

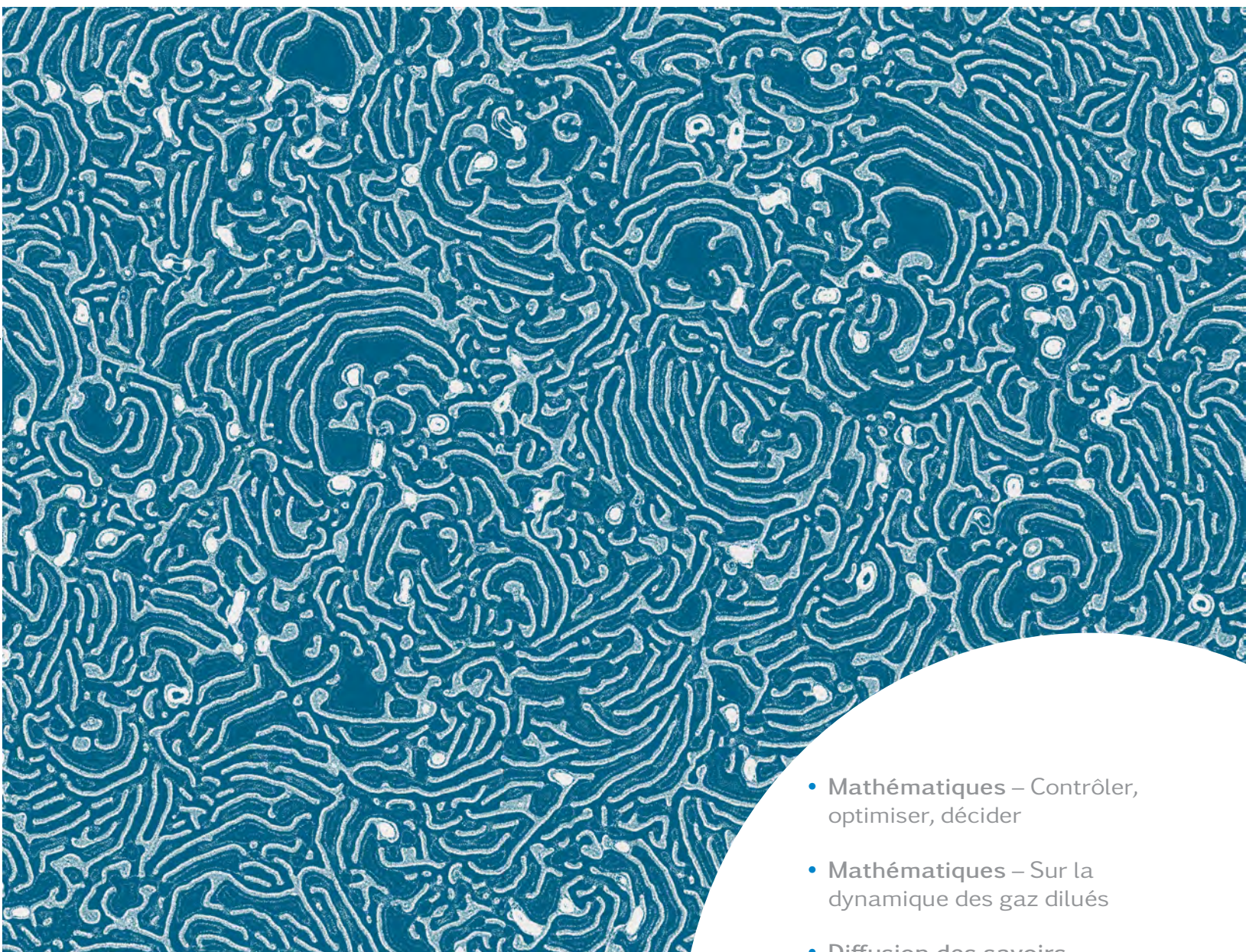
OCTOBRE 2022 – N° 174

# la Gazette

de la Société Mathématique de France

OCTOBRE 2022

GAZETTE DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE



- **Mathématiques** – Contrôler, optimiser, décider
- **Mathématiques** – Sur la dynamique des gaz dilués
- **Diffusion des savoirs** – Utilisation des assistants de preuves pour l'enseignement en L1
- **Information** – L'école des *Cigales*



N° 174



## Comité de rédaction

### Rédacteur en chef

#### Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble  
damien.gayet@univ-grenoble-alpes.fr

### Rédacteurs

#### Mikael DE LA SALLE

Université de Lyon  
delasalle@math.univ-lyon1.fr

#### Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy  
eckes@math.univ-lyon1.fr

#### Magali RIBOT

Université d'Orléans  
magali.ribot-barre@univ-orleans.fr

#### Charlotte HARDOUIN

Université de Toulouse  
charlotte.hardouin@math.univ-toulouse.fr

#### Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris  
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

#### Mylene MAÏDA

Université de Lille  
mylene.maida@univ-lille.fr

#### Gabriel RIVIÈRE

Université de Nantes  
Gabriel.Riviere@univ-nantes.fr

### Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ  
Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris cedex 05  
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96  
gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Fabien DURAND

ISSN : 2825-8231



À propos de la couverture. L'image a été générée par un automate cellulaire à voisinages multiples (ACVM, MNCA en anglais). La plupart des automates cellulaires utilisent comme règle de mise à jour d'une cellule un unique voisinage de cellules alentours. Les automates de type ACVM utilisent des règles plus complexes, prenant en compte plusieurs types de voisinages différents pour déterminer la valeur à la génération suivante. Ces voisinages sont en général composés de formes circulaires ou annulaires. Les ACVM produisent ce type de formes complexes. Plus d'informations et d'exemples : <https://softologyblog.wordpress.com/2018/03/09/multiple-neighborhoods-cellular-automata/>, <https://softologyblog.wordpress.com/2018/03/31/more-explorations-with-multiple-neighborhood-cellular-automata/>, <https://softologyblog.wordpress.com/category/cellular-automata-2/> (crédit : Jason RAMPE).

N° 174

## Éditorial

Si l'on m'avait demandé quand j'étais en collègue à quoi servaient les mathématiques, j'aurais répondu sans hésiter : « à faire des jeux vidéos ». Moi-même, sur mon Amstrad aux puissants 128 ko de mémoire vive, j'étais l'humble créateur d'un jeu qui fit fureur dans ma famille proche (enfin plus exactement mon père), *Le Labyrinthe Infernal*, dont le réalisme saisissant (des murs et des portes réalisés en élégants quatuors de segments de droites) tenait à ma maîtrise du passage de la 3D à la 2D en perspective. Et puis, avec l'âge et les responsabilités, j'ai appris quelques réponses grandioses à la fameuse question de l'utilité des mathématiques : le GPS pour ne plus conduire avec une carte sur le volant, les cartes bancaires pour acheter des chaussettes en toute tranquillité sur internet, les publicités personnalisées ou encore la reconnaissance faciale des manifestants.

En lisant les deux articles mathématiques de cette *Gazette*, j'ai réalisé que je n'avais pas bien saisi qu'il existe différentes façons dont les mathématiques s'appliquent au réel. La perspective du *Labyrinthe Infernal* n'en n'était bien sûr qu'un mode très élémentaire, si l'on accorde à un écran d'ordinateur le qualificatif de réel. Le premier article présente tout un univers d'un certain type d'applications, le *contrôle*. En substance, il s'agit de trouver un forçage d'une équation différentielle modélisant un système physique souvent capricieux, de sorte que la solution à l'équation forcée réalise une situation désirée en un temps déterminé. L'article présente de nombreux exemples, en commençant par une fusée ayant pour noble but de se poser sur la Lune en un temps raisonnable, et surtout avec une vitesse finale nulle. En quelques pages, l'article permet de saisir toute l'étendue profondément mathématique de ce type d'application qu'est le contrôle.

Le second article de mathématiques concerne un tout autre type d'application des mathématiques au réel : les lois physiques elles-mêmes. Ce texte relate une avancée récente dans le sixième problème de Hilbert : démontrer que l'équation de Boltzmann, qui se base sur une réalité continue et statistique des gaz, peut être déduite d'un modèle mécanique élémentaire de sphères dures interagissant brièvement entre elles, comme sont censés le faire les atomes d'un gaz. Il s'agit donc ici de faire le pont mathématique entre deux échelles de conceptions de la matière. On verra en particulier

naître mathématiquement la fameuse irréversibilité, une réalité thermodynamique qui causa tant de torts à Boltzmann, puisque son système était censé être basé sur la très réversible mécanique du solide.

Le Raconte-moi, quant à lui, se situe dans une tradition plus classique des applications des mathématiques au réel : comprendre l'évolution d'un système dont on connaît la loi. Le texte est en effet consacré aux *automates cellulaires*, un processus, déterministe ou non, dont la loi d'évolution est particulièrement simple. L'étrangeté et la beauté de ces petits objets qui ne paient pas de mine tient à ce qu'ils génèrent des structures souvent inattendues à grande échelle. La figure 6, par exemple, illuminera la journée des fans d'invasion extraterrestre en milieu montagneux. Modélisant des phénomènes physiques comme un feu de forêt, ces êtres mathématiques ont leur vie conceptuelle propre entre dynamique, théorie des nombres et probabilités. On y croisera une classification informelle des automates sujette à controverse, une importante *règle 184*, et une *classe 1* dont la simplicité confondante recouvre en réalité une part d'indécidabilité. Quant à l'automate de *percolation bootstrap*, qui, lui, est probabiliste mais tout aussi simple que la classe 1, on découvrira qu'il recèle en son sein la jolie constante  $\pi^2/18$ .

Automatisme toujours, un mini-dossier présente les audaces pédagogiques de collègues autour des assistants de preuve. Ces programmes peuvent-ils aider les étudiantes et étudiants à saisir la substantifique moelle de la démonstration? Vous serez sans doute surpris de savoir qu'en examen, on peut demander à des premières années de faire tourner un assistant de preuve pour démontrer qu'une fonction uniformément continue transforme une suite de Cauchy en une autre.

Par un hasard qui n'en est pas vraiment un, étant donnée la quasi disparition des femmes de rang A en section 25, trois textes concernent les femmes en mathématiques. D'abord, une synthèse personnelle et dynamique de la dorénavant célèbre *Journée Parité* décrit les conférences de cette année. À votre avis, en quelle année a été admise à l'IUF la première femme lauréate mathématicienne? Les mathématiciennes vont-elles profiter du repyramidage en cours? Quel est le pourcentage accablant de femmes parmi les scientifiques représentés dans les dessins animés à destination des enfants? Deux mini-écoles de mathématiques réservées aux jeunes filles ont été présentées. L'une d'entre elles, les *Cigales*, est le sujet d'un second article consacré à la parité. La raison de la non-mixité de ce stage est très bien expliquée et très convaincante, et la description des activités qui enthousiasment les lycéennes présentes est particulièrement réjouissante et galvanisante. D'ailleurs, l'autrice appelle à la multiplication nationale de ces stages, alors engageons-nous! Un court texte présente enfin une troisième initiative portée vers la parité, les *Lectures Sophie Kowaleski* : deux mini-cours donnés par

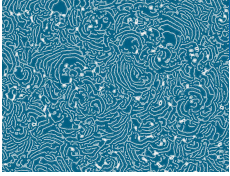
deux mathématiciennes, ainsi qu'une conférence de sciences sociales autour de la place des femmes en mathématiques.

Quand on sait que la France a produit coup sur coup deux films sur la vie du couturier Saint Laurent et toujours aucun sur celle de Grothendieck, on pourrait penser que le cinéma est un milieu de béotiens scientifiques endimanchés. La sortie chez Gallimard du fameux *Récoltes et Semailles* et son succès éditorial surprenant pourrait changer la donne et, espérons-le, éviter un troisième biopic sur Saint Laurent au profit de Grothendieck. Nous publions dans ce numéro une recension sans concession et précieuse de cette première édition officielle. L'auteur rappelle les éléments biographiques du mathématicien apatride, mais également les mathématiques qu'il a développées, les éléments non scientifiques de l'ouvrage ou encore ses outrances à l'encontre de ses descendants mathématiques.

Ceci est mon dernier édito de la *Gazette*, après quatre ans de rédaction-en-chef et huit ans, au total, de comité éditorial. J'ai eu un très grand plaisir à faire ce travail pour au moins trois raisons, et une sous-raison. D'abord pour le travail collectif, à la fois avec le comité et les autrices et auteurs, mais également avec Claire Ropartz, à qui la *Gazette* doit énormément. Travailler ensemble pour produire un bel objet, sans l'angoisse de l'échec toujours présente dans une collaboration scientifique, est une petite oasis dans notre monde cruel. Ensuite, fournir à chaque saison une belle *Gazette* est à la fois fort stressant et parfaitement gratifiant. La sous-raison, c'est que j'ai adoré m'occuper de la plupart des couvertures. Le processus est le suivant : trouver un thème de la *Gazette* potentiellement riche en belles images, en chercher une dans le texte ou sur internet ou, s'il n'y a rien, interroger les spécialistes pour savoir s'il serait possible d'en créer une ; obtenir l'image, l'améliorer, faire voter l'équipe de la *Gazette*. La troisième raison concerne les moments de diplomatie, avec les auteurs (il est arrivé que des textes ne soient pas publiés du tout), mais également au sein du comité, notamment au sujet des tribunes. Il faut par ailleurs le dire, nous avons parfois demandé à des auteurs de retirer certains termes, parfois par crainte d'un procès, parfois parce que les termes nous semblaient rompre avec ce que nous pensons être la politique de la *Gazette*, tout en ayant conscience que cette dernière proposition a quelque chose de tautologique. J'aimerais enfin exprimer un regret : j'aurais aimé que les articles fussent encore plus accessibles qu'ils ne le sont. C'est la critique numéro 1 qui est faite à la *Gazette*. Nous surestimons souvent la part des mathématiques que tout le monde est censé connaître et, en parallèle, nous sous-estimons la difficulté des arguments et des intuitions pour qui n'est pas familier avec les objets en question, même bien définis. Je tiens néanmoins à dire que les autrices et les auteurs ont toujours joué le jeu de la simplification. Cela étant dit, je suis heureux de passer la main à

Pauline Lafitte, qui est membre très active du comité depuis quatre ans et qui possède toutes les qualités pour mener la barque, que dis-je, le vaisseau, de la *Gazette*. Pour terminer, j'aimerais remercier toutes les autrices et tous les auteurs de la *Gazette* pour leur travail pour la communauté, le comité pour son énergie sans faille, les relectrices et relecteurs pour le temps qu'ils ont consacré à rendre plus accessibles et clairs les articles, Stéphane Seuret et Fabien Durand pour leur confiance et leur présence quand c'était nécessaire, Claire Ropartz donc, Denis Bitouzé qui s'occupe de la classe *Gazette* et qui est mis à contribution régulièrement, et enfin Frédérique Petit pour son lourd travail de parfaite relectrice.

Damien GAYET



N° 174

## Sommaire

<b>SMF</b>	<b>7</b>
Mot du président	7
<b>MATHÉMATIQUES</b>	<b>9</b>
Contrôler, optimiser, décider – <i>E. FRANCK et Y. PRIVAT</i>	9
Sur la dynamique des gaz dilués – <i>T. BODINEAU et al.</i>	22
<b>DIFFUSION DES SAVOIRS</b>	<b>35</b>
Utilisation des assistants de preuves pour l'enseignement en L1 – <i>M. KERJEAN et al.</i>	35
<b>PARITÉ</b>	<b>56</b>
Cinquième journée parité en mathématiques – <i>J.-R. CHAZOTTES</i>	56
<b>RACONTE-MOI</b>	<b>61</b>
...les automates cellulaires – <i>I. MARCOVICI</i>	61
<b>INFORMATION</b>	<b>69</b>
Vers une médiation en phase avec la société : réflexion autour des <i>Cigales</i> – <i>O. PARIS-ROMASKEVICH</i>	69
Une matrice angevine – <i>C. FERMANIAN KAMMERER et al.</i>	75
<b>CARNET</b>	<b>76</b>
Francis COMETS – <i>P. CATTIAUX, G. GIACOMIN et C. LÉONARD</i>	76
Jean-Jacques SANSUC – <i>A. BOUTET DE MONVEL, J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et L. MEREL</i>	78
<b>LIVRES</b>	<b>79</b>







N° 174

## Mot du président

Chères lectrices et lecteurs de la *Gazette*,

J'espère que votre rentrée s'est bien passée et que le repos estival a été propice à vos futurs projets même si les événements que nous vivons actuellement, après plus de deux années sous pression sanitaire, ne sont pas propices à la sérénité.

C'est désormais un peu une tradition, entre juin et septembre la SMF apporte son soutien aux doctorant.e.s et docteur.e.s agrégé.e.s dont la demande en détachement ou disponibilité est refusée. C'est une action très appréciée de la communauté, notamment par son efficacité puisque 100% de ces soutiens ont débouché sur des issues favorables aux demandeuses et demandeurs. Il est légitime de se demander si ces recours se seraient soldés par le même résultat sans l'aide de la SMF. En fait pour plusieurs cas, surtout cette année, il est évident que sans l'intervention de la SMF les résultats n'auraient pas été aussi bons, car non seulement des lettres de soutien ont été envoyées mais en raison de blocages la SMF a dû faire d'autres démarches auprès des rectorats et de l'inspection générale. Il est important de témoigner qu'à chaque fois les interlocutrices et interlocuteurs de ces services ont fait preuve de bienveillance et de diligence. À l'heure où j'écris ces lignes, mi-septembre, je viens d'intervenir pour une dernière situation qui, je l'espère, tournera en faveur du doctorant. Ce soutien tardif est dû au fait que le doctorant n'avait aucun retour formel de son rectorat. La raison principale étant que son université ne lui a fourni son contrat d'ATER signé que fin août. Il faut savoir que les rectorats veulent ce type de pièces avant de prendre des décisions. Soyez donc très vigilants à ce que celles et ceux que vous encadrez disposent rapidement de documents faisant foi de leur futur emploi s'ils doivent faire des démarches auprès de leurs rectorats.

Après un repos estival bien mérité pour la commission enseignement de la SMF et ses partenaires, ce collectif a de nouveau écrit un texte très intéressant sur la chute des effectifs scientifiques en terminale qui fait suite à la réforme du lycée. Le constat est inquiétant pour les filières scientifiques et technologiques du supérieur.

Cette année universitaire verra la SMF sur plusieurs fronts. Elle continuera

ses cycles de conférences et la gestion administrative et financière des stages MATHC2+. N'hésitez pas à en proposer. Un stage dans l'esprit de MATHC2+ et MATHS-EN-JEANS pour étudiantes de licence devrait avoir lieu en février au CIRM. Fin octobre se déroulera le concours bisannuel SMF Junior. N'hésitez pas à solliciter vos étudiantes et étudiants de Master pour y participer. La SMF propose d'organiser des sessions locales afin de mettre en valeur vos étudiantes et étudiants. Côté édition, l'ouverture vers la science ouverte continue, notamment avec le soutien de l'INSM. En 2023 nous ferons l'expérience du modèle Subscribe-to-Open (S2O) pour le *Bulletin de la SMF* : une fois un certain seuil d'abonnés payants atteint, le *Bulletin de la SMF* deviendra libre d'accès pour l'année. Si l'expérience est concluante pour l'équilibre financier de notre association alors nous envisagerons d'étendre et poursuivre cette initiative. Cela ne sera possible qu'avec votre soutien, celui de vos laboratoires et services communs de documentation.

Pour finir notez qu'en novembre auront lieu les assises des mathématiques du 14 au 16 novembre 2022 à la Maison de l'UNESCO à Paris. Elles sont organisées par l'Institut des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions du CNRS. Elles rendront compte d'une enquête d'envergure sur l'impact et le rôle des mathématiques dans la société hier, aujourd'hui et demain.

Bien à vous

Le 1<sup>er</sup> octobre 2022

Fabien DURAND, président de la SMF



# Contrôler, optimiser, décider

- E. FRANCK
- Y. PRIVAT

## 1. Introduction

Cet article vise à introduire, de façon non exhaustive, des domaines actifs de recherche se développant autour de la notion de *commande*, également appelée *contrôle* (en anglais *control*) dans les pays anglo-saxons. Un problème de commande peut se définir très généralement de la façon suivante : se donnant

- un système, en général dynamique, permettant de décrire l'évolution, en général temporelle et/ou spatiale, d'une quantité appelée « état »,
- un moyen d'action sur ce système, que l'on appelle « commande » ou « contrôle »,

on cherche à amener l'état du système d'un point A à un point B grâce à l'action de la commande et à savoir de prime abord si une telle action est possible. On parle alors de *contrôlabilité* du système lorsque c'est le cas.

Lorsque l'on cherche de surcroît à réaliser cette action de la meilleure façon possible, le terme « meilleur » s'entendant bien sûr ici à l'aune d'un ou de plusieurs critère(s) numérique(s) préalablement défini(s), on parle de problème de *commande optimale*. Mentionnons qu'à l'instar du présent article, les articles [2, 4, 7] introduisent de façon vulgarisée la théorie du contrôle ainsi que diverses applications.

À l'instar de l'optimisation, qui est un domaine millénaire, les auteurs de [7] situent la naissance de la théorie du contrôle à des temps très anciens et mentionnent qu'en 2000 avant J.C., les mésopotamiens cherchaient déjà à développer des techniques de contrôle afin de concevoir des systèmes d'irrigation.

En revanche, la théorie du contrôle s'est particulièrement développée en tant que discipline scientifique au XIX<sup>e</sup> siècle, autour de la révolution indus-

trielle. On pense par exemple à James Watt (1736-1819) qui inventa une machine à vapeur dont le mécanisme principal repose sur un système de billes tournant autour d'un axe. Lorsque la vitesse des boules augmente, une ou plusieurs valves s'ouvrent pour laisser la vapeur s'échapper, faisant baisser la pression à l'intérieur du dispositif et finalement diminuer la vitesse des boules. L'objectif était ici de maintenir la vitesse aussi proche que possible d'une constante. Il s'agit là d'un premier exemple de régulation<sup>1</sup>.

James Clerk Maxwell (1831-1879) a quant à lui proposé une théorie mathématique de la régulation dans son article [10] dédié à l'étude des machines à vapeur.

Les systèmes contrôlés mettant en jeu des systèmes d'équations différentielles ordinaires (abrégés par la suite en EDO) ou d'équations aux dérivées partielles (abrégés par la suite en EDP) ont fait l'objet d'une recherche très active depuis plus d'un siècle. Le contrôle ou moyen d'action sur le système prend alors la forme d'une fonction.

Penchons-nous plus précisément sur les systèmes d'EDO. Se donnant deux entiers non nuls  $n$  et  $m$ , un horizon de temps  $T > 0$  représentant la durée de l'expérience, une application  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  choisie suffisamment régulière pour que tout ce qui suit ait un sens et une donnée initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , un système contrôlé est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)) & t \in [0, T] \\ x_u(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Dans ce modèle, l'ensemble des contrôles  $u$  considérés est l'ensemble des applications mesurables et bornées sur  $[0, T]$ , à valeurs dans un certain sous-ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$  préalablement fixé.

L'objet de cet article n'étant pas l'étude des

1. Il s'agit d'une sous-discipline du contrôle visant à trouver des moyens d'actions sur un système afin de maintenir une certaine quantité physique proche d'une valeur désirée, appelée *consigne*.

phénomènes d'explosion des solutions des systèmes d'EDO, supposons également que pour tout contrôle  $u$ , le système (1) admet une unique solution  $x_u(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , absolument continue.

La solution  $x_u$  du système ci-dessus dépend du choix de contrôle  $u$  et est appelée « état du système ». Par conséquent, si on change la fonction  $u$  en  $v$ , on obtient une autre trajectoire  $t \mapsto x_v(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Plusieurs questions se posent alors naturellement.

- Étant donnée une cible  $x_{\text{cible}} \in \mathbb{R}^n$ , existe-t-il un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne le point initial  $x_0$  à la cible  $x_{\text{cible}}$  en temps  $T$ , autrement dit tel que

$$x_u(T) = x_{\text{cible}} ?$$

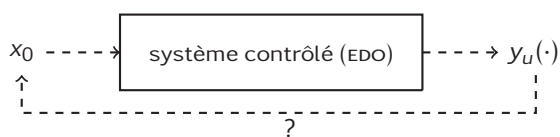
C'est le problème de *contrôlabilité exacte en temps  $T$* .

Une autre question naturelle est celle de la *contrôlabilité approchée en temps  $T$* , moins exigeante que la notion précédente et souvent pertinente lorsque l'on cherche à traiter des cas réels et pratiques : se donnant une marge  $\varepsilon > 0$  et  $x_{\text{cible}}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , existe-t-il un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne le point initial  $x_0$  à  $x_u(T)$  tel que  $\|x_u(T) - x_{\text{cible}}\| \leq \varepsilon$  ?

- Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant  $x_0$  à  $x_{\text{cible}}$ , et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle  $J(u)$  ?

C'est un problème de *contrôle optimal*.

- Si l'on connaît le contrôle  $u$  et une mesure donnée par une fonction  $y_u : t \mapsto \varphi(t, x_u(t), u(t))$  sur  $[0, T]$ , peut-on retrouver l'état du système  $x_u(\cdot)$ , autrement dit la donnée initiale  $x_0$  ? C'est la question de l'*observabilité* du système.

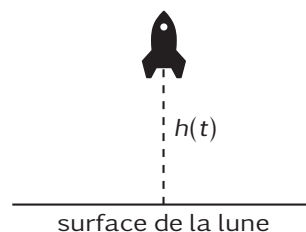


Nous n'évoquerons principalement par la suite que les deux premières questions mentionnées ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur souhaitant se documenter sur ces notions à la littérature du domaine, par exemple à [3].

De façon plus concrète, voici un exemple de système contrôlé, étudié en détails dans [8].

**Exemple 1.** On cherche à amener un vaisseau spatial à un alunissage en douceur sur la surface (lunaire), en utilisant le moins de carburant possible. Introduisons les notations :

- $h_\alpha(t)$  : hauteur du centre de gravité du vaisseau sur l'axe du mouvement à l'instant  $t$  ;
- $v_\alpha(t)$  : vitesse instantanée du vaisseau ( $v_\alpha = \dot{h}_\alpha$ ) ;
- $m_\alpha(t)$  : masse de l'engin spatial (qui varie en fonction de la consommation de carburant) ;
- $\alpha(t)$  : poussée à l'instant  $t$  ;
- $g \simeq 1.62 \text{ m.s}^{-2}$ , la constante de gravitation sur la lune.



Nous supposons que la poussée maximale qu'il est possible d'atteindre est limitée, par exemple  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$  p.p.  $t > 0$ . D'après les lois de Newton, on a

$$m_\alpha(t)\ddot{h}_\alpha(t) = -gm_\alpha(t) + k\mu\alpha(t),$$

le membre de droite correspondant à la différence entre la force gravitationnelle et la poussée de la fusée, où  $\mu$  désigne la vitesse relative des gaz d'échappement par rapport à l'engin spatial et  $k$  désigne le taux maximal de variation de la masse due à la combustion du combustible. Le système précédent est donc complété par l'équation

$$\dot{m}_\alpha(t) = -k\alpha(t).$$

L'objectif est de déterminer la loi de contrôle régissant la poussée <sup>3</sup> afin que l'engin puisse se poser sur la lune en toute sécurité. La question de la contrôlabilité exacte se ramène donc au problème

(contrôlabilité exacte)  
Existe-t-il un contrôle  $\alpha$  à valeurs dans  $[0, 1]$  tel que  $h_\alpha(T) = v_\alpha(T) = 0$  ?

Il est assez aisé de se convaincre ici, à l'aide de calculs explicites, que si le temps  $T$  est supposé assez grand, la réponse à la question ci-dessus est positive.

2. La fonctionnelle  $u \mapsto J(u)$  est un critère d'optimisation, on l'appelle le *coût*. Par exemple ce coût peut être égal au temps de parcours ; dans ce cas, on parle de problème de *temps minimal*.

3. Interprétée comme un contrôle.

Si l'on cherche à présent à réaliser un alunissage en douceur sur la surface (lunaire) en utilisant à présent le moins de carburant possible, on est conduit à déterminer la loi de contrôle régissant la poussée afin que l'engin puisse se poser sur la lune en toute sécurité, tout en maximisant la quantité de carburant restant, proportionnelle à  $m_\alpha(T)$  où  $T$  désigne la durée (non fixée donc) de cette opération. Autrement dit,  $T$  est le premier temps tel que  $h_\alpha(T) = v_\alpha(T) = 0$ . Remarquons que d'après les équations précédemment introduites, en supposant  $m_\alpha(0) > 0$  fixé, minimiser  $m_\alpha(T)$  revient à minimiser  $-\int_0^T \alpha(s) ds$ . Le problème s'écrit alors :

(contrôle optimal)  
Existe-t-il  $T > 0$  et un contrôle  $\alpha$  à valeurs dans  $[0, 1]$  tel que  $h_\alpha(T) = v_\alpha(T) = 0$  et maximisant la quantité  $\int_0^T \alpha(s) ds$  ?

La résolution des questions énumérées dans l'exemple ci-dessus est néanmoins ardue, notamment en raison de la non-linéarité du modèle considéré.

Dans ce qui suit, nous allons plutôt chercher dans un premier temps à mieux comprendre les notions de *contrôlabilité*, *observabilité* et *contrôle optimal* à partir de modèles très simples. Nous allons ainsi préciser ces concepts dans le cas simple, mais néanmoins riche où  $f$ , le second membre de l'EDO (1), est une fonction linéaire de la forme

$$f(t, x, u) = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

## 2. Contrôlabilité

### 2.1 – Dynamiques linéaires

Considérons pour simplifier  $x_u$ , solution du système

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) & t \in [0, T] \\ x_u(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une fonction de contrôle. En général, il est raisonnable dans bon nombre d'applications réelles de ne pas supposer  $u$  continue. Typiquement,  $u$  pourrait être une fonction discontinue prenant uniquement

deux valeurs (0 ou 1 par exemple), modélisant ainsi la mise en action d'un interrupteur. Si l'on suppose que  $u$  appartient à l'espace des fonctions intégrables sur  $[0, T]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , on peut montrer à l'aide de la formule de représentation de Duhamel<sup>4</sup> que la solution  $x_u$  est unique et absolument continue sur  $[0, T]$ , l'équation principale de (2) s'entendant alors à un ensemble négligeable près.

Le système (2) est contrôlable en temps  $T$  à partir de  $x_0$  si, quelle que soit la cible  $x_{\text{cible}}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe une fonction de contrôle intégrable  $u$  telle que

$$x_u(T) = x_{\text{cible}}.$$

On peut alors montrer<sup>5</sup> que cette propriété est équivalente à la surjectivité de l'application

$$L^1(0, T; \mathbb{R}^m) \ni u \mapsto \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds. \quad (3)$$

Un résultat remarquable, dû à Kalman, permet de caractériser la surjectivité de cette application à partir d'une condition purement algébrique ne faisant intervenir que les matrices  $A$  et  $B$ .



**Rudolf E. Kalman** était un mathématicien, automaticien américain d'origine hongroise né en 1930 à Budapest et décédé en 2016. Ingénieur en électrotechnique de formation, une de ses découvertes les plus célèbres est le filtre de Kalman, une technique mathématique de filtrage très utilisée en automatique pour extraire un signal à partir de mesures bruitées.

Il établit que le système (2) est (exactement) contrôlable pour tout  $T > 0$  et pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si et seulement si la matrice

$$\text{Kal} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{M}_{n,nm}(\mathbb{R}).$$

obtenue par concaténation des matrices  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  est de rang maximal, i.e.  $\text{rg}(\text{Kal}) = n$ .

Ce résultat s'obtient aisément à partir du fait suivant, qui est lui, non trivial : l'ensemble dit *atteignable*  $\mathcal{A}_T$  des images  $x_u(T)$  lorsque  $u$  varie parmi les fonctions intégrables, coïncide en réalité avec

$$\mathcal{E}(A, B) := \text{vect}\{A^k Bz, k = 0, \dots, n-1, z \in \mathbb{R}^m\}.$$

Pour démontrer que le critère de Kalman est une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité, on peut par exemple suivre les étapes suivantes, dont les détails sont fournis par exemple dans [9] :

4. Plus précisément, on a  $x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds$  quel que soit  $t \in [0, T]$ .

5. En effet, en posant  $\hat{x} = x_{\text{cible}} - e^{TA}x_0$ , que la propriété de contrôlabilité équivaut à  $\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^1(0, T; \mathbb{R}^m) \mid \int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s) ds = \hat{x}$ .



- on constate que  $\mathcal{A}_T$  est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des images  $x_u(T)$  associées à des données initiales nulles ; on montre alors qu'il suffit de démontrer le critère de Kalman dans le cas particulier où  $x_0 = 0$  ; on note encore  $\mathcal{A}_T$  l'espace atteignable dans ce cas ;
- pour montrer que  $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{E}(A, B)$ , on utilise le théorème de Cayley-Hamilton pour démontrer que  $e^{(t-s)A}$  laisse invariant l'espace  $\mathcal{E}(A, B)$ , quels que soient  $t$  et  $s$ . On en déduit alors que  $\int_0^T e^{(t-s)A} B u(s) ds$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{E}(A, B)$ , quel que soit  $u$  intégrable ;
- l'inclusion réciproque s'établit en prouvant que  $\mathcal{A}_T^\perp \subset \mathcal{E}(A, B)^\perp$ . Pour ce faire, on considère  $x$  orthogonal à  $\mathcal{A}_T$  et on traduit qu'il est orthogonal à l'état  $x_u(T)$  associé au choix de commande  $u(\cdot)$  donnée par  $u(t) = B^\top e^{(T-t)A^\top} x$ , où le symbole  $^\top$  désigne l'opération de transposition de matrices.

Il est remarquable que la condition de Kalman est indépendante de l'horizon temporel  $T > 0$  et de la donnée initiale  $x_0$ , ce qui implique en particulier que lorsqu'un système de contrôle linéaire autonome est contrôlable, on peut atteindre à partir d'une donnée initiale toute cible en un horizon temporel même très court. Attention toutefois : le prix à payer est que le contrôle peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

Il est important de préciser que le critère de contrôlabilité de Kalman susmentionné ne s'étend pas à des matrices  $A$  et  $B$  dépendant continûment du temps. En revanche, en adaptant soigneusement sa démonstration, on peut montrer que lorsque les matrices  $A$  et  $B$  sont remplacées par des fonctions continues  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  dans le système (2), celui-ci est contrôlable en temps  $T$  si, et seulement si, la Gramienne de contrôlabilité

$$G_T := \int_0^T R(s)^{-1} B(s) B(s)^\top (R(s)^{-1})^\top ds \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),$$

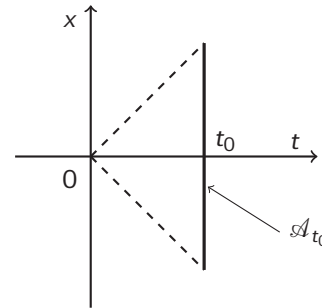
mettant en jeu la résolvante  $R$  du système libre<sup>6</sup> (sans forçage) est inversible.

Pour des raisons pratiques, voire physiques, il est souvent déraisonnable d'autoriser les fonctions de contrôle à « exploser » en norme et raisonnable de considérer des restrictions sur l'ensemble des contrôles. Dans ce cas, la condition de Kalman

énoncée devient fausse. On peut aisément s'en convaincre à partir de l'exemple suivant, extrait de [6] : on considère un point matériel en mouvement rectiligne. On contrôle la vitesse de ce point par un contrôle à valeurs dans l'intervalle borné  $U = [-1, 1]$ , ce qui conduit à considérer le système

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U,$$

où on a fixé l'origine à la position initiale du point matériel. Une estimation explicite permet de se convaincre que l'ensemble atteignable au temps  $t$  est  $\mathcal{A}_t = [-t, t]$ . Par exemple, au temps  $t > 0$ , il n'est pas possible d'atteindre le point  $2t$  à l'aide de contrôles prenant leurs valeurs dans  $U$ .



Nous renvoyons par exemple à [9] pour une introduction à la commandabilité en dimension finie.

## 2.2 – Cas de dynamiques non linéaires : l'exemple du pendule inversé

Contrairement à ce que sa simplicité pourrait laisser croire, le cas linéaire traité dans le paragraphe précédent possède un large spectre applicatif. En effet, on se ramène à l'étude de la contrôlabilité de tels systèmes lorsqu'on cherche à déterminer des propriétés de contrôlabilité locale de systèmes non linéaires. Autrement dit, se donnant une trajectoire  $\{x_u(t)\}_{t \in [0, T]}$  du système contrôlé joignant  $x_0$  au temps 0 à  $x_T$  en temps  $T$ , on cherche à savoir si l'on peut joindre tout point d'un voisinage de  $x_0$  à tout point d'un voisinage de  $x_T$  à l'aide d'une fonction de contrôle en temps  $T$ .

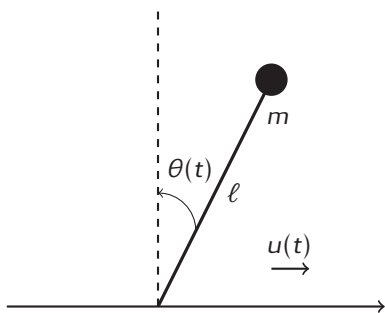
Le problème que nous abordons ici, loin d'être purement académique, se pose dans de nombreuses applications technologiques et en particulier en robotique, où le but est de contrôler un bras giratoire avec un moteur situé à une extrémité reliant le bras

6. Rappelons que la résolvante  $R$  du système (2) est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = A(t)R(t) & t \in [0, T] \\ R(0) = I_n. \end{cases}$$

au reste de la structure. Dans l'hypothèse réaliste où l'on souhaite stabiliser ce bras autour de sa position d'équilibre, on suppose que le contrôle est l'accélération  $u$  imposée à l'extrémité du pendule, autrement dit l'accélération horizontale du point inférieur de la tige. Afin de modéliser ce système, nous considérons l'exemple du pendule inversé (masse vers le haut, tige vers le bas) et supposons que la masse totale  $m$  du bras est située à l'extrémité libre et que la barre est de longueur  $\ell$ . En ignorant l'effet de la friction, on obtient l'équation

$$\ddot{\theta}(t) - \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = -\frac{1}{\ell^2} u(t), \quad t \in [0, T].$$



On se convainc alors que la configuration  $\tilde{\theta}(\cdot) = 0$  constitue un équilibre instable du système avec  $u(\cdot) = 0$ .

De façon formelle, en supposant de faibles déplacements angulaires autour de la position d'équilibre  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  et de faibles contrôles  $u(\cdot)$ , on est conduit à écrire  $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$  et on obtient, en approximation au premier ordre, un système dit « linéarisé » autour de l'équilibre s'écrivant sous la forme

$$\ddot{\theta}(t) - \frac{g}{\ell} \theta(t) = -\frac{1}{\ell^2} u(t), \quad t \in [0, T].$$

Il est alors aisé de vérifier que la condition de Kalman est bien satisfaite car en utilisant les notations de la section précédente, on a

$$\text{rg}[B, AB] = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que retenir de l'étude de ce cas un peu simpliste ? On ne peut pas prétendre que le système non linéaire complet est contrôlable. En revanche, ce raisonnement formel, reposant sur l'hypothèse de déplacements et contrôles « petits » peut être rendu parfaitement rigoureux. Il permet de démontrer une propriété de *contrôlabilité locale* : il existe un voisinage de l'équilibre instable  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  tel que tout point de ce voisinage puisse être amené en temps  $T > 0$  à l'équilibre  $(0, 0)$ . En d'autres termes, on peut stabiliser un pendule inversé peu éloigné de sa position

d'équilibre instable à l'aide de petits mouvements de translation.

De tels résultats sont généralisables à de très larges classes de systèmes non linéaires : on peut alors déduire de la contrôlabilité d'un système linéaire (plus précisément, le système linéarisé autour d'un équilibre) une propriété de *contrôlabilité locale*.

Autrement dit, on peut espérer stabiliser un problème non linéaire au moins localement.

### 3. Contrôler de façon optimale ?

Le terme « contrôle optimal » dans son acception la plus large, désigne un problème d'optimisation dont le critère dépend de la solution d'un système dynamique. La variable d'optimisation s'appelle alors *le contrôle*.

Quel est le lien avec les problèmes précédemment évoqués ? On peut en voir deux :

- d'une part, on peut estimer selon le contexte applicatif visé, qu'il n'est pas toujours nécessaire de contrôler un système dynamique de façon exacte et qu'il est satisfaisant de chercher à se rapprocher le plus possible d'une cible fixée. Le problème de contrôle énoncé dans la section 2.1 est alors remplacé par le problème d'optimisation : minimiser  $\|x_u(T) - x_{\text{cible}}\|_{\mathbb{R}^n}$  parmi tous les contrôles  $u(\cdot)$  dans  $L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$  ou encore dans un sous-ensemble de contraintes fixé ;
- d'autre part, le critère de Kalman énoncé dans la section 2.1 fournit une condition nécessaire et suffisante de *contrôlabilité* dans le cas d'une dynamique linéaire autonome en dimension finie. Lorsque ce critère est satisfait, il est en revanche clair qu'un contrôle amenant le système d'un point  $x_0$  à une cible  $x_{\text{cible}}$  ne peut être unique. Si c'était le cas, l'application  $L^1(0, T; \mathbb{R}^m) \ni u \mapsto x_u(T) \in \mathbb{R}^n$  serait bijective, ce qui n'est évidemment pas le cas en raison de la dimension des espaces définition et image. Cela pose donc une nouvelle question : comment choisir judicieusement une fonction de contrôle, comme la solution d'un problème d'optimisation ? C'est l'objet du paragraphe qui suit.

#### 3.1 – Le coût du contrôle

On va chercher des contrôles d'énergie minimale. Il reste à définir ce que l'on entend par « énergie ».

Une multitude de choix serait possible mais un critère semble ici particulièrement naturel.

Réutilisons l'exemple de la dynamique linéaire (2) introduite dans la section 2.1. Afin de simplifier la présentation qui suit, supposons que l'état initial est  $x_0 = 0$ .

Considérons ainsi l'ensemble de tous les contrôles amenant le système d'un point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  à une cible  $x_{\text{cible}} \in \mathbb{R}^n$ . On peut rechercher s'il en existe un parmi eux qui est de norme minimale dans  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ .

Le problème se formalise ainsi : on recherche un contrôle  $u^*$  dans l'ensemble admissible

$$\mathcal{A}_{\text{adm}}(x_{\text{cible}}, T) = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \mid x_u(T) = x_{\text{cible}}\}$$

minimisant la norme  $L^2$  du contrôle, autrement dit le critère

$$L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \ni u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \mapsto \int_0^T \sum_{i=1}^m |u_i(t)|^2 dt.$$

En observant que l'espace  $\mathcal{A}_{\text{adm}}(x_{\text{cible}}, T)$  est un espace affine donc un convexe fermé non vide et en utilisant le théorème de projection orthogonale, on montre non seulement l'existence et l'unicité d'un contrôle optimal  $u_{\text{opt}}$  pour le problème ci-dessus, mais on en obtient également une caractérisation totalement explicite :

$$u_{\text{opt}}(t) = B^T e^{(T-t)A^T} G_T^{-1} x_{\text{cible}},$$

où  $G_T^{-1}$  désigne la *Gramienne de contrôlabilité*, définie par

$$G_T = \int_0^T e^{(T-t)A} B B^T e^{(T-t)A^T} dt.$$

On peut définir la notion de *coût du contrôle*  $C_T$  à partir de la définition de  $u_{\text{opt}}$  comme la norme de l'opérateur  $\mathbb{R}^n \ni x_{\text{cible}} \mapsto u_{\text{opt}} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ , autrement dit la quantité

$$C_T = \sup_{x_{\text{cible}} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\left( \int_0^T \|u_{\text{opt}}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right)^{1/2}}{\|x_{\text{cible}}\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Il s'agit d'une constante de continuité traduisant l'influence de la cible sur le contrôle optimal. À l'aide

de manipulations élémentaires sur cette borne supérieure<sup>7</sup> on peut démontrer que

$$C_T = \sup_{z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_{\mathbb{R}^n}}{\left( \int_0^T \|B^T z(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \right)^{1/2}}.$$

Par conséquent, le coût du contrôle  $C_T$  s'interprète également comme la meilleure constante  $C$  dans l'inégalité

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \|z\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C^2 \int_0^T \|B^T z(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt. \quad (4)$$

Cette inégalité est appelée *inégalité d'observabilité*. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité, fort intéressante en pratique car plus générale que le critère de Kalman. Elle s'étend en effet à de multiples systèmes de dimension infinie.

Nous renvoyons à [5, 3] pour une explication complète de l'équivalence entre observabilité et contrôle dans le cas de systèmes linéaires, y compris de dimension infinie.

Nous évoquons un exemple dans le paragraphe suivant.

### 3.2 – Contrôle d'équations aux dérivées partielles : la méthode HUM

La question du contrôle des systèmes de dimension infinie, par exemple des équations aux dérivées partielles, est nettement plus ardue que celles que nous venons de voir. Afin d'illustrer ces difficultés, donnons l'exemple de l'équation des ondes.

Considérons une membrane vibrante  $\Omega$  fixée à son support que l'on cherche à amener au repos en un temps  $T > 0$ . Le déplacement  $y(t, x)$  de la membrane au temps  $t \in [0, T]$  et au point  $x \in \Omega$  est régi par l'équation des ondes :

$$\begin{aligned} \partial_{tt} y(t, x) - c^2 \Delta y(t, x) &= h_\omega(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ y(t, x) &= 0, & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

où  $c > 0$  est la vitesse de déplacement,  $h_\omega$  est une fonction de contrôle nulle en dehors de  $(0, T) \times \omega$ , agissant sur le système entre le temps  $t = 0$  et le temps,  $t = T$ , uniquement aux points de  $\omega$ , un sous-ensemble ouvert de  $\Omega$ .

7. Plus précisément, on introduit le changement de variable  $z = G_T^{-1} x_{\text{cible}}$  et on utilise l'identité

$$\int_0^T \|u_{\text{opt}}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt = \langle G_T z, z \rangle_{\mathbb{R}^n} = \int_0^T \|B^T z(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt.$$

Le problème de contrôlabilité que l'on cherche à résoudre s'écrit : *quelles que soient les données initiales*  $x \mapsto y(0, x)$  et  $x \mapsto \partial_t y(0, x)$ , *trouver une fonction de contrôle*  $h_\omega$  *active uniquement sur*  $[0, T] \times \omega$  *amenant le système au repos en temps*  $T$ , *autrement dit telle que*

$$y(T, x) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t y(T, x) = 0$$

pour presque tout  $x \in \Omega$ .

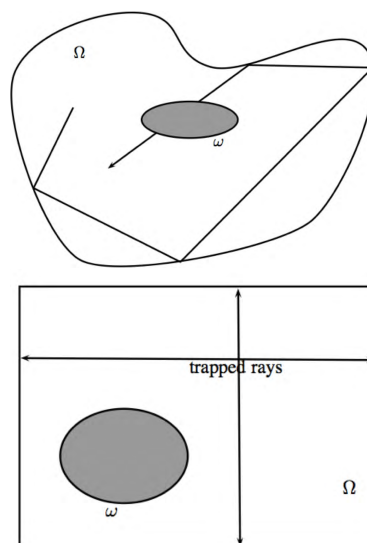
La méthode HUM (ou Hilbert Uniqueness Method) est une méthode abstraite permettant de reformuler la contrôlabilité d'un système dynamique linéaire à l'aide d'une inégalité d'observabilité, par exemple (4) dans le cas d'un système de dimension finie. Cette méthode présente également l'avantage de fournir une fonction de contrôle de norme minimale parmi tous les contrôles amenant le système au repos. Ainsi, on montre que l'on peut répondre favorablement à la question ci-dessus si le couple  $(\omega, T)$  est choisi de sorte qu'il existe  $C > 0$  tel que l'inégalité d'observabilité

$$E(y(0, x), \partial_t y(0, x)) \leq C^2 \int_0^T \int_\omega y(t, x)^2 dx dt$$

soit satisfaite pour tout jeu de données initiales, où  $E$  désigne une certaine énergie sur l'espace des données initiales. Cette inégalité, dont nous n'explicitons pas le terme  $E$  afin de ne pas complexifier la lecture de cet article, possède une jolie interprétation physique, mise en évidence et prouvée dans [1] : elle est satisfaite si, et seulement si, tout rayon lumineux se propageant dans  $\Omega$  à vitesse  $c$ , en suivant les lois de l'optique géométrique<sup>8</sup> entre dans le domaine  $\omega$  en un temps inférieur ou égal à  $T$ .

La figure ci-contre illustre cette propriété. Ainsi, on se rend compte que dans la configuration du bas ci-contre, où  $\Omega$  représente un rectangle, l'inégalité d'observabilité n'est satisfaite pour aucun temps  $T$  en raison de la présence de rayons piégés, se propageant parallèlement aux côtés du carré. Par conséquent, l'équation des ondes n'est pas contrôlable pour un tel choix de domaine  $\Omega$ . Il existe en revanche de nombreux choix d'ensembles  $\Omega$  et  $\omega$  pour lesquels on sait démontrer que l'équation des ondes est contrôlable à partir d'un temps minimal  $T^*$ , i.e. pour  $T > T^*$ .

8. Autrement dit, la loi de Snell-Descartes.



Ces exemples mettent en lumière la complexité des conditions de contrôlabilité dans le cas de la dimension infinie. Même si l'on peut reformuler cette question en terme d'inégalité d'observabilité dans le cas de dynamiques linéaires, il est en général très difficile d'en extraire des informations qualitatives. Il s'agit d'ailleurs d'un champ de recherche très actif.

## 4. Planifier et décider

Dans cette section, nous cherchons à illustrer l'utilisation d'outils de contrôle modernes dans la prise de décision, plus précisément dans des questions de renforcement/planification. S'il s'agit d'un domaine très vaste et très actif, nous allons nous cantonner à des modèles plus simples que ceux introduits dans les parties précédentes, en considérant des dynamiques discrètes. Bien sûr, il existe des versions continues de toutes les approches que nous présenterons par la suite, plus difficiles à appréhender pour un lecteur non spécialiste.

### 4.1 – Systèmes commandés stochastiques en temps discret

Depuis de nombreuses années, le contrôle optimal s'est également développé autour de modèles dynamiques stochastiques et/ou discrets en temps.

Ces recherches sont à la base de travaux récents d'intelligence artificielle. Considérons un exemple simple, extrait de [11], afin de fixer les idées.

**Exemple 2.** Le responsable d'un entrepôt dispose d'un stock d'une marchandise correspondant à une

variable appelée « état ». Il doit satisfaire la demande de clients modélisée par un processus aléatoire (Poisson ou autre). Pour cela, il peut, tous les mois, décider de commander une quantité supplémentaire à son fournisseur. Cette quantité joue le rôle de variable de contrôle. La capacité de l'entrepôt est limitée et le stockage a un coût. L'objectif est de maximiser le profit en assurant un stock suffisant mais minimal permettant d'assurer les commandes. On se donne un horizon de temps  $T > 0$  représentant la durée de l'expérience et on appelle :

- $s_t$ , la variable d'état correspondant à la valeur du stock au temps discret  $t$ ,
- $a_t$ , la quantité commandée au temps  $t$  jouant le rôle d'action/de contrôle.

avec  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$ , une valeur discrète du temps. On choisit de modéliser la dynamique par la relation de récurrence :

$$s_{t+1} = \max\{s_t + a_t - D_t, 0\},$$

où  $D_t$  est une variable aléatoire i.i.d. représentant la demande des clients. On se donne une « récompense »  $r_t$  modélisant à chaque instant le rendement instantané, que le responsable souhaite maximiser, de la forme :

$$r_t = \text{Gain}(s_t + a_t - s_{t+1}) - \text{Coût}(x_t, a_t)$$

où Gain est une fonction connue traduisant les recettes de la vente en fonction du stock après réception des commandes au temps  $t$  et Coût également une fonction connue, s'écrivant comme la somme des coûts de fabrication et de maintenance au temps  $t$ .

Étant donné que  $r_t$  est un critère dépendant d'une variable aléatoire via  $s_t$ , il est naturel de chercher à optimiser un critère déterministe de type « espérance ». On est alors amené à résoudre le problème de contrôle en temps discret :

$$\max_{\substack{\{a_t\}_{t \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^T \\ s_{t+1} = \max\{s_t + a_t - D_t, 0\}}} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} r_t \right].$$

De façon générale, on introduit un problème de contrôle stochastique en temps discret. On se donne :

- un espace d'état  $S$  correspondant à l'ensemble des valeurs pouvant être prises par la variable d'état  $s_t$ ,  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$ . On appelle ces valeurs des *états accessibles* par le système ;
- un espace d'action  $A$  qui correspond aux actions possibles pour contrôler le système, autrement dit aux valeurs prises par le contrôle ;

- un **environnement** qui décrit l'évolution du système notamment à travers la probabilité de transition  $\mathbb{P}(s'|s, a)$  entre deux états  $s$  et  $s'$  appartenant à  $S$ , connaissant l'action  $a$  appartenant à  $A$  utilisée.

Afin de guider le choix des actions (contrôles) on se donne un moyen d'évaluer une action effectuée : à chaque transition temporelle, on reçoit une récompense  $r$  qui évalue l'action et l'état atteint. Ici,  $(r, s, a)$  désigne n'importe quel triplet  $(r_t, s_t, a_t) \in \mathbb{R} \times S \times A$ , avec  $t \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket$ . Ainsi, on considère que  $r = R(s, a)$  où  $R$  est une application donnée. Lorsqu'on s'inscrit dans ce formalisme on parle de processus de décision markovien. Le caractère markovien est à rapprocher du cas d'équations différentielles autonomes dans le cadre déterministe. Pour de tels modèles, la probabilité d'atteindre un état ne dépend que de l'état précédent et de la valeur du contrôle.

De la même façon que dans la section 3, on cherche à maximiser un certain critère aussi appelé *fonction coût*. On choisit ici un critère générique traduisant l'espérance conditionnelle des récompenses :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t r_t \mid s_0 \right],$$

où  $\gamma \in ]0, 1[$  est un coefficient dit de remise qui permet de prioriser, si on le souhaite, les récompenses en temps proches par rapport à celles en temps très éloignés. Il est en général choisi strictement inférieur à 1 pour les problème en temps infini (qu'on n'introduit pas ici mais qui peuvent être traités de façon similaire, *mutatis mutandis*). De plus, nous verrons plus tard que plus  $\gamma$  est faible plus le problème est simple à résoudre.

Cette formule représente le gain moyen que l'on peut espérer sur des trajectoires avec  $T$  étapes. Il est assez courant d'ajouter à la fonction coût un terme de la forme  $\varphi(s_T)$ , afin de « pénaliser » une fonction de l'état au temps final.

## 4.2 – Planification et méthodes gloutonnes

Une première question qu'on peut se poser sur ce genre de problème est ce qu'on appelle la planification :

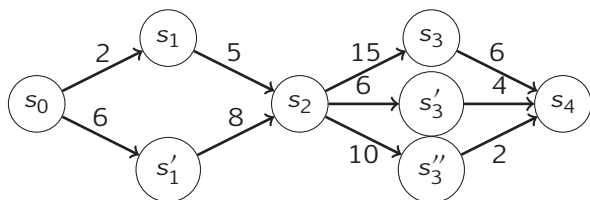
*à partir d'un état  $s_0$  peut-on déterminer la meilleure action ou la meilleure série d'actions  $(a_0, a_1, \dots, a_T)$  telle(s) que l'espérance des récompenses soit maximale ?*

Dans cette optique, on peut récrire ce problème à l'aide d'arbres. En effet le processus de décision markovien peut s'écrire comme un arbre où les états



possibles à chaque étape temporelle sont les sommets de l'arbre. Les arêtes représentent les actions qui permettent de transiter entre chaque étape.

Afin de mieux cerner ce type de problème, considérons un exemple simple de graphe orienté.



Chaque génération de l'arbre correspond donc à une étape temporelle. Autrement dit, au temps  $t = 0$ , le système se trouve dans l'état  $s_0$ . Sous une action  $a_0$  à choisir entre deux possibilités, il peut soit passer dans l'état  $s_1$ , soit dans l'état  $s'_1$ . Sous une action  $a_1$ , le système passe alors dans l'état  $s_2$ , etc. Les récompenses en fonction de l'action effectuée ont été indiquées sur chaque arête du graphe.

Dans ce cadre, le problème de maximisation de la récompense espérée revient à un problème de parcours minimal de graphe. Il s'agit de trouver le plus court chemin entre la racine et une des feuilles qui minimise la somme des poids des arêtes. Ce genre de problème est très connu en théorie des graphes et peut être résolu à l'aide d'algorithmes *ad-hoc* tels que celui de Dijkstra<sup>9</sup> (1959) ou l'algorithme de Bellman-Ford.

Un inconvénient majeur de ces algorithmes réside dans le fait que leur complexité est une fonction linéaire du nombre de sommets et d'arêtes. En désignant par  $|I|$  le cardinal d'un ensemble discret  $I$ , le nombre de sommets et d'arêtes de cet arbre sont respectivement homogènes à  $O(|S|^T)$  et  $O(|A|^T)$ . Le nombre de sommets et d'arêtes augmente donc exponentiellement avec le temps. Les algorithmes de recherche du plus court chemin étant eux mêmes polynomiaux en fonction d'un nombre d'arêtes et de sommets, on comprend que ces méthodes dites glouttonnes ne peuvent être utilisées que lorsque  $T$  est assez petit.

En revanche, il est notable que ces méthodes de recherche peuvent en général être accélérées en utilisant certaines heuristiques spécifiques aux problèmes.

### 4.3 – Résolution à l'aide de la programmation dynamique et des méthodes de point fixe

Pour traiter de tels problèmes, Richard Bellman a introduit les outils de la programmation dynamique pour les processus de décision markoviens dans les années 50. Contrairement à l'approche décrite ci-dessus, on change de paradigme, en cherchant à construire à l'instant  $t$  une action  $a_t$  ne dépendant que de l'état du système  $s_t$ . Dans la théorie du contrôle, on parle indifféremment de commande par retour d'état, commande en boucle fermée ou feedback. Dans le domaine de l'apprentissage, on trouve plus volontiers le vocabulaire de politique, pour traduire que la question se ramène à la recherche d'une application  $\mu$  telle que  $a = \mu(s)$  : à chaque état  $s$ , on attribue une action  $a$ . La politique détermine l'action à choisir, uniquement en fonction de l'état courant et pas de l'ensemble des états passés. La propriété markovienne du système suggère que la meilleure politique n'utilisant que l'état courant peut être espérée aussi efficace que celle utilisant l'historique de tous les états visités.



Richard E. Bellman est un mathématicien appliqué né en 1920 à Brooklyn et est décédé en 1984 à Los Angeles. Il obtint ses lettres de noblesses grâce à diverses contributions dans plusieurs domaines des mathématiques, mais il est surtout connu pour être à l'origine de la programmation dynamique, une méthode algorithmique très astucieuse permettant de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes dont le coût s'écrit comme des sommes de fonctions monotones croissantes.

De tels contrôles fournissent en général des stratégies très robustes, susceptibles de donner des résultats satisfaisants même lorsque la trajectoire que l'on cherche à contrôler subit des perturbations.

**Exemple 3.** Soit  $s_t$  la quantité de gaz polluant généré par une usine à l'instant  $t \in \llbracket 0, T \rrbracket$  lors d'une phase de production, avec  $T \in \mathbb{N}^*$  donné. L'usine réduit sa production de  $a_t$  unités dans la période  $\llbracket t, t + 1 \rrbracket$  On a donc :

$$\begin{cases} s_{t+1} = s_t + D_t - a_t, & t \in \llbracket 0, T - 1 \rrbracket \\ s_0 > 0 \text{ est connu (état initial)} \end{cases}$$

où  $D_t$  est une variable aléatoire i.i.d. représentant une surproduction de gaz en raison d'une demande plus forte de la clientèle.

9. L'algorithme de Dijkstra pour trouver le chemin le plus court entre a et b. Il choisit le sommet non visité avec la distance la plus faible, calcule la distance à travers lui à chaque voisin non visité, et met à jour la distance du voisin si elle est plus petite.

La taxe de pollution et la réduction de la production ont un coût. Une approche naïve consiste à traduire ce coût via le carré de la norme euclidienne des vecteurs état et action, conduisant au problème d'optimisation :

$$\inf_{\substack{a_t \geq 0, t \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket \\ s_{t+1} = s_t - a_t, t \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket \\ s_0 \text{ donné}}} \mathbb{E}[R],$$

où  $R$  désigne la récompense instantanée donnée par  $R = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-1} (s_t^2 + a_t^2)$ .

De façon générale, si l'on considère des systèmes dynamiques stochastiques en temps discret, comme dans la section précédente, on sera assez naturellement amenés à considérer des critères de la forme :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t r(s_t, a_t) \middle| s_0 \right],$$

où

- $\gamma \in ]0, 1]$  est un coefficient dit de remise qui permet de prioriser, si on le souhaite, les récompenses en temps proches par rapport à celles en temps très éloignés ;
- $r(s_t, a_t)$  désigne une *récompense*, dépendant à l'instant  $t$  uniquement de l'état  $s_t$  et de l'action  $a_t$ .

De façon générale, en utilisant les mêmes notations que ci-dessus, on considère le problème d'optimisation

$$\max_{a_t, s_t} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t r(s_t, a_t) \middle| s_0 \right] \quad (6)$$

où le maximum est pris parmi les processus  $(s_t)_{t \in \llbracket 0, T \rrbracket}$  possédant la propriété de Markov (autrement dit une chaîne de Markov) et l'action  $a_t = \mu(s_t)$  est choisie selon la politique  $\mu$ . Ainsi, la chaîne de Markov résultante est définie par des probabilités de transition  $\mathbb{P}(s' | s) = \mathbb{P}(s' | s, \mu(s))$ .

L'enjeu est de construire une politique optimale qui permet de contrôler au mieux le processus markovien. Insistons sur le fait que l'on souhaite définir  $a_t$  comme une fonction de  $s_t$ .

Afin de définir cette notion d'optimalité on introduit la fonction valeur  $V_\mu$ , notion clé correspondant à la valeur du critère à optimiser si l'on se donne un choix de politique (ou retour d'état)  $\mu$ . Si  $\mu$  est

donnée,  $V_\mu$  est définie par

$$V_\mu(t, s) = \mathbb{E} \left[ \sum_{\tau=t}^{T-1} \gamma^\tau r(s_\tau, \mu(s_\tau)) \middle| s_0 = s, \mu \right].$$

Si l'on repense à l'exemple 3 ci-dessus (dans lequel le coefficient  $\gamma$  est choisi égal à 1), la fonction valeur est donnée par :

$$V_\mu(t, s) = \mathbb{E} \left[ \sum_{\tau=t}^{T-1} \frac{1}{2} (s_\tau^2 + \mu(s_\tau)^2) \middle| s_0 = s, \mu \right].$$

Cette fonction correspond à l'espérance de récompense qu'on peut obtenir en suivant une politique  $\mu$  à partir d'un état  $s$ . Elle permet d'évaluer l'efficacité d'une politique par rapport à une autre et d'obtenir ainsi naturellement une notion de politique optimale<sup>10</sup>. L'idée centrale de la théorie de Bellman est d'obtenir une caractérisation de chaque fonction valeur et de la fonction valeur optimale que l'on puisse assez facilement calculer, en traduisant puis exploitant des conditions nécessaires d'optimalité. Une fois la fonction valeur optimale obtenue, on peut construire une politique en choisissant pour chaque état une action qui maximise la fonction valeur. Cette caractérisation utilise de façon cruciale le caractère markovien du modèle. Elle permet d'établir les conditions d'optimalité suivantes sur la fonction valeur  $V_{\mu^*}$  associée à une politique optimale  $\mu^*$  :

$$\begin{cases} V_{\mu^*}(t, s) = \max_a v(t, s, a) \\ \text{où } v(t, s, a) = r(s, a) + \sum_{s' \in S} \mathbb{P}(s' | s, a) V_{\mu^*}(t+1, s) \\ V_{\mu^*}(T, s) = 0 \end{cases}$$

où  $S$  désigne l'espace des états, c'est-à-dire l'espace de tous les  $s$  atteignables à l'aide du processus stochastique. De plus, tout maximiseur de ce problème définit une politique optimale.

La preuve de ces identités n'est pas très complexe : elle repose sur un jeu d'écriture et un découplage des variables de maximisation. On la trouvera par exemple dans [11].

On voit avec cette caractérisation que l'utilisation d'un processus markovien permet d'écrire une relation de récurrence entre la fonction valeur à un état donné et celle aux états accessibles directement à partir de l'état courant. Cette caractérisation est très intéressante car indépendante de l'horizon de temps  $T$  du problème, qui correspond à la profondeur de l'arbre lorsqu'on utilise une recherche exhaustive. Cette indépendance par rapport au nombre d'étapes temporelles mène à des algorithmes qui ne souffrent pas d'une complexité exponentielle par rapport à  $T$ .

10. En effet la politique optimale  $\mu^*(s)$  correspond à la politique qui maximise la fonction valeur sur l'ensemble des états.

L'algorithme le plus naturel, appelé « itération sur la valeur », consiste à interpréter la condition d'optimalité ci-dessus comme un problème de point fixe matriciel sur la politique  $\mu$ , puis d'utiliser une méthode algorithmique de Picard. On peut alors montrer sous des hypothèses assez générales sur les données du problème que la fonction dont on souhaite trouver un point fixe est contractante si bien que le problème de point fixe admet une unique solution pour  $\gamma < 1$ . La constante de contraction décroît avec  $\gamma$ . La complexité de l'algorithme devient alors polynomiale par rapport au nombre d'actions et d'états. Si l'approche de Bellman permet de réduire de façon importante la complexité du problème, l'applicabilité d'un tel algorithme reste évidemment limitée pour des problèmes de grande taille.

#### 4.4 – Renforcement et méthodes de Monte-Carlo

Jusqu'à présent, on a considéré que l'on connaissait la loi de récompense  $R$  ainsi que les probabilités de transitions  $\mathbb{P}(s'|s, a)$ . Si l'on repense à l'exemple de gestion de stocks, remarquons que l'on ne connaît pas en avance la fréquence et la taille des commandes qui seront effectuées par les clients. D'un point de vue de la modélisation mathématique, cela revient à supposer que la loi de probabilité des transitions est inconnue. Cependant, même si on n'a pas accès à cette loi de probabilité, on connaît néanmoins des échantillons donc une distribution d'échantillonnage. En effet, on peut supposer connus un certain nombre d'exemples de quadruplets  $(s', r, s, a)$  issus des commandes passées ou futures et qui correspondent à des transitions temporelles du processus markovien. Il y a donc un enjeu très intéressant à développer des méthodes capables de construire la fonction valeur et la politique à partir d'exemples de transitions. Lorsqu'on ne connaît pas explicitement le modèle (i.e. la loi de transition et les récompenses), on parle d'un problème d'apprentissage par renforcement. On différencie deux types d'approche :

- l'approche reposant sur un modèle,
- l'approche sans modèle.

La première approche consiste à d'abord construire un modèle de transition et de récompenses puis appliquer des algorithmes du type « programmation dynamique » ou de type « recherche exhaustive » appelés « algorithmes de planification ». Il existe des algo-

rithmes de recherche non exhaustifs qui n'explorent pas l'arbre entier comme le ferait l'algorithme de Dijkstra mais plutôt les branches les plus « prometteuses » comme les méthodes de recherche arborescente de type Monte-Carlo. Pour construire le modèle de transition, on peut explorer aléatoirement le processus markovien et estimer les probabilité de transition en comptant les états et action visités par les trajectoires aléatoires.

La seconde approche consiste à construire directement une estimation de la fonction valeur puis de la politique à partir d'exemples de transition. Considérons à nouveau le problème (6) et choisissons  $T = +\infty$  afin de simplifier la présentation. Rappelons que nous avons choisi une politique par retour d'état ou feedback, de la forme  $a_t = \mu(s_t)$ . On peut montrer que, dans ce cas, la fonction valeur  $V_\mu(t, s_t)$  au temps  $t$  ne dépend que de l'état  $s_t$  (et plus de  $t$ ). Pour cette raison, nous noterons dorénavant avec un léger abus de notation  $r_t := r(s_t, \mu(s_t))$  et  $V_\mu(s_t) := V_\mu(t, s_t)$ .

En utilisant des calculs similaire à ceux utilisés pour obtenir l'équation de Bellman qui caractérise la fonction valeur de la politique optimale on peut caractériser la fonction valeur associée à une politique  $\mu$  arbitraire à l'aide de la relation de récurrence suivante, satisfaite par la fonction valeur :

$$V_\mu(s_t) = \mathbb{E} \left[ r_t + \gamma V_\mu(s_{t+1}) \mid s_t = s; \mu \right]$$

où, en appelant  $S$  l'espace des états, c'est-à-dire l'espace de tous les  $s$  atteignables à l'aide du processus stochastique,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ r_t + \gamma V_\mu(s_{t+1}) \mid s_t = s; \mu \right] &= r(s, \mu(s)) \\ &+ \gamma \sum_{s' \in S} \mathbb{P}(s' \mid s, \mu(s)) V_\mu(s'). \end{aligned}$$

Cette espérance peut être naturellement estimée à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo<sup>11</sup>. Dans notre cas, cela revient à utiliser des exemples de transitions temporelles  $(s_{t+1}, r_t, s_t, a_t)$ , issues d'un grand nombre de trajectoires en temps, pour estimer l'espérance ci-dessus. Se donnant  $s \in S$ , l'espérance ci-dessus est ainsi approchée par

$$\frac{1}{N(s)} \sum \left( r_\mu(s_t, \mu(s_t)) + \gamma V_\mu(s_{t+1}) \right)$$

où la somme ci-dessus est prise sur l'ensemble des couples  $(s_t, s_{t+1})$  de l'échantillon tels que  $s_t = s$  et  $N(s)$  est le nombre de tels couples parmi tous ceux de l'échantillon. Autrement dit,  $N(s)$  est le nombre de fois que l'état  $s_t$  est visité.

11. D'une façon générale il s'agit d'approcher une espérance par une moyenne empirique :  $E_p[G(X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(X_i)$  avec  $X_i$  des échantillons aléatoirement tirés selon la loi  $p(X)$ .

En utilisant une version incrémentale de la moyenne empirique, on approche  $V_\mu(s_t)$  par  $V_n^\mu(s_t)$ , avec  $n$  grand, selon la relation de récurrence

$$V_{n+1}^\mu(s_t) = V_n^\mu(s_t) + \frac{1}{N(s_t) + 1} (r_\mu(s_t) + \gamma V_n^\mu(s_{t+1}) - V_n^\mu(s_t)), \quad (7)$$

Pour utiliser cet algorithme appelé « différence temporelle », il faut savoir comment générer les transitions temporelles. Pour cela, on se donne une politique aléatoire  $\mu(a|s)$  appelée politique d'exploration qui associe à chaque état  $s$  une loi de probabilité sur les actions à choisir. On utilise ensuite cette politique pour générer des trajectoires en temps associées à plusieurs états initiaux  $s_0$ . Puisque l'objectif est de converger vers la politique optimale, on construit une politique aléatoire qui devient de moins en moins aléatoire au fil des itérations, en se rapprochant de la *politique gloutonne*, qui sélectionne la meilleure action au sens de la fonction valeur. Le plus classique est de choisir la politique suivante

$$\mu(a|s) = \begin{cases} 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{|A(s)|} & \text{si } a = a^* \\ \frac{\varepsilon}{|A(s)|} & \text{si } a \neq a^* \end{cases} \quad (8)$$

avec  $a^* \in \operatorname{argmax}_s V_\mu(s)$  et en considérant un paramètre  $\varepsilon > 0$  que l'on peut choisir décroissant au fil des itérations. La formule (7) construit une approximation de la fonction de valeur  $V_\mu$  de la politique aléatoire (8). En faisant décroître  $\varepsilon$  au fur et à mesure des itérations, la politique  $\mu$  se rapproche de la politique gloutonne que l'on espère optimale si l'estimation de  $V_\mu$  converge.

#### 4.5 – Pour aller plus loin : le Q-learning

En pratique on utilise souvent des algorithmes reposant sur la fonction  $Q$ , une variante de la fonction valeur, qui obéit à la même définition, la seule différence résidant dans le fait que la première action est choisie librement contrairement aux autres qui sont données par la politique évaluée :

$$Q_\mu(s, a) = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{+\infty} \gamma^t r_{t+1} \mid s_0 = s, a_0 = a, \mu \right].$$

En effet, le même type d'incrément que dans (7) peut être construit pour estimer la fonction  $Q_\mu$ , conduisant à

$$Q_{n+1}^\mu(s_t, a_t) = Q_n^\mu(s_t, a_t) + \alpha_n (r(s_t, a_t) + \gamma Q_n^\mu(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q_n^\mu(s_t, a_t))$$

où  $\alpha_n > 0$  est un pas représentant  $\frac{1}{N(s_t)+1}$ .

La méthode reposant sur cet incrément est appelée la *méthode de « SARSA »*. Elle appartient à une grande famille appelée « on-policy », dans laquelle la politique d'exploration utilisée pour générer les trajectoires coïncide avec celle dont on est en train d'estimer la fonction  $Q_\mu$ . Une fois que l'algorithme a convergé, on détermine la politique gloutonne  $\mu^*(s) \in \operatorname{argmax}_\mu Q(s, \mu(s))$ .

Il existe des variantes où l'on sépare la politique d'exploration qui choisit les actions à chaque étape de la politique cible (celle qu'on évalue avec la fonction valeur). La plus connue est la « méthode du Q-learning » qui choisit comme politique cible la politique gloutonne, conduisant à l'incrément :

$$Q_{n+1}^\mu(s_t, a_t) = Q_n^\mu(s_t, a_t) + \alpha_n (r(s_t, a_t) + \gamma Q_n^\mu(s_{t+1}, Q_n^*) - Q_n^\mu(s_t, a_t))$$

où  $Q_n^* := \operatorname{argmax}_a Q_n^\mu(s_t, a)$ . Les méthodes sans modèle de ce type sont au centre de l'apprentissage par renforcement. La politique est construite par interaction avec l'environnement sans connaissance globale du processus markovien. Elles permettent notamment de traiter des problèmes de plus grande taille que les méthodes de programmation dynamique. Il existe un certain nombre de variantes de cette méthode.

Lorsque l'espace des états et des actions sont dénombrables et de petites tailles, les politiques et les fonctions  $V$  et  $Q$  sont tabulées. Pour des espaces de grandes tailles ou indénombrables, on construit des fonctions des états et actions, ce qui nécessite de nouvelles approximations.

Grâce aux énormes progrès de l'apprentissage profond qui permet d'effectuer efficacement des régressions non linéaires en grande dimension, ces méthodes ont pu être étendues à des problèmes de plus grande taille et plus complexes. En première place, se situe la méthode de « Q-learning » que l'on appelle couramment « Deep-Q learning ». Elle se fonde sur l'algorithme de Q-learning en représentant la fonction  $Q$  par un réseau de neurones et ajoute quelques petits ingrédients propres à l'apprentissage profond.

Subséquentement, une autre famille de méthodes a été introduite depuis une dizaine d'années. Ces méthodes se fondent sur un résultat important appelé gradient de politique [13], montrant que si on cherche la politique qui maximise la fonction valeur associée à une politique  $\mu_\theta$  paramétrée par un vecteur  $\theta$  et s'écrivant comme une moyenne sur tous les états de la forme

$$\mathcal{J}(\theta) = \int_S V_{\mu_\theta}(s) ds$$

alors on peut obtenir une expression explicite du gradient par rapport aux paramètres de la politique qui dépend uniquement de la politique choi-

sie et de la fonction  $Q$ . Cela permet d'obtenir des méthodes de gradient de politiques assez simple comme la méthode REINFORCE ou les approches « acteur-critique ». Ces approches sont à l'origine de développements importants en robotique, en IA de jeu ou en contrôle.

## Références

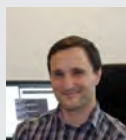
- [1] C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH. « Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary ». *SIAM J. Control Optim.* **30**, n° 5 (1992), p. 1024-1065.
- [2] J. CORON, B. D'ANDREA-NOVEL et G. BASTIN. « Penser globalement, agir localement ». *La Recherche* **417** (2008). Revu et mis à jour dans « Les dossiers de La Recherche », **37**, 2009, p. 38-39, p. 82.
- [3] J.-M. CORON. *Control and nonlinearity*. **136**. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, p. xiv+426.
- [4] J.-M. CORON et E. TRÉLAT. « Tout est sous contrôle ». *Matapli*, n° 83 (2007), p. 59-73.
- [5] S. DOLECKI et D. L. RUSSELL. « A general theory of observation and control ». *SIAM J. Control Optim.* **15**, n° 2 (1977), p. 185-220.
- [6] A. ERN. « Contrôle de modèles dynamiques ». Polycopié de cours, promotion X2017, Année 2, MAP434.
- [7] E. FERNÁNDEZ CARA et E. ZUAZUA IRIONDO. « Control theory : History, mathematical achievements and perspectives ». *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, **26**, 79-140. (2003).
- [8] F. GAZZOLA et E. M. MARCHINI. « The moon lander optimal control problem revisited ». *Math. Eng.* **3**, n° 5 (2021), Paper n°. 040, 14.
- [9] F. JEAN. *Stabilité et commande des systèmes dynamiques ; cours et exercices corrigés*. 2017.
- [10] J. C. MAXWELL. « I. On governors ». *Proceedings of the Royal Society of London*, n° 16 (1868), p. 270-283.
- [11] R. MUNOS. *Introduction à l'apprentissage par renforcement*. Notes en ligne, cours du master 2 MVA. URL : <http://researchers.lille.inria.fr/~munos/master-mva>.
- [12] D. SILVER et al. « A general reinforcement learning algorithm that masters chess, shogi, and Go through self-play ». *Science* **362**, n° 6419 (2018), p. 1140-1144.
- [13] R. S. SUTTON et A. G. BARTO. *Introduction to Reinforcement Learning*. MIT Press, Cambridge, MA, 1998.
- [14] R. S. SUTTON et A. G. BARTO. *Reinforcement learning : an introduction*. Second. Adaptive Computation and Machine Learning. MIT Press, Cambridge, MA, 2018, p. xxii+526.



### Emmanuel FRANCK

INRIA, IRMA, université de Strasbourg, UMR 7501  
[emmanuel.franck@unistra.fr](mailto:emmanuel.franck@unistra.fr)

Emmanuel Franck est chercheur à INRIA Nancy Grand Est. Il s'intéresse à des questions d'analyse numérique allant de l'étude de schémas préservant des propriétés des modèles continus jusqu'au développement de méthodes utilisant l'intelligence artificielle pour résoudre des équations aux dérivées partielles.



### Yannick PRIVAT

IRMA, université de Strasbourg, UMR 7501, INRIA et Institut Universitaire de France (IUF)  
[yannick.privat@unistra.fr](mailto:yannick.privat@unistra.fr)

Yannick Privat est professeur à l'université de Strasbourg. Sa recherche s'articule autour de l'optimisation de forme, du contrôle et du contrôle optimal d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Les auteurs tiennent à remercier très chaleureusement Gilles Carron et Matthieu Léautaud pour leur relecture attentive et leurs nombreux commentaires sur cet article.



# Sur la dynamique des gaz dilués

- T. BODINEAU
- I. GALLAGHER
- L. SAINT-RAYMOND
- S. SIMONELLA

L'évolution d'un gaz peut être décrite par différents modèles mathématiques selon l'échelle d'observation. Une question naturelle, soulevée par Hilbert dans son sixième problème, est de savoir si ces modèles fournissent des prédictions cohérentes entre elles. En particulier, pour les gaz raréfiés, on s'attend à ce que les équations des continua de la théorie cinétique des gaz puissent être obtenues à partir de la dynamique moléculaire régie par les principes fondamentaux de la mécanique. Dans le cas des gaz de sphères dures, Lanford [16] a montré que l'équation de Boltzmann apparaît en effet comme une loi des grands nombres dans la limite de faible densité, au moins pour des temps très courts. L'objectif de ce texte est de présenter des progrès récents dans la compréhension de ce processus limite.

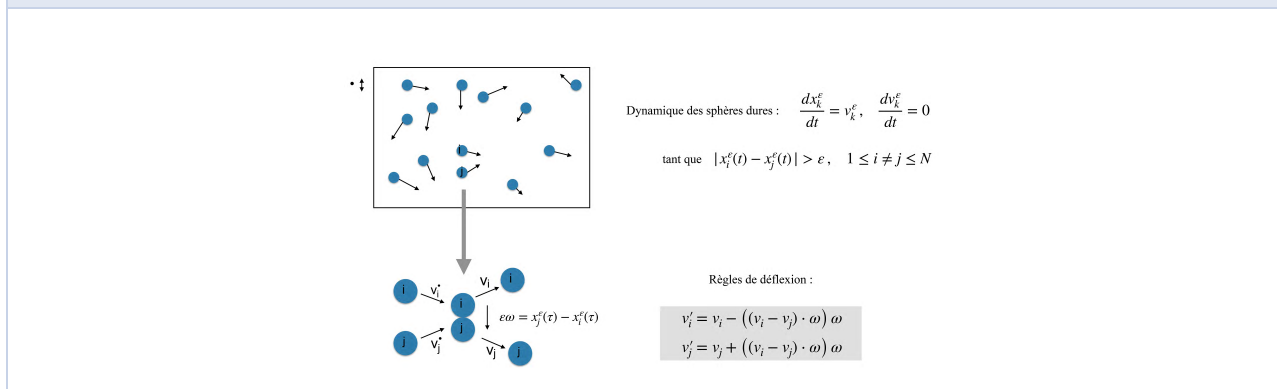
## 1. Une approche statistique de la dynamique des gaz dilués

### 1.1 – Le modèle physique : un gaz dilué de sphères dures

Même si à l'époque où Boltzmann a publié son célèbre article [8], la théorie atomique était encore rejetée par certains scientifiques, il était déjà bien établi que la matière est composée d'atomes, qui sont les constituants élémentaires de tous les solides, liquides et gaz. La particularité des gaz dilués est que le volume occupé par leurs atomes est négligeable par rapport au volume total occupé par le gaz, et il y

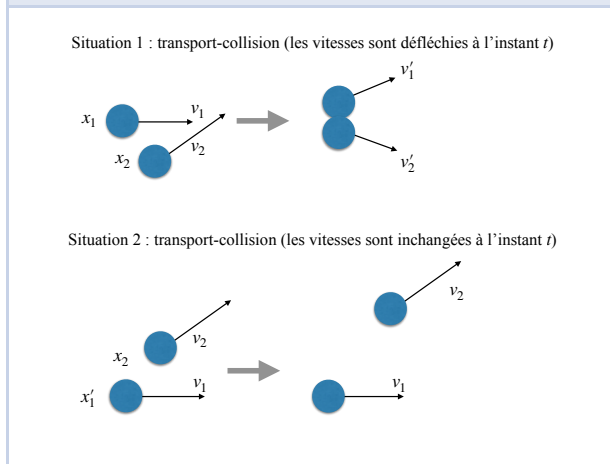
a donc très peu de contraintes sur leur arrangement géométrique : les atomes sont ainsi très faiblement liés et presque indépendants. En négligeant la structure interne des atomes, leur éventuelle organisation en molécules et l'effet d'interactions à longue distance, un gaz peut se représenter comme un système formé d'un grand nombre de particules qui se déplacent en ligne droite et entrent occasionnellement en collision l'une avec l'autre, entraînant un changement de direction quasi-instantané. L'exemple le plus simple d'un tel modèle consiste à supposer que les particules sont de petites sphères identiques, de diamètre  $\varepsilon \ll 1$  et de masse 1, interagissant uniquement par contact (voir la figure 1).

FIGURE 1 – Au temps  $t$ , le système de sphères dures est décrit par les positions  $(x_k^\varepsilon(t))_{k \leq N}$  et les vitesses  $(v_k^\varepsilon(t))_{k \leq N}$  des  $N$  particules. Elles se déplacent en ligne droite et lorsque deux d'entre elles se touchent, elles sont défléchies selon les lois de la réflexion élastique.



On parle alors d'un *gaz de sphères dures*. Cette description microscopique d'un gaz est explicite mais très difficile à utiliser en pratique car le nombre de particules est extrêmement grand, leur taille est minuscule et leurs collisions sont donc très sensibles à de petits décalages (voir la figure 2).

FIGURE 2 – Les particules sont très petites (de diamètre  $\varepsilon \ll 1$ ) et la dynamique est très sensible à des petits décalages en espace. Dans le premier cas représenté ci-dessous, deux particules avec des positions initiales  $x_1, x_2$  et des vitesses  $v_1, v_2$  entrent en collision et sont défléchies. Dans le second cas, en déplaçant la première particule d'une distance  $2\varepsilon$ , les deux particules n'entrent plus en collision et se déplacent en ligne droite. Ainsi, une perturbation d'ordre  $\varepsilon$  des conditions initiales peut conduire à des trajectoires très différentes.



Ce modèle n'est donc pas efficace pour faire des prédictions théoriques. La question que nous voulons aborder ici concerne la cohérence entre cette description atomique (simplifiée) et les modèles cinétiques ou fluides utilisés dans les applications. Cette question a été formalisée par Hilbert au Congrès Mondial des Mathématiciens en 1900, dans son sixième problème : « Le Livre de M. Boltzmann sur les principes de la mécanique nous incite à établir et à discuter au point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes reposant sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua ».

L'équation de Boltzmann, mentionnée par Hilbert et que nous présentons plus en détail plus bas, exprime que la distribution des particules évolue sous l'effet combiné du transport libre et des collisions. Pour que ces deux effets soient du même ordre de

grandeur, un calcul simple montre que, en dimension  $d \geq 2$ , le nombre de particules  $N$  et leur diamètre  $\varepsilon$  doivent satisfaire à la relation d'échelle  $N\varepsilon^{d-1} = O(1)$ , dite *échelle de Boltzmann-Grad* [14]. En effet, le régime décrit par l'équation de Boltzmann est tel que le libre parcours moyen, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une particule se déplaçant en ligne droite entre deux collisions, est de l'ordre de 1. Ainsi une particule typique devrait parcourir un tube de volume  $O(\varepsilon^{d-1})$  entre deux collisions, et en moyenne, ce tube devrait croiser l'une des  $N - 1$  autres particules. Notons que dans ce régime, le volume total occupé par les particules à un instant donné est proportionnel à  $N\varepsilon^d$  et est donc négligeable par rapport au volume total occupé par le gaz. On parle alors d'un *gaz dilué*.

### 1.2 – Trois niveaux de moyennisation

Dorénavant on suppose que le système de particules évolue dans le domaine unité avec des conditions aux limites périodiques  $\mathbb{T}^d = [0, 1]^d$ . On considère que les  $N$  particules sont identiques : c'est l'hypothèse d'échangeabilité. L'état du système peut être représenté par une mesure dans l'espace des phases  $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ , appelée *mesure empirique*

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x-x_i} \delta_{v-v_i},$$

où  $\delta_x$  est la masse de Dirac en  $x = 0$ . Cette mesure est complètement symétrique (c'est-à-dire invariante par permutation des indices des particules) en raison de l'hypothèse d'échangeabilité.

Cette première moyennisation n'est pas suffisante pour obtenir une description simple de la dynamique lorsque  $N$  est grand, à cause des instabilités mentionnées dans la section précédente (voir la figure 2) qui conduisent à une forte dépendance en  $\varepsilon$  des trajectoires des particules. Nous allons donc introduire une seconde moyennisation, par rapport aux configurations initiales ; d'un point de vue physique, cette moyennisation est naturelle puisque seule une information fragmentaire sur la configuration initiale est disponible. Nous supposons donc que les données initiales  $(X_N, V_N) = (x_i, v_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une distribution  $f^0 = f^0(x, v)$ . Cette hypothèse doit être légèrement corrigée afin de prendre en compte l'exclusion entre particules :  $|x_i - x_j| > \varepsilon$  pour  $i \neq j$ . Ce cadre statistique est appelé l'ensemble *canonique*. Il s'agit d'un cadre

simple permettant de dégager des fondements rigoureux pour la théorie cinétique, c'est-à-dire de caractériser, dans l'asymptotique des grands  $N$ , la dynamique moyenne et plus précisément l'équation d'évolution régissant la distribution  $f(t, x, v)$  au temps  $t$  d'une particule typique.

Dans ce texte, notre objectif est d'aller au-delà de cette dynamique moyenne, et de décrire de manière fine les corrélations qui apparaissent dynamiquement à l'intérieur du gaz. Fixer a priori le nombre  $N$  de particules induit des corrélations supplémentaires, nous introduisons donc pour les contourner un troisième niveau de moyennisation en supposant que  $N$  est également une variable aléatoire, et que seule sa moyenne  $\mu_\varepsilon = \varepsilon^{-(d-1)}$  est déterminée (selon l'échelle de Boltzmann-Grad). Pour définir un système de sphères dures initialement indépendantes (modulo l'exclusion) et identiquement distribuées selon  $f^0$ , on introduit ainsi la mesure *grand canonique* : la densité de probabilité de trouver  $N$  particules de coordonnées  $(x_i, v_i)_{i \leq N}$  est donnée par

$$\frac{1}{\mathcal{Z}^\varepsilon} \frac{\mu_\varepsilon^N}{N!} \prod_{i=1}^N f^0(x_i, v_i) \prod_{i \neq j} \mathbf{1}_{|x_i - x_j| > \varepsilon}, \text{ pour } N = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

où la constante  $\mathcal{Z}^\varepsilon$  est le facteur de normalisation de la mesure de probabilité. Nous supposons dans la suite que la fonction  $f^0$  est lipschitzienne, avec une décroissance gaussienne en vitesses. La probabilité et l'espérance correspondantes sur les trajectoires des particules seront notées  $\mathbb{P}_\varepsilon$  et  $\mathbb{E}_\varepsilon$ .

### 1.3 – Une approche statistique

Une fois la configuration initiale aléatoire  $(N, (x_i^{\varepsilon 0}, v_i^{\varepsilon 0})_{1 \leq i \leq N})$  choisie, la dynamique de sphères dures évolue de manière déterministe (régie par les équations des sphères dures présentées dans la figure 1), et nous cherchons à comprendre le comportement statistique de la mesure empirique

$$\pi_t^\varepsilon(x, v) := \frac{1}{\mu_\varepsilon} \sum_{i=1}^N \delta_{x-x_i^\varepsilon(t)} \delta_{v-v_i^\varepsilon(t)}, \quad (2)$$

et son évolution en temps.

### Une loi des grands nombres

La première question est de déterminer la loi des grands nombres, c'est-à-dire la distribution limite d'une particule typique lorsque  $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$ . Dans

le cas de  $N$  variables indépendantes identiquement distribuées  $(\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$  et d'espérance  $\mathbb{E}(\eta)$ , la loi des grands nombres implique notamment que la moyenne converge en probabilité vers l'espérance

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta).$$

On montre aisément la convergence suivante en probabilité

$$\langle \pi_{0^\varepsilon}^\varepsilon, h \rangle := \frac{1}{\mu_\varepsilon} \sum_{i=1}^N h(x_i^{\varepsilon 0}, v_i^{\varepsilon 0}) \xrightarrow{\mu_\varepsilon \rightarrow \infty} \int f^0 h(x, v) dx dv,$$

sous la mesure grand-canonique. La difficulté est de comprendre si la quasi-indépendance initiale se propage en temps de sorte qu'il existe une fonction  $f = f(t, x, v)$  telle que la convergence suivante en probabilité soit vérifiée

$$\langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle \xrightarrow{\mu_\varepsilon \rightarrow \infty} \int f(t, x, v) h(x, v) dx dv \quad (3)$$

sous la mesure grand-canonique (1) sur les configurations initiales, et si  $f$  évolue selon une équation déterministe, à savoir l'équation de Boltzmann. Le résultat majeur prouvant cette convergence remonte à Lanford [16] et sera expliqué dans la section 2.2.

### Un théorème central limite

L'approximation (3) de la mesure empirique néglige deux types d'erreurs. La première est la présence de termes correcteurs qui convergent vers 0 lorsque  $\mu_\varepsilon \rightarrow +\infty$ . La seconde est liée à la probabilité, qui doit tendre vers zéro, qu'une configuration initiale soit telle que cette convergence n'a pas lieu. Une question classique en physique statistique est de quantifier plus précisément ces erreurs, en étudiant les fluctuations, c'est-à-dire les déviations entre la mesure empirique et son espérance. Dans le cas de  $N$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées  $(\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$ , le théorème central limite implique que les fluctuations sont d'ordre  $O(1/\sqrt{N})$ , et la convergence en loi suivante est vérifiée

$$\sqrt{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i - \mathbb{E}(\eta) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, \text{Var}(\eta)),$$

où  $\mathcal{N}(0, \text{Var}(\eta))$  est la loi normale de variance  $\text{Var}(\eta) = \mathbb{E}((\eta - \mathbb{E}(\eta))^2)$ . En particulier, à cette échelle, on retrouve un certain caractère aléatoire. L'étude du même régime de fluctuation pour la dynamique

des gaz de sphères dures consiste à considérer le champ de fluctuation  $\zeta_t^\varepsilon$  défini par dualité

$$\langle \zeta_t^\varepsilon, h \rangle := \sqrt{\mu_\varepsilon} \left( \langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle - \mathbb{E}_\varepsilon(\langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle) \right), \quad (4)$$

où  $h$  est une fonction continue, et  $\mathbb{E}_\varepsilon$  l'espérance associée à la mesure grand-canonique (voir les notations introduites après (1)). Au temps 0, on montre facilement que, sous la mesure grand-canonique, le champ de fluctuation  $\zeta_0^\varepsilon$  converge dans la limite de Boltzmann-Grad vers un champ gaussien  $\zeta_0$  avec covariance

$$\mathbb{E}(\zeta_0(h) \zeta_0(g)) = \int f^0(z) h(z) g(z) dz. \quad (5)$$

Une série de travaux récents [4, 7, 6, 5] a permis de caractériser les fluctuations dynamiques (4), et d'obtenir une équation d'évolution stochastique régissant le processus limite. Ces résultats sont présentés dans la section 3.3.

### Des grandes déviations

La dernière question généralement étudiée dans une approche probabiliste classique est celle de la quantification des événements rares, c'est-à-dire l'estimation de la probabilité d'observer un comportement atypique (qui s'écarte macroscopiquement de la moyenne). Pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, cette probabilité est exponentiellement petite, et il est donc naturel d'étudier l'asymptotique

$$I(m) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \ln \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i - m \right| < \delta \right) \quad (6)$$

avec  $m \neq \mathbb{E}(\eta)$ .

La limite  $I(m)$  est appelée fonctionnelle de grandes déviations et peut être exprimée comme la transformée de Legendre de la transformée log-Laplace  $u : \mathbb{R} \mapsto \ln \mathbb{E}(\exp(u\eta))$ . Pour généraliser cette affirmation aux variables corrélées d'un gaz de sphères dures, il est nécessaire de calculer la transformée de log-Laplace de la mesure empirique sur des trajectoires déterministes, ce qui requiert un contrôle extrêmement précis des corrélations dynamiques. Notons qu'à l'instant 0, sous la mesure grand-canonique, on peut montrer que pour tout  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\mu_\varepsilon \rightarrow \infty} -\frac{1}{\mu_\varepsilon} \ln \mathbb{P}_\varepsilon(d(\pi_0^\varepsilon, \varphi^0) \leq \delta) &= H(\varphi^0 | f^0) \\ &:= \int \left( \varphi^0 \ln \frac{\varphi^0}{f^0} - (\varphi^0 - f^0) \right) dx dv, \end{aligned}$$

où  $d$  est une distance sur l'espace des mesures. Les méthodes de cumulants dynamiques introduites dans [4, 7] sont un outil clé pour calculer les moments exponentiels de la distribution des sphères dures et ainsi pour obtenir l'équivalent dynamique de ce résultat en temps court. Nous donnons un aperçu de ces techniques dans la section 3.

## 2. Comportement typique : une loi des grands nombres

### 2.1 – La formidable intuition de Boltzmann

L'équation qui régit l'évolution typique d'un gaz de sphères dures a été proposée de manière heuristique par Boltzmann [8] environ un siècle avant sa dérivation rigoureuse par Lanford [16], comme « limite » du système de particules lorsque  $\mu_\varepsilon \rightarrow +\infty$ . L'idée révolutionnaire de Boltzmann a été d'écrire une équation d'évolution pour la densité de probabilité  $f = f(t, x, v)$  donnant la proportion de particules à la position  $x$  avec la vitesse  $v$  au temps  $t$ . En l'absence de collisions, et dans un domaine sans bord, cette densité  $f$  serait transportée le long des trajectoires physiques  $x(t) = x(0) + vt$ , ce qui signifie que  $f(t, x, v) = f^0(x - vt, v)$ . La difficulté consiste à prendre en compte l'effet statistique des collisions. Dans la mesure où la taille des particules est négligeable, on peut considérer que ces collisions sont ponctuelles à la fois en  $t$  et  $x$ . Boltzmann a proposé un comptage assez intuitif :

- le nombre de particules de vitesse  $v$  augmente lorsqu'une particule de vitesse  $v'$  entre en collision avec une particule de vitesse  $v'_1$ , et prend la vitesse  $v$  (voir la figure 1 et (8));
- le nombre de particules de vitesse  $v$  diminue lorsqu'une particule de vitesse  $v$  entre en collision avec une particule de vitesse  $v_1$ , et est déviée avec une autre vitesse.

La probabilité de ces sauts en vitesse est décrite par un taux de transition, appelé *section efficace de collision*. Pour les interactions entre sphères dures, elle est donnée par  $((v - v_1) \cdot \omega)_+$  où  $v - v_1$  est la vitesse relative des particules entrant en collision, et  $\omega$  est le vecteur de déflexion, uniformément distribué dans la sphère unité  $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

L'hypothèse fondamentale de la théorie de Boltzmann est que dans un gaz raréfié, les corrélations entre deux particules entrant en collision doivent être très faibles. Par conséquent, la probabilité jointe

d'avoir deux particules précollisionnelles de vitesses  $v$  et  $v_1$  à la position  $x$  au temps  $t$  devrait être bien approchée par le produit  $f(t, x, v)f(t, x, v_1)$ . Cette propriété d'indépendance est appelée *hypothèse de chaos moléculaire*. L'équation de Boltzmann est alors la suivante

$$\partial_t f + \underbrace{v \cdot \nabla_x f}_{\text{transport}} = \underbrace{C(f, f)}_{\text{collision}} \quad (7)$$

où

$$C(f, f)(t, x, v) = \iint \left[ \underbrace{f(t, x, v')f(t, x, v_1')}_{\text{terme de gain}} - \underbrace{f(t, x, v)f(t, x, v_1)}_{\text{terme de perte}} \right] \times \underbrace{\left( (v - v_1) \cdot \omega \right)_+}_{\text{section efficace}} dv_1 d\omega$$

avec les lois de déflexion

$$v' = v - \left( (v - v_1) \cdot \omega \right) \omega, \quad v_1' = v_1 + \left( (v - v_1) \cdot \omega \right) \omega \quad (8)$$

qui sont analogues à celles introduites en figure 1, avec la différence importante que  $\omega$  est maintenant un vecteur aléatoire choisi uniformément dans la sphère unité  $\mathbb{S}^{d-1}$  : en effet, la position relative des particules collisionnelles a été oubliée dans la limite  $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$ . En conséquence, l'équation de Boltzmann est singulière car elle fait intervenir un produit de densités en un même point  $x$ .

L'idée de Boltzmann de réduire la dynamique hamiltonienne décrivant le comportement atomique à une équation cinétique, était révolutionnaire et a ouvert la voie à la description des phénomènes hors équilibre par des équations mésoscopiques. Cependant, l'équation de Boltzmann (7) a d'abord été fortement critiquée car elle semble violer certains principes physiques fondamentaux. En effet elle prédit une évolution irréversible en temps : elle possède une fonction de Lyapunov, appelée entropie, définie par  $S(t) := - \iint f \ln f(t, x, v) dx dv$  et qui vérifie  $\frac{d}{dt} S(t) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si le gaz est à l'équilibre thermodynamique. L'équation de Boltzmann fournit ainsi une formulation quantitative du deuxième principe de la thermodynamique. Mais à première vue, cette irréversibilité semble incompatible avec le fait que la dynamique des sphères dures est régie par un système hamiltonien, c'est-à-dire un système d'équations différentielles ordinaires qui est

complètement réversible en temps. Peu après que Boltzmann a postulé son équation, ces deux comportements différents ont été considérés, par Loschmidt, comme un paradoxe et une obstruction à la théorie de Boltzmann. Une explication mathématique pleinement satisfaisante de cette question est restée en suspens pendant près d'un siècle, jusqu'à ce que le rôle des probabilités soit précisément identifié : la dynamique sous-jacente est réversible, mais la description qui est donnée de cette dynamique n'est que partielle et n'est donc pas réversible.

## 2.2 – Comportement typique : le théorème de Lanford

Le résultat de Lanford [16] montre en quel sens l'équation de Boltzmann (7) est une bonne approximation de la dynamique des sphères dures. Il peut être énoncé comme suit (ce n'est pas exactement la formulation originale, voir en particulier la section 2.4 ci-dessous pour des commentaires).

**Théorème 1 (Lanford).** *Dans la limite de Boltzmann-Grad ( $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$  avec  $\mu_\varepsilon \varepsilon^{d-1} = 1$ ), la mesure empirique  $\pi_t^\varepsilon$  définie par (2) se concentre sur la solution de l'équation de Boltzmann (7) : pour toute fonction bornée et continue  $h$*

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{\mu_\varepsilon \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\varepsilon \left( \left| \langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle - \int f(t, x, v) h(x, v) dx dv \right| \geq \delta \right) = 0,$$

sur un intervalle de temps  $[0, T_L]$  dépendant uniquement de la distribution initiale  $f^0$ .

Le temps de validité  $T_L$  de l'approximation s'avère être de l'ordre d'une fraction du temps moyen entre deux collisions successives pour une particule typique. Ce temps est suffisamment grand pour que le système microscopique subisse un grand nombre de collisions (de l'ordre de  $\mu_\varepsilon$ ) mais (beaucoup) trop petit pour voir apparaître des phénomènes tels que la relaxation vers l'équilibre thermodynamique (local), et a fortiori des régimes hydrodynamiques. Physiquement, nous ne nous attendons pas à ce que ce temps soit critique, dans le sens où la dynamique changerait de nature par la suite. En fait, dans la pratique, l'équation de Boltzmann est utilisée dans de nombreuses applications (comme les calculs de réentrée des véhicules spatiaux dans l'atmosphère) sans restriction de temps. Cependant, il est important de noter qu'une restriction temporelle pourrait ne pas être seulement technique : du point de vue mathématique, on ne peut pas exclure que l'équation de Boltzmann



présente des singularités (typiquement des concentrations spatiales qui empêcheraient de donner un sens au terme de collision, et qui contrediraient aussi localement l'hypothèse de faible densité). Dans l'état actuel de nos connaissances, le problème de l'extension du résultat de convergence de Lanford à des temps plus longs se heurte à de sérieux obstacles.

### 2.3 – Heuristique de la preuve du théorème de Lanford

Expliquons de manière informelle comment l'équation de Boltzmann (7) peut être devinée à partir de la dynamique des particules. Le but est de transporter par la dynamique la mesure grand canonique initiale (1), et ensuite de projeter cette mesure au temps  $t$  sur l'espace des phases d'une particule. On définit ainsi par dualité la densité  $F_1^\varepsilon(t, x, v)$  d'une particule typique par rapport à une fonction test  $h$

$$\int F_1^\varepsilon(t, x, v)h(x, v) dx dv := \mathbb{E}_\varepsilon(\langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle). \quad (9)$$

Le théorème 1 énonce que  $F_1^\varepsilon$  converge vers la solution de l'équation de Boltzmann  $f$  dans la limite de Boltzmann-Grad. Soit donc  $h$  une fonction assez régulière et bornée sur  $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$  et considérons l'évolution de la mesure empirique pendant un court intervalle de temps  $[t, t + \delta]$  : en séparant les différentes contributions en fonction du nombre de collisions, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \left( \mathbb{E}_\varepsilon[\langle \pi_{t+\delta}^\varepsilon, h \rangle] - \mathbb{E}_\varepsilon[\langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle] \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \mathbb{E}_\varepsilon \left[ \frac{1}{\mu_\varepsilon} \sum_{\substack{j \\ \text{pas de collision}}} \left( h(z_j^\varepsilon(t + \delta)) - h(z_j^\varepsilon(t)) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{\delta} \mathbb{E}_\varepsilon \left[ \frac{1}{2\mu_\varepsilon} \sum_{\substack{(i,j) \\ \text{ont 1 collision}}} \left( h(z_i^\varepsilon(t + \delta)) + h(z_j^\varepsilon(t + \delta)) \right) \right. \\ &\quad \left. - h(z_i^\varepsilon(t)) - h(z_j^\varepsilon(t)) \right] + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Pour simplifier, on a noté  $z_i^\varepsilon(t)$  les coordonnées  $(x_i^\varepsilon(t), v_i^\varepsilon(t))$  de la  $i$ -ième particule au temps  $t$ . Le membre de gauche de (10) convergeant formellement quand  $\delta \rightarrow 0$  vers la dérivée temporelle de  $\mathbb{E}_\varepsilon[\langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle]$ , nous allons analyser la limite  $\delta \rightarrow 0$  des deux premiers termes du membre de droite de (10), qui devraient conduire à un terme de transport et un terme de collision comme dans (7). Nous expliquerons aussi pourquoi les termes de reste, impliquant deux collisions ou plus dans le court intervalle de temps  $\delta$ , tendent vers 0 avec  $\delta$  (en montrant qu'ils sont d'ordre  $\delta$ ).

Comme les particules se déplacent en ligne droite et à vitesse constante en l'absence de collision, si la distribution  $F_1^\varepsilon$  est assez régulière, la définition (9) de  $F_1^\varepsilon$  implique formellement que quand  $\delta$  tend vers 0, le premier terme du membre de droite de (10) est asymptotique à

$$\int F_1^\varepsilon(t, z)v \cdot \nabla_x h(z) dz = - \int \left( v \cdot \nabla_x F_1^\varepsilon(t, z) \right) h(z) dz. \quad (11)$$

Le terme de transport de (7) est donc bien obtenu à la limite. Considérons maintenant le deuxième terme du membre de droite de (10). Deux particules de configurations  $(x_1, v_1)$  et  $(x_2, v_2)$  au temps  $t$  entrent en collision à un temps ultérieur  $\tau \leq t + \delta$  s'il existe  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  tel que

$$x_1 - x_2 + (\tau - t)(v_1 - v_2) = -\varepsilon\omega. \quad (12)$$

Ceci implique que leur position relative doit appartenir à un tube orienté dans la direction  $v_1 - v_2$  de longueur  $\delta|v_1 - v_2|$  et de largeur  $\varepsilon$ . Cet ensemble est de mesure de Lebesgue de l'ordre de  $\delta\varepsilon^{d-1}|v_2 - v_1| = O(\delta\varepsilon^{d-1})$  (en négligeant les grandes vitesses). Plus généralement, une série de  $k - 1$  collisions entre  $k$  particules impose  $k - 1$  contraintes de la forme précédente, et on peut montrer que cet événement a une probabilité inférieure à  $(\delta\varepsilon^{d-1})^{k-1} = (\delta\mu_\varepsilon^{-1})^{k-1}$  (toujours en négligeant les grandes vitesses). Puisqu'il existe, en moyenne,  $\mu_\varepsilon^k$  façons de choisir ces  $k$  particules entrant en collision, on en déduit que l'occurrence de  $k - 1$  collisions dans (10) a une probabilité de l'ordre de  $\delta^{k-1}\mu_\varepsilon$ . Ceci explique pourquoi la probabilité d'avoir  $k \geq 3$  particules qui se collisionnent peut être estimée par  $O(\delta^2)$  et donc peut être négligée dans (10).

Il reste à examiner de plus près le terme de collision impliquant deux particules dans (10), afin d'obtenir l'opérateur de collision  $C(f, f)$  de l'équation de Boltzmann (7). Ce terme fait intervenir la fonction de corrélation  $F_2^\varepsilon$  à deux particules. Pour tout  $k \geq 1$  on définit

$$\int F_k^\varepsilon(t, Z_k)h_k(Z_k)dZ_k = \mathbb{E}_\varepsilon \left( \frac{1}{\mu_\varepsilon^k} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} h_k(z_{i_1}^\varepsilon(t), \dots, z_{i_k}^\varepsilon(t)) \right), \quad (13)$$

en notant  $Z_k = (x_i, v_i)_{1 \leq i \leq k}$ . On peut alors montrer que dans la limite  $\delta \rightarrow 0$

$$\underbrace{\partial_t F_1^\varepsilon + v \cdot \nabla_x F_1^\varepsilon}_{\text{transport}} = \underbrace{C^\varepsilon(F_2^\varepsilon)}_{\text{collision à distance } \varepsilon}, \quad (14)$$

où

$$C^\varepsilon(F_2^\varepsilon)(t, x, v) = \iint \left[ \underbrace{F_2^\varepsilon(t, x, v', x + \varepsilon\omega, v'_1)}_{\text{terme de gain}} - \underbrace{F_2^\varepsilon(t, x, v, x - \varepsilon\omega, v_1)}_{\text{terme de perte}} \right] \times \underbrace{\left( (v - v_1) \cdot \omega \right)_+}_{\text{section efficace}} dv_1 d\omega.$$

L'étape clé pour fermer l'équation est l'hypothèse de chaos moléculaire postulée par Boltzmann, qui affirme que les particules précollisionnelles restent indépendamment distribuées à tout instant de sorte qu'avec la convention (12) fixant le signe de  $\omega$ , on a

$$F_2^\varepsilon(t, z_1, z_2) \simeq F_1^\varepsilon(t, z_1)F_1^\varepsilon(t, z_2), \quad \text{si } (v_1 - v_2) \cdot \omega > 0. \tag{15}$$

Lorsque le diamètre  $\varepsilon$  des sphères tend vers 0, les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  coïncident et le paramètre de diffusion  $\omega$  devient un paramètre aléatoire. En supposant que  $F_1^\varepsilon$  converge, alors sa limite doit satisfaire à l'équation de Boltzmann (7).

Établir rigoureusement la factorisation (15) met en œuvre une stratégie différente, élaborée par Lanford [16], puis complétée et améliorée au fil des années : nous renvoyons aux monographies [25, 11, 10]. Au cours des dernières années, plusieurs résultats quantitatifs de convergence ont été établis, et les preuves ont été étendues au cas de domaines un peu plus généraux, des potentiels à support compact, ou fortement décroissants à l'infini : voir [1, 12, 13, 17, 21, 22].

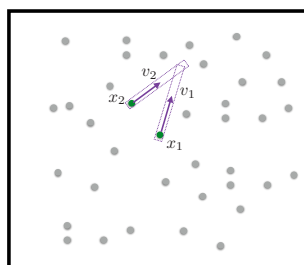
### 2.4 – Sur l'irréversibilité

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la réponse au paradoxe de l'irréversibilité se trouve dans l'hypothèse de chaos moléculaire (15), qui n'est valable que pour des configurations spécifiques.

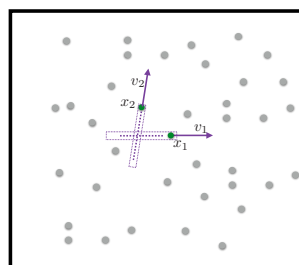
En fait, la notion de convergence qui apparaît dans l'énoncé du Théorème 1 diffère légèrement de celle utilisée dans la preuve de Lanford : le théorème 1 énonce ainsi la convergence des observables  $\langle \pi_t^\varepsilon, h \rangle$ , c'est-à-dire une convergence au sens des mesures puisque la fonction test  $h$  doit être continue. Cette convergence est plutôt faible et n'est pas suffisante pour assurer la stabilité du terme de collision dans l'équation de Boltzmann puisque ce terme implique des traces. Dans la preuve du théorème de Lanford, on considère toutes les fonctions de corrélation  $F_k^\varepsilon$  à  $k$  particules, définies par (13), et on montre que chacune de ces fonctions de corrélation converge uniformément en dehors d'un ensemble  $\mathcal{B}_k^\varepsilon$  de mesure négligeable lorsque  $\mu_\varepsilon$  tend vers l'infini. Ainsi, la preuve utilise une notion de convergence beaucoup plus forte que celle énoncée dans le théorème 1.

De plus, l'ensemble  $\mathcal{B}_k^\varepsilon$  des mauvaises configurations microscopiques  $(t, Z_k)$  (sur lesquelles  $F_k^\varepsilon$  ne converge pas) est en quelque sorte transverse à l'ensemble des configurations précollisionnelles (comme on peut le voir sur la figure 3, deux particules dans  $\mathcal{B}_2^\varepsilon$  ont tendance à s'éloigner l'une de l'autre de sorte qu'elles ont peu de chances d'entrer en collision).

FIGURE 3 – Sur la figure de gauche, les particules 1 et 2 se rencontreront dans le futur ; avec forte probabilité, elles ne sont pas entrées en collision dans le passé et nous nous attendons à ce que la fonction de corrélation  $F_2^\varepsilon$  se factorise dans la limite  $\mu_\varepsilon \rightarrow \infty$ . Sur la figure de droite, les coordonnées des particules appartiennent au mauvais ensemble  $\mathcal{B}_2^\varepsilon$ , ce qui signifie qu'elles se sont très probablement rencontrées dans le passé. Dans ce cas, des corrélations microscopiques ont été construites dynamiquement et la factorisation (15) ne devrait pas être valide.



$$F_2^\varepsilon(t, x_1, v_1, x_2, v_2) \simeq F_1^\varepsilon(t, x_1, v_1)F_1^\varepsilon(t, x_2, v_2)$$



$$F_2^\varepsilon(t, x_1, v_1, x_2, v_2) \not\simeq F_1^\varepsilon(t, x_1, v_1)F_1^\varepsilon(t, x_2, v_2)$$

Le défaut de convergence n'est donc pas un obstacle pour prendre des limites dans le terme de collision (les fonctions de corrélation n'y sont évaluées que dans des configurations précollisionnelles). Cependant, ces ensembles singuliers  $\mathcal{B}_k^\varepsilon$  codent des informations importantes sur les corrélations dynamiques : en les négligeant il n'est plus possible de remonter le temps et de retracer la dynamique à l'envers. Ainsi en écartant l'information microscopique codée dans  $\mathcal{B}_k^\varepsilon$ , on ne peut obtenir qu'une description cinétique irréversible qui est loin de décrire la dynamique microscopique complète.

### 3. Fluctuations et grandes déviations

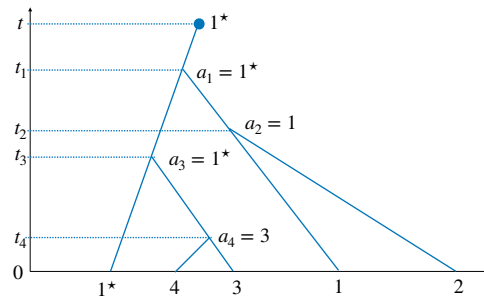
#### 3.1 – Corrections à l'hypothèse du chaos

En revenant à l'équation (14) sur  $F_1^\varepsilon$ , on peut voir qu'hormis les petits décalages spatiaux du terme de collision, les déviations de la dynamique de Boltzmann sont dues au défaut de factorisation  $F_2^\varepsilon - F_1^\varepsilon \otimes F_1^\varepsilon$ , dont nous allons donner une interprétation géométrique. La fonction de corrélation  $F_2^\varepsilon$  peut en effet être représentée par des arbres de collisions à 2 racines notées  $(1^*, 2^*)$ , l'idée étant de retracer l'histoire des particules situées aux positions  $(x_{1^*}, x_{2^*})$  avec des vitesses  $(v_{1^*}, v_{2^*})$  au temps  $t$ , afin de caractériser toutes les configurations initiales qui contribuent à  $F_2^\varepsilon(t, x_{1^*}, x_{2^*}, v_{1^*}, v_{2^*})$ .

Commençons par décrire les arbres associés à  $F_1^\varepsilon$ . La particule  $1^*$  a un mouvement rectiligne uniforme  $x_{1^*}(t') = x_{1^*} - v_{1^*}(t - t')$  jusqu'à ce qu'elle entre en collision avec une autre particule, appelée particule 1, à un temps  $t_1 < t$ . Cette collision peut être de deux types : soit une collision physique (avec déflexion), soit un artefact mathématique provenant du terme de perte de l'équation (14) (les particules se touchent mais ne sont pas déviées). Dès lors, pour comprendre l'histoire de la particule  $1^*$ , nous devons retracer l'histoire des deux particules  $1^*$  et 1 avant le temps  $t_1$ . À partir du temps  $t_1$ , les deux particules ont un mouvement rectiligne uniforme jusqu'à la collision de l'une d'entre elles avec une nouvelle particule 2 au temps  $t_2 < t_1, \dots$  et ainsi de suite jusqu'au temps 0. Notons qu'entre les instants de collision

avec de nouvelles particules, les particules peuvent entrer en collision entre elles : ceci sera appelé *recollision*. L'histoire de la particule  $1^*$  peut être codée à l'aide d'un arbre enraciné  $a$  dont les sommets, que l'on appellera branchements, correspondent aux différentes collisions qui ont eu lieu dans l'histoire de  $1^*$  et sont indexés par les paramètres de ces collisions. Un exemple est montré dans la figure 4. La racine de l'arbre  $a$  est indexée par  $1^*$ . Si  $n$  est le nombre total de collisions, et  $0 < t_n < \dots < t_1 < t$  les temps des collisions, on peut ordonner les particules de sorte qu'au temps  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , la collision ait lieu entre la  $i$ -ième particule et la  $j$ -ième particule, où  $j \in \{1^*, 1, \dots, i-1\}$  (nécessairement  $j = 1^*$  au temps  $t_1$ ). Alors le branchement de l'arbre  $a$  associé à la  $i$ -ième collision est indexé par la relation  $a_i = j$ , où  $j \in \{1^*, 1, \dots, i-1\}$ , ainsi que par les paramètres de collision  $(t_i, v_i, \omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  où  $\omega_i$  est le vecteur de déflexion.

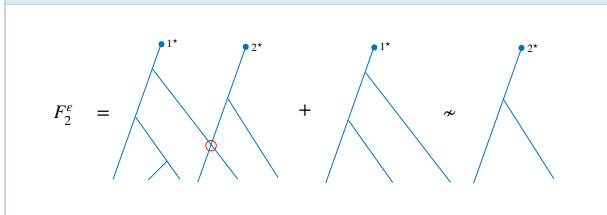
FIGURE 4 – L'histoire de la particule  $1^*$  peut être codée dans un arbre dont la racine est indexée par  $1^*$ .



Le produit tensoriel  $F_1^\varepsilon \otimes F_1^\varepsilon$  quant à lui est décrit par deux arbres de collisions indépendants, de racines respectives  $1^*$  et  $2^*$ , et  $n_1$ , resp.  $n_2$  branchements.

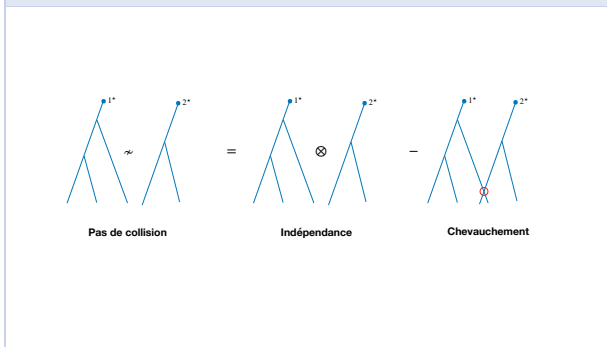
Considérons maintenant la fonction de corrélation d'ordre 2 :  $F_2^\varepsilon$  peut être décrit par un graphe de collisions construit à partir de 2 arbres de collisions ayant pour racines  $1^*$  et  $2^*$ , et  $n_1 + n_2$  branchements. La principale différence avec  $F_1^\varepsilon \otimes F_1^\varepsilon$  est que les particules des arbres  $1^*$  et  $2^*$  peuvent (ou non) interagir. Nous pouvons ainsi décomposer les arbres constituant  $F_2^\varepsilon$  en deux catégories : ceux tels qu'il y a au moins une collision impliquant une particule de chaque arbre (une telle recollision sera appelée *externe*), et les autres (voir la figure 5).

FIGURE 5 – Les arbres de  $F_2^\varepsilon$  sont classés en deux catégories : ceux comportant une collision (externe) entre les arbres  $1^*$  et  $2^*$ , et les autres pour lesquels les particules de l'arbre  $1^*$  sont toujours à distance au moins  $\varepsilon$  de celles de l'arbre  $2^*$  (ce que l'on désigne par  $\approx$ ).



Deux arbres sans collision ne correspondent pas à des arbres indépendants, précisément parce qu'ils vérifient une condition d'exclusion dynamique. Cette condition d'exclusion peut elle-même s'écrire sous la forme d'une décomposition  $\mathbf{1}_{1^* \sim 2^*} = 1 - \mathbf{1}_{1^* \sim 2^*}$  (voir figure 6), où  $\mathbf{1}_{1^* \sim 2^*}$  signifie qu'il y a chevauchement à un certain instant entre une particule issue de l'arbre de  $1^*$  et une particule issue de l'arbre de  $2^*$ .

FIGURE 6 – Décomposition de la condition d'exclusion dynamique.



Notons que cette décomposition est un pur artefact mathématique, et la condition de chevauchement  $1^* \sim 2^*$  n'affecte pas la dynamique elle-même (les particules qui se chevauchent ne sont pas défléchies).

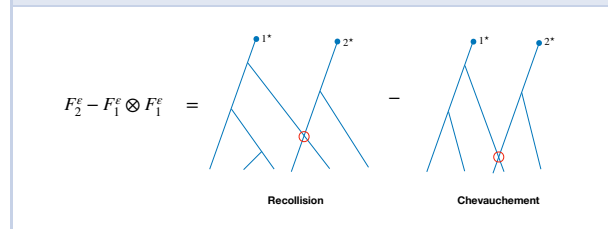
Définissons à présent le *cumulant rééchelonné d'ordre deux*

$$f_2^\varepsilon := \mu_\varepsilon(F_2^\varepsilon - F_1^\varepsilon \otimes F_1^\varepsilon). \quad (16)$$

La discussion précédente indique que ce cumulatif est représenté par des arbres qui sont couplés par des collisions ou des chevauchements (voir la figure 7). Au vu de la définition (16) et de la discussion du paragraphe 2.3 donnant une estimation de la mesure de Lebesgue des configurations donnant lieu à

une collision (12), on peut s'attendre à ce que  $f_2^\varepsilon$  ait une limite  $f_2$  au sens des mesures, qui correspond aux arbres avec *exactement* une collision ou un chevauchement sur  $[0, t]$  : toute autre interaction entre les arbres donne lieu à de la petitesse  $\varepsilon$  supplémentaire et est donc négligeable.

FIGURE 7 – Le cumulatif d'ordre deux correspond à l'occurrence d'au moins une collision entre les arbres ou un chevauchement.



**Remarque 1.** La mesure initiale ne se factorise pas exactement ( $F_2^{\varepsilon,0} \neq F_1^{\varepsilon,0} \otimes F_1^{\varepsilon,0}$ ) en raison de la condition d'exclusion statique. Ainsi, les données initiales induisent également une petite corrélation qui s'avère en fait beaucoup plus petite que les corrélations dynamiques (d'un facteur  $\varepsilon$ ).

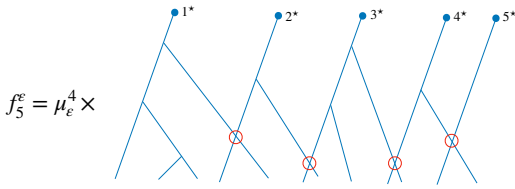
### 3.2 – Cumulants

Pour un processus gaussien, les deux premières fonctions de corrélation  $F_1^\varepsilon$  et  $F_2^\varepsilon$  déterminent complètement l'ensemble des fonctions de corrélation à  $k$  particules  $F_k^\varepsilon$ , mais en général, une partie de l'information est codée dans les cumulants d'ordre supérieur

$$f_k^\varepsilon(t, Z_k) := \mu_\varepsilon^{k-1} \sum_{\ell=1}^k \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k^\ell} (-1)^{\ell-1} (\ell-1)! \prod_{i=1}^{\ell} F_{|\sigma_i|}^\varepsilon(t, Z_{\sigma_i}),$$

où  $\mathcal{P}_k^\ell$  est l'ensemble des partitions de  $\{1, \dots, k\}$  en  $\ell$  parties avec  $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_\ell\}$ ,  $|\sigma_i|$  est le cardinal de l'ensemble  $\sigma_i$  et  $Z_{\sigma_i} = (z_j)_{j \in \sigma_i}$ . Chaque cumulatif encode des corrélations de plus en plus fines. Contrairement aux fonctions de corrélation  $F_k^\varepsilon$ , les cumulants ne dupliquent pas l'information qui est déjà encodée aux ordres inférieurs. D'un point de vue géométrique, on peut étendre l'analyse du paragraphe précédent et montrer que le cumulatif d'ordre  $k$  peut être représenté par  $k$  arbres qui sont complètement connectés soit par des collisions, soit par des chevauchements (voir la figure 8).

FIGURE 8 – Le cumuland d’ordre  $k$  correspond à des arbres de racines  $1^*, \dots, k^*$  complètement connectés par des collisions ou chevauchements.



Ces connexions peuvent être classées en leur associant un graphe signé à  $k$  sommets représentant les différents arbres, codant les collisions d’arbres (les arêtes correspondantes ont un signe +) et les chevauchements (les arêtes correspondantes ont un signe -). On peut alors en extraire de manière systématique un graphe minimalement connexe  $T$  en identifiant  $k - 1$  « agrégations » de type collision d’arbre ou chevauchement. On s’attend alors à ce que  $f_k^\epsilon$  se décompose en une somme de  $2^{k-1} k^{k-2}$  termes, où le facteur  $k^{k-2}$  est le nombre d’arbres à  $k$  sommets numérotés (d’après la formule de Cayley). Pour chaque graphe minimalement connexe signé donné, les conditions de collision/chevauchement correspondent à  $k - 1$  contraintes indépendantes sur la configuration  $z_{1^*}, \dots, z_{k^*}$  au temps  $t$ . Par conséquent, en négligeant les grandes vitesses, cette contribution au cumuland  $f_k^\epsilon$  a une mesure de Lebesgue de taille  $O((t\epsilon^{d-1})^{k-1})$ , et nous en déduisons l’estimation

$$\|f_k^\epsilon\|_{L^1} \leq \mu_\epsilon^{k-1} C^k \times 2^{k-1} k^{k-2} \times (t\epsilon^{d-1})^{k-1} \leq k! C (Ct)^{k-1}. \quad (17)$$

Un argument géométrique similaire à celui développé dans la preuve de Lanford et évoqué dans l’analyse du cumuland d’ordre 2 ci-dessus permet de montrer que  $f_k^\epsilon$  converge vers un cumuland limite  $f_k$  et que seuls les graphes ayant exactement  $k - 1$  collisions externes ou chevauchements (et aucun cycle) contribuent dans la limite.

Notons enfin qu’un calcul classique et assez simple (reposant sur les développements en série de l’exponentielle et du logarithme) montre que les cumulands ne sont rien d’autre que les coefficients

du développement en série du moment exponentiel :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_t^\epsilon(h) &:= \frac{1}{\mu_\epsilon} \ln \mathbb{E}_\epsilon \left[ \exp(\mu_\epsilon \langle \pi_t^\epsilon, h \rangle) \right] \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} \int f_k^\epsilon(t, Z_k) \prod_{i=1}^k (e^{h(z_i)} - 1) dZ_k. \end{aligned} \quad (18)$$

La quantité  $\mathcal{J}_t^\epsilon(h)$  est appelée *fonction génératrice des cumulands*. L’estimation (17) fournit l’analyticité de  $\mathcal{J}_t^\epsilon(h)$  en tant que fonction de  $e^h$  en temps court, et ce uniformément par rapport à  $\epsilon$  (suffisamment petit). La limite  $\mathcal{J}_t$  de  $\mathcal{J}_t^\epsilon$  peut alors être déterminée comme une série en termes des cumulands limites  $f_k$

$$\mathcal{J}_t(h) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} \int f_k(t, Z_k) \prod_{i=1}^k (e^{h(z_i)} - 1) dZ_k.$$

Dans un cadre fonctionnel adapté [7], on peut montrer que cette fonctionnelle vérifie une équation d’Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \mathcal{J}_t(h) = \int dz \frac{\partial \mathcal{J}_t(h)}{\partial h} v \cdot \nabla_x h + \mathcal{H} \left( \frac{\partial \mathcal{J}_t(h)}{\partial h}, h \right)$$

avec condition initiale  $\mathcal{J}(0, h) = \int dz f^0(e^h - 1)$  et dont le hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}(\varphi, h) := \frac{1}{2} \int \varphi(z_1) \varphi(z_2) (e^{\Delta h} - 1) d\mu(z_1, z_2, \omega), \quad (19)$$

avec

$$d\mu(z_1, z_2, \omega) := \delta_{x_1 - x_2}((v_1 - v_2)_+) d\omega dv_1 dv_2 dx_1$$

où  $\Delta h(z_1, z_2, \omega) = h(z'_1) + h(z'_2) - h(z_1) - h(z_2)$ . Les dérivées successives de cette fonctionnelle étant précisément les cumulands limites  $f_k$ , les dérivées successives de l’équation d’Hamilton-Jacobi fournissent les équations d’évolution de ces cumulands : par exemple dériver une fois cette équation produit l’équation de Boltzmann, la dériver deux fois produit l’équation sur la covariance décrite au prochain paragraphe.

### 3.3 – Fluctuations

Le contrôle du moment exponentiel permet en particulier d’obtenir la convergence du champ de fluctuation défini en (4) et ainsi d’analyser les fluctuations dynamiques sur un temps  $T^*$  du même ordre de grandeur que le temps de convergence  $T_L$  du théorème 1.

**Théorème 2 (Bodineau, Gallagher, Saint-Raymond, Simonella [7]).** *Le champ de fluctuation  $\zeta_t^\epsilon$  converge, dans la limite de Boltzmann-Grad et sur un intervalle*



de temps  $[0, T^*]$  vers un processus  $\zeta_t$ , solution de l'équation de Boltzmann fluctuante :

$$\begin{cases} d\zeta_t = \underbrace{\mathcal{L}_t \zeta_t dt}_{\text{opérateur de Boltzmann linéarisé}} + \underbrace{d\eta_t}_{\text{bruit gaussien}} \\ \mathcal{L}_t h = \underbrace{-v \cdot \nabla_x h}_{\text{transport}} + \underbrace{C(f_t, h) + C(h, f_t)}_{\text{opérateur de collision linéarisé}} \end{cases} \quad (20)$$

où  $f_t$  est la solution à l'instant  $t$  de l'équation de Boltzmann (7) avec donnée initiale  $f^0$ , et  $d\eta_t$  est un bruit gaussien centré, delta-corrélé en  $t, x$ , de covariance

$$\text{Cov}_t(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \int f(t, z_1) f(t, z_2) \Delta h_1 \Delta h_2(z_1, z_2, \omega) \times ((v_2 - v_1) \cdot \omega)_+ \delta_{x_2 - x_1} dz_1 dz_2 d\omega$$

où  $\Delta h(z_1, z_2, \omega) = h(z'_1) + h(z'_2) - h(z_1) - h(z_2)$ .

Le processus limite (20) avait été conjecturé par Spohn dans [25] et cette référence présente aussi un large panorama sur la théorie des fluctuations en physique. Dans le cadre de dynamiques avec des collisions aléatoires, un résultat similaire est démontré par Rezakhanlou dans [24]. Le bruit obtenu à la limite est une conséquence de la structure asymptotiquement instable de la dynamique microscopique (voir la figure 2). Le caractère aléatoire de la configuration initiale est transporté de manière déterministe par la dynamique et génère un bruit blanc en espace et en temps à travers une classe particulière de collisions. Le mécanisme de déflexion de la vitesse est codé dans la covariance du bruit.

### 3.4 – Grandes déviations

L'intérêt de la fonction génératrice des cumulants apparaît vraiment au niveau des grandes déviations, c'est-à-dire pour des trajectoires très improbables qui sont à une « distance »  $O(1)$  de la dynamique moyenne : de manière grossière, on cherche à montrer que la probabilité d'observer une distribution empirique proche de la densité  $\varphi(t, x, v)$  pendant l'intervalle de temps  $[0, T]$  décroît de façon exponentielle avec une vitesse quantifiée par une fonctionnelle  $\mathcal{F}_{[0, T]}(\varphi)$  qui évalue le coût de cette déviation dans l'asymptotique de Boltzmann-Grad

$$\mathbb{P}_\varepsilon(\pi_t^\varepsilon \simeq \varphi_t, \quad \forall t \leq T) \sim \exp\left(-\mu_\varepsilon \mathcal{F}_{[0, T]}(\varphi)\right). \quad (21)$$

La proximité entre  $\pi^\varepsilon$  et  $\varphi$  est mesurée en topologie faible dans l'espace de Skorokhod des fonctions à valeurs mesure. Une formulation précise de (21)

et une preuve se trouvent dans [7]. Le résultat de [7] peut se résumer de la façon suivante : pour une classe de fonctions  $\varphi$  dans un voisinage de la solution de l'équation de Boltzmann, il existe un intervalle de temps  $[0, T]$  où l'asymptotique (21) est caractérisée par une fonctionnelle  $\mathcal{F}_{[0, T]}$  obtenue par transformation de Legendre à partir du hamiltonien  $\mathcal{H}$  (19). Cette fonctionnelle est identique à celle conjecturée dans [24, 9] par analogie avec des modèles de collisions stochastiques du type modèle de Kac [23, 18, 15, 2]. Remarquons aussi que l'EDPS limite (20) pouvait être devinée par la même analogie avec le modèle de Kac pour lequel les collisions sont modélisées par un processus de Markov [19, 20]. Ainsi l'analyse statistique des fluctuations et des grandes déviations de la mesure empirique confirme la robustesse de l'intuition de Boltzmann (cf. section 2.1) : même dans des échelles exponentiellement petites, le comportement de la mesure empirique d'un gaz de sphères dures est identique à celui d'un modèle de particules avec des collisions aléatoires dépendant uniquement de la densité locale supposée produit. Ceci ne contredit en rien la structure hamiltonienne de la dynamique microscopique, les effets de mémoire persistent, mais ils sont codés dans des modes "transverses" à la mesure empirique.

## 4. Conclusion

Sur un temps court, le théorème 1 démontre la convergence de la mesure empirique d'un gaz de sphères dures vers la solution de l'équation de Boltzmann. Ce résultat est complété par l'analyse des fluctuations (théorème 2) et des grandes déviations (section 3.4) de la mesure empirique. Ces corrections stochastiques sont prouvées sur des temps du même ordre de grandeur que celui de la convergence vers l'équation de Boltzmann. La méthode de preuve consiste à suivre la façon dont l'aléa de la mesure initiale est transporté par la dynamique de sphères dures et comment l'instabilité de cette dynamique transforme, dans l'asymptotique de Boltzmann-Grad, cet aléa initial en un bruit blanc (espace/temps). Le temps de convergence est limité car la stratégie de preuve actuelle ne donne que des estimations grossières des corrélations dynamiques, obtenues en considérant que les collisions ne font que détruire le chaos initial en formant des agrégats de particules corrélées de plus en plus gros. Un enjeu important pour progresser dans la compréhension mathématique de ces modèles serait de montrer que le désordre n'est pas simplement issu de la donnée

initiale, mais qu'il peut être régénéré par les propriétés de mélange de la dynamique.

Un cadre plus favorable pour contrôler l'évolution en temps long est de considérer une mesure initiale obtenue comme une perturbation d'une mesure d'équilibre. La stationnarité de la mesure d'équilibre devient alors un outil clé pour contrôler les corrélations dynamiques. Le cas le plus simple consiste à

ne perturber qu'une seule particule, qu'on appellera la particule marquée, et à étudier son évolution au cours du temps. Dans [3], il est établi que cette particule suit un mouvement brownien en temps grand. Dans une série de travaux récents [6, 5], le théorème 2 a pu être généralisé à des temps cinétiques arbitrairement grands, pour une mesure initiale à l'équilibre. Ceci permet d'en déduire les équations hydrodynamiques fluctuantes de Stokes-Fourier.

## Références

- [1] N. AYI. « From Newton's law to the linear Boltzmann equation without cut-off ». English. *Commun. Math. Phys.* **350**, n° 3 (2017), p. 1219-1274.
- [2] G. BASILE et al. « Large deviations for Kac-like walks ». English. *J. Stat. Phys.* **184**, n° 1 (2021). Id/n° 10, p. 27.
- [3] T. BODINEAU, I. GALLAGHER et L. SAINT-RAYMOND. « The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres ». *Inventiones mathematicae* **203**, n° 2 (2016), p. 493-553.
- [4] T. BODINEAU et al. « Fluctuation theory in the Boltzmann–Grad limit ». *Journal of Statistical Physics* **180**, n° 1 (2020), p. 873-895.
- [5] T. BODINEAU et al. « Large time fluctuations for a hard sphere gas at equilibrium in the low density regime ». *Preprint* (2021).
- [6] T. BODINEAU et al. « Long-time correlations for a hard-sphere gas at equilibrium ». *Preprint arXiv :2012.03813, to appear in CPAM* (2020).
- [7] T. BODINEAU et al. « Statistical dynamics of a hard sphere gas : fluctuating Boltzmann equation and large deviations ». *Preprint arXiv :2008.10403* (2020).
- [8] L. BOLTZMANN. « Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. » German. *Wien. Ber.* **66** (1872), p. 275-370.
- [9] F. BOUCHET. « Is the Boltzmann equation reversible? A large deviation perspective on the irreversibility paradox ». *J. Stat. Phys.* **181**, n° 2 (2020), p. 515-550.
- [10] C. CERCIGNANI, V. I. GERASIMENKO et D. Y. PETRINA. *Many-particle dynamics and kinetic equations*. **420**. Mathematics and its Applications. Translated from the Russian manuscript by K. Petrina and V. Gredzhuk. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997, p. viii+244. ISBN : 0-7923-4696-3. DOI : 10.1007/978-94-011-5558-8. URL : <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5558-8>.
- [11] C. CERCIGNANI, R. ILLNER et M. PULVIRENTI. *The mathematical theory of dilute gases*. **106**. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1994, p. viii+347. ISBN : 0-387-94294-7. DOI : 10.1007/978-1-4419-8524-8. URL : <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8524-8>.
- [12] T. DOLMAIRE. « About Lanford's theorem in the half-space with specular reflection ». *arXiv preprint arXiv :2102.05513* (2021).
- [13] I. GALLAGHER, L. SAINT-RAYMOND et B. TEXIER. *From Newton to Boltzmann : hard spheres and short-range potentials*. English. Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2014, p. xi + 136.
- [14] H. GRAD. « Principles of the kinetic theory of gases ». In : *Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge), Bd. 12, Thermodynamik der Gase*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958, p. 205-294.
- [15] D. HEYDECKER. « Large Deviations of Kac's Conservative Particle System and Energy Non-Conserving Solutions to the Boltzmann Equation : A Counterexample to the Predicted Rate Function ». *preprint arXiv :2103.14550* (2021).
- [16] O. E. LANFORD III. « Time evolution of large classical systems ». In : *Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974)*. 1975, 1-111. Lecture Notes in Phys., Vol. 38.
- [17] C. LE BIHAN. « Boltzmann-Grad limit of a hard sphere system in a box with diffusive boundary conditions ». *arXiv preprint arXiv :2104.04354, to appear in Disc. Cont. Dyn. Syst.* (2021).
- [18] C. LÉONARD. « On large deviations for particle systems associated with spatially homogeneous Boltzmann type equations ». English. *Probab. Theory Relat. Fields* **101**, n° 1 (1995), p. 1-44.
- [19] J. LOGAN et M. KAC. « Fluctuations and the Boltzmann equation. » *Physical Review A* **13**, n° 1 (1976), p. 458.
- [20] S. MÉLÉARD. « Convergence of the fluctuations for interacting diffusions with jumps associated with Boltzmann equations ». *Stochastics Stochastics Rep.* **63**, n° 3-4 (1998), p. 195-225.
- [21] M. PULVIRENTI, C. SAFFIRIO et S. SIMONELLA. « On the validity of the Boltzmann equation for short range potentials ». *Rev. Math. Phys.* **26**, n° 2 (2014), p. 1450001, 64.

- [22] M. PULVIRENTI et S. SIMONELLA. « The Boltzmann-Grad limit of a hard sphere system : analysis of the correlation error ». *Invent. Math.* **207**, n° 3 (2017), p. 1135-1237. ISSN : 0020-9910. doi : 10 . 1007 / s00222 – 016 – 0682 – 4. URL : <https://doi.org/10.1007/s00222-016-0682-4>.
- [23] F. REZAKHANLOU. « Large deviations from a kinetic limit ». *Ann. Probab.* **26**, n° 3 (1998), p. 1259-1340.
- [24] F. REZAKHANLOU et C. VILLANI. *Entropy methods for the Boltzmann equation. Lectures from a special semester at the Centre Émile Borel, Institut H. Poincaré, Paris 2001*. English. Sous la dir. de F. GOLSE et S. OLLA. **1916**. Berlin : Springer, 2008, p. xii + 107.
- [25] H. SPOHN. *Large scale dynamics of interacting particles*. Springer Science & Business Media, 2012.



**Thierry BODINEAU**

IHÉS, Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire Alexandre Grothendieck, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette (France)  
[bodineau@ihes.fr](mailto:bodineau@ihes.fr)

Thierry Bodineau est chercheur CNRS au laboratoire Alexander Grothendieck. Ses recherches portent sur l'étude probabiliste de systèmes de particules en interaction.



**Isabelle GALLAGHER**

DMA, École normale supérieure, CNRS, PSL Research University et Université Paris Cité  
[gallagher@math.ens.fr](mailto:gallagher@math.ens.fr)

Isabelle Gallagher est enseignante-chercheuse en mathématiques à l'université Paris Cité et à l'École normale supérieure. Ses recherches concernent l'analyse des équations aux dérivées partielles. Elle dirige actuellement la Fondation Sciences Mathématiques de Paris.



**Laure SAINT-RAYMOND**

IHÉS, Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire Alexandre Grothendieck, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette (France)  
[laure@ihes.fr](mailto:laure@ihes.fr)

Laure Saint-Raymond est professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Ses recherches se situent à l'interface entre les mathématiques et la physique, et portent en particulier sur l'étude asymptotique des équations aux dérivées partielles.

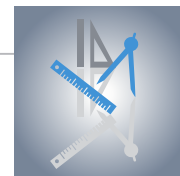


**Sergio SIMONELLA**

École normale supérieure de Lyon, CNRS, France  
[sergio.simonella@ens-lyon.fr](mailto:sergio.simonella@ens-lyon.fr)

Sergio Simonella est chercheur CNRS au sein de l'unité de mathématiques pures et appliquées de l'École normale supérieure de Lyon. Il s'intéresse à des problèmes de théorie cinétique des gaz à la frontière entre les EDP et la mécanique statistique.

Nous remercions chaleureusement Stéphane Baseilhac pour sa relecture attentive et ses nombreuses suggestions. L'essentiel de ce texte est extrait d'un article publié dans les actes de l'ICM 2022.



# Utilisation des assistants de preuves pour l'enseignement en L1

## Retours d'expériences

Nous rendons compte de cinq expériences récentes de l'enseignement de la démonstration utilisant les assistants de preuve Coq, DÉVDUCTION, Edukera et Lean.

- M. KERJEAN
- F. LE ROUX
- P. MASSOT
- M. MAYERO
- Z. MESNIL
- S. MODESTE
- J. NARBOUX
- P. ROUSSELIN

### 1. Introduction

Les assistants de preuve, comme Coq, Isabelle, Lean, HOL-Light, sont des logiciels qui permettent de vérifier mécaniquement une démonstration mathématique. Depuis quelques années une communauté croissante de mathématiciens et mathématiciennes utilise ou s'intéresse à cet outil, comme Tom Hales et Vladimir Voïevodski<sup>1</sup> :

Today we are looking forward to the time when proof assistants will become an everyday tool of a working mathematician.

Pour une introduction à l'utilisation des assistants de preuve en mathématiques, voir par exemple les articles de Tom Hales [17], Jeremy Avigad et John Harrison [2] et Assia Mahboubi [21].

Naturellement les personnes qui font de la recherche dans le domaine des assistants de preuve ont utilisé cet outil dans leurs enseignements. Les assistants de preuve sont actuellement utilisés de manière courante par la communauté qui s'intéresse aux fondements des langages de programmation, à la fois pour vérifier des résultats de recherche et pour l'enseignement, notamment la série de livres par B. Pierce et. al. qui repose sur Coq [23]. D'autre part, les assistants de preuve sont aussi utilisés dans le cadre de cours de Logique, nombreux sont les outils permettant de construire des démonstrations en déduction naturelle pour la logique propositionnelle ou du premier ordre [4, 6, 8, 20, 9, 19, 16, 7]. Les assistants de preuve peuvent aussi être utilisés pour formaliser la méta-théorie (la logique comme objet d'étude) [14, 31, 27].

#### Fonctionnement des assistants de preuves

Les deux assistants de preuve utilisés ici, Coq et Lean, fonctionnent de façon très similaire. On avance dans la preuve pas à pas ; à chaque étape, ou *état de preuve*, sont affichés le *contexte*, c'est-à-dire la liste des objets et des propriétés actuellement disponibles, et le *but*, la propriété qu'il reste à prouver. On fait évoluer l'état de preuve au moyen de *tactiques* qui transforment le contexte et/ou le but. Si par exemple le but est une propriété universelle du type  $\forall x, P(x)$ , la tactique `intro` permet d'ajouter un nouvel objet dans le contexte ; si cet objet est nommé  $y$ , le but devient  $P(y)$ . On voit que cette

1. [https://www.math.ias.edu/vladimir/sites/math.ias.edu.vladimir/files/2014\\_11\\_16\\_Kuwait.pdf](https://www.math.ias.edu/vladimir/sites/math.ias.edu.vladimir/files/2014_11_16_Kuwait.pdf), page 18.

tactique d'introduction ne fait qu'appliquer une règle syntaxique élémentaire ; mais il existe aussi des tactiques beaucoup plus sophistiquées qui prennent en charge un morceau de preuve plus conséquent. Par exemple, Coq ou Lean fournissent des tactiques qui permettent de prouver automatiquement une égalité qui découle linéairement des égalités présentes dans le contexte. Dans les interfaces graphiques, l'utilisation des tactiques est remplacée par des clics sur des boutons.

On peut ainsi décrire la démonstration en indiquant les règles logiques utilisées, à charge pour l'assistant de preuve de reconstruire les énoncés intermédiaires que l'on déduit : on dit que le langage est impératif. Il est possible aussi de décrire les démonstrations, d'une manière qu'on appelle déclarative, en donnant la liste des énoncés intermédiaires accompagnés de leur justification. Des assistants de preuve comme Mizar ou Isabelle/Isar sont majoritairement utilisés en mode déclaratif. Les preuves déclaratives tendent à refléter plus fidèlement les preuves papier et elles sont généralement plus lisibles isolément que les scripts de preuves impératives. Cette distinction est surtout une question de choix de l'utilisateur, car des modes déclaratifs sont disponibles aussi pour Coq [11] et Lean, et Isabelle permet aussi de décrire des démonstrations à l'aide uniquement de tactiques. La bibliothèque Lean-verbose, proposée par Patrick Massot (voir plus bas), permet entre autres choses d'encourager un style déclaratif pour Lean. Des outils permettent aussi de présenter les énoncés intermédiaires d'une preuve impérative [24].

L'utilisation d'assistants de preuve pour enseigner la démonstration et les mathématiques est plus rare. Les premières expérimentations en France datent du début des années 2000 [25, 5]. Donnons ici deux arguments pour leur pertinence, nous y reviendrons plus longuement en conclusion. Tout d'abord, plusieurs outils numériques sont déjà intégrés de façon probante à l'enseignement des mathématiques (logiciels de géométrie dynamique, de calcul formel, exercices...), un de leurs avantages, que possèdent donc également les assistants de preuve, est la possibilité de rétroactions fournies par la machine, permettant plus d'autonomie dans le travail des étudiants et étudiantes (ce qui ne veut pas dire bien sûr qu'il suffit de mettre entre leurs mains un assistant de preuve pour qu'ils et elles apprennent à produire des preuves!). Ensuite, les difficultés de compréhension et d'usage d'un langage au moins partiellement formel, les difficultés de structuration d'une preuve sont des obstacles bien connus de l'apprentissage des mathématiques à l'entrée dans l'enseignement supérieur notamment, et l'utilisation d'assistants de preuve force à travailler particulièrement ces deux points (là encore, avec des médiations nécessaires pour relier la production de preuve sur l'ordinateur et en papier-crayon).

Récemment les expériences se multiplient un peu partout, par exemple celles menées par Jeremy Avigad [1], Kevin Buzzard<sup>2</sup>, ou celles évoquées dans cet article. Celles et ceux qui les mettent en place sont

plutôt enthousiastes quant à l'impact de l'utilisation des assistants de preuve sur l'apprentissage de la preuve, mais les recherches sur cette question sont encore balbutiantes. Des éléments d'une analyse a priori de l'impact didactique de différents aspects des assistants de preuve ont été proposés [3], ainsi qu'une étude sur les démonstrations produites par des étudiants et étudiantes ayant utilisé Lean [30].

Un groupe de chercheurs et chercheuses en mathématiques, informatique et didactique se réunit depuis quelques années pour réfléchir à différentes questions que posent ces expérimentations. Une journée d'échanges a été organisée en mars 2022<sup>3</sup>, dont sont issus les témoignages qui suivent. Il s'agit de cinq expériences françaises d'enseignement de la démonstration à l'arrivée à l'université, à l'aide de quatre outils différents : Coq, Lean, DÉDUCTION, et Edukera. Les deux premiers sont des assistants de preuve en ligne de commande, tels qu'utilisés par les professionnels, quoique Lean soit ici muni d'une surcouche qui rend la syntaxe proche du langage naturel ; les deux derniers sont des interfaces graphiques pour Lean et Coq, du type « preuve par clics ».

2. [https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural\\_number\\_game/](https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game/)

3. En plus des auteur-es de cet article, étaient présent-es à cette journée Evmorfia Bartzia, Faïza Chellougui, Viviane Durand-Guerrier, Antoine Meyer, qui font également partie du groupe de travail mentionné et Antoine Chambert-Loir et Frédéric Tran Minh.



## 2. Cinq retours d'expériences

### 2.1 – Université Paris 13

M. Kerjean, M. Mayero, P. Rousselin.

#### Contexte et discussions préliminaires

La double-licence (DL) mathématiques et informatique de l'institut Galilée (université Paris XIII dénommée Sorbonne-Paris-Nord) est une filière sélective qui recrute des étudiant·e·s dont l'objectif est de décrocher une licence d'informatique et une licence de mathématiques en trois ans. Pour l'année 2021-2022, elle comprenait en première année une cinquantaine d'étudiant·e·s suivant des cours des licences d'informatique et de mathématiques. Ce cours d'*Initiation aux preuves formelles* est nouveau (année 2021-2022). Il est spécifique aux étudiant·e·s de DL et dure 19,5h (6 × 3h de travaux pratiques en salle machine et 1,5h d'évaluation en salle machine également) et a lieu au premier semestre de L1.

Son objectif principal est d'amener les étudiant·e·s à l'écriture de preuves mathématiques rigoureuses en utilisant l'assistant de preuves Coq. Nous voulions qu'ils et elles acquièrent *par la pratique* des réflexes de preuve (introduction de variables et d'hypothèses, application de théorèmes, réécritures, récurrence), tout en évitant certains pièges habituels, comme le fait qu'on ne peut faire commuter un connecteur universel et un connecteur existentiel. Par ailleurs, avant cette année, la double licence n'avait pas de cours spécifique en L1. Il s'agissait donc également de proposer un module « de bienvenue » ayant un contenu qui relève à la fois des mathématiques et de l'informatique, ce qui devait aider à la formation d'un groupe solidaire en double licence. Enfin, ce module devait permettre, à la marge, de renforcer certaines compétences pratiques en informatique : écriture dans un fichier texte, respect de la syntaxe, bonnes pratiques d'indentation, de nommage...

Les discussions préliminaires à la mise en place du cours ont révélé certaines réserves, bien compréhensibles, de la part des enseignant·e·s mathématicien·ne·s. Il y avait d'abord la crainte de confusions entre les notations utilisées en Coq et les notations usuelles des mathématiques. Par exemple, en Coq, la flèche  $\rightarrow$  est utilisée à la fois entre les ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction et pour l'implication (au lieu du symbole  $\implies$ ). Ensuite, les fondations « usuelles » des mathématiques (disons la théorie des ensembles au moins à un niveau intuitif)

diffèrent de celles de Coq (la théorie des types dépendants), ce qui entraîne des différences importantes qu'on ne peut pas toujours mettre sous le tapis. Ainsi, plutôt que de parler, par exemple, de l'ensemble des réels positifs, qui est un ensemble au même titre que  $\mathbb{R}$ , on considère le prédicat « être positif » qui n'est donc plus de même nature que le type des réels. Cela peut avoir des conséquences troublantes sur les choix de formalisation des mathématiques. En particulier, en Coq, il est beaucoup plus pratique que les fonctions soient totales (pas de domaine de définition  $\mathbb{R}^*$  par exemple, en Coq la fonction inverse est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier). Suite à ces discussions nous avons prêté une attention particulière aux explications dédiées aux notations utilisées dans Coq et aux différences, lorsque nous les avons rencontrées, entre la pratique habituelle des mathématiques et celle de ce module.

Pour ce qui est du format (et en partie, du contenu) du cours, nous nous sommes inspirés du programme *software foundations* et plus particulièrement de la partie *logical foundations* [22] en fournissant des fichiers Coq conçus pour être lus sur machine et complétés par les étudiant·e·s. Il fallait leur permettre d'être actifs le plus rapidement et le plus fréquemment possible, il n'y avait aucune heure de cours magistral allouée à ce module.

#### Contenu et déroulement du cours

Les polycopiés d'algèbre et d'analyse du premier semestre de L1 nous ont servi de guide pour le choix du contenu. Notre ambition (qui s'est avérée déraisonnable) était d'aller vers certaines preuves d'analyse sur les suites numériques.

La progression, presque imposée par notre envie de faire écrire des preuves «  $\varepsilon, \delta$  », est la suivante :

1. logique propositionnelle, déduction naturelle ;
2. entiers naturels et récurrence ;
3. quantificateurs ;
4. ensembles ;
5. nombres réels
6. suites numériques.

Il est important de rappeler que les étudiant·e·s de L1 arrivant en septembre ont peu de connaissances structurées sur les notions de logique. Nous avons donc commencé par enseigner, par la pratique sous Coq, les règles usuelles de raisonnement. Celles-ci pouvaient être écrites au tableau sous forme de règles dans un des formalismes usuels en

logique tels que la déduction naturelle ou le calcul des séquents, présentés informellement, en lien avec les tactiques correspondantes de Coq. De plus, pour apprendre la notion de démonstration, ces règles de déduction semblent bien plus utiles que les tables de vérité, finalement très éloignées de la pratique courante des mathématiques.

Chaque fois qu'une tactique doit être utilisée (voir encadré plus haut), un exemple à suivre est donné. Les plus subtils ou importants sont montrés et commentés par l'enseignant·e à l'aide d'un vidéo-projecteur.

La figure 1 est la toute première preuve présentée aux étudiant·e·s, telle qu'ils la voyaient dans CoqIDE. Il s'agit de prouver la formule  $\forall P : \text{Prop}, P \implies P$ . La partie en haut à droite de l'écran montre la progression de la preuve sous la forme d'un contexte (type des variables et hypothèses) au-dessus de la ligne et d'un but, en-dessous, qui évoluent tout au long de la preuve. La première tactique, `intros P`, introduit la variable  $P$  de type `Prop` dans le contexte, ce qui supprime le quantificateur  $\forall$  du but (introduction du quantificateur  $\forall$  en déduction naturelle). La seconde tactique `intros HP` place la prémisse de l'implication dans les hypothèses en nommant cette hypothèse `HP` (introduction de l'implication en déduction naturelle). Enfin, la tactique `assumption` affirme que le but fait partie des hypothèses et demande à Coq de le vérifier, ce qui ici met fin à la preuve.

Le cours aborde ensuite les entiers naturels. Ceux-ci sont définis en Coq par récurrence avec la constante 0 et la fonction successeur. Toutes les opérations usuelles sont définies par récurrence, et les preuves doivent donc suivre le même schéma. Le système Coq est particulièrement adapté à l'enseignement de ces preuves : la tactique `induction` fait clairement apparaître les deux sous-buts (la preuve au rang 0 et l'hérédité) et l'hypothèse de récurrence. Suffisamment bien guidé·e·s, les étudiant·e·s peuvent aller jusqu'à prouver la commutativité de la multiplication en partant de rien.

À ce stade, nous en étions à mi-parcours, et nous avons soumis les étudiant·e·s à un petit test noté d'une demi-heure sur machine. Les résultats de ce test nous ont vraiment encouragés. Les étudiant·e·s savaient, en grande majorité, prouver des théorèmes simples sur le calcul propositionnel ou les entiers naturels.

Les séances suivantes sur les quantificateurs et les ensembles (en fait, en Coq, le calcul des prédi-

cats) se passent moins bien. Les écarts se creusent de façon inquiétante entre les étudiant·e·s et certaines notions mathématiques, nouvelles ou très fraîches, nécessitent un temps d'assimilation plus important.

La partie suivante, sur les réels, s'est un peu mieux passée. Contrairement aux entiers naturels, dont la définition est constructive, les réels sont définis<sup>4</sup> de façon axiomatique, comme corps totalement ordonné, complet et archimédien. Le sujet de travaux pratiques sur les réels introduit petit à petit ces axiomes et demande aux étudiant·e·s de prouver certains théorèmes (par exemple les identités remarquables, ou la stricte décroissante de la fonction  $x \mapsto -x$ ), en ne partant que des axiomes.

Lors de la dernière séance, nous avons commencé l'analyse des suites numériques. Les définitions sont celles d'un cours de mathématiques classique. C'est à ce moment-là que nous nous autorisons à montrer aux étudiant·e·s des tactiques plus puissantes comme `lra` (pour *Linear real and rational arithmetic*) qui permet de prouver automatiquement certaines égalités et inégalités simples. Malheureusement, bien peu d'étudiant·e·s étaient prêts à gravir cette dernière montagne avec nous. Le rythme était certainement trop soutenu et nous avons manqué de temps. La figure 2 présente un extrait du fichier Coq d'analyse réelle. Le théorème énoncé porte sur la somme de deux suites convergentes. À ce niveau, les preuves commencent à être difficiles à écrire. Celle du corrigé, qui reste au niveau du module, utilise une bonne vingtaine de tactiques. Il faudrait donc peut-être réfléchir aussi à des outils techniques et pédagogiques pour rendre ces preuves plus simples à écrire.

## Bilan

Nous avons dû faire certains choix lors de l'élaboration des sujets. Les preuves sont longtemps restées très détaillées, sans tactique automatique ou presque. Ce choix était guidé par l'envie d'enseigner en premier lieu la rigueur dans l'écriture des preuves. Pour la partie d'analyse, au contraire, utiliser de l'automatisation permet de se débarrasser de certains (malheureusement pas tous) « détails » qu'on ne songerait jamais à prouver dans un cours d'analyse mathématiques.

4. La formalisation des réels en Coq est due à M. Mayero, l'une des enseignantes du module.

FIGURE 1 – Extrait du premier fichier Coq sur les bases de la logique.

```

CoqIDE
File Edit View Navigation Templates Queries Tools Compile Debug Windows Help
Logique1_sujet
57 (** *** Première preuve *)
58
59 (** Nous allons maintenant énoncer et prouver un premier théorème. Exécuter pas
60 à pas cette preuve pour bien voir les modifications dans le contexte et le
61 but. En coq, les commentaires sont écrits entre (* ... *) *)
62
63 Theorem imp_refl : ∀ P : Prop, P → P.
64 Proof.
65 (* Soit P une proposition quelconque. *)
66 intros P.
67 (* Pour montrer une implication on suppose que ce qui est à gauche est prouvé.
68 On doit prouver ce qui est à droite avec cette hypothèse supplémentaire. *)
69 (* On suppose (hypothèse (HP)) que P est prouvée. *)
70 intros HP.
71 (* On doit prouver P. Mais cela fait partie des hypothèses ! *)
72 assumption.
73 Qed. (* Quod erat demonstrandum. Ce qu'il fallait démontrer. *)
74
Ready, proving imp_refl
Line: 74 Char: 1 Offset: 2985 0/0

```

FIGURE 2 – Extrait du fichier d'analyse réelle.

```

CoqIDE
File Edit View Navigation Templates Queries Tools Compile Debug Windows Help
Suites_sujet
265
266 (** Assez de blah-blah. En vous inspirant de la preuve de
267 UL_sequence, prouvez que la somme de deux suites convergentes
268 converge vers la somme des limites.
269 *)
270
271 Theorem CV_plus (An Bn : nat -> R) (l1 l2 : R) :
272 let Cn := (fun n => An n + Bn n) in
273 Un_cv An l1 -> Un_cv Bn l2 -> Un_cv Cn (l1 + l2).
274 Proof.
275 (* Remplir la preuve ici *)
276 Admitted. (* Remplacer cette ligne par Qed. *)
277
278
279
Ready, proving CV_plus
Line: 274 Char: 7 Offset: 10805 0/0

```

Plus généralement, le choix le plus important à faire a été : s'agit-il d'un cours de Coq ou d'un cours de mathématiques avec Coq? Dans le premier cas, il s'agit d'apprendre à utiliser Coq, avec toute sa puissance d'automatisation, pour présenter le problème de la formalisation des mathématiques. Dans le second, qui a été le nôtre, il s'agit d'utiliser Coq pour détailler les preuves mathématiques tout en essayant de rester au plus proche de ce qui peut se faire avec papier-crayon. Et une fois acquis que les propriétés de base d'un corps ou anneau ordonné sont toujours

présentes, présenter les tactiques d'automatisation qui nous permettent de nous affranchir de cette lourdeur (comme en mathématiques) et qui rendent Coq plus attrayant.

Il était certainement prématuré d'aborder l'analyse réelle avec «  $\epsilon, \delta$  ». Pour pouvoir le faire dans de bonnes conditions, il aurait fallu que ce cours ait lieu au second semestre avec un volume horaire plus important, ce qui est exclu pour des raisons de moyens et d'organisation.

Malgré ce raté, les retours des étudiant-e-s sont

assez positifs, ce qui est encourageant si l'on tient compte du fait qu'il s'agissait d'une première expérience pour nous. Certains étudiant·e·s témoignent du fait que ce cours les a aidés à comprendre les cours d'algèbre et de logique. Enfin, il apparaît que ce module a bien eu pour effet de souder le groupe, les plaçant d'emblée dans une position inédite et unique qui les poussait à s'entraider.

Tout n'a certes pas été un succès, mais, à ce niveau, les difficultés ne semblent pas tellement dues à des problèmes de notations ou de différences de point de vue entre théorie des ensembles et théorie des types dépendants. Il nous paraît évident que Coq ou en général un assistant de preuve peut être extrêmement utile à l'enseignement des mathématiques et en particulier à l'assimilation de la rigueur. La logique intuitionniste donne à la fois du sens aux connecteurs logiques et une direction naturelle pour l'écriture de la preuve.

## 2.2 – Faculté des sciences d'Orsay

P. Massot

### Cours concerné

La licence double diplôme informatique et mathématiques de l'université Paris-Saclay à Orsay est une filière sélective accueillant entre cinquante et soixante étudiant·e·s. Le cours intitulé « Logique et démonstrations assistées par ordinateur » a lieu au second semestre depuis quatre ans. Il est obligatoire (sauf en 2021 pour cause de Covid). Il comporte douze séances de cours-TP de deux heures, en salle machine. L'évaluation comporte une part de contrôle continu constituée de cinq ou six devoirs courts à rédiger à la maison et un examen de trois heures comportant une série d'exercices à faire sur ordinateur puis sur papier. Le logiciel utilisé est Lean, avec, depuis deux ans, une surcouche d'interface maison. Le cours a été créé par Patrick Massot, seul la première année, puis aidé par Frédéric Bourgeois à partir de la deuxième année et Christine Paulin à partir de la quatrième année.

### Objectifs et contenu mathématique

L'objectif de ce cours est d'améliorer la compréhension et la rédaction de démonstrations mathématiques sur papier. L'ordinateur n'est qu'un outil intermédiaire. L'objectif n'est pas du tout la virtuosité dans l'utilisation du logiciel. Les questions de logique pure et de fondements des mathématiques ne sont pas non plus un objectif et sont cachées le

plus possible par la présentation et le choix des exercices. Comme la plupart des assistants de démonstrations, Lean repose sur la théorie des types plutôt que sur le duo logique du premier ordre et théorie des ensembles de Zermelo-Frankel. Les quelques différences visibles que cela induit sont présentées comme de simples questions de notations et ne posent *aucun* problème. La conclusion au bout de quatre ans est que chaque minute passée à commenter la différence entre théorie des ensembles et théorie des types dans ce contexte est une minute gâchée.

Tous les connecteurs logiques et quantificateurs sont présentés dans un contexte concret, avec des énoncés portant sur des nombres, des suites de réels ou des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Au niveau logique, l'accent est mis sur la manipulation des quantificateurs plutôt que sur le calcul des propositions. Les notions mathématiques utilisées sont presque exclusivement des notions abordées au premier semestre. La seule exception est la notion de suite de Cauchy qui n'est pas vue au premier semestre mais est utilisée par deux exercices pour diversifier les combinaisons de quantificateurs.

Toutes les personnes suivant le cours vont jusqu'à aborder des exercices démontrant des résultats de bases sur les limites de suites de réels (unicité de la limite et théorème « des gendarmes » par exemple). Les plus rapides vont jusqu'à redémontrer la caractérisation séquentielle de la continuité, le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes et le théorème des valeurs intermédiaires.

### Logiciel utilisé

Lean est un logiciel libre développé par Leonardo de Moura de Microsoft Research et par la communauté de ses utilisateurs. Il s'agit d'un logiciel récent puisque la première version date de 2013, mais il s'inspire évidemment de nombreux logiciels plus anciens, en particulier Coq. Il n'est pas spécifiquement destiné à l'enseignement, il est utilisé aussi au niveau recherche. C'est par exemple le logiciel qui a été utilisé en 2019 par Buzzard, Commelin et Massot pour expliquer aux ordinateurs la notion d'espace perfectoïde de Scholze. Il est en ce moment utilisé entre autres pour expliquer des résultats de flexibilité en topologie différentielle incluant notamment l'existence des retournements de la sphère.

Les interactions entre le logiciel et la personne qui l'utilise se font via un éditeur de texte qui peut être VSCode (utilisé dans ce cours), vi ou emacs. L'uti-



lisateur ou utilisatrice tape des commandes dans la partie gauche de l'écran et l'ordinateur répond dans la partie droite en mettant à jour la liste des hypothèses et le but courant, ou en affichant des messages d'erreur le cas échéant.

Dans l'utilisation normale de ce logiciel, les instructions ressemblent beaucoup à du code informatique. Ce code a été utilisé lors des deux premières années du cours. Il ne posait pas de problème lors de la résolution des exercices sur ordinateur mais rendait vraiment difficile le passage à la rédaction sur papier. Durant les deux années suivantes, le cours a utilisé des commandes personnalisées qui sont plus proches du langage naturel.

Le code ci-dessous est la démonstration complète du fait que si une fonction  $f$  est continue en un point  $x_0$  alors elle y est séquentiellement continue. La première ligne liste les objets intervenant, la deuxième liste les hypothèses, en les nommant  $hu$  et  $hf$ , et la troisième ligne annonce l'objectif. Dans tout le cours, tous les énoncés sont fournis. Les étudiant·e·s n'écrivent que les démonstrations (mais bien sûr une démonstration peut nécessiter d'écrire un petit énoncé intermédiaire). Tout ce qui se trouve entre les lignes `begin` et `end` constitue la démonstration.

```
example (f : ℝ → ℝ) (u : ℕ → ℝ) (x₀ : ℝ)
  (hu : limite_suite u x₀) (hf : continue_en f x₀) :
  limite_suite (f ∘ u) (f x₀) :=
begin
  Montrons que  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |(f \circ u) n - f x_0| \leq \varepsilon,$ 
  Soit  $\varepsilon > 0,$ 
  Par hf appliqué à  $[\varepsilon, \varepsilon\_pos]$  on obtient  $(\delta : \mathbb{R})$  tel que
   $(\delta\_pos : \delta > 0)$   $(h\delta f : \forall x, |x - x_0| \leq \delta \rightarrow |f x - f x_0| \leq \varepsilon),$ 
  Par hu appliqué à  $[\delta, \delta\_pos]$  on obtient  $(N : \mathbb{N})$  tel que
   $(hNu : \forall n \geq N, |u n - x_0| \leq \delta),$ 
  Montrons que  $N$  convient :  $\forall n \geq N, |(f \circ u) n - f x_0| \leq \varepsilon,$ 
  Soit  $n \geq N,$ 
  Par h\delta f il suffit de montrer que  $|u n - x_0| \leq \delta,$ 
  On conclut par hNu appliqué à  $[n, n\_ge]$ 
end
```

À la fin de chaque ligne, l'ordinateur affiche le contexte, c'est-à-dire la liste des objets fixés et des hypothèses courantes. Par exemple voici l'affichage après la ligne « Soit  $\varepsilon > 0$  ».

```
1 but
f: ℝ → ℝ
u: ℕ → ℝ
x₀: ℝ
hu: limite_suite u x₀
hf: continue_en f x₀
ε: ℝ
ε_pos: ε > 0
├─ ∃ (N : ℕ), ∀ n ≥ N, |(f ∘ u) n - f x₀| ≤ ε
```

La première ligne dit qu'il n'y a qu'un seul but en suspens (ce nombre peut augmenter par exemple quand on démontre une équivalence en montrant les deux implications). Le symbole  $\vdash$  qui débute la dernière ligne annonce l'objectif. La patience inlassable dont fait preuve l'ordinateur pour afficher ces réponses est sans doute sa contribution la plus précieuse, plus encore que son implacable et impartiale rigueur. Il n'y a jamais aucune ambiguïté sur ce qui est fixé et ce qui est quantifié. Lors du passage à la rédaction sur papier, il est facile de naviguer dans la démonstration en revoyant le contexte à chaque étape.

## Bilan

Globalement ce cours est considéré comme un grand succès. Il est très gratifiant à enseigner et permet à de nombreuses personnes de progresser. Il n'y a pas eu d'étude didactique sérieuse permettant d'étayer cette impression mais on peut donner un exemple concret en manipulation de quantificateurs. Lors de l'examen en 2022, 68% des copies ont su convaincre l'ordinateur que l'image d'une suite de Cauchy de réels par une fonction uniformément continue est une suite de Cauchy. Puis 58% des copies ont obtenu au moins 75% des points attribués à la rédaction sur papier de cette démonstration. La démonstration est structurellement très proche de l'exemple de la section précédente. Dans les deux cas la difficulté est d'appliquer les hypothèses dans le bon ordre et au bon réel strictement positif. La variante de l'examen fait intervenir un peu plus de quantificateurs. La notion de suite de Cauchy était apparue dans deux exercices pendant le semestre mais la notion de fonction uniformément continue n'était introduite que dans l'examen, sous forme de succession de quantificateurs sans commentaire. Ces notions n'avaient pas été vues dans d'autres cours.

L'utilisation de Lean amène à bien distinguer les trois façons dont chaque connecteur logique ou quantificateur peut intervenir : pour former un énoncé, pour utiliser un énoncé et pour démontrer un énoncé. Un exemple fréquent de confusion entre formation d'un énoncé et utilisation de cet énoncé se présente avec le quantificateur existentiel. Très souvent au tableau mais aussi par écrit, on se laisse aller à écrire « d'après l'hypothèse  $\dots, \exists \delta > 0, \dots$  » puis à utiliser  $\delta$  dans la suite de l'argument. Il s'agit en fait d'une contraction de plusieurs étapes, bien distinguées dans la preuve avec Lean. La version logiquement correcte est « d'après l'hypothèse  $\dots,$



$\exists \delta > 0, \dots$  Fixons un tel  $\delta$  ». Cette version correcte est un peu lourde mais on peut l'abrégier en « l'hypothèse ..., fournit  $\delta > 0$  tel que ... ». L'enjeu est de ne laisser aucune ambiguïté sur le fait qu'on a fixé un  $\delta$ , même s'il n'y avait pas nécessairement unicité. Plus généralement l'enjeu est de bien distinguer les variables libres et les variables liées (voir aussi les exemples donnés dans la conclusion de ce dossier).

L'exemple de la section précédente peut être relu en se concentrant sur la précision entourant ces questions de variables libres et liées, à la fois dans la syntaxe de la démonstration et dans la réponse de l'ordinateur. On notera que l'affichage permanent du but et du contexte (la liste des objets fixés et des hypothèses) donne un sens très concret aux notions de variables libres et liées. Les variables libres apparaissant dans le but ou dans une ligne du contexte sont libres d'aller se référer à une autre ligne tandis que les variables liées ne le sont pas. Ainsi dans l'exemple le but fait apparaître un  $\varepsilon$  libre de se référer à l'avant dernière ligne du contexte, à savoir  $\varepsilon : \mathbb{R}$ , tandis que  $N$  est lié par le  $\exists$ . Ici la technologie aide bien mais il est tout à fait possible sans ordinateur d'être vigilant et vigilante, particulièrement quand nous sommes au tableau, au moins dans les petites classes (niveau L).

Du côté des difficultés rencontrées, on peut noter une légère dissonance cognitive induite par l'utilisation d'un langage naturel contrôlé. Les commandes tapées ressemblent à du langage naturel mais la syntaxe est aussi rigide que dans un langage de programmation. Toujours du côté des commandes, il y a une tension entre la volonté d'offrir un langage expressif et celle de ne pas créer une montagne de commandes à connaître. Bien sûr le cours met à disposition un manuel des commandes et un aide-mémoire qui sont disponibles y compris durant l'examen. Un autre équilibre délicat à trouver est celui de l'automatisation partielle. Idéalement on voudrait que l'ordinateur fasse tout seul les détails qu'on ne demanderait pas sur papier. Cet idéal lui-même est très ambigu et l'implémentation pose aussi des difficultés. Il est probable qu'il y aura toujours de la marge de progression dans ce domaine.

## 2.3 – Sorbonne Université

### F. Le Roux

5. Cette expérience, menée avec l'aide de Zoé Mesnil et Camille Lichère, est décrite dans le mémoire de M1 de cette dernière, disponible sur <https://perso.imj-prg.fr/frederic-leroux/>.

## Cours concerné

DÉYDUCTION est un logiciel d'aide à l'apprentissage de la démonstration, essentiellement une interface graphique pour l'assistant de preuve Lean. Il peut être téléchargé sur la page web de l'auteur (lien dans les signatures en fin d'article). Il a été expérimenté une première fois en juin 2021, à Jussieu, sur 3 séances de 3h hors cursus, avec un groupe d'une dizaine d'étudiant·e·s volontaires de L1<sup>5</sup>. Une deuxième expérience a eu lieu en 2022, toujours en L1, dans un « atelier de recherche encadrée » concernant 2 groupes de 16 étudiant·e·s, l'un en maths-info et l'autre en maths-physique, représentant au total environ 5% des effectifs du portail « Sciences formelles ». L'atelier était organisé en 10 séances de 2h. Les étudiant·e·s suivaient en parallèle un module de mathématiques classique.

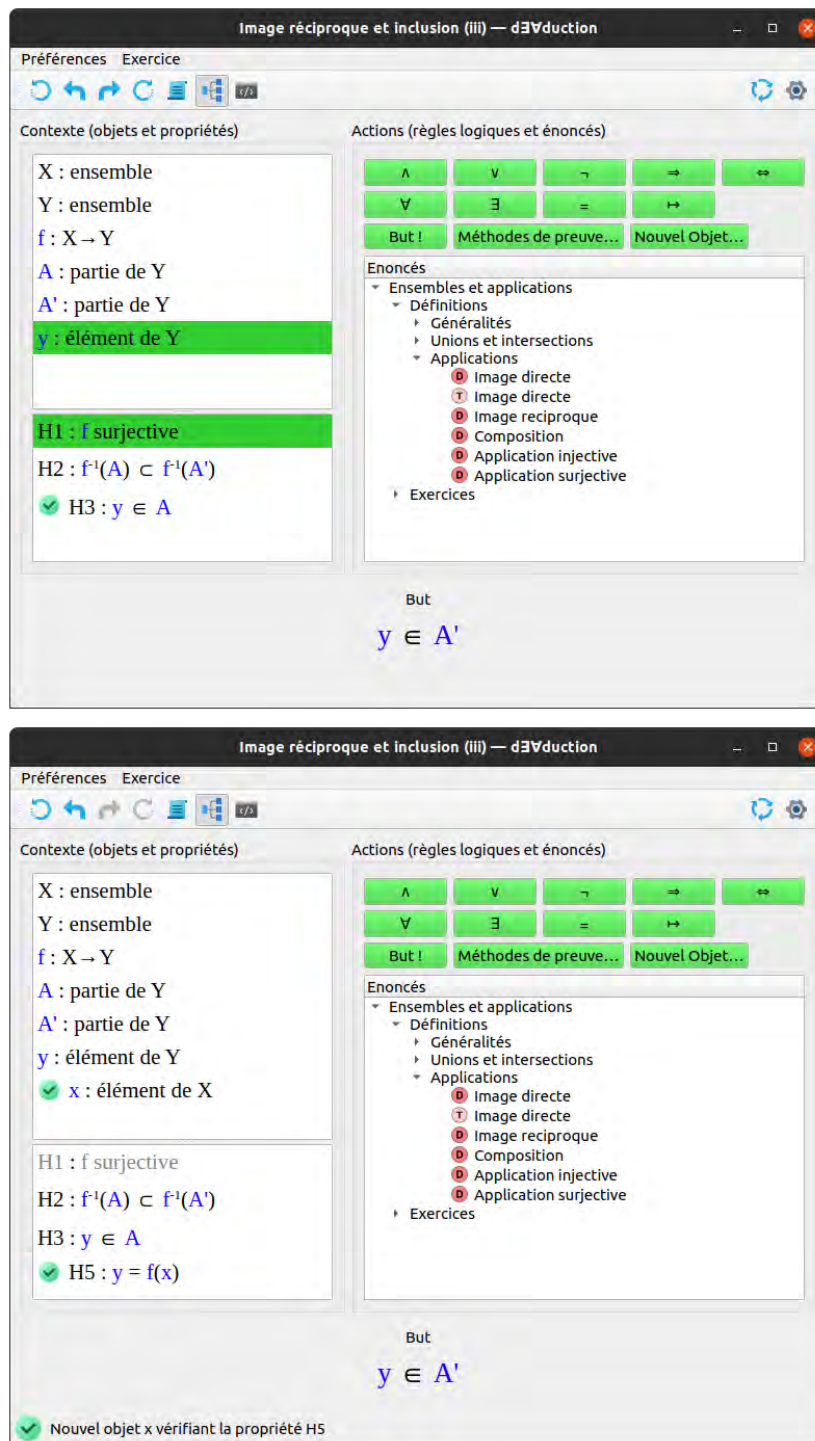
## Le logiciel

La fenêtre principale, représentée sur la figure 3, donne à tout moment un instantané de la preuve en cours. Elle se découpe essentiellement en trois zones :

- à gauche, la zone de *contexte*, divisée en deux : en haut les objets présents à ce stade du raisonnement, et en bas leurs propriétés ;
- en bas, la propriété à démontrer, appelée *but* ;
- à droite, la zone des actions, qui permettent de progresser dans le raisonnement en faisant évoluer le contexte et le but : en haut des boutons avec différents symboles logiques qui permettent d'appliquer les règles syntaxiques correspondantes, en dessous une liste de définitions et d'énoncés qui peuvent également être utilisés.

La figure 3 montre l'utilisation d'une propriété du type  $\forall \dots \exists \dots$ . Précisons que les preuves ne sont pas « pré-enregistrées », l'utilisateur·rice dispose d'une certaine liberté (dans la limite des possibilités de l'interface), et peut procéder par essais et erreurs en revenant sur ses pas chaque fois que nécessaire à l'aide des boutons de navigation de la barre d'outils.

FIGURE 3 – DÉDUCTION : utilisation d'un énoncé universel



Ces deux captures représentent une étape de la preuve de la propriété suivante :

$$f \text{ surjective} \Rightarrow (\forall A, A' \subset Y, (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A') \Rightarrow A \subset A')).$$

Après avoir déroulé les implications et les quantificateurs universels, l'utilisatrice sélectionne l'objet  $y$  et la propriété  $f$  surjective et clique sur le bouton  $\forall$  ; le logiciel introduit le nouvel objet  $x$  et la propriété  $y = f(x)$ . Le paramétrage permet de régler le niveau de détail, en obligeant par exemple à déplier la définition de surjectivité avant de pouvoir l'appliquer, contrairement à ce qui se passe ici.

## Contenu de la formation

Le but est d'apprendre à concevoir et rédiger des démonstrations mathématiques, et le logiciel n'est qu'un outil. Le choix qui a été fait vis-à-vis de la logique est d'avoir une attitude pragmatique, on n'introduit aucune connaissance théorique, pas de déduction naturelle ni même de calcul propositionnel.

La première séance est une séance de prise en main, on démontre essentiellement des propriétés « évidentes ». Dans la deuxième séance, on introduit les notions d'image directe et réciproque, et on cherche à comprendre si les formules

$$A = f^{-1}(f(A)), \quad B = f(f^{-1}(B))$$

sont vraies. Les étudiant·e·s peuvent chercher à montrer chaque inclusion (vraie ou fausse) avec le logiciel, puis à dessiner des contre-exemples. La présentation en questions ouvertes et l'utilisation des « patates » pour les contre-exemples permettent d'éviter de s'enfermer dans une démarche purement syntaxique. On explore ensuite les notions d'injectivité et de surjectivité. Une séance est consacrée à la négation. Les deux dernières séances portent sur les limites des suites, sans l'aide du logiciel puisque les exercices correspondant n'y ont pas encore été intégrés<sup>6</sup>.

À partir de la troisième séance on commence à convertir les preuves sur ordinateur en preuves rédigées classiques. En particulier, on fait remplir aux étudiant·e·s un tableau indiquant les formulations possibles pour les deux types d'emploi de chacun des boutons logiques (pour démontrer une propriété, ou bien pour utiliser une propriété du contexte). Les étudiant·e·s rendent chaque semaine au moins une démonstration rédigée avec (ou sans) l'aide du logiciel, qui leur est rendue avec des commentaires détaillés.

## Bilan provisoire

Les étudiant·e·s s'approprient l'interface dès la première séance, les difficultés qui peuvent apparaître sont déjà d'ordre logique (notamment dans l'utilisation et la démonstration des disjonctions du type «  $x \in A \cup B$  »). L'interface peut dérouter un·e étudiant·e avancé·e (ou même un·e professionnel·le) qui se demande comment faire comprendre à l'ordinateur la preuve qu'il ou elle a en tête ; mais elle rassure les débutant·e·s, qui n'ont pas d'idée préalable pour résoudre l'exercice, et qui acceptent plus

facilement de se laisser guider par le formalisme. Après quelques séances, la plupart sont capables de résoudre en quelques minutes, sur logiciel, un exercice comme celui de la figure 3.

Le point clé est le passage de la preuve sur logiciel à une preuve rédigée. Contrairement à ce qu'on aurait pu penser, ce passage n'est pas du tout automatique ! Voici trois types de difficultés qui apparaissent.

- La machine est très pointilleuse, et retranscrire toutes les étapes conduirait à une preuve totalement indigeste. L'étudiant·e ne peut donc pas coller à la machine, et le choix du niveau de détail pose beaucoup de problèmes. Par exemple, à quel moment doit-on faire un rappel du but ?
- Les étudiant·e·s ont du mal à différencier clairement le but des hypothèses du contexte. Ceci est particulièrement problématique lorsqu'on doit ré-écrire le but (par exemple pour transformer «  $x \in f^{-1}(B)$  » en «  $f(x) \in B$  »). Comment exprimer clairement que la propriété manipulée est le but et non pas une hypothèse du contexte ?
- L'introduction des variables, et notamment le fait de différencier clairement les variables libres du contexte des variables liées pose également problème, surtout lors de l'introduction d'une variable obtenue en appliquant un énoncé existentiel. Sur ce point, on a fait le choix<sup>7</sup> de suggérer fortement aux étudiant·e·s de réserver la formulation « il existe  $x$  » pour une variable muette, et d'utiliser « on obtient  $x$  » ou « la propriété fournit un  $x$  » lorsque la propriété est appliquée et donne naissance à un nouvel objet du contexte.

Malgré ces difficultés, les retours des étudiant·e·s sont très majoritairement positifs. Ils confirment que l'étape de rédaction est essentielle pour les empêcher de se contenter de cliquer sans comprendre, de se laisser guider aveuglément par la machine. Beaucoup notent un effet positif dans les TDs classiques suivis en parallèle ; plusieurs mentionnent un déblocage (« ça m'a rassurée sur mes capacités à comprendre le cours et les démonstrations »), une influence sur leur choix de continuer en licence de mathématiques. Leurs regrets concernent le fait que le contenu soit trop axé sur la théorie des ensembles et pas assez sur l'analyse, contrairement au module principal de mathématiques. Par ailleurs, le logiciel semble moins utile pour les plus avancé·e·s, qui préfèrent apprendre à utiliser Lean, et pour celles et

6. Travail en cours...

7. Choix un peu tardif malheureusement, influencé par l'exposé de Patrick Massot présenté dans ce dossier.

ceux qui ont trop de lacunes pour que le logiciel soit bénéfique (environ 2 étudiant·e·s sur 16 pour chacune des deux situations). Nous n'avons pas perçu de différence notable entre le groupe maths-info et le groupe maths-physique.

Du point de vue de l'enseignant, plusieurs points sont particulièrement satisfaisants. D'une part, on peut laisser les étudiant·e·s travailler principalement en autonomie pendant 2h, et les voir avancer à leurs rythmes, sans se décourager, y compris sur des exercices qui leur sembleraient inaccessibles dans le contexte d'un TD classique. D'autre part, les corrections de preuves au tableau peuvent s'appuyer sur la pratique commune du logiciel, ce qui permet de construire collectivement les preuves avec une assez grande assurance que le discours autour de la démonstration soit à la portée de tous et toutes. L'expérience sera renouvelée l'an prochain, avec une interface améliorée permettant par exemple d'afficher un aperçu global de la preuve, montrant les objets et hypothèses introduites, les déductions et ré-écritures successives comme sur la capture ci-contre.

Le développement du logiciel DEDUCTION a démarré en juillet 2020, avec un groupe constitué de l'auteur et de Marguerite Bin, Florian Dupeyron, Antoine Leudière, tous trois étudiants en master, en se basant sur un client Python pour Lean écrit par Patrick Massot. La première séquence d'enseignement a ensuite été mise au point avec l'aide de Camille Lichère, elle aussi étudiante en master, et Zoé Mesnil. La suite du développement sera collective ou ne sera pas... Je cherche à constituer une équipe de collègues intéressé·e·s par le futur du logiciel (développement et utilisation). Si c'est votre cas, contactez-moi!

## 2.4 – Université de Strasbourg

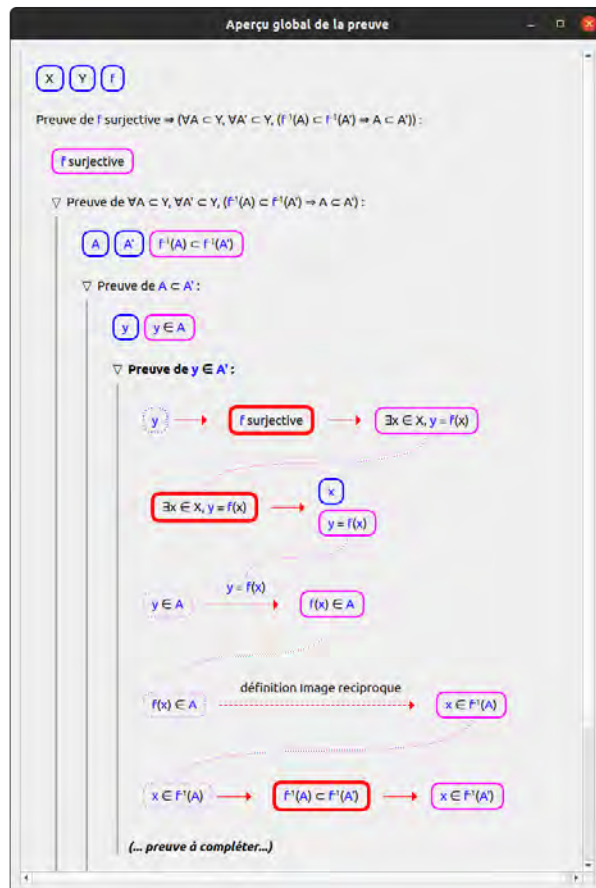
P. Guillot, J. Narboux

### Cours concerné : *Fondements du calcul et du raisonnement*

Le cours *Fondements du calcul et du raisonnement* est un cours de première année/deuxième semestre qui compte pour 3 ECTS. Ce cours est commun à la licence de Mathématiques et la licence d'Informatique. Le public est donc constitué d'étudiant·e·s ayant pour la plupart suivi la spécialité Mathématiques au lycée. Le cours est répété à chaque semestre de printemps et d'automne. Les effectifs sont d'environ 200 étudiant·e·s au printemps et une centaine à l'automne. Parmi eux, une quarantaine

suivent le cursus renforcé et sélectif *Cursus Master en Ingénierie*. Le cours existe depuis 2018 et comporte un volume horaire de 24h de cours intégré associé à 4h de TP en salle machines pour la prise en main de l'assistant de preuve.

L'objectif du cours est d'apprendre la structure et le vocabulaire utilisé dans un document mathématique et d'apprendre les règles de déductions et à rédiger une démonstration mathématique. Le polycopié prend le parti de lister explicitement toutes les règles de raisonnements nécessaires pour une démonstration en s'inspirant de la déduction naturelle, mais en langue naturelle sans utiliser le formalisme de Gentzen.



### Le logiciel

Le logiciel que nous avons choisi d'utiliser est le logiciel Edukera développé par Benoit Rognier et Guillaume Duhamel [26]. Edukera est un assistant de preuve sous la forme d'une application Web, l'interaction avec l'utilisateur·rice repose essentiellement sur une interface graphique à base de clics, sans avoir à apprendre une syntaxe particulière. Edukera utilise l'assistant de preuve Coq [29], mais celui-ci est invisible pour l'utilisateur·rice. Edukera est un peu à



l'apprentissage de la démonstration ce que Scratch est à l'apprentissage de la programmation, c'est-à-dire que c'est un système conçu spécifiquement pour l'enseignement, ce n'est pas un logiciel utilisable professionnellement. Le logiciel est facile d'accès, il est disponible en français et anglais, et les notations utilisées sont celles des mathématiques usuelles<sup>8</sup>, des didacticiens permettent de découvrir conjointement les règles de la logique (déduction naturelle) et le logiciel avec très peu d'aide nécessaire de la part de l'enseignant·e. Cela est un atout dans notre contexte avec une équipe pédagogique fluctuante et des moyens limités en terme d'heures de face à face pédagogique en salle machine. L'intégration de la plateforme dans Moodle permet de proposer des exercices d'entraînement à la maison ainsi que des exercices notés à des cohortes d'étudiant·e·s consécutives avec récupération automatique des notes, sans problèmes d'installation.

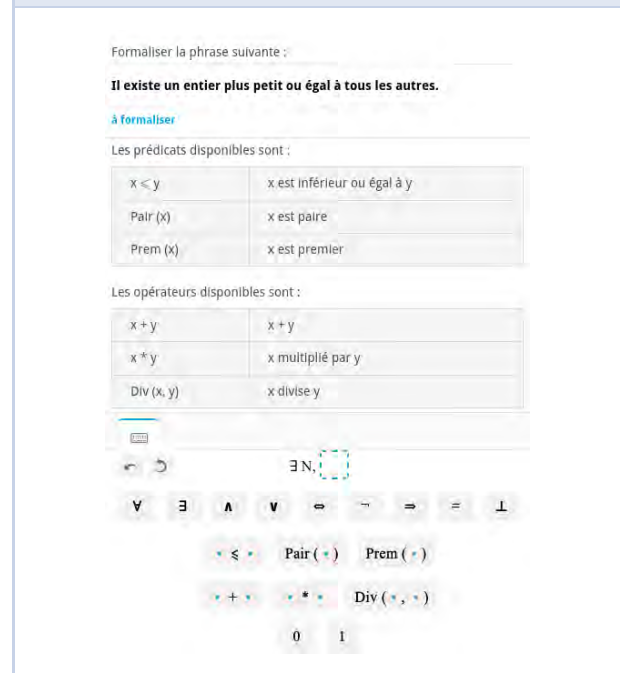
Pour les devoirs maison, le mode d'interaction avec le logiciel via une interface graphique a aussi l'intérêt de rendre plus compliqué le plagiat pour les étudiant·e·s qu'avec un logiciel reposant sur une interface textuelle, où les fichiers peuvent être copiés facilement.

Edukera possède néanmoins des limitations majeures : le logiciel n'est pas *open-source* ni libre, les démonstrations réalisées par les utilisateur·rices ne sont pas vérifiées par Coq, ce qui rend le logiciel plus vulnérable à des bugs mettant en jeu la validité des démonstrations produites. De plus Edukera n'est plus maintenu depuis 2020, il comporte quelques bugs et lenteurs et l'enseignant·e ne peut pas ajouter ses propres exercices.

Edukera propose deux types d'exercices : des exercices de formalisation et de démonstration. Les exercices de formalisation consistent en une phrase en langue naturelle qu'il s'agit de traduire sous la forme d'une proposition en logique de premier ordre dans un langage donné. La réponse proposée est alors comparée à la réponse attendue à l'aide d'un démonstrateur automatique (fig. 4).

L'interface pour saisir la réponse n'est pas textuelle, mais consiste à saisir l'arbre de syntaxe abstraite de la formule en notation polonaise préfixée. Cela impose à l'utilisateur·rice d'avoir en tête la structure de la proposition ainsi que la notion de connecteur principal.

FIGURE 4 – Edukera en mode exercices de formalisation



Edukera propose principalement des exercices de démonstration : un énoncé est proposé et l'utilisateur·rice doit produire de manière interactive une démonstration.

Deux modes de démonstration sont proposés : le mode logique et le mode maths.

Dans le mode logique, les exercices sont constitués de tautologies en logique propositionnelle ou du premier ordre. Les règles de déduction proposées sont celles de la déduction naturelle de Gentzen, sans automatisation. La démonstration construite est visualisée au fur et à mesure à la fois sous une forme textuelle et une forme arborescente. L'enseignant·e peut choisir entre plusieurs types de visualisation des preuves à la Fitch, Prawitz ou Gentzen (fig. 6).

Dans le mode maths, les exercices proposés sont des propriétés élémentaires des ensembles, des fonctions (image directe et réciproque, injectivité, surjectivité), des relations, ainsi que des propriétés à démontrer par récurrence ou en manipulant les sommes et produits. Ici le niveau de granularité dans l'élaboration des preuves se rapproche plus de la pratique usuelle des mathématiques. Par exemple, si on sait que  $f(x) \in f(C)$ , en un clic le logiciel permet d'obtenir  $x_1$  tel que  $x_1 \in C$  et  $f(x) = f(x_1)$  (fig. 7), alors qu'en déduction naturelle il faudrait utiliser la règle

8. En comparaison des assistants de preuve comme Coq, pour lesquels il est usuel, par exemple, de présenter l'application des fonctions à leurs arguments sous forme curryfiée ( $f \ x \ y$  à la place de  $f(x, y)$ ).

9. Une vidéo d'un exemple de démonstration en Edukera est disponible ici : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03648357/>



d'élimination de l'existential puis la règle d'élimination de la conjonction<sup>9</sup>.

### Contenu

Les deux premiers cours consistent en une introduction au vocabulaire des mathématiques (Axiome, Théorème, Lemme, Définition, Corollaire, condition nécessaire, contraposée, réciproque, ...), à la structure d'un document mathématique, et aux règles de raisonnement. Ce cours est suivi de deux séances de TP, les étudiant·e·s étant censés avoir réalisé en autonomie le didacticiel, l'objectif est de répondre aux questions sur les exercices plus difficiles et de créer du lien entre l'interaction avec le logiciel et la manière de rédiger des preuves sur papier. Nous insistons sur la distinction entre  $\Rightarrow$  et « donc », la nécessité d'introduire les objets avant de les utiliser et la notion de variable libre/liée mise en rapport avec l'utilisation de ce même concept en informatique.

La suite du cours est classique, vocabulaire ensembliste, ensemble des parties, produit cartésien, fonction injective, surjective, bijective, image directe, image réciproque, relation d'équivalence et relation d'ordre, quotient, entiers et démonstration par récurrence.

### Organisation de la formation

Nous avons expérimenté plusieurs formules concernant l'organisation et les modalités d'évaluation, la première année nous avons opté pour un planning très dense en début de semestre, ce cours étant supposé être un pré-requis pour les cours d'analyse et de géométrie. Les exercices Edukera étaient évalués via un TP noté en temps limité. Les années suivantes nous avons opté pour un planning plus étalé dans le temps. Nous avons constaté que certains étudiant·e·s avaient pu réaliser tous les exercices en Edukera, mais qu'ils n'étaient pas toujours

capables de reproduire ces mêmes exercices sur papier lors de l'évaluation. Après analyse de copies, nous avons constaté que les étudiant·e·s avaient pu acquérir des connaissances relatives à la structure des démonstrations, mais parfois sans mémoriser les définitions. Pour pallier ce problème, nous avons d'abord tenté d'introduire dans le contrôle continu des qcms constitués de questions de cours sur les définitions. Cela n'a pas été très concluant, car beaucoup d'étudiant·e·s avaient l'impression d'avoir atteint l'objectif en ayant appris les définitions. En 2022, nous leur avons proposé un auto-test (hors évaluation) afin qu'ils et elles puissent vérifier par eux-mêmes leur connaissance du cours, en étant capables de produire à la fois les définitions formelles, une phrase en français et des exemples et contre-exemples variés.

### Bilan

Nous avons un retour globalement positif des étudiant·e·s, beaucoup indiquent que l'utilisation de l'assistant de preuve les a aidés à comprendre les mécanismes de démonstration (voir fig. 5). Néanmoins, certains rapportent parvenir à réaliser des exercices sans vraiment comprendre ce qu'ils ou elles ont fait grâce à l'automatisation relative fournie par le logiciel ainsi que la boucle d'interaction permanente mise en jeu. D'autres indiquent que pour les exercices les plus difficiles, il est nécessaire de réfléchir et d'être familier avec les concepts mis en jeu.

Notre impression globale (qu'il serait intéressant de valider scientifiquement) est que étant donné le mode d'interaction d'Edukera, en particulier le fait que le logiciel ne nécessite pas de connaître les définitions des objets mis en jeux, il est crucial que les enseignant·e·s soient attentifs à l'acquisition des définitions des concepts mathématiques de façon complémentaire à la pratique des exercices sur papier et sur machine.

FIGURE 5 – Edukera : résultat d'une enquête auprès des étudiant·e·s de Strasbourg



file/Coq-reverse-inclusion.mov

FIGURE 6 – Edukera : visualisation d’une démonstration sous forme d’arbre à la « Gentzen »

**Disjunction**

- $\forall_+$  Left introduction ( $\forall I$ )
- $\forall_+$  Right introduction ( $\forall R$ )
- $\forall_*$  Elimination ( $\forall E$ )

**Negation**

- $\neg_+$  Introduction ( $\neg I$ )
- $\neg_*$  Elimination ( $\neg E$ )

**False**

- $\perp_*$  Elimination ( $\perp E$ )

**Equivalence**

- Introduction ( $\Leftrightarrow I$ )
- Left elimination ( $\Leftrightarrow E$ )
- Right elimination ( $\Leftrightarrow E$ )

Prove that  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$  (1)

( $\Rightarrow I$ )

- Assume  $A \Rightarrow B$  (h1)
- Prove that  $\neg B \Rightarrow \neg A$  (2)
- ( $\Rightarrow I$ )

  - Assume  $\neg B$  (h2)
  - Prove that  $\neg A$  (3)
  - ( $\neg I$ )

    - Assume  $A$  (h3)
    - Prove that  $\perp$  (4)
    - ( $\neg E$ )

      - Prove that  $P?$  (5) (h3) (h2) (h1) to be justified

        - Prove that  $\neg(P?)$  (6) (h2) to be justified

$A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash P?$       $A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash \neg(P?)$

----- ( $\neg E$ )

$A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash \perp$

----- ( $\neg I$ )

$A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

----- ( $\Rightarrow I$ )

$A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$

----- ( $\Rightarrow I$ )

$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

FIGURE 7 – Edukera : exemple d’une fenêtre modale permettant d’appliquer la définition d’image directe

Soient les ensembles A B

Soit  $f : A \rightarrow B$

(1) f est injective

Soit l'ensemble C

(2)  $C \subseteq A$

Soit l'élément x

(3)  $x \in f^{-1}(f(C))$

(4)  $x \in A$

(5)  $f(x) \in f(C)$

(6)  $x \in C$

(7)  $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$

Soit l'élément x

(8)  $x \in C$

...  $x \in f^{-1}(f(C))$

déclarations

⚡ Dédution à partir de (5)

(5) $f(x) \in f(C)$	référence
Soit l'élément $x_i$	déclaration
(6) $x_i \in C$	➤ (5) par définition de l'ensemble image
(5) $f(x) = f(x_i)$	➤ (5) par définition de l'ensemble image

Appliquer

(5) par définition de l'ensemble antécédent

➤ à justifier

x ... (6) par définition de l'inclusion

déclaration

hypothèse

à justifier

## 2.5 – Université de Montpellier

S. Modeste

### Cours concerné : *Raisonnement et théorie des ensembles - L1 mathématiques*

Le cours *Raisonnement et théorie des ensembles* est un petit cours de début d'année au premier semestre de L1 de mathématiques. Ce cours est composé de 9 h de CM (6 × 1h30) et de 10,5h de TD (7 × 1h30). Il concerne environ 160 étudiant·e·s (L1 mathématiques, double licence mathématiques et informatique, CUPGE), qui ont donc suivi des mathématiques au lycée et se destinent à des formations à forte composante mathématique. Ce cours a pour objectif d'introduire en tout début de semestre, avant le démarrage des UE d'Analyse I (fonctions d'une variable et suites) et d'Algèbre I (systèmes linéaires) les bases du discours mathématique, des éléments de logique (des propositions, puis des prédicats), les raisonnements et méthodes de démonstrations classiques, le vocabulaire et les opérations ensemblistes ainsi que les méthodes de démonstration associées, et finalement les notions de base sur les applications mathématiques. Le cours essaie de rendre explicite les règles de fonctionnement des démonstrations en mathématiques, et vise à ce que les étudiant·e·s sachent rédiger des démonstrations sur des objets élémentaires, connus depuis le lycée (fonc-

tions, nombres, suites...). Ceci doit leur permettre de mieux comprendre les démonstrations présentées dans les autres UE de mathématiques, et de produire des démonstrations dans ces UE. Bien que concentrée en tout début d'année (CM sur 2 semaines, TD sur 3 semaines), l'UE est évaluée avec des CC durant le semestre (partant de l'hypothèse qu'ils et elles continuent de progresser au fil du semestre).

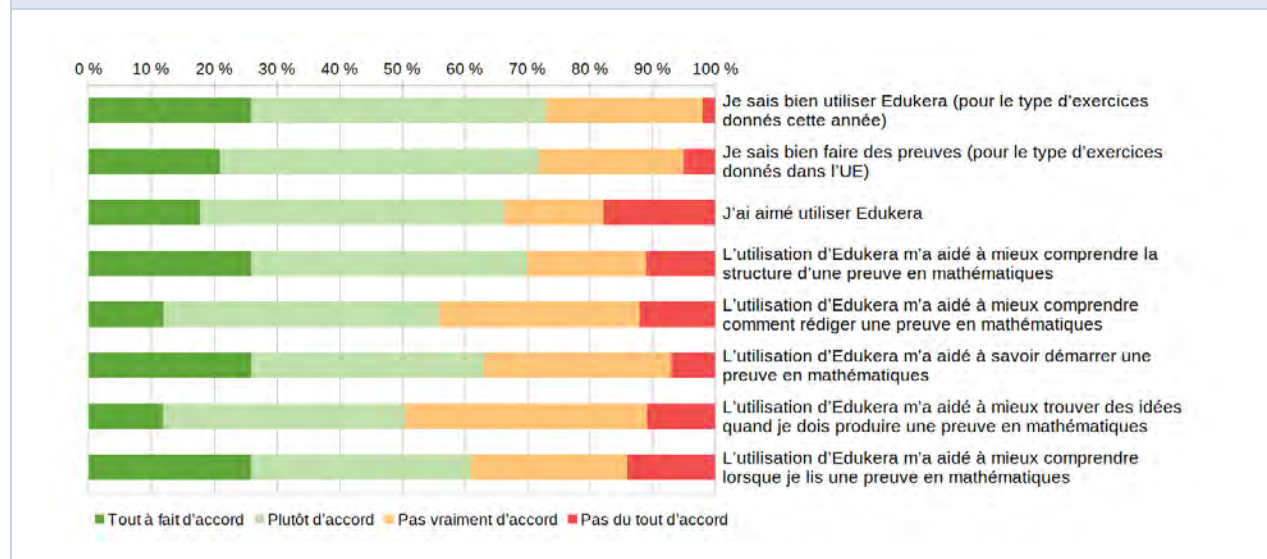
C'est dans le contexte de cette évaluation en CC intégral qu'un assistant de preuve a été introduit dans l'UE.

### Le logiciel

Le logiciel utilisé est le logiciel Edukera, présenté en début de partie 2.4. Dans notre situation, il présente l'avantage d'une prise en main possible en quasi autonomie, d'une compatibilité avec Moodle, et d'une base d'exercices (dont certains avec tutoriel) à partir de laquelle on peut construire un ensemble d'exercices proposés aux étudiant·e·s. Le langage utilisé par le logiciel et la forme des démonstrations sont proches des pratiques en mathématiques.

Un exercice peut être recommencé autant de fois qu'on le souhaite pour le valider. La visualisation des preuves utilisées s'est limitée au mode appelé « Fitch » (qui est le plus proche des preuves en mathématiques, voir fig. 7).

FIGURE 8 – Edukera : résultat d'une enquête auprès des étudiant·e·s à Montpellier



### Contenu

En CM sont présentées les bases du discours mathématique (Que trouve-t-on dans un texte ma-

thématiques? Qu'est-ce qu'un énoncé mathématique?) et les éléments de logique utiles en mathématiques (logique des propositions, variables, quantification). La notion de démonstration et les démonstrations spécifiques aux différentes formes d'énoncés sont présentées (énoncés existentiels et universels, conjonction et disjonction, négation, etc.), ainsi que les raisonnements spécifiques (absurde, contraposée, récurrence...). La suite du cours concerne les ensembles, leur utilisation, et les démonstrations impliquant les ensembles. Enfin, la dernière partie du cours aborde les applications, leur définition et leur utilisation, les notions d'image, image réciproque, la composition, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité ainsi que la notion d'application réciproque. Les exercices de TD commencent par travailler la formalisation des énoncés, et leur valeur de vérité, puis les démonstrations d'énoncés mathématiques, et enfin le travail ensembliste et avec les applications. Le nombre de CM et de TD est relativement faible par rapport au contenu, mais nous comptons sur le fait que les notions introduites et travaillées sont réutilisées et approfondies dans les autres UE de mathématiques du semestre (Algèbre, Analyse, Géométrie).

### Organisation de la formation

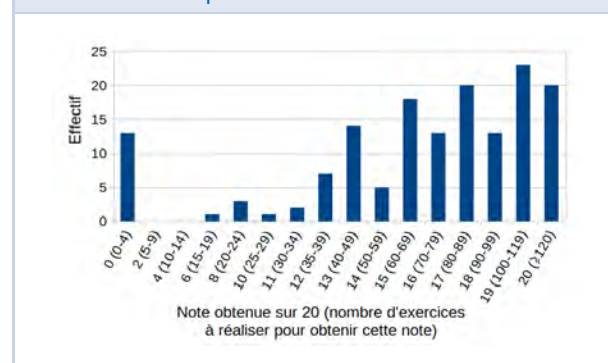
L'UE est évaluée avec 3 cc. Les cc 1 et cc 3 sont des devoirs sur table d'une durée d'une heure, qui ont lieu en début et fin de semestre (le premier une ou deux semaines après la fin de l'UE). C'est pour l'évaluation de cc 2 que l'assistant de preuve a été utilisé. Cette évaluation, pour une UE de seulement 2 ECTS et pour la première année d'utilisation de l'assistant de preuve, a été relativement bienveillante et valorisant le travail régulier. Les étudiant·e·s ont eu à leur disposition une liste d'exercices Edukera sur laquelle ils et elles sont supposés travailler tout au long du semestre, en autonomie à la maison. À la fin du semestre, c'est le nombre d'exercices réalisés qui permet de produire la note de cc 2 (on peut lire sur la figure 9 le barème de correspondance nombre d'exercices réalisés - note, donné aux étudiant·e·s en début d'année).

Environ 170 exercices ont été sélectionnés parmi ceux proposés par la plateforme Edukera. Cela commence par 42 exercices de formalisation logique (énoncés hors-mathématiques puis mathématiques), puis d'énoncés à prouver avec l'assistant de preuve, commençant par de la logique booléenne, puis du premier ordre, puis utilisant les ensembles, et en-

fin des énoncés portant sur les applications et leurs propriétés. Ces exercices étaient assez proches (parfois un peu plus techniques) de ce que l'on pouvait demander en TD, et la progression d'Edukera assez proche de celle du cours (on peut sélectionner un sous-ensemble d'exercices, mais pas choisir l'ordre de présentation, déterminé par le logiciel – l'étudiant·e peut néanmoins traiter les exercices dans l'ordre souhaité et sauter des exercices).

On retrouve en figure 9 la répartition des notes de cc 2 des 169 inscrits. Plus de la moitié a traité 70 exercices ou plus.

FIGURE 9 – Répartition des notes



Aucun moyen supplémentaire n'était disponible pour accompagner la prise en main et l'avancée dans les exercices. Edukera comporte des tutoriels, qui permettent de prendre en main chacune des nouvelles fonctionnalités, introduites au fil des exercices, et un document de présentation avait été réalisé pour la toute première connexion et prise en main. La situation nous a aussi permis de mettre en place un créneau hebdomadaire d'aide sur l'assistant de preuve, en salle informatique, ouvert à tous et toutes. Cela a été permis par l'existence d'un mentorat par des étudiant·e·s de master, déjà financé, et le fait qu'un des mentors avait déjà utilisé un assistant de preuve, dans un cours de L3.

### Bilan

Le bilan de cette expérience, du point de vue de l'enseignant, est plutôt positif.

Un questionnaire d'évaluation de l'outil et de sa perception a été proposé aux étudiant·e·s à l'issue du semestre, avec des questions fermées (à échelle de Likert) et des questions ouvertes.

Parmi les questions fermées avec échelles de Likert, les 3 premières concernaient le niveau de maîtrise du logiciel, le niveau de maîtrise de la preuve,



et l'appréciation du logiciel, les 5 suivantes concernaient l'apport perçu du logiciel pour l'apprentissage de la preuve. Nous avons reçu 57 réponses. La figure 8 montre ces questions, et les proportions des réponses obtenues.

On constate qu'une majorité semble considérer que l'utilisation d'Edukera a contribué à des apprentissages autour de la compréhension, rédaction, conception de preuves en mathématiques. Les proportions de chaque opinion pour chaque item semblent assez stables (à une dizaine de pourcents près), y compris entre les 3 premières questions (entre elles) et avec les 5 autres. Concernant les apprentissages perçus, on note que l'item le plus approuvé concerne la compréhension de la structure des preuves (70%), suivi par le démarrage d'une preuve (63%), et la lecture de preuves (61%). L'item le moins approuvé est celui concernant l'aide à trouver les idées pour les preuves (51%). Ces réponses semblent assez cohérentes avec ce que nous identifions comme les intérêts d'un assistant de preuve pour l'enseignement des mathématiques.

Dans les commentaires, un point revient souvent : les étudiant·e·s disent avoir eu des difficultés à prendre en main le logiciel sans aide, et regrettent qu'une séance de prise en main ou une présentation en amphi n'ait pas eu lieu. Nous allons essayer de mieux intégrer la présentation de l'outil, l'année prochaine, lors des cm.

Une autre possibilité serait de profiter des appels à soutien aux projets pédagogiques qui existent dans beaucoup d'universités pour obtenir des heures ou des moyens supplémentaires pour cette expérimentation.

### 3. Conclusion

Bien que les assistants de preuve aient été initialement conçus pour la recherche en informatique et en mathématiques, il nous semble effectivement pertinent, comme le suggèrent Hanna et Yan [18], de revisiter l'enseignement de la preuve en s'appuyant sur cet outil (relativement) nouveau, et de produire des analyses fines d'expérimentations, intégrant l'analyse de l'outil utilisé, mais aussi du déroulement des séquences d'enseignement, des productions des étudiant·e·s. De telles analyses pourront s'appuyer sur une littérature didactique riche sur l'enseignement et l'apprentissage de la preuve dans le supérieur (voir par exemple une synthèse dans [28]). Nous pensons d'une part que derrière un même intérêt quel que soit le logiciel utilisé, il y a des différences entre les assis-

tants de preuve qui peuvent avoir des conséquences sur les apprentissages, d'autre part que ces logiciels, comme tout outil d'enseignement, doivent être pensés avec leur « mode d'emploi » pour ce qui est de l'enseignement. Concernant ce premier point, une analyse a priori des impacts didactiques de différents assistants de preuve [3] a été produite. Concernant le deuxième point, des analyses d'expérimentations avec Edukera ou DEDUCTION ont été faites ou sont en cours.

Dans notre conclusion de cet article, nous repreneons quelques observations saillantes issues des expérimentations relatées ci-dessous ou ailleurs, puis nous soulignerons quelques points qui font débat et qui amènent à prendre certaines précautions d'usage.

#### 3.1 – Observations et constats

Les diverses expérimentations d'utilisation d'assistants de preuve montrent que les étudiant·e·s s'engagent dans la recherche de preuves avec ces outils, là où en papier-crayon nous les voyons trop souvent renoncer, ne sachant même pas par où commencer. L'utilisation d'un ordinateur permet que chacun et chacune avance à son rythme, tout en échangeant éventuellement avec les autres, tâtonne en bénéficiant des rétroactions de l'assistant de preuve. L'interprétabilité de ces rétroactions est un élément important dans le développement des assistants de preuve pour l'enseignement. D'une part, les rétroactions fournies par l'assistant de preuve peuvent être plus ou moins détaillées pour aider la compréhension des erreurs. Mais quels que soient ces retours, un accompagnement par un·e enseignant·e est nécessaire pour aider les étudiant·e·s à comprendre le niveau de granularité attendu par la machine dans les preuves.

L'utilisation d'un assistant de preuve conduit à enseigner plus explicitement certains principes de la logique, ce que recommandent Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay [13]. Dans les expérimentations relatées ici, comme dans d'autres déjà citées, le travail avec un assistant de preuve permet une prise de conscience des mécanismes logiques sous-jacents à la construction et à la manipulation des énoncés mathématiques, notamment dans la production des preuves. Tout d'abord, et ce quel que soit le degré de formalisme avec lequel cela est fait (et l'on voit dans les expérimentations relatées ici qu'il y a différentes positions sur le sujet), il est nécessaire de nommer et de donner quelques propriétés



des connecteurs et quantificateurs, et, comme cela a déjà été mentionné, de bien distinguer les trois façons dont chaque connecteur ou quantificateur peut intervenir : pour former un énoncé, pour utiliser un énoncé et pour démontrer un énoncé.

Donnons deux exemples d'une telle distinction. Un assistant de preuve distingue clairement les deux étapes que sont affirmer une implication (et alors le symbole  $\Rightarrow$  est utilisé dans la formation de cet énoncé qui se trouve dans le contexte), puis utiliser cette implication, ce qui consiste à affirmer également la prémisse, et à en déduire la conclusion, ce que l'on rédige fréquemment en utilisant le mot « donc ». Malheureusement, il est très courant de voir écrit  $P \Rightarrow Q$  comme abréviation de « on sait que  $P$  et que  $P \Rightarrow Q$  donc on obtient  $Q$  ». On notera que la version correcte fait intervenir le connecteur d'implication dans son rôle de formation d'énoncé et une utilisation de cet énoncé. Ce type de raccourci est sans conséquence pour un expert, mais conduit parfois à une confusion tragique, par exemple si on applique cette interprétation à la définition de limite d'une suite qui devient « pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe  $N$  tel que, pour tout  $n$ ,  $n \geq N$  donc  $|u_n - l| < \varepsilon$  ».

Un autre exemple type, cette fois-ci de confusion entre formation d'un énoncé et démonstration de cet énoncé provient du quantificateur universel et fait aussi intervenir une confusion entre variables libres et variables liées. La suite de symboles  $\forall x$  est le début d'un énoncé, pas d'une démonstration. La démonstration sur papier d'un tel énoncé commencerait par « Soit  $x$  » ou « Fixons  $x$  » et avec un assistant de preuve, par un terme précis bien distinct du symbole  $\forall$ . Mais on voit parfois au tableau des démonstration commençant par  $\forall x$  ou par les mots « Pour tout  $x$  ». Là encore il y a risque de confusion car la variable  $x$  est alors liée par le quantificateur alors que la version correcte introduit une variable libre et donc un objet mathématique fixé jusqu'à la fin de la démonstration.

À l'issue de leur analyse de preuves produites par des étudiant·e·s ayant ou non travaillé avec Lean, Thoma et Iannone [30] concluent que l'usage de Lean favorise l'utilisation correcte du langage mathématique et du symbolisme, et conduit à préciser plus clairement à quel ensemble appartiennent les objets manipulés. Pour utiliser un assistant de preuve, on est confronté à la nécessité d'un langage formalisé, qu'il faut apprendre car il y en a besoin pour parler avec la machine. Ce langage est utilisé comme un médiateur entre l'étudiant·e et l'ordinateur, mais aussi entre le langage mathématique académique et le langage utilisé par les étudiant·e·s qui n'ont pas

encore complètement acquis la familiarité avec les pratiques langagières de la communauté mathématique. Ce n'est pas seulement l'usage en soi d'un assistant de preuve qui permet de lever les implicites de ces pratiques, et de montrer l'importance d'être précis quant aux mots utilisés dans la rédaction de preuves, mais plutôt des discussions avec les étudiant·e·s suscitées par des allers-retours entre preuve avec l'assistant de preuve et preuve en papier-crayon.

Le travail avec un assistant de preuve montre aussi qu'il y a dans la production de preuve une part qui peut être déroulée de façon automatique, en se basant sur quelques règles de déduction, et une part qui demande de s'arrêter un instant pour réfléchir. Les logiciels comme DEVDUCTION ou Edukera prennent en charge une partie de l'automatisation : un clic sur le bon bouton (et cela vient assez rapidement) permet de transformer l'état de preuve, et par exemple de passer d'un but sous forme d'implication à l'introduction d'une hypothèse qui en est la prémisse, et d'un nouveau but qui en est la conclusion. Ainsi, quand les étudiant·e·s travaillent sur le logiciel, ils et elles sont soulagées de cette partie, et peuvent se concentrer sur la recherche des idées. Mais cela leur montre aussi que ces automatismes, reposant sur les liens entre structure de la preuve et structure de l'énoncé à prouver, sont reproductibles dans la rédaction sur papier, et qu'il est même possible dans ce cas de se permettre plus de souplesse sur les mots utilisés ou sur le niveau de détail. Là encore, les analyses de Thoma et Iannone [30] montrent une meilleure structuration des preuves des étudiant·e·s ayant travaillé avec Lean.

### 3.2 – Débats et précautions d'usage

Malgré ces observations positives et apports, l'utilisation d'assistants de preuve pour l'enseignement semble aussi produire certaines difficultés, qui pourraient être liées à la nouveauté de ces enseignements, à des éléments de contextes (horaire trop faible) ou aux assistants de preuve intrinsèquement.

Un premier point que nous pouvons noter est le risque de glissement vers la preuve formelle [15]. L'assistant de preuve demande parfois d'entrer dans des détails de preuve qui ne sont pas habituellement exigés ou présentés dans l'enseignement. Il rend visible les règles formelles liées à la production/écriture d'une démonstration (et prend en charge le contrôle de l'application conforme de ces règles) mais peut produire un effet de réduction de l'activité de preuve à celles-ci. Ainsi, on observe que certain.e.s étudiant.e.s semblent parvenir à réaliser des preuves sans vraiment comprendre ce qu'ils ou elles ont fait ou ce que fait la preuve, ce qui peut favoriser une approche syntaxique dans la production de preuve [32]. Or, différentes recherches montrent l'importance d'articuler les aspects syntaxiques et sémantiques [12]. Par ailleurs, Hanna et Yan [18] s'interrogent sur la possibilité, avec un assistant de preuve, de travailler sur la preuve dans sa fonction d'explication et pas seulement dans sa fonction de validation. Les assistants de preuves ne prennent pas en charge l'aspect sémantique, ni la dimension explicative, il est donc nécessaire d'accompagner leur utilisation par des activités plus traditionnelles (recherche d'exemples, de contre-exemples, utilisation de dessins, rédaction papier-crayon).

Cet aspect peut être renforcé par l'automatisation plus ou moins forte de l'application des règles de déduction, et le contrôle permanent qu'exerce le logiciel sur les énoncés produits et la validité des règles appliquées. Cela peut engendrer une boucle essai-erreur assez courte, qui peut maintenir les étudiant.e.s dans une approche superficielle (c'est particulièrement le cas avec les logiciels disposant d'une interface cliquable, qui favorise une prise en main rapide, mais peuvent produire un effet pilote-automatique). Cet aspect serait à comparer avec des phénomènes similaires dans l'apprentissage de la programmation.

L'usage d'assistants de preuve en cours de mathématiques pose aussi des questions sur les objectifs de l'enseignement dispensé. Ceci met parfois à jour des différences de points de vue sur la démonstration mathématique et son apprentissage au sein des équipes pédagogiques. Ces débats transparaissent dans les témoignages de cet article. Un point concerne l'enjeu d'enseignement de « la » preuve versus « des » preuves. Le but de l'usage d'un assistant de preuve dans l'enseignement mathématique est-il de comprendre ce qu'est la démonstration en mathématiques ou de réaliser des démon-

trations mathématiques? Le but est-il de s'assurer de produire des preuves valides et de certifier les résultats mathématiques, ou de mieux comprendre les étapes-clés ou la structure globale de leurs preuves? L'objectif est-il de savoir construire (ou de savoir qu'on peut construire) des preuves formelles des résultats mathématiques, ou d'outiller l'étudiant.e pour lire, produire et contrôler des preuves « papier-crayon »? Plus profondément, ceci questionne quelle est la référence de ce qu'est une preuve ou une démonstration dans un cours de mathématiques de début d'université, et sur quels éléments de logique et quel formalisme on s'appuie. Les assistants de preuve, en rendant visibles cette logique et ce formalisme, contribuent nécessairement à cette référence pour les étudiant.e.s, mais la façon dont on les présente et dont on rend compte de leur fonctionnement peut varier. Par exemple, les assistants présentés dans cet article reposent tous sur des systèmes logiques qui ne sont pas la théorie des ensembles (utilisée classiquement dans l'enseignement), notamment la théorie des types. Cette différence entre théories peut-elle (et doit-elle) rester transparente? Nécessite-t-elle d'introduire certains éléments théoriques (au-delà des règles de déduction, qui nous semblent unanimement importantes à expliciter)? Peut-elle poser des problèmes de compréhension de l'assistant de preuve si on laisse certaines choses implicites? Plus prosaïquement, la question de la distance entre la preuve des mathématicien.ne.s et la preuve dans l'enseignement de début d'université se pose aussi. Par exemple, comme mentionné plus haut, l'usage du quantificateur existentiel, et de l'application implicite de son élimination, dont on sait qu'il pose problème aux étudiant.e.s demande une réflexion sur la nécessité de lever cet implicite dans l'enseignement sans trop s'éloigner de la pratique mathématique [10].

Ces débats existent déjà dans l'enseignement supérieur des mathématiques, mais il nous semble que l'usage d'assistants de preuve peut être un révélateur de ces questions importantes.

L'assistant de preuve peut contribuer à l'enseignement et l'apprentissage de la preuve et il nous semble nécessaire de développer des expérimentations et des recherches sur le sujet. L'usage d'assistants de preuve ne peut se substituer à un enseignement plus classique de la démonstration, et c'est dans l'articulation entre preuves formelles et preuves papier-crayon, accompagnée par l'enseignant.e, que nous voyons un potentiel important.

## Références

- [1] J. Avigad. "Learning Logic and Proof with an Interactive Theorem Prover". In: *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Ed. by G. Hanna, D. A. Reid, and M. de Villiers. Mathematics Education in the Digital Era. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 277–290. ISBN: 978-3-030-28483-1. DOI: 10.1007/978-3-030-28483-1\_13. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_13) (visited on 12/06/2020).
- [2] J. Avigad and J. Harrison. "Formally verified mathematics". *Commun. ACM* 57, no.4 (Apr. 2014), pp. 66–75. ISSN: 0001-0782, 1557-7317. DOI: 10.1145/2591012. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/2591012> (visited on 06/22/2022).
- [3] E. BARTZIA, A. MEYER et J. NARBOUX. « Proof assistants for undergraduate mathematics and computer science education : elements of a priori analysis ». In : *INDRUM 2022 : Fourth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Sous la dir. de M. TRIGUEROS. Hanovre, Germany : Reinhard Hochmuth, oct. 2022. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03648357>.
- [4] J. BARWISE et J. ETCHEMENDY. « Hyperproof : for Macintosh » (1994).
- [5] J. BLANC et al. « Proofs for freshmen with Coqweb ». *PATE'07* (2007). bibtex : blanc2007proofs, p. 93.
- [6] R. BORNAT. *Natural Deduction Proof and Disproof in Jape (March 2004)*.
- [7] J. BREITNER. « Visual theorem proving with the Incredible Proof Machine ». In : *International Conference on Interactive Theorem Proving*. Springer, 2016, p. 123-139.
- [8] K. BRODA et al. « Pandora : A reasoning toolbox using natural deduction style ». *Logic Journal of the IGPL* 15, n° 4 (2007). Publisher : OUP, p. 293-304.
- [9] D. M. CERNA. « AXolotl : A Self-study Tool for First-order Logic » ().
- [10] F. CHELLOUGUI. « La déduction naturelle de Copi comme outil didactique pour l'analyse de preuves mathématiques - Revue RDM ». *Recherches en didactique des mathématiques* 38, n° 1 (2022), p. 1-15. URL : <https://revue-rdm.com/2020/1a-deduction-naturelle-de-copi-comme-outil-didactique-pour-lanalyse-de-preuves-mathematiques/> (visité le 08/07/2022).
- [11] P. CORBINEAU. « A declarative language for the Coq proof assistant ». In : *International Workshop on Types for Proofs and Programs*. Springer, 2007, p. 69-84.
- [12] V. Durand-Guerrier. "Truth versus validity in mathematical proof". *ZDM Mathematics Education* 40, no.3 (June 21, 2008), pp. 373–384. ISSN: 1863-9690, 1863-9704. DOI: 10.1007/s11858-008-0098-8. URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-008-0098-8> (visited on 10/26/2016).
- [13] V. Durand-Guerrier et al. "Examining the Role of Logic in Teaching Proof". In: *Proof and Proving in Mathematics Education*. Ed. by G. Hanna and M. d. Villiers. New ICMI Study Series 15. Springer Netherlands, 2012, pp. 369–389. ISBN: 978-94-007-2128-9 978-94-007-2129-6. DOI: 10.1007/978-94-007-2129-6\_16. URL: [http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-2129-6\\_16](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-2129-6_16) (visited on 10/26/2016).
- [14] A. H. FROM, J. VILLADSEN et P. BLACKBURN. « Isabelle/HOL as a Meta-Language for Teaching Logic ». *arXiv preprint arXiv:2010.16014* (2020).
- [15] M. GANDIT. « Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation. » In : *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2010*. Paris : IREM de Paris, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), 2011, p. 175-197. ISBN : 2-86612-330-1.
- [16] O. GASQUET, F. SCHWARZENTRUBER et M. STRECKER. « PANDA : a proof assistant in natural deduction for all. a Gentzen style proof assistant for undergraduate students ». In : *International Congress on Tools for Teaching Logic*. Springer, 2011, p. 85-92.
- [17] T. HALES. « Formal Proof ». *Notices of the American Mathematical Society* 55 (1<sup>er</sup> jan. 2008).
- [18] G. HANNA et X. YAN. *COMPUTER-ASSISTED PROVING IN THE CLASSROOM*. 23 mars 2021.
- [19] G. LEACH-KROUSE. « Carnap : An open framework for formal reasoning in the browser ». *arXiv preprint arXiv:1803.03092* (2018).
- [20] J. S. LODDER. « The Design and Use of Tools for Teaching Logic » (2020).
- [21] A. MAHBOUBI. *Un ordinateur pour vérifier les preuves mathématiques*. 2014. URL : <https://images.math.cnrs.fr/Un-ordinateur-pour-verifier-les-preuves-mathematiques>.
- [22] B. C. PIERCE et al. *Logical Foundations*. Sous la dir. de B. C. PIERCE. 1. Software Foundations. Electronic textbook, 2021.
- [23] B. C. PIERCE et al. *Programming Language Foundations*. Software Foundations series, volume 2. Electronic textbook, mai 2018.
- [24] C. Pit-Claudel. "Untangling mechanized proofs". In: *Proceedings of the 13th ACM SIGPLAN International Conference on Software Language Engineering*. SPLASH '20: Conference on Systems, Programming, Languages, and Applications, Software for Humanity. Virtual USA: ACM, Nov. 16, 2020, pp. 155–174. ISBN: 978-1-4503-8176-5. DOI: 10.1145/3426425.3426940. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3426425.3426940> (visited on 06/22/2022).

- [25] C. RAFFALLI et R. DAVID. « Computer Assisted Teaching in Mathematics ». In : *Workshop on 35 years of Automath*. Edinburgh, United Kingdom, 2002.
- [26] B. ROGNIER et G. DUHAMEL. « Présentation de la plateforme edukera ». In : *Vingt-septièmes Journées Francophones des Langages Applicatifs (JFLA 2016)*. Sous la dir. de J. SIGNOLES. bibtex : rognier :hal-01333606 bibtex[hal\_id=hal-01333606;hal\_version=v1]. Saint-Malo, France, jan. 2016. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01333606>.
- [27] A. SCHLICHTKRULL, J. VILLADSEN et A. H. FROM. « Students' Proof Assistant (SPA) ». *arXiv preprint arXiv :1904.00617* (2019).
- [28] A. Selden. "Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level". In: *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*. Ed. by G. Hanna and M. de Villiers. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012, pp. 391–420. ISBN: 978-94-007-2129-6. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6\_17. URL: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6\\_17](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_17).
- [29] THE COQ DEVELOPMENT TEAM. « The Coq proof assistant » (2020). doi: 10.5281/zenodo.4021912. URL : <http://doi.org/10.5281/zenodo.4021912>.
- [30] A. Thoma and P. Iannone. "Learning about Proof with the Theorem Prover LEAN: the Abundant Numbers Task". *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.* (July 7, 2021). issn: 2198-9745, 2198-9753. doi: 10.1007/s40753-021-00140-1. URL: <https://link.springer.com/10.1007/s40753-021-00140-1> (visited on 03/26/2022).
- [31] J. VILLADSEN, A. H. FROM et A. SCHLICHTKRULL. « Natural deduction and the Isabelle proof assistant ». *arXiv preprint arXiv :1803.01473* (2018).
- [32] K. Weber and L. Alcock. "Semantic and Syntactic Proof Productions". *Educational Studies in Mathematics* **56**, no.3 (2004), pp. 209–234. issn: 0013-1954. doi: 10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1. URL: <http://link.springer.com/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1> (visited on 11/29/2020).

#### Marie KERJEAN

CNRS, LIPN - Université Sorbonne-Paris-Nord  
 kerjean@lipn.fr  
<https://lipn.univ-paris13.fr/~kerjean/>

#### Frédéric LE ROUX

UMR 7586 CNRS, Sorbonne Université  
 frederic.le-roux@imj-prg.fr  
<https://perso.imj-prg.fr/frederic-leroux/>

#### Patrick MASSOT

Faculté des Sciences d'Orsay  
 patrick.massot@math.cnrs.fr  
<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pmassot/>

#### Micaela MAYERO

UMR 7030, Université Sorbonne-Paris-Nord  
 mayero@lipn.univ-paris13.fr  
<https://lipn.univ-paris13.fr/~mayero/>

#### Zoé MESNIL

LDAR, Université Paris Cité, Université Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Université Lille, UNIROUEN  
 zoe.mesnil@u-paris.fr

#### Simon MODESTE

IMAG, Université de Montpellier, CNRS  
 simon.modeste@umontpellier.fr  
<https://imag.umontpellier.fr/~modeste/>

#### Julien NARBOUX

UMR 7357 CNRS, Université de Strasbourg, France  
 narboux@unistra.fr  
<https://dpt-info.u-strasbg.fr/~narboux/>

#### Pierre ROUSSELIN

Université Paris 13  
 rousselin@math.univ-paris13.fr  
<https://www.math.univ-paris13.fr/~rousseau/>

Les auteures remercient Christophe Lacave pour sa relecture attentive et bienveillante du texte.





ou une mathématicienne.

Le troisième et dernier exposé de la matinée était celui de Clémence Perronnet<sup>6</sup> : *Genre et maths : les mécanismes de l'exclusion*. Je ne prétends pas, bien sûr, rendre justice à son exposé par les quelques lignes qui suivent. En fait, elle a écrit un livre intitulé *La bosse des maths n'existe pas* (éditions Autrement, 2021) dont je recommande vivement la lecture. Le matériau de ce livre est les entretiens qu'elle a menés auprès d'une cinquantaine de filles et de garçons d'un quartier populaire sensible pendant plusieurs années, de leur CM1 à leur 5<sup>e</sup>. Clémence Péronnet a réussi à nous expliquer comment les filles de ce quartier en viennent à se désintéresser totalement des sciences. Une raison majeure est que, pour elles, la représentation du scientifique se fait au travers du monde audiovisuel, des manuels scolaires et de la littérature jeunesse. Or, par exemple, les femmes ne représentent que 13% des personnages scientifiques dans les dessins animés. L'exemple des couvertures du magazine *Sciences & Vie Junior* est une autre illustration frappante du sexisme qui prévaut dans la culture scientifique. Bien entendu, le fait que les sciences soient représentées par des hommes, blancs et dominants socialement, impacte aussi les garçons des classes populaires et immigrées, mais l'exposé se concentrait sur les filles.



Après une pause déjeuner pleine d'échanges et de rencontres, Susanna Zimmermann<sup>7</sup> nous a présenté les *Lectures Sophie Kowalevski*, une master class<sup>8</sup> de niveau M1 à Angers pour encourager les étudiantes à aller vers le doctorat. Ces master class ne sont pas réservées aux étudiantes mais pour que x étudiantes et étudiants puissent participer, la présence d'au moins x/2 étudiantes est requise. Cette

6. chercheuse-consultante à l'agence Phare

7. Tout juste promue professeure des universités et tout juste nommée membre junior à l'IUF.

8. Ou une classe de maître, comme on dit au Québec.

année elles ont eu lieu du 30 mai au 1<sup>er</sup> juin et elles ont été données par Simona Rota-Nodari et Olga Paris-Romaskevich. Il y a également eu un exposé de Catherine Goldstein. Les participantes qui le souhaitent bénéficient d'un mentorat proposé par Anaïs Crestetto, Liana Heuberger et Clotilde Fermanian-Kammerer.



Maya Kayali, élève à l'ÉNS-Paris et qui va commencer un M2 au DMA, nous a parlé des *Rendez-vous des Jeunes Mathématiciennes et Informatiennes* mentionnés plus haut. Créés en 2016, il s'agit de weekends pour des lycéennes, dans des établissements d'enseignement supérieur, soutenu par *Animath* et *femmes & mathématiques*. « Ces événements permettent à des jeunes filles fortement intéressées par les mathématiques et l'informatique de découvrir l'enseignement supérieur et la recherche scientifiques, de discuter de manière informelle avec d'autres jeunes passionné·e·s, de rencontrer des étudiant·e·s et des professionnel·le·s et de repartir avec des ressources et des éléments de réflexion sur leur avenir. »

Olga Paris-Romaskevich, chargée de recherche au CNRS à l'Institut de Mathématiques de Marseille, a fait le dernier exposé de la journée, nous faisant part de son expérience des *Cigales*. Les *Cigales* est une école de mathématiques pour les lycéennes qui dure une semaine et a lieu deux fois par an. Ces stages sont donc réservés aux filles. Olga Paris-Romaskevich explique ce choix et en a décrit les bénéfices. En 2021-2022, elle a eu l'idée de contacter Clémence Perronnet qui a accepté de participer aux deux stages. Celle-ci y a mené une enquête sociologique basée notamment sur les interviews des par-

ticipantes et qui va probablement faire l'objet d'un livre. Olga Paris-Romaskevich a accepté avec enthousiasme d'écrire pendant l'été un article dans ce numéro de la *Gazette* dans lequel elle nous raconte plus amplement son expérience avec les *Cigales*.

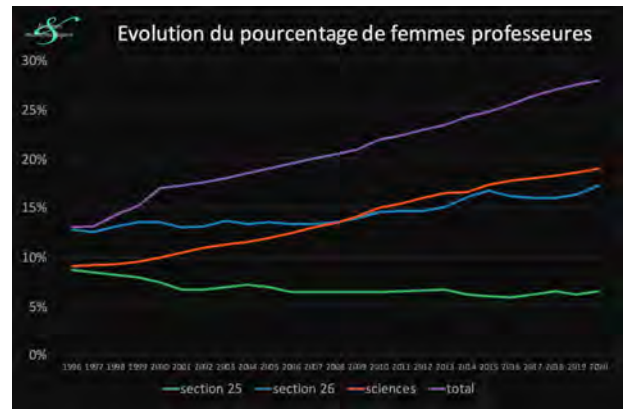
## 2. La situation stagne, voire se détériore : la preuve en chiffres

Comme lors des quatre éditions précédentes, Laurence Broze, professeure à l'université de Lille et vice-présidente de l'association *femmes et mathématiques*, a présenté les statistiques sur les recrutements et les évolutions de carrière en mathématiques. Les données sont celles de l'année 2020 et les évolutions sont calculées dans un intervalle s'étendant sur 25 ans, de 1996 à 2020.

### 2.1 – La situation des femmes en mathématiques ne change pas

Disons-le d'emblée : la situation des femmes en mathématiques à l'université n'a pas évolué favorablement entre 1996 et 2020 et elle est très mauvaise. Elle a même régressé en section 25. Voilà les chiffres (de 2020) : à l'université, 40% des enseignants-chercheurs sont des femmes mais elles ne représentent que 22% des effectifs en mathématiques<sup>9</sup>. En section 26 (mathématiques appliquées) elles ne sont que 28%, et seulement 14% en section 25 (mathématiques pures). Les femmes représentent 28% du corps des professeur·e-s, toutes disciplines confondues, mais en mathématiques elles ne représentent que 13%, avec 17% en section 26 et seulement 6,5% en section 25. Traduits en effectifs, ces chiffres sont encore plus frappants : il y a 109 professeures pour 520 professeurs en section 26, et seulement 31 professeures pour 443 professeurs en section 25 !

Comment le pourcentage de femmes professeures a-t-il évolué entre 1996 et 2020 ? Laurence Broze nous a montré un graphique que je reproduis ici. Globalement, ce pourcentage a nettement augmenté. En sciences, le taux de croissance est à peu près le même. Mais en mathématiques on observe une nette disparité entre la section 26 et la section 25 : en 26 le pourcentage de professeures a un peu augmenté mais il a chuté en 25 !



On peut continuer à enfoncer le clou pour la section 25 en regardant le top 12 des disciplines les moins féminisées : elle arrive largement en tête de ce triste classement. La section 26 se trouve en onzième position. Prenons deux autres exemples dans cette liste : la section 60 (mécanique, génie civil et génie mécanique) se classe en quatrième position (avec 18% de femmes) et la section 27 (informatique) en huitième position (avec 24,2% de femmes).

Chère lectrice, cher lecteur, si tu n'es pas encore complètement abattu·e par ces chiffres, voilà le coup de grâce : si on extrapole l'évolution du pourcentage de professeures en se basant sur la période 1996-2020, il n'y aura plus aucune femme en 2075 en section 25, tandis qu'en section 26 la parité femme/homme ne sera atteinte qu'en... 2270.

Laurence Broze a également présenté les chiffres officiels du CNRS pour l'année 2020. En section 41 (mathématiques et interactions des mathématiques), il y a 19,6% de femmes (75 femmes pour un total de 382 chercheur·seuse·s, CR et DR confondus). Cette section est à la sixième place du top 12 des sections les moins féminisées du CNRS.

### 2.2 – Sur l'âge des professeur·e-s des universités et l'âge de leur recrutement

Une partie de l'exposé de Laurence Broze a été consacrée à l'âge des professeur·e-s, en particulier l'âge de leur recrutement. Que ce soit en section 25 ou 26, l'âge moyen des femmes ne diffère pas significativement de celui des hommes (environ 50 ans). Par contre, la répartition selon les tranches d'âge, elle, diffère significativement entre les femmes et les hommes. Je renvoie à sa présentation pour les chiffres. En résumé, ce qui ressort des chiffres est que les professeur·e-s sont majoritairement des hommes jeunes, plus jeunes que dans les autres dis-

9. Afin d'alléger ce compte-rendu, je ne donnerai pas les chiffres de la section 27 (informatique) que Laurence Broze a également donnés.

ciplines. Laurence Broze rappelle un fait qui devrait être évident : entre 30 et 35 ans, les femmes sont généralement indisponibles pour préparer leur HDR, pour cause de maternité<sup>10</sup>.



Après 35 ans, elles ont passé l'âge « idéal » et renoncent souvent. Laurence Broze pose donc une question centrale : ne faudrait-il pas arrêter de recruter si jeune? Cette question a entraîné des échanges avec l'auditoire. Rappelons en passant qu'en mathématiques seulement 37,5% des MCF (maître.sse.s de conférences) deviennent PR (professeur.e.s), ce qui est l'un des plus faibles pourcentages parmi toutes les sections du CNU. Le fait intuitivement évident que plus les promotions ont lieu tôt dans la carrière, moins il y a de promotions est documenté<sup>11</sup>. Une mesure concrète serait donc de retarder les promotions PR pour qu'elles se fassent en moyenne vers 48-50 ans. Les avantages sont multiples et ils bénéficieraient aux femmes et aux hommes, avec la vertu principale de ne pas bloquer la carrière des femmes dans le corps des MCF.

### 2.3 – Le repyramidage

Laurence Broze nous a ensuite parlé du « repyramidage » qui est une procédure transitoire dans le cadre de la loi de programmation de la recherche (LPR) dont, je crois, tout le monde a entendu parler. Il est prévu que, jusqu'en 2025, 2000 promotions de MCF (titulaires de l'HDR et ayant une certaine ancienneté) comme PR aient lieu, *dans leur établissement actuel*. Le fait qu'on ne soit pas obligé de changer d'université est un aspect particulièrement important pour les mathématiciennes qui, on le sait bien, sont incomparablement plus pénalisées que

les mathématiciens par la sacro-sainte règle de non-recrutement local.

Le pyramidage actuel, toutes disciplines confondues, est de 31% de PR pour 69% de MCF. Le repyramidage vise 40% de PR et 60% de MCF. En mathématiques, le pyramidage est de 38% de PR en section 25, et 35% de PR en section 26. Comme l'a rappelé Laurence Broze, il y a des sections nettement plus déficitaires comme en STAPS (21% de PR) ou en gestion (24% de PR), ce qui ne rend donc pas a priori les mathématiques prioritaires. C'est au CA de chaque université de fixer le nombre de postes ouverts dans chaque section après s'être assuré de l'existence d'un vivier suffisant. Quelle est la place de l'égalité femmes-hommes dans ce plan? Elle existe mais n'est pas significative. En effet, le MESRI se contente de rappeler que le repyramidage consiste également à mettre en œuvre l'axe 3, intitulé « Supprimer les situations d'écart de rémunération et de déroulement de carrière », de l'accord du 30 novembre 2018 relatif à l'égalité femmes-hommes dans la fonction publique.

En mathématiques, un repyramidage réservé aux femmes est manifestement nécessaire mais il n'y a pas de directive ministérielle à ce sujet. En effet, les chiffres sont éloquentes. En section 25, il y a 38% de PR et 62% de MCF, pour les femmes il y a 17% de PR et 83% de MCF, et chez les hommes il y a 41% de PR et 59% de MCF. En section 26, il y a 35% de PR et 65% de MCF, pour les femmes il y a 22% de PR et 78% de MCF, et chez les hommes il y a 41% de PR et 59% de MCF.

### 2.4 – Du côté de l'IUF

Créé en 1991, l'IUF a admis sa première mathématicienne (Isabelle Gallagher) en... 2009 ! Entre 1991 et 2022, toutes disciplines confondues, 27% des lauréat.e.s sont des femmes, tandis qu'en mathématiques, seulement 8% des lauréat.e.s sont des femmes. En 2022, il y a eu 2 lauréates en section 25 (aucune en section 26) parmi les 62 femmes lauréates toutes disciplines confondues. Il s'agit d'Elise Goujard, maîtresse de conférences à l'université de Bordeaux, et Susanna Zimmermann, tout juste promue professeure des universités au laboratoire de Mathématiques d'Orsay.

Les chiffres montrent que dans toutes les disci-

10. Sans rentrer dans les détails, les études récentes de l'Institut national d'études démographiques révèlent qu'à 30 ans, une femme qui souhaite avoir en enfant a 75% de chance d'y arriver au bout d'une année, ce chiffre passe à 66% à 35 ans, et à 40 ans, le chiffre n'est plus que de 44%.

11. Voir l'article de P.-M. Menger, C. Marchika, Y. Renisio et P. Verschuere, « Formations et carrières mathématiques en France : un modèle typique d'excellence? », *Revue française d'économie* 2020/2 (Vol. XXXV, pp. 155-217).

plines, les femmes sont sous-représentées à l'IUUF, même dans les disciplines où elles sont plus nombreuses que les hommes ! Laurence Broze a souligné le nombre très faible de mathématiciennes candidates à l'IUUF (8 en 2020, 3 en 2021, 4 en 2022).

### 3. En guise de conclusion

Globalement, la situation des femmes dans les sciences s'améliore, y compris en France, mais cette amélioration est incontestablement beaucoup trop lente. Malheureusement, les mathématiques se singularisent, particulièrement en France, comme nous l'avons illustré.

Ce qui est désespérant est de constater que, dès le CP, l'écart entre filles et garçons en mathématiques se creuse, comme le confirme un article tout récent paru dans le journal *Le Monde*<sup>12</sup>, qui s'appuie sur un article de Jean-Paul Fischer et Xavier Thierry paru dans le *British Journal of Developmental Psychology* en juin 2022. À cela s'ajoute la pénurie d'enseignants dans l'Éducation nationale, qui touche particulièrement les mathématiques.

On pourra également lire ou relire l'article de Mélanie Guesnais de la *Gazette* d'avril 2022 sur la réforme de 2019 du lycée, notamment du programme de mathématiques, dont l'un des effets spectaculaires a été un recul du nombre de filles faisant des mathématiques en Terminale, nous ramenant plus de 25 ans en arrière !

Combiné avec ce que nous avons évoqué avec l'exposé (et le livre) de Clémence Perronnet, dire

que devenir mathématicienne est un chemin semé d'embûches est un euphémisme. Et une fois qu'une femme réussit à obtenir un poste permanent à l'université ou au CNRS, elle se heurte notamment à la « règle » consistant à promouvoir les MCF et les CR en PR et DR uniquement en mobilité, c'est-à-dire dans un autre laboratoire que celui où ils ou elles se trouvent avant leur promotion. Nous avons également évoqué l'âge auquel se passent les promotions qui défavorise structurellement les femmes. On pourra lire ou relire le texte d'Olivier Garet et Barbara Schapira paru dans la *Gazette* 160 (avril 2019).

Cette 5<sup>e</sup> journée de la parité en mathématiques a été une belle journée d'échanges et l'occasion de constater l'enthousiasme et l'énergie de nombreuses personnes qui font tout ce qu'elles peuvent pour que la situation des filles s'améliore en mathématiques. Mais je crois personnellement que, sans mesures drastiques et structurelles, certaines pouvant n'être que transitoires, nous ne nous en sortirons pas.

Deux suggestions de lecture pour finir. En parallèle du livre de Clémence Perronnet, je recommande le livre de Claudine Moise et Martine Pons-Dessoutter : *Ce que les maths font aux filles* (éditions Bréal, 2021). On pourra, si ce n'est déjà fait, lire le compte-rendu de la table ronde *Promouvoir les femmes dans les sciences et en mathématiques*<sup>13</sup>, qui a eu lieu le 4 octobre 2021 à l'IHÉS (*Gazette* de juillet 2022). À propos de l'IHÉS, Laure Saint-Raymond est devenue la première femme nommée « professeur permanent », 63 ans après la création de l'institut.



Jean-René CHAZOTTES

Centre de Physique Théorique de l'École polytechnique  
jeanrene@cpht.polytechnique.fr

Jean-René Chazottes est directeur de recherche au CNRS, directeur de son laboratoire et membre du conseil d'administration de la SMF. Ses recherches portent sur les propriétés stochastiques des systèmes dynamiques hyperboliques/chaotiques, l'écologie mathématique et la physique statistique rigoureuse.

J'ai eu le plaisir d'organiser cette journée avec Indira Chatterji, Claire Lacour, Frédéric Le Roux et Bertrand Rémy avec qui j'ai eu le plaisir d'organiser cette journée. Il faut particulièrement remercier Indira Chatterji qui a été la cheffe d'orchestre de l'organisation. Au nom des organisateur-ice-s, j'adresse mes vifs remerciements aux intervenant-e-s et particulièrement Laurence Broze grâce à qui nous avons des statistiques depuis la première journée sur la parité en mathématiques (2011). Un grand merci à Mel (<http://science.melidemel.fr/>) qui a fait des dessins pendant cette journée. J'en ai repris ici quelques-uns. Un grand merci également à Laurène Guidet qui a préparé le podcast. Enfin, mes sincères remerciements à Olga Paris-Romaskevich pour de riches échanges lors de cette journée, mais aussi pour la rédaction de ce compte-rendu.

12. [https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2022/08/31/mathematiques-a-l-ecole-comment-l-ecart-de-niveau-entre-filles-et-garcons-se-creuse-des-le-cp\\_6139583\\_4355770.html](https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2022/08/31/mathematiques-a-l-ecole-comment-l-ecart-de-niveau-entre-filles-et-garcons-se-creuse-des-le-cp_6139583_4355770.html)

13. <https://www.ihes.fr/table-ronde-femmes-en-mathematiques/>





## ... les automates cellulaires

Depuis la publication en 1970 dans *Scientific American* d'un article évoquant le *jeu de la vie* [5], les automates cellulaires continuent à susciter une certaine fascination auprès du grand public. Mais comment expliquer qu'ils intéressent encore aujourd'hui des mathématiciennes et mathématiciens de différents horizons ? L'objet de cet article est d'apporter des éléments de réponse à cette question, au travers d'une sélection de thèmes provenant des systèmes dynamiques, de la théorie des nombres, et des probabilités.

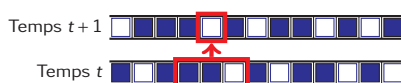
• I. MARCOVICI

### Introduction

Considérons un réseau régulier (ruban infini dans le cas de la dimension 1, grille de dimension 2 ou plus), constitué de *cellules*, qui contiennent chacune un état parmi un ensemble fini d'états possibles. De manière informelle, l'action d'un *automate cellulaire* consiste à mettre à jour à chaque itération les états de toutes les cellules simultanément, en appliquant pour chaque cellule une même règle locale de mise à jour, qui dépend seulement de l'état de la cellule et de quelques-unes de ses voisines.

Un premier exemple d'automate cellulaire de dimension 1 est donné en figure 1. Il s'agit de la règle *trafic*, qui imite le mouvement de véhicules le long d'une route. Les cellules peuvent être dans deux états possibles : soit elles sont vides (carré blanc), soit elles sont occupées par un véhicule (carré bleu). À chaque pas de temps, tous les véhicules qui ont un espace libre devant eux avancent d'une position vers la droite. Ainsi, pour connaître l'état d'une cellule donnée au temps  $t + 1$ , il suffit de connaître son état au temps  $t$  ainsi que celui de ses deux voisines immédiates. On dit que l'automate cellulaire est de rayon 1.

FIGURE 1 – Exemple d'évolution de la règle trafic



Les automates cellulaires peuvent être vus

comme un modèle très simple de calcul parallèle. Ils ont été inventés à la fin des années 1940 par S. Ulam et J. von Neumann. Ce dernier cherchait à comprendre comment une machine pouvait s'auto-reproduire en suivant un procédé mécanique simple et répétitif.

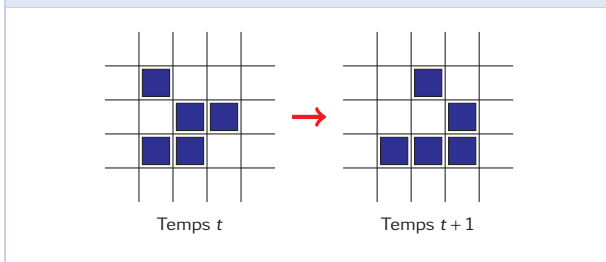
J. H. Conway a ensuite introduit en 1970 un automate cellulaire appelé le *jeu de la vie*, qui a contribué à la popularisation des automates cellulaires. Celui-ci se déroule sur une grille bidimensionnelle, et les cellules n'ont que deux états possibles, vivant ou mort. À chaque pas de temps, l'évolution d'une cellule est déterminée par l'état de ses huit voisines avec les règles suivantes :

- une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes devient vivante (elle naît) ;
- une cellule vivante possédant deux ou trois voisines vivantes le reste, sinon elle meurt.

Un exemple d'évolution est montré en figure 2 (les cellules vivantes sont représentées par des carrés bleus, les cellules mortes par des carrés blancs). Malgré la simplicité de sa règle locale, l'évolution de cet automate cellulaire montre des comportements étonnants, avec l'apparition de structures qui évoquent une forme d'auto-organisation. Sur l'exemple donné en figure 2, après davantage d'itérations, on constate que le motif formé par les cellules bleues finit par se traduire, mais cela n'a rien d'évident au vu des seules règles locales.



FIGURE 2 – Exemple d'évolution du jeu de la vie



À partir des années 1980, S. Wolfram a également contribué à faire connaître les automates cellulaires, avec de nombreuses publications visant à mettre en évidence leur capacité à expliquer des phénomènes physiques complexes.

Du côté des mathématiques, l'étude des automates cellulaires reste encore aujourd'hui un sujet de recherche actif. Nous verrons que les automates cellulaires constituent des systèmes dynamiques très naturels sur des espaces produits de la forme  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , où  $S$  est un ensemble fini de symboles et  $d$  un entier strictement positif. Le contraste saisissant entre la simplicité de leur définition et la grande complexité des évolutions qu'ils engendrent en font un modèle de choix pour explorer la notion de systèmes dynamiques *chaotiques*. Nous montrerons que certains automates cellulaires présentent également un intérêt en théorie des nombres. Enfin, l'étude de l'évolution d'automates cellulaires à partir de configurations aléatoires soulève de nombreuses questions qui intéressent les probabilistes, et l'introduction d'aléa dans la règle locale permet d'enrichir le modèle.

## 1. Systèmes dynamiques

### 1.1 – Définition des automates cellulaires

Commençons par définir de manière plus formelle les automates cellulaires de dimension  $d$ , pour un entier  $d \geq 1$ . On fixe un ensemble fini  $S$ , qu'on peut voir comme une palette finie de couleurs. Les éléments de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  correspondent alors à des coloriage des *cellules* de la grille  $\mathbb{Z}^d$  avec les couleurs de  $S$ , et sont appelés des *configurations* de dimension  $d$  à valeurs dans  $S$ .

On se donne un entier  $m \geq 1$ , une famille de  $m$  éléments  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}^d$ , et une fonction

$$f : S^m \rightarrow S.$$

L'*automate cellulaire de voisinage*  $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_m\}$

et de règle locale  $f$  est la fonction

$$F : \begin{cases} S^{\mathbb{Z}^d} & \rightarrow & S^{\mathbb{Z}^d} \\ x & \mapsto & F(x) \end{cases}$$

définie par

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, F(x)_k = f(x_{k+n_1}, \dots, x_{k+n_m}).$$

Pour déterminer la nouvelle couleur de la cellule  $k$  dans la configuration  $F(x)$ , on regarde donc les couleurs des cellules voisines de la cellule  $k$  dans la configuration  $x$ , et on applique la règle locale  $f$  au motif observé.

Reprenons ainsi l'exemple de l'automate cellulaire trafic. Son voisinage est l'ensemble  $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$ , et la transition représentée en rouge sur la figure 1 correspond à la valeur  $f(1, 1, 0) = 0$ , en codant un carré bleu par un 1 et un carré blanc par un 0. Pour le jeu de la vie, le voisinage est l'ensemble  $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}^2$ , appelé aussi voisinage de Moore, et sur la figure 2, la valeur de la cellule centrale au temps  $t + 1$  est donnée par :

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

### 1.2 – Théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

L'espace  $S^{\mathbb{Z}^d}$  muni de la topologie produit est un espace métrique compact. On peut par exemple définir une distance sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$  en posant, pour  $x, y \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ,

$$d(x, y) = 2^{-\min\{\|k\|_1 : x_k \neq y_k, k \in \mathbb{Z}^d\}}.$$

Il est alors facile de démontrer que les automates cellulaires sont des applications continues. Intuitivement, cela correspond à l'idée que si l'on veut que les images  $F(x)$  et  $F(y)$  de deux configurations  $x$  et  $y$  coïncident sur une grande fenêtre centrée en l'origine, il suffit que  $x$  et  $y$  coïncident sur une fenêtre un peu plus grande contenant les voisins de la fenêtre d'origine.

Pour un élément  $\ell \in \mathbb{Z}^d$ , on définit l'application de décalage  $\sigma^\ell : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$  par

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, (\sigma^\ell(x))_k = x_{k+\ell}.$$

On vérifie aisément que si  $F$  est un automate cellulaire, alors  $F$  commute avec tous les décalages : traduire la configuration d'un vecteur  $\ell$  puis appliquer la règle locale à toutes les cellules donne le même résultat que si on commence par appliquer l'automate cellulaire avant de traduire la configuration. Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

donne une réciproque à cette observation, en affirmant que les automates cellulaires sont en fait les seules applications continues de  $S^{\mathbb{Z}^d}$  vers  $S^{\mathbb{Z}^d}$  qui commutent avec les applications de décalage. Ce théorème, dont la démonstration n'est pas très difficile, a d'abord été énoncé dans le cas de la dimension 1 dans un article de G. A. Hedlund de 1969 [8], puis étendu dès 1972 par D. Richardson à la dimension plus grande [14]. Il contribue à expliquer pourquoi les automates cellulaires constituent une famille de systèmes dynamiques à temps discret particulièrement intéressants à étudier.

### 1.3 – Classification des automates cellulaires

Avec le formalisme que nous avons introduit, s'intéresser à l'évolution d'un automate cellulaire à partir d'une configuration initiale  $x \in S^{\mathbb{Z}^d}$  revient à étudier le comportement de la suite  $(F^n(x))_{n \geq 0}$  des itérés de la fonction  $F$  qui définit l'automate cellulaire.

Pour commencer, restreignons-nous au cas de la dimension  $d = 1$ , et d'un ensemble de symboles binaire  $S = \{0, 1\}$ . Supposons de plus que l'automate cellulaire est de rayon 1, c'est-à-dire que le voisinage est donné par l'ensemble  $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$ . La règle locale est alors une fonction  $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ , et il y a donc  $2^8 = 256$  fonctions possibles, qui définissent 256 automates cellulaires différents.

En 1983, Wolfram a proposé une classification informelle des comportements de ces 256 automates cellulaires *élémentaires* [17]. La classe 1 est constituée des automates cellulaires qui évoluent presque toujours vers un état homogène où il ne reste qu'un seul symbole. Dans la classe 2, les diagrammes espace-temps font apparaître une structure périodique simple. La classe 3 contient les automates cellulaires « chaotiques », qui révèlent un comportement désordonné. Enfin, la classe 4 contient les automates cellulaires pour lesquels émergent des structures complexes qui interagissent entre elles.

La figure 3 montre des portions de *diagrammes espace-temps* d'automates cellulaires appartenant à chacune de ces classes. La configuration initiale est représentée sur la ligne du bas, la ligne juste au-dessus correspond à son image par l'automate cellulaire, et en lisant le diagramme de bas en haut, les lignes suivantes donnent les configurations obtenues sous l'action d'itérations successives. Les nombres indiqués au-dessus des diagrammes sont les numéros des automates cellulaires considérés dans la numérotation de Wolfram. Notons que la règle qui porte le numéro 184 n'est autre que l'auto-

mate cellulaire trafic, que nous avons déjà rencontré en figure 1.

La classification de Wolfram a été l'objet de nombreuses critiques, car personne n'a réussi à trouver de manière vraiment satisfaisante comment établir des frontières claires entre les classes. Son principal mérite a néanmoins été d'ouvrir la voie à de nouvelles directions de recherches, qui ont abouti à l'idée qu'il était difficile, voire impossible, de trouver un procédé à la fois rigoureux et réalisable en pratique, permettant de répartir les automates cellulaires en différentes classes selon leur comportement.

Pour comprendre cette difficulté, commençons par examiner la classe 1, a priori la plus simple. Elle est constituée des automates cellulaires qui effacent toute l'information initiale et où, au bout d'un certain temps, un seul symbole reste visible. Lorsque cette propriété est vérifiée pour toutes les configurations initiales, on dit que l'automate cellulaire est *nilpotent*. Formellement, cela signifie qu'il existe un symbole  $s \in S$  tel que

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, \exists n \in \mathbb{N}, F^n(x) = s^{\mathbb{Z}^d}.$$

En utilisant un argument de compacité, on peut en fait intervertir les quantificateurs dans cette propriété : si elle est vérifiée, alors

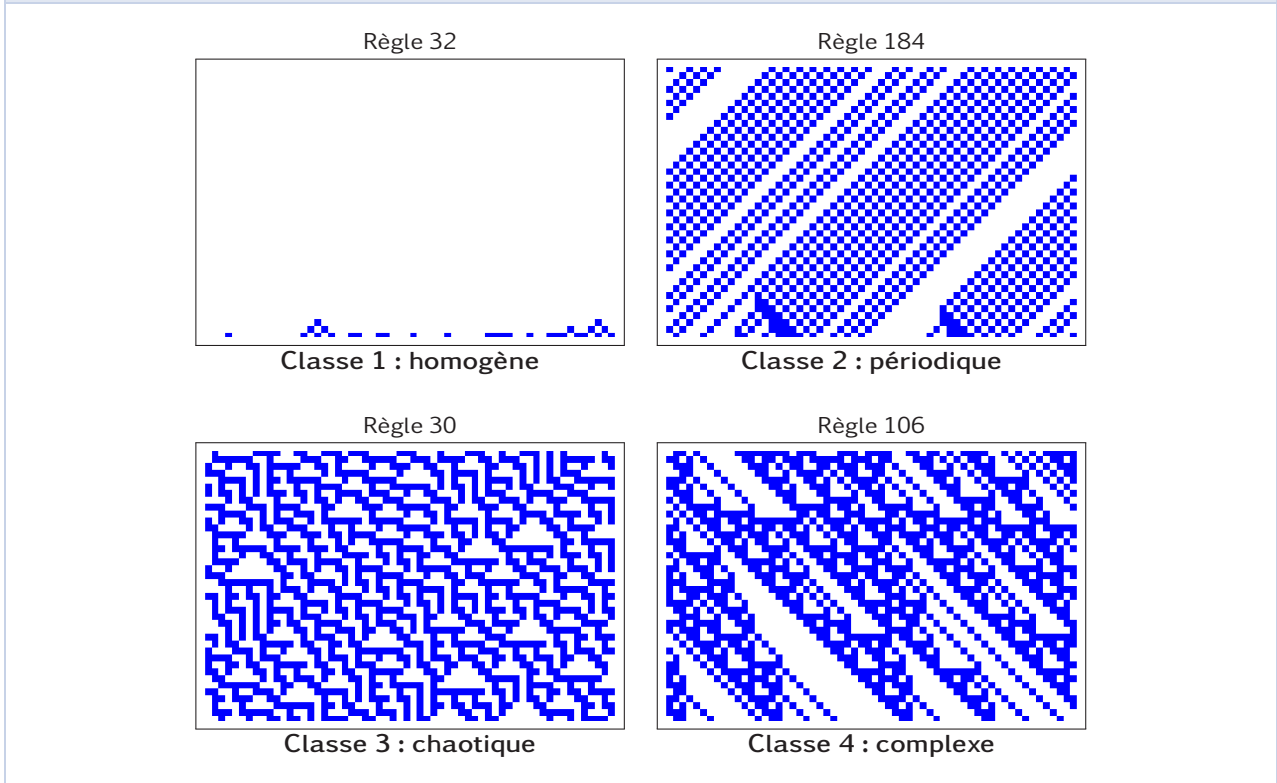
$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, F^n(x) = s^{\mathbb{Z}^d}.$$

Même si cette notion paraît simple, J. Kari a démontré en 1992 [10] que la nilpotence est une propriété indécidable : il n'existe pas d'algorithme qui, étant donné un automate cellulaire, dirait si celui-ci est nilpotent ou non.

Quant aux autres classes, en donner une définition pleinement satisfaisante est déjà un problème en soi et il existe de nombreuses propositions, chacune avec ses qualités et ses défauts. Dans un article de 1997, P. Kůrka a ainsi introduit trois classifications des automates cellulaires [11], reflétant différents points de vue qu'on peut adopter pour caractériser leur comportement (combinatoire des mots, sensibilité aux conditions initiales, propriétés des attracteurs du système dynamique). Bref, réussir à comprendre et à classifier les comportements des automates cellulaires reste un défi, encore aujourd'hui.

## 2. Théorie des nombres

FIGURE 3 – Classification de Wolfram



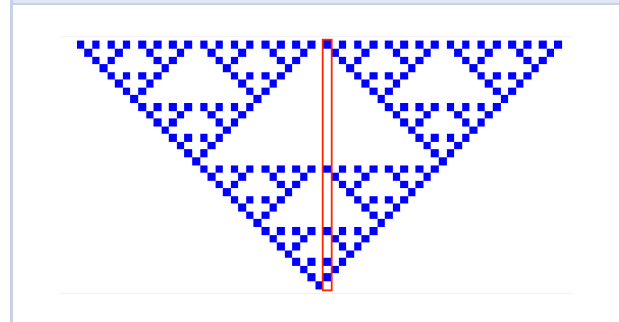
## 2.1 – Automates cellulaires linéaires

Considérons l'automate cellulaire de la somme, défini par

$$\forall x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, F(x)_k = x_{k-1} + x_{k+1} \pmod{2}.$$

Si on trace le diagramme espace-temps de cet automate cellulaire à partir d'une configuration initiale comportant un unique 1, on observe un triangle de Sierpiński (ou de manière équivalente, le triangle de Pascal modulo 2), comme représenté en figure 4. L'apparition de cette structure auto-similaire est facile à expliquer : comme la règle d'actualisation de l'automate est locale, à chaque fois qu'on retrouve dans le diagramme espace-temps une cellule dans l'état 1 dont les voisins sont toutes dans l'état 0, un nouveau triangle identique à celui d'origine recommence à se former.

FIGURE 4 – Diagramme espace-temps de l'automate cellulaire de la somme



Plus généralement, si  $S = \mathbb{F}_q$  (corps fini de caractéristique  $p$ ), on peut s'intéresser aux automates cellulaires *linéaires* sur  $\mathbb{F}_q^{\mathbb{Z}}$ , c'est-à-dire à ceux qui définissent une application  $\mathbb{F}_q$ -linéaire du  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel  $\mathbb{F}_q^{\mathbb{Z}}$  dans lui-même. Leur règle locale est de la forme

$$f(b_1, \dots, b_m) = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m,$$

pour des coefficients  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}_q$ .

Nous allons voir que lorsqu'on représente les diagrammes espace-temps de ces automates cellulaires à partir de configurations initiales ne contenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles (ou plus

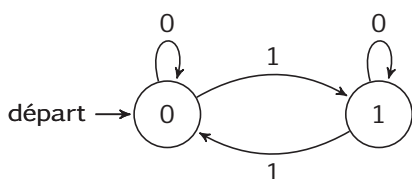
généralement, à partir de configurations ultimement périodiques dans les deux directions), les suites de nombres obtenues en colonne ont des propriétés remarquables. Sur la figure 4, si on numérote les lignes de bas en haut à partir de 0, la colonne encadrée en rouge correspond ainsi à la suite indicatrice des nombres de la forme  $2^n - 1$ , pour  $n \geq 1$ . Afin de présenter les propriétés partagées par toutes les suites apparaissant en colonne, commençons par introduire la notion de *suite automatique*.

## 2.2 – Suites automatiques

Pour un entier  $k \geq 1$ , on dit qu'une suite est  $k$ -automatique si ses termes peuvent être calculés par un automate fini de la manière suivante : le  $n$ -ième terme de la suite est uniquement fonction de l'état atteint par l'automate après lecture de la représentation de l'entier  $n$  en base  $k$ .

Un exemple simple de suite 2-automatique est la suite de Prouhet-Thue-Morse. Cette suite est définie par :  $u_n = 0$  si l'écriture binaire de  $n$  comporte un nombre pair de 1, et  $u_n = 1$  sinon. La figure 5 présente un automate fini permettant de calculer  $u_n$  en lisant successivement les chiffres de l'écriture binaire de  $n$  et en suivant les flèches données par l'automate. L'état sur lequel on aboutit après lecture de tous les chiffres est égal à  $u_n$ .

FIGURE 5 – Automate fini calculant la suite de Prouhet-Thue-Morse



Une définition équivalente consiste à dire qu'une suite est  $k$ -automatique si c'est le point fixe d'un morphisme  $k$ -uniforme, ou l'image par une projection lettre à lettre d'un tel point fixe. On peut ainsi vérifier que la suite de Prouhet-Thue-Morse est le point fixe commençant par 0 du morphisme :  $\varphi : 0 \mapsto 01, 1 \mapsto 10$ .

On peut également montrer qu'une suite  $u$  est  $k$ -automatique si et seulement si son  $k$ -noyau, défini par  $N_k(u) = \{(u_{ki+n+j})_{n \geq 0} : i \geq 0, 0 \leq j < k^i\}$ , est un ensemble fini.

Les équivalences ci-dessus sont démontrées dans le livre de J.-P. Allouche et J. Shallit [1], qui est

l'ouvrage de référence sur les suites automatiques. On y trouvera aussi une caractérisation algébrique des suites automatiques : dans le cas où l'entier  $k$  est un nombre premier  $p$ , le théorème de Christol affirme en effet qu'une suite  $u$  à valeurs dans  $\mathbb{F}_q$  est  $p$ -automatique si et seulement si la série formelle  $u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_q$ , c'est-à-dire s'il existe des polynômes  $P_0(X), P_1(X), \dots, P_d(X)$  tels que  $P_0(X) + P_1(X)u(X) + \dots + P_d(X)u(X)^d = 0$ .

Dans un article de 1993, B. Litow et P. Dumas [12] ont montré que les automates cellulaires linéaires possèdent la propriété suivante : à partir d'une configuration initiale ne contenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles, toutes les suites qu'on peut lire dans les colonnes du diagramme espace-temps de l'automate cellulaire sont  $p$ -automatiques. Ce résultat est lié au caractère auto-similaire des diagrammes espace-temps, qui permet de montrer l'algébricité des séries formelles. Plus récemment, E. Rowland et R. Yassawi [15] ont montré une réciproque à ce résultat : une suite à valeurs dans  $\mathbb{F}_q$  est  $p$ -automatique si et seulement si elle peut être obtenue en colonne du diagramme espace-temps d'un automate cellulaire (éventuellement à mémoire  $m \geq 1$ , c'est-à-dire que la ligne  $t$  du diagramme espace-temps est obtenue par un procédé local à partir des lignes  $t-1, \dots, t-m$ ), avec une configuration initiale ultimement périodique dans les deux directions. Grâce aux automates cellulaires, on a donc une nouvelle caractérisation des suites  $p$ -automatiques !

## 3. Probabilités

### 3.1 – Comportement à partir de configurations aléatoires

L'évolution de certains automates cellulaires à partir de configurations aléatoires intéresse tout particulièrement les probabilistes. Voici deux exemples qui en témoignent.

**Automate cellulaire bootstrap.** Considérons l'automate cellulaire sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$  dont la règle locale est définie de la manière suivante : une cellule qui est à l'état 1 reste à l'état 1, et une cellule qui est à l'état 0 passe à l'état 1 si elle a au moins deux voisins dans l'état 1 parmi ses quatre voisines immédiates (Nord, Sud, Est, Ouest). Lorsqu'on itère cet automate cellulaire à partir d'une configuration où les cellules sont initialement occupées (état 1) avec probabilité  $p$  indépendamment les unes des autres, on parle de pro-

cessus de percolation *bootstrap*. Expérimentalement, on observe que l'état 1 envahit très rapidement la grille dès que  $p$  est suffisamment grand, tandis que pour de toutes petites valeurs de  $p$ , les simulations se stabilisent sur une configuration constituée d'une union disjointe de rectangles de cellules occupées.

Sur la grille infinie  $\mathbb{Z}^2$ , l'étude mathématique de ce modèle révèle néanmoins que dès que  $p$  est strictement positif, chaque cellule de la grille finit par devenir occupée avec probabilité 1. A. van Enter a donné une preuve simple et élégante de ce résultat en 1987 [3]. L'idée consiste à montrer que même si  $p$  est tout petit, comme la grille est infinie, la configuration initiale contient forcément quelque part un très grand carré de cellules occupées, à partir duquel il va être « facile » d'envahir la grille, car il suffit d'un carré occupé sur le bord pour occuper toute une ligne de plus, etc. Ce n'est cependant que bien plus tard qu'on a pu comprendre plus finement pourquoi les simulations sur des fenêtres finies étaient si trompeuses. A. E. Holroyd a ainsi montré en 2003 [9] que sur une très grande grille  $N \times N$ ,

- si  $p > \frac{\pi^2}{18 \ln N}$ , la grille a une probabilité proche de 1 de finir par être entièrement remplie de cellules dans l'état 1,
- si  $p < \frac{\pi^2}{18 \ln N}$ , cela arrive avec une probabilité proche de 0.

Mais ce seuil  $\pi^2/18$  ne peut pas être confirmé expérimentalement car la convergence vers cette constante est tellement lente que pour avoir un espoir de s'en approcher, il faudrait effectuer des simulations sur une grille de taille environ  $10^{20}$ , comme l'ont précisé J. Gravner et A. E. Holroyd en 2008 [6].

**Automate cellulaire de la majorité de Toom.** Les automates cellulaires de la majorité constituent une autre famille d'automates cellulaires particulièrement intéressants à étudier sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ . La règle locale est telle qu'une cellule passe à l'état 0 (resp. 1) si elle a une majorité de voisines à l'état 0 (resp. 1). Intéressons-nous plus précisément à l'automate de la majorité de Toom, pour lequel le voisinage d'une cellule est constitué d'elle-même, et de ses deux voisines au Nord et à l'Est. On a ainsi  $\mathcal{N} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ , et la règle locale est définie par :

$$f(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a + b + c \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fois-ci, en exploitant des propriétés de percolation, on peut démontrer [2] qu'à partir d'une configuration initiale où chaque cellule est indépendam-

ment dans l'état 1 avec probabilité  $p$  (et dans l'état 0 sinon), on a le comportement suivant :

- si  $p < 1/2$ , l'état 0 envahit toute la grille,
- si  $p > 1/2$ , l'état 1 envahit toute la grille.

Ainsi, en itérant cet automate cellulaire, on peut savoir si la grille contenait initialement une majorité de 0 ou de 1 (pour  $p = 1/2$ , on observe des plages de plus en plus grandes de cellules dans l'état 0 ou 1, mais sans qu'il y ait disparition de l'un des états). Nous allons voir dans le paragraphe suivant un autre intérêt de cet automate cellulaire.

### 3.2 – Automates cellulaires probabilistes

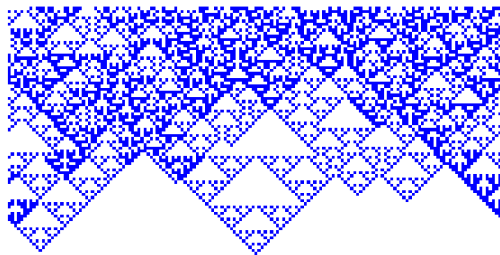
Les automates cellulaires probabilistes sont une extension des automates cellulaires, pour laquelle la fonction locale  $f$  n'est plus à valeurs dans  $S$  mais dans l'ensemble  $\mathcal{M}(S)$  des distributions de probabilités sur l'ensemble  $S$ . Pour  $(a_1, \dots, a_m) \in S^m$ , et  $s \in S$ , la valeur de  $f(a_1, \dots, a_m)(s)$  donne alors la probabilité de mettre à jour une cellule par la valeur  $s$  si son voisinage est dans l'état  $(a_1, \dots, a_m)$ . Comme précédemment, toutes les cellules sont mises à jour de manière simultanée, et conditionnellement à la donnée de la configuration, les tirages sont effectués de manière indépendante pour différentes cellules. Les automates cellulaires probabilistes peuvent ainsi être vus comme des chaînes de Markov sur  $S^{\mathbb{Z}^d}$ . D'un point de vue informatique, ils constituent un modèle de calcul bruité.

Considérons un automate cellulaire déterministe  $F$  et supposons qu'en chaque cellule, une erreur se produit avec probabilité  $\varepsilon$  (de manière indépendante pour différentes cellules), auquel cas au lieu d'appliquer la règle locale de  $F$ , la cellule est mise à jour par un état de  $S$  choisi uniformément au hasard. Notons  $F_\varepsilon$  l'automate cellulaire probabiliste ainsi défini. On dira que  $F_\varepsilon$  est la version bruitée de  $F$ , avec un bruit  $\varepsilon$ . Lorsqu'on itère  $F_\varepsilon$ , on s'attend généralement à ce que le système oublie progressivement toute information sur la configuration initiale au cours de son évolution, et converge vers un état d'équilibre qui ne dépend plus du tout de la configuration initiale. En termes mathématiques, on parle d'*ergodicité*, ce qui correspond au fait que  $F_\varepsilon$  a une unique distribution invariante, vers laquelle on converge à partir de n'importe quelle distribution initiale. Une illustration en est donnée en figure 6 : celle-ci représente à nouveau un diagramme espace-temps de l'automate cellulaire de la somme à partir d'une configuration initiale comportant un unique 1, mais cette fois-ci avec un bruit  $\varepsilon = 0.005$ . Contrairement au cas déter-



ministe montré en figure 4, si on efface les premières lignes du diagramme espace-temps, il est bien difficile de retrouver une quelconque information sur la configuration initiale dont on était parti.

FIGURE 6 – Diagramme espace-temps de la version bruitée de l'automate cellulaire de la somme



En dimension 2, on sait qu'il existe des exceptions à ce phénomène d'ergodicité. En particulier, on peut démontrer que si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, alors la version bruitée de l'automate cellulaire de la majorité de Toom n'est pas ergodique [16]. Plus précisément, à partir d'une configuration initiale ne contenant que des 0, les configurations conservent

une très large majorité de 0 tout au long de l'évolution, tandis qu'à partir d'une configuration initiale ne contenant que des 1, elles conservent une très large majorité de 1. Cependant, en dimension 1, la célèbre conjecture des taux positifs affirmait que tout automate cellulaire soumis à des erreurs aléatoires est ergodique. P. Gács a réfuté cette conjecture en 2001, en proposant un contre-exemple extrêmement sophistiqué (nombre d'états de l'ordre de  $R_0^{4/3}$  et taux d'erreur  $\varepsilon \leq R_0^{-40}$ , où  $R_0$  est une constante qui dépasse  $2^{18}$ ), dans un article de plus de 200 pages [4, 7]. Si on se limite aux automates cellulaires les plus simples (nilpotents, etc.), l'ergodicité est cependant la norme [13], et trouver un contre-exemple plus simple à la conjecture des taux positifs reste une question d'actualité. Cette question est d'ordre théorique, mais elle pourrait également apporter un nouvel éclairage sur les possibilités de mener à bien un calcul distribué en présence d'erreurs aléatoires.

Au-delà de leur aspect ludique et de leur capacité à modéliser de nombreux phénomènes complexes régis par des interactions locales (tissus cellulaires, feux de forêts, formation d'essaims d'oiseaux ou de bancs de poisson...), l'étude des automates cellulaires continue donc à présenter un réel intérêt mathématique.

## Références

- [1] J.-P. ALLOUCHE et J. SHALLIT. *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003.
- [2] A. BUŠIĆ et al. « Density classification on infinite lattices and trees ». *Electron. J. Probab.* **18** (2013). Id/No 51, p. 22.
- [3] A. C. D. van ENTER. « Proof of Straley's argument for bootstrap percolation. » *J. Stat. Phys.* **48**, n° 3-4 (1987), p. 943-945.
- [4] P. GÁCS. « Reliable cellular automata with self-organization ». *J. Stat. Phys.* **103**, n° 1-2 (2001), p. 45-267.
- [5] M. GARDNER. « MATHEMATICAL GAMES ». *Scientific American* **223**, n° 4 (1970), p. 120-123.
- [6] J. GRAVNER et A. E. HOLROYD. « Slow convergence in bootstrap percolation ». *Ann. Appl. Probab.* **18**, n° 3 (2008), p. 909-928.
- [7] L. F. GRAY. « A reader's guide to P. Gacs's "positive rates" paper : "Reliable cellular automata with self-organization". » *J. Stat. Phys.* **103**, n° 1-2 (2001), p. 1-44.
- [8] G. A. HEDLUND. « Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system ». *Math. Syst. Theory* **3** (1969), p. 320-375.
- [9] A. E. HOLROYD. « Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation ». *Probab. Theory Relat. Fields* **125**, n° 2 (2003), p. 195-224.
- [10] J. KARI. « The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata ». *SIAM J. Comput.* **21**, n° 3 (1992), p. 571-586.
- [11] P. KÛRKA. « Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata ». *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **17**, n° 2 (1997), p. 417-433.
- [12] B. LITOW et P. DUMAS. « Additive cellular automata and algebraic series ». *Theor. Comput. Sci.* **119**, n° 2 (1993), p. 345-354.
- [13] I. MARCOVICI, M. SABLİK et S. TAATI. « Ergodicity of some classes of cellular automata subject to noise ». *Electron. J. Probab.* **24** (2019). Id/No 41, p. 44.
- [14] D. RICHARDSON. « Tessellations with local transformations ». *J. Comput. Syst. Sci.* **6** (1972), p. 373-388.
- [15] E. ROWLAND et R. YASSAWI. « A characterization of  $p$ -automatic sequences as columns of linear cellular automata ». *Adv. Appl. Math.* **63** (2015), p. 68-89.

- [16] A. L. TOOM. *Stable and attractive trajectories in multicomponent systems*. Multicomponent random systems, Adv. Probab. relat. Top., Vol. 6, 549-575. 1980.
- [17] S. WOLFRAM. *Universality and complexity in cellular automata*. Cellular automata, Proc. Interdisc. Workshop, Los Alamos/N.M. 1983, Physica D 10, n° 1-2, 1-35. 1984.



**Irène MARCOVICI**

Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine  
 irene.marcovici@univ-lorraine.fr  
<https://marcovici.perso.math.cnrs.fr/>

Irène Marcovici est maîtresse de conférences (HDR) dans l'équipe de probabilités et statistique de l'Institut Élie Cartan de Lorraine, à Nancy. Ses recherches se situent à l'interface entre probabilités, combinatoire, systèmes dynamiques discrets, et informatique mathématique.

Je remercie chaleureusement Yohann Genzmer pour sa lecture attentive et ses nombreuses suggestions. Je remercie également Charlotte Hardouin de m'avoir invitée à écrire cet article.

## Panoramas et Synthèses - nouveauté



Vol. 57

### Topics in statistical learning theory

P. L. BARTLETT, S. DASGUPTA

ISBN 978-2-85629-964-7

2022 - 89 pages - Softcover. 17 x 24

Public: 38 € - Members: 27 €

This volume is the outcome of a series of three lectures on statistical learning theory given at Institut Henri Poincaré in 2011 under the auspices of the Société Mathématique de France. The introductory chapter provides an overview of the history of Statistical Learning Theory, its roots, its mathematical tools and the questions that make it. The chapter "Algorithms for minimally supervised learning" by Sanjoy Dasgupta describes

the progress of theoretical computer science on the issues of unsupervised learning (clustering) and active learning. Surprisingly, much of this progress is due to the confrontation of measurement concentration theory, complexity theory and established practices in numerical statistics.

The chapter "Online prediction" by Peter Bartlett focuses on online learning. It is a confrontation between statistics, game theory and optimization.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris





## Vers une médiation en phase avec la société : réflexion autour des *Cigales*

• O. PARIS-ROMASKEVICH

### C'est quoi les *Cigales* ?

Les *Cigales*, c'est une semaine mathématique et sportive au Centre International des Rencontres Mathématiques, à Marseille, qui est proposée à des lycéennes de Première générale. Il n'y a donc pas de garçons. Elles sont 26, dont les deux-tiers venant de Marseille et de la région PACA, et les autres de toute la France. Une journée typique commence avec des ateliers de recherche en petits groupes sur des problèmes en mathématiques et informatique, continue après le déjeuner avec une séance de sport, et se poursuit avec une rencontre avec une femme dont le métier est en lien avec des mathématiques. Après le diner, c'est soirée jeux, karaoké ou même une boum – c'est aux filles de décider !

La première école a été lancée en octobre 2019 par Pascal Hubert et Julien Cassaigne, inspirée des stages similaires lancés quelques années auparavant par l'École polytechnique et coordonnés par Alice Carpentier. J'ai rejoint le projet en 2020, l'année de mon arrivée à l'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M) qui le porte avec le Laboratoire d'Informatique et Systèmes Informatiques. Depuis 2021, nous sommes passés à 2 éditions par an, lors des vacances de Toussaint et de Pâques, afin de satisfaire la plupart des demandes. L'équipe d'organisation des *Cigales* comprend 7 personnes, mathématicien·ne·s et informaticiens. Nous nous occupons de la mise en place du stage, de la recherche (perpétuelle...?) de financements, jusqu'à la rencontre des filles à la gare Saint-Charles, aidés par les équipes de l'IREM de Marseille, du CIRIM et de l'I2M.

Les *Cigales* visent à accompagner une cinquantaine de filles par an pour qu'elles acquièrent de la confiance en elles et s'épanouissent, en les soutenant dans leur intérêt pour les mathématiques. Pourtant, mené à cette modeste échelle, il serait naïf

de penser que ce projet réduit les inégalités systémiques de genre dans l'accès aux mathématiques.

FIGURE 1 – Lors d'une séance de travail de recherche



### Une science sociale et une enquête

Au début de nos vies, nous ne savons ni parler ni comprendre le concept du nombre. Plus tard, nous disons des choses comme « j'ai *toujours* aimé les maths » ou « j'ai *toujours* été nul·le en maths », en confondant des privilèges et des discriminations avec un destin. Pourtant, l'organe responsable de cette confusion est le même que celui qui permet de comprendre le théorème des valeurs intermédiaires !

Les mathématiques sont une science profondément sociale et partagée, perméable à nos propres préjugés. Je me suis posé la question de cette perméabilité dans le cadre des *Cigales* : peut-on partager notre amour des maths avec les filles sans leur transmettre notre sexisme ? C'est avec cette question très pratique que j'ai écrit à Clémence Perronet, sociologue (désormais chercheuse-consultante

à l'agence Phare), spécialiste de culture scientifique et autrice d'un livre remarquable [3]. Après une discussion revigorante, elle a accepté de venir aux deux éditions des *Cigales* en 2021/22, pour y mener une enquête sociologique avec deux ambitions. D'abord, compléter la connaissance sociologique de la construction sociale des rapports aux mathématiques en analysant de près la période de l'adolescence et les rapports sociaux de genre et de classe qui s'y jouent. Ensuite, évaluer les effets de l'action des *Cigales* pour l'égalité en mathématiques.

En ce moment Clémence Perronnet et sa collaboratrice Alice Pavie, doctorante au Laboratoire d'Économie et de Sociologie du Travail de l'université Aix-Marseille, sont en train de transcrire et analyser une centaine d'heures d'interviews ainsi que des carnets entiers d'observations... Les résultats complets seront prêts en octobre 2023, et nous espérons en faire un livre! J'utiliserai ici des éléments préliminaires de l'enquête qu'elles m'ont confiés.

## Premier argument pour la non-mixité : se sentir en sécurité

« Et pourquoi vous n'organiseriez pas les *Cigales* avec des garçons?... »<sup>1</sup>

Un collègue qui passe.

Comment se passe l'exclusion des filles des matières scientifiques? D'abord, par le *sentiment d'insécurité*, de la part des filles ou de leurs parents, recouvrant une palette de réalités différentes. Ce n'est pas à nous, mathématiciennes et médiateurs des sciences, de trancher si ce sentiment est justifié ou pas – le fait est qu'il est là. Notre rôle est de faire avec, dans une démarche d'inclusion et d'accès aux sciences pour toutes et tous.

Pour le stage des *Cigales* d'octobre 2021, 3 filles sur 26 ont déclaré qu'elles ne seraient pas venues au stage s'il était mixte.

Pourquoi? Leurs parents ne les laissent pas dormir dans le même lieu que des garçons, de peur qu'il leur arrive quelque chose. Ces interdictions empêchent à ces filles de faire toute activité culturelle ou scolaire au-delà d'une journée, ce qui peut être décisif dans leur rupture avec les sciences.<sup>2</sup>

Pour les filles qui participent aux *Cigales*, le sentiment de sécurité n'est pas assuré non plus. Une fille a eu une attaque de panique pendant une séance de résolution des problèmes, provoquée par le comportement vécu comme trop invasif d'un des visiteurs du stage. Elle a réussi à se calmer grâce à la force de sa volonté, soutenue par son amie ainsi que par l'encadrant de son groupe. Elle m'a ensuite confié : « Je suis reconnaissante d'être ici parce que grâce aux encadrants très gentils, j'apprends qu'il y a aussi des hommes bien ». Elle est revenue au travail de recherche une demi-heure plus tard, après avoir fait un tour du parc du CIRM pour se calmer.

Imaginez que vous venez de vous sauver d'un tigre, et qu'on vous demande de résoudre un problème de maths! C'est peut-être dur à imaginer... mais c'est ce que vivent (au niveau des sensations) les femmes dans un environnement sexiste. Parfois le tigre est plus petit, mais il est rarement seul. Mais même s'il ne s'agissait que d'un hamster : imaginez une centaine de hamsters qui vous pourchassent! Adoucir le sentiment d'insécurité, toujours présent pour les filles qui ont vécu des expériences traumatiques, en proposant un environnement bienveillant, leur permet de réfléchir tranquillement aux mathématiques – et je ne cherche rien de plus, rien de moins.

Suite à une enquête à la fin du stage, la plupart des participantes (36 sur 41) sont satisfaites du fait qu'il soit réservé aux filles, 3 n'ont pas d'avis et 2 auraient aimé être en mixité. Le profil de ces deux dernières est très privilégié : elles viennent des milieux plutôt aisés et au capital scientifique important.

1. En réponse, je me retiens toujours de formuler un petit Lemme (radical?). Si  $a > b$ , alors pour réduire la différence  $a - b$ , il faut rajouter à  $b$  et non à  $a$ .

2. Ce constat a été formulé par Geetha Venkataraman, mathématicienne indienne engagée dans les initiatives pour les filles et femmes en mathématiques à travers toute l'Inde, lors d'une table ronde du *World Meeting for Women in Mathematics* de 2022 sur les initiatives pour les filles en mathématiques [4] que j'ai eu l'honneur d'animer (disponible en replay sur Youtube). Cette table ronde donne la parole aux personnes engagées dans la médiation mathématique pour les filles sur tous les continents. Nous sommes toutes arrivées au même constat : les filles ont besoin des stages non-mixtes pour s'initier aux sciences, parce que les initiatives mixtes excluent certaines filles.

## Se battre contre des inégalités pour en renforcer d'autres ?

« Je suis toujours très critique concernant ces personnes qui se battent pour elles-mêmes, pour dépasser, par exemple, le plafond de verre. Ce féminisme bourgeois suppose que vous êtes déjà au niveau du plafond, et que tout ce qu'il vous reste à faire, c'est de le traverser pour après partager l'espace avec les décideurs. Défendons les intérêts de celles et ceux qui sont les plus opprimé.e.s, c'est de cette façon qu'une nouvelle vision de la société peut émerger. »

Angela Davis, lors d'une rencontre récente avec des militant.e.s féministes.

Une fille qui souhaite postuler aux *Cigales* doit rédiger une lettre de motivation et y joindre une lettre de recommandation de son enseignant.e. Les demandes pour le stage viennent essentiellement de filles au profil socio-culturel très privilégié. La moitié des participantes ont au moins un parent qui travaille dans un secteur scientifique (ingénierie, informatique, médical ou enseignement des sciences). La profession la plus répandue du père est ingénieur, et pour la mère : professeure des écoles. Seulement 10 pour-cent des participantes viennent des classes populaires. Il me paraît fort probable que la plupart des stages scientifiques avec recrutement sur lettre de motivation ont une répartition sociale de participant.e.s assez proche de la nôtre. Donc, en l'état actuel, notre stage maintient voire renforce les inégalités socio-culturelles et économiques à l'exception (quand même!) de celles de genre.

Je n'adhère pas à une vision élitiste de notre matière, nourrie par l'esprit de compétition et les restrictions budgétaires. Je pense que la pratique des mathématiques vivantes doit être véritablement accessible à tous et toutes, et pas seulement aux chercheuses et chercheurs. La vision élitiste des sciences exclut des personnes du monde entier, de façon systémique et violente, de la pratique des sciences. Pour combattre la violence produite par le système des institutions dont nous faisons partie, nous sommes dans l'obligation de repenser notre système-monde et accepter de ne pas nous placer dans son centre. Ce qui nécessitera, inévitablement, de repenser le fonctionnement de nos institutions.

3. Les explications pour le manque de confiance sont complexes et je laisse cela aux nombreuses (au féminin neutre) spécialistes de ce sujet.

## Deuxième argument pour la non-mixité : un espace de confiance en soi

« Vous voulez que je vous résume pourquoi il y a si peu de femmes en mathématiques ? [...] Voici : le capitalisme et le patriarcat. »

Clémence Perronnet, en réponse aux questions d'un groupe de travail sur la parité des Assises de mathématiques, un évènement à venir le 14-16 novembre 2022.

La confiance en soi est vitale pour participer activement dans des discussions (mathématiques ou pas), en répondant aux questions des autres, en posant les siennes, en s'exprimant. Malgré de très bonnes notes en maths (18/20 pour la plupart), les filles des *Cigales* affirment toutes ne pas avoir confiance en leurs capacités mathématiques<sup>3</sup>. La confiance est la clé de la pensée libre. Est-ce que nous devrions nous contenter de l'explication que les filles s'en seraient privées par elles-mêmes ?

Les stages et écoles non-mixtes sont des occasions pour les filles de prendre confiance en elles. Pour certaines, l'expérience des *Cigales* est le moment, ô combien satisfaisant, de leur première découverte scientifique. Je pense à ce jeudi soir aux *Cigales*, quand une équipe de filles est enfin arrivée à retrouver le nombre de dates palindromes entre le 10/01/1001 et le 29/09/9092. Dommage que je ne puisse pas joindre à cet essai leurs cris de joie – beaucoup plus convaincants que tous les mots !

FIGURE 2 – Le problème résolu !





Voici un autre témoignage, celui de Lyuba Konova, étudiante en mathématiques à l'université de Sofia en Bulgarie, ancienne participante et maintenant organisatrice de l'Olympiade Européenne pour les filles<sup>4</sup> : « *EGMO m'a surtout donné confiance en moi. Les mathématiques peuvent être très difficiles et dévorantes. Certains cours sont très durs, certains plus faciles. Je ne me sens pas tous les jours sur le bon chemin. Dans mon université, je n'ai pas le soutien dont j'ai besoin pour me sentir bien tous les jours. Quand je veux abandonner, et il y a définitivement les jours quand c'est le cas, je pense à mes journées à l'EGMO, et cela m'aide à continuer. C'était un événement sélectif, et il m'a donné l'opportunité de me dépasser. J'ai résolu plus de problèmes que je pensais résoudre, et je me souviendrai toujours de cela.* »[4]

Ce genre de découvertes et prises de conscience (et de confiance!) peuvent aussi se faire lors d'événements mixtes – mais ce sont des exceptions à la règle. La société pousse les garçons à intervenir, et les filles à se taire. La monopolisation de la parole masculine amène à une monopolisation de la pensée. Les filles laissent la place, en gardant leurs pensées pour elles. Cela demande un vrai effort aux garçons de se taire, et aux filles de s'exprimer. Et c'est plus simple si on garde la confiance (peu importe le genre!). Comme le dit Lyuba Konova : « *J'ai commencé à répondre aux questions de notre professeur pendant les cours – parce que maintenant j'ai l'expérience de EGMO derrière moi qui me donne confiance. Si je ne l'avais pas... je resterais silencieuse, comme les autres filles de mon cours.* »

Une autre manière de se sentir en confiance c'est de se sentir bienvenue. À chaque édition, une fille vient me remercier d'« être là » – c'est troublant mais important de se rendre compte à quel point juste voir une mathématicienne la rassure dans le fait qu'elle a le droit d'être là.

Pour nous, l'intention du recrutement aux *Cigales* est d'accepter tout le monde, dans la limite des places disponibles, avec une seule contrainte : pas plus de 2 filles par lycée. Quand nous sommes contraintes de choisir, nous acceptons en priorité celles qui ont moins de chance de toucher aux sciences (et aux mathématiques en particulier), en jugeant d'après leurs lettres de motivation et les lettres de soutien de leur professeur·e. Même si pour nous c'est un recrutement sans concours, les filles vivent le fait d'être acceptées comme un accomplissement (et comptent le valoriser dans leur projet

d'orientation), elles se sentent reconnues dans leurs efforts et elles gagnent en confiance.

Les expériences non-mixtes laissent des souvenirs forts et sont des sources de confiance, dans lesquelles nous pouvons puiser toute notre vie. Je l'ai vécu moi-même grâce à ces quelques jours passés avec trente femmes qui ont partagé avec moi la bourse *l'Oréal-UNESCO for Women in Science* en 2016. Cela m'a donné une grande confiance, parce que mon travail était reconnu, et une sensation extraordinaire d'union féminine.

## Difficultés d'organisation et grands défis de médiation

J'ai repéré trois principaux problèmes à travers nos *Cigales*, que j'imagine courants pour les initiatives de médiation en France (car structurels).

Le premier problème est l'absence de budget pérenne. Cela coûte 50 000 euros par an d'accueillir 52 filles au CIRM. La recherche du budget prend à l'équipe d'organisation quelques semaines de travail chaque année. Chacun de nos onze partenaires donne entre 2 000 et 6 000 euros par an, mais la rédaction des demandes de budget (et des bilans par la suite), réitérée chaque année, prend du temps. Même si nos partenaires nous soutiennent, eux-mêmes ne peuvent pas nous assurer un soutien constant à cause de leur propre instabilité budgétaire. Nous avons un besoin vital d'un soutien durable, tant au niveau local que national, pour assurer la pérennité de telles initiatives. Nous travaillons en ce moment pour mettre en place une décharge de service pour les enseignant·e.s sur la semaine et rémunérer le travail d'organisation d'un tel projet, pour réussir à pérenniser les *Cigales* et que leur organisation reste une source de plaisir et pas d'épuisement. Malheureusement, même si le débat sur la parité femme/homme est présent dans les médias (donnant une fausse impression que les choses s'améliorent), le pourcentage de chercheuses en maths (20 pour cent) reste constant depuis le début des années 2000 et risque de baisser dans les années à venir (et ce n'est pas le seul paramètre à regarder bien sûr). La parité ne s'affiche toujours pas dans les priorités budgétaires du Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche malgré des communiqués de presse dans ce sens.

Le deuxième problème est que le profil socio-culturel des participantes reste très favorisé. En sim-

4. European Girls' Mathematical Olympiad : <https://www.egmo.org>.

plifiant juste un peu, je peux dire que nous continuons à n’enseigner les mathématiques qu’aux enfants de nos ami.e.s. Nous avons besoin de travailler en lien avec les communautés locales et les lycées, ce qui demande des ressources humaines et budgétaires supplémentaires – qui pourraient cependant être mutualisées – pour mettre des collaborations en place et toucher des publics différents.

Le troisième et dernier problème que je veux mentionner est que personne dans l’équipe enseignante du stage n’est formé aux inégalités de genre. Nous continuons à transmettre certains des stéréotypes que nous avons nous-mêmes intégrés malgré la bonne volonté. Nous, médiateurs et médiatrices scientifiques, avons besoin de formations aux inégalités (de genre, mais pas seulement), pour être conscient.e.s de ces comportements, afin de les faire changer, au sein de notre équipe et au sein de la communauté mathématique – pour les filles et pour nous-mêmes, et nos laboratoires. Peut-être ces réflexions nous influenceront jusque dans notre pédagogie (qui est elle-même imprégnée de biais de genre). On pourrait par exemple s’inspirer de l’initiative américaine *Girls’ Angle* : nous ne leur ferions plus choisir un problème dans une liste pré-établie, mais nous les pousserions à inventer et résoudre des problèmes qu’elles auraient elles-mêmes conçus.

## Appel à la communauté pour un projet national

J’espère que nous pourrions mettre en place collectivement un réseau d’initiatives sur le format des *Cigales* dans les laboratoires de mathématiques, informatique et physique de France. L’idée est de proposer des écoles d’une semaine d’initiation à la recherche en sciences formelles pour les filles, de la Seconde à la Terminale (ou même en Licence), dans chaque région de France. Ces écoles seront organisées (une ou deux fois par an) par des équipes de chercheurs et chercheuses (dont des doctorant.e.s et post-doctorant.e.s) volontaires des laboratoires de recherche, accompagnées par des modules de formation aux inégalités de genre.

Ce réseau commence à émerger, avec plusieurs écoles qui se mettent en place comme les *Cigognes* entre Nancy et Strasbourg, porté par Clémentine Courtès, Samuel Tapie et Pierre Py; les *Maths dans la Forêt de Paimpont* entre Paris et Rennes, porté par Anna Bonnet, Marie-Pierre Étienne et Sophie Donnet; et les *MathsC2+ pour L* porté par Guillemette Chapuisat, Fabien Durand et Élise Janvresse. L’initiative est

aussi reprise par Élise Raphaël en Suisse, et donnera lieu à l’école des *Marmottes* de SwissMap aux Diablerets. Ces quatre écoles seront lancées en 2023. Chacune aura sa propre spécificité, sera destinée aux lycéennes ou étudiantes en première année, aura des mathématiques appliquées et des statistiques ou pas... – tout est à imaginer par l’équipe locale! – Si vous voulez proposer une initiative, contactez-nous à [cigales@cirm-math.fr](mailto:cigales@cirm-math.fr). Mes collègues et moi serons ravis de vous faire un partage d’expérience des *Cigales* pour vous aider avec la mise en place de ce projet dans votre laboratoire.

J’espère que nous allons réussir collectivement à trouver un soutien financier au niveau national pour ces actions.

FIGURE 3 – Une photo de groupe traditionnelle dans les calanques



## Une note personnelle pour terminer

Mes parents sont enseignants de maths, mon grand-père était chercheur en mécanique céleste, j’ai profité de la crème de l’enseignement de mathématiques, d’abord en Russie puis en France. Bref, je suis une grande privilégiée des mathématiques (et vous certainement aussi, si vous lisez cet article)!

Concernant la « question des femmes », mon expérience personnelle m’a beaucoup trop longtemps laissée penser que le sexisme dans la communauté mathématique (russe ou française) existe peut-être, mais très loin de moi, et que ça va mieux qu’avant, et puis, enfin, qu’en parler est un bon prétexte pour passer du temps à discuter au lieu de faire des maths! Pourtant j’ai vécu du sexisme dès ma jeunesse – mais je ne le voyais pas. Depuis la progressive prise de recul sur le sujet à travers mes lectures et rencontres féministes, j’ai commencé à voir le sexisme et me

rendre compte des dégâts qu'il fait sur la vie des filles et des femmes, dont la mienne, des « petites » colères du quotidien (quand on me coupe la parole systématiquement) à celles peu croyables (quand un collègue me demande si je suis enceinte en apprenant que je ne viendrai pas à une conférence), voire plus violentes (au collège, un garçon m'a poussé de force vers le mur pour me forcer à l'embrasser).

Des générations se sont battues pour informer, questionner et changer le statu quo, en se réunissant dans les associations qui continuent de faire le travail dur et nécessaire du combat pour l'égalité. Pour ce qui concerne les sciences, je pense aux remarquables associations *Femmes et mathématiques* (créée en 1987) et *Femmes et sciences* (créée en 2000). L'adhésion régulière à de telles structures n'est pas qu'un geste de soutien symbolique, mais aussi une façon de pérenniser leurs actions.

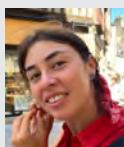
L'école *Cigales* me permet de questionner le sexisme de la communauté mathématique, que les filles dont le futur se construit aujourd'hui auront du mal à nous pardonner.

Il y aura toujours des grands défis internes aux mathématiques. Mais le monde toque à la porte de nos bureaux, avec ses inégalités, injustices et urgences. Nous nous retrouvons aujourd'hui devant un choix : se précipiter dans la résolution de la Conjecture de Riemann, ou construire une communauté dont la conception même assure qu'elle sera résolue.

Pour en savoir plus sur les *Cigales*, je vous invite à visiter le site de notre initiative [1] comprenant un dossier de présentation, et plein de photos!

## Références

- [1] *L'initiative des Cigales sur le site du CIRM.* <https://www.fr-cirm-math.fr/lescigales.html>.
- [2] B. PARIS-ROMASKEVICH. *Filles et mathématiques (galerie photo).* <https://bertrandparo.photo/selection-filles-et-maths/>.
- [3] C. PERRONNET. *La bosse des maths n'existe pas. Rétablir l'égalité des chances dans les matières scientifiques.* fr. Éditions Autrement, 2021.
- [4] *Table ronde Girls and mathematics : reflections and initiatives, à partir de 3 : 31 : 46, les présentations pre-enregistrées; et à partir de 4 : 31 : 00 la table ronde en elle-même.* <https://www.youtube.com/watch?v=CQH5op3T2Z0>.



### Olga PARIS-ROMASKEVICH

Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France  
[olga.romaskevich@math.cnrs.fr](mailto:olga.romaskevich@math.cnrs.fr)

Olga Paris-Romaskevich est chargée de recherche au CNRS. Ses recherches portent sur l'étude des systèmes dynamiques en lien avec la physique, d'abord chaotiques et depuis quelques années, d'entropie nulle, notamment dans son travail sur les billards dans les pavages. Elle est médiatrice des sciences, co-fondatrice de l'association *Mathématiques Vagabondes* engagée à tisser des liens entre les mathématiques et la société.

Je remercie toutes les personnes impliquées dans la vie des *Cigales*, et surtout Nicolas Bédaride, Julien Cassaigne, Pascal Hubert, Étienne Moutot, Kevin Perrot et Carlos Ramisch, pour une aventure de co-organisation tumultueuse et enrichissante. Merci à Clémence Perronnet pour les données de l'enquête, et tout ce qu'elle fait pour les mathématiques sans être mathématicienne. Merci à Damien Gayet de m'avoir proposé d'écrire cet essai, et à Jean-René Chazottes et Magali Jay pour leur soutien de rédaction. Merci à Bertrand Paris-Romaskevich pour son travail photographique autour des *Cigales* dont une page [2] où nous rassemblons les photographies de filles en train de faire les mathématiques, son appui pour la mise en place des *Cigales* et sa relecture de ce texte et tant d'autres. Et surtout merci à toutes les filles que j'ai rencontrées grâce aux *Cigales*, pour leur courage, leur persévérance et leurs idées qui feront le monde de demain.

## Une matrice angevine

- C. FERMANIAN KAMMERER
- N. RAYMOND
- B. SCHAPIRA
- S. ZIMMERMANN



Les *Lectures Sophie Kowalevski* sont une série de cours de master visant à soutenir l'intérêt des étudiantes en mathématiques pour la recherche. Elles se déroulent chaque année dans la douceur printanière de l'Anjou en accueillant une cinquantaine de personnes, avec parité. Deux cours

(de huit heures chacun, réparties sur trois jours) sont dispensés par deux chercheuses, l'un en Analyse/Probabilités et l'autre en Algèbre/Géométrie. À ces cours s'ajoute un exposé plus historique ou sociologique sur la place des femmes en mathématiques. Il ouvre parfois des échanges très stimulants entre l'oratrice et le public.

Des chercheuses et des enseignantes-chercheuses, « les marraines », sont invitées à suivre les cours, à dialoguer avec le public et à proposer du mentorat aux étudiantes qui le souhaitent. C'est aussi l'occasion pour elles de faire la connaissance d'autres collègues qui travaillent dans des domaines thématiquement éloignés.

Outre le plaisir de faire des mathématiques dans une ambiance conviviale où se mélangent étudiantes, étudiants et chercheuses de toute la France (et au-delà!), les *Lectures* sont l'opportunité de transmettre des informations sur les carrières mathématiques et d'offrir une vision plus riches qu'ouvre notre discipline. Certaines participantes nous ont ainsi explicitement dit, à l'issue des *Lec-*

*tures*, qu'elles étaient désormais motivées à poursuivre vers des thèses en mathématiques. Plusieurs participantes ont aussi vu corrigées des informations manifestement erronées sur les carrières possibles après des études en mathématiques. Non, l'enseignement et la recherche ne sont pas les seuls débouchés!

Quel plaisir également de voir étudiantes et étudiants comparer leurs masters respectifs et en parler ouvertement avec des enseignantes! Ces discussions variées (sur les mathématiques, l'enseignement, la vie de la recherche) rappellent celles qui ont lieu lors des conférences de recherche. Les *Lectures* offrent cet aspect interactif et convivial qui fait aussi (et surtout?) le sel de la recherche. Faire des mathématiques, c'est aussi déambuler au soleil sur un campus, rire avec ses enseignantes et jouer sérieusement devant un tableau.

Certes, cette action vise explicitement les étudiantes, mais la réflexion qui vise à mieux les inclure dans les études mathématiques a aussi des effets sur les étudiants à travers des discours volontairement rassurants et bienveillants. Les étudiants en mathématiques ne se reconnaissent pas tous dans le portrait de solitaires éblouis par les concours, les compétitions ou le prestige scientifique; nombre d'entre eux rêvent aussi à une communauté mathématique inclusive dans laquelle chacune et chacun a pleinement sa place. Nous pensons que la joie de comprendre des idées mathématiques en se sentant réellement accueilli-e au sein de notre communauté devrait être la matrice des mathématiciennes et mathématiciens qui nous remplaceront.

Puisse cette initiative angevine durer et en faire naître d'autres!



## Francis COMETS

1956 - 2022

- P. CATTIAUX
- G. GIACOMIN
- C. LÉONARD



Francis Comets, professeur émérite à l'université Paris Cité est décédé le 6 juin 2022 à l'âge de soixante-six ans. Francis était une personne rare, portée par des valeurs profondément humaines. Conjuguant honnêteté, modestie, humour et une grande originalité, il a marqué nombre de ceux qui l'ont connu.

Ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, il a soutenu en 1987 à l'université Paris-Sud une thèse d'État portant sur des problèmes de grandes déviations en lien avec des modèles de physique statistique, domaine émergent en France à l'époque. Il est vite devenu l'un des fers de lance du domaine, pilier du groupe de travail « systèmes de particules » du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École polytechnique, sous l'égide de Michel Métivier, puis de Jacques Neveu et Claude Kipnis à la fin des années 80, groupe où se retrouvaient quelques jeunes chercheurs de l'époque, curieux de découvrir des probabilités différentes.

Bien qu'attentif à toutes les directions scientifiques, il a souvent pris des chemins de traverse, étudiant des sujets éloignés des courants prépondérants. Ses travaux au début des années 90, en partie avec Basilis Gidas, sur l'étude statistique des systèmes de particules et de leurs mesures d'équilibre, font partie de ces ovni mathématiques qui seront redécouverts tôt ou tard.

Son activité mathématique a été essentiellement consacrée à l'étude des modèles aléatoires en lien

avec la physique, domaine dont il a été un des précurseurs en France. Son travail avec Jacques Neveu sur le modèle d'Ising-Sherrington-Kirkpatrick, où les auteurs introduisent une randomisation brownienne pour gérer les paramètres du milieu aléatoire à l'aide de résultats élémentaires de calcul stochastique est un bijou de finesse. Mené à un moment où les prédictions des physiciens (en particulier Giorgio Parisi) reposaient sur des arguments à la rigueur mathématique friable, ce travail est un des articles fondamentaux dans l'analyse de la phase haute température. La technique qui y est introduite a été reprise par beaucoup d'auteurs dans des contextes variés. L'exposé de Michel Talagrand donné à Bourbaki en 1999 met en valeur ces premiers résultats. Un des auteurs de ces lignes se souvient des heures passées par Francis dans leur bureau commun de l'X, à lire, chaussures négligemment jetées sous le bureau, puis expliquer les deux monumentaux papiers sur les verres de spin de Talagrand parus à *Probability Theory and Related Fields* en 1998. Suivront une série de travaux sur les verres de spin menés seul ou en collaboration ainsi que par ses élèves.

C'est à ce moment que Francis s'intéresse aux marches aléatoires en milieu aléatoire, domaine dans lequel il collabore avec de nombreux mathématiciens (Mikhail Menshikov, Alejandro Ramirez, Marina Vachkovskaia, Ofer Zeitouni, ...) et tout particulièrement Serguei Popov. Il co-organise en 2000 avec Étienne Pardoux au Centre International de Rencontres Mathématiques de Luminy une magistrale session des états de la recherche sur les « milieux aléatoires » qui sera un des événements fondateurs du domaine en France. Par la suite il regarde de près les polymères dirigés en milieu aléatoire (PDMA), un modèle central en physique porté à l'attention des mathématiciens par John Imbrie et Thomas Spencer en 1988 et par les travaux d'Erwin Bolthausen en 1989. Il renoue avec ses intérêts antérieurs puisqu'il



s'agit de considérer des mesures de Gibbs désordonnées (c'est-à-dire en milieu aléatoire) sur les trajectoires d'une marche aléatoire. Avec ses collaborateurs, en particulier Nobuo Yoshida, il apporte des contributions essentielles. Dans leur travail commun publié à *Annals of Probability* en 2006, ils complètent le programme de Imbrie-Spencer et Bolthausen en prouvant le comportement diffusif dans le régime de désordre faible. Il a également obtenu plusieurs résultats dans le régime de désordre fort où l'on observe un phénomène de localisation. Il reçoit avec Michael Cranston le prix Itô décerné par la Bernoulli Society pour leur travail publié à *Stochastic Processes and their Applications* en 2013. Ce travail établit un théorème de localisation très précis, dans un modèle qui est une version continue du PDMA. Là encore diversité des outils, incluant calcul stochastique, calcul de Malliavin et techniques issues du domaine des verres de spin, ainsi qu'une profonde intuition se rejoignent avec une rare élégance. Il donne en 2016 un cours à l'école de Probabilités de Saint-Flour sur les PDMA : les « lectures notes » de ce cours sont devenues un travail de référence dans un domaine encore en pleine expansion, les PDMA appartenant à la classe d'universalité de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) qui a suscité des progrès étonnants dans plusieurs directions des mathématiques et de la physique.

Au-delà des PDMA Francis a contribué avec régularité à plusieurs domaines. Parmi ses travaux les plus récents, on peut mentionner ceux avec son ancienne étudiante Dasha Loukianova, ainsi qu'Oleg Loukianov et Mikael Falconnet, qui reprennent le sujet très étudié des marches aléatoires en milieu aléatoire sous l'angle des statistiques, en lien évident avec son activité de début de carrière. Il est aussi un des contributeurs les plus importants à la nouvelle théorie des entrelacs aléatoires, introduite par Alain-Sol Sznitman pour étudier l'ensemble des points visités par une marche aléatoire. Par ailleurs, il s'est fortement investi et a obtenu plusieurs résultats très fins, en collaboration avec Chiranjib Mukherjee et son étudiant Clément Cosco, sur l'équation de KPZ en dimension trois ou plus. La curiosité scientifique de Francis ne faiblissait jamais.

Tout au long de sa carrière il a collaboré avec près de cinquante mathématicien.ne.s en Europe, Amériques du Nord et du Sud et Asie. Il a dirigé une quinzaine de thèses. Parmi ses élèves on compte Thierry Bodineau, Clément Cosco, Dasha Loukianova, Gregorio Moreno-Flores, François Simenhaus, Marina Talet, José Trashorras, Vincent Vargas, tous devenus chercheurs. Francis aimait les contacts avec les chercheurs de tous les pays et participait activement à l'organisation de réseaux internationaux

tout particulièrement avec l'Amérique latine (Ecos et Mathamsud). Comment oublier ses courriels signés Francisco quand il écrivait depuis l'Amérique latine ? C'est du reste dans le désert d'Atacama au Chili qu'a été organisée la conférence en son honneur pour ses soixante ans. Il gardait un souvenir ému de ses séjours d'un an à Irvine au milieu des années 90 et tout récemment en 2018-19 au NYU à Shanghai. Il projetait du reste de profiter du temps laissé par la retraite pour retourner à Shanghai avec son épouse.

Au-delà d'une activité scientifique de premier plan, Francis a été depuis quarante ans, un acteur majeur des mathématiques en France. Tout d'abord nommé assistant à l'université Paris 10 (aujourd'hui Paris Nanterre) peu avant sa thèse de troisième cycle, il y reste quatre ans avant d'obtenir un poste de professeur à Marne-la-Vallée et enfin en 1993 de rejoindre Paris 7 (devenue au fil du temps Paris Diderot et maintenant Paris Cité). De 1989 à 2005 il enseigne à l'École polytechnique, d'abord comme maître de conférences puis comme professeur à temps partiel. Il enseigne également trois ans à l'École normale supérieure de 1997 à 2000. Francis a été pour beaucoup de jeunes chercheuses et chercheurs en poste en France, leur premier « prof de probas ». Son humour, ses raccourcis un peu rock'n roll comme la musique qu'il aimait tant, son auto-dérision et sa rigueur ont fait de lui un enseignant apprécié qui a souvent éveillé des vocations de chercheurs en probabilités.

Il n'a pas non plus ménagé sa peine au service de la communauté. Co-fondateur en 2006 de la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris, il a dirigé le Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires (LPMA, Paris 6 et Paris 7) de 2014 à 2017, puis été directeur adjoint du nouveau Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation (LPSM). Il a participé à l'organisation de congrès importants (*Stochastic Processes and their Applications*, trimestre de l'Institut Henri Poincaré, congrès de la Bernoulli Society), animé des sessions de conférences et de nombreux séminaires. Son empreinte sur les probabilités du LPMA puis du LPSM est profonde. Il y a en particulier créé l'équipe de « modélisation aléatoire » dont il a été le responsable jusqu'en 2010. C'est en grande partie grâce à son activité que la mécanique statistique, thématique centrale de l'équipe, est devenue l'un des sujets porteurs du LPSM tout entier, et est désormais étudiée bien au-delà de ce laboratoire. L'approche mathématique de la physique statistique à laquelle il a tant participé, est aujourd'hui un domaine phare des mathématiques.

Ses étudiants, ses collègues ont trouvé auprès de lui écoute, compétence et ce soupçon de surprise qui

mène à la curiosité. Discret sur sa vie personnelle, peu de collègues étaient au courant des problèmes de santé qui se sont abattus sur lui. Sa disparition a été un choc pour beaucoup. Il restera pour tous ce mathématicien passionné au sourire généreux lorsqu'un bon mot ou une situation cocasse le faisaient éclater de rire, et faisaient par la même occasion fris-

sonner son inoxydable moustache, un homme droit qu'il était bon de côtoyer. Il restera pour certains un homme dont l'amitié était indéfectible.

En achevant d'écrire ces quelques lignes rapides nous pensons bien entendu à son épouse Marie-Pierre, à leurs enfants Aude, Olivier et Antoine et à leurs petits-enfants.

## Jean-Jacques SANSUC

1941 - 2022

- A. BOUTET DE MONVEL
- J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE
- L. MEREL



Photo communiquée par V. Boutet de Monvel

Jean-Jacques Sansuc nous a quittés le 20 juillet 2022. Il était né à Hendaye le 13 mai 1941. Il était entré à l'ÉNS de la rue d'Ulm en 1960. Il avait été agrégé préparateur, puis maître-assistant, puis professeur à l'ÉNS,

puis de 1986 à 2009 professeur à l'université Paris 7, ensuite professeur émérite.

J.-J. Sansuc avait une compréhension profonde de nombreux domaines des mathématiques, vers lesquels il guidait les élèves de l'ÉNS à la recherche de directeurs de thèse dans des domaines prometteurs. La largeur de ses connaissances lui permettait en particulier d'aider les élèves dans l'ancien exercice de la préparation de la « deuxième thèse ». Il ne fut jamais avare de son temps avec les étudiants, ni à l'ÉNS ni à l'université.

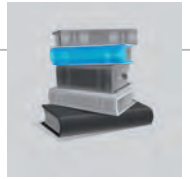
Son domaine de prédilection était la géométrie algébrique et la théorie des groupes algébriques linéaires, aussi bien du point de vue algébrique (étude des toreseurs) que du point de vue arithmétique. J.-J. Sansuc avait absorbé une grande partie de la géométrie algébrique à la Grothendieck, tout en sachant encore faire des dessins pour expliquer les idées. Cela lui permit de faire le pont entre la géométrie algébrique « moderne » et des problèmes diophan-

tiens proposés vers 1970 par Yuri Manin à Moscou et Peter Swinnerton-Dyer à Cambridge (Angleterre). Trois notes aux CRAS en 1976/1977 furent le début d'une longue série de travaux, couronnés par la médaille Albert Châtelet en 1980 et le prix Charles-Louis de Saulses de Freycinet de l'Académie des Sciences en 1985. La méthode de la descente et la méthode des fibrations pour établir le principe de Hasse ou la version Brauer-Manin sont de nos jours intensément poursuivis. J.-J. Sansuc était l'un des membres fondateurs d'un séminaire encore en activité aujourd'hui, le séminaire « Variétés rationnelles ».

Du côté de l'analyse, il travailla sur les propriétés spectrales de l'opérateur de Hill. Il était aussi un auditeur assidu et dynamique du séminaire « Physique mathématique et Géométrie ».

J.-J. Sansuc était un perfectionniste, ce qui ralentissait le rythme de ses publications. Son travail le plus cité, sur l'arithmétique des groupes algébriques linéaires, paru dans Crelle en 1981, était le produit d'une gestation de dix ans.

Aussi bien à l'ÉNS qu'à Paris 7, outre son activité d'enseignement, il assumait de nombreuses tâches administratives de haut niveau, notamment la responsabilité du DEA, puis du M2, pendant plus de dix ans, du conseil scientifique, et de la commission de spécialité. Dans toutes ses activités, se manifestaient sa passion pour toutes les mathématiques et son indépendance d'esprit.



Récoltes et Semailles I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien  
 Alexandre GROTHENDIECK  
 Gallimard, Collection Tel., 2022. 1800 p. ISBN : 9782072889752

Le jour commence à poindre – je sens qu’il est temps de m’arrêter. Je ne suis pas sûr que c’est le moment et le lieu, dans *Récoltes et semailles*, de poursuivre plus avant le sens de cette coïncidence frappante. C’est une récolte peut-être réservée à d’autres lendemains, pour peu que ma réflexion de cette nuit rencontre un écho chez l’un ou l’autre de ceux qui furent mes élèves.  
 (Note 84, 9 mai 1984<sup>a</sup>)

Mai 1984. Voilà plusieurs mois qu’Alexandre Grothendieck, jour après jour, ou plutôt nuit après nuit, rédige ses *réflexions* sur son « passé de mathématicien ». Un texte immense, tout à la fois lettre à d’anciens amis et *témoignage*, auquel il donna le titre de *Récoltes et semailles*, et que Gallimard vient de publier dans la collection Tel. L’homme n’a pas abandonné les mathématiques, il enseigne à l’université de Montpellier et a écrit peu avant une très longue lettre à Daniel Quillen, *À la poursuite des champs*, défrichage programmatique, heuristique, qui vient tout juste (2022) d’être publié.<sup>b</sup> Et même si personne ne le sait encore, *l’Esquisse d’un programme* qu’il rédigera peu après en guise de demande de poste au CNRS sera source d’inspiration pour au moins 50 ans.

Voilà près de 15 ans qu’en 1970 le mathématicien avait quitté son poste à l’Institut des hautes études scientifiques, à Bures-sur-Yvette, près d’Orsay, en vallée de Chevreuse, un institut autour de René Thom et de Grothendieck créé sur le modèle de l’Institute of Advanced Study de Princeton. C’est que, tirant prétexte du financement militaire de cet institut, et préoccupé par les bouleversements écologiques qui s’annonçaient déjà, il avait préféré tourner le dos à un milieu mathématique qu’il avait animé, renouvelé, bouleversé pendant vingt-cinq ans. Vingt-cinq années au cours desquelles, d’un même mouvement, il avait refondé la géométrie algébrique autour de la notion de *schéma*, construit la « cohomologie étale » et, pour cela, développé la théorie des *topos*, démontré une partie des conjectures de Weil, inventé la notion de *motif*, obtenu la médaille Fields...

Voilà environ 35 ans qu’en 1948 le mathématicien avait quitté la région de Montpellier où il vivait avec sa mère pour étudier les mathématiques, d’abord à Paris puis, accueilli par une bande de mathématiciens (essentiellement le groupe Bourbaki), très rapidement, à Nancy, où il fit une thèse d’analyse fonctionnelle sur la notion de produit tensoriel topologique et la théorie de Fredholm dans laquelle, dit-on, il résolvait d’un coup les quatorze problèmes que Laurent Schwartz lui avait soumis.

Voilà environ 45 ans qu’en 1940, en pleine guerre, interné avec sa mère Hanka au camp de concentration de Rieucros, près de Mende, en tant que juif allemand, enfant, « indésirable », il découvrait

les jeux de tracés au compas, enchanté notamment par les rosaces à six branches qu’on obtient en partageant la circonférence en six parties égales à l’aide de l’ouverture du compas reportée sur la circonférence à six reprises, ce qui fait retomber pile sur le point de départ.  
 (Note 69, 27 avril 1984)

et s’emballait en en déduisant que la circonférence du cercle est 6 fois son rayon...

Voilà environ 55 ans qu'en mars 1928, cet homme naissait à Berlin, de parents dont l'énergie socialiste-révolutionnaire conduirait à le confier, dès 1934, à un pasteur et instituteur du nord de l'Allemagne et avec qui il vivra pendant 6 ans. Entre l'engagement révolutionnaire (Budapest, Berlin, Barcelone...) et la nécessité de fuir le nazisme, c'est en France qu'ils se retrouvent, vers 1938. L'arrivée de la guerre, et la défaite de 40, les séparent à nouveau. D'abord interné au camp du Vernet, son père, Shapira, est déporté à Auschwitz où il mourra.

Alexander Grothendieck mourra en 2014, dans la solitude d'une maison de l'Ariège.

Écrit dans les années 1984-1986, *Récoltes et semilles* est un texte très long, environ 1000 pages dactylographiées, que Gallimard vient de publier en un coffret de deux volumes de tailles inégales, accompagné d'un petit livret constitué d'une dizaine de textes indépendants. Ce n'est pas pour autant un texte complètement inédit. Dès son écriture, Grothendieck escomptait le publier; contactés, les éditions Christian Bourgois et le journaliste Stéphane Deligeorges s'étaient même dits intéressés. Grothendieck l'avait également envoyé à ses anciens collaborateurs, et l'on pouvait le consulter dans quelques bibliothèques universitaires. Les trois premiers volumes d'une traduction japonaise avaient été publiés vers 1990. Document sulfureux, Internet permit sa plus grande diffusion; outre le texte français, on en trouve en ligne des traductions en anglais, en espagnol, en russe... Ce n'est qu'en 2022 que le texte est finalement publié; des libraires m'ont dit être à la fois satisfaits et étonnés de la façon dont il se vend.

Dès sa table des matières, on devine que *Récoltes et semilles* est un texte au contenu singulier. Précédé d'un *Prélude en quatre mouvements*, il est formé de quatre parties dont les titres sont *Fatuité et renouvellement* pour la première, et *L'enterrement* (I), (II), (III) pour les trois autres. Ces quatre parties forment le projet initial et se présentent comme une suite d'environ 200 notes de quelques pages chacune.

C'est la réflexion poursuivie d'une traite, au cours d'une journée ou d'une nuit, qui constitue l'unité indivise, la cellule vivante et individuelle en quelque sorte, dans l'ensemble de la réflexion (*Récoltes et semilles*, en l'occurrence). Celle-ci est à chacune de ces unités (ou ces « notes », formant mélodie...) ce que le corps d'un organisme vivant est à chacune de ses cellules individuelles, d'une diversité infinie, remplissant chacune une place et une fonction qui n'appartient qu'à elle.

*Une lettre*, §11. Mouvement et structure

Conçues comme des méditations, et je dirais plutôt des comptes-rendus de méditations, les notes de *Récoltes et semilles* permettent à Grothendieck d'élaborer une longue réflexion sur les oppositions femme/homme, enfant/patron, sensibilité/raison, etc. : toute la troisième partie est consacrée à la dualité yin/yang, sous un angle que la psychologie contemporaine semble avoir dépassé.

Malgré tout, on y trouve parfois des images sublimes qui ont conduit des artistes à en faire le matériau d'œuvres poétiques, telles la pièce *Rêves et motifs*, théâtre d'ombre et de papier froissé de la compagnie Les rémouleurs, ou encore les lectures d'Anouk Grinberg à la Maison de la poésie.

Prenons par exemple la tâche de démontrer un théorème qui reste hypothétique (à quoi, pour certains, semblerait se réduire le travail mathématique). Je vois deux approches extrêmes pour s'y prendre. L'une est celle du marteau et du burin, quand le problème posé est vu comme une grosse noix, dure et lisse, dont il s'agit d'atteindre l'intérieur, la chair nourricière protégée par la coque. Le principe est simple : on pose le tranchant du burin contre la coque, et on tape fort. Au besoin, on recommence en plusieurs endroits différents, jusqu'à ce que la coque se casse – et on est content. (...)

Je pourrais illustrer la deuxième approche, en gardant l'image de la noix qu'il s'agit d'ouvrir. La première parabole qui m'est venue à l'esprit tantôt, c'est qu'on plonge la noix dans un liquide émoullant, de l'eau simplement pourquoi pas, de temps en temps on frotte pour qu'elle pénètre mieux, pour le reste on laisse faire le temps. La coque s'assouplit au fil des

semaines et des mois – quand le temps est mûr, une pression de la main suffit, la coque s’ouvre comme celle d’un avocat mûr à point! Ou encore, on laisse mûrir la noix sous le soleil et sous la pluie et peut-être aussi sous les gelées de l’hiver. Quand le temps est mûr c’est une pousse délicate sortie de la substantifique chair qui aura percé la coque, comme en se jouant – ou pour mieux dire, la coque se sera ouverte d’elle-même, pour lui laisser passage.  
(Note 122, 8 novembre 1984)

Cependant, la plus grande part du texte de Grothendieck se concentre autour de quelques aspects de son œuvre mathématique conçus avant son départ pour Montpellier. La forme sous laquelle ses collaborateurs, ses élèves, les ont développés après son départ lui apparaît comme une trahison, sentiment traduit par le titre *L’enterrement* qu’il a donné à trois parties de *Récoltes et semilles* – le mot « enterrement » ou ses variantes apparaissent environ 900 fois dans le texte!

Pour expliquer cela, il faut revenir sur la « méthode de travail Grothendieck » des années 1960-1970. En effet, la refondation de la géométrie algébrique qu’il a menée ces années-là se divise en deux pôles.

1. Les *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés « avec la collaboration de Jean Dieudonné » et familièrement invoqués de l’acronyme ÉGA, sont une réécriture systématique de la géométrie algébrique autour de la notion de schéma. Publiés sous forme d’un long article en 4 chapitres aux *Publications mathématiques de l’IHÉS* entre 1960 et 1966, ils forment un corpus d’environ 2000 pages qui reprennent la géométrie algébrique « à son début » du nouveau point de vue des schémas, tout en y incorporant d’autres avancées fondamentales comme le point de vue cohomologique introduit par Serre en 1955. En 1971, une version améliorée du premier chapitre a fait l’objet d’un volume dans la collection *Grundlehren* de Springer-Verlag.
2. Les *Séminaires de géométrie algébrique* où, chaque année, Grothendieck renouvelait un thème de la géométrie algébrique, assisté d’un groupe de jeunes mathématiciens ou mathématiciennes, pour beaucoup ses élèves doctorants, qui formaient une sorte de détachement avancé : revêtements et groupe fondamental; théorèmes de Lefschetz; groupes algébriques; puis cohomologie étale et fonctions L; théorie de l’intersection et théorème de Riemann-Roch, mais il faut plutôt dire théorème de Riemann-Roch-Grothendieck; cycles évanescents et groupes de monodromie... Les rédactions de ces séminaires, SGA 1 à SGA 7, sont parues dans la collection *Lecture notes in mathematics* de Springer-Verlag entre 1970 et 1972.

Les thèmes mathématiques qui intéressent particulièrement Grothendieck dans *Récoltes et semilles* sont ceux qu’il a introduits avant 1970 mais que ses successeurs n’ont, selon lui, pas correctement traités : les éditions des *Séminaires*, l’insertion par Deligne d’un volume « SGA 4 $\frac{1}{2}$  » entre les volumes 4 et 5 du *Séminaire*, l’algèbre homologique des catégories dérivées (thèse de Verdier), certains aspects de la cohomologie des schémas (théorie de Hodge relative, D-modules, théorie cristalline), la notion de topos, et surtout celle de *motif*. Ce sont des thèmes sur lesquels Grothendieck avait une vision personnelle très approfondie, et pour lesquels il reproche à ses successeurs d’en minorer l’importance, de ne pas les avoir développés selon l’image que lui-même en avait. Il leur reproche carrément de ne pas l’avoir cité suffisamment explicitement; mais était-ce par maladresse ou par indécatesse?

Sur la question de motif, justement, quelques lettres entre Serre et Grothendieck <sup>c</sup> pourront nous aider à y voir un peu plus clair, au risque d’une digression mathématique.

Comme il apparaît dès les premières lignes des ÉGA, l’objectif premier de Grothendieck en refondant la géométrie algébrique était de prouver des conjectures de Weil concernant le nombre de solutions d’équations polynomiales dans des corps finis, plus précisément une certaine série génératrice (la « fonction zêta de Hasse-Weil ») formée à partir de ces nombres de solutions lorsque l’on fait varier le corps fini. Ce sont en fait trois conjectures que formule Weil : 1) cette série est une fraction rationnelle; 2) elle possède une équation fonctionnelle; 3) les zéros et pôles de cette fraction rationnelle sont des nombres complexes de modules précisés.

Dès son article de 1949, Weil fait la suggestion d’utiliser une théorie analogue à la cohomologie singulière. La « cohomologie étale des schémas » a permis à Grothendieck de démontrer les deux premières conjectures de Weil en 1965. (Peu avant, Dwork avait pu prouver la rationalité par une autre



méthode.) Le développement de cette théorie et ses propriétés (en particulier, l'analogie de la formule des traces de Lefschetz) est au centre des monumentaux volumes 4, 5, 6 et 7 des *SGA*.

Dans une lettre à Serre du 27 août 1965, Grothendieck propose deux « conjectures-clé » concernant les cycles algébriques et qui impliquent les conjectures de Weil ; leur intérêt est d'être purement géométrique, alors que les conjectures de Weil sont plutôt de nature arithmétique. Grothendieck précise également que la conjecture A « semble le "minimum minimorum" pour donner une définition en forme utilisable de la notion de motif ». En 1969, Grothendieck publiera ces conjectures et les appellera « conjectures standard ».

Lorsque Deligne démontre la troisième conjecture de Weil, en 1973, il met à profit une autre propriété géométrique (que la monodromie des pinceaux de Lefschetz est grande, pour en déduire l'irréductibilité d'un système local, puis sa pureté), mais il « contourne » les conjectures standard. Et comme Serre écrit à Grothendieck dans sa réponse à *Récoltes et semilles* (lettre du 23 juillet 1985), « cela te choque, mais cela me ravit ».

Revenons à *Récoltes et semilles*. Dans le cœur du livre, les notes de Grothendieck sont l'occasion de remarques cinglantes, ironiques, méchantes à l'encontre d'à peu près tous les mathématiciens qui, pendant de nombreuses années, s'étaient mis au service de son œuvre. Seuls Dieudonné et Chevalley semblent échapper à son opprobre. Hélas, ces remarques sont souvent injustes, et parfois infondées. Car si Grothendieck a relu ses notes, et les a mêmes parfois remaniées avant de les confier à la frappe, il les considère comme un « matériau brut » qui serait trahi par une réécriture plus ample :

Ainsi, les rectifications éventuelles d'erreurs (matérielles, ou de perspective, etc.) ne sont pas l'occasion de retouches du premier jet, mais se font dans des notes de bas de page, ou lors d'un « retour » ultérieur sur la situation examinée.

*Promenade à travers une œuvre*, §3, note de bas de page

Si, à plusieurs reprises, il reconnaît ainsi avoir été trompé par une mémoire imparfaite, il ne corrige pas le texte incriminé, mais le complète parfois par des notes de bas de page insérées à l'endroit litigieux, et surtout en revenant sur le sujet par des notes ultérieures.

Tout cela fait de *Récoltes et semilles* un texte qu'il n'est jamais possible de prendre pour argent comptant. C'est un témoignage, et les historiens savent bien la difficulté d'y retrouver l'Histoire. C'est un point où l'édition Gallimard est, je trouve, insuffisante : si on y trouve, en fin du deuxième volume, un index des noms propres, celui-ci est bien moins pratique que la fonction « Rechercher » lorsqu'on dispose d'une version PDF, et on n'y trouvera pas d'index des thèmes évoqués, pas de biographie succincte de Grothendieck, pas de bibliographie, ni de son œuvre, ni de celles connexes, en clair, rien qui s'approcherait du nécessaire appareil critique accompagnant un document de cette ampleur.

En ouvrant *Récoltes et semilles*, c'est cependant par le *Prélude en quatre mouvements* que les lecteurs et lectrices débiteront leur découverte de ce témoignage, prélude lui-même constitué de deux grandes parties, *Promenade à travers une œuvre – ou l'enfant et la Mère* puis *Une lettre*. De fait, ces parties sont présentées dans l'ordre inverse de leur écriture : la *lettre* est une introduction aux quatre parties, et la *promenade* est comme une introduction à l'introduction... Ces deux premiers mouvements sont complétés par une introduction en deux temps : *Le trèfle à cinq feuilles* et *Un acte de respect*.

Écrites à l'issue du long processus de réflexion-méditation que sont *Récoltes et semilles*, plus ramassées, plus synthétiques, un peu moins spécifiquement mathématiques, ce sont peut-être ces deux ou trois cents premières pages que la plupart des lecteurs et lectrices liront.

Lorsque Damien Gayet m'a confié la responsabilité d'écrire cette recension de *Récoltes et semilles*, il m'est immédiatement apparu nécessaire d'éviter un double écueil. L'écueil de l'œuvre monstrueuse d'un génie, d'une part, sur lequel l'édition Gallimard s'échoue dès la quatrième de couverture et qu'à quelques exceptions près (dont le beau texte, fin et juste, qu'y offre Luc Illusie), le livret de présentation n'évite pas plus. L'écueil de la folie d'autre part. Car l'interminable ressentiment, la profonde acrimonie, l'immense méchanceté qui se dégage de la lecture de *Récoltes et semilles* conduit de nombreux collègues à cataloguer ce texte comme l'œuvre d'un paranoïaque. Dans les deux cas, pourquoi le lire ?

Peut-être parce que malgré la singularité de ce document, malgré la singularité de son auteur, Grothendieck nous confronte, nous lecteurs et lectrices d'aujourd'hui, à notre propre mouvement vers les mathématiques, souvent initié dans l'enfance.

Mathématicien qui ne cesse d'insister sur l'importance de la réflexion indépendante et solitaire, mais dont l'œuvre est frappée du sceau de collaborations multiples, Grothendieck nous confronte d'abord à notre propre pratique, individuelle et collective, d'une discipline scientifique qui loue le matin l'originalité d'une approche et raffine ses cloisonnements l'après-midi...

Pétri de ressentiment envers ses anciens élèves qui n'auraient pas poursuivi la voie indiquée, à un moment où lui-même était d'ailleurs parti dans une autre direction, Grothendieck nous pose aussi la question du destin de nos travaux, de ce que nous attendons de nos élèves.

Et animé de l'angoisse profonde d'avoir été *enterré, effacé*, et malgré sa propre légèreté, sinon malhonnêteté, il nous rappelle enfin la responsabilité d'une présentation fidèle, sincère, honnête de l'origine des idées qui nous traversent et que nous poursuivons vaillamment.

C'est en tout cas ce que j'ai voulu y lire.

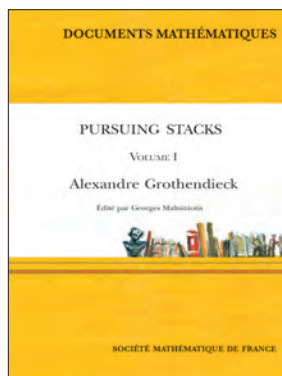
Antoine CHAMBERT-LOIR  
Université Paris Cité

a. Toutes les citations sont issues de *Récoltes et semailles*, op. cit.

b. A. GROTHENDIECK, *Pursuing Stacks*, édité par G. MALTSINIOTIS, Documents mathématiques, 20, Société mathématique de France, 2004.

c. A. GROTHENDIECK, J-P. SERRE, *Correspondance Grothendieck-Serre*, édité par P. COLMEZ, Documents mathématiques, 2, Société mathématique de France, 2001. Traduction anglaise, par C. MACLEAN, American Mathematical Society/Société mathématique de France, 2004.

## Documents mathématiques - nouveauté



Vol. 20

### **Pursuing Stacks (volume I)**

Alexandre GROTHENDIECK, édité par Georges MALTSINIOTIS

ISBN 978-2-85629-958-6

2022 - 446 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 75 € - Members: 53 €

Despite what its title suggests, Pursuing Stacks (or at least the part of the project that Grothendieck carried out under the name of The Modelizing Story or Histoire de Modèles) is not about the pursuit of stacks. Only the thirteen first sections, as well as, partially, sections 15–21 and 27, are about stacks. Furthermore, it is mainly about  $\infty$ -stacks on the point, i.e. weak  $\infty$ -groupoids. The only reflections on stacks on arbitrary topoi, as natural coefficients for a non-abelian cohomology, are purely heuristic. The rest of the hundred and forty sections deals with homotopy theory : the search for models for homotopy types (and more particularly for small categories whose presheaf category models canonically homotopy types : the test categories), homotopy structures,

contractibility and asphericity structures, abelianization and schematization of homotopy types. Grothendieck was planning to come back later to  $\infty$ -stacks on topoi and to develop, in one or two additional volumes, what he had sketched out in his letters to Breen (letters that he included in Pursuing Stacks as an appendix), but he never did it. Nevertheless, the search for models for homotopy types is closely related to  $\infty$ -stacks, since according to the "homotopy hypothesis", a fundamental conjecture of Grothendieck, the weak  $\infty$ -groupoids model homotopy types. The first volume of this edition consists of the first four chapters (sections 1–91 and 95–98). In a second volume, we will publish the last three chapters, the letters to Breen, as well as the correspondence of Grothendieck with several mathematicians, around the themes of Pursuing Stacks.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris





## Instructions aux autrices et auteurs

**Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*.** Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérentes et adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous celles et ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'une mathématicienne ou d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à une grande mathématicienne ou un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérente et adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<https://smf.emath.fr/les-publications/la-gazette>).

**Articles scientifiques.** Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les autrices et les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

**Soumission d'article.** Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique ([gazette@smf.emath.fr](mailto:gazette@smf.emath.fr)), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier  $\text{\TeX}$  le plus simple possible, accompagné d'un fichier `.bib` pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe  $\text{\LaTeX}$  `gztarticle` fournie par les distributions  $\text{\TeX}$  courantes ( $\text{\TeX}$  Live et Mac $\text{\TeX}$  – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK $\text{\TeX}$ ), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution  $\text{\TeX}$  à jour.

---

**Classe  $\text{\LaTeX}$  :** Denis BITOUZÉ ([denis.bitouze@univ-littoral.fr](mailto:denis.bitouze@univ-littoral.fr))

**Conception graphique :** Nathalie LOZANNE ([n.lozanne@free.fr](mailto:n.lozanne@free.fr))

**Impression :** Dupliprint – 733 rue St. Léonard 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

