opérateur de Monge-Ampère complexe

Lorsque u est une fonction psh de classe C^2 sur Ω, on a

$$(dd^c u)^n := (dd^c u)^{\wedge n} = \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)\beta^n,$$

où $\beta := dd^c|z|^2$ est la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}^n$. Cette formule exprime $(dd^c u)^n$ comme une « forme volume » à densité le déterminant de la Hessienne complexe de u. C'est un courant de degré maximum que l'on identifiera à une mesure positive sur Ω. Pour définir le courant $(dd^c u)^n$ lorsque u est une fonction psh qui n'est pas régulière, on peut approcher u par une suite décroissante de fonctions psh lisses (u_j) et étudier la limite faible des courants (formes) lisses $(dd^c u_j)^n$. Lorsque u est psh et continue sur Ω, la convergence de (u_j) est localement uniforme, de sorte qu'il est assez facile de démontrer l'existence d'une telle limite grâce aux inégalités de Chern-Levine-Nirenberg (voir [10]). Cependant, lorsque u est psh et (localement) bornée sur Ω mais non continue, la convergence n'est pas uniforme et l'existence d'une limite faible est loin d'être évidente. C'est la difficulté principale de cette théorie, que Bedford et Taylor ont réussi à surmonter de façon remarquable en utilisant la théorie des courants positifs fermés et en introduisant une capacité associée à l'opérateur de Monge-Ampère complexe, permettant d'étudier les propriétés fines des fonctions psh singulières. En particulier cela permet de montrer que les fonctions psh sont quasi-continues, ce qui valide le processus d'approximation précédent en montrant que la convergence est quasi-uniforme en un sens naturel et justifie la convergence faible des courants approximants.

Ainsi on peut montrer que pour toute fonction $u \in PSH(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, $(dd^c u)^n$ est un courant positif de bidegré (n,n) qui s'identifie à une mesure de Borel positive sur Ω, appelée la mesure de Monge-Ampère de u.

Exemple 7.
1. La fonction $u_\alpha(z) := |z|^{2\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ est psh continue sur $\mathbb{C}^n$ et $(dd^c u_\alpha)^n = f_\alpha dV_{2n}$ est une mesure à densité $f_\alpha := \mathrm{cst}|z|^{2n(\alpha-1)} \in L^p_{loc}$ $(1 < p < 1/(1-\alpha))$ par rapport à la mesure de Lebesgue dV_{2n} sur $\mathbb{C}^n$.

2. La fonction $v(z) := \ln^+ |z|^2 = \max\{\ln|z|^2, 0\}$ est psh continue sur $\mathbb{C}^n$ et $(dd^c v)^n = \mathrm{cst}\,\sigma_{2n-1}$, où σ_{2n-1} est la mesure d'aire sur la sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$.

3. La fonction $w(z) := \sum_{j=1}^n (\Re\mathfrak{e}\, z_j)^+$ est psh continue sur $\mathbb{C}^n$ et $(dd^c w)^n = \mathrm{cst}\,\lambda_{\mathbb{R}^n}$, où $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ est la mesure d'aire sur $\mathbb{R}^n + i\mathbf{0} \subset \mathbb{C}^n$.

3. Le tournant pluripotentiel géométrique

3.1 – Fonctions quasi-plurisousharmoniques

La notion de fonction psh est invariante par changement holomorphe de coordonnées de sorte qu'elle fait sens sur une variété complexe X. Si la variété X est compacte, les fonctions holomorphes et les fonctions psh globales sont constantes d'après le principe du maximum. Les bonnes notions dans ce cadre sont celles de sections holomorphes de fibrés linéaires et de fonctions quasi-psh.

Définition 12. Soit (X, ω) une variété kählerienne compacte. On dit que $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est quasi-plurisousharmonique (qpsh) sur X si elle s'écrit localement comme la somme d'une fonction psh et d'une fonction lisse. On dira que φ est ω-psh sur X si φ est qpsh et $\omega_\varphi := \omega + dd^c\varphi \geqslant 0$ au sens des courants sur X. Cela veut dire que pour tout potentiel local ρ de ω sur un ouvert U i.e. $\omega_{|U} = dd^c\rho$, la fonction locale $u := \varphi + \rho$ est psh sur U.

On notera $PSH(X, \omega)$ l'ensemble des fonctions ω-psh sur X. C'est un cône convexe fermé de $L^1(X)$, stable par supremum fini.

Exemple 8.
1. Soit (X, ω) une variété kählerienne compacte. Toute fonction ϕ de classe C^2 sur X est quasi-psh sur X et l'on a $dd^c\phi \geqslant -A\omega$ sur X, où $A > 0$. Pour $0 < \epsilon \leqslant 1/A$, la fonction $\epsilon\phi$ est donc ω-psh sur X.

2. Soit $L \longrightarrow X$ un fibré holomorphe linéaire positif et h une métrique hermitienne sur L telle que $\omega := \Theta(L, h) > 0$. D'après l'exemple 6, si $s \in H^0(X, L) \setminus \{\mathbf{0}\}$, la fonction $\ln \|s\|_h^2$ est ω-psh sur X.

3.2 – Équations de Monge-Ampère complexes dégénérées

Soit (X, ω) une variété kählerienne compacte de dimension n. Lorsque $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap C^\infty(X)$, la forme ω_φ est semi-positive et ω_φ^n est une forme volume qui peut s'annuler. On peut facilement étendre cette définition aux fonctions $\varphi \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$. En écrivant localement $\omega = dd^c\rho$, on obtient une fonction plurisousharmonique bornée $u := \varphi + \rho$, de sorte que $dd^c u = dd^c\varphi + dd^c\rho = \omega + dd^c\varphi =: \omega_\varphi$ est indépendant de ρ. On posera alors localement $\omega_\varphi^n = (\omega + dd^c\varphi)^n = (dd^c u)^n_{BT}$ au sens de Bedford et Taylor. Ces courants locaux se recollent en un courant positif de bidegré (n, n) sur X, qui s'identifie à une mesure de Borel sur X de masse finie $\int_X (\omega + dd^c\varphi)^n = \int_X \omega^n$, dite mesure de Monge-Ampère de φ.

Observons que toutes ces notions se généralisent au cas où la forme de référence ω est une $(1, 1)$-forme lisse semi-positive et fermée.

Voici le théorème qui a amorcé un tournant décisif dans cette théorie.

Théorème 2. *([12, 8]). Soit X une variété kählerienne compacte de dimension n, ω une $(1, 1)$-forme réelle lisse, fermée et semi-positive sur X telle que $\int_X \omega^n > 0$. Soit $0 \leqslant f \in L^p(X)$, $p > 1$, vérifiant $\int_X f\omega^n = \int_X \omega^n$. Alors pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, il existe $\varphi_\epsilon \in PSH(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ telle que*

$$(\omega + dd^c\varphi_\epsilon)^n = e^{\varepsilon\varphi_\epsilon} f\omega^n, \tag{8}$$

la solution φ_ϵ est unique lorsque $\epsilon > 0$ et si $\epsilon = 0$, φ_0 est unique si on impose la condition de normalisation $\max_X \varphi_0 = 0$.

De plus on a $\|\varphi_\epsilon\|_{L^\infty(X)} \leqslant C\|f\|_p^{1/n}$, où $C = C(X, \omega) > 0$ est une constante absolue, et φ_ϵ est continue sur l'ouvert de Zariski de X.

Idée de la preuve : lorsque $\varepsilon = 0$ et $\omega > 0$ est une métrique kählerienne, le théorème est dû à S. Kołodziej ([12]). Le point clé de sa démonstration réside dans l'estimée a priori uniforme de la solution de l'équation (8). Supposons que φ soit une solution normalisée de l'équation (8) avec $\epsilon = 0$. Comme $\varphi \leqslant 0$, pour montrer que φ est bornée, il suffit de montrer que ses ensembles de sous-niveau $S(\varphi, s) := \{\varphi < -s\}$ sont vides à partir d'un certain niveau $s_0 > 0$. Pour ce faire, on mesure la taille de ces ensembles à l'aide de ce que l'on appelle une capacité Cap et on obtient une fonction $\chi(s) := [\mathrm{Cap}(\{\varphi < -s\})]^{1/n}$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et tendant vers 0 à l'infini. On ne définira pas ici ce concept mais notons simplement que la capacité est une version non linéaire de la notion de mesure permettant d'estimer la taille des « ensembles petits » pour la théorie des fonctions ω-psh. Le principe de comparaison permet de démontrer que pour tous $s, t > 0$, $t\chi(s+t) \leqslant C\chi(s)^2$. Un lemme classique à la Di Giorgi permet d'en déduire que $\chi(s) = 0$ si $s \geqslant s_0$, avec une estimation précise de s_0. Cela implique que $S(\varphi, s_0) = \emptyset$ et donc $\|\varphi\|_{L^\infty(X)} \leqslant s_0$. Cette

méthode donne une nouvelle preuve de l'estimée a priori uniforme de Yau, qui est une étape clé de la preuve du théorème 1. L'existence d'une solution s'en déduit par approximation de f par des densités lisses et non dégénérées auxquelles on applique le théorème 1.

Dans le cas général d'une forme semi-positive, l'existence d'une solution bornée est due à P. Eyssidieux, V. Guedj et l'auteur ([8]). La preuve consiste à adapter la méthode de Kołodziej pour étendre les estimées a priori uniformes et à utiliser les travaux antérieurs de V. Guedj et l'auteur, démontrant l'existence de solutions faibles dans l'espace $\mathcal{E}^1(X,\omega)$ des fonctions ω-psh d'énergies finies, un analogue non linéaire de l'espace de Sobolev $W^{1,2}$. Il est intéressant de noter qu'une approche alternative de nature variationnelle, où l'espace $\mathcal{E}^1(X,\omega)$ joue un rôle essentiel, a été développée dans [4], aboutissant à une nouvelle preuve du théorème 2, indépendante du théorème de Yau.

4. Métriques de Kähler-Einstein singulières

Le programme du modèle minimal (MMP) vise à classifier les variétés algébriques à équivalence birationnelle près. Mais dès la dimension 3, les modèles canoniques ou minimaux qui apparaissent sont en général singuliers ([11]). Une approche analytique à un MMP pour les variétés kähleriennes a été esquissée par J. Song et G.Tian, d'où une motivation importante pour étendre les résultats précédents à ce contexte.

4.1 – Géométrie kählerienne sur les espaces normaux

Cette partie est conceptuellement délicate et requiert des connaissances en géométrie algébrique. Nous serons donc volontairement assez vague, évitant de rentrer dans les détails. L'idée essentielle est que les variétés projectives singulières qui apparaissent dans le MMP sont précisément celles pour lesquelles les méthodes pluripotentielles développées dans la section précédentes s'appliquent donnant ainsi des versions singulières des résultats de Calabi-Yau et Aubin-Yau. Ce qui permet de démonter l'existence de métriques de Kähler-Einstein singulières sur les variétés vérifiant les conditions requises.

Le modèle local d'un espace analytique complexe est un sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^N$ i.e. le lieu des zéros communs d'une famille (finie) de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^N$. Un espace analytique complexe Y est un espace topologique tel que tout point $y_0 \in Y$ admet un voisinage V muni d'un plongement local $j : V \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ de V sur un sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^N$, pour un certain entier $N > 1$, avec des conditions de compatibilité entre les différents plongements. On dit que $y \in Y$ est un point régulier de Y, s'il admet un voisinage ouvert biholomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$, où $n = n_y \in \mathbb{N}^*$. On dira que Y est de dimension pure n si l'ensemble des points réguliers Y_{reg} est une variété complexe de dimension n. On notera $Y_{sing} := Y \setminus Y_{reg}$ le sous-ensemble analytique des points singuliers de X. Utilisant ces plongements locaux, on définit la notion de fonction holomorphe sur un tel espace comme étant localement la restriction d'une fonction holomorphe ambiante dans un plongement local. On définit de la même façon les notions de fonction C^∞, de fonction psh, de forme différentielle, etc.

Nous supposerons dans la suite que Y est un *espace analytique normal*. Cela veut dire en particulier que Y est lisse en codimension 1, i.e. Y_{sing} est de codimension $\geqslant 2$ et toute fonction holomorphe (resp. psh) sur Y_{reg} se prolonge en une fonction holomorphe (resp. psh) sur Y. C'est le bon cadre pour faire de la géométrie analytique complexe. En particulier la notion de faisceaux analytiques y est bien définie. On appellera fibré holomorphe linéaire au-dessus de Y, un faisceau analytique cohérent localement libre de rang 1 au-dessus de Y. Comme Y_{reg} est une variété complexe, on peut définir son fibré canonique $K_{Y_{reg}}$. Mais ce fibré ne s'étend pas nécessairement en un fibré holomorphe linéaire mais seulement en un faisceau analytique, appelé le faisceau canonique de Y. On fera donc l'hypothèse que Y a des singularités suffisamment faibles de sorte que le faisceau K_Y soit un fibré holomorphe linéaire. On dira dans ce cas que Y est Gorenstein (voir [8]). Une section holomorphe locale de K_Y au-dessus d'un ouvert $U \subset Y$ sans zéro sur U_{reg} sera appelée un générateur local de K_Y au-dessus de U.

Pour définir la courbure de Ricci d'une métrique kählerienne sur Y, on procède de la façon suivante. Soit h une métrique hermitienne lisse sur K_Y et soit α un générateur local de K_Y au-dessus d'un ouvert U. Alors

$$\nu(\alpha) := i^{n^2}\, \alpha \wedge \bar{\alpha}, \tag{9}$$

est une forme volume sur U. La forme volume $v(h) := \nu(\alpha)/\|\alpha\|_h^2$ est alors une forme volume lisse, indépendante du générateur local choisi sur U. Elle définit donc une forme volume globale lisse sur Y, appelée la forme volume adaptée à la métrique h.

Définition 13. Si h est une métrique lisse sur K_Y, on notera $\Theta(K_Y, h)$ sa forme de courbure. C'est une $(1,1)$-forme fermée lisse dont la classe de cohomologie $c_1(K_Y)$ en un sens approprié, est indépendante de la métrique h. On l'appellera la première classe de Chern de K_Y (voir [8]).

Nous considérerons des métriques singulières sur K_Y. Une telle métrique s'écrit par définition $\tilde{h} := e^u h$, où u est une fonction localement intégrable sur Y. Alors la forme volume adaptée à $\tilde{h}$ est $v(\tilde{h}) := e^{-u} v(h)$, et sa forme de courbure est $\Theta(K_Y, \tilde{h}) = \Theta(K_Y, h) + dd^c u$ au sens des courants sur Y.

Définition 14. On appelle courant semi-kählerien sur Y, un courant positif fermé T qui s'écrit localement sous la forme $T = dd^c\varphi$, où φ est une fonction psh locale, appelée un potentiel local de T. Si $\tilde{\omega}$ est un courant semi-kählerien sur Y à potentiel localement borné tel qu'il existe une métrique singulière $\tilde{h}$ telle que $\tilde{\omega}^n = v(\tilde{h})$, on posera par définition $\mathrm{Ric}\,\tilde{\omega} := -\Theta(K_Y, \tilde{h})$.

On dira que $\tilde{\omega}$ est une métrique de Kähler-Einstein singulière sur Y si $\mathrm{Ric}\,\tilde{\omega} = \lambda\tilde{\omega}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Définition 15. On dira qu'une variété projective (normale) Gorenstein Y est à singularités canoniques s'il existe une log-résolution $\pi : X \longrightarrow Y$ telle pour tout générateur local α de K_Y, la forme canonique $\pi^*(\alpha)$ se prolonge en une forme holomorphe.

Exemple 9. $Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3; xz = y^2\}$ est une surface complexe avec un point singulier $p := (0,0,0)$. La forme méromorphe définie dans la carte $x \neq 0$ par $\alpha := x^{-1} dx \wedge dy$ engendre K_Y. Si $\pi : X \longrightarrow Y$ est l'éclatement de Y en p, on montre que $K_X = \pi^*(K_Y)$, et Y est donc à singularités canoniques (voir [13]).

4.2 – Équations de Monge-Ampère singulières

Soient Y un espace normal compact de dimension n et ω une métrique kählerienne sur Y. La notion de fonction ω-psh se définit comme dans le cas lisse. La mesure de Monge-Ampère d'une fonction $\varphi \in PSH(Y,\omega) \cap L^\infty(Y)$ est bien définie sur la variété complexe Y_{reg} au sens de Bedford-Taylor. Elle est de masse localement finie au voisinage de chaque point de Y, et se prolonge donc en une mesure de Borel positive de masse finie sur Y, de masse nulle sur Y_{sing}. On notera $(\omega + dd^c\varphi)^n$ la mesure obtenue.

Théorème 3. *([8]) Soit Y un espace analytique compact normal de dimension n, ω une métrique kählerienne sur Y et $g \in L^p(Y, \omega^n)$ $(p > 1)$ telle que $\int_Y g\,\omega^n = \int_Y \omega^n$. Alors pour tout $\epsilon \geqslant 0$, il existe une fonction φ ω-psh et bornée sur Y telle que $(\omega + dd^c\varphi_\epsilon)^n = e^{\epsilon\varphi_\epsilon} g\,\omega^n$. De plus φ_ϵ est unique si $\epsilon > 0$ et pour $\epsilon = 0$, φ_0 est unique sous la condition $\max_Y \varphi_0 = 0$.*

Preuve. Soit $\pi : X \longrightarrow Y$ une résolution des singularités, où X est une variété (lisse) kählerienne compacte. L'équation $(\omega + dd^c\varphi)^n = e^{\epsilon\varphi} g\omega^n$ sur Y se relève en une équation de Monge-Ampère complexe du type $(\theta + dd^c\psi)^n = e^{\epsilon\psi} f\theta^n$ sur X, où $\psi := \varphi \circ \pi$, $\theta := \pi^*(\omega)$ est semi-positive telle que $\int_X \theta^n > 0$ et $f := g \circ \pi \in L^p(X)$ vérifie $\int_X f\theta^n = \int_X \theta^n$. La conclusion s'obtient en appliquant le théorème 2. □

4.3 – Métriques de Kähler-Einstein singulières

On dira qu'un espace normal Y est un espace Calabi-Yau (CY en abrégé) s'il est Gorenstein et si son fibré canonique K_Y admet un générateur global. Dans ce cas $c_1(K_Y) = 0$.

Théorème 4. *([8]). Soit Y une variété algébrique Gorenstein ayant des singularités canoniques.*
1. Si Y est un espace CY, alors chaque classe kählerienne sur Y contient une unique métrique kählerienne singulière Ricci-plate à potentiel borné.
2. Si K_Y est positif et si $\omega \in c_1(K_Y)$ une métrique kählerienne représentant $c_1(K_Y)$, il existe une métrique kählerienne singulière unique $\omega_{KE} := \omega + dd^c\varphi_{KE} \in c_1(K_Y)$, telle que $\mathrm{Ric}\,\omega_{KE} = -\omega_{KE}$. Le potentiel φ_{KE} est borné sur Y, lisse sur Y_{reg} et y définit une métrique de Kähler-Einstein.

Preuve. 1. Soient ω soit une métrique kählerienne sur Y et α un générateur global de K_Y. La forme volume $v(\alpha) = c_n \alpha \wedge \bar{\alpha}$ sur Y coïncide avec la forme volume $v(h)$ adaptée à la métrique singulière h définie sur $K_{Y_{reg}}$ par $\|\alpha\|_h := 1$ et vérifiant $\Theta(K_Y, h) = 0$. La recherche d'une métrique kählerienne singulière Ricci-plate dans la classe de ω conduit à l'équation de Monge-Ampère $(\omega + dd^c\varphi)^n = c\,v(h)$, où $c > 0$ est une constante telle que $c\int_Y v(h) = \int_Y \omega^n$. Le fait que les singularités soient canoniques se traduit par $v(h) = f\omega^n$, où $f \in L^\infty(Y)$. D'après le théorème 3 avec $\epsilon = 0$, il existe φ ω-psh bornée sur Y telle que $\omega_\varphi^n = c\,v(h)$. D'où $\mathrm{Ric}\,\omega_\varphi = \Theta(K_Y, h) = 0$.

2. La deuxième assertion se démontre de la même façon en appliquant le théorème 3 pour $\epsilon > 0$. □

La régularité du potentiel est plus délicate (voir [8]).

Références

[1] T. Aubin. « Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes ». *Bull. Sci. Math. (2)* **102**, n° 1 (1978), p. 63-95.

[2] E. Bedford et B. A. Taylor. « The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation ». *Invent. Math* **37** (1976), p. 1-44.

[3] E. Bedford et B. A. Taylor. « A new capacity for plurisubharmonic functions ». *Acta Mathematica* **149** (1982), p. 1-40.

[4] R. J. Berman et al. « A variational approach to complex Monge-Ampere equations ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* **117** (2013), p. 179-245.

[5] E. Calabi et K. On. « On Kähler manifolds with vanishing canonical class. Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz ». *Princeton Mathematical Series* **12** (1957), p. 78-89.

[6] U. Cegrell. « Pluricomplex energy ». *Acta mathematica* **180**, n° 2 (1998), p. 187-217.

[7] J.-P. Demailly. *Complex analytic and differential geometry*. Cours en ligne : `www-fourier.ujf-grenoble.fr`.

[8] P. Eyssidieux, V. Guedj et A. Zeriahi. « Singular Kähler-Einstein metrics ». *Journal of the American Mathematical Society* **22**, n° 3 (2009), p. 607-639.

[9] J. Fine. « Canonical metrics in Kähler geometry a biased overview ». *La Gazette des mathématiciens* (2018), p. 38.

[10] V. Guedj et A. Zeriahi. « Degenerate Complex Monge–Ampère Equations ». *EMS Tracts in Mathematics* **26** (2017).

[11] C. D. Hacon et S. Kovács. *Classification of higher dimensional algebraic varieties*. **41**. Oberwolfach Seminars. Birkäuser, 2010.

[12] S. Kołodziej. « The complex monge-ampere equation ». *Acta mathematica* **180**, n° 1 (1998), p. 69-117.

[13] M. Reid. « Young person's guide to canonical singularities ». In : *Proc. Symp. Pure Math.* Vol. 46. Amer. Math. Soc., Providence RI, 1987, p. 345-414.

[14] S. T. Yau. « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation ». *Comm. Pure Appl. Math.* **31**, n° 3 (1978).

Ahmed Zeriahi

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

`ahmed.zeriahi@math.univ-toulouse.fr`

Ahmed Zeriahi est Professeur Émérite. Il s'intéresse aux équations de Monge-Ampère complexes et leurs applications en géométrie kählerienne. Avec Philippe Eyssidieux et Vincent Guedj, ils ont obtenu le prix Leconte de l'Académie des Sciences de Paris en 2020 pour leurs travaux sur les métriques de Kähler-Einstein singulières.

Les résultats des sections 3 et 4 sont le fruit d'une collaboration avec V. Guedj et P. Eyssidieux, qui s'est poursuivie avec R. Berman et S. Boucksom. Je tiens à les remercier chaleureusement pour leur générosité et leur qualités humaines qui ont fait de ces collaborations une aventure passionnante et enrichissante. Je remercie les rapporteurs pour leurs remarques judicieuses et leurs suggestions. Je remercie en particulier R. Dujardin, H. Guenancia et V. Guedj pour leur relecture minutieuse de la version préliminaire de cette note et leurs suggestions qui en ont amélioré sa présentation.

Promouvoir les femmes dans les sciences et en mathématiques - Compte-rendu

• L. Morhaim

Nous proposons un compte rendu résumé de la table ronde qui a eu lieu le 4 octobre 2021 à l'IHÉS - Université Paris-Saclay. Après avoir dressé un panorama des problèmes rencontrés, les intervenantes ont montré clairement que des solutions existent et ont proposé des initiatives concrètes à mettre en œuvre aux niveaux individuel, collectif et institutionnel.

Les femmes sont sous-représentées dans les mathématiques et en physique théorique, notamment à l'IHÉS où seulement 10% des scientifiques invité·es sont des femmes [1]. Souhaitant réduire l'écart entre femmes et hommes et attirer plus de chercheuses vers ces disciplines, l'IHÉS et l'université Paris-Saclay ont organisé plusieurs évènements tout au long de l'année 2021-2022. Dans ce cadre, une table ronde d'environ 1h30 a eu lieu le 4 octobre 2021 à l'IHÉS sur le thème *Promouvoir les femmes dans les sciences et en mathématiques*. Les intervenantes invitées ont été Eva Bayer-Fluckiger, professeure émérite à l'École polytechnique fédérale de Lausanne, plusieurs fois invitée à l'IHÉS et partie prenante dès le début du groupe qui formera par la suite l'association *European Women in Mathematics* ainsi que de l'association *femmes et mathématiques*; Kathryn Leonard, directrice du *Center for Undergraduate Research in Mathematics* et présidente de *Association for Women in Mathematics (AWM)*; et Andrea Walther, professeure à l'Institut de Mathématiques de l'université Humboldt de Berlin, Convenor de *European Women in Mathematics (EWM)* et organisatrice des *Women in Optimization Workshops*. La table ronde a été animée par Méline Ruel, étudiante à CentraleSupélec.

Dans son mot de bienvenue, Emmanuel Ullmo, directeur de l'IHÉS, a commencé par dire que si Laure Saint-Raymond, mathématicienne extraordinaire aux contributions profondes et importantes, vient d'être accueillie à l'IHÉS, elle est la première femme professeure permanente après 63 ans d'existence de l'IHÉS! Il a introduit la table ronde et sa thématique : ce qui peut être mis en place concrètement pour améliorer la situation. Il a souligné combien cruciale est cette question en rappelant que tant qu'il n'y a qu'une minorité de femmes, la moitié des ressources intellectuelles manque. La réflexion du 4 octobre a bénéficié des interventions (lors des questions ou lors des conversations en ligne) des personnes présentes, parmi lesquelles Sylvie Benzoni, Hélène Barcelo, Lenore Blum, Gioia De Cari, Maria Isabel Cortez, Laetitia Garriott de Cayeux, Olga Lukina, Gabriele Nebe, Alejandra Quintos, Marie-Françoise Roy, Alice Silverberg, Corinna Ulcigrai, etc. À noter, pour qui pourrait en douter, que des hommes assistaient à la table ronde, bien que la question soit restée posée de leur proportion. Michael R. Douglas, Président de *Friends of IHÉS*, a présenté, en conclusion, le 2021 *Friends of IHÉS Gala* sur *Women in Fundamental Research* le 16 novembre 2021 à New York City.

Une grande force de ces échanges a été de traiter, de manière très concrète, la question cruciale de la sous-représentation des femmes en mathématiques, et plus globalement en sciences. Des actions à mettre en œuvre en pratique ont été dégagées, et ce à chacun des trois niveaux individuel, collectif et institutionnel. Clairement explicitées lors de cette table ronde, celles-ci permettraient en particulier des améliorations de l'organisation universitaire ainsi qu'une nécessaire prise de conscience, d'une

1. De façon plus générale en ce qui concerne la France, on peut se référer à la Journée Parité (`https://femmes-et-maths.fr/2019/08/21/journee-parite-2019/`) et à Broze [3].

part du rôle fondamental des relations informelles qui ne peuvent pas fonctionner pour les femmes lorsqu'elles sont en petit nombre, et d'autre part de préjugés inconscients. Des questions de discriminations, de sexisme « ordinaire », de tuyau percé [2], de discrimination positive, de langage non sexué, de la manière de mesurer l'efficacité des initiatives pour remédier à cette sous-représentation des femmes et de sous-financement de la recherche, ont aussi été évoquées ou discutées. Ce compte rendu détaille les éléments fournis par les intervenant·es lors de la table ronde et seules les notes de bas de page ont été ajoutées postérieurement. Il s'agit d'un compte rendu résumé d'une table ronde riche, profonde et passionnante, qui ne peut remplacer les propres mots des intervenant·es, leurs expressions, leurs visages, leurs sourires, et bien sûr leur passion communicative des mathématiques : on ne saurait trop recommander de suivre la table ronde dans son intégralité [3].

Un panorama descriptif. Où sont décrites les formes très concrètes du problème. Où est soulignée la nécessité d'enquêter auprès des personnes ayant dû abandonner la recherche mathématique afin d'en comprendre mieux les raisons.

Les questions posées par Méline Ruel ont permis aux intervenantes de décrire un panorama très parlant du problème, les premières questions portant sur les liens des intervenantes avec la thématique, ainsi que sur les obstacles qu'elles avaient rencontrés et en quoi ceux-ci étaient liés à leur sexe.

Un premier obstacle est celui relatif aux préjugés assignant un rôle social qui exclut les femmes des sciences dès le début de leur parcours. Ces préjugés peuvent être présents dans la famille d'origine. Kathryn Leonard a parlé ainsi de sa famille, conservatrice, au sein de laquelle il est entendu ce que les femmes peuvent faire et ce qu'elles ne peuvent pas faire. Eva Bayer-Fluckiger a parlé du conflit qu'elle a eu à affronter au sein de sa famille, en raison même de son choix de faire des mathématiques, et des difficultés que cela a entraîné dès le début de son parcours.

Ces préjugés sont aussi une pression qui s'exerce de manière globale au sein de la société. Andrea Walther a ainsi raconté son expérience avec ses propres enfants, montrant la force de cette pression sociale, alors même que la famille d'origine est clairement ouverte à l'accès des femmes aux sciences. Oui, des enfants, même entourés d'une famille au sein de laquelle il est clair que les femmes peuvent être brillantes en mathématiques, ne serait-ce que par la présence d'une mathématicienne au sein de cette famille, se posent la question et parfois sont même persuadés que les garçons font mieux des mathématiques que les filles. Eva Bayer-Fluckiger y réagit vivement : plus jeune elle pensait que dans 40 ans ce type de problèmes serait résolu et elle a constaté que ce n'est pas le cas.

Cette pression sociale s'exerce aussi à travers les conseils que les femmes reçoivent lors de leurs choix d'orientation. Kathryn Leonard a raconté qu'elle était bonne en anglais et en mathématiques : on lui a conseillé de faire de l'anglais. Elle a raconté aussi que c'est parce que le cursus de majeure en anglais comporte une mineure en mathématiques [4] qu'elle a pu rencontrer un professeur de mathématiques, un chercheur, qui a su reconnaître son goût pour les mathématiques et lui permettre de se réorienter vers un cursus plus conforme à ses souhaits.

Cette pression sociale s'exerce tout au long de la carrière. Eva Bayer-Fluckiger a raconté ainsi que pour son directeur de thèse, elle en est sûre, cela ne faisait pas de différence qu'on soit une femme ou un homme – « on parlait mathématiques » –, que si dans son laboratoire de mathématiques, elle a rencontré certaines personnes amicales, d'autres l'ignoraient complètement, ce qui lui renvoyait l'image qu'elle n'était pas à sa place. Elle se souvient très bien d'une personne amicale avec qui elle parlait mathématiques, qui quand elle a appris son projet de faire une thèse, lui a demandé : « mais tu es mariée, est-ce que ce n'est pas l'âge d'avoir des enfants ? c'est certainement plus important, pourquoi veux-tu faire une thèse ? ». Andrea Walther a expliqué comment en fonction de la société dans laquelle on vit, ce type de pression sociale et de dif-

2. Ce terme renvoie à la diminution du nombre de femmes au fur et à mesure que l'on gravit les échelons de la carrière. Le terme est *leaky pipeline* en anglais et on peut se référer à ce propos à `https://awm-math.org/about/` et `https://www.socialsciencespace.com/2015/02/fixing-the-leaky-pipeline-of-women-in-science-and-math/`.

3. Disponible sur le site de l'IHÉS `https://www.ihes.fr/table-ronde-femmes-en-mathematiques`.

4. Ce qui plaide à la fois contre une spécialisation précoce et contre l'hyper-spécialisation. (On rappelle que toutes les notes sont de l'autrice du compte rendu).

ficultés prend des formes différentes. En Allemagne, il y a un mot très péjoratif, « Rabenmutter » [5], pour dire que vous n'êtes pas une bonne mère si vous travaillez.

Le manque de visibilité des femmes a été souligné à plusieurs reprises. Eva Bayer-Fluckiger a relaté son choc en découvrant qu'à l'université, les professeurs et assistants étaient tous des hommes. Elle a expliqué que cela envoie bien un message : cela ne va pas être très facile pour une femme de devenir une mathématicienne. Les intervenantes ont insisté ainsi toutes les trois sur la nécessité de voir des chercheuses en mathématiques. Cela a été expliqué également de manière très actuelle lors de la séance de questions et discussions en fin de table ronde par une étudiante en mathématiques. Elle témoigne de sa propre expérience et formule très bien comment en arrivant à l'université pour y étudier les mathématiques et en ne voyant pas de femmes, on sait qu'il y a là quelque chose qui cloche : « il n'y a rien légalement qui nous empêche de faire des mathématiques alors pourquoi n'y a-t-il aucune femme qui le fait ? ». Même si on ne croit pas à l'assignation de rôles en fonction du sexe, on est influencé par ce qu'on voit autour de nous : c'est pourquoi il est fondamental de voir aussi des femmes qui font ce qu'on aime.

Les obstacles spécifiques auxquels les femmes sont confrontées pour construire leur réseau ont été montrés. Ces obstacles sont si importants qu'Andrea Walther soulignait, dès le début de la table ronde, en présentant ses engagements, qu'elle a particulièrement à cœur d'aider les femmes à construire leur réseau. Kathryn Leonard décrit très bien cet obstacle rencontré lors des congrès : alors jeune mathématicienne, elle imaginait que les relations devaient se nouer de façon naturelle, autour d'une bière après les communications. Mais si l'on est l'une des rares femmes présentes dans un groupe d'hommes, la peur du harcèlement sexuel et le harcèlement sexuel effectif vont faire qu'une femme n'est pas invitée pour la bière, ou si elle l'est, ce dont la personne qui invite a en tête, ce n'est pas de parler de mathématiques… Ce genre de réseaux « naturels » ne se crée donc pas pour les femmes, à moins qu'il n'y ait beaucoup de femmes pour neutraliser cette tension [6]. Les difficultés auxquelles les femmes sont confrontées lors des congrès évoluent au cours de leur carrière. Kathryn Leonard a raconté ainsi comment elle est devenue comme invisible, on pense qu'elle est la femme d'un mathématicien, etc.

Les difficultés pour concilier recherche et famille touchent particulièrement les femmes. Andrea Walther a expliqué que la période la plus productive pour la recherche est exactement la période où les femmes peuvent avoir des enfants : coordonner les soins des enfants et la recherche est déjà un défi auquel s'ajoutent les pressions sociales mentionnées précédemment. En ce qui concerne la carrière de son partenaire et les contraintes géographiques, Andrea Walther a parlé de ce qui est fait en Allemagne : des universités essayent d'organiser des propositions de poste pour les partenaires, ce qui marche dans une certaine mesure mais on peut faire mieux. Eva Bayer-Fluckiger a souligné que c'est un problème très sensible : de nombreuses grandes mathématiciennes avec des grandes thèses ont tout arrêté à cause de cela. Elle-même a dû être en post-doctorat pendant 10 ans. Le tuyau est aussi percé de ce fait : avoir à décider de rester à un endroit et d'occuper le poste qu'on peut y trouver. Kathryn Leonard en donne un exemple et explique bien qu'on n'est pas obligé d'organiser le système universitaire comme cela, où on doit déménager sans cesse au cours de ses études et de sa carrière, avec des post-doctorats là et plus loin : c'est très destructeur pour les vies personnelles, et cela implique des contraintes très fortes sur la structure familiale. C'est un problème qu'il faudrait mettre dans la liste des questions indispensables à régler. Cette question fondamentale de la conciliation des carrières des deux partenaires est soulevée à nouveau lors des débats en fin de table ronde.

Les préjugés et les discriminations, conscientes ou inconscientes, œuvrent aussi lors des recrutements. Kathryn Leonard a parlé des études montrant que le seul changement de nom sur le cv change aussi l'ensemble des qualités qui sont attribuées à la personne dont on évalue le cv (si c'est

5. « Mère-corbeau ». Voir l'émission Karambolage (Arte) `https://www.youtube.com/watch?v=hCzRoBJ6xxA`

6. Une autre tension qui pèse sur de nombreuses femmes lors des congrès, et que ne résout pas complètement le nombre de femmes présentes, est le problème qu'on appelle parfois « harcèlement de rue ». Comment se déplacer en colloque sereinement, en particulier à l'étranger, si cela signifie aussi avoir à y gérer les « harcèlements de rue » ? Un exemple que j'ai en tête est un déplacement, dans une grande ville d'Europe de l'ouest, qui fut tout au long du séjour encore plus pénible qu'habituellement de ce point de vue. Jusqu'à ne pas même pouvoir tranquillement traverser une grande place du centre-ville pour me rendre simplement dans une librairie entre deux séminaires (je précise que cela ne venait pas d'hommes qui « traînaient » mais en costume-cravate et se dirigeant dans l'autre sens vers le métro) : j'en profite pour remercier de tout mon cœur les vendeurs de souvenirs touristiques qui sont intervenus alors.

un prénom masculin ou féminin, ou attribué à une origine hispanique ou noire américaine etc.) [7]. Elle a souligné combien ces prédispositions pour ou contre a priori nous concernent tous et toutes et ne concernent pas que les hommes vis-à-vis des femmes.

Kathryn Leonard a très bien montré que les obstacles changent au cours du temps et comment les femmes doivent, sans cesse, apprendre pour affronter des situations auxquelles elles ne pensaient pas avoir à faire face. Toute cette liste d'obstacles rencontrés, comme l'a formulé si joliment Eva Bayer-Fluckiger : « cela ne m'a arrêtée en rien ». Mais toutes trois, ainsi que certaines des interventions de la salle ensuite, insistent sur le fait qu'elles, elles ont survécu, et qu'il est indispensable d'interroger toutes celles qui *ont dû* arrêter. À propos des femmes qui ont arrêté, Kathryn Leonard mentionne le travail de Gioia De Cari [8], qui a monté un merveilleux spectacle et qui sera maîtresse de cérémonie lors du gala *Friends of IHÉS* : elle énonce en effet très clairement les raisons qui l'ont conduite à arrêter. Mais de manière générale, il y a beaucoup de facteurs et à toutes les étapes, qui forcent les femmes à arrêter leur parcours en mathématiques, d'où l'expression de *leaky pipeline*. Eva Bayer-Fluckiger a insisté particulièrement : c'est une question très importante, il est très important d'enquêter, de demander aux femmes pour savoir quand et pourquoi elles ont dû arrêter les mathématiques.

Où sont discutées des actions très concrètes qu'il est possible de mettre en œuvre au niveau individuel

À la question de ce qu'elles voudraient se dire si elles pouvaient parler à elles-mêmes jeunes, les trois intervenantes ont précisé qu'elles étaient heureuses du chemin qu'elles avaient suivi et des décisions qu'elles avaient prises. Andrea Walther a dit que cela l'aurait aidée à certains moments que quelqu'un lui dise : « fais ce que tu aimes parce que c'est ce en quoi tu es bonne, parce que c'est ce dont tu es convaincue, et ce qui te fait vibrer » ; ainsi que : « fais-toi confiance ». Kathryn Leonard dirait de prendre soin de sa santé mentale et pas seulement de sa santé physique, de savoir faire une pause quand on en a besoin : on a tous et toutes besoin de joie. Elle conseillerait aussi, d'une part de trouver des personnes nous ressemblant parce que cela permet de comprendre que, ce qui ne va pas, ce n'est pas nécessairement lié à soi-même, et, d'autre part de trouver en chacune et chacun des mentors en prenant de chaque personne rencontrée ce qu'elle peut vous apprendre.

À la question de la façon dont, en tant qu'encadrante et en tant que mentor, elles adaptent leur comportement auprès des étudiant·es ou jeunes chercheur-ses afin de changer les choses pour elles et eux, Kathryn Leonard et Andrea Walther sont revenues sur les rencontres, sur les personnes qui, par une action individuelle, ont changé leur carrière : elles essayent d'être ces personnes-là. Kathryn Leonard a parlé du professeur qui a su la réorienter vers les mathématiques et essaye d'être cette personne-là pour ses étudiant·es, elle les accompagne pour leur dire les forces et les talents qu'elle leur voit, parce que probablement elles-mêmes et eux-mêmes ne les voient pas toujours.

Andrea Walther pense aux étapes de sa carrière où une personne s'est levée pour elle : si elle remarque quelque chose qui n'est pas juste, elle se lève et le dit. Par exemple, quand il a été question de sa promotion, et qu'elle n'avait pas passé plus de deux mois à l'étranger, quelqu'un s'est levé pour dire « avec une petite fille de deux ans, comment fait-elle ? », ce qui a permis que cela ne soit plus un critère devant empêcher sa promotion. Ainsi, si elle sait quelque chose de cet ordre, alors elle se lève et parle pour les personnes.

Kathryn Leonard a insisté aussi sur le fait de montrer aux étudiant·es que les mathématiques requièrent d'être à l'aise avec les échecs : avec ses étudiant·es, elle célèbre les échecs et montre ses propres erreurs, les erreurs faisant avancer [9]. Elle cite une personne qui a décrit les mathématiques comme étant un processus permettant progressivement d'avoir de moins en moins tort : il faut donc être à l'aise avec le fait d'avoir tort.

7. Voir, par exemple, l'étude du destin des candidatures de Simon et de Susan, présentant le même cv à part le prénom, dans le rapport Hays consultants et Insync Surveys, *Gender diversity why aren't we getting it right?*, disponible sur `https://insync.com.au/wp-content/uploads/2014-09-17HaysInsyncgender-diversitywhy-arent-we-getting-it-rightv5.pdf`

8. On peut écouter Gioia De Cari en 2018 raconter « How I Terrified the MIT Math Department : Gioia De Cari SM'88 » sur la chaîne de la MIT Alumni Association et voir le site `https://www.truthvalues.org/`

9. « Les erreurs sont les portes de la découverte » a écrit James Joyce, cité dans Ramunni [7], *Les Lieux des erreurs scientifiques*. Voir aussi Livio [5], *Fabuleuses erreurs*.

Andrea Walther rappelle que si on analyse le comportement des femmes, elles se concentrent souvent sur leurs lacunes plutôt que sur leurs forces. Par exemple, à la question de savoir si on souhaite continuer et faire une thèse, un homme répondra « oui essayons » et une femme « je ne sais pas si j'en ai la capacité » [10], et ce problème est le même lorsqu'il s'agit pour elles de présenter leurs travaux, c'est une tendance que les femmes ont : elle essaye de leur en parler et de leur souligner cette tendance.

Eva Bayer-Fluckiger parle de son expérience lorsqu'elle a organisé des séances pour que les jeunes s'entraînent pour présenter leurs travaux devant des chercheur-ses seniors et plus juniors, lorsqu'elles ou ils devaient faire un exposé ou avaient un entretien pour un poste. Elle est revenue sur les étudiant·es qu'elle a eu-es en master, en thèse et en postdoctorat, avec lesquel-les elle a eu beaucoup de plaisir à travailler : sur les différentes manières de les encourager et de les aider en fonction de leurs personnalités. Elle a donc été très attentive à leurs besoins, à leur personnalité, à leurs objectifs et à ce qu'elles ou ils voulaient réaliser et comment, et cela pour les femmes comme pour les hommes. Cependant, elle remarque que le fait qu'elle est une professeure femme est important pour les femmes, au moins pour certaines d'entre elles, qui pouvaient voir qu'il existe une femme qui a réussi.

Où sont discutées des actions très concrètes qu'il est possible de mettre en œuvre aux niveaux collectif et institutionnel. Sur les processus décisionnels.

La question de la discrimination positive et l'objection qui y est parfois faite, et qui consiste à se demander si les femmes ont été choisies sur la base du mérite ou du sexe, a été soulevée. Andrea Walther a expliqué que quand on postule lors d'un processus sélectif, après avoir passé un certain nombre d'étapes, le fait d'être présente dans les dernières étapes montre déjà l'excellence du dossier. Alors comment distinguer l'excellence à l'étape suivante ? On ne peut pas compter les publications, les journaux ne peuvent pas toujours être classés, les personnes sont différentes, certaines travaillent ensemble ou seules : à ce niveau, comment juger de l'excellence ? Elle a dit clairement qu'une fois arrivée à cette étape, il est tout à fait équitable de prendre en compte un critère supplémentaire comme le sexe, et c'est pour cela qu'elle est pour la « discrimination positive ». Kathryn Leonard a rappelé les études montrant que lors des sélections, une femme (et cela concerne aussi par ailleurs certaines minorités) doit avoir plus de « points » qu'un homme (blanc) sur son cv pour être jugée de même qualité : les personnes de ces groupes qui se retrouvent dans cette liste d'excellence sont donc probablement meilleures.

À propos des quotas, Andrea Walther raconte que d'après son expérience, les discussions dans les comités ne sont pas les mêmes s'il y a au moins une femme présente. Elle est vraiment en faveur des quotas : cela constitue un fardeau pesant sur les quelques femmes qui ont réussi à atteindre les plus hauts grades, mais c'est un service important pour la communauté. Kathryn Leonard évoque la règle de parité dans les comités de sélection en France, et ses collègues femmes qui parlent de leur épuisement, le fait d'avoir à passer ainsi du temps dans la bureaucratie affectant leur recherche. Elle propose d'identifier les comités importants (comme ceux de thèse ou de recrutement) et que les femmes n'aillent qu'à ceux-là. Elle rappelle bien que c'est une responsabilité des universités : pour 50% de femmes dans les comités, ayez 50% de femmes parmi les professeur·es, c'est cela la solution facile. Eva Bayer-Fluckiger raconte aussi combien cela fait une différence quand une femme est présente.

Pour les congrès, Kathryn Leonard explique que ce sont les institutions qui financent et celles du lieu de l'évènement qui doivent vérifier et demander éventuellement des modifications si la liste des intervenants initialement proposée n'est pas conve-

10. On s'est posé ici la question suivante lors de la rédaction du compte rendu. L'exemple donné était bien en anglais « I don't know if I have the ability », devions-nous dire « Je ne sais pas si j'en ai les capacités » insistant sur l'appropriation individuelle de la déligitimation sociale ou « Je ne sais pas si j'en ai la capacité » où « avoir la capacité » s'entend bien alors aussi comme « être en mesure de » ou « avoir la possibilité de », retranscrivant bien alors de la parole de la femme de ce qu'elle est en train de dire du contexte qu'elle ressent comme défavorable et d'une déligitimation qui tire bien son origine du fonctionnement et de l'organisation de la société. Autrement dit, le fait d'exprimer ne pas savoir si on est en mesure de le faire, est-ce douter de soi-même ou de la société ? Toutes les personnes (je ne dis pas ici « toutes les femmes » parce qu'il me paraît évident qu'il s'agit de la même chose qui est exprimée ici pour toutes les formes de déligitimations) n'ont pas alors la chance lorsqu'elles expriment ces difficultés déjà vécues et/ou qu'elles sentent à venir, et alors qu'elles souhaitent néanmoins ce chemin si ardemment, de s'entendre alors répondre par le directeur du laboratoire « Faites un peu de recherche, essayez ». Contrairement à l'autrice de ce compte rendu.

nable du point de vue de la parité. Elle souligne aussi la nécessité d'inviter les chercheur·es juniors en conférence plénière, ce qui ne demande pas beaucoup d'efforts, et ce qui pourrait permettre d'augmenter la présence des femmes puisqu'elles sont un peu plus nombreuses parmi les juniors que parmi les seniors. Eva Bayer-Fluckiger raconte son expérience dans les comités d'organisation de colloque : le nom d'un homme est d'abord proposé parce qu'on a cette image du scientifique qui est un homme et qui nous vient dès l'enfance. S'il y a quelqu'un pour faire la remarque qu'il y a peu de femmes dans le programme, peut-être pour proposer aussi des noms, c'est très important et la plupart des comités d'organisation y sont ouverts. Andrea Walther confirme que c'est une question de sensibilisation et que le niveau de sensibilisation est en train d'augmenter : on prend le temps pour regarder la liste et voir si on couvre tous les aspects, en termes de sexe mais aussi de diversité de manière plus générale.

Quant à discuter d'un langage non sexué, Eva Bayer-Fluckiger n'est pas intéressée par cette question, parce que cela a été beaucoup débattu et que beaucoup d'éléments intéressants ont ou vont être dits à ce sujet : quand on prend du temps pour parler de cette question, on ne parle pas de questions plus importantes. Andrea Walther et Kathryn Leonard pensent chacune que c'est une question importante. Cela ne va pas résoudre le problème mais c'est une étape importante y compris pour les enfants. Si on a ces images à l'esprit montrant que « professeur » ou « médecin », c'est un homme, alors un changement dans le langage utilisé est une étape pour un changement d'état d'esprit. C'est très dur à changer mais c'est très très important : le langage construit des préjugés inconscients et nous dit déjà qui va faire quoi.

À la question des initiatives qu'un établissement comme l'IHÉS ou l'université Paris-Saclay pourrait mettre en place pour initier des changements, Kathryn Leonard pense que cet engagement doit commencer par rendre les femmes visibles : quand on regarde le site *web* et qu'il y a 49 hommes blancs, cela envoie vraiment un message. Elle détaille aussi certains programmes de l'EWM qui, par des semaines de recherche intensive permettent à des femmes (mais pas seulement) de créer des relations de travail incroyables et d'avoir elles-mêmes une communauté dans laquelle se sentir à l'aise. Pour le choix de conférencières invitées, les organisateurs et organisatrices de congrès peuvent se référer à ces groupes spécialisés qui existent dans près de 25 domaines déjà. Andrea Walther explique que c'est ce qu'on a vu aussi pour les *Women in Optimization Workshops* (Heidelberg 2015, Trier 2017, Bonn 2019). Par ailleurs, il est intéressant de visiter le site *web* du *World Meeting for Women in Mathematics 2022*[11].

Andrea Walther est revenue sur des solutions concrètes que l'on peut proposer face aux difficultés rencontrées lorsqu'on a des enfants. Il faut pouvoir prendre ses enfants avec soi, et pour cela que des gardes d'enfants soient organisées de telle sorte que ses enfants puissent être déposé·es ponctuellement à des horaires élargis (par exemple jusqu'à 20h) lors d'évènements particuliers (par exemple quand on reçoit un ou une invitée) : cela existe dans certaines universités.

Eva Bayer-Fluckiger conseille de s'intéresser à ce que proposent les autres centres de recherche, et mentionne le Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) à Berkeley, pour comprendre ce qu'ils font différemment. Le MSRI a des programmes. On trouve aussi sur le site de l'AMS[12] les comptes rendus publiés dans les *Notices of the AMS* du prix *Mathematics Programs that Make a Difference*, en particulier le compte rendu [1] du prix attribué en 2012 au MSRI (voir [2]).

Une question dans la salle sur les femmes non blanches[13] donne l'occasion de proposer un processus décisionnel. Kathryn Leonard souligne en effet à quel point ce qui est enduré est d'un ordre de grandeur alors plus important : « des mathématiciennes de couleur que je connais vont à des congrès et on pense qu'elles font partie du personnel de nettoyage ! Au cours d'une journée de travail, combien d'interactions négatives avez-vous autour de vous ? » Elle propose une manière de prendre les décisions, qui consiste à essayer d'imaginer une personne qui a la plus grande liste d'obstacles à sa réussite et de voir de quoi cette personne a besoin. Par exemple, les campus universitaires ne sont généralement pas bien construits pour les personnes qui ne peuvent pas marcher, etc. Lorsque vous êtes sur le point de prendre une décision sur une disposition que vous allez mettre en œuvre, commencez

11. `https://2022.worldwomeninmaths.org.`
12. http ://www.ams.org/prizes-awards/palist.cgi
13. On pourrait ajouter d'autres discriminations plus ou moins inconscientes, comme celles concernant les talents des (nombreuses) personnes non longilignes, etc.

par penser à la personne qui a le plus besoin d'un changement culturel pour réussir, c'est un guide d'action.

En réponse à une question sur le sexisme ordinaire qui fait beaucoup de mal et sur le fait que la plupart des hommes n'y prêtent même pas attention, des conseils utiles ont été donnés. Andrea Walther commence par réaffirmer la nécessité de la prise de conscience : il y a ces préjugés inconscients tout autour, il faut sensibiliser les gens, et on peut dire lorsque cela se passe « ce que vous avez fait, je ne me sentais pas bien avec cela », et reconnaître que ce n'était pas correct dans une certaine mesure. Eva Bayer-Fluckiger conseille le film *Picture a scientist* [4] projeté récemment à l'IHÉS, qu'elle a trouvé excellent, et pense que tout le monde devrait le regarder : les biais inconscients sont expliqués par de nombreux exemples. Kathryn Leonard donne un conseil aux hommes, parce que beaucoup de sexisme occasionnel se manifeste dans des groupes d'hommes, tout comme beaucoup de racisme occasionnel envers les non-blancs se manifeste dans des groupes de personnes blanches. Lorsque vous êtes dans ce groupe, par exemple un homme dans un groupe comprenant pas ou peu de femmes, il faut exprimer que cela vous dérange en tant qu'homme, parce les hommes sont beaucoup plus susceptibles d'écouter d'autres hommes sur ces sujets, plutôt qu'une femme à qui on va répondre qu'« elle ne fait que pleurnicher » et « quel est son problème ? ». Quand un homme qu'ils apprécient et pour qui ils ont du respect prend position sur cette question, c'est très puissant. Et elle rappelle que puisque ces changements ne se produisent pas en une seule conversation mais sur une longue période de temps, les hommes qui prennent ainsi position peuvent simplement y penser à chaque fois comme à des graines qu'ils sont en train de planter dans l'esprit des gens et qui pourraient fleurir à l'avenir.

Il est dit à plusieurs reprises lors de la table ronde que le manque de postes stables dans la recherche aggrave la situation. Andrea Walther souligne que, même s'il n'y a pas assez de postes académiques dans la recherche, c'est important néanmoins qu'il y ait plus de femmes qui obtiennent des thèses en mathématiques, et qu'il faut qu'elles sachent qu'avec une thèse en mathématiques on peut obtenir, par exemple, de très bons postes dans l'industrie.

Comment mesurer l'efficacité des initiatives ?

Kathryn Leonard conseille de commencer par le niveau de base : compter combien de femmes ont postulé et combien ont été sélectionnées. Elle cite Ruth Bader Ginsburg [14], deuxième femme nommée à la Cour suprême des États-Unis, qui disait « Quand on me demande parfois "quand y aura-t-il assez [de femmes à la Cour suprême]" et que je réponds "quand il y en aura neuf", les gens sont choqués. Mais il y avait neuf hommes, et personne n'a jamais posé de question à ce sujet. »

Cela met surtout en évidence la nécessité d'un équilibre : « quand ce sera équilibré, cette table ronde n'aura plus lieu d'être ». Andrea Walther insiste sur l'importance d'avoir les retours et les commentaires des participant·es du programme, ce qui donne de nouvelles idées pour améliorer les choses, et c'est très utile. Afin de comprendre ce qui se passe, Eva Bayer-Fluckiger ajoute aussi qu'il faut mener des enquêtes pour savoir comment les personnes ont eu connaissance, par exemple de l'IHÉS, pourquoi elles ont postulé à ce programme, etc.

Pour un pipeline plus solide pour les femmes mathématiciennes

Toutes les intervenantes sont claires : il faut un changement de culture fondamental. Kathryn Leonard dénonce certains éléments de la culture en mathématiques, d'une part des aspects machos comme par exemple penser que « plus tu souffres plus tu es un bon mathématicien » ; et d'autre part cette idée que les grand·es mathématicien·nes étaient des génies en mathématiques à l'âge de trois ans [15], ce qui est peut-être vrai pour certain·es mais certainement pas pour tous et toutes ; ceci

14. « When I'm sometimes asked when will there be enough [women on the supreme court] and I say, "when there are nine", people are shocked. But there'd been nine men, and nobody's ever raised a question about that. » (R. Bader Ginsburg).

15. Ce préjugé, voire cet impératif, de précocité est d'autant plus destructeur que les personnes ont plus d'obstacles à franchir : étant donné le temps qu'elles sont contraintes de consacrer à pouvoir franchir ces obstacles, le temps de la précocité est (largement !) dépassé. Si en plus l'organisation de la société est telle que, soit c'est alors trop tard pour franchir l'obstacle suivant, soit ces personnes croient qu'il est trop tard, ces scénarios contribuent à leur exclusion du parcours. On peut en rappeler deux exemples. Pendant qu'une femme commence d'autres études, parce qu'on l'y a incité et enlevé sa motivation à faire des mathématiques, que ce soit directement ou indirectement, le temps passe. À supposer qu'elle puisse reprendre un parcours de mathématicienne conforme à son souhait, c'est-à-dire d'une part que l'organisation des études le permette (qui fait une classe préparatoire scientifique après une classe préparatoire littéraire ?) et d'autre part qu'elle trouve la force de se réorienter et de recommencer, le début de sa carrière correspond au moment où une femme souhaite avoir des bébés. Elles font face aux mêmes obstacles que les hommes *plus beaucoup d'autres*.

concerne d'ailleurs les carrières académiques de manière générale. Andrea Walther souhaite insister sur cette idée de changement fondamental de culture et sur toute la pression sociale à modifier. Une suggestion de lecture est donnée via la conversation en ligne : l'ouvrage de Nancy Weiss Malkiel, « *Keep the Damned Women Out. The Struggle for Coeducation* » [6].

Conclusion

La conclusion se fait avec le public en (re-)précisant, s'il en était besoin, que les mathématiciennes vivent de leur passion et sont néanmoins heureuses, y compris bien sûr avec leurs collègues mathématiciens.

Références

[1] « 2012 Mathematics Programs That Make a Difference ». *Notices of the American Mathematical Society* **59**, n° 5 (2012), p. 665-666.

[2] A. American Mathematical Society. « MSRI Honored for Encouraging Women and Minorities in Mathematics ». *https://www.newswise.com/articles/msri-honored-for-encouraging-women-and-minorities-in-mathematics?sc=rssn* **13 April** (2012).

[3] L. Broze. *Statistiques pour la quatrième journée parité en mathématiques*. `https://femmes-et-maths.fr/wp-content/uploads/2020/03/journe{%}CC{%}81eParite{%}CC{%}814BROZE.pdf`. 2019.

[4] I. Cheney et S. Shattuck. *Picture a Scientist*. `https://www.pictureascientist.com/`.

[5] M. Livio. *Fabuleuses erreurs. De Darwin à Einstein*. CNRS Éditions, 2017.

[6] N. W. Malkiel. *Keep the Damned Women Out. The Struggle for Coeducation*. Princeton University Press, 2016.

[7] G. Ramunni. *Les lieux des erreurs scientifiques*. Le Cavalier Bleu éditions, 2012.

Lisa Morhaim

cred, Université Paris II Panthéon-Assas

`lisa.morhaim@u-paris2.fr`

Lisa Morhaim est maitresse de conférences hdr en mathématiques appliquées. Ses domaines de recherche portent plus particulièrement sur l'optimisation, la programmation dynamique, les réseaux et la théorie des jeux, l'économie mathématique (dont croissance et finance digitale) et les liens entre droit et mathématiques. Elle est membre du Conseil d'Administration de l'association *femmes et mathématiques*.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements aux organisateurs et organisatrices ainsi qu'aux intervenant·es et participant·es de la table ronde. Je remercie vivement Anne Boyé, Laurence Broze, Christophe Champetier, Damien Gayet pour leurs commentaires ainsi que Colette Guillopé pour toutes ses remarques et suggestions sur des versions préliminaires de cet article.

Mais les comités d'évaluation évaluent leur dossier avec les *mêmes* critères (au mieux!! c'est-à-dire si on oublie les préjugés). C'est bien ce type de problèmes qui rend par ailleurs les parcours sélectifs à suivre trop jeunes si excluant pour certaines personnes (en particulier pour les femmes) pourtant très talentueuses.

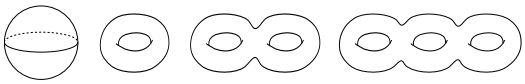
... la théorie de Teichmüller

• B. Petri

1. Introduction

Supposons que nous nous posons la question ambitieuse : quelles surfaces – variétés différentielles de dimension deux – y a-t-il ? Une première réponse est donnée par un théorème du XIXe siècle : la classification des surfaces dit que toute surface connexe fermée et orientée est homéomorphe à une sphère à laquelle on a attaché un certain nombre d'anses. Ce nombre d'anses s'appelle le *genre* de la surface.

Figure 1 – Les surfaces fermées de genre 0, 1, 2 et 3



Sachant cela, nous pouvons nous poser des questions plus fines. Dans ce texte, la question que nous allons nous poser est : quelles surfaces de Riemann (nous rappellerons la définition dans la section 1.1) existent ? Cette question est plus fine parce qu'il n'est pas du tout vrai que deux surfaces de Riemann homéomorphes sont aussi isomorphes en tant que surfaces de Riemann. En effet, on peut typiquement munir une surface donnée avec une infinité non dénombrable de structures de surfaces de Riemann différentes. La question de la classification de ces structures nous amènera naturellement à la théorie de Teichmüller : l'étude des *espaces de modules* et des *espaces de Teichmüller*. Le but de ce texte est de donner une idée de ce que sont ces espaces. Avant de commencer, nous utilisons le reste de l'introduction pour rappeler les notions de base dont nous aurons besoin : les surfaces de Riemann et les (classes conformes de) métriques riemanniennes.

1.1 – Les surfaces de Riemann

Une surface de Riemann est une variété différentielle dont les cartes ont leur image dans $\mathbb{C}$ et dont les changements de cartes sont biholomorphes.

Les premiers exemples de surfaces de Riemann sont $\mathbb{C}$, le demi-plan $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Les deux premiers exemples peuvent se décrire à l'aide d'une seule carte (l'inclusion dans $\mathbb{C}$), tandis que la sphère de Riemann nécessite au moins deux cartes :

$$\left(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\},\ z \mapsto z\right) \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\},\ z \mapsto \frac{1}{z}\right).$$

Le théorème d'uniformisation, prouvé par Poincaré et Koebe, dit que $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}^2$ et $\widehat{\mathbb{C}}$ sont les seules (à biholomorphisme près) surfaces de Riemann simplement connexes – c'est-à-dire, les seules surfaces de Riemann connexes dans lesquelles toutes les courbes fermées se contractent en un point. Cela implique en particulier que toute surface de Riemann est biholomorphe à un quotient de $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}^2$ ou $\widehat{\mathbb{C}}$ – lequel des trois dépend de la topologie de la surface (voir la section 1.2) – par un groupe de biholomorphismes dont l'action est libre et proprement discontinue [1].

1.2 – Les métriques à courbure constante

Dans cette section et la suivante, nous donnons deux descriptions alternatives des surfaces de Riemann : en utilisant les métriques riemanniennes à courbure constante et à l'aide des classes conformes de métriques riemanniennes.

Rappelons qu'une métrique riemannienne sur une surface S est la donnée d'un produit scalaire $ds^2 : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ sur l'espace tangent T_pS à chaque point $p \in S$, qui dépend de manière lisse

1. Une action d'un groupe G sur un espace topologique X est *libre* si les éléments non triviaux de G n'ont pas de points fixes et *proprement discontinue* si pour tout $K \subset X$ compact, l'ensemble $\{g \in G;\ gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

du point p. Cela nous donne en particulier une manière de mesurer les longueurs des courbes et les distances entre les points sur notre surface S.

Les exemples de métriques riemanniennes les plus importantes pour nous sont :

- la métrique ronde sur $\widehat{\mathbb{C}}$: celle induite de la métrique de $\mathbb{R}^3$ si on plonge $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{R}^3$ comme la sphère d'unité,
- la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}$, donnée par $ds^2_{\mathbb{C}} = dx^2 + dy^2$ au point $x + iy \in \mathbb{C}$, et
- la métrique hyperbolique sur $\mathbb{H}^2$, donnée par $ds^2_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ au point $x + iy \in \mathbb{C}$.

Il s'avère que le groupe des biholomorphismes de $\widehat{\mathbb{C}}$ n'admet pas de sous-groupes non triviaux qui agissent de manière libre et proprement discontinue. Donc, la seule surface de Riemann qui est un quotient de $\widehat{\mathbb{C}}$ est $\widehat{\mathbb{C}}$ même. De plus, les groupes des biholomorphismes de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}^2$ sont exactement les groupes d'isométries pour la métrique euclidienne et la métrique hyperbolique respectivement.

Donc, toute surface de Riemann vient avec une métrique sphérique, euclidienne ou hyperbolique – c'est-à-dire une métrique localement isométrique à celle de $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$. De manière équivalente : elle est équipée avec une métrique à courbure constante $1, 0$ ou -1. Il s'avère que cette association est presque bijective : étant donnée une surface riemannienne S, si sa courbure est 0, deux métriques correspondent à la même surface de Riemann si et seulement si elles sont homothétiques [2] et si sa courbure n'est pas 0, la correspondance est bijective.

Enfin, si la surface de Riemann S est fermée, il y a un lien entre la topologie de la surface et la courbure de la métrique associée. Nous avons déjà vu que si la surface est une sphère – c'est-à-dire, si son genre est 0 – la courbure est $+1$. De plus, le théorème de Gauss-Bonnet implique que si la surface est un tore – si son genre est 1 – alors, la courbure est 0 et si son genre est au moins 2, alors la courbure est -1.

1.3 – Les classes conformes de métriques

La troisième manière de voir les surfaces de Riemann utilise les classes conformes de métriques riemanniennes. On dit qu'une métrique riemannienne ds_2^2 sur une surface S est conforme à une deuxième métrique ds_1^2 sur la même surface s'il existe une fonction lisse $\rho : S \to]0, +\infty[$ telle que $ds_2^2 = \rho \cdot ds_1^2$.

Observons que si ds_2^2 est conforme à ds_1^2 et $p \in S$, alors un cercle dans T_pS par rapport à ds_1^2 (c'est-à-dire un ensemble de la forme $\left\{ v \in T_pS : ds_1^2(v, v) = r^2 \right\}$ pour un certain rayon $r > 0$) est aussi un cercle par rapport à ds_2^2 (mais typiquement d'un rayon différent). De plus, les angles par rapport à ds_1^2 sont les mêmes que les angles par rapport à ds_2^2.

Il s'avère que dans toute classe conforme de métriques riemanniennes sur une surface S on peut trouver une unique (à homothétie près si la courbure est 0) métrique de courbure 1, 0 ou -1. Donc, les structures des surfaces de Riemann sont aussi en bijection avec les classes conformes de métriques riemanniennes.

2. Classifier les tores

Pour introduire les espaces de modules et les espaces de Teichmüller, nous commençons avec un exemple. Les surfaces de Riemann homéomorphes à la sphère sont déjà classifiées par le théorème d'uniformisation : à biholomorphisme près il n'y en a qu'une, la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Nous nous intéressons donc aux surfaces de Riemann de genre 1, les tores. Il existe une identification.

Si on note

$$\mathcal{M}_1 := \{\text{Surfaces de Riemann de genre } 1\}/\approx,$$

avec « $\approx$ » l'équivalence modulo biholomorphisme, alors il existe une identification :

$$\mathcal{M}_1 \quad = \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2,$$

où $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et où le groupe

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{c} a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\}$$

agit sur $\mathbb{H}^2$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ z \in \mathbb{H}^2.$$

2. Deux métriques riemanniennes sont homothétiques si l'une peut être obtenue en multipliant l'autre avec une constante.

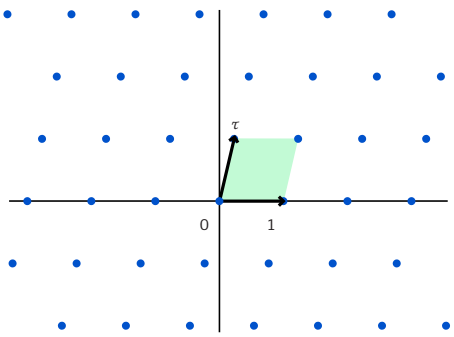
Le but de cette section est d'abord d'expliquer d'où vient cette identification. Après, nous étudierons la géométrie de $\mathscr{M}_1$ et enfin nous introduisons l'espace de Teichmüller du tore.

2.1 – Identification de l'espace de modules de tores

On peut montrer que toute surface de Riemann de genre 1 est isomorphe au quotient du plan complexe $\mathbb{C}$ par un *réseau* – un sous-groupe discret de $(\mathbb{C},+)$ isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Donc, pour paramétrer l'ensemble des surfaces de Riemann de genre 1, on peut se contenter de paramétrer les réseaux.

Tout d'abord, il n'est pas difficile à montrer que si Λ peut être obtenu de Λ' par une combinaison d'une dilatation et d'une rotation, alors les surfaces de Riemann $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{C}/\Lambda'$ sont biholomorphes. Il est ainsi suffisant de paramétrer nos réseaux par $\mathbb{H}^2$, où $\tau \in \mathbb{H}^2$ représente le réseau $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ (voir la figure 2).

Figure 2 – Une partie du réseau Λ_τ. Le tore qui correspond à τ est obtenu en recollant les côtés parallèles du parallélogramme vert



Il nous reste maintenant à déterminer quand τ et $\tau' \in \mathbb{H}^2$ représentent deux surfaces de Riemann biholomorphes.

Nous supposons d'abord que

$$h : \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'} \to \mathbb{C}/\Lambda_\tau$$

est un biholomorphisme.

On peut relever h en un biholomorphisme $\widetilde{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que l'on peut normaliser tel que $\widetilde{h}(0) = 0$ et $\widetilde{h}(\Lambda_{\tau'}) = \Lambda_\tau$. Comme tout biholomorphisme $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto \alpha \cdot z + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{C}$, il découle que $\widetilde{h}(z) = \alpha \cdot z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On obtient que

$$\widetilde{h}(\tau') = \alpha\tau' = a\tau + b \quad \text{et} \quad \widetilde{h}(1) = \alpha = c\tau + d$$

pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et donc

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Du fait que $h(\Lambda_{\tau'}) = \Lambda_\tau$ on obtient que $\widetilde{h}(\tau') = a\tau + b$ et $\widetilde{h}(1) = c\tau + d$ engendrent Λ_τ et donc que l'application $m\tau + n \mapsto (a\tau + b)m + (c\tau + d)n$ est un automorphisme de Λ_τ. Cela implique que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}).$$

Enfin, du fait que $\mathrm{Im}(\tau') > 0$ on peut déduire que $ad - bc = 1$. Donc, si $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ et $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ sont biholomorphes, alors τ et τ' sont liés par l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Pour voir que si

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \text{ avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

alors les tores correspondant à τ et τ' sont biholomorphes, on observe que dans ce cas l'application $[z] \in \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'} \mapsto [(c\tau + d)z] \in \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ est un biholomorphisme.

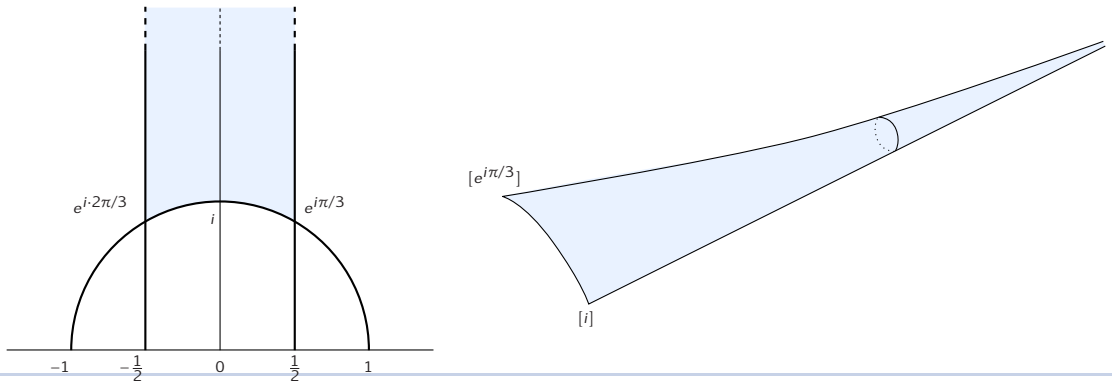
2.2 – La géométrie de $\mathscr{M}_1$

L'espace de modules $\mathscr{M}_1$ admet une géométrie intéressante. De plus, plusieurs phénomènes que l'on observe pour les espaces de modules des surfaces de genre supérieur sont déjà présents dans $\mathscr{M}_1$.

Pour décrire cette géométrie, on rappelle que l'ensemble $\mathscr{F} = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 : |z| \geqslant 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2} \right\}$ (voir la figure 3) est un domaine fondamental pour l'action $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$.

De plus, on vérifie facilement que les cotés verticaux de $\mathscr{F}$ sont identifiés par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que les segments circulaires allant de i à $e^{i\cdot\pi/3}$ et de i à $e^{i\cdot 2\pi/3}$ sont identifiés par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'avère que ces identifications sont suffisantes pour décrire le quotient, un espace topologique homéomorphe à un disque qui est dessiné à droite dans la figure 3. L'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}^2$ décrite ci-dessus est une action par isométries par rapport à la métrique hyperbolique sur $\mathbb{H}^2$. L'action est proprement discontinue, mais pas libre. Par exemple, l'élément $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ fixe le point $i \in \mathbb{H}^2$. Cela implique que le quotient

Figure 3 – À gauche : un domaine fondamental pour l'action $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \curvearrowleft \mathbb{H}^2$. À droite : une esquisse de $\mathscr{M}_1$.



$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ n'a pas la structure d'une variété hyperbolique, mais d'une orbi-surface hyperbolique. C'est un espace qui, presque partout, a la structure d'une surface hyperbolique, sauf en un ensemble de points singuliers isolés, où l'espace a une structure de quotient de $\mathbb{H}^2$ par un groupe d'isométries fini. Un point $[\tau] \in \mathscr{M}_1$ est singulier si et seulement si τ est fixé par un élément non trivial de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

On observe que :

- la structure géométrique autour des points singuliers de $\mathscr{M}_1$ est celle d'un cône hyperbolique, c'est-à-dire un secteur d'un disque avec les deux côtés collés ;
- les points singuliers – les points $[i]$ et $[e^{i\pi/3}]$ – correspondent aux tores qui admettent plus de symétries que les autres : le tore carré et le tore hexagonal respectivement. Ce dernier correspond au réseau hexagonal, d'où son nom ;
- $\mathscr{M}_1$ est homéomorphe à une variété de dimension deux : un disque. Toute orbi-surface est en fait homéomorphe à une variété, ce qui est très spécifique à la dimension deux.

2.3 – L'espace de Teichmüller du tore

Dans l'histoire ci-dessus, le demi plan $\mathbb{H}^2$ joue le rôle du revêtement universel [3] de $\mathscr{M}_1$. Le but de cette section est de donner une interprétation géométrique aux points de $\mathbb{H}^2$ et ainsi de définir l'espace de Teichmüller du tore. Cette construction se généralisera au genre supérieur facilement.

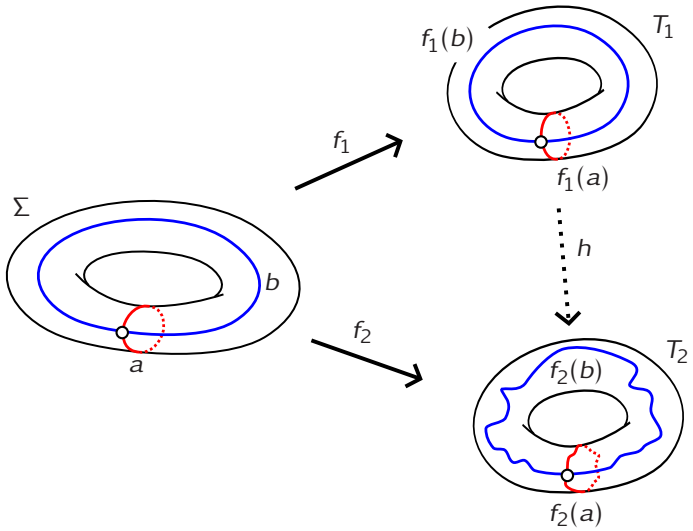
Pour trouver cette interprétation, il faut répondre à la question de quelle information géométrique additionnelle à propos du tore $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ un point $\tau \in \mathbb{H}^2$ encode. Nous observons qu'en vrai, $\mathbb{H}^2$ ne paramètre pas juste les réseaux dans $\mathbb{R}^2$, mais plutôt les bases des réseaux. En termes de tores, cela veut dire que $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ est équipé avec deux lacets privilégiés, formés par les images des segments $[0,1]$ et $\tau \cdot [0,1]$ (les lacets a et b dans la figure 4). Ces deux lacets engendrent le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, [0])$: les classes d'homotopie de lacets basés au point $[0] \in \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ avec multiplication donnée par concaténation de lacets.

Pour encoder cette même information d'une façon que l'on pourrait espérer généraliser au genre supérieur, il faut une autre manière de décrire les bases des groupes fondamentaux des tores qui correspondent aux points de $\mathbb{H}^2$. Pour faire cela, on fixe une fois un tore de référence que l'on appelle Σ. Si on fixe aussi une base $\{a, b\}$ de $\pi_1(\Sigma, x)$, alors on peut encoder une base privilégiée d'un tore T avec un difféomorphisme $f : \Sigma \to T$: les lacets $f(a)$ et $f(b)$ sont une base de $\pi_1(T, f(x))$.

Observons que les bases qui correspondent aux points $\tau \in \mathbb{H}^2$ consistent toujours en des lacets droits : deux géodésiques pour la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$. Par contre, les bases que l'on obtient comme images de la base de Σ sous des difféomorphismes sont beaucoup plus générales. Cependant, dans toute classe d'homotopie de lacets basés à un point fixe on trouve un lacet droit unique. Donc cela nous donne une manière d'associer un point $\tau \in \mathbb{H}^2$ à une paire (T, f) où T est une surface de Riemann difféomorphe à un tore et $f : \Sigma \to T$ un difféomorphisme.

3. Au sens des orbi-espaces.

Figure 4 – Deux manières équivalentes d'équiper un tore avec une base



Notre observation implique aussi que l'association ci-dessus n'est pas du tout injective. D'autre part, avec un peu de travail, on voit que la multiplicité ne vient que des différentes homotopies. C'est-à-dire (T_1, f_1) et (T_2, f_2) donnent le même point dans $\mathbb{H}^2$ si et seulement s'il existe un biholomorphisme $h : T_1 \to T_2$ tel que la composition $f_2^{-1} \circ h \circ f_1 : \Sigma \to \Sigma$ est homotope à l'identité $\Sigma \to \Sigma$ (voir la figure 4 pour une impression artistique).

Donc nous trouvons l'identification

$$\mathbb{H}^2 = \mathcal{T}_1 := \{(T, f) : (*)\}/\sim$$

où « (*) » signifie que T est une surface de Riemann difféomorphe à un tore et $f : \Sigma \to T$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation tandis que « $\sim$ » est l'équivalence décrite ci-dessus. L'ensemble $\mathcal{T}_1$ avec la topologie de $\mathbb{H}^2$ est ce que l'on appelle l'espace de Teichmüller du tore.

2.4 – L'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

Il nous reste à comprendre l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ en termes de paires $[(T, f)] \in \mathcal{T}_1$. Si on regarde à nouveau la preuve de l'identification $\mathcal{M}_1 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$, on observe que l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ change la base privilégiée du groupe fondamental du tore. En effet, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est exactement le groupe qui contient tous les changements de base qui préservent l'orientation : tous les automorphismes de $\pi_1(\Sigma, x) \simeq \mathbb{Z}^2$ qui préservent l'orientation.

On peut exprimer la même chose en termes de difféomorphismes $\Sigma \to \Sigma$. Par son action sur les lacets, un difféomorphisme $f : \Sigma \to \Sigma$ induit un automorphisme [4] $f_* : \pi_1(\Sigma, x) \to \pi_1(\Sigma, x)$. Il s'avère que tout automorphisme de $\pi_1(\Sigma, x)$ est induit par un difféomorphisme $\varphi : \Sigma \to \Sigma$ et que deux tels difféomorphismes induisent le même élément de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ si et seulement s'ils sont homotopes. Donc on obtient que

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Diff}^+(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0^+(\Sigma) =: \mathrm{Mod}(\Sigma),$$

où $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ est le groupe de difféomorphismes $\Sigma \to \Sigma$ qui préservent l'orientation et $\mathrm{Diff}_0^+(\Sigma)$ est le sous-groupe de ceux qui sont homotopes à l'identité. On appelle $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ le *groupe modulaire* (ou le *groupe des difféotopies* ou le *mapping class group*) *du tore*.

Cette deuxième description nous aide aussi pour comprendre l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{T}_1$: vue en termes de paires $[(T, f)] \in \mathcal{T}_1$, l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}^2$ correspond à la précomposition des difféomorphismes. Autrement dit, le groupe $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ agit sur $\mathcal{T}_1$ par

$$[\varphi]\cdot[(T, f)] = [(T, f\circ\varphi^{-1})], \quad [(T, f)] \in \mathcal{T}_1,\ [\varphi] \in \mathrm{Mod}(\Sigma).$$

Et le quotient de cette action est l'espace de modules $\mathcal{M}_1$.

4. Un petit point technique : en réalité f_* est seulement un automorphisme extérieur, mais vu que $\pi_1(\Sigma, x)$ est abélien, on a un isomorphisme $\mathrm{Out}(\pi_1(\Sigma, x)) \simeq \mathrm{Aut}(\pi_1(\Sigma, x))$.

3. Les espaces de modules et de Teichmüller en genre supérieur

3.1 – Définitions

Maintenant que l'on comprend bien les tores, nous allons étendre les définitions en genre supérieur. C'est une question de copier-coller : on définit l'espace de modules $\mathcal{M}_g$ et l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_g$ des surfaces de Riemann de genre g par

$$\mathcal{M}_g := \{\text{Surfaces de Riemann de genre } g\}/\approx,$$

avec « $\approx$ » l'équivalence modulo biholomorphisme, et

$$\mathcal{T}_g := \{(X,f) : (*)\}/\sim,$$

où « (*) » signifie que X est une surface de Riemann difféomorphe à une surface fixée Σ_g de genre g avec $f : \Sigma_g \to X$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation et où $(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2)$ s'il existe un biholomorphisme $h : X_1 \to X_2$ tel que $f_2^{-1} \circ h \circ f_1 : \Sigma_g \to \Sigma_g$ est homotope à l'identité. On appelle le difféomorphisme $f : \Sigma_g \to X$ le *marquage* du point $[(X,f)]$.

Comme pour le tore, on peut aussi identifier $\mathcal{M}_g$ comme le quotient de $\mathcal{T}_g$ par un groupe : le *groupe modulaire de Teichmüller*

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g) = \mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}_0^+(\Sigma_g),$$

qui agit sur $\mathcal{T}_g$ par

$$[\varphi]\cdot[X,f] = [X, f\circ\varphi^{-1}], \quad [X,f] \in \mathcal{T}_g,\ [\varphi] \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g).$$

Maintenant, on sait donc que $\mathcal{M}_0$ est un point, $\mathcal{T}_1 = \mathbb{H}^2$ et $\mathcal{M}_1 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ et $\mathrm{Mod}(\Sigma_1) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. De plus, il s'avère que $\mathcal{T}_0$ est aussi un point et $\mathrm{Mod}(\Sigma_0)$ est trivial. Le but de cette section est de comprendre ce qu'il se passe en genre plus grand que deux.

3.2 – Les twists de Dehn

Commençons par discuter brièvement le groupe modulaire. L'étude de ce groupe est un sujet de recherche en soi ; pour une introduction, nous référons à l'article « Raconte-moi un pseudo-Anosov » d'Erwan Lanneau [9]. Ici, on va juste donner un exemple d'un élément non trivial de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$, pour tout genre $g \geqslant 1$.

On commence avec un homéomorphisme d'un anneau $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[0,1]$ vers lui-même. Soit

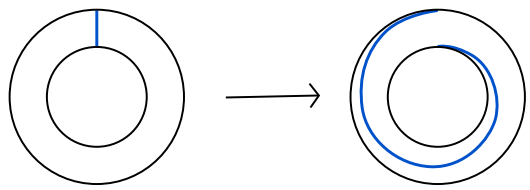
$$D : \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[0,1] \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[0,1]$$

défini par

$$D(s,t) = (s+t, t), \quad (s,t) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[0,1]$$

La figure 5 montre comment D agit sur un segment qui connecte les deux composantes du bord de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[0,1]$.

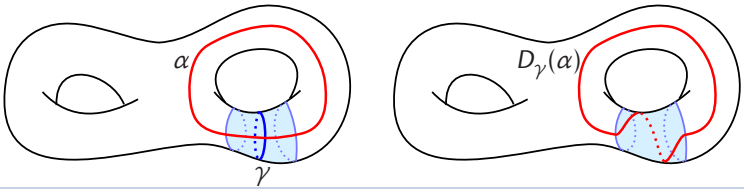
Figure 5 – Un twist de Dehn



Observons que la restriction de D sur le bord de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[0,1]$ est l'identité. Donc, si on plonge $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[0,1]$ dans Σ_g (comme dans la figure 6) on peut définir un homéomorphisme $\Sigma_g \to \Sigma_g$ qui est l'identité en dehors de l'anneau et qui coïncide avec D sur l'anneau. Si les composantes du bord de l'anneau sont homotopes à une courbe fermée γ et que cette courbe n'est pas triviale dans le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_g)$, alors l'image de l'homéomorphisme dans $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ n'est pas trivial. On appelle cet élément du groupe modulaire le *twist de Dehn* le long de γ, noté $D_\gamma \in \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$.

On triche un petit peu ici, l'application que l'on décrit ci-dessus n'est pas lisse donc en particulier, elle n'est pas un difféomorphisme. Heureusement, il s'avère que $\mathrm{Mod}(\Sigma_g) \simeq \mathrm{Homéo}^+(\Sigma_g)/\mathrm{Homéo}_0^+(\Sigma_g)$, où $\mathrm{Homéo}^+(\Sigma_g)$ est le groupe des homéomorphismes $\Sigma_g \to \Sigma_g$ qui préservent l'orientation et $\mathrm{Homéo}_0^+(\Sigma_g)$ est encore le sous-groupe de ceux qui sont homotopes à l'identité.

Figure 6 – L'image d'une courbe α sous le twist de Dehn le long de γ



3.3 – La topologie et les coordonnées de Fenchel-Nielsen

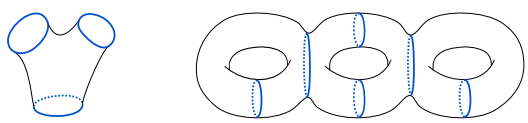
Les définitions ci-dessus donnent à $\mathcal{M}_g$ et $\mathcal{T}_g$ seulement la structure d'un ensemble. Pour les munir d'une structure d'espace topologique il faut dire quand on considère que deux structures complexes sont proches. La manière la plus classique de le faire utilise la géométrie complexe et en particulier les différentielles de Beltrami. Dans ce texte, nous allons utiliser une autre construction bien connue, reposant sur la géométrie hyperbolique.

Dès maintenant, nous supposons que le genre g soit au moins 2. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, quand $g \geqslant 2$, les structures de surfaces de Riemann sur Σ_g à biholomorphisme près sont en bijection avec les métriques hyperboliques sur Σ_g à isométrie près. Cela nous permet de voir $\mathcal{T}_g$ et $\mathcal{M}_g$ comme des espaces de métriques hyperboliques sur Σ_g.

Un espace de paramètres pour les métriques hyperboliques

Pour paramétrer ces métriques hyperboliques, on utilise une *décomposition en pantalons* de Σ_g. C'est une collection $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{3g-3}\}$ de courbes fermées simples [5] sur Σ_g telle que $\Sigma_g \setminus \cup_i \gamma_i$ est une union disjointe de *pantalons* – des sphères à trois trous (voir la figure 7). Un argument topologique implique qu'il y a toujours $3g-3$ courbes dans une telle décomposition et que la décomposition découpe la surface en $2g-2$ pantalons.

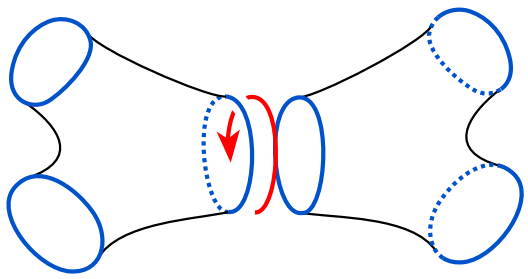
Figure 7 – Un pantalon et une décomposition en pantalons d'une surface de genre 3



On peut munir un pantalon d'une métrique hyperbolique pour laquelle les composantes de bord sont des géodésiques. En fait, il s'avère que pour tous $a, b, c > 0$ il existe une telle métrique dont les longueurs des composantes de bord sont a, b et c respectivement et cette métrique est unique à isométrie près. Donc, si on choisit une longueur ℓ_i par courbe γ_i de notre décomposition en pantalons, cela définit une métrique hyperbolique (à isométrie près) sur l'intérieur de tous les pantalons.

Pour définir la métrique sur toute la surface Σ_g, il faut dire comment recoller les métriques sur les pantalons. Autrement dit, pour chaque courbe γ_i, on a besoin d'une isométrie entre les composantes du bord des pantalons correspondants. Une telle isométrie entre deux cercles est déterminée par l'image d'un seul point. Donc, pour chaque courbe γ_i on ajoute un deuxième paramètre τ_i que l'on appelle le *décalage* (ou le *twist*) du recollement. Pour définir le recollement, on prend d'abord un recollement de référence que l'on appelle le recollement de décalage 0. Alors, le recollement de décalage τ_i est celui où on coupe le recollement de décalage 0, on applique une rotation de longueur τ_i et on recolle (voir la figure 8).

Figure 8 – Le décalage d'un recollement de deux pantalons



On observe que les surfaces construites avec décalage τ_i et $\tau_i + \ell_i$ sont isométriques, mais on peut les voir comme différant par un twist de Dehn. On admet tous les décalages possibles et on obtient ainsi un espace de paramètres homéomorphe à $\mathbb{R}_{>0}^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$.

La topologie de l'espace Teichmüller

La construction ci-dessus nous donne une application

$$\mathbb{R}_{>0}^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \xrightarrow{\text{FN}} \mathcal{T}_g$$

qui envoie

$$(\ell_i, \tau_i)_{i=1}^{3g-3} \mapsto [(X_{\ell,\tau}, f_{\ell,\tau})]$$

où $f_{\ell,\tau}$ et $X_{\ell,\tau}$ sont définies comme suit.

- $X_{\ell,\tau}$ est la surface hyperbolique que nous avons décrite ci-dessus. Observons que l'on voit la même surface hyperbolique une infinité dénombrable de fois : chaque fois que

5. Sans auto-intersection.

l'on ajoute ℓ_i à τ_i pour un certain i, on obtient la même surface.

– On définit $f_{\ell,\tau} : \Sigma_g \to X_{\ell,\tau}$ en utilisant les twists. Soient $k_i \in \mathbb{Z}$ tels que $\tau_i + k_i \cdot \ell_i \in [0, \ell_i[$, pour $i = 1, \ldots, 3g-3$. Alors $[f_{\ell,\tau}] = \prod_{i=1}^{3g-3} D_{\gamma_i}^{k_i}$.

L'application ci-dessus est bijective et nous donne une topologie sur $\mathcal{T}_g$ et sur $\mathcal{M}_g$ en tant que quotient de $\mathcal{T}_g$. Donc similairement au cas du tore :

- $\mathcal{T}_g$ est homéomorphe à une boule et,
- vu que l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ sur $\mathcal{T}_g$ est proprement discontinue, mais pas libre, $\mathcal{M}_g$ est un orbi-espace,
- dont les points singuliers correspondent aux surfaces hyperboliques avec un groupe d'isométries non trivial.

Les coordonnées globales $\mathbb{R}_{>0}^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \xrightarrow{\text{FN}} \mathcal{T}_g$ s'appellent les *coordonnées Fenchel-Nielsen*.

4. La géométrie de l'espace de Teichmüller et de l'espace de modules

Dans la section 2, nous avons vu que l'espace de Teichmüller du tore n'admet pas seulement une topologie mais aussi une métrique – la métrique hyperbolique – qui est invariante sous l'action du groupe modulaire et qui descend donc à l'espace de modules du tore. Le but de cette section est de généraliser cela au genre supérieur.

En fait, l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_g$ admet plusieurs métriques qui sont $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$-invariantes et on en discutera deux : la métrique de Teichmüller, qui est liée à la géométrie conforme, et la métrique de Weil-Petersson, qui est liée à la géométrie hyperbolique. Le matériel dans cette section nous permettra de parler un peu de quelques développements plus récents.

4.1 – La métrique de Teichmüller

La *métrique de Teichmüller* mesure la « distance quasiconforme » entre deux surfaces marquées. Brièvement, si X et Y sont deux surfaces de Riemann, une application conforme $\varphi : X \to Y$ est une application qui envoie les cercles (pour la métrique riemannienne sur X) dans l'espace tangent T_pX sur des cercles dans l'espace tangent $T_{\varphi(p)}Y$, pour tout $p \in X$. Une application *quasiconforme* $\varphi : X \to Y$ est une application qui envoie les cercles dans T_pX sur des ellipses d'excentricité bornée dans $T_{\varphi(p)}Y$. On peux calculer la « non-conformité » d'une telle application φ au point $p \in X$ en prenant un cercle C dans T_pX et en calculant

$$K_p(\varphi) = \frac{\text{longueur de l'axe majeur de } \varphi_*(C)}{\text{longueur de l'axe mineur de } \varphi_*(C)}.$$

On définit la *dilatation quasiconforme* de φ par

$$K(\varphi) := \sup_{p \in X} K_p(\varphi).$$

Donc $K(\varphi) \geqslant 1$ et φ est conforme si et seulement $K(\varphi) = 1$. On dit que deux surfaces de Riemann X et Y sont *K-quasiconformes* s'il existe une application quasiconforme $\varphi : X \to Y$ avec $K(\varphi) \leqslant K$.

Pour tout $[(X,f)], [(X',f')] \in \mathcal{T}_g$, la distance de Teichmüller est définie comme :

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Teich}}([(X,f)],[(X',f')]) := \inf\{\ln(K(\varphi)) : (*)\},$$

où « (*) » signifie que $\varphi : X \to X'$ est une application quasiconforme qui est homotope à $f' \circ f^{-1} : X \to X'$. Un théorème classique de Teichmüller dit qu'il existe une unique application quasiconforme – *l'application de Teichmüller* – qui réalise la distance de Teichmüller.

La métrique $\mathrm{d}_{\mathrm{Teich}}$ généralise ce que nous avons vu dans la section 2, dans le sens où sur $\mathcal{T}_1$, la métrique de Teichmüller coïncide avec la distance hyperbolique. Elle induit une métrique de diamètre infini sur $\mathcal{M}_g$: pour tout $K > 0$ il existe des surfaces de Riemann $X, Y \in \mathcal{M}_g$ qui ne sont pas K-quasiconformes. Par contre, un théorème remarquable de Kahn-Markovic dit que, étant donnés X, Y et $\varepsilon > 0$, on peut trouver des revêtements $\widehat{X} \to X$ et $\widehat{Y} \to Y$ de degrés finis tels que $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont $(1+\varepsilon)$-quasiconformes [8].

4.2 – La métrique de Weil-Petersson

Une deuxième métrique $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$-invariante sur $\mathcal{T}_g$ est la métrique de Weil-Petersson. Pour la définir, on utilise le fait que l'espace cotangeant à $[(X,f)] \in \mathcal{T}_g$ s'identifie à l'espace $Q(X)$ des différentielles quadratiques sur X : les sections holomorphes de $\mathrm{Sym}^2(T^*X)$. Cet espace admet une forme hermitienne

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \int_X \frac{q_1(z)\overline{q_2(z)}}{\rho(z)},$$

où $\rho(z)$ est la métrique hyperbolique sur X. C'est une observation de Weil que cette forme hermitienne induit une forme de Kähler sur $\mathcal{T}_g$. La partie

réelle de cette forme induit une métrique riemannienne sur $\mathcal{T}_g$ que l'on appelle la métrique de Weil-Petersson.

Cette métrique est très différente de la métrique de Teichmüller. Par exemple, contrairement à la métrique de Teichmüller, elle est incomplète [14] et le diamètre de $\mathcal{M}_g$ par rapport à la métrique de Weil-Petersson est fini [4]. La géométrie grossière de la métrique est liée à la combinatoire des décompositions en pantalons de la surface et nous donne aussi des estimations sur le volume de certaines variétés hyperboliques tridimensionnelles [1].

À toute forme de Kähler, on peut aussi associer une forme symplectique : la partie imaginaire de la forme. Wolpert [13] a prouvé que les coordonnées de Fenchel-Nielsen sont des coordonnées de Darboux pour la forme symplectique de Weil-Petersson ω_{WP}. Ceci veut dire que si $\{\gamma_1,\dots,\gamma_{3g-3}\}$ est une décomposition en pantalons de notre surface Σ_g, alors :

$$\omega_{\mathrm{WP}} = \sum_{i=1}^{3g-3} d\ell_{\gamma_i} \wedge d\tau_{\gamma_i}.$$

De plus, il s'avère que le volume de l'espace de modules pour la forme de volume $d\mathrm{vol}_{\mathrm{WP}} = \omega_{\mathrm{WP}}^{3g-3}$ est fini. Par contre, ces volumes ne sont pas faciles à calculer, le problème étant qu'il est difficile de trouver un domaine fondamental pour $\mathcal{M}_g$ dans $\mathcal{T}_g$. Néanmoins, Mirzakhani a trouvé des méthodes d'intégration pour ces volumes en les reliant aux volumes d'espaces de modules de surfaces à bord [11].

5. Une application : les surfaces aléatoires

Le fait que le volume de Weil-Petersson de $\mathcal{M}_g$ soit fini nous permet de parler de propriétés typiques de surfaces hyperboliques. Concrètement, on peut définir une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}_g$ par

$$\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}(A) = \frac{\mathrm{vol}_{\mathrm{WP}}(A)}{\mathrm{vol}_{\mathrm{WP}}(\mathcal{M}_g)}, \quad A \subset \mathcal{M}_g \text{ mesurable},$$

et on peut se poser la question : « quelle est la géométrie d'une surface hyperbolique moyenne ? ».

On donne un exemple d'une réponse à cette question, due à Mirzakhani [10], qui dit que le diamètre d'une surface hyperbolique typique de grand genre est très petit.

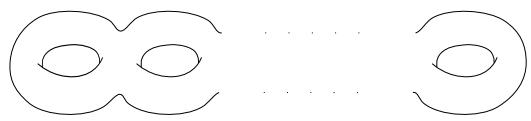
D'abord on remarque qu'en général, il n'est pas difficile de construire des surfaces hyperboliques de genre arbitraire avec un diamètre arbitrairement grand. De plus, le diamètre minimal possible d'une surface hyperbolique fermée et orientée de genre g est asymptotique à $\ln(g)$ lorsque $g \to \infty$ [2].

Par contre, même si des constructions concrètes sont connues – par exemple en utilisant des groupes arithmétiques – il est beaucoup moins facile de construire des suites de surfaces hyperboliques dont le genre tend vers l'infini et dont le diamètre est logarithmique en fonction du genre. Cependant, on a le fait remarquable, prouvé par Mirzakhani, que

$$\mathbb{P}_g^{\mathrm{WP}}(\mathrm{diametre}(X) \leqslant 40 \cdot \ln(g)) \overset{g\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Une des conséquences de ce résultat est que l'image d'une surface de grand genre que l'on (au moins l'auteur de ce texte) dessine souvent

Figure 9 – Une surface de grand genre atypique



est géométriquement très différente d'une surface de Riemann typique, vu que c'est une surface de diamètre d'ordre g.

6. Pour en savoir plus

Le livre de Farb-Margalit [5] donne une introduction à la théorie de Teichmüller et aux groupes modulaires. Le livre de Buser [3] est une référence classique pour la géométrie hyperbolique (et spectrale) des surfaces. Les livres de Hubbard [6] et Imayoshi-Taniguchi [7] sont aussi des références classiques.

Pour une introduction à la géométrie de Weil-Petersson de l'espace de Teichmüller on se réfère à l'article de Wolpert [15] et à ses notes sur le sujet [16]. Pour une introduction aux travaux de Mirzakhani nous nous référons à l'article de Wright [17].

Enfin, la théorie de Teichmüller est un domaine de recherche actif et il y a plein de sujets que nous n'avons même pas mentionnés, comme par exemple : les surfaces de translation, la géométrie complexe de l'espace de Teichmüller, les liens avec la géométrie algébrique, la métrique de Thurston,

les coordonnées de décalage (shear), les compactifications de l'espace de Teichmüller, la théorie de Teichmüller en rang supérieur, etc. Pour avoir une idée de point de départ nous faisons référence aux différents articles de survol des 7 volumes du Handbook of Teichmüller Theory [12].

Références

[1] J. F. Brock. « The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores ». *J. Amer. Math. Soc.* **16**, n° 3 (2003), p. 495-535.

[2] T. Budzinski, N. Curien et B. Petri. « On the minimal diameter of closed hyperbolic surfaces ». *Duke Math. J.* **170**, n° 2 (2021), p. 365-377.

[3] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Modern Birkhäuser Classics. Reprint of the 1992 edition. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010, p. xvi+454.

[4] W. Cavendish et H. Parlier. « Growth of the Weil-Petersson diameter of moduli space ». *Duke Math. J.* **161**, n° 1 (2012), p. 139-171.

[5] B. Farb et D. Margalit. *A primer on mapping class groups*. **49**. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012, p. xiv+472.

[6] J. H. Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006, p. xx+459.

[7] Y. Imayoshi et M. Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Translated and revised from the Japanese by the authors. Springer-Verlag, Tokyo, 1992, p. xiv+279.

[8] J. Kahn et V. Markovic. « The good pants homology and the Ehrenpreis conjecture ». *Ann. of Math. (2)* **182**, n° 1 (2015), p. 1-72.

[9] E. Lanneau. « Raconte-moi... un pseudo-Anosov ». *Gaz. Math.*, n° 151 (2017), p. 52-57.

[10] M. Mirzakhani. « Growth of Weil-Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus ». *J. Differential Geom.* **94**, n° 2 (2013), p. 267-300.

[11] M. Mirzakhani. « Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces ». *Invent. Math.* **167**, n° 1 (2007), p. 179-222.

[12] A. Papadopoulos, éd. *Handbook of Teichmüller theory. Vol. I.* **11**. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007, p. viii+794.

[13] S. Wolpert. « The Fenchel-Nielsen deformation ». *Ann. of Math. (2)* **115**, n° 3 (1982), p. 501-528.

[14] S. A. Wolpert. « Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves ». *Invent. Math.* **85**, n° 1 (1986), p. 119-145.

[15] S. A. Wolpert. « Counting geodesics, Teichmüller space, and random hyperbolic surfaces ». *Notices Amer. Math. Soc.* **68**, n° 11 (2021), p. 1890-1899.

[16] S. A. Wolpert. « Mirzakhani's volume recursion and approach for the Witten-Kontsevich theorem on moduli tautological intersection numbers ». In : *Moduli spaces of Riemann surfaces*. Vol. 20. IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, p. 221-266.

[17] A. Wright. « A tour through Mirzakhani's work on moduli spaces of Riemann surfaces ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **57**, n° 3 (2020), p. 359-408.

Bram Petri

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

bpetri@imj-prg.fr

Bram Petri est maître de conférences. Ses travaux portent sur la géométrie hyperbolique.

L'auteur remercie Joan Bellier-Millès, Federica Fanoni, Maxime Fortier Bourque, Laura Monk et Gabriel Rivière pour des commentaires très utiles sur des versions préliminaires de ce texte.

Lettre au comité exécutif de la Société mathématique européenne concernant la Russie et Israël

Chers membres du comité exécutif de la Société mathématique européenne, chers collègues,

Les mathématiciens soussignés saluent la décision du comité exécutif de la Société mathématique européenne de geler la coopération universitaire avec les institutions publiques et les entreprises commerciales en Russie, à la suite de l'attaque de la Russie contre l'Ukraine. Nous convenons qu'une invasion est « une attaque contre les valeurs fondamentales de liberté, de démocratie et d'autodétermination, qui à leur tour fournissent les bases de la liberté académique et des opportunités de coopération académique ».

Nous notons que trois institutions israéliennes sont des « membres corporatifs » de la Société mathématique européenne :

- le département de mathématiques du Technion ;
- l'institut de recherche Emmy Noether pour les mathématiques, de l'université de Bar-Ilan ;
- l'Union mathématique d'Israël.

Le peuple palestinien a été soumis depuis des décennies à des attaques militaires répétées, à des invasions périodiques extrêmement destructrices et à une occupation militaire soutenue, en violation du droit international, une situation que les ONG tant internationales qu'israéliennes ont qualifiée d'apartheid. Le Conseil de sécurité des Nations unies a adopté plus de 200 résolutions appelant Israël à cesser, et la Cour internationale de justice a statué que le mur de l'apartheid est illégal et qu'Israël est dans l'obligation de le démanteler. Malgré ces condamnations, Israël continue ses violations flagrantes du droit international.

Nous appelons la Société mathématique européenne à appliquer les mêmes principes universels qu'elle a mis en œuvre à juste titre à l'égard de la Russie et à suspendre la coopération universitaire avec ses membres corporatifs israéliens jusqu'à ce que nos collègues palestiniens puissent jouir pleinement de l'intégralité des droits académiques et politiques qui leurs sont dus.

Nous vous prions de bien vouloir diffuser ce message aux membres de la Société mathématique européenne via votre newsletter.

Signataires : Ahmed Abbes, CNRS & IHÉS, France ; Tuna Altınel, Institut Camille Jordan, université Claude Bernard Lyon 1, France ; Joseph Ayoub, university of Zurich, Switzerland ; Viviane Baladi, CNRS & Sorbonne Université, France ; Arnaud Beauville, université Côte d'Azur, France ; Bruno Chiarellotto, università degli studi di Padova, Italy ; Ivar Ekeland, université Paris-Dauphine, France ; Catherine Goldstein, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université et université de Paris, France ; Michel Gros, CNRS & université Rennes I, France ; Michael Harris, Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG, France ; Clément Mouhot, university of Cambridge, United Kingdom ; Joseph Oesterlé, Sorbonne Université, France ; Fabrice Orgogozo, CNRS et Sorbonne Université, France ; Sylvain Sorin, Sorbonne Université, France.

Les tribunes publiées dans la *Gazette* n'engagent que leurs autrices et auteurs.

Témoignage d'un collègue ukrainien

• M. Chernodub

Voici le témoignage envoyé par un collègue ukrainien, au tout début de l'invasion russe en Ukraine.

28 février 2022

Dear Friends,

I am so happy to have so many current collaborators that I'm sorry to say that I cannot write to everybody personally. Sorry for my scientific inactivity in the recent weeks; I'll also be off science next week.

We all don't like lengthy messages, so I tried to be as brief as possible (but it did not work, in fact). I skip trivial but powerful statements such as "Science should unite people", etc. We all know them well. Instead, I would like to ask for some coherent near-scientific effort.

To understand the background, I need to tell a bit more about myself (my CV on my institute page is well-outdated):

I'm a French-Russian-Ukrainian scientist:

- born/raised in Ukraine; my mother language is an Eastern dialect of Ukrainian;
- graduated and worked in Moscow (particle physics); I have two Russian degrees in science; now I'm a Leading researcher (at a distance) in a Russian University; I co-lead a group of young people (quantum field theory).
- I'm permanently working at French CNRS (Directeur de recherche = senior scientist in the French system); head of a modest Field theory group at the Institut Denis Poisson, Tours-Orléans.

My parents of mixed Ukrainian/Russian origin refused to leave Kyiv for safe France weeks ago, although it was very easy (I would make the same decision if I were at their side). Now Kyiv is encircled; my parents help make final preparations in a bomb shelter in Kyiv. We expect an assault soon, in a matter of hours or days.

My brother, an IT specialist and an assistant Professor at a University in Lviv (in the western part of Ukraine), was not enlisted in the army due to health issues. From the beginning of this week, he stays in nearby Poland with his family and continues to work at a distance. It was a reasonable solution: yesterday, a building in his block in Kyiv was heavily damaged by a shell or rocket.

I was born and spent my childhood in the Kharkiv region located in the eastern part of Ukraine. Kharkiv is the city of Landau, Lifshitz, Pomeranchuk (Pomeranchuk instability), Shubnikov (SdH oscillations), Podolsky (EPR paradox), and many other prominent scientists. Now, the city of Kharkiv is encircled and being stormed; many nearby cities and towns – with the names so familiar to me from childhood – are in flames.

I have friends and friends of friends all over Ukraine. They share what they see with their eyes. Some places are easy to localize ("this burning armored vehicle is on the street near my friend's apartment in a city in the Kharkiv region"; "these lifeless bodies of soldiers lie close to a roundabout on my usual way to a subway station in Kyiv, etc."). It's not fake news over social networks.

I read news in Ukrainian, Russian, English, and French.

So, I feel that I have a generic vision of what happened the last few days and what is going on right now (and I have no idea what awaits us in the future, unfortunately).

Now, here is the main message (I try to keep it short).

1) As a Ukrainian scientist, I would like to ask you: please don't enforce or support the calls to boycott Russian collaborators. These calls sound typically as follows (I cite certain current discussions in the high-energy-physics community): "no single paper in collaboration with Russians"; "freeze all our common projects with Russians"; "ask Russian colleagues to fill a questionnaire whether they approve what is happening or not, and then we decide on our collaboration", etc.).

I must say that most (if not all) of our Russian colleagues share our values and principles. They are as horrified as we are by seeing what is happening in Ukraine. Please don't allow the narrow-minded

administration-motivated colleagues to punish the Russian scientists twice: both from their Russian government and from their colleagues from abroad. We know that they are suffering a lot already.

A peaceful protest in Russia is not easy (I do not cite any examples here because this email is not a political message). Therefore, we should praise our brave Russian colleagues who wrote and signed this strongly-worded document against the War [1].

The Russian version contains now, 27/02/2022, more than 4000 signatures (according to the organizers, this list is far from complete, so in reality it is bigger): `https://trv-science.ru/2022/02/we-are-against-war/`.

Please notice that I'm talking only about person-to-person or group-to-group collaborations with Russian colleagues and Russian groups. (It is up to governments and administrations to decide the fate of the inter-governmental and/or EU-supported programs.)

→ this should be done now.

2) As a Russian scientist, I would like to ask you to help launch new programs with Ukrainian colleagues: emergent recovery programs, mobility grants, mutual bi-lateral Ph.D. doctorships, organization of joint conferences, and all that machinery we know well.

You don't know who is working in Ukraine on your topic? Just look at a publication tree, check around, ask colleagues. Be, please, active. There are many talented young people in Ukrainian Universities. The EU/US governments, of course, will try to support the recovery of Ukrainian science. But the scale and overall success of this program will depend on us, who will provide the person-to-person and group-to-group basis.

Of course, n° 2 depends on the outcome of the War in Ukraine and the postwar details. Let's hope for a peaceful future.

→ now, no active collaboration is possible but we should be prepared for the future.

3) As a French scientist, I will do my best to fulfil the both points sketched above.

Please, feel free to share these thoughts (or circulate the letter itself) around you.

Thank you!

With best regards,

Maxim Chernodub

Directeur de recherche/senior scientist CNRS, Institut Denis Poisson, UMR 7013, Tours-Orléans, France

Les tribunes publiées dans la *Gazette* n'engagent que leurs autrices et auteurs.

1. `https://www.eureporter.co/world/russia/2022/02/24/an-open-letter-from-russian-scientists-and-science-journalists-against-the-war-with-ukraine/`

« Mathématiques étonnantes » Un premier bilan, une nouvelle impulsion

• J. Buzzi

Au printemps 2019, la Société Mathématique de France a lancé *Mathématiques étonnantes,* un nouveau cycle de conférences grand public consacrées aux interactions des mathématiques. Ce troisième anniversaire est l'occasion d'un premier bilan doublé d'un appel aux bonnes volontés.

Principe

Rappelons d'abord le public visé par ce cycle : les étudiantes et étudiants à partir de la fin de licence d'une part, les enseignants du secondaire d'autre part. Il s'agissait de compléter l'offre de la SMF en direction du grand public c'est-à-dire non-spécialiste.

À la fin de la licence, il devient possible de donner une idée des différents types de mathématiques intervenant dans la problématique choisie. Les conférences de *Mathématiques étonnantes* peuvent ainsi alimenter la réflexion des étudiantes et étudiants qui s'interrogent sur leur orientation. Les professeurs du secondaire peuvent y trouver un lien avec la recherche et des matériaux pour illustrer leurs cours.

La spécificité de ce cycle est de mettre l'accent sur les *interactions* des mathématiques, qu'elles soient liées à une application ou à une question scientifique. Nous avons souhaité que ces interactions soient incarnées dans des collaborations scientifiques. Chacune des conférences donne ainsi la parole aux deux pôles de la collaboration présentée : d'une part, une mathématicienne ou un mathématicien, d'autre part une ingénieure ou un scientifique d'une autre discipline. Idéalement, on aimerait faire toucher du doigt comment un questionnement, *a priori* étranger aux mathématiques, peut se traduire par l'introduction de nouvelles notions, la formulation de conjectures et la preuve de théorèmes qui y répondent mais aussi enrichissent un domaine des mathématiques.

Organisation

Ce cycle repose à la fois sur des partenaires locaux et sur un comité scientifique. Ce dernier était formé à l'origine des collègues suivants : A. Desolneux, P. Laffitte, F. Le Roux, F. Rouillier, J.-P. Tual et moi-même, rejoints ensuite par V. Borelli au nom des soirées mathématiques lyonnaises et par E. André, étudiant en licence. Les partenaires locaux actuels sont Jussieu (notamment l'initiative Aromaths au sein du département de mathématiques), Orsay (notamment la fondation Jacques Hadamard) et les soirées mathématiques lyonnaises.

Le rôle du partenaire local est essentiel. C'est lui qui fait connaître la conférence auprès du public étudiant et enseignant. Le plus souvent c'est encore lui qui assure l'accueil dans un amphithéâtre adapté et la captation vidéo. Parfois, ce partenaire complète le financement de la conférence.

La SMF assure la coordination générale grâce à ses moyens propres, humains et financiers : réunion du comité scientifique, communication autour de chaque conférence (page web, affiche, relais auprès des différents partenaires). Les restrictions sanitaires nous ont obligés à apprendre les bases de la diffusion en direct et de la participation à distance. Un modérateur synthétise les questions du public distant et encourage sa participation. L'aide de Fabrice Rouillier (INRIA et *Animath*) a été cruciale pour la diffusion en direct. C'est aujourd'hui Bruno Duchesne (Paris-Saclay) qui supervise tous les aspects vidéos du direct à l'archivage. Sauf exceptions, toutes les conférences grand public peuvent être visionnées sur le site web ainsi que sur la chaîne YouTube de la Société.

Au-delà des partenaires locaux, *Mathématiques étonnantes* a bénéficié de plusieurs soutiens financiers ponctuels et récurrents, notamment de la Fondation Blaise Pascal.

Conférences 2019-2022

Au cours de ces trois ans, nous avons eu le plaisir de présenter les sept conférences suivantes :

- *Hackers vs. équations diophantiennes* par R. Barbulescu (CNRS) et S. Canard (Orange) à Jussieu ;
- *Perception visuelle et équations intégro-différentielles* par O. Faugeras (INRIA) et Y. Frégnac (Neurospin) à Orsay ;
- *Le cœur a ses raisons que la raison adore* par L. Pujo-Menjouet (U. Lyon) et C. Viricel (HAIR) à Lyon ;
- *Topologie en sous-sol* par J. Tierny (CNRS) et M. Plainchault (Total) à Jussieu ;
- *Le poumon en équations* par B. Maury (université Paris-Saclay) et S. Bayat (université Grenoble-Alpes) en ligne ;
- *Pourquoi le sable n'est-il pas un liquide ?* par A. Lefebvre-Lepot (X) et A. Seguin (université Paris-Saclay) à Orsay et en ligne ;
- *Bactéries et antibiotiques : mathématiques de la résistance* par S. Méléard (X) et M. El Karoui (Edinburgh) à Jussieu et en ligne.

Comme on le voit, *Mathématiques étonnantes* a permis de montrer une large palette d'interactions des mathématiques avec des sciences aussi bien qu'avec des techniques. Un petit regret personnel : ne pas avoir su trouver les conférenciers susceptibles d'illustrer de façon accessible des interactions entre domaines mathématiques, ou encore des exemples où c'est l'autre domaine qui a fécondé la pensée mathématique (pensons à la symétrie miroir et à l'influence de la physique théorique).

Concernant le public touché, on peut estimer que, dans les cas typiques, le public de chacune de ces conférences était d'environ 60 à 130 participants sur place, un peu plus en ligne et de 500 à 1000 visionnages en différé. L'analyse des chiffres de participation en ligne est délicate et reste un sujet de réflexion. La composition du public présent est incertaine, du fait du peu de retour des questionnaires et de sa variabilité. Il semble qu'une grosse moitié des participants sont des étudiants (du L1 au doctorat, avec une forte majorité de L3) et qu'un sixième sont des enseignants du secondaire, le reste du public étant constitué d'enseignants-chercheurs et d'ingénieurs.

Ce bilan montre que ce nouveau cycle a su trouver son public étudiant, notamment grâce au travail constant des partenaires locaux. Bien sûr, ces conférences de très haut niveau, données le plus souvent avec un grand souci pédagogique, ont un public potentiel bien plus vaste (pensons à toutes les licences de mathématiques de France ou aux enseignants de mathématiques dans le secondaire). Pour toucher un plus large public, deux approches (non-exclusives) se présentent : améliorer la diffusion en ligne qui rencontre un certain intérêt mais qui demande sans doute encore de faire évoluer nos pratiques ; trouver de nouveaux partenaires locaux pour des conférences inédites ou répétées, comme nous le faisons déjà un peu dans le cadre du cycle *Un texte, un mathématicien.*

Et maintenant ?

Comme toutes les initiatives de la SMF, celle-ci dépend de votre participation : pour toucher un plus large public, pour participer et apporter de nouvelles idées. Nous cherchons tout particulièrement de nouveaux partenaires locaux hors de la région parisienne. C'est désormais Pierre-Antoine Guihéneuf (Sorbonne Université) qui pilote ce cycle et lui apporte une énergie renouvelée et je vous invite à le contacter avec vos propositions.

Jérôme Buzzi
Université Paris-Saclay
jerome.buzzi@smf.emath.fr
Jérôme Buzzi est vice-président grand public de la Société Mathématique de France.

MATHÉMATIQUES ÉTONNANTES
Mathématiciens & ingénieurs racontent en duo leurs rencontres étonnantes
28 janvier 2020
à 18h15
Topologie en sous-sol
L'analyse topologique des données en géosciences
MÉLANIE PLAINCHAULT, Total
JULIEN TIERNY, CNRS
Renseignements et inscription :
smf.emath.fr/conference-sous-sol
Amphi 15 • Campus Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu 75005 Paris
Société Mathématique de France
SMF
Aromaths
Sorbonne Université
Faculté de Mathématiques
Fondation Blaise Pascal

MATHÉMATIQUES ÉTONNANTES
Mathématiciens & scientifiques racontent en duo leurs rencontres étonnantes
4 mai 2021
à 18h
Le poumon en équations
regards croisés
Bertrand MAURY
université Paris-Saclay / Éns Paris
Sam BAYAT
université Grenoble Alpes / CHU Grenoble / Inserm
Renseignements et inscription :
smf.emath.fr/conference-poumon
Sur place et en ligne • IHP
11 rue P. et M. Curie 75005 Paris
Société Mathématique de France
SMF
ihp

MATHÉMATIQUES ÉTONNANTES
Mathématiciens & scientifiques racontent en duo leurs rencontres étonnantes
24 novembre 2021
à 18h 30
Pourquoi le sable n'est-il pas un liquide ?
Aline LEFEBVRE-LEPOT
École polytechnique, CNRS
Antoine SEGUIN
Université Paris-Saclay
Renseignements et inscription :
smf.emath.fr/conference-sable
Institut de mathématiques d'Orsay
Amphithéâtre Yoccoz
Société Mathématique de France
SMF
université Paris-Saclay
Mathématiques Orsay

MATHÉMATIQUES ÉTONNANTES
Mathématiciens & scientifiques racontent en duo leurs rencontres étonnantes
07 avril 2022
à 18h 30
Bactéries et antibiotiques Mathématiques de la résistance
Sylvie Méléard
École polytechnique
Meryem El karoui
Université d'Edimbourg, École polytechnique
Renseignements et inscription :
smf.emath.fr/conference-bacteries
Sorbonne Université, campus Curie
Amphithéâtre 15 (place Jussieu, Paris 5ème)
Société Mathématique de France
SMF
Sciences Sorbonne Université

Le modèle diamant dans l'œil du cyclone

- I. Famechon
- M.-E. Herbet

Le développement de la science ouverte, dont le portage politique s'est accéléré ces dernières années avec l'adoption de deux plans nationaux en 2018 puis en 2021, nourrit le débat actuel sur les modalités de l'ouverture et le coût de cette dernière. Un plan d'action européen dévoilé le 2 mars 2022 prévoit un ensemble de mesures pour « soutenir et déployer un modèle d'édition en accès ouvert équitable et pérenne qui puisse être contrôlé par la communauté scientifique » [1]. Ce plan, placé sous l'égide de la Coalition S [2], Science Europe [3], l'ANR et l'infrastructure de recherche Operas [4], vise à constituer un écosystème autour du « modèle diamant » de publication scientifique. Rappelons que celui-ci repose sur la prise en charge des coûts de publication par les institutions dans l'objectif d'offrir, in fine, la gratuité pour le lecteur comme pour l'auteur. Le CNRS, signataire du plan, s'engage dans un mouvement de fond visant la promotion de ce modèle auprès de la communauté scientifique française.

De manière quasi simultanée, un rapport rendu public le 9 mars 2022 par l'OPECST [5] prend le contrepied des orientations actuelles en adressant un avertissement, – pour ne pas dire un réquisitoire –, contre le modèle diamant. À en croire les sénateurs auteurs du rapport, il est urgent de rééquilibrer la politique de science ouverte dans un sens plus favorable aux éditeurs privés, dans le respect de la bibliodiversité et de la liberté académique.

Le raisonnement développé présente le modèle diamant comme une menace potentielle, fruit d'une démarche militante, dans un contexte où la politique de science ouverte serait gérée de manière monopolistique par le ministère de l'Enseignement supérieur, au détriment du ministère de la Culture. Dans leur rapport, les parlementaires s'inquiètent de l'hégémonie future du modèle diamant, assimilée à une « étatisation pure et simple de l'édition du savoir » [6].

Cette hégémonie prophétisée semble à l'heure actuelle plutôt lointaine. Si certaines disciplines, à l'instar des mathématiques, plébiscitent le modèle diamant, d'autres l'ignorent complètement. La chimie, pour ne citer que cette discipline, n'a quasiment pas d'offre éditoriale en la matière, à l'exception, par exemple, de deux revues portées par l'Institut Beilstein. À l'échelle française, comme le révèle le baromètre français pour la Science ouverte [7], (même si ce chiffre est sans doute sous-estimé), seuls 9% des articles ouverts par les éditeurs relèvent du modèle diamant, contre 68% via le modèle de l'auteur-payeur, qui comprend les revues dites « hybrides » (revues accessibles sur abonnement mais les articles peuvent être rendus publics au compte-goutte moyennant frais de publication).

Actuellement, une poignée de groupes éditoriaux internationaux (dont Elsevier, Springer-Nature, Wiley, etc.) contrôlent la publication scientifique en vendant des bouquets d'abonnements extrêmement coûteux ou en proposant aux chercheurs le paiement de frais baptisés APC [8], en contrepartie de l'ouverture des articles. La facture est salée : il faut compter en moyenne 1 881 euros [9] pour basculer un article en accès libre. Un montant ajusté à la hausse ou à la baisse en fonction du prestige associé à la revue. Chez *Nature*, le tarif grimpe à 9 500 euros ! Comme le résumait récemment Karim Ramdani, directeur de recherche Inria, à l'occasion

1. https://www.science-ouverte.cnrs.fr/actualite/le-cnrs-apporte-son-soutien-au-plan-daction-pour-lacces-ouvert-diamant/
2. https://www.coalition-s.org/
3. https://www.scienceeurope.org/
4. https://www.operas-eu.org/
5. http://www.senat.fr/notice-rapport/2021/r21-573-notice.html
6. Idem, p. 60.
7. https://barometredelascienceouverte.esr.gouv.fr/publications/editeurs?id=publishers.type-ouverture
8. article processing charges.
9. https://www.couperin.org/negociations/depenses-apc/recueil-et-analyse-des-apc-2015-2017

d'un séminaire du laboratoire Jacques-Louis Lions le 9 juin : « Ce que nous facturent les éditeurs, c'est la marque ». Comme l'indique une récente étude publiée dans *Scientometrics* [10], ce sont justement les revues hybrides qui tendent à facturer les frais de publication les plus élevés (plus de 1000 dollars en moyenne par rapport aux revues nativement en accès ouvert). Dans un tel scénario, les éditeurs tendent à maximiser leurs profits puisque les institutions les rémunèrent deux fois : payer pour lire et payer pour publier !

Face aux stratégies commerciales des grands éditeurs, désormais bien ancrées, la communauté académique tente d'organiser la riposte à travers la promotion croissante de l'accès diamant, perçu comme un levier de réappropriation des résultats de la recherche. Illustration frappante de mouvement, le divorce en 2019 entre Elsevier et les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, transférés l'année suivante vers la plateforme du Centre Mersenne [11]. Autre point d'achoppement soulevé par le rapport : le dépôt des manuscrits dans une archive ouverte affranchi de tout embargo (voir encadré). Cette possibilité, défendue par le Plan S en tant que bouclier contre la cession des droits d'auteur aux éditeurs serait, selon le rapport, une mesure « idéaliste » susceptible de porter atteinte à la liberté académique. Pis, toute obligation de déposer sa production scientifique dans une archive ouverte friserait l'illégalité, cette injonction étant dépourvue de base légale. Si cet aspect mérite en effet d'être pris en compte, il eut été souhaitable d'analyser, en contrepoint, les causes des tensions actuelles. Consacré par la loi pour une république numérique de 2016, le droit (et non l'obligation) de déposer ses manuscrits dans une archive ouverte est intervenu dans un contexte d'explosion des coûts d'abonnement et d'accès entravé aux revues scientifiques. Dans ce paysage, le modèle diamant tente de se frayer un chemin. Comme l'indique le rapport, il est assimilable à « une prise en charge publique du coût des publications » [12]. Néanmoins, il vise la publication sans discrimination tarifaire : tous les laboratoires, les mieux dotés comme les moins bien lotis, sont en capacité de soumettre leurs articles dans une revue de type diamant, ce qui n'est pas le cas pour les coûteuses revues avec frais de publication. En un mot, le modèle diamant « supprime certains des obstacles financiers auxquels les chercheurs sont confrontés pour publier » [13].

Le rapport, pourtant rédigé à l'issue d'auditions menées auprès d'un panel représentatif d'acteurs, adopte un parti pris « consternant », selon Frédéric Hélein, professeur à l'université Paris Cité et ancien directeur du RNBM [14]. Dans un post de blog [15] remarqué publié courant mars, le mathématicien pointe l'engagement passé de l'une des co-signataires du rapport, Laure Darcos, qui a exercé des fonctions exécutives chez Hachette et au Syndicat national de l'édition.

L'accent mis sur le sort et la spécificité des éditeurs privés en sciences humaines et sociales (SHS), en opposition avec les sciences dures, – approche qui peut en effet se justifier –, est néanmoins entaché de confusion. En voulant protéger les « petits » éditeurs français en SHS, le rapport prend le risque de tirer des conclusions hâtives pour l'ensemble de l'édition scientifique. Les articles en mathématiques seraient ainsi victimes de leur « obsolescence rapide », contrairement aux productions en sciences sociales. Mais c'est oublier un peu vite l'intemporalité des « Éléments d'Euclide, rédigés il y a 2300 ans » [16], ironise Frédéric Helein.

Enfin, le document semble également refléter les tensions institutionnelles à l'œuvre, puisqu'il plaide pour une plus grande implication du ministère de la Culture et des acteurs privés, dont les positions ne seraient pas assez prises en compte dans les politiques de science ouverte.

La place du modèle diamant dans le paysage actuel de l'édition scientifique promet d'être une source intarissable de débat. En témoignent la multiplication récente d'initiatives parfois contradictoires. Quelques jours après la parution du rapport parlementaire, le médiateur du livre a fait connaître sa position sur la science ouverte. Saisi par le syndicat national de l'édition, il souligne dans son projet d'avis du 11 mars [17] que les autres États, à la différence de la France, ne s'engageaient pas « aussi clai-

10. Zhang, L. and Wei, Y. and Huang, Y. and Sivertsen, G., Should open access lead to closed research ? The trends towards paying to perform research, Scientometrics, 2022, May, 10.1007/s11192-022-04407-5.
11. https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/
12. http://www.senat.fr/notice-rapport/2021/r21-573-notice.html, p. 7.
13. https://www.ouvrirlascience.fr/publication-dune-etude-sur-les-revues-diamant
14. Réseau national des bibliothèques de mathématiques.
15. https://frederichelein.wordpress.com/
16. Idem.
17. http://mediateurdulivre.fr/wp-content/uploads/2022/03/Le-m%C3%A9diateur-du-livre-Projet-d-avis-sur-l-edition-scientifique-11-03-2022-Vdef_compressed.pdf

rement » en faveur du modèle diamant. Son avis définitif sera rendu à l'automne. Contraste saisissant, les promoteurs du modèle diamant, en sciences humaines comme en sciences dures, se donnent rendez-vous les 13 et 28 juin, à Lyon et à Paris, à l'occasion de journées portant sur les nouveaux modèles d'édition scientifique. Autant de velléités reflétant le sujet en suspens : jusqu'où la puissance publique pourra-t-elle réguler l'écosystème de la publication scientifique ?

Quelques éléments de contexte

Le mouvement d'ouverture des publications, en lien avec le développement du numérique et des nouveaux moyens technologiques, a fait émerger plusieurs modèles économiques. Traditionnellement, les bibliothèques souscrivent des abonnements aux revues : c'est le principe du lecteur-payeur. Or, ce modèle est secoué par la montée en puissance de la publication en accès ouvert portée par les éditeurs et connue sous le nom de « voie dorée ». À partir du début des années 2000, deux tendances distinctes se sont dégagées. L'une consiste à rentabiliser l'activité de publication à travers l'introduction de frais de publication (APC en anglais pour article processing charges) en contrepartie de l'ouverture des articles. Sous l'impulsion des éditeurs commerciaux, le modèle gold est ainsi devenu synonyme de modèle « auteur-payeur », adossé à des frais de publication importants sans lien avec le coût réel de l'ouverture d'un article. Cette monétisation est à l'origine d'un mouvement de protestation, « the Cost of Knowledge [a] », impulsé par le mathématicien Tim Gowers en 2012. Afin de marquer le contraste avec le modèle auteur-payeur, la mathématicienne Marie Farge [b] a forgé le terme « diamant ». Cette voie « diamant » se caractérise par la gratuité pour les auteurs comme pour les lecteurs. En revanche, les plateformes sont parfois amenées à facturer des frais de maintenance et de maquettage aux porteurs des revues, à l'instar du Centre Mersenne, financé par le CNRS, le MESRI et l'université de Grenoble Alpes. Le coût de revient par article est sans commune mesure avec les APC des éditeurs commerciaux.

Outre la voie diamant, la voie verte de publication (green) occupe une place grandissante. On a ainsi assisté à la montée en puissance de plateformes d'auto-archivage, dans lesquelles les chercheurs déposent eux-mêmes leurs pré-prints ou post-prints. En 2016, l'article 30 de la Loi pour une République Numérique a facilité ce droit au dépôt en archive ouverte. En France, les plateformes Hal et ArXiv sont les plus communément utilisées.

a. « The Cost of Knowledge », Wikipédia. 11 octobre 2021 [En ligne], disponible sur : `https://fr.wikipedia.org/w/index.php?`, (consulté le 20 mai 2022).

b. « Marie Farge », Wikipédia. 23 décembre 2020 [En ligne], Disponible sur : `https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Marie_Farge&oldid=177950221`, (consulté le 20 mai 2022).

Isabelle Famechon
Responsable de la Bibliothèque de mathématiques de l'Institut Camille Jordan, Service commun de documentation de l'université Claude Bernard Lyon 1.

Marie-Emilia Herbet
Adjointe département Services à la recherche, Service commun de documentation de l'université Claude Bernard Lyon 1.

Les aventures d'un mathématicien
Stanislaw Ulam
Cassini, 2021. 400 p. ISBN : 978-2-84225-226-7

Stanislaw Ulam est mondialement connu pour sa participation comme mathématicien à la construction de la bombe thermonucléaire américaine. L'ouvrage en question est une traduction française de son autobiographie, dont la première édition remonte à 1976. Par rapport à celle-ci, cette édition est amendée par deux ajouts : un texte de son épouse (française), Françoise Ulam, et des précisions au sujet du travail d'Ulam à Los Alamos. Ces dernières informations étaient classées secret défense auparavant. Cette autobiographie est essentiellement scientifique. Et sans trop de surprise, Ulam retrace sa vie de façon chronologique. Chacun des chapitres a sa propre ambiance et sa richesse.
Ulam est né en 1909 à Lwów (Lemberg à l'époque, royaume de Galicie et de Lodomérie, inclus dans l'empire austro-hongrois) dans une famille juive aisée. Son père était avocat, son grand-père paternel architecte, son grand-père maternel industriel. Ulam décrit l'apparition dans son enfance de son goût pour les mathématiques. L'astronomie a sans doute été un catalyseur de cette prédilection. C'est en effet une énigme astronomique, celle du raccourcissement de la période de la comète de Encke, et une loi empirique, celle de Titus-Bode, qui l'ont d'abord marqué. D'une façon générale, les faits scientifiques surprenants ont éveillé son intérêt pour les mathématiques. La présence d'un livre d'algèbre dans la bibliothèque familiale n'y est toutefois pas pour rien non plus. Bref, Ulam poursuit des études de mathématiques à Lwów. Cette ville polonaise était à cette époque le siège d'une école mathématique absolument remarquable, à laquelle Banach et Nikodym, entre autres, appartenaient. Ulam rejoint rapidement cette intelligentsia mathématique. Il décrit une ambiance faite de discussions sans fin dans des cafés, de travail collaboratif et de thèmes partagés (beaucoup de fondement des mathématiques, logique, théorie des ensembles, topologie, analyse fonctionnelle).
Docteur en 1933, il voyage en Europe et aux États-Unis. Il rencontre à peu près toutes les stars mathématiques de l'époque, de Cartan (Élie) à von Neumann, en passant par Birkhoff, Tarski, Noether ou Hopf, ou encore Gödel et Einstein à Princeton. Ulam espère trouver un poste aux États-Unis, puisqu'il n'y avait essentiellement pas de postes en Pologne, et si possible entre Harvard et Princeton, parce qu'il le vaut bien. Mais la crise de 1929 est encore très présente et les postes universitaires aux États-Unis sont très rares. Ulam doit quitter la côte est pour devenir professeur assistant à l'université du Wisconsin. Heureusement, celle-ci se révèle bien plus dynamique intellectuellement qu'Ulam ne l'imaginait.
En 1943, il rejoint le projet Manhattan à Los Alamos et participe à la construction de la bombe A (à fission). Il rapporte dans ce livre ses rencontres avec une bonne partie des têtes pensantes de la physique de cette époque, en particulier Enrico Fermi dont il décrit avec finesse le style scientifique (et l'humour). On s'étonnera sans doute qu'un spécialiste des fondements des mathématiques comme Ulam pût servir à construire une bombe nucléaire. Ulam, dans les pages les plus intéressantes du livre, résout ce paradoxe en deux temps. D'une part, il explique que comprendre une réaction nucléaire consiste à se familiariser de façon très poussée avec les constantes physiques, et percevoir, presque sans calcul, les ordres de grandeur et la dynamique de la physique. D'autre part, Ulam explique qu'il ne voit pas vraiment de différence de nature entre la pensée mathématique et la pensée physique, qui est tout autant une suite de raisonnements logiques. Après 1945, Ulam retourne dans

son université, mais revient vite (en 1946) à Los Alamos pour participer à la bombe H (à fusion). Les problèmes mathématiques soulevés sont analytiquement insolvables, et Ulam propose la fameuse méthode dite de *Monte Carlo*, qui consiste à effectuer des simulations d'un modèle probabiliste. Dans son cas, il s'agit en particulier du parcours aléatoire des neutrons, ainsi que de leur absorption ou non par les noyaux.

Tout au long du livre, Ulam explique ce qu'est selon lui une réflexion mathématique ou physique, sa façon à lui d'appréhender les problèmes. Il prolonge parfois ces explications de considérations neuro-psychologiques souvent intéressantes, par exemple les processus de formation de l'habitude intellectuelle ou l'importance de la mémoire. Le dernier chapitre rédigé par Ulam, intitulé *Réflexions sur les mathématiques et la science*, est un peu décevant, il faut bien le dire, en comparaison avec les remarques plus techniques mais bien plus intéressantes dans le cœur du texte. Quand Ulam parle d'autres scientifiques, il en présente toujours deux facettes. D'une part, il décrit leurs traits de caractère : on apprendra par exemple qu'Edward Teller était obsédé par la réussite, que George Gamow était un égocentrique sympathique, ou encore qu'Enrico Fermi était un irréductible pessimiste. D'autre part, il fait souvent le bilan de leurs qualités et défauts de scientifiques : von Neumann était tellement fort techniquement qu'il se précipitait sur toute question mathématique qu'il pouvait résoudre et abandonnait rapidement les problèmes sur lesquels il butait, tandis que Fermi était trop *rationnel* pour créer des choses vraiment nouvelles.

Ulam a été un acteur de premier plan de l'avènement des ordinateurs, y compris leur usage en mathématiques. Il explique en particulier le fameux phénomène de Fermi-Pasta-Ulam, un système non linéaire de (64) ressorts dont la résolution numérique par le supercalculateur MANIAC I a présenté des cyclicités absolument inattendues. Ce phénomène est maintenant appelé problème de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou. Le dernier nom est le patronyme de Mary Tsingou, qui avait programmé le MANIAC, ce qui était une gageure à l'époque et fait d'elle une pionnière de l'informatique (voir l'article de T. Dauxois de 2008 dans *Physics today*). Notons qu'Ulam ne la mentionne aucunement. Plus généralement, les lectrices et les lecteurs s'agaceront sans aucun doute à divers endroits du livre du sexisme plus ou moins larvé (pas du tout larvé chez von Neumann !) de ces hommes qui, grâce à leurs épouses dévouées, n'avaient pas à penser à grand-chose à part leurs postes et leurs mathématiques. Autre source d'agacement : les destructions instantanées de Hiroshima et Nagasaki et leurs 200 000 civils tués ne sont jamais mentionnés par Ulam. Quant à son travail crucial pour la réalisation de la bombe H, une bombe qui peut effacer de la surface du globe la métropole du grand Paris en une seconde, Ulam n'y voit pas vraiment de chat à fouetter : il ne faisait que son travail de scientifique. Quand on lit ensuite que le travail en question consistait à estimer comment une bombe à fission permet la compression radiative d'un stock de deutérium liquide, afin que celui-ci fusionne suffisamment longtemps pour que la bombe H fasse son office macabre, on a du mal à ne pas être outré par cette déresponsabilisation estampillée par le noble sceau de la Science Pure.

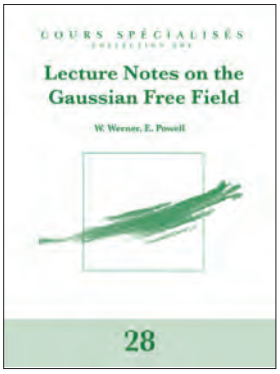
Cela étant dit, le livre est truffé d'anecdotes amusantes, passionnantes ou simplement instructives, des blagues juives aux arcanes politiques des missiles intercontinentaux en passant par les soirées en boîtes de nuit parce que von Neumann venait de divorcer. Certaines de ces anecdotes nous paraissent tellement lointaines qu'elles en deviennent surréalistes. Par exemple, Ulam raconte qu'il n'imaginait pas en 1950 que l'URSS envahirait la RFA, parce que l'Allemagne aurait été alors unifiée (avec la RDA), et aurait alors pris le contrôle du bloc communiste [a]. Un autre exemple : saviez-vous que dans les années 1930, trois mathématiciens seulement décidaient des postes dans les universités américaines ? Une dernière anecdote : quand Ulam se réveille d'une opération délicate au cerveau pour une tumeur, le chirurgien lui demande ce que vaut la racine carrée de 20. Ulam répond du tac-au-tac : « environ 4,4 ». Le chirurgien ne répond pas, alors Ulam panique : « c'est pas ça ? ». Le chirurgien éclate de rire et répond : « j'en sais rien ! ».

En conclusion, cet ouvrage est très intéressant, historiquement, sociologiquement, scientifiquement, et les réflexions personnelles d'Ulam sur la science et les scientifiques sont précieuses. Le livre est très bien édité, avec mention spéciale pour l'index, et pour autant que je puisse en juger, très bien traduit.

Damien Gayet
Université Grenoble Alpes

a. C'est un intrigant thème d'histoire-fiction, comme dans *Le Maître du haut château* de Philip K. Dick, où l'Allemagne a gagné la guerre et les EU sont sous domination nazie et japonaise.

Cours spécialisés - nouveauté



Vol. 28
Lecture Notes on the Gaussian Free Field
W. Werner, E. Powell

ISBN 978-2-85629-952-4
2021 - 144 pages - Hardcover. 17 x 24
Public: 43 € - Members: 30 €

The Gaussian Free Field (GFF) in the continuum appears to be the natural generalisation of Brownian motion, when one replaces time by a multidimensional continuous parameter. While Brownian motion can be viewed as the most natural random real-valued function defined on R_+ with B(0)=0, the GFF in a domain D of R^d for $d \ge 2$ is a natural random real-valued generalised function defined on D with zero boundary conditions on D. In particular, it is not a random continuous function.
The goal of these lecture notes is to describe some aspects of the continuum GFF and of its discrete counterpart defined on lattices, with the aim of providing a gentle self-contained introduction to some recent developments on this topic, such as the relation between the continuum GFF, Brownian loop-soups and the Conformal Loop Ensembles CLE_4.This is an updated and expanded version of the notes written by the first author (WW) for graduate courses at ETH Zürich in 2014 and 2018. It has benefited from the comments and corrections of students, as well as of a referee; we thank them all very much. The exercises that are interspersed in the first half of these notes mostly originate from the exercise sheets prepared by the second author (EP) for this course in 2018.

Société Mathématique de France

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : https://smf.emath.fr
*frais de port non compris

Journée Aléatoire 2022

Commune à la SFdS, la SMAI et la SMF

29 septembre 2022 — Institut Henri Poincaré, Paris

Inscription gratuite, mais obligatoire
https://journeealea.sciencesconf.org/

Exposés

Pierre Calka
Hugo Duminil-Copin
Aurélien Garivier
Adeline Leclercq-Samson
Cristina Toninelli
Amandine Véber

Comité d'Organisation
Gaëlle Chagny
Marianne Clausel
Clément Pellegrini
Mathieu Ribatet
Sandro Vaienti

SFdS — SMAI société de mathématiques appliquées et industrielles — SMF Société Mathématique de France — ihp Institut Henri Poincaré

Société Mathématique de France

CIRM-SMF research school

Spectral Theory, Control and Inverse Problems

Scientific committee:
Karine Beauchard (ENS Rennes)
Jean-Marc Bouclet (Université de Toulouse)
Enrique Fernández-Cara (University of Sevilla)
Jean-Pierre Raymond (Université de Toulouse)
Nicolas Raymond (Université d'Angers)

Organizing committee:
Lucie Baudouin (CNRS)
Franck Boyer (Université de Toulouse)
Jérémi Dardé (Université de Toulouse)
Sylvain Ervedoza (CNRS)
Julien Royer (Université de Toulouse)

Mini-Courses

Vincent Bruneau
Université de Bordeaux

Sonia Fliss
Ensta Paristech

Matthieu Léautaud
Université Paris Sud

Lauri Oksanen
University of Helsinki

21-25 November 2022

CIRM
Luminy Campus - Marseille

Information and registration:
https://conferences.cirm-math.fr/2740.html

Société Mathématique de France

Instructions aux autrices et auteurs

Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérentes et adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous celles et ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'une mathématicienne ou d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à une grande mathématicienne ou un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérente et adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`https://smf.emath.fr/les-publications/la-gazette`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les autrices et les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *`gztarticle`* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve Print – 733 rue St. Léonard 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.