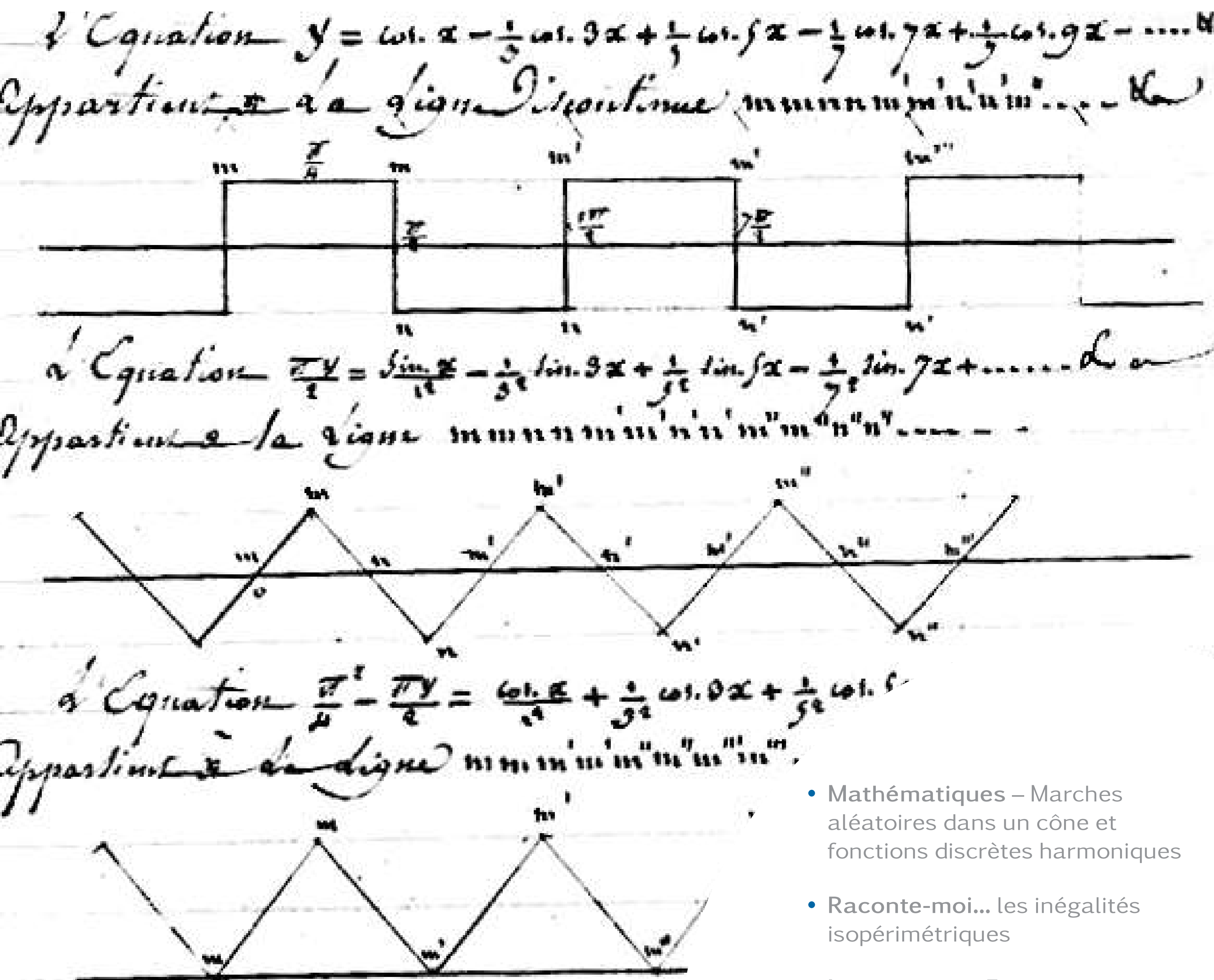
JANVIER 2023 – N° 175

la Gazette
de la Société Mathématique de France



- **Mathématiques** – Marches aléatoires dans un cône et fonctions discrètes harmoniques
- **Raconte-moi...** les inégalités isopérimétriques
- **Information** – Focus sur la Synthèse nationale sur les mathématiques
- **Tribune** – Les « role models »

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Secrétariat de rédaction :
smf – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Fabien Durand

issn : 0224-8999

À propos de la couverture. La couverture reproduit des notes de Joseph Fourier issues de la « Collection des papiers du mathématicien Fourier. XXIII-XXIX Théorie de la chaleur. XXV Histoire de la théorie de la chaleur. Observations sur les mémoires de Poisson ». (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9061926m.r=fourier.langFR, p.182). Dans le manuscrit de 1807, on a bien l'impression que Fourier joue à multiplier les dessins de fonctions tronquées sur des intervalles pour susciter l'étonnement, et donc d'avance contrer ce qu'il pressent comme une opposition de la part des milieux parisiens (crédit : gallica.bnf.fr / BnF).

la Gazette
de la Société Mathématique de France

N° 175

Éditorial

À vous qui lisez la *Gazette*,

saviez-vous que la notation des bornes d'intégration est due à Joseph Fourier ? L'article que Jean Dhombres consacre à ce qu'il nomme « son offre scientifique » à l'occasion du bicentenaire en 2022 de la parution de la Théorie Analytique de la chaleur, met en exergue les apports de Fourier à l'analyse et à l'algèbre, que nous vivons tous dans notre quotidien mathématique. Plus généralement, la place de Fourier dans la société, scientifique et civile, est dévoilée dans toute sa complexité.

Vous ferez avec Kilian Raschel et Pierre Tarrago des marches aléatoires confinées, en espérant que leur beauté mathématique n'ait pas de nouvel écho dans l'actualité... Heureusement, de toute façon, les domaines qu'ils considèrent sont des parties infinies de $\mathbb{Z}^d$! Vous découvrirez aussi comment, dans certains cas, le comportement en temps long de la marche aléatoire peut être caractérisé par une fonction harmonique discrète, et les questions ouvertes liées en combinatoire, notamment sur la classification des fonctions génératrices.

Lors d'une rêverie mathématique, en considérant un réel x, vous avez pu vous demander à quels jeux d'écriture pourrait conduire de le considérer dans deux bases entières p et q. En particulier, comment lier ces écritures différentes à la rationalité de x ? Voyez donc un peu comment la dimension fractale des orbites $(p^n x)_{n\geqslant 0}$ et $(q^n x)_{n\geqslant 0}$ apparaît dans une conjecture de Furstenberg au centre de l'article de Nicolas de Saxcé.

Nous pouvons penser que Didon, dont la légende dit qu'elle a résolu le premier problème de maximisation de l'aire à périmètre fixé, n'était pas allée jusqu'à se demander comment le résoudre dans une variété riemannienne... Benoît Kloeckner, en racontant les inégalités isopérimétriques, relève le défi de nous faire comprendre leurs enjeux actuels dans ce cadre !

La question du dérèglement climatique est au cœur de l'entretien qu'Ivar Ekeland a accordé à Anne-Laure Fougères et Ivan Gentil lors d'une conférence pour les étudiants de master à l'université Lyon 1. Au détour de leurs questions, Ivar Ekeland commence par retracer son parcours depuis 1963, dans les domaines de la dynamique, de la géométrie, de l'optimisation et des problèmes mathématiques liés à l'économie et à la gestion, témoignage de 60 ans d'immersion dans la vie universitaire mathématique française et internationale. Il raconte ensuite sa prise de conscience de la fragilité de l'écosystème lors d'une visite en 2003 à Vancouver. S'engage enfin un débat sur la place des mathématiques et le positionnement des mathématiciens au sujet d'actions pour le climat.

Le Haut Conseil de l'Évaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur (Hcéres) a publié le 9 novembre 2022 une « Synthèse nationale et de prospective des mathématiques », rapport de 300 pages. À travers cinq questions naïves, trois personnalités, Frédéric Hérau, coordinateur du rapport, Marc Peigné et Grégoire Allaire, président et co-président du comité de rédaction, vous donnent les clés pour rentrer dans ce travail titanesque, qui s'adresse à toute la communauté mathématique, étudiante, enseignante, de recherche, et plus largement à la société française. Les liens avec les Assises des Mathématiques, qui se sont tenues mi-novembre, sont également évoqués.

Dans une tribune libre, Sylvie Benzoni livre ses réactions vis-à-vis de la mise en avant de « role models » pour les filles et les femmes en mathématiques, un sujet sensible en équilibre instable (!) entre l'encouragement et le découragement.

Dans des styles très différents, les deux livres dont la *Gazette* vous propose la recension relatent des aventures humaines et scientifiques majeures. *La Lumière révélée*, dont l'auteur est Serge Haroche (prix Nobel de physique en 2012), met en avant « le rôle fondamental des mathématiques dans l'élaboration des modèles de la physique moderne ». *Les Lectures Grothendieckiennes* sont issues d'un séminaire éponyme consacré à « une pensée à l'œuvre au contact des textes de Grothendieck », ayant fait intervenir mathématiciens, philosophes et logiciens.

J'ai l'honneur et le bonheur de m'adresser à vous en tant que nouvelle rédactrice en chef de la *Gazette* de la Société Mathématique de France. Je remercie mon prédécesseur, Damien Gayet, et la présidence de la smf pour leur confiance, ainsi que le comité de rédaction pour cette ambiance si chaleureuse et agréable, qui ne m'a pas fait hésiter un seul instant ! En 2014, Boris Adamczewski avait engagé une profonde réforme de la *Gazette*, qui a été poursuivie par Damien. Je crois pouvoir dire que leurs efforts ont été unanimement appréciés. Il me tiendra à cœur de garder le cap pour faire vivre ce superbe héritage. Par curiosité, de passage à la bibliothèque de l'ihp, ouvrez donc un des premiers numéros, par exemple le tout premier, paru en décembre 1967...

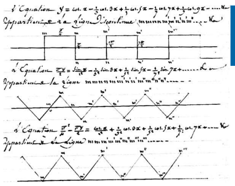
Le comité de rédaction se joint à moi pour remercier de tout cœur Damien Gayet pour ces huit années passées à la *Gazette*, dont les quatre dernières comme rédacteur en chef. Nous saluons particulièrement son dynamisme, sa ténacité, son engagement sans faille, et, bien sûr, son don pour le choix des couvertures.

En nos temps ultra-connectés, ultra-électroniques, de messagerie presque instantanée, où le papier est menacé, les récits de mathématiques se travaillant à la plume sur un parchemin, nécessitant des dessins à main levée, des ratures, comme l'illustre la couverture, s'apparentent quasiment à une mythologie. Je formule le vœu que vous témoigniez de la façon dont nous apprenons, enseignons, faisons des mathématiques au XXIe siècle. Par prolongement, la question de la « sérendipité » au gré des rencontres se pose de manière criante à l'heure des mesures de restriction des déplacements. L'entretien avec Ivar Ekeland ouvre la voie à ces débats, que la *Gazette* se fera fort de relayer.

Le comité de rédaction se joint à moi pour vous souhaiter une belle et heureuse année mathématique 2023,

Pauline LAFITTE

la Gazette
de la Société Mathématique de France



N° 175

Sommaire

Société Mathématique de France

Nº 175

Mot du président

Chères lectrices et lecteurs de la *Gazette*,

Je vous souhaite une riche et très bonne année 2023. L'année passée à la même époque, la SMF annonçait plusieurs initiatives d'ouverture de ses collections : l'accès libre et gratuit à nos livres parus avant 2020 de trois de nos collections, le passage en « Buy-to-Open » des ouvrages récents et l'offre d'abonnements électroniques gratuits à toutes nos revues aux universités et institutions africaines qui développent un programme de recherche en mathématiques. Nous avons tenu parole et irons plus loin en 2023. La proposition d'abonnements gratuits sera étendue au Liban et à l'Ukraine. Nous comptons sur vous pour relayer cette offre dans vos réseaux et pour plus de renseignements n'hésitez pas à nous contacter : smf@smf.emath.fr. Ces actions sont soutenues par le Fonds National pour la Science Ouverte (FNSO), l'INSMI et la Direction des Données Ouvertes de la Recherche (DDOR) du CNRS.

Le *Bulletin de la SMF* bénéficiera du modèle « Subscribe-to-Open » : une fois un certain seuil d'abonnés payants atteint, le contenu de l'année deviendra librement accessible jusqu'à la fin de l'année. C'est une expérience que nous souhaitons pérenniser mais elle dépendra du soutien que nous apporteront nos abonnés historiques en continuant à nous faire confiance. Un tel modèle économique n'est pas viable sans un fort soutien de la communauté.

La SMF a repris en 2021 la gestion administrative et financière du programme MathC2+ conventionné entre le Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, Animath et la SMF. Ce programme s'attache en particulier à accueillir des jeunes provenant de populations où les carrières scientifiques ne sont pas des destinées envisagées et où les stéréotypes de toutes natures sont autant d'obstacles à leurs projections professionnelles. Dans le même esprit des collègues d'Aix-Marseille Université ont créé les stages intitulés « Les Cigales ». Ils reprennent le format des stages MathC2+ mais sont réservés à des lycéennes. Inspirées par ces événements, et afin de faire découvrir à nos étudiantes de Licence le métier de chercheuse, la SMAI, la SFdS et la SMF vont organiser en février 2023 au CIRM un stage qui leur est dédié. Une vingtaine d'étudiantes seront accueillies et découvriront de multiples facettes du métier de chercheuse. Nous espérons ainsi installer chez ces jeunes femmes une forte motivation pour leurs études couplée à une grande variété de projections potentielles. Notre appel à candidatures a été de toute évidence très bien relayé par la communauté puisque nous avons reçu 110 demandes. Nous allons donc travailler pour que dès cette année 2023 d'autres stages puissent avoir lieu ailleurs en France pour accueillir ces étudiantes aux dossiers remarquables. Nous ferons appel à vous afin de nous y aider.

Sous l'impulsion et le dynamisme de Mélanie Guenais, notre vice-présidente Enseignement, la SMF et le collectif *Maths&Sciences* ont eu une présence médiatique inédite en 2022. Ce regroupement a produit de nombreuses analyses alertant sur différents impacts de la réforme du lycée général, comme la diminution des jeunes femmes engagées dans les filières scientifiques et, plus généralement, celle du flux d'élèves formés aux sciences. Malgré un déni affiché par de nombreuses personnes en responsabilité, elles ont été fréquemment reprises par les médias et le monde de l'entreprise. Il est désormais acquis qu'elles étaient justes. Malgré l'énorme travail de qualité réalisé, le collectif n'est toujours pas écouté par nos responsables. Des décisions concernant la réforme du lycée continuent d'être prises sans discussion avec ceux qui y ont le plus réfléchi. Le collectif *Maths&Sciences* devra trouver en 2023 une organisation permettant aux acteurs de terrains d'être plus écoutés par nos ministères tout en pérennisant une présence régulière dans les médias. Les intérêts, parfois distants, des associations le composant font que ce sera une tâche délicate.

Malgré ses 150 années d'existence, la SMF continue et continuera d'être active au bénéfice de toutes et tous. Si vous pensez que d'autres sujets devraient être traités par la SMF, rejoignez-nous. Les prochaines élections pour entrer dans notre conseil d'administration auront lieu en mai-juin 2023. C'est une belle façon d'agir et de beaux projets à mener en perspective. N'oubliez pas d'adhérer.

Prenez soin de vous et de vos proches.

Le 2 janvier 2023

Fabien Durand, président de la SMF

Pour le bicentenaire de la parution de la Théorie analytique de la chaleur L'offre d'analyse de Fourier

• J. Dhombres

La vie de Fourier (1768-1830) peut se lire comme un roman d'aventure : l'orphelin à l'âge de 10 ans devient moine bénédictin qui est libéré de ses vœux si on peut le dire ainsi par la Révolution en 1789, puis acteur de la Terreur en 1793 dans sa ville natale d'Auxerre, professeur d'analyse à l'École polytechnique fin 1795 alors qu'il n'a encore rien publié, séjournant en Égypte avant 1800, puis préfet de l'Empire jusqu'en 1814, maintenu par Louis XVIII et pourtant devenu préfet du Rhône pendant les Cent Jours, puis démis avant Waterloo pour résistance aux ordres venus de Paris d'organiser une répression à Lyon. Sa vie scientifique n'est pas moins contrastée, avec une implication très sérieuse trois années à partir de la fin 1804, lorsqu'il a atteint déjà l'âge de trente-cinq ans, et une sorte de mise en forme après 1817. S'il termine sa carrière comme secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, n'ayant jamais repris l'enseignement abandonné en 1798, sa Théorie analytique rédigée en manuscrit en 1807 prendra quinze ans pour être publiée, par suite de diverses oppositions dont celle de Joseph Louis Lagrange et de Siméon Denis Poisson. Avant d'être reconnu par les mathématiciens qui aujourd'hui parlent d'analyse de Fourier, ce sont les physiciens qui firent d'abord sa postérité, et les climatologues le retrouvent aujourd'hui à l'origine de l'effet de serre. C'est encore un philosophe comme Auguste Comte qui le célébra dans son *Cours de philosophie positive* de 1830. De nombreux historiens ont tenu, peut-être en raison de publics différents qu'ils visaient, à séparer les différents côtés de cette vie. On sépara donc l'orphelin à l'âge de 10 ans de son milieu commerçant et citadin porté vers l'éducation qui permettait l'ascension bourgeoise en cette fin d'Ancien Régime français ; on sépara le scientifique de l'homme d'action et d'administration qu'il fut comme préfet de Grenoble alors qu'à ce moment il donnait le meilleur de sa production intellectuelle, tout comme on sépara fortement le physicien du mathématicien. On traita aussi comme s'il s'agissait d'une parenthèse médiocre son professorat d'analyse à l'École polytechnique à partir de la fin 1795, voire on présenta comme anecdotique sa direction d'un voyage d'exploration d'antiquités en Haute Égypte, et son influence sur le jeune Champollion jusqu'au fameux déchiffrement à partir de la pierre de Rosette reçue en août en 1799 au Caire par le secrétaire qu'il était de l'Institut d'Égypte. Le plus grave peut-être a été d'accréditer la thèse qui plaît trop aux partisans de l'uni-disciplinaire : Fourier aurait regretté de s'être laissé distraire par moments d'une vie qui aurait dû être toute consacrée à la science. Et certains vont jusqu'à ranger les seules mathématiques sous le mot science [1]. Ne manquent pourtant pas les matériaux d'archives sans lesquels toute histoire est bancale : il y a des dizaines de volumes de ses manuscrits, et quelques inédits encore, dont ses cours à l'École polytechnique, même si l'essentiel de ce qui a permis la *Théorie analytique de la chaleur* a été publié par Ivor Grattan-Guinness en 1972, et une correspondance scientifique fut rendue disponible par John Herivel en 1980. Ce sont deux Britanniques, faut-il ici souligner, car les Français ont été bien plus modestes en dehors des éloges académiques comme celui d'Arago, publié en 1831, repris en 1854. Le très regretté Jean-Pierre Kahane avait bien raison de parler d'un « retour de Fourier » à la fin du xx^e siècle ; je préfère toutefois mettre un pluriel pour évoquer

1. Ainsi Emmanuel Kant assurait en 1786 dans ses *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (*Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*) qu'il n'y avait à proprement parler de science qu'en autant elle serait mise en mathématiques.

des retours [2]. Car si sa théorie analytique ne passa pas inaperçue de quelques-uns en 1807, la publication en 1822 constitue un retour sur la scène de la renommée, sanctionnée cette même année par son accession au poste prestigieux de secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. On peut de même constater des dizaines d'années plus tard qu'il y a eu retour sur la scène mathématique lorsque Hilbert nomma les coefficients de Fourier généralisés à propos des espaces de fonctions L^2 au début du xxe siècle, ou encore von Neumann en 1932 pour les espaces devenus par lui espaces de Hilbert dans les *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Fait donc contraste le fait qu'au xixe siècle ce furent surtout les physiciens, acousticiens notamment, qui célébraient Fourier. Est symbolique le fait que la publication des *Œuvres de Fourier* sous la direction de Gaston Darboux à partir de 1888 signale bien plus une défiance envers les façons mathématiques de Fourier que son sens de l'invention. Le retour sera dû à Henri Lebesgue et ses *Leçons sur les séries trigonométriques* de 1906 faisant usage de l'intégrale éponyme qui permettait une bonne notion de convergence. Retour encore lorsque l'on crédite aujourd'hui Fourier de la découverte de l'effet de serre, non par expérimentation, mais par déduction en raison de sa façon de procéder pour l'étude des solutions de l'équation de la chaleur dans une sphère et un environnement atmosphérique. Preuve encore de vitalité, les retours aussi bien sont discutés, notamment avec la théorie des ondelettes que quelques auteurs, comme Yves Meyer, font à nouveau pencher vers la physique. Enfin, un retour est rarement signalé. Fourier, qui a été célébré par Auguste Comte en 1830 comme le savant mettant en œuvre le positivisme, ne perd pas aujourd'hui sa place en épistémologie, malgré une critique [3] qui ne fut pas quelconque par le philosophe Gaston Bachelard en 1928.

Mon objectif et mes précautions

Il n'est pas dans mon intention, dans la *Gazette*, de revenir sur cette vie qui a même eu les honneurs d'une BD, et peut-être verra un film, ni d'ailleurs de reprendre en détail son œuvre de physique mathématique, même si tous les mathématiciens disent sans aucune gêne que Fourier est à l'origine des séries et des intégrales éponymes, sans oser affirmer qu'il les a vraiment inventées, ni d'ailleurs savoir préciser quand une telle dénomination s'est installée. Autant d'emblée reprendre ici une conclusion dressée par Fourier pour une fonction 2π-périodique dans la table des matières de sa *Théorie analytique* de 1822 (§231-233), qui ne surprendra un lecteur d'aujourd'hui que si je précise que Fourier est effectivement l'inventeur de la notation des bornes d'intégration.

231-233. Une fonction quelconque $F(x)$ peut être développée sous cette forme :

$$F(x) = A + \begin{cases} a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + \ldots \\ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \ldots . \end{cases}$$

Chacun des coefficients est une intégrale définie. On a en général

$$2\pi A = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx, \qquad \pi a_i = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos ix\,dx, \qquad \pi b_i = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin ix\,dx.$$

On forme ainsi ce théorème général, qui est un des éléments principaux de notre analyse :

$$2\pi F(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \left(\cos ix \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos i\alpha\,d\alpha + \sin ix \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \sin i\alpha\,d\alpha \right)$$

ou

$$2\pi F(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos i(x - \alpha)\,d\alpha. \qquad 224$$

2. Pour éviter autant que possible les notes, j'ai placé en fin de texte une bibliographie commentée sur la *Théorie analytique*. Les phrases de Fourier sont toutes référées, même pour les documents manuscrits. En dehors de notes précises de référence, je n'ai pas donné de commentaire bibliographique tant sur d'autres sujets scientifiques que sur des considérations philosophiques.

3. Gaston Bachelard soutenait comme seconde thèse pour le doctorat de philosophie une *Étude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides*, publiée par Vrin en 1928, dans lequel s'il donnait une grande place à Fourier et à sa célébration par Auguste Comte, n'en faisait pas moins ressortir l'insuffisance physique de cette mathématisation, ne tenant pas compte de la non-isotropie par exemple des matériaux dans lesquels se déploie la chaleur.

Beaucoup savent aussi que ces séries et intégrales sont venues à l'occasion d'un problème que Fourier dénommait propagation de la chaleur et qu'il gérait par au moins une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, et que la physique actuelle rassemble sous la dénomination plus générale de phénomènes de diffusion. La désignation mathématique reste tributaire de cette origine physique puisque l'on parle d'équation de la chaleur.

Mon article se veut donc placé sous le signe du bicentenaire de la publication de la *Théorie analytique de la chaleur*, et sur un retour au moins bidisciplinaire, puisque dans le titre de l'ouvrage l'expression « théorie analytique » fait se combiner les mathématiques à la chaleur qui indique la physique. Je devais certes parler en premier d'une invention particulière de Fourier, celle du flux de chaleur au travers d'une surface infinitésimale, et son expression en dérivée partielle par rapport au temps de la température. Je ne le ferai pas, me contentant de citer en bibliographie quelques références. Car j'ai un objectif dont les épistémologues et les historiens se méfient en général, habités qu'ils sont par une idée de progrès linéaire, mais que les historiens de l'art sont plus habiles à faire vivre : j'entends parler de ce dont Joseph Fourier estimait être le garant, et c'est ce que j'appelle son offre scientifique. Si je protège ainsi l'histoire contrastée de la postérité de Fourier, compte tenu de la place accordée aux idées du savant, je circonscris mon propos et ne vais parler que de son offre en analyse mathématique, tout en soulignant que dans cette offre il serait malvenu de ne pas inclure de la physique. Ce double jeu est un défi auquel je réponds en discutant le rôle original donné par Fourier à une démarche de type expérimental. En parlant d'offre, un terme inhabituel en histoire des sciences, je ne vise pas sa possible vision globale des mathématiques pratiques au sens où Comte l'entendrait, ou l'exhaustivité d'un parcours de ses démonstrations ou tentatives, qu'elles soient réussies ou non. Je ne cherche pas nécessairement à dire ce qui ferait de Fourier notre contemporain, mais plutôt à dire ce en quoi il différait de ses contemporains, qui n'étaient certes pas de petites pointures, comme ses aînés Lagrange ou Laplace, mais aussi bien de plus jeunes comme Cauchy et Gauss. C'est aussi en cela que je peux parler d'offre. Comme avec de telles comparaisons on se débarrasse difficilement de biais quelquefois nationalistes, ou tout simplement d'empathie, et de jugements de valeur qui font l'histoire sanctionnée comme le dit si bien Gaston Bachelard [4], je précise encore quelques-unes de mes précautions dans le présent article qui se veut aussi peu technique que possible, quoique en étant précis. D'abord, alors que j'ai passé beaucoup de temps ces dernières années avec les textes et les manuscrits de Fourier, je ne prétends pas que ce que je tente d'expliquer aussi clairement que possible se déduise *ipso facto* de tous ses écrits ; ce qui est ma propre construction provient d'une certaine manière que je vois se dessiner dans quelques entreprises de Fourier. Je ne pourrais donc détailler, et étayer en citant précisément Fourier, que quelques points seulement. Ensuite, je ne prétends pas donner une genèse de sa pensée, tant je suis sûr que ses manuscrits, si souvent raturés, ne sont pas d'une seule venue et que si Fourier prétend donner l'histoire de sa pensée, c'est au sens d'une histoire rationalisée, pas trop éloignée de ce que dit Bachelard, à ceci près que Fourier se sert de son récit pour inventer. Il n'hésite donc pas à répéter des choses qu'il peut juger *a posteriori* comme redondantes ou constituant d'inutiles détours. L'aspect littéraire des écrits de Fourier est indéniable, qui est un contemporain de Stendhal, mais aussi de Laplace qui fut comme Fourier de l'Académie française. Fourier, il faut aussi le dire, a la fibre philosophique et il n'a pas hésité à citer favorablement Aristote, auteur peu prisé au temps des Lumières, dans sa première publication portant sur la démonstration du principe des vitesses virtuelles. Enfin, en signalant d'autres mathématiciens, je ne peux pas entrer dans une analyse profonde, mais vais utiliser des conflits avérés de Fourier, avec Lagrange, et avec Poisson. Il y en a de plus feutrés avec Laplace, comme avec Gaspard Riche de Prony, mais les évoquer en détail prendrait trop de temps. Même si, paradoxalement, je dois tenir compte d'un double fait social : Fourier fut lié à un nombre considérable de personnages de son temps de tous bords, dont des militaires pour cet homme éminemment civil, sans pour autant perdre sa représentation d'esprit issu des Lumières et portant, sans nostalgie toutefois mais avec un sens de l'histoire et des situations, une militance révolutionnaire, notamment dans le domaine religieux par lequel il débuta. Le confirment ses élections faciles à l'Académie des sciences et à l'Académie française

4. L'épistémologue Gaston Bachelard constate que l'histoire des sciences ne saurait être neutre, devant en effet tenir compte du progrès : le résultat est ce qu'il appelle l'histoire sanctionnée ou jugée. Il l'explique notamment avec force dans son livre *L'engagement rationaliste* dont une édition est parue aux PUF en 1972.

où il y avait un monde réactionnaire, qui permet de comprendre l'opposition première de Louis XVIII à l'élection à la première académie citée, ou les moqueries d'un Chateaubriand comme celles d'un jeune Victor Hugo sur « l'algébriste » qui mépriserait la sensibilité humaine sur les choses selon le vieil argument anti-mathématique. Ce qui ne manque pas de sel pour quelqu'un qui fut à part égale un physicien proche de l'expérimentation. Bref Fourier colle à la société de son temps [5], et sait parler à beaucoup jusqu'à la parodie quelquefois un peu solennelle, sans pourtant perdre son originalité et un ton de jovialité.

Les conséquences de l'expérience de pensée de la lame

Ayant listé ce qui peut paraître comme des excuses à ne pas être plus disert, je peux aller à l'essentiel que je nomme comme une « expérience de pensée », en francisant l'expression (*Denkexperiment*) que l'épistémologue et médecin Ludwick Fleck adoptait sans trop de succès dans les années 1930, et qui a occupé les historiens et philosophes des sciences autour de l'idée de révolution scientifique depuis qu'on l'a repérée chez un auteur comme Galilée. Elle constitue une sorte d'imagination inventive, pour laquelle l'expérimentation pratique n'est pas possible, mais est pourtant susceptible d'un calcul. C'est une mathématisation qui n'est pas une modélisation ; c'est une machinerie intellectuelle destinée, si possible, à fabriquer des concepts. Il s'agit pour Fourier de trouver les répartitions convenables de la température à la base d'une lame métallique placée verticalement et dont l'épaisseur ne joue pas, infinie en longueur, parvenue à un équilibre thermique lorsque les côtés verticaux sont maintenus à une température constante nulle, qui reproduisent de façon homothétique au long de toute cette lame les valeurs de température de la base. De cette expérience de pensée, Fourier a déduit une conséquence physique majeure : la chaleur se propage selon une combinaison linéaire infinie de ce qu'il désigne comme des « modes propres », justement les répartitions qu'il a trouvées au terme de l'expérience de pensée de la lame. Autant le citer dès 1807, lorsqu'il exprime avec netteté la réalité et donc l'existence physique de ces modes : ils ne sont pas le résultat abstrait d'un exercice mathématique auquel ils resteraient attachés, offrent certes aux mathématiques un nouveau sujet d'extension, mais ont une signification phénoménale qui est d'exprimer sinon la nature même de la chaleur, du moins sa forme, et du coup ce à quoi elle peut être analogue, non par intuition ou décret, mais par preuve scientifique. Sa description reste d'abord liée à la lame.

> La chaleur se meut uniformément par ondes perpendiculaires à la longueur de la lame, et en même temps par ondes parallèles à cette longueur. Les premières parcourent toute la lame en s'éloignant du foyer. Les ondes parallèles aux côtés s'éloignent de part et d'autre du milieu de la lame, en sorte que les deux dernières d'entre elles se perdent de chaque côté dans les corps environnants. [6]

Tel devient le « moteur » du chapitre III de la *Théorie analytique* de 1822, et il court de la page 141 jusqu'à la page 238, où elle est finalement résolue en quelques lignes. Nous fixons dans le marbre de l'histoire des sciences ce que je viens de présenter succinctement comme étant la découverte des séries de Fourier, décrite ci-dessus avec l'extrait en premier de la *Théorie analytique de la chaleur* ; il ne s'agit surtout pas de le nier, mais de saisir comment l'adjectif « propre », associé à « mode », donc à une façon d'être, peut avoir modifié l'ontologie savante, et les rapports de la science mathématique aux sciences de la nature comme on disait à son époque. Je veux tout de suite dire l'opposition ferme de Poisson, qui ne diminuera jamais, à cette idée d'un aspect « naturel » des modes propres. Censé « présenter au public » les travaux de Fourier, travaillant donc à partir du long mémoire manuscrit de Fourier déposé à l'Institut fin 1807, dans un article qui paraît dès mars 1808, Poisson donne une large part à cette démarche pour la critiquer. Il en

5. C'est ici que je dois donner un minimum de références pour justement parler de l'esprit d'un temps, en liaison avec les mathématiques. J'en choisis trois seulement : Jean et Nicole Dhombres, *Naissance d'un nouveau pouvoir, sciences et savants en France (1793-1824)*, Payot, 1989 ; Ivor Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics : 1800-1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Bâle, Birkhaüser Verlag, 1990 ; Christian Gilain et Alexandre Guilbaud, *Sciences mathématiques 1750-1850. Continuités et ruptures*, cnrs Éditions, 2015.

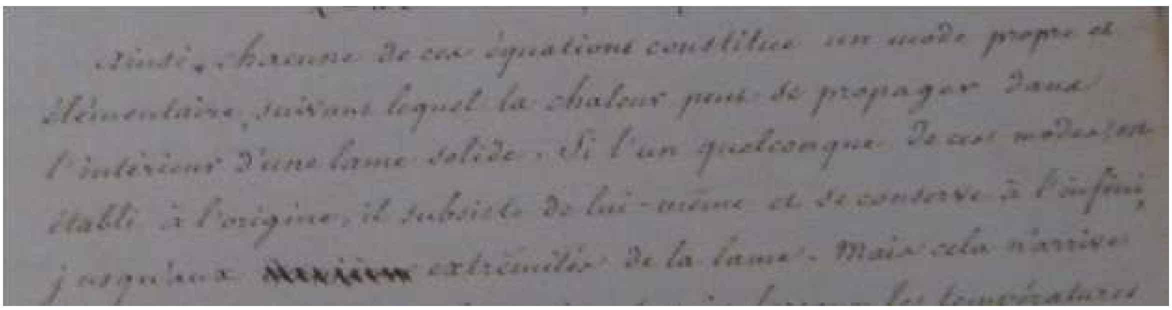
6. Cela se trouve au folio 84 du Ms 1851 des archives de l'École des Ponts et Chaussées, et à la page 180 de l'édition commentée du manuscrit de 1807 par Grattan-Guinness et Ravetz sortie en 1972. Voir en fin d'article les orientations bibliographiques pour plus de détail.

parle comme d'une « hypothèse purement mathématique qui ne saurait avoir lieu dans la nature »[7], et il assure que lui-même peut bien mieux rendre compte des « procédés d'Analyse » employés par Fourier en se débarrassant de cette fiction. Il a pourtant compris la façon mathématique dont Fourier s'y prend sur ce problème, mais n'a pas saisi l'enjeu de science, à savoir comment le concept que Fourier appelle d'abord les « modes simples », est celui qui lui permet de parler d'un phénomène ondulatoire et dissipatif. Fourier qualifie lui-même sa « question » sur la lame : elle est « en quelque sorte rationnelle, puisqu'on n'a point égard à l'épaisseur de la lame et à la déperdition de la chaleur qui s'opère à la surface » (c'est au folio 85 de ce manuscrit) : telle est sa manière d'évoquer une « expérience de pensée », mais aussi une façon de donner à la qualification analytique de sa théorie son poids de véritable construction, s'opposant frontalement à la conception kantienne d'une intuition synthétique *a priori*[8]. Dans le même mouvement – un geste épistémologique fort, – il affirme la réalité de ces modes, qui est un garant de vérité de type aristotélicien. En 1822, expression ultime de son long travail sur la chaleur, Fourier commente encore la forme des solutions obtenues en termes trigonométriques dans le cas paradigmatique de la lame : elles sont, dit-il, « nécessaires », et c'est bien un vocabulaire aristotélicien (en son §191). Pour les désigner, avec la lame repérée par des axes en x et en y, les y étant mis en horizontale, et les x positifs désignant la partie verticale de la lame, les « modes simples » de la chaleur apparaissent comme le produit d'une exponentielle décroissante par un sinus.

> On voit donc que les valeurs particulières
>
> $$ae^{x}\cos y, be^{-3x}\cos 3y, ce^{-5x}\cos 5y, \cdots$$
>
> prennent leur origine dans la question physique elle-même et ont une relation nécessaire avec les phénomènes de la chaleur. Chacune d'elle exprime un mode simple suivant lequel la chaleur s'établit et se propage dans la lame rectangulaire, dont les côtés infinis conservent une température constante. Le système général des températures se compose toujours d'une multitude de systèmes simples, et l'expression de leur somme n'a d'arbitraire que les coefficients $a, b, c, d, \ldots$ (p. 172 de l'édition dans les Œuvres, au tome I, §191)

En 1807, sans dessiner de figure, il avait décidé de les appeler « modes propres », un nom destiné à une grande postérité, trop rarement attribuée à Fourier et que nous continuons de mettre entre guillemets pour bien lui en garder la paternité. Lui-même explique en 1807 la raison de ce vocabulaire.

> Ainsi chacune de ces équations constitue un mode propre ou élémentaire, suivant lequel la chaleur peut se propager dans l'intérieur d'une lame solide. Si l'un quelconque de ces modes est établi à l'origine, il subsiste de lui-même et se conserve à l'infini, jusqu'aux extrémités de la lame (p. 65, correspondant au n° 37, et p. 143 de l'édition imprimée du manuscrit).

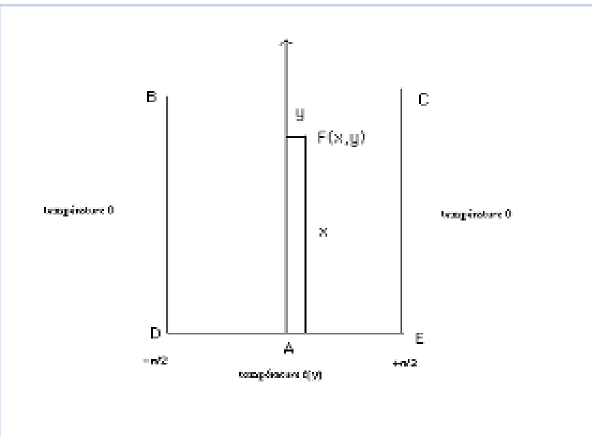

Ainsi, chacune de ces équations constitue un mode propre et
élémentaire, suivant lequel la chaleur peut se propager dans
l'intérieur d'une lame solide. Si l'un quelconque de ces modes est
établi à l'origine, il subsiste de lui-même et se conserve à l'infini
jusqu'aux extrémités de la lame. Mais cela n'arrive

7. La critique en quatre pages de Poisson, sortie en mars 1808 avant toute publication de Fourier, est reproduite au deuxième et dernier tome de *Œuvres de Fourier*, p. 213-221.

8. Le philosophe Emmanuel Kant, dont Fourier a pu avoir un aperçu de la théorie de la connaissance, a inventé un type de jugement qui n'est ni analytique, ni *a posteriori* en raison de l'expérimentation, mais bien synthétique et *a priori*, faisant jouer l'intuition pure. Celle-ci ne peut pas rendre compte de l'expérience de pensée de la lame.

La mise en équations de la lame

Si j'ai listé des conséquences, on ne peut comprendre le calcul fait sans entrer dans une des figurations que cet analyste assumé donne avec parcimonie. Elle est la figure 7 au §163 de la *Théorie analytique* dans la version de 1822, reprise ci-après avec quelques ajouts de repérage. Fourier envisage la traversée d'une lame rectangulaire $BDEC$ par la chaleur venant par DE : le problème est mathématiquement plan, réglé par deux variables d'espace seulement, x et y, puisque l'épaisseur est omise. La physique ne peut pas imaginer une barre de profondeur suffisamment grande dont les deux côtés latéraux BD et CE seraient maintenus à une température fixe, car il faudrait dire le comportement de la chaleur dans cette épaisseur et il faut donc cette absence de profondeur ; par ailleurs la température de la glace fondante est choisie par Fourier pour faire l'image d'un bloc isolant la lame plane, au point de faire disparaître l'inévitable dilatation que cette lame devrait normalement éprouver si elle était réelle. L'impossible rigidité physique de la lame est un incontournable de sa manière de faire, mais le 0° de la glace fondante va prendre une valeur mathématique, car liée à l'unicité d'une solution. Le jeu sur le zéro mathématique et le zéro physique est un des ingrédients de la fiction imaginée par Fourier. Une autre fiction va être l'idée d'un régime permanent, au bout d'un certain temps, donc la conception d'une unique solution.



Par contraste avec la coercition latérale, en bas de la lame règne la liberté d'imagination de l'expérimentateur mathématicien : imposer une fonction numérique quelconque, c'est-à-dire une ordonnance de valeurs sur l'intervalle DE, mais sur cet intervalle seulement parcouru par la variable y, donc une fonction numérique $f(y)$. Courant selon l'arête médiane orientée de la lame, la variable x mesure l'éloignement à la source de chaleur. Fourier est sans doute le premier auteur à insister sur le domaine de définition d'une fonction, donc à restreindre le concept même à la donnée d'un domaine. Le choix des bornes en D et E, avec l'intervention du nombre π est une facilité de mathématicien pour l'expression des « modes propres », mais il n'y aurait aucune difficulté à prendre à la place une longueur quelconque. Il faut noter les deux conditions aux limites portant sur y (limitation à l'intervalle entre $-\pi/2$ et $\pi/2$) et sur x (limitation aux valeurs positives). Parce que cela correspond à une étape de l'analyse, le temps n'intervient pas : le régime est présupposé permanent ; une stationnarité de la température est établie entre le moufle de glace entourant la lame, et la donne d'une répartition chauffante à sa base qui est fournie par la fonction f. On remarquera combien le vocabulaire physique s'impose alors même que la lame est une fiction. La température en tout point de la lame est ainsi une fonction F des seules variables d'espace, x et y : elle est l'inconnue et l'objet qui est recherché est d'avance nommé comme en toute bonne analyse. Pour la déterminer, Fourier établit par la pensée, sans calcul, une relation entre ces deux fonctions, la fonction $f(y)$ en bas de lame qui est le donné, et la fonction $F(x,y)$ qui est la température dans la lame. La relation entre f et F existe physiquement – un seul régime s'établit en effet et il y a d'ailleurs une sorte de démonstration physique de cette unicité par Fourier. La démonstration remonte au modèle physique des échanges de chaleur entre « molécules ». Une démonstration analytique de cette unicité, dans ces conditions aux limites, sera donnée après la disparition de Fourier, faisant jouer le carré de la température, à titre d'analogue d'une énergie. Mais, pour les mathématiques, Fourier n'avance pas une preuve d'unicité ; elle serait redondante avec celle de la physique. C'est signaler encore qu'il ne pense pas en termes de déduction axiomatique : il expérimente. Grâce à ce qu'il a établi avec le flux et l'analyse de la propagation de la chaleur, à l'intérieur de la lame, la fonction F est tout à la fois solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qui se trouve être la nullité du laplacien, à savoir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

De façon symptomatique toutes les constantes physiques de conduction ou de nature du matériau solide ont disparu ! Une solution pour la lame vérifie en plus les trois conditions suivantes, pour tout $x > 0$, et pour y strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

$$F(x,-\frac{\pi}{2}) - F(x,+\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$F(0,y) = f(y), \lim F(x,y) = 0 \quad \text{lorsque } \lim x = \infty.$$

L'association indissoluble des conditions aux limites à l'équation même du laplacien est une des innovations de Fourier, et elle lui a facilité l'appréhension de la correspondance de f à F. Du même coup, Fourier contribue à la transformation en cours, initiée par la controverse des cordes vibrantes, du concept de fonction numérique [9]. Ceci participe bien sûr de la constitution de l'Analyse. Que Fourier y contribue n'est pas un hasard : cela fait partie de son projet scientifique comme l'explicitera admirablement le *Discours préliminaire* à la Théorie analytique de 1822. Mais son Analyse ne se limite pas au Calcul différentiel et intégral et à la sommation des séries, pas plus qu'aux fonctions continues : nous ne tarderons pas à le voir faire appel aux fonctions « arbitraires ». Un « mode propre » est alors une fonction numérique f, température mise à la base de la lame, qui redonne la même fonction, à un facteur multiplicatif près, comme trace de F sur un segment horizontal quelconque. Ainsi, si l'on pose $\cos 11y$ pour la fonction $f(y)$, pour les valeurs de y entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (en inégalités non strictes), l'expression de $F(x,y)$ devient égale à $\lambda f(y) = \lambda \cos 11y$, où $\lambda = e^{-11x}$. On aura compris que les bornes de l'intervalle sur lequel f est définie en y ont été choisies de manière à faire aisément paraître les cosinus pour des valeurs impaires de l'entier multiple de y. Ce cosinus est bien un « mode propre » : le caractère oscillant de la fonction f est exactement maintenu pour F en la variable y. Mais Fourier ne présente pas les choses ainsi : la nature de sa démarche est en quelque sorte de tenter des coups, ou d'expérimenter avec les mathématiques, pour en tirer non pas une conséquence logiquement établie, mais une propriété structurelle. Voici sa manière de fonctionner, qui permet le passage de « modes simples », qui sont juste une astuce de calcul, aux « modes propres » qui ont valeur de réalité, ou de naturalité.

D'un calcul astucieux à la lame comme opérateur fonctionnel

On dispose, de la main même de Fourier (alors que nombre de ses manuscrits ont été remis au propre par un copiste) du calcul qu'il fait pour obtenir des solutions particulières du laplacien dans le cas de la lame (manuscrit de 1807, folio 60, et p. 137 de la version imprimée). Il déclare chercher d'abord les « fonctions de x et y les plus simples » satisfaisant à la nullité du laplacien de la fonction z, la température en un point de la lame, ce qui était noté plus haut $F(x,y)$. Cette simplicité ici consiste à prendre un produit $z(x,y) = F(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, et selon un procédé bien connu au XVIII^e^ siècle avec D'Alembert notamment pour l'équation des cordes vibrantes, obtient une séparation des variables, c'est-à-dire met d'un côté ce qui dépend de la variable x et ce qui dépend de la variable y quand on prend les dérivées partielles du second ordre en x et en y.

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)} + \frac{\psi(x)}{\psi''(x)} = 0$$

De sorte que chacun des quotients de la fonction par sa dérivée seconde en chaque variable est une constante, respectivement écrite A et $-A$. Comme la fonction paire ψ en y doit s'annuler deux fois, en $\pm\pi/2$, la constante A doit être strictement positive, et les seules possibilités pour ψ sont $\cos(2n+1)x$, pour tous les nombres entiers n, dont l'entier nul. Le comportement supposé pour les grandes valeurs de x de la température donnée par la fonction f en x, limite celle-ci aux exponentielles décroissantes, l'aspect dissipatif. Ce qui donne dès lors les formes dites précédemment « modes propres » pairs :

$$e^{-(2n+1)x} \cos(2n+1)y$$

On a des ondes en la variable y, tandis que l'aspect dissipatif en x est effectivement lisible sur les fonctions exponentielles. On ne pouvait pas prévoir ce résultat du calcul, mais on peut maintenant, et Fourier n'y manque pas, interpréter la diffusion thermique à l'aide de ces « modes propres ». Il appelle cela la « route de la chaleur », et c'est bien cela qui justifie le qualificatif « propre ». À très peu près la description sera la même en 1822, et mérite d'être lue comme la première découverte de Fourier (*Théorie analytique*, édition de 1822, p. 166-167).

9. En 1747, Jean D'Alembert établit l'équation des ondes qui permet de traiter le mouvement d'une corde tenue en deux extrémités, mais se trouve embarrassé par le fait d'avoir à construire une fonction définie sur tout l'axe réel ayant certaines propriétés à partir d'un donné bien plus limité, et aboutit à un empêchement général, auquel Euler répond aussitôt. Ainsi fut lancée la question des cordes vibrantes. Un traitement ancien, assez biaisé, est dû à Clifford A. Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788*, vol. 11 des *Opera* de Leonhard Euler, Zurich, 1960, et la discussion se poursuit de nos jours, et déjà dans le livre de Grattan-Guinness précédemment mentionné.

ainsi de suite, et l'équation de la surface courbe sera

$$v = a\,e^{-x} \cdot \cos. y.$$

Si l'on coupe cette surface perpendiculairement à l'axe des y, on aura une logarithmique dont la convexité est tournée vers l'axe ; si on la coupe perpendiculairement à l'axe des x, on aura une courbe trigonométrique qui tourne sa concavité vers l'axe. Il suit de là que la fonction $\frac{d^2 v}{dx^2}$ a toujours une valeur positive, et que celle de $\frac{d^2 v}{dy^2}$ est toujours négative. Or la quantité de chaleur qu'une molécule acquiert à raison de sa place entre deux autres dans le sens des x, est proportionnelle à la valeur de $\frac{d^2 v}{dx^2}$ (art. 123) ; il s'ensuit donc que la molécule intermédiaire reçoit de celle qui la précède, dans le sens des x, plus de chaleur qu'elle n'en communique à celle qu[i] la suit. Mais, si l'on considère cette même molécule comm[e] placée entre deux autres dans le sens des y, la fonction $\frac{d^2 v}{dy^2}$ étant négative, on voit que la molécule intermédiaire communique à celle qui la suit plus de chaleur qu'elle n'en reçoit de celle qui la précède. Il arrive ainsi que l'excédent de chaleur qu'elle acquiert dans le sens des x, compense exactement ce qu'elle perd dans le sens des y, comme l'exprime l'équa-

CHAPITRE III. 167

tion $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$. On connaît ainsi la route que suit la chaleur qui sort du foyer A. Elle se propage dans le sens des x, et en même temps elle se décompose en deux parties, dont l'une se dirige vers une des arêtes, tandis que l'autre partie continue de s'éloigner de l'origine, pour être décomposée comme la précédente et ainsi de suite à l'infini. La surface que nous considérons est engendrée par la courbe trigonométrique, qui répond à la base A, et se meut perpendiculairement à l'axe des x en suivant cet axe, pendant que chacune de ses ordonnées décroît à l'infini, proportionnellement aux puissances successives d'une même fraction.

Fourier a évité l'autre famille, les $\sin 2ky$, avec k entier, en imposant la parité de f sur la base DE. Fourier l'exprime sous une forme de symétrie, comme si la fonction f faisait partie de la lame : « On supposera que la lame est partagée en deux parties égales par l'axe des x. » La lame, en vue de cette conception des « modes propres », reste l'intermédiaire de la correspondance entre f et F ; elle n'est pas seulement objectivée par une équation, elle est une forme géométrique. Comme on constate que la transformation qui fait passer de f à F, que l'on peut noter $F = P(f)$, est linéaire, on voit que les « modes propres » en f sont les fonctions f telles que $P(f)$, fonction à deux variables, est un multiple de f. Ce multiple est bien une fonction de x. En général, si l'on pose $f(y) = \cos(2n+1)y$, il vient $F(x,y) = \lambda f(y)$, avec le coefficient qui est une fonction de x :

$$e^{-(2n+1)x}.$$

L'interprétation change d'un coup car la simplicité n'est pas seulement une facilité de calcul déjà bien connue de ceux s'occupant des équations aux dérivées partielles : elle prend un sens physique, que porte le mode propre et que nous écrivons comme la résolution de $P(f) = \lambda f$. Tous ceux qui ont étudié l'algèbre linéaire, et les matrices, auront reconnu dans ce coefficient qui sert de multiple la notion de valeur propre, et dans les f, sous forme de cosinus, les vecteurs propres correspondants. Mais Fourier ne dispose pas de ces résultats désormais classiques d'algèbre linéaire, encore moins des espaces vectoriels de dimension finie auxquels cette algèbre fut d'abord restreinte : elle ne sera véritablement étendue aux espaces de dimension infinie qu'au début du XX^{e} siècle, créant alors l'Analyse fonctionnelle. On peut aussi signaler le lien avec les problèmes de Sturm-Liouville [10], venus à partir de 1836, pour lesquels le λ apparaît comme un ajout « gratuit » du mathématicien, alors qu'ici le λ, le caractère propre, est recherché en soi. Le propre tient à la chaleur bien sûr, mais aussi à la géométrie de la lame où cette chaleur se déploie. De ce fait, l'expérience impraticable de la lame dresse un projet d'envergure : estimer les modes propres dans d'autres circonstances géométriques comme une sphère, un cylindre, voire un demi-plan qui conduira plus tard à l'intégrale de Fourier. Tel devient le plan de la *Théorie analytique*, liant inéluctablement physique et géométrie analytique. On ne peut pas ici à proprement parler évoquer une offre de Fourier, puisque son livre détaille longuement les différents corps dans lesquels la chaleur se déploie, refaisant à chaque fois des calculs, comme s'il s'agissait à chaque fois de faire une expérience. Mais c'est en cela qu'il y a offre et non simple répétition : il s'agit d'inventer à chaque fois les modes propres, propres à la géométrie en jeu, en se servant des cas qui ont précédé. Autrement dit, mon compte-rendu de la fiction de la lame n'a pas été suffisamment loin : j'ai réduit l'aventure dès que j'ai trouvé ce qui paraissait mener aux séries dites de Fourier.

Il faut dépasser la limitation de la base de la lame

Pour Fourier, le caractère propre n'est pas encore complètement prouvé, car il sous-entend bien plus : les « modes propres », caractéristiques de la forme de la lame, doivent de surcroît permettre de reconstituer par addition toute fonction « arbitraire » f qui serait donnée à la base, et donc toute répartition de température (présupposée paire à ce stade, et nulle en $\pm\pi/2$). Or, en effectuant le calcul des modes propres, on n'a pas suffisamment fait attention à un point qui n'est pas d'apparence mineure : les fonctions solutions de $P(f) = \lambda f$, qui donnent la liaison de f avec F, et servent à la base, ne sont pas définies seulement sur l'intervalle d'amplitude π de cette base, qui est leur raison physique d'être, mais le calcul a prouvé qu'elles sont définies partout, sur tout l'axe réel, et de période 2π. Autrement dit, puisqu'il y a une infinité d'entiers impairs, pour répartir dans la lame une température paire donnée f à la base, on peut imaginer que la nature agirait comme s'il y avait une infinité de lames, chacune indexée par un entier impair, qu'elle superposerait pour qu'au total ce soit la somme de tous les $F_n(x,y) = e^{-(2n+1)x}\cos(2n+1)y$ qui donne la température effective de la lame. À condition toutefois de faire intervenir chaque fois un coefficient numérique convenable devant ces fonctions F_n particulières, ou états propres indexés par les entiers impairs $2n+1$ depuis l'entier 1. Le renversement de la recherche est alors brutal, puisque c'est par

10. Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre, généralisant l'équation des vibrations dont les solutions sont des sinus et des cosinus, et pour des conditions aux limites qui font intervenir deux points et non seulement un seul comme dans le cas de Cauchy, les mathématiciens Sturm et Liouville ont développé à partir de 1836 une théorie où intervient la notion de valeur propre, qui comme la théorie des séries de Fourier, trouve le cadre théorique *ad hoc* au XX^{e} siècle avec les espaces de Hilbert et leurs bases. Voir une publication récente : Vladislav Kravchenko, *Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems : A Method of Solution*, Birkhäuser, 2020. Voir aussi : Jean Dhombres, « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonctions », Archive for History of Exact Sciences, vol. 36, n° 2, 1986, p. 91-181.

la possibilité même d'un calcul de ces coefficients qu'il y va y avoir analyse de la fonction f, alors que celle-ci pouvait apparaître comme une synthèse, le résultat d'une somme infinie. Pour Fourier, ces coefficients (qui portent aujourd'hui son nom et assurent sa célébrité mondiale), existent nécessairement, et ne doivent dépendre que de la fonction f. Voici comment Fourier s'exprime en 1807, mêlant volontairement un vocabulaire physique à une expression mathématique, tout en employant les mots surprenants de « conception », ou d' « imagination », alors qu'il avait à sa disposition le vieux vocabulaire d'analyse et de synthèse dont il ne veut plus car si pour lui il n'y a là qu'analyse, c'est en un sens nouveau.

> Il faut concevoir qu'il y a autant de lames solides différentes qu'il entre de termes dans l'équation de la surface générale *(note d'aujourd'hui : il s'agit de la fonction température en x et y)*, que chacune de ces tables est échauffée séparément de la même manière que s'il n'y avait qu'un seul terme dans l'équation, que toutes ces lames demeurent superposées ; enfin que les quantités de chaleur qui affectent les points correspondants sont accumulées sur un seul. Cela posé, on peut imaginer que la chaleur qui sort à chaque instant du foyer se distribue ainsi par portions distinctes, qu'elle se propage suivant une des lois élémentaires que l'on a exposées *(note d'aujourd'hui : Fourier a décrit précisément le comportement des fonctions $F_n(x,y)$, notamment du point de vue du signe)* ; et que tous ses mouvements partiels s'accomplissent à la fois sans se troubler (p. 66, correspondant au n° 37, et p. 144 de l'édition imprimée).

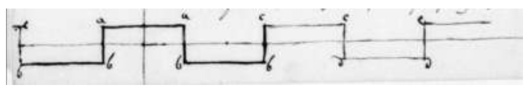
Parvenu à ce stade, il n'hésite nullement à se lancer dans le calcul des coefficients. Mais une fois de plus il le fait à titre d'une expérience à conduire. Il commence par le cas très particulier de la fonction f constante égale à 1 pour les valeurs de y strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Donc il pose un problème : déterminer les constantes a, b, c, etc., telles que pour les y convenables dits ci-dessus, on ait

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \text{etc.}$$

Naturellement le membre de droite est égal à 0 pour $y = \pm\pi/2$; ce qui correspond à la température imposée aux deux côtés latéraux de la lame. Ainsi d'emblée Fourier doit abandonner la continuité de la fonction qui est imposée au bas de la lame : on la note Y ici, valant 1 strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et 0 aux deux bornes $\pm\pi/2$. On a donc

$$Y = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d cos 7y + \text{etc.}$$

Mais il faut – le verbe « falloir » ici n'est pas usurpé – faire subir à Y une extension particulière. Objectivement le second membre n'est pas seulement défini sur le seul intervalle que représente la base de la lame, assurément une fonction périodique de période 2π. Mais ce n'est pas tout, car compte tenu des propriétés des modes propres, les fonctions cosinus, si le second membre vaut effectivement 1 entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, il vaut nécessairement -1 pour la variable y entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et entre $\pi/2$ et π. Le problème posé implique donc d'envisager une nouvelle fonction, que je note encore Y, qui porte aujourd'hui le nom évocateur de fonction créneau, devenu banal pour les électroniciens ou en théorie du signal. Elle est paire, 2π-périodique, égale à 1 entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, égale à -1 entre $-\pi$ et $-\pi/2$ et entre $\pi/2$ et π, égale à 0 aux points $-\pi$, $-\pi/2$, $\pi/2$ et π. Fourier la représente dès 1806 (*Ms 22 525, folio138v*), que je reproduis ci-dessous, et il y a beaucoup à parier qu'il est le premier à le faire.



Cette seule figure est porteuse d'histoire, mais aussi de combats. Car selon la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, livre sorti en 1797, cette courbe ne pouvait pas être une fonction : en l'occurrence la relation entre une variable et sa valeur n'était pas partout la même. Ce n'est pas rien que de s'opposer frontalement à un tel auteur, Nestor de la science européenne. Fourier reprendra ce dessin dans le manuscrit de 1807 (p. 107 bis, et p. 184 de la version imprimée), et dont la construction est généralisée dans la *Théorie analytique de la chaleur* de 1822 (correspond au n° 232, et est placée dans une planche). Dans ce dernier cas, Fourier contredit ouvertement Cauchy qui assurait qu'une série comme celle de Fourier, composée de fonctions continues, donne une somme nécessairement continue. Ce que n'est pas Y. L'offre de Fourier aux analystes est à la fois de refuser la voie algébrique de Lagrange et la voie de rigueur analytique de Cauchy. Mais pas pour les mêmes raisons. Celle de Lagrange est fausse de façon rédhibitoire car le concept de fonction y est mal défini ; celle de Cauchy est fausse par une insuffisante analyse de ce qui fait la continuité d'une fonction, bref la notion d'uniformité. Il me reste à dire ce que Fourier propose. Dans son premier manuscrit, en 1806, Fourier n'avait d'abord pas compris le jeu à mener sur la construction de la fonction Y, et encore moins ce qui faisait l'originalité des « modes propres » puisqu'ils étendent les valeurs de la fonction au-delà de ce qui était physiquement proposé à la base de la lame. C'est en particulier la preuve que sa construction n'était pas faite d'avance. On le surprend, dans le manuscrit, barrer quelques lignes écrites par un secrétaire, et de sa propre main noter le changement de signe qu'imposent les cosinus. Ce passage constructif de la *fonction créneau* est pour lui un élément décisif qui permet de parler de « mode propre ». On le présente généralement comme une facilité mathématique, mais Fourier y voit bien plus : dans la symétrie et l'extension périodique qu'il faut effectuer, il voit une imposition de la nature. Aussi brillant, et long soit son calcul des coefficients réels a, b, c, etc., tels que pour tout y réel on ait :

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \text{etc.},$$

conformément à mon programme d'explication générale, je ne vais pas le donner ici. Car Fourier a trouvé, ou repris, une remarque à laquelle il sait donner toute sa valeur physique, et qui deviendra une valeur mathématique. Il veut comprendre pourquoi un calcul si long a pu aboutir à un résultat si simple pour les valeurs des coefficients, à savoir les expressions $(-1)^n/2n+1$. On comprend donc que mon jeu de compression est loin d'être une critique de ce que fait Fourier qui prend son temps : s'il trouve un moyen de répondre à cette question de la simplicité, il aura quasi nécessairement résolu le problème général de la représentation d'une fonction f, et non seulement celui de la fonction Y.

Les « modes propres » suffisent, parce qu'ils vont jusqu'à toute fonction, et les relations d'orthogonalité sont le signe algébrique de l'indépendance des modes propres

L'affaire est réglée en bien peu de temps. Si l'on calcule en effet l'intégrale sur $-\pi < y < \pi$ du produit de deux modes propres, avec $2n+1$ et $2m+1$, on obtient 0 pour n différent de m. Pour quiconque est un peu au courant de l'intégration des fonctions trigonométriques sur une période, le calcul est quasiment évident, en linéarisant le produit des cosinus. L'interpréter comme orthogonalité en revanche est user d'un vocabulaire ultérieur ; il tient à une géométrisation de l'idée de Fourier qui se fera au début du XX[e] siècle par David Hilbert qui l'adoptera vite avec enthousiasme, l'ayant par formalisme refusée en un premier temps. L'idée d'une indépendance des « modes propres » de la lame est présente chez Fourier en raison de leur nature même de la chaleur, et est envisagée nettement par la superposition des lames, mais elle se double de la perception que chaque mode propre intervient seul : il voit comment calculer les coefficients pour une fonction paire quelconque périodique Y et de période 2π.

$$Y(x) - \sum_{n-1}^{\infty} a_n \cos(2n+1)y. \qquad (1)$$

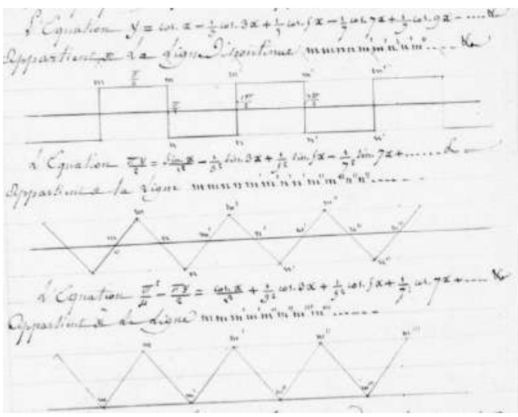
Il suffit de remarquer que le coefficient a_n se déduit du calcul de l'intégrale du produit de Y par $\cos(2n+1)y$, en effectuant le calcul de l'intégrale sur l'intervalle de longueur 2π, et sans se préoccuper du fait que l'on a une somme infinie, mais en agissant comme pouvait le faire Euler, et aussi bien Laplace, un des examinateurs du texte de Fourier :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{T} Y(y)\cos(2n+1)y\,dy. \qquad (2)$$

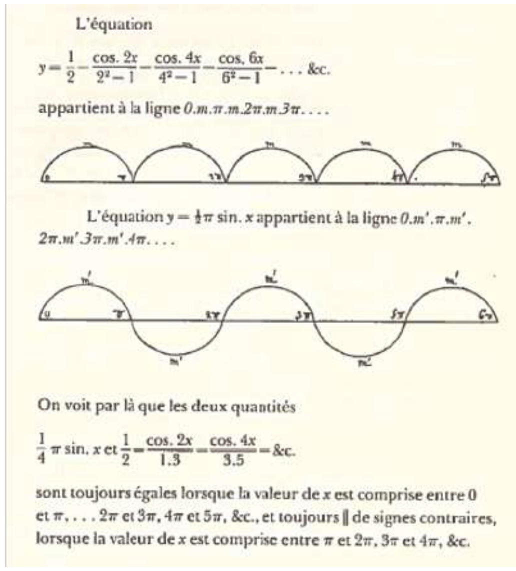
J'ai tort d'en rester aux cosinus, et dès 1806, oubliant même de préciser la périodicité 2π, Fourier dit explicitement que s'il n'est pas arrivé directement à ces relations que nous disons d'orthogonalité par « des éliminations très laborieuses »,

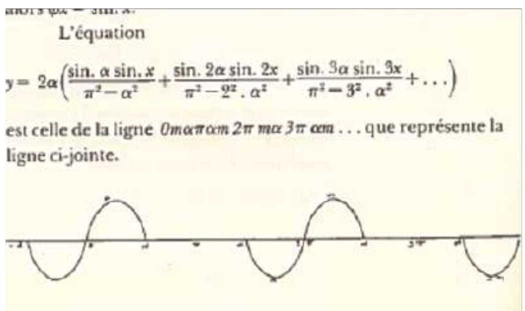
> ... j'emploie maintenant une règle beaucoup plus générale et très expéditive pour résoudre une fonction arbitraire quelconque en série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

C'est-à-dire que le calcul explicite, celui qui est donné par (2) , l'a fait passer directement de la fonction créneau à une fonction dont il nous dit qu'elle est quelconque. La comparaison des formules (2) et (1) , leur réciprocité de fait, est ce qui est vraiment l'offre analytique de Fourier. Par (2) , on analyse la fonction périodique (paire) Y et par (1), on synthétise cette fonction. Mais on le fait par un procédé de sommation sur les entiers, que l'on pourrait bien concevoir comme une intégrale, à la manière de celle qui permet d'avoir le coefficient de Fourier. Ceux qui connaissent l'intégrale de Fourier lisent aisément la même réciprocité, celle qui redonne la fonction à partir de l'intégrale de Fourier, jusque dans les constantes. L'argument que je viens de donner sera celui utilisé par Fourier lui-même, une fois qu'il aura pris conscience de l'intérêt de l'intégrale de Fourier, ce qui ne fut pas le cas au début de son travail. Et ceux qui connaissent la théorie des caractères sur les groupes abéliens localement compacts auront reconnu le jeu sur le groupe dual, le dual du groupe additif des réels modulo 1 (le tore) étant Z, qui explique la sommation (1). Pendant longtemps, y compris dans le livre de André Weil de 1940 sur l'intégration dans les groupes topologiques, le nom de Fourier ne paraissait pas majeur dans ce qui relevait de l'analyse harmonique. J'ai déjà dit le changement en « analyse de Fourier ». Lorsque dans la gradation des solides étudiés, Fourier entame l'étude du cylindre, ce sont inévitablement les fonctions de Bessel qui s'imposent à lui comme modes propres ; leur orthogonalité est bien moins triviale, mais il ne doute pas de son existence, tant il a une vision unifiée des diverses situations. C'est le fait essentiel qui instaure la généralité : les modes propres sont présents dans tous les phénomènes de propagation de la chaleur, et à ce seul titre leur dénomination serait physiquement justifiée. Mais ils sont aussi bien les harmoniques de la théorie du son, ou de celles des marées. L'harmonique devient théorie mathématique parce qu'elle est universelle ; ce n'est pas le jeu mathématique qui lui a conféré cette qualité. Fourier a éliminé tous les intermédiaires entre pensée et monde en croisant analyse et synthèse[11]. Il me suffit ici de donner quelques exemples tirés de ses manuscrits (BnF, Ms 22 525, folio 107v), ou de la *Théorie analytique* pour vérifier que Fourier joue véritablement de la richesse de sa représentation. Je passerai ensuite à un autre sujet sur la notion de fonction.



Dans le manuscrit de 1807, on a bien l'impression que Fourier joue à multiplier les dessins de fonctions tronquées sur des intervalles pour susciter l'étonnement, et donc d'avance contrer ce qu'il pressent comme une opposition de la part des milieux parisiens (texte imprimé, p 229).





La culture mathématique de Fourier sur les fonctions

C'est dans une atmosphère bien particulière, par le nombre d'auditeurs et quelques chapeaux à plumes de la représentation nationale de la Convention, qu'un 1er mars 1795 – pardon un 11 ventôse an III –, l'« instituteur » et ex-académicien des sciences Laplace (1749-1827), invente une fonction qu'il ne saurait en aucun cas calculer et en déduit presque tout aussitôt ce que l'on va appeler, mais au xixe

11. Jean Dhombres, The analysis of the synthesis of the analysis, two moments of a chiasmus, in M. Panza, M. Otte (ed.), *Analysis and Synthesis in Mathematics, History and Philosophy*, Kluwer, 1997, pp. 147-176.

siècle seulement, le « théorème fondamental de l'algèbre ». Il prouve le fait que tout polynôme à coefficients réels et de degré p non nul, possède p racines complexes, certaines pouvant être multiples. Bref, en utilisant la conjugaison dans le domaine complexe, que tout tel polynôme dont le coefficient du plus haut degré est l'unité (polynôme dit unitaire) se factorise en produits de binômes $(x+a)$ ou trinômes (x^2+ax+b) réels, où a et b sont des nombres réels. L'auditeur de cette leçon qu'est Joseph Fourier est fasciné. Il n'est pas sûr qu'il ait tout bien saisi. Mais un an plus tard, nommé professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Fourier présente ce résultat, à sa propre façon qui simplifie, mais aussi explique pour des élèves. L'affaire paraît peu maniable simplement car l'hypothèse de base est qu'il existe une racine réelle pour tout polynôme de degré impair : cette hypothèse paraît moins liée à une fonction que fondatrice de ce que serait un nombre réel, indissolublement liée à l'idée de continu. L'autre hypothèse, pensée par Descartes dès 1637 dans un de ses « essais » accompagnant le *Discours de la méthode*, est que pour tout tel polynôme P de degré p, il existe p racines (comptées selon les multiplicités), ces racines se comportant avec les nombres réels selon les seules propriétés algébriques d'un corps. Bref, en nos termes, que les racines appartiennent à un sur-corps de $\mathbb{R}$. Nous savons bien le faire, moyennant l'axiome du choix, comme Emmy Noether le prouva en établissant plus généralement l'extension à partir de polynômes sur un anneau [12]. Évidemment, il suffit de montrer que pour un polynôme unitaire P de degré pair, il existe deux racines, disons a et b, telles que $a+b$ et ab soient des nombres réels. Car, en ce cas, le trinôme réel $x^2-(a+b)x+ab$ peut être mis en facteur dans P. Une idée, due à Lagrange dans les années 1770, est d'envisager un polynôme Q, associé à P, dont toutes les racines seraient de la forme $a+b+ab$ où a et b parcourent les couples (a,b) de racines de P. Autrement dit de poser Q comme le produit de tous les binômes formellement distincts $x-(a+b+ab)$. Comme ce binôme est invariant si l'on échange a et b, il est clair par un calcul élémentaire sur les combinaisons, que le degré de Q est $q=p(p-1)/2$, lorsque p désigne le degré de P. On semble avoir perdu en simplicité sur le degré, sauf si l'on remarque la division par 2. Ainsi, si p est de la forme $2k$, avec k impair (on dit que n est impairement pair), q est nécessairement un nombre impair. Par conséquent, sous cette première hypothèse sur p, le polynôme associé Q est de degré impair ; il possède donc une racine réelle, donc de la forme $a+b+ab$ pour deux racines convenables, disons encore a et b, de P. Bref on a trouvé un cas réel pour une forme $a+b+ab$. Du moins si l'on a bien pris la précaution de montrer que Q, un polynôme unitaire, est lui aussi à coefficients réels. Or ceci provient d'un beau résultat obtenu par le même Lagrange : une forme algébrique symétrique de p quantités a, b, c, etc., s'exprime algébriquement à partir des p formes symétriques élémentaires de ces mêmes quantités. Comme chacun des coefficients de Q est une forme symétrique de p quantités, donc s'exprime algébriquement à partir des formes symétriques élémentaires de ces mêmes quantités, lesquelles ne sont autres que les coefficients de P, la réalité des coefficients de P est acquise. Fourier admire ce lien fait avec un autre de ses professeurs, Lagrange. Mais le résultat obtenu par ce dernier ne suffit pas pour la preuve cherchée. L'idée lancée par Laplace [13] en 1795 devant ses élèves de l'École normale de l'an III, est d'introduire un paramètre réel, z, et de considérer les formes $a+b+zab$. De la même façon que précédemment, il existe forcément pour chaque z une racine a, et une racine b, de P, telles que $a+b+zab$ soit un nombre réel. Une notation est d'écrire qu'on sait qu'existe pour chaque z un couple (a_z,b_z) de racines de P et $a_z+b_z+za_zb_z$ est réel. Soit l'existence d'une fonction f de la variable z et $f(z)=(a_z,b_z)$. Cette fonction est définie sur l'ensemble des z réels, à valeurs dans la famille des couples de racines de P ; mais si son existence est assurée elle n'est pas calculée. C'est effectivement une application avant la lettre de la définition d'une fonction de E dans F par Cantor, comme point du produit F^E. Mais voilà un premier théorème général utilisé sur une telle fonction : elle ne saurait être injective. Puisque la flèche va d'un ensemble infini, l'ensemble des z, à un ensemble fini, les couples de racines de P où joue le nombre p, degré de P, qui est borne supérieure du nombre de racines si on les cherche dans un corps.

12. Voir le chapitre de Emil Netto et Raymond Le Vavasseur sur le théorème fondamental, dans le volume algèbre, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Paris, Gauthier-Villars, t. I, vol. 2, fasc. 1, Les fonctions rationnelles, 1907, p. 189-205. Voir aussi, Jean Dhombres, Nationale Bedingungen mathematischer Kultur in Deutschland und Frankreich um 1900, in L. Jordan, B. Kôrtlander, *Nationale Grenzen und internationaler Austausch*, Communicatio, Bd 10, Max Niemeyer Verlag, Tübingen, 1995, pp. 312-333.

13. Leçon de Laplace du 11 ventôse an III « aux Écoles normales », leçons publiées sous forme de pamphlets en 1795, reproduit dans Jean Dhombres (dir.), *L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge*, Paris, Dunod, 1992, désormais disponible aux Editions Rue d'Ulm, p. 79.

Ainsi, il existe deux z distincts, z' et z'', et simultanément avec $a = a_{z'} = a_{z''}$, $b = b_{z'} = b_{z''}$, les deux expressions $a_{z'}+b_{z'}+z'a_{z'}b_{z'}$ et $a_{z''}+b_{z''}+z''a_{z''}b_{z''}$, ou plutôt $a+b+z'ab$ et $a+b+z''ab$, sont des racines réelles de Q. On a obtenu ce qu'il fallait trouver, à savoir en combinant, que les combinaisons $a+b$ et ab sont réelles, et par conséquent, résultat sur le second degré, les racines a et b le sont. Si ceci a été démontré pour le seul cas de p impairement pair, le passage à un pair quelconque se fait par récurrence sur l'écriture $p = 2^l p'$, où p′ est impair. Car dans ces conditions l'expression $p(p-1)/2$ a un exposant l diminué d'une unité. La seule différence avec la conduite du raisonnement dans le cas p impairement pair, est cette fois que l'on ne doit pas prendre le corps des réels, mais le corps des complexes. Ce que n'ose pas faire Laplace en 1795, qui se complique la vie en devant faire appel aux formules de Cardan sur le quatrième degré. Alors que le professeur Fourier passe aux complexes. Fourier joue effectivement son rôle de bon passeur des idées ; il indique les raisons de l'impasse de la seule considération par Lagrange à se servir de la combinaison $a+b+ab$. Fourier fait comprendre l'originalité opérée par Laplace de l'introduction du paramètre z, souligne par une notation que la chose importante est de signaler que z relève d'un ensemble infini, et pour cela il le note n, comme un entier quelconque [14]. De plus il simplifie la démarche de Laplace en ce qu'il fait jouer le corps des complexes, au lieu de s'attarder sur les formules pour le quatrième degré polynomial. De fait, le cours de Fourier est pris en notes par plusieurs élèves, et je donne ici la version manuscrite qui est disponible aux archives de l'École des Ponts et Chaussées, alors que nous ne connaissons pas le scripteur [15]. L'invention de Laplace, reprise par Fourier, celle de la fonction comme existence de quelque chose, alors même qu'on ne sait pas calculer : c'est bien la définition cantorienne qui est en jeu, allant d'un objet pris dans un ensemble infini à un objet pris dans un ensemble fini. On est contraint par les textes de reconnaître que l'emploi du mot fonction par Laplace, puis par Fourier, n'est pas juste pour être dans l'air du temps à la suite d'Euler qui est un auteur que Laplace recommandait de lire attentivement. C'est parce qu'il correspond à une nécessité, compte tenu de la remarquable introduction du paramètre z que maintiendra Gauss dans sa troisième preuve du théorème fondamental de l'algèbre, se gardant pourtant d'en référer à Laplace. Mais il s'agit d'une autre histoire [16].

Conclusion

C'est la question de ce que peut signifier une offre en science que j'ai voulu expliciter sur le cas de la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. C'est bien d'analyse dont il est question, mais je me suis restreint essentiellement à deux aspects, l'un avec un jeu de fiction expérimentale qui est l'exemple de la propagation de la chaleur dans une lame métallique conduisant aux modes propres qui suffisent à représenter toutes les solutions, et l'autre est la mise au point par Fourier d'une preuve du théorème fondamental de l'algèbre, dont le but est de ramener les fictions imaginaires de Descartes aux seules quantités complexes, qui deviennent alors des nombres complexes. Dans les deux cas, c'est le concept de fonction qui s'est trouvé en jeu, et que j'ai privilégié. Avec une part notable de physique dans le premier cas comme j'ai tenu à le décrire, et une conception que je ne peux dire purement algébrique dans le second cas qu'en orientant d'avance le monde de Cantor vers l'algèbre. Il serait préférable, pour l'historien comme pour le mathématicien, de saisir qu'il s'est agi d'aller aux fondements des mathématiques en précisant des concepts qui paraissaient ne requérir aucun effort particulier. Et c'est là que la notion d'offre prend tout son sens, car justement au temps de Fourier, on peut constater plusieurs autres offres sur les fonctions. D'abord l'offre de Lagrange des années 1800, reposant sur le développement d'une fonction en série entière comme quantité réelle, débarrassée des notions d'infiniment petits et même des limites. Ensuite celle de Legendre d'un peu auparavant sur les fonctions d'une variable complexe, à partir d'un comportement opposé au cas des fonctions réelles avec ce qui va s'appeler le principe du minimum, et qui est consacré à la théorie des nombres. Enfin l'offre de Cauchy manifestée par le *Cours d'Analyse algébrique* sorti une année avant la *Théorie analytique*, une construction des fonctions, réelles

14. École nationale des Ponts et Chaussées, Ms 668, page indiquée au crayon n° 53, qui correspond à la 17e et la 18e leçon, sans doute prononcées les 14 et 19 mars 1796, mais rassemblées par l'élève.

15. *Idem*, recto de la page indiquée 54 et page 54.

16. On la trouvera dans le livre de Jean Dhombres et Carlos Alvarez, *Une histoire de l'invention mathématique. Les démonstrations classiques du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville et Lipschitz*, Paris, Hermann, 2013.

ou complexes, à partir des notions de limite et de continuité. Je pourrais parler d'une autre offre encore avec la thèse de Gauss publiée en 1799 sur le théorème fondamental, car elle constitue une critique très efficace des auteurs phares des Lumières comme Euler, Lagrange et D'Alembert, et ainsi concerne les fondements même de l'acte mathématique. Fourier inscrit son nom au même titre que les quatre autres auteurs en montrant une généralité de calcul sur les fonctions qu'il justifie par une naturalité physique si je peux dire, non pas des fonctions, mais de leur analyse. S'il y a chez Fourier un indéniable positivisme reconnu par Comte, il y a aussi, et surtout le sens qu'un calcul qui se développe comme une expérimentation, et qui réussit, ne saurait être vide de sens et donc hors de la réalité. Les difficultés rencontrées par la postérité de Fourier sont justement dans le hiatus pratique manifesté par les difficultés mêmes du calcul tant des séries que des intégrales éponymes, comme le reconnaissent tous les physiciens du XX^e^ siècle. Elles n'ont été levées qu'au XXI^e^ siècle par les ondelettes, c'est-à-dire par la prise en compte inventive d'objets du calcul qui sont indépendants en satisfaisant à des relations d'orthogonalité, mais sont adaptés aux conditions même du calcul et ont non pas une naturalité physique, mais une naturalité de leur mise en calcul. En un sens, Fourier est dans la lignée formelle de Lagrange, même si l'offre de ce dernier a été écartée. Fourier est d'abord « corrigé » par l'offre de Cauchy, par des auteurs comme Dirichlet, ou Jordan, qui donnent des conditions de convergence. Puis au XX^e^ siècle, Fourier réapparaît en mathématiques grâce à l'intégrale de Lebesgue, avec démonstration de la convergence d'une série de Fourier se réduisant au fait que la différence entre la fonction 2π-périodique et sa série de Fourier est orthogonale à tous les cosinus et sinus. L'offre de Legendre, poursuivie par Cauchy sur les fonctions d'une variable complexe, n'a pas été suivie d'effet par Fourier qui ne passera pas aux exponentielles complexes.

Orientations bibliographiques

Comme en histoire de l'art, l'habitude en histoire et épistémologie des mathématiques est de donner de très copieuses bibliographies. Ce que je ne veux pas faire dans le présent article, souhaitant seulement aider dans sa recherche de précision le lecteur intéressé par Fourier.

La *Théorie analytique de la chaleur* est disponible en version originale de 1822 chez Didot sur le Net, sortie à l'identique chez Gabay en 1988 et avait été rééditée dans les *Œuvres de Fourier*, au tome I (Gauthier-Villars, 1888). Parmi les commentaires et traductions, on peut citer les leçons professées pendant le premier semestre 1893-1894 par Henri Poincaré, rédigées par Rouyer et Baire, dans son cours de physique mathématique, publiées à Paris, G. Carré, 1895.

Le manuscrit sur la théorie de la propagation de la chaleur de 1807 a été retranscrit et commenté dans I. Grattan-Guinness, en coll. avec J.R. Ravetz, avec une présentation biographique, dans *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut in 1807*, Cambridge, Mass.-London, 1972. La deuxième partie du manuscrit de 1811, couronné du grand prix des sciences mathématiques par l'Institut, Suite du mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, est sorti dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* au tome 5, 1821-1822, p. 153-246, repris au tome II et dernier des *Œuvres de Fourier* (p. 1-96). Des lettres relatives aux réactions suscitées par le mémoire de 1807 ont été publiées par J. Herivel, *Joseph Fourier. Lettres inédites 1808-1816*, Paris, 1980, tirées du recueil de manuscrits de la BnF, f.fr. 22 501. Cet auteur avait publié un ouvrage antérieur, *Joseph Fourier. The man and the physicist*, Clarendon Press, Oxford, 1975. L. Charbonneau, auteur d'une thèse en 1976 sur *L'œuvre mathématique de Joseph Fourier*, a publié en 1994 un Catalogue des manuscrits de Joseph Fourier conservés au Cabinet des manuscrits de la BnF, *Cahiers d'Histoire et de philosophie des sciences*, vol. 42, Lib. Albert Blanchard. Cette théorie analytique fait l'objet d'une longue présentation dans le livre de J. Dhombres, J.B. Robert, *Joseph Fourier, 1768-1830. Créateur de la physique mathématique*, Belin, Paris, 1998. Une présentation différente a été faite par Olivier Darrigol, The acoustic origins of harmonic analysis, *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 2007, n° 4, p. 343-424. De nombreux articles de Jean-Pierre Kahane, dont un dans la *Gazette* de juillet 2014, *Qu'est-ce que Fourier peut nous dire aujourd'hui ?*, sont faciles à télécharger. Ainsi que l'article de Bernard Maurey, *Fourier, un homme, plusieurs vies*, La *Gazette*, vol. 158, oct. 2018.

Le site Mathourist que produit Alain Juhel donne des informations conséquentes sur la *Théorie analytique*, ainsi d'ailleurs de façon moins technique que le site de la Société Joseph Fourier, et notamment où trouver les articles de Kahane. Cette Société doit sortir prochainement chez Hermann un gros ouvrage très imagé, intitulé *L'itinéraire de Fourier 1768-1830 : de la révolution française à la révolution numérique*.

Auguste Comte parle longuement de la *Théorie analytique* dans son *Cours de philosophie positive* de 1830, en particulier dans les leçons 30 et 31. La deuxième thèse de Gaston Bachelard a fait l'objet d'un livre, *Étude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides*, Vrin, Paris, 1928, réédité en 1973.

Jean Dhombres

Centre Alexandre Koyré

jean.dhombres@ehess.fr

Jean Dhombres a été professeur de mathématiques à l'université de Nantes à partir de 1972, y ayant fondé l'Irem et le Centre François Viète. Ses recherches ont porté sur les équations fonctionnelles, et sur l'histoire des sciences, avec un accent sur le XVII$^{\text{e}}$ siècle (dont les contacts avec la Chine) et depuis la Révolution française. Devenu directeur de recherche au CNRS en 1988, responsable de l'UPR 21, il a occupé une chaire à l'EHESS en histoire des sciences exactes, maintenant un séminaire mensuel portant cette année sur les positions philosophiques sur les mathématiques aux XX-XXI$^{\text{e}}$ siècles.

Ensembles invariants par ×2 et ×3

• N. de Saxcé

Après quelques millénaires de tâtonnements, l'écriture décimale s'est peu à peu imposée pour les nombres entiers et réels : l'apprentissage du calcul en base 10 est maintenant un point essentiel de l'instruction à l'école primaire. Il est assez naturel de se demander à quoi ressembleraient les nombres dont l'écriture décimale nous est si familière, s'ils étaient écrits dans une autre base. Le but de cet article est de présenter certaines questions posées par Furstenberg à ce propos dans les années 60, et les progrès récents de Hochman, Shmerkin et Wu dans le domaine.

Introduction

Tout nombre réel $x \in [0,1[$ peut se définir par son écriture en binaire : il existe une suite d'entiers $a_n \in \{0,1\}$ tels que

$$x = \sum_{n \geqslant 1} a_n 2^{-n}.$$

On écrit alors $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, en base 2. Bien que cette écriture soit particulièrement adaptée à l'informatique, nous préférons pour notre usage courant le système décimal, suivant lequel on peut écrire $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ en base 10, c'est-à-dire, pour certains entiers $b_i \in \{0, \ldots, 9\}$,

$$x = \sum_{n \geqslant 1} b_n 10^{-n}.$$

Ainsi par exemple, nous avons plus l'habitude de

$$\pi = 3,14\ldots \quad \text{en base 10}$$

que de

$$\pi = 11,001001\ldots \quad \text{en base 2.}$$

De façon plus générale, si p et q sont deux entiers distincts – par exemple $p = 2$ et $q = 3$ – on peut s'intéresser à l'écriture d'un réel x dans chacune de ces deux bases, et chercher à comprendre les liens entres ces deux écritures.

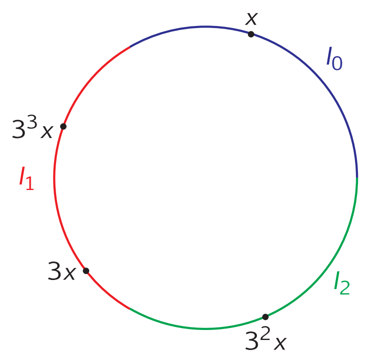
Naturellement, si p et q sont des puissances d'un même entier, c'est-à-dire si l'on peut écrire $p = r^k$ et $q = r^l$ pour un certain entier r, les écritures dans les bases p et q correspondent simplement aux blocs de longueur k et l de l'écriture en base r, de sorte qu'elles sont très similaires. Par exemple, si peu de chiffres (ou de blocs de chiffres de longueur donnée) apparaissent dans l'écriture de x en base $p = r^k$, ce sera aussi le cas en base $q = r^l$. Lorsque p et q ne sont pas des puissances d'un même entier, on dit qu'ils sont *multiplicativement indépendants*, le problème est beaucoup plus subtil.

Dans les années 1960, Furstenberg [5, 4] a obtenu les premiers résultats remarquables sur ce sujet, et énoncé une série de conjectures dont l'étude a ouvert de nouvelles voies à explorer, à l'interface entre la théorie géométrique de la mesure et les systèmes dynamiques. Nous nous proposons dans cet article de donner une introduction à ces problèmes, depuis les observations fondatrices de Furstenberg, et jusqu'aux travaux récents de Hochman et Shmerkin [6], puis de Shmerkin [10] et Wu [11], qui ont résolu par l'affirmative plusieurs des conjectures de Furstenberg.

Mais commençons par décrire le problème de façon plus géométrique. Si l'on identifie le segment $[0,1[$ au cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ des réels modulo 1, l'écriture en base p décrit l'orbite du point x par la multiplication par p modulo 1. Concrètement, si l'on découpe le cercle en p intervalles d'égale longueur

$\mathbb{T} = I_0 \cup I_1 \cup \cdots \cup I_{p-1}$, le développement $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ donne la suite des positions des éléments de l'orbite $(p^n x)_{n \geqslant 0}$ dans cette partition.

Figure 1 – Orbite par $\times 3$ de $x = 0{,}0121\ldots$ en base 3 ($x = 0{,}197\ldots$ en base 10)



Par exemple, dire que tout bloc de chiffres apparaît dans l'écriture de x en base p revient à dire que l'orbite de x par $\times p$ est dense dans $\mathbb{T}$. À l'opposé, l'écriture de x en base p est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si l'orbite de x par $\times p$ est finie ; cela équivaut d'ailleurs à ce que x soit rationnel.

Évidemment, de façon analogue, l'écriture en base q correspond à l'opération $\times q$ de multiplication par q. D'un point de vue dynamique, on cherche donc à comprendre comment interagissent les deux transformations $\times p$ et $\times q$ sur le cercle $\mathbb{T}$. La première observation remarquable de Furstenberg concerne les fermés invariants simultanément par ces deux transformations.

Théorème 1 (Furstenberg). *Si p et q sont multiplicativement indépendants, le cercle $\mathbb{T}$ est l'unique fermé infini invariant par les opérations $\times p$ et $\times q$.*

Au vu de cet énoncé, Furstenberg a aussi formulé une conjecture analogue pour les mesures invariantes. Rappelons qu'une mesure μ est dite *diffuse* si elle est sans atome, i.e. si pour tout x dans $\mathbb{T}$, $\mu(\{x\}) = 0$.

Conjecture 1 (Furstenberg). *Si p et q sont multiplicativement indépendants, la mesure de Lebesgue est l'unique probabilité diffuse invariante par $\times p$ et $\times q$.*

Cette conjecture reste aujourd'hui un des problèmes ouverts les plus importants en systèmes dynamiques. Sous une hypothèse supplémentaire d'entropie strictement positive, cette conjecture a été résolue par Rudolph [9] lorsque p et q sont premiers entre eux, puis par Johnson [7] lorsque p et q sont seulement multiplicativement indépendants.

Il n'est pas évident d'expliciter les conséquences des énoncés ci-dessus sur les écritures en base p et en base q d'un nombre réel, et il pourrait donc sembler à première vue que cette approche dynamique du problème nous a sensiblement éloignés de notre problème initial. En fait, les deux énoncés ci-dessus manifestent une forme d'indépendance entre les deux transformations $T_p = \times p$ et $T_q = \times q$. Rappelons que l'écriture en base p correspond à l'orbite $\langle T_p, x \rangle$ de x sous l'action de T_p, tandis que l'orbite $\langle T_q, x \rangle$ de x sous l'action de T_q est encodée par l'écriture en base q. La conjecture ci-dessous, dans le même esprit que le théorème 1, exprime que si x est irrationnel, et p, q multiplicativement indépendants, les écritures de x dans les bases p et q ne peuvent pas être simultanément trop simples. La situation serait donc presque à l'opposé du cas où p et q sont deux puissances d'un même entier ! Rappelons que la dimension de Hausdorff $\dim_{\mathrm{H}} A$ d'une partie A dans $\mathbb{R}$ peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1. Cette notion, dont la définition précise sera donnée au paragraphe 2.1, donne une indication de la taille des ensembles fractals, dont la mesure de Lebesgue est nulle, mais qui peuvent néanmoins contenir beaucoup de points.

Conjecture 2. *Soient p et q deux entiers multiplicativement indépendants. Pour tout x dans $\mathbb{T}$, l'inégalité $\dim_{\mathrm{H}} \overline{\langle T_p, x \rangle} + \dim_{\mathrm{H}} \overline{\langle T_q, x \rangle} < 1$ implique que x est rationnel.*

La dimension de Hausdorff $\alpha = \dim_{\mathrm{H}} \overline{\langle T_p, x \rangle}$ mesure en quelque sorte la complexité de l'écriture de x en base p. Plus précisément, si l'on note $N_p(x, n)$ le nombre de blocs de longueur n qui apparaissent dans l'écriture de x en base p, alors

$$N_p(x, n) = p^{n(\alpha + o(1))}.$$

De plus, on peut montrer que l'égalité $\dim_{\mathrm{H}} \overline{\langle T_q, x \rangle} = 1$ implique en fait que l'orbite $(q^n x)_{n \geqslant 0}$ est dense dans $\mathbb{T}$. Par conséquent, si la conjecture est vérifiée, et si x est un irrationnel tel que le nombre $N_p(x, n)$ de blocs de longueur n dans l'écriture de x croît sous-exponentiellement, tous les blocs de chiffres doivent apparaître dans l'écriture de x en base q. Par exemple, l'écriture décimale de

$$x = \sum_{n \geqslant 0} 2^{-2^n} = 0{,}11010001\ldots \quad \text{en base 2}$$

doit faire apparaître tous les chiffres de 0 à 9, et même tous les blocs de chiffres. Pour donner un deuxième exemple concret, cette conjecture implique que si x ne contient que des 0 et des 1 à la fois en base 3 et en base 10, alors x est rationnel. Une autre conséquence amusante de cette conjecture, mentionnée par Furstenberg, concerne l'écriture de 2^n en base 10. Rappelons que le critère d'équirépartition de Weyl permet de calculer la fréquence d'apparition du premier chiffre (ou bloc de chiffres) de 2^n lorsque n varie, et donc de montrer que tous les blocs de chiffres apparaissent dans l'écriture de certains 2^n, pour n arbitrairement grand. La conjecture ci-dessus impliquerait que tous les blocs apparaissent dans *tout* 2^n, pourvu que n soit suffisamment grand[1].

Conjecture 3. *Si n est suffisamment grand, tous les chiffres (ou tous les blocs de chiffres d'une longueur fixée) apparaissent dans l'écriture de 2^n en base* 10.

À l'heure actuelle, ces trois conjectures de Furstenberg sont encore ouvertes, mais une version faible de la conjecture 2 a été récemment résolue par Shmerkin [10] et Wu [11], indépendamment. Commençons par reformuler cette conjecture 2 : si A et B sont deux fermés de $\mathbb{T}$ invariants respectivement par T_p et T_q, et vérifiant $\dim_{\mathrm{H}} A + \dim_{\mathrm{H}} B < 1$, alors $A \cap B \subset \mathbb{Q}$. Comme première étape vers cette conjecture, Furstenberg suggérait de montrer que sous ces hypothèses, on a toujours $\dim_{\mathrm{H}}(A \cap B) = 0$. Notons que si A et B sont des sous-espaces vectoriels transverses dans $\mathbb{R}^d$, la dimension de l'intersection est toujours majorée par

$$\dim(A \cap B) \leqslant \max(0, \dim A + \dim B - d).$$

Bien sûr, cette inégalité n'est pas toujours valable pour les ensembles fractals, mais l'idée de Furstenberg est que l'hypothèse d'invariance de A et B par T_p et T_q nous assure d'une forme de transversalité. C'est le résultat qui a été démontré en 2016 par Shmerkin [10] et Wu [11], indépendamment. Une autre démonstration, plus courte, a aussi été proposée récemment par Austin [1].

Théorème 2 (Transversalité de T_p et T_q). *Soient p, q deux entiers multiplicativement indépendants, et A, B deux fermés de $\mathbb{T}$ invariants par T_p et T_q, respectivement. Alors, pour tous réels s, t, $t \neq 0$,*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A \cap (s + tB)) \leqslant \max(\dim_{\mathrm{H}} A + \dim_{\mathrm{H}} B - 1, 0).$$

Cet article se compose de trois parties. La première partie est consacrée au théorème de Furstenberg sur les fermés invariants par $\times p$ et $\times q$; après quelques exemples introductifs, nous en donnerons la démonstration, suivie d'une brève discussion de son analogue conjecturel pour les mesures, la conjecture 1. La seconde partie traite de théorie géométrique de la mesure, et a pour but d'expliquer les liens entre le problème de l'intersection d'ensembles invariants et celui des projections de mesures invariantes. Nous y esquisserons au passage une démonstration, due à Hochman et Shmerkin, du résultat de Rudolph-Johnson sur les mesures invariantes par $\times p$ et $\times q$. Enfin, la troisième partie présente succintement deux ingrédients importants de la démonstration de Shmerkin : la notion de mesure dynamiquement auto-similaire, et les théorèmes inverses en combinatoire additive.

1. Fermés invariants

Donnons d'abord quelques exemples de fermés invariants par l'application de multiplication T_p. Bien sûr, pour commencer il existe des orbites finies, qui proviennent toutes de points rationnels. Cela n'est qu'une reformulation d'un point bien connu, que l'on découvre souvent en apprenant l'algorithme de division avec « chiffres après la virgule » : un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Mais il existe aussi de nombreux fermés invariants infinis. Par exemple, si S est une partie de $\{0, \ldots, p-1\}$, l'ensemble

$$F_S = \{x = \sum_{i \geqslant 1} a_i p^{-i} \ ; \ \forall i, \ a_i \in S\}$$

définit un fermé invariant, infini dès que S contient au moins deux éléments ; c'est l'ensemble des éléments dont une écriture en base p ne contient que des éléments de S. Ces ensembles s'appellent les *ensembles de Cantor p-adiques*, le plus célèbre est sans doute l'ensemble de Cantor triadique, invariant par T_3, et constitué des réels dont l'écriture en base 3 ne contient pas de 1. On peut encore obtenir d'autres fermés invariants en imposant des conditions sur les différents blocs de chiffres, et il n'est pas difficile de voir à l'aide de ces constructions que l'ensemble des fermés invariants par T_p n'est pas dénombrable.

Cela montre bien que l'énoncé du théorème de Furstenberg que nous voulons démontrer est remarquable : parmi tous ces fermés invariants par T_p, les

1. On renvoie le lecteur intéressé à l'article original [4, Conjecture 2′] pour l'argument élémentaire qui permet de déduire cette conjecture de la précédente.

seuls qui sont invariants par multiplication par un entier q indépendant de p sont les orbites finies et le cercle $\mathbb{T}$ tout entier !

1.1 – Le théorème de Furstenberg

Nous donnons maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème 1 proposée par Boshernitzan [2], suivant la présentation de Malicet [8]. On renvoie d'ailleurs à cette dernière note pour les preuves détaillées des résultats intermédiaires.

Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène est dense. La démonstration du théorème de Furstenberg utilise une variante de cette observation pour les semi-groupes, i.e. les parties stables par addition : un semi-groupe additif Σ_0 de $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ qui n'est pas contenu dans un semi-groupe monogène est *non-lacunaire*. Cela signifie que les points de Σ_0 sont de plus en plus denses au voisinage de l'infini. Précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant R$, il existe s dans Σ_0 tel que $|x - s| \leqslant \varepsilon$.

Dans la suite, nous nous intéresserons à un semi-groupe *multiplicatif* Σ de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. La partie $\Sigma_0 = \ln \Sigma$ est un semi-groupe additif de $\mathbb{R}^+$, et le résultat ci-dessus montre donc que si Σ n'est pas monogène, alors Σ est non lacunaire, au sens où le quotient de deux éléments successifs de Σ converge vers 1 en l'infini : si $\Sigma = \{s_1 < s_2 < \dots\}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1.$$

Dans toute la suite, on considère un fermé infini F invariant par multiplication par deux entiers indépendants p et q, et on cherche à montrer que $F = \mathbb{T}$. Nous noterons $\Sigma = \{s_1 < s_2 < \dots\}$ le semi-groupe de $(\mathbb{N}, \times)$ engendré par p et q. Si l'on dispose d'un élément u dans F arbitrairement proche de 0, la propriété de non-lacunarité de Σ permet d'encadrer un point quelconque x dans $\mathbb{T}$ par des intervalles de la forme $[s_n u, s_{n+1} u]$, dont les extrémités appartiennent à F, et dont la longueur est arbitrairement petite. Cette observation élémentaire permet d'obtenir le premier lemme important en direction du théorème de Furstenberg.

Lemme 1. *Si* 0 *est point d'accumulation de* F*, alors* $F = \mathbb{T}$.

Notons que la conclusion du lemme ci-dessus est encore valable si l'on suppose seulement que F a un point d'accumulation rationnel $\frac{a}{b}$. En effet, dans ce cas, le fermé invariant $F' = bF$ admet 0 comme point d'accumulation, donc $F' = \mathbb{T}$. Cela implique $\mathbb{T} = b^{-1}(F') = \bigcup_{0 \leqslant k < b} F + \frac{k}{b}$, et par suite, il existe k tel que $F + \frac{k}{b}$ contient un ouvert non vide. Donc F contient un ouvert non vide, et comme F est invariant par Σ, on trouve bien que $F = \mathbb{T}$.

La suite de la démonstration consiste à construire dans F un autre fermé invariant F' qui satisfait à une propriété supplémentaire d'invariance par translation. Pour $\alpha \in \mathbb{T}$, nous noterons $\tau_\alpha \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ l'application de translation par α, définie par $\tau_\alpha(x) = x + \alpha$. Si τ_α commute aux opérations de multiplication T_p et T_q, on procède de la façon suivante : partant de l'ensemble F_0 des points d'accumulation de F, on définit une suite de fermés invariants par la relation

$$F_n = F_{n-1} \cap \tau_\alpha(F_{n-1}), \quad \forall n \geqslant 1.$$

Sans perte de généralité, supposons que F_0 ne contient aucun point rationnel ; cela implique en particulier que F_0 est infini. Ensuite, si F_{n-1} est infini, le lemme précédent montre que l'ensemble $F_{n-1} - F_{n-1}$ (dont 0 est point d'accumulation) est égal à $\mathbb{T}$ tout entier, ce qui qui implique que F_n est non vide, et donc infini, puisqu'il ne contient aucun point rationnel. La suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est donc une suite décroissante de fermés non vides, et par compacité, l'intersection décroissante

$$F' = \bigcap_{n\geqslant 0} F_n$$

définit un fermé invariant non vide stable par τ_α. C'est exactement le contenu du second lemme dont nous aurons besoin.

Lemme 2. *Si F est un fermé invariant infini et si τ_α commute à T_p et T_q, alors F contient un fermé invariant infini F' stable par τ_α.*

Le théorème 1 s'obtient simplement à l'aide des deux lemmes ci-dessus. En effet, si F est un fermé infini invariant par T_p et T_q, on peut choisir un entier arbitrairement grand k puis un entier m tel que k divise à la fois $p^m - 1$ et $q^m - 1$. La translation $\tau_{1/k}$ commute alors à T_{p^m} et S_{q^m}, donc F contient un fermé F' non vide stable par $\tau_{1/k}$. Cela implique que F est $1/k$-dense dans $\mathbb{T}$, et comme k peut être arbitrairement grand, on trouve bien $F = \mathbb{T}$.

Nous concluons ce paragraphe en mentionnant une version quantitative de l'énoncé de Furstenberg, due à Bourgain, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh [3].

Théorème 3. *Soient p et q deux entiers multiplicativement indépendants. Si x est un point diophantien* *de $\mathbb{T}$, i.e. satisfait, pour un certain $k \geqslant 1$, pour tout (a,b) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $|x-\frac{a}{b}| \geqslant b^{-k}$, alors il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout entier N suffisamment grand, l'ensemble*

$$\{p^s q^t x\ ;\ s,t \leqslant N\}$$

est dense à l'échelle $(\ln\ln N)^{-\kappa}$ dans $\mathbb{T}$.

La démonstration de ce théorème utilise des versions quantitatives du résultat partiel de Rudolph-Johnson concernant la conjecture de Furstenberg sur les mesures invariantes.

1.2 – Mesures invariantes

Nous présentons maintenant le théorème de Rudolph-Johnson sur les mesures invariantes. Rappelons que l'*entropie* pour T_p d'une mesure μ invariante par T_p est définie par

$$h_\mu(T_p) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \sum_{I\in\mathscr{D}_p^{(n)}} \mu(I)\ln\mu(I),$$

où $\mathscr{D}_p^{(n)} = \{[\frac{i}{p^n},\frac{i+1}{p^n}[\ ;\ 0 \leqslant i < p^n\}$ désigne la partition de $\mathbb{T}$ en intervalles p-adiques de niveau n. Il existe de nombreuses interprétations de l'entropie, notamment en termes d'information; nous verrons ci-dessous que l'entropie d'une mesure est aussi étroitement reliée à sa dimension de Hausdorff.

Le théorème de Rudolph-Johnson exprime que la mesure de Lebesgue est essentiellement l'unique mesure d'entropie strictement positive invariante par T_p et T_q. Évidemment, une combinaison convexe de la mesure de Lebesgue avec une mesure invariante à support fini aura encore cette propriété, et pour s'assurer l'unicité, il faut donc interdire de telles combinaisons. On dit qu'une probabilité μ invariante par T_p est *ergodique* si μ ne peut pas s'écrire comme combinaison convexe non triviale de deux probabilités invariantes par T_p.

Théorème 4 (Rudolph-Johnson). *Soient p et q deux entiers multiplicativement indépendants, et μ une probabilité invariante sous l'action de T_p et T_q et ergodique pour T_p. Si μ est d'entropie strictement positive pour T_p, alors μ est égale à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.*

Certaines démonstrations de ce résultat ne sont pas sans lien avec celle que nous avons présentée du théorème de Furstenberg sur les fermés invariants, et relient l'invariance par le semi-groupe multiplicatif engendré par T_p et T_q à des propriétés de récurrence pour certains sous-groupes *additifs*.

Une autre démonstration, due à Hochman et Shmerkin, passe par une inégalité sur la dimension des convolutions de mesures invariantes par multiplication, que nous décrivons dans la partie suivante.

2. Dimension, projection et intersection

Le but de cette partie est de ramener le théorème 2 à un énoncé plus géométrique, qui porte sur la régularité de certaines projections de mesures. Cette dualité entre intersection et projection, déjà observée par Furstenberg, est à la base de la démonstration de Shmerkin [10].

2.1 – Dimension et invariance

Commençons par rappeler quelques notions élémentaires pour définir la dimension d'une partie bornée A dans $\mathbb{R}$. La définition la plus simple est sans doute celle de Minkowski : pour une échelle $\delta > 0$ arbitrairement petite, on note $N(A,\delta)$ le cardinal minimal d'un recouvrement de A à l'aide de boules de rayon δ, et on pose

$$\overline{\dim_{\mathrm{M}}} A = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln N(A,\delta)}{\ln\frac{1}{\delta}}.$$

Cette définition a un inconvénient majeur : elle n'est pas stable par union dénombrable. Même un ensemble discret peut avoir une dimension strictement positive, par exemple $\overline{\dim_{\mathrm{M}}}\{\frac{1}{n}\ ;\ n\geqslant 1\} = \frac{1}{2}$. On préfère donc souvent utiliser la dimension de Hausdorff, qui met en jeu des recouvrements par des boules dont le rayon peut être arbitrairement petit :

$$\dim_{\mathrm{H}} A = \inf\Big\{ s>0 \mid \forall\varepsilon>0, \exists (x_i,\delta_i)_{i\in\mathbb{N}} : A \subset \bigcup_i B(x_i,\delta_i),\ \sum_i \delta_i^s \leqslant \varepsilon \Big\}.$$

Fort heureusement, si A est un fermé invariant par multiplication par un entier $p \geqslant 2$, il n'est pas difficile de vérifier que ces deux notions coïncident

$$\overline{\dim_{\mathrm{M}}} A = \dim_{\mathrm{H}} A. \qquad (1)$$

Pour une mesure μ, on définit sa dimension de Hausdorff inférieure par

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu = \inf\{\dim_{\mathrm{H}} A\ ;\ \mu(A) > 0\}.$$

Lorsque μ est invariante et *ergodique* par multiplication par un entier $p \geqslant 2$, le théorème de Shannon-McMillan-Breiman permet de démontrer une formule analogue à (1). En effet, ce théorème affirme que pour presque tout x au sens de la mesure μ, le quotient $\frac{\ln \mu(B(x,\delta))}{\ln \delta}$ converge vers la valeur limite $\frac{h_\mu(T_p)}{\ln p}$, indépendante de x. On dit que μ est de *dimension exacte* égale à

$$\dim \mu = \frac{h_\mu(T_p)}{\ln p}.$$

Insistons sur le fait que cette propriété n'est pas valable en général, mais découle de l'invariance et de l'ergodicité pour T_p. Un exemple important est celui des ensembles de Cantor p-adiques, et des mesures de Cantor qui leur sont associées.

Exemple 1 (Ensembles et mesures de Cantor). Soit S une partie de $\{0,\dots,p-1\}$, et F_S l'ensemble de Cantor p-adique associé, c'est-à-dire l'ensemble des éléments dont l'écriture en base p ne contient que des éléments de S. La dimension de Hausdorff de F_S, égale à sa dimension de Minkowski, est égale à

$$\dim_{\mathrm{H}} F_S = \frac{\ln |S|}{\ln p}.$$

En outre, on peut définir sur F_S une mesure canonique μ_S, qui correspond à un choix uniforme parmi les éléments de S de chaque chiffre du développement en base p. Cette mesure vérifie une propriété de régularité importante : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x dans F_S et tout $\delta \in]0,1[$,

$$\frac{1}{C}\delta^{\dim_{\mathrm{H}} F_S} \leqslant \mu_S(B(x,\delta)) \leqslant C\delta^{\dim_{\mathrm{H}} F_S}. \qquad (2)$$

On obtient par un calcul facile la valeur de l'entropie $h_{\mu_S}(T_p) = \ln |S|$, ce qui permet de retrouver dans ce cas particulier la formule annoncée par le théorème de Shannon-McMillan-Breiman.

2.2 – Projection de mesures invariantes

Comme dans le théorème 2, nous considérons maintenant deux fermés A, B dans $[0,1[$. Pour s, t dans $\mathbb{R}$, l'intersection $A \cap (s + tB)$ coïncide avec la fibre au-dessus de s de l'application $\pi_t : (a,b) \mapsto a - tb$. Or, en général, entre la dimension des fibres et de l'image, on s'attend à la relation

$$\dim(A \times B) = \dim \pi_t(A \times B) + \sup_s \dim \pi_t^{-1}(\{s\}). \qquad (3)$$

Cette identité n'est pas toujours valable pour les ensembles fractals, mais elle a sans doute permis à Furstenberg d'entrevoir la relation entre le problème des intersections d'ensembles invariants et celui des projections d'ensembles invariants, et de formuler une conjecture étroitement reliée au théorème 2 : lorsque A et B sont respectivement invariants par multiplication par p et q, deux entiers multiplicativement indépendants, on a, pour tout $t \neq 0$,

$$\dim_{\mathrm{H}}(A + tB) = \min(1, \dim_{\mathrm{H}} A + \dim_{\mathrm{H}} B).$$

De façon équivalente, on peut formuler cette conjecture à l'aide des projections orthogonales de $A \times B$ sur des droites, qui correspondent naturellement aux applications π_t. Cette conjecture a été résolue en 2011 par Hochman et Shmerkin, qui ont même obtenu une version plus générale, pour les projections de mesures invariantes.

Théorème 5 (Hochman-Shmerkin). *Soient p, q deux entiers multiplicativement indépendants. Soient μ et ν deux probabilités sur $[0,1[$ invariantes par T_p et T_q, respectivement. Pour toute projection orthogonale π sur une droite distincte des axes de coordonnées,*

$$\dim_{\mathrm{H}} \pi(\mu \otimes \nu) = \min(1, \dim_{\mathrm{H}} \mu \otimes \nu).$$

Pour retrouver le théorème de Rudolph-Johnson, supposons maintenant que μ soit une mesure invariante à la fois par T_p et T_q, ergodique pour T_p, et d'entropie $h_\mu(T_p)$ strictement positive. Nous avons déjà vu que μ est de dimension exacte égale à $\frac{h_\mu(T_p)}{\ln p}$, strictement positive. Le théorème ci-dessus appliqué (plusieurs fois) à la projection $(x,y) \mapsto x + y$ montre que $\dim_{\mathrm{H}} \mu^{*k} = 1$ pour k suffisamment grand. Il n'est pas trop difficile de voir que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure invariante par T_p de dimension exacte égale à 1, et donc $\mu^{*k} = \mathrm{Leb}$. Mais alors, les coefficients de Fourier de μ vérifient $\hat{\mu}(n)^k = 0$ si $n \neq 0$, d'où $\hat{\mu}(n) = 0$ et μ est bien la mesure de Lebesgue.

2.3 – De la projection à l'intersection

La relation heuristique (3) est fausse en général, et il n'est pas possible de déduire la dimension de $A \cap (s + tB)$ de celle de $A + tB$, donnée par le théorème 5. Cependant, l'idée générale de la démonstration de Shmerkin est tout de même de démontrer un théorème de projection suffisament précis pour pouvoir en déduire l'inégalité souhaitée sur les intersections. On commence par remarquer qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque les ensembles A et B sont des ensembles de Cantor p-adique et q-adique, respectivement. Cela n'est pas difficile à voir, car si A est un ensemble invariant par T_p, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N et un ensemble de Cantor p^N-adique $\tilde{A}$ contenant A et tel que $\dim_{\mathrm{H}} \tilde{A} \leqslant \dim_{\mathrm{H}} A + \varepsilon$. En appliquant alors l'inégalité du théorème à des ensembles de Cantor $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ qui approchent A et B, on obtient le résultat souhaité pour les ensembles A et B.

Le cœur du problème consiste donc à démontrer le théorème pour les ensembles de Cantor. Pour cela, nous démontrerons un analogue du théorème de projection de Hochman-Shmerkin, mais pour une autre notion, plus fine, de dimension.

Pour $r \geqslant 1$, on définit la *dimension* L^r d'une mesure ν en étudiant le comportement de la densité de ν à l'échelle δ, lorsque δ tend vers 0. Plus précisément, si $\phi_\delta = \frac{1}{\delta}\mathbb{1}_{[0,\delta]}$ désigne une unité approchée à l'échelle δ, on pose

$$\dim_{\mathrm{r}} \nu = 1 - \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln \|\nu * \phi_\delta\|_r^r}{(r-1)\ln 1/\delta}.$$

C'est une mesure de l'étalement de la mesure ν, qui varie entre 0 (lorsque ν est concentrée autour de peu de points) et 1 (pour la mesure de Lebesgue, par exemple). Donnons maintenant la propriété importante de cette dimension qui permet de rendre rigoureuse l'intuition donnée par (3) : si A et B sont des ensembles de Cantor, η_A, η_B les mesures canoniques associées, et π une projection sur une droite, on a toujours l'inégalité

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \overline{\dim_{\mathrm{M}}}\, \pi^{-1}(y) \leqslant \dim_{\mathrm{H}} A + \dim_{\mathrm{H}} B - (1 - \frac{1}{r}) \dim_{\mathrm{r}} \pi_*(\eta_A \otimes \eta_B).$$

Si l'on dispose de l'analogue du théorème 5 pour la dimension L^r, il suffira pour démontrer le théorème 2 de faire tendre r vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus. C'est justement ce qu'affirme le théorème ci-dessous, dû à Shmerkin.

Théorème 6. *Soient A, B deux ensembles de Cantor associés à des entiers multiplicativement indépendants, et η_A, η_B les mesures canoniques associées. On note aussi $\mu = \eta_A \otimes \eta_B$ la mesure produit sur $A \times B$. Pour toute projection π sur une droite non parallèle aux axes de coordonnées, on a, pour tout $r > 1$,*

$$\dim_{\mathrm{r}} \pi_*\mu \geqslant \min(1, \dim_{\mathrm{H}} A + \dim_{\mathrm{H}} B).$$

Cette inégalité dimensionnelle provient d'une propriété remarquable d'*auto-similarité dynamique* satisfaite par la mesure $\pi_*\mu$, qui sera étudiée dans la partie suivante, où nous donnerons quelques idées de la démonstration du théorème ci-dessus.

3. Projection de mesures de Cantor

Un ensemble *auto-similaire* dans $\mathbb{R}$ est un ensemble qui est égal à la réunion de plusieurs images de lui-même par des contractions. Tout ensemble de Cantor p-adique F_S a cette propriété, puisqu'on peut écrire

$$F_S = \bigcup_{s \in S} \frac{s}{p} + \frac{1}{p} F_S.$$

On dit de même qu'une mesure ν est auto-similaire s'il existe une famille de contractions $(\phi_s)_{s\in S}$ et des réels positifs $(p_s)_{s\in S}$ tels que $\sum_s p_s = 1$ et $\nu = \sum_{s\in S} p_s \cdot (\phi_s)_*\nu$. C'est le cas pour la mesure μ_S sur l'ensemble de Cantor F_S, si l'on prend $\phi_s(x) = \frac{s}{p} + \frac{x}{p}$ et $p_s = \frac{1}{p}$ pour chaque s. Cette équation vérifiée par μ_S peut s'écrire simplement grâce au produit de convolution :

$$\mu_S = \Delta_S * (S_{p^{-1}} \mu_S),$$

où Δ_S désigne la mesure à support fini $\frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} \delta_{\frac{s}{p}}$, tandis que S_t est l'application de contraction par le facteur t. En itérant l'égalité ci-dessus, on obtient μ_S sous la forme d'un produit de convolution infini de mesures à support fini

$$\mu_S = *_{i=0}^{\infty} S_{p^{-i}} \Delta_S. \tag{4}$$

Cette équation exprime que la géométrie de μ_S à chaque échelle p^{-i} est contrôlée par une unique mesure Δ_S, indépendante de i. La géométrie des mesures auto-similaires a été assez bien étudiée depuis les travaux fondateurs de Mandelbrot, Hutchinson et Mattila au début des années 1980. Plus récemment, en 2012, Hochman a même obtenu une formule pour la dimension de Hausdorff d'un ensemble auto-similaire général, sous une condition de séparation assez faible. La stratégie utilisée par Shmerkin pour démontrer le théorème 6 consiste à développer les idées de Hochman pour pouvoir les appliquer aux projections de mesures invariantes. Cela sera possible car la géométrie de ces projections à toutes les échelles est contrôlée par une structure simple, déjà mise en évidence par Furstenberg.

3.1 – Mesures dynamiquement auto-similaires

On considère maintenant deux mesures de Cantor η_A et η_B sur des ensembles de Cantor A et B associés à des entiers p et q multiplicativement indépendants, et on s'intéresse à une projection de $\mu = \eta_A \otimes \eta_B$ sur une droite non parallèle aux axes de coordonnées. À un changement affine de coordonnées près, nous pouvons écrire cette projection sous la forme

$$\begin{array}{rccc} \pi_x : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a + e^x b \end{array}$$

Pour décrire la structure *presque* auto-similaire de la mesure $\mu_x = (\pi_x)_* \mu$, nous commençons par reformuler l'équation (4) pour η_A en termes probabilistes.

On note $S_A \subset \{0, \dots, p-1\}$ la partie finie qui définit A et $\Delta_A = \frac{1}{|S_A|} \sum_{s \in S_A} \delta_{\frac{s}{p}}$ la probabilité uniforme associée. De même la partie $S_B \subset \{0, \dots, q-1\}$ et la mesure Δ_B sont associés à B. Si $(X_i)_{i \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi Δ_A, alors η_A est la loi de la variable aléatoire

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^{-i} X_i.$$

Naturellement, on dispose d'une écriture analogue pour η_B : si les variables aléatoires $(Y_i)_{i \geqslant 0}$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi Δ_B, la variable aléatoire

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} Y_j$$

est de loi η_B. Supposons $p < q$. Pour rendre ces deux sommes plus compatibles, on peut noter que

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} Y_j = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i} Y'_i$$

où

$$Y'_i = \begin{cases} q^{-j} p^i Y_j & \text{si } p^i < q^j < p^{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il apparaît que la suite des indices i tels que la variable aléatoire Y'_i n'est pas identiquement nulle est codée par le système dynamique $X = [0, \ln q[$, muni de la transformation

$$\begin{array}{rcccc} T: & X & \to & X & \\ & x & \mapsto & x + \ln p & \mod \ln q. \end{array}$$

On introduit une famille $(\Delta(x))_{x \in X}$ de mesures à support fini, définies par

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_A * S_{e^x} \Delta_B & \text{si } x \in [0, \ln p[\\ \Delta_A & \text{si } x \in [\ln p, \ln q[\end{cases}$$

et les observations qui précèdent montrent que $\mu_x = \pi_* \mu$ est la loi d'une variable aléatoire $\sum_{i=1}^{\infty} p^{-i} Z_i$, où les Z_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\Delta(T^i x)$. En d'autres termes,

$$\mu_x = *_{i=1}^{\infty} S_{p^{-i}} \Delta(T^i x).$$

Shmerkin démontre une formule générale pour la dimension de Hausdorff des mesures définies par un système dynamique comme ci-dessus. L'espace métrique X est supposé compact, et la transformation $T \colon X \to X$ continue. Le taux de contraction peut être un réel $\lambda \in]0,1[$ arbitraire, non nécessairement de la forme $\frac{1}{p}$ pour p entier, mais certaines hypothèses sont nécessaires :

1. $T \colon X \to X$ est *uniquement* ergodique, i.e. admet une *unique* probabilité invariante, notée $\mathbb{P}$;
2. les mesures μ_x sont diffuses, supportées par un intervalle compact fixé, et $x \mapsto \mu_x$ est continue (pour la topologie faible) $\mathbb{P}$-presque partout ;
3. pour tout x, la mesure $\Delta(x)$ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ à support fini de cardinal borné, et l'application $x \mapsto \Delta(x)$ est continue $\mathbb{P}$-presque partout ;
4. pour presque tout x, il existe $R \geqslant 0$ tel que, pour n arbitrairement grand, les atomes de $\mu_{x,n} \sim \sum_{i=1}^{n} \lambda^i Z_i$ sont distincts et λ^{Rn}-séparés.

Si ces conditions sont satisfaites – c'est bien le cas dans l'exemple qui nous intéresse – la dimension L^r de la mesure μ_x est la même pour tout x dans X, et donnée par la formule

$$\dim_r \mu_x = \min\left(1, \frac{\int_X \ln \|\Delta(x)\|_r^r \, d\mathbb{P}(x)}{(r-1)\ln \lambda}\right), \qquad (5)$$

où $\|\Delta(x)\|_r^r = \sum_{y \in \mathrm{Supp}\Delta(x)} \big(\Delta(x)(\{y\})\big)^r$. Le lecteur scrupuleux vérifiera par lui-même que cette formule redonne bien le théorème 6.

3.2 – Combinatoire additive

La démonstration de la formule (5) est l'aboutissement de méthodes d'analyse multi-échelle des mesures développées depuis le début des années

2000 par Bourgain, puis par Hochman. Un aspect important de ces méthodes est leur lien avec la *combinatoire additive*. Ce domaine des mathématiques, qui a connu un essor remarquable ces dernières décennies, a pour objet les liens entre la combinatoire et la structure de groupe. Étant donnée une partie A dans $\mathbb{R}$, on s'intéresse par exemple à l'ensemble « somme » :

$$A+A=\{a+b\ ;\ a,b\in A\}.$$

L'archétype des résultats du domaine est sans doute le théorème inverse de Freiman, qui décrit la structure des parties de $\mathbb{Z}$ qui croissent peu sous l'effet de l'addition.

Théorème 7 (Freiman). *Étant donné un paramètre $K\geqslant 2$, il existe une constante $C=C(K)$ telle que l'énoncé suivant soit vérifié.*
Si $A\subset\mathbb{Z}$ est une partie finie telle que $|A+A|\leqslant K|A|$, alors il existe $d\leqslant C$, un parallélépipède $B=[L_1,M_1]\times\cdots\times[L_d,M_d]$ dans $\mathbb{Z}^d$ et un morphisme de groupes $\phi\colon\mathbb{Z}^d\to\mathbb{Z}$ tel que

$$A\subset\phi(B)\quad \text{et}\quad |\phi(B)|\leqslant C|A|.$$

Notons que l'ensemble $\phi(B)$ vérifie $|\phi(B)+\phi(B)|\leqslant 2^C|\phi(B)|$; l'imprécision du théorème ne réside que dans l'expression de la constante C en fonction du paramètre K.

La démonstration de Shmerkin utilise un analogue *discrétisé* du théorème de Freiman. Ayant fixé une petite échelle $\delta>0$, on évalue la taille d'un ensemble borné A dans $\mathbb{R}$ par son nombre de recouvrement

$$N(A,\delta)=\min\{N\ ;\ \exists x_1,\dots,x_N : A\subset\bigcup_{i=1}^N B(x_i,\delta)\}.$$

On cherche alors à décrire les parties A qui vérifient

$$N(A+A,\delta)\leqslant\delta^{-\varepsilon}N(A,\delta). \tag{6}$$

Exemple 2. Soit T un grand entier, m un entier plus grand encore, et $\delta=2^{-mT}$. Étant donnée une partie $\mathscr{I}$ de $\{1,\dots,m\}$, on pose

$$A=\{x=\sum_{i\in\mathscr{I}}a_i2^{-iT}\ ;\ 0\leqslant a_i<2^T\}.$$

Alors, $N(A,\delta)=2^{T|\mathscr{I}|}$, tandis que

$$N(A+A,\delta)\leqslant 2^{(T+1)|\mathscr{I}|}\leqslant\delta^{-\frac{1}{T}}N(A,\delta).$$

À toute partie bornée A dans $\mathbb{R}$, on peut associer un arbre qui décrit la structure multi-échelle de A. Ayant fixé un grand entier T, les sommets de l'arbre au niveau i correspondent aux intervalles de longueur 2^{-iT} qui rencontrent A. Les arêtes de l'arbre relient un intervalle de longueur 2^{-iT} à tous les sous-intervalles de longueur $2^{-(i+1)T}$ qui rencontrent A. Dans l'exemple ci-dessus, on distingue deux types de niveaux :

– si $i\in\mathscr{I}$, le branchement est maximal, égal à 2^T ;
– si $i\notin\mathscr{I}$, le branchement est minimal, égal à 1.

Cela n'est pas anodin, et un résultat de Bourgain montre que l'arbre associé à toute partie A vérifiant (6) possède une structure semblable. L'ensemble des niveaux se divise en deux parties : à certaines échelles, le branchement est essentiellement maximal, tandis qu'il est presque trivial aux autres échelles.

Cette propriété remarquable est exploitée par Shmerkin pour étudier les produits de convolutions de mesures, du point de vue de la norme L^r. Il montre ainsi un « théorème inverse » pour la norme L^r à échelle δ, qui est un analogue pour les mesures du résultat de Bourgain : si deux probabilités μ et ν sur $\delta\mathbb{Z}\cap[0,1]$ vérifient l'inégalité

$$\|\mu*\nu\|_{L^r}\geqslant\delta^{\varepsilon}\|\mu\|_{L^r}$$

alors μ et ν admettent une structure multi-échelle voisine de celle mise en évidence ci-dessus. C'est ce théorème inverse qui permet de démontrer la formule de Shmerkin pour la dimension L^r des mesures dynamiquement auto-similaires.

Conclusion

Malgré cette avancée remarquable de Shmerkin et Wu sur le problème de Furstenberg, la conjecture 2 reste ouverte. Les implications du théorème 2 en ce qui concerne la conjecture 3 au sujet de l'écriture de 2^n en base 10 ne semblent pas non plus très claires. Il serait pourtant intéressant d'avoir au moins un résultat partiel sur la densité des entiers n tels que 2^n ne contient pas tous les chiffres en base 10. Il existe encore bien d'autres conjectures sur l'écriture de 2^n dans d'autres bases. Par exemple, Erdős a conjecturé que pour $n\geqslant 9$, l'écriture en base 3 de 2^n contient toujours un 2 ; et cette fois, même une résolution de la conjecture 2 ne donnerait sans doute pas d'information sur ce problème difficile.

Enfin, il faut mentionner que si le théorème de Shmerkin et Wu donne une borne supérieure optimale sur la dimension d'une intersection d'ensembles fermés invariants, on ne dispose presque d'aucune information sur la borne inférieure, même dans les cas les plus simples. À titre d'exemple, considérons l'ensemble de Cantor triadique C_3, et l'ensemble C_4 des réels qui n'admettent ni 1 ni 2 dans leur écriture en base 4. D'après le théorème 2, on peut majorer

$$\dim_H(C_3 \cap C_4) \leqslant \frac{\ln 2}{\ln 3} + \frac{1}{2} - 1 \simeq 0{,}1309...$$

mais il semble qu'on ne sache même pas si cette intersection est infinie !

Références

[1] T. Austin. « A new dynamical proof of the Shmerkin-Wu theorem ». English. *J. Mod. Dyn.* **18** (2022), p. 1-11. issn : 1930-5311. doi : 10.3934/jmd.2022001.

[2] M. D. Boshernitzan. « Elementary proof of Furstenberg's diophantine result ». English. *Proc. Am. Math. Soc.* **122**, n° 1 (1994), p. 67-70. issn : 0002-9939. doi : 10.2307/2160842.

[3] J. Bourgain et al. « Some effective results for $\times a \times b$ ». English. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **29**, n° 6 (2009), p. 1705-1722. issn : 0143-3857. doi : 10.1017/S0143385708000898.

[4] H. Furstenberg. *Intersections of Cantor sets and transversality of semi-groups*. English. Probl. Analysis, Sympos. in Honor of Salomon Bochner, Princeton Univ. 1969, 41-59. 1970.

[5] H. Furstenberg. « Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation ». English. *Math. Syst. Theory* **1** (1967), p. 1-49. issn : 0025-5661. doi : 10.1007/BF01692494.

[6] M. Hochman et P. Shmerkin. « Local entropy averages and projections of fractal measures ». English. *Ann. Math. (2)* **175**, n° 3 (2012), p. 1001-1059. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2012.175.3.1.

[7] Johnson. « Measures on the circle invariant under multiplication by a nonlacunary subsemigroup of the integers ». *Israel J. Math.* **77**, n° 1-2 (1992), p. 211-240.

[8] D. Malicet. « Furstenberg Theorem ». *notes for a talk in the workshop "groups acting on manifolds", Teresópolis, available at https://perso.crans.org/mdominique/* (2016).

[9] D. J. Rudolph. « ×2 and ×3 invariant measures and entropy ». English. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **10**, n° 2 (1990), p. 395-406. issn : 0143-3857. doi : 10.1017/S0143385700005629.

[10] P. Shmerkin. « On Furstenberg's intersection conjecture, self-similar measures, and the L^q norms of convolutions ». English. *Ann. Math. (2)* **189**, n° 2 (2019), p. 319-391. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2019.189.2.1.

[11] M. Wu. « A proof of Furstenberg's conjecture on the intersections of $\times p$- and $\times q$-invariant sets ». English. *Ann. Math. (2)* **189**, n° 3 (2019), p. 707-751. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2019.189.3.2.

Nicolas de Saxcé

cnrs, Université Sorbonne Paris Nord, laga (umr 7539)

desaxce@math.univ-paris13.fr

Nicolas de Saxcé est chercheur au Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications de l'université Sorbonne Paris Nord. Sa recherche s'articule autour de quelques problèmes d'analyse sur les groupes algébriques, qui vont de la théorie de la mesure à la géométrie des nombres, avec une approche souvent inspirée des systèmes dynamiques.

L'auteur remercie chaleureusement Boris Adamczewski, François Béguin, Aurélie Fischer, Sébastien Gouëzel et Mikael de la Salle pour leur relecture attentive et leurs nombreux commentaires sur ce texte.

Marches aléatoires dans un cône et fonctions discrètes harmoniques

Les marches aléatoires dans un cône présentent le double attrait de se trouver au cœur de nombreux problèmes probabilistes et d'être liées à de multiples domaines mathématiques, comme la théorie spectrale, la combinatoire ou l'analyse complexe discrète. Dans cet article nous présenterons quelques éléments-clé associés à ces processus : nous évoquerons leur définition, le lien avec le mouvement brownien dans un cône, ainsi que quelques sujets de recherche récents comme la construction de fonctions harmoniques discrètes.

• K. Raschel
• P. Tarrago

1. Introduction

1.1 – Marches aléatoires et comportement asymptotique

Dans cet article, nous nous intéresserons au comportement de *marches aléatoires* dans des domaines coniques et commencerons par présenter les motivations et contours de ce sujet. Rappelons qu'une marche aléatoire $S = (S_n)_{n\geqslant 1}$ est un processus aléatoire à temps discret évoluant dans un espace d'états E (que nous considérerons ici toujours dénombrable), tel que la position de S au temps $n+1$ dépend du passé uniquement à travers sa position au temps n. Formellement, nous avons donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_m = x_m, 1 \leqslant m \leqslant n) = \mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_n = x_n) := k_n(x_n, y), \quad (1)$$

pour tous y et $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à E, où $\mathbb{P}(A|B)$ est la probabilité d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé, appelée probabilité de A conditionnellement à B. Nous ferons l'hypothèse que la loi de transition $k := k_n$ est indépendante du temps (on dit alors que la marche aléatoire est *homogène en temps*). Une des questions principales est la compréhension de la marche aléatoire en temps long : sachant que la marche aléatoire part d'un point x_1 au temps $n = 1$, on s'intéresse à

$$\mathbb{P}(S_n = y | S_1 = x_1),$$

la probabilité qu'elle atteigne un point y en un temps n long.

Deux cas classiques se présentent alors. Si E est fini, la situation est complètement comprise au premier ordre : sous certaines hypothèses génériques d'*irréductibilité* et d'*apériodicité*, ce qui signifie simplement que la marche aléatoire peut aller d'un point à l'autre de l'espace d'états sans évolution périodique, il existe une mesure de probabilité m sur E telle que quand $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}(S_n = y | S_1 = x_1) \to m(y)$$

pour tous $x_1, y \in E$. Observons en particulier qu'en temps long, la marche aléatoire oublie son point de départ.

Le deuxième cas classique est celui d'un réseau $E = \mathbb{Z}^d$, avec $d \geqslant 1$, et d'un *noyau* k invariant par translation : $k(x,y) = k(0, y-x) := f(y-x)$. Dans ce cas, qui est la situation principale analysée dans cet article, pour $x_0 \in \mathbb{Z}^d$, on notera $(x_0 + S_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire décalée de x_0, avec $S_0 = 0$. Si la marche est vraiment d-dimensionnelle (ce qui signifie que le support de f génère un sous-module de $\mathbb{Z}^d$ de rang d), il existe alors une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(S_n = y) \leqslant \frac{c}{n^{d/2}}.$$

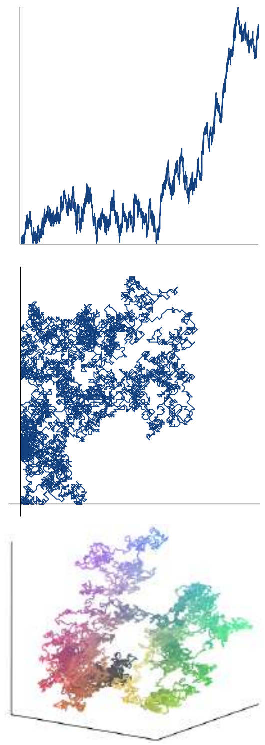
Avec des hypothèses supplémentaires, il est possible d'avoir un développement asymptotique précis de la probabilité précédente, ce que l'on appelle un *théorème de la limite locale*. Par exemple, si f admet un moment d'ordre deux et une dérive nulle, c'est-à-dire si $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)|x|^2 < \infty$ et $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)x = 0$, alors

$$\mathbb{P}(S_n = y) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\Gamma}, \quad (2)$$

où Γ est lié aux moments d'ordre deux de f. Une fois encore, la marche aléatoire oublie son point de départ en première approximation.

L'*invariance par translation* du noyau k est fondamentale pour l'obtention de ces comportements locaux. Il existe d'ailleurs des généralisations de ces résultats à des marches sur des groupes plus généraux que $\mathbb{Z}^d$ ou sur des espaces homogènes, où une telle invariance par translation peut de nouveau être introduite. Au contraire, il est souvent très difficile d'obtenir un résultat asymptotique sur le comportement d'une marche aléatoire sur un espace qui soit à la fois infini et non invariant par translation; c'est le programme de ce qui suit dans le cas de cônes.

Figure 1 – Marches dans des cônes en petite dimension



1.2 – Marches aléatoires confinées

Un moyen simple de considérer des espaces d'états infinis et non invariants par translation est de restreindre une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ à un sous-ensemble A infini du réseau. Sans vouloir faire écho à l'actualité sanitaire, il n'est pas simple d'imposer un confinement à notre processus : en effet, dans de nombreux cas $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 0}\{x_0 + S_n \in A\}\right) = 0$. Comment conditionner par un événement de mesure nulle ?

Une façon élémentaire de contourner ce problème utilise le premier temps de sortie de A

$$\tau_{x_0}^A = \inf\{n \geqslant 0 : x_0 + S_n \notin A\}. \tag{3}$$

Nous pouvons introduire la marche S conditionnée à rester dans le domaine A jusqu'à un certain temps $N \geqslant 0$, c'est-à-dire $\tau_{x_0}^A > N$. Cela donne bien une marche aléatoire jusqu'au temps N (c'est-à-dire que (1) est encore satisfaite par le processus après conditionnement), dont les probabilités de transition sont données, pour $x, y \in A$ et $n < N$, par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_0 + S_{n+1} = y | x_0 + S_n = x, \tau_{x_0}^A > N) \\ = k(x,y)\frac{\mathbb{P}(\tau_y^A > N-n-1)}{\mathbb{P}(\tau_x^A > N-n)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Deux inconvénients sont intrinsèques à la construction précédente : tout d'abord ce nouveau processus n'est défini que jusqu'au temps N; de plus, la nouvelle marche n'est homogène ni en temps ni en espace, et cela même si la marche initiale possédait cette double homogénéité.

Un moyen de retrouver une homogénéité en temps et un horizon de temps infini est de considérer la limite de (4) quand N tend vers l'infini. On obtient alors un nouveau processus $S^A = (S_n^A)_{n\geqslant 0}$ dont les transitions valent, pour $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_0 + S_{n+1}^A = y | x_0 + S_n^A = x) \\ = k(x,y)\lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}(\tau_y^A > N-1)}{\mathbb{P}(\tau_x^A > N)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Sous réserve d'existence de la limite ci-dessus (ce n'est en rien acquis !), le nouveau processus S^A définit une marche aléatoire homogène en temps et à valeurs dans A (par construction). Son noyau est pourvu d'une structure bien particulière, qui fait un lien avec l'analyse harmonique. Fixons $x_0 \in A$ et posons

$$h(y) = \lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}(\tau_y^A > N-1)}{\mathbb{P}(\tau_{x_0}^A > N)}. \tag{6}$$

Nous noterons $\lambda = h(x_0)$. On calcule alors la limite qui apparaît dans (5) :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}(\tau_y^A > N-1)}{\mathbb{P}(\tau_x^A > N)} = \lambda\frac{h(y)}{h(x)}.$$

La relation $\mathbb{P}(\tau_x^A > N) = \sum_{y\in A} k(x,y)\mathbb{P}(\tau_y^A > N-1)$, obtenue par la propriété de Markov, conduit à

$$h(x) = \lambda\sum_{y\in A} k(x,y)h(y). \tag{7}$$

En d'autres termes, la fonction h dans (6) est λ-*harmonique discrète* pour le noyau k et dans le domaine A.

Notre notation (6) permet de reformuler le noyau (5) de la marche conditionnée S^A comme

$$k^A(x,y) = \lambda \frac{h(y)}{h(x)} k(x,y), \tag{8}$$

pour $x, y \in A$. La transformation (8) d'un noyau k par une fonction h est appelée *conditionnement de Doob*, voir [8]. Cette construction fournit un nouveau noyau de marche aléatoire seulement si h est positive et λ-harmonique au sens de (7). Cette méthode, plus conceptuelle que l'approche intuitive présentée en (4), résout le problème du conditionnement par un événement de mesure nulle. Les fonctions harmoniques jouent donc un rôle central dans le conditionnement de marches aléatoires de $\mathbb{Z}^d$ à rester dans des sous-domaines fixés.

De nombreuses questions se posent cependant au sujet de la construction précédente.

(Q1) Dans quels cas a-t-on bien convergence du quotient des *probabilités de survie* dans (5) ?

(Q2) Quand (5) est bien défini, il existe donc une fonction λ-harmonique h introduite en (6), directement liée au comportement probabiliste de la marche aléatoire en temps long. Peut-on construire et interpréter d'autres fonctions λ-harmoniques, qui conduiraient à d'autres conditionnements de Doob ?

(Q3) Le conditionnement (5) (ou (8)) de la marche aléatoire est entièrement décrit par la fonction harmonique h. Existe-t-il, pour certaines marches aléatoires au moins, un moyen de calculer explicitement ou numériquement h ?

Ces trois questions, qui guideront notre présentation, restent largement ouvertes à l'heure actuelle. Le présent article va résumer les résultats récents obtenus dans le cas où le domaine de confinement A est l'intersection d'un *cône* $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^d$ avec le réseau $\mathbb{Z}^d$. Tout en étant infinis et non invariants par translation, ces domaines sont omniprésents en probabilités pures et appliquées : ils sont par exemple régulièrement utilisés en théorie des files d'attente [5, 11], en combinatoire [4] ou encore en théorie des représentations des groupes de Lie [1]. Ils présentent de plus l'avantage d'être invariants par dilatation et d'être très bien compris d'un point de vue analytique : on sait par exemple décrire explicitement le noyau de la chaleur avec conditions de Dirichlet dans un cône $\mathscr{C}$ assez régulier [17], ce qui s'avère essentiel pour l'étude des marches aléatoires conditionnées (voir section 2).

Formellement, nous allons fixer un sous-domaine connexe et ouvert Σ de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ et considérerons le cône

$$\mathscr{C} = \mathbb{Z}^d \cap (\mathbb{R}_+^* \cdot \Sigma).$$

Le domaine A considéré est donc l'intersection de $\mathbb{Z}^d$ avec le cône engendré par l'ensemble des demi-droites issues de 0 et passant par Σ.

2. Marches homogènes à dérive nulle et unicité de la fonction harmonique

Le cas le plus simple est celui d'une marche aléatoire homogène et à dérive nulle. En effet, pour notre cas conditionné on peut tirer profit de la très riche littérature sur les marches aléatoires à dérive nulle dans $\mathbb{Z}^d$ (sans contrainte de cônes). Le cas d'une dérive non nulle sera abordé en section 3.

Pour simplifier la description, nous supposerons que les accroissements de la marche ont une matrice de covariance égale à l'identité, c'est-à-dire, pour une marche sans dérive,

$$\Big(\mathbb{E}[S_1(i)S_1(j)]\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$$

vaut la matrice identité, où $S_1(i)$ est la i-ième coordonnée de S_1 avec, rappelons-le, $S_0 = 0$. Par un changement linéaire approprié, les résultats de cette section restent toutefois valides sans cette restriction.

2.1 – Probabilité de survie

Les nombreux résultats décrivant le comportement de marches dans des cônes culminent avec l'article [7] de Denisov et Wachtel : il en ressort notamment que sous des hypothèses très faibles, il existe un paramètre $p > 0$ intrinsèque au cône $\mathscr{C}$ et une fonction V positive et 1-harmonique (au sens de (7)) tels que le temps de sortie $\tau_x^{\mathscr{C}}$ (voir notre notation (3)) vérifie quand $N \to \infty$

$$\mathbb{P}(\tau_x^{\mathscr{C}} > N) \sim \frac{V(x)}{N^{p/2}}. \tag{9}$$

Cette estimée assure en particulier la bonne définition de la marche conditionnée construite en (5), ce qui répond à la question (Q1) : pour tout choix de $x_0 \in \mathbb{Z}^d \cap \mathscr{C}$, la fonction h définie en (6) est donc égale à $\frac{V}{V(x_0)}$ et $\lambda = h(x_0) = 1$. Dans la suite, nous dirons simplement qu'une fonction est harmonique quand elle est 1-harmonique.

2.2 – Du brownien aux marches

Nous souhaitons à présent mentionner un outil-clé utilisé par les auteurs de [7] pour prouver (9), et plus généralement pour aboutir à une description fine de la marche aléatoire conditionnée en temps long. Il s'agit d'un *couplage* entre marche aléatoire et *mouvement brownien*.

Rappelons qu'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$ d-dimensionnel est un chemin aléatoire continu dans $\mathbb{R}^d$ issu de 0 ; il représente l'objet limite universel des marches aléatoires sans dérive et non conditionnées : après *renormalisation* conjointe des trajectoires de S_n par $\sqrt{N}$ entre les instants 1 et N et du temps par N, la trajectoire discrète ressemble à un mouvement brownien $(B_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ quand N devient grand. Cela implique en particulier qu'entre les temps 1 et N, l'ordre de fluctuation de ce type de marches aléatoires est $\sqrt{N}$.

Un phénomène plus précis a lieu : sans même renormaliser la marche aléatoire, il existe un mouvement brownien qui reste en tout temps $1 \leqslant n \leqslant N$ à distance négligeable de la marche aléatoire par rapport à l'ordre des fluctuations. En particulier, si ce mouvement brownien est loin des bords du cône, avec grande probabilité la marche aléatoire couplée s'en tiendra également éloignée. Ceci est très important pour notre étude : au lieu de considérer une marche discrète dans un domaine restreint, domaine de recherche pour lequel on a peu d'outils directs, il suffit de considérer un mouvement brownien pour lequel on a beaucoup plus d'informations, comme en témoigne par exemple l'un des articles fondateurs [6] de ce domaine.

Le comportement de la diffusion brownienne dans un domaine $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^d$ est plus simple à décrire que celui d'une marche aléatoire dans le même domaine : la (densité de la) probabilité $P_t(x,y)$ qu'un brownien issu de $x \in \mathscr{C}$ se trouve au voisinage de $y \in \mathscr{C}$ au temps t sans avoir quitté $\mathscr{C}$ suit l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet au bord $\partial\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \partial_t P_t(x,\cdot) - \Delta P_t(x,\cdot) = 0, & \text{sur } \mathscr{C}, \\ P_t(x,y) = 0, & y \in \partial\mathscr{C}, \\ \lim\limits_{t\to 0} P_t(x,\cdot) = \delta_x, & \end{cases}$$

où $\lim_{t\to 0} P_t(x,\cdot)$ représente la limite au sens faible de la suite de fonctions $(P_t(x,\cdot))_{t>0}$, δ_x est la fonction de Dirac en x, et Δ désigne le Laplacien classique de $\mathbb{R}^d$. De même, la probabilité de survie $P_t(x)$ (probabilité que le mouvement brownien issu de x n'ait pas quitté $\mathscr{C}$ à l'instant t) obéit à l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet au bord et condition initiale $P_0(x) = 1$, $x \in \mathscr{C}$.

L'équation de la chaleur dans un cône est classique du point de vue de l'analyse spectrale ; le comportement des solutions de ces équations aux dérivées partielles est gouverné par une fonction $u : \mathscr{C} \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait à l'équation d'harmonicité $\Delta u = 0$ sur $\mathscr{C}$ et $u_{\partial\mathscr{C}} = 0$. Il se trouve que cette fonction, appelée la *réduite* du cône, est l'unique fonction harmonique positive sur $\mathscr{C}$ s'annulant sur le bord (à une constante multiplicative près). Pour donner une idée du rôle fondamental joué par cette fonction dans le cas discret, notons que la fonction harmonique V donnée en (9) admet le comportement asymptotique suivant, quand $|x| \to \infty$ et $d(x,\partial\mathscr{C}) \geqslant \varepsilon|x|$:

$$V(x) \sim u(x)$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, voir [7]. La fonction V étant un exemple de fonction harmonique h introduite en section 1, cette asymptotique répond partiellement à (Q3) loin des bords de $\mathscr{C}$. En particulier, quand x et y sont grands et se tiennent éloignés du bord du cône, la marche conditionnée S^A dans le domaine $A = \mathscr{C} \cap \mathbb{Z}^d$ grâce à la fonction harmonique $h = \frac{V}{V(x_0)}$ a un noyau (8) asymptotiquement égal à

$$k^A(x,y) \sim \frac{u(y)}{u(x)} k(x,y).$$

2.3 – Théorie de Doob et unicité de la fonction harmonique

Les résultats de Denisov et Wachtel apportent une réponse positive à (Q1) en s'appuyant sur la réduite u du cône $\mathscr{C}$, qui est l'unique fonction harmonique positive pour l'opérateur Laplacien dans $\mathscr{C}$ satisfaisant aux conditions de Dirichlet. Il est donc tentant de supposer que de façon analogue, il existe une unique fonction harmonique discrète positive solution de (7), à des constantes multiplicatives près. Cependant, comme nous avons pu écrire plus haut, l'une des difficultés posée par les marches conditionnées consiste en l'absence d'outils analytiques directs (voir toutefois les sections 3.2 et 4 pour des approches analytiques possibles).

Il existe tout de même un moyen général de décrire l'ensemble des fonctions harmoniques positives d'une marche aléatoire, que nous allons maintenant aborder. Nous avons vu dans la section 1.2 que conditionner une marche sur $\mathbb{Z}^d$ à rester dans un domaine jusqu'à un temps long faisait apparaître, à la limite, une fonction harmonique particulière, voir (7) : celle-ci se caractérise comme la limite d'un quotient de probabilités de survie, à condition que ce dernier converge. On souhaiterait modifier cette définition pour se débarrasser de la condition de convergence et ainsi obtenir toutes les fonctions harmoniques possibles. C'est précisément l'objectif de la théorie de la *frontière de Martin*.

Frontière de Martin

Cette théorie, dont nous ne pouvons donner qu'un court aperçu ici, relie de manière très précise l'ensemble des fonctions harmoniques positives au comportement asymptotique de la marche aléatoire sous-jacente. Les références [8, 14, 13] contiennent une présentation détaillée de cette notion.

Élargissons d'abord notre problème en nous intéressant à l'équation

$$\begin{cases} g(x) - \sum_{y \in \mathscr{C}} k(x,y) g(y) = f(x), & x \in \mathscr{C}, \\ g(x) = 0, & x \in \partial\mathscr{C}, \end{cases} \tag{10}$$

où $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée. L'équation d'harmonicité (7) est un cas particulier de (10), posant $f = 0$. Cela revient naïvement à inverser l'opérateur $\mathrm{Id} - k_{|\mathscr{C}}$ (qui, rappelons-le, n'est pas injectif puisque la fonction V introduite en (9) est dans son noyau) ; on voudrait donc poser

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{y \in \mathscr{C}} \left(\sum_{n \geqslant 0} k^n_{|\mathscr{C}}(x,y) \right) f(y) \\ &= \sum_{y \in \mathscr{C}} \left(\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x^{\mathscr{C}} > n) \right) f(y) := Gf(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Cette solution est bien définie pour toute fonction f à support fini si et seulement si la *fonction de Green*

$$G(x,y) := \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x^{\mathscr{C}} > n) \tag{12}$$

est finie pour tous $x, y \in \mathscr{C}$. Cette condition de finitude est réalisée dès lors la marche aléatoire est *transiente*, ce qui signifie qu'elle ne passe qu'un nombre fini de fois par chaque état.

L'hypothèse de transience est bien satisfaite dans notre situation : du fait de la dérive nulle, la marche aléatoire non conditionnée sort forcément du cône $\mathscr{C}$ en temps fini.

On vérifie facilement que la fonction de Green $G(\cdot, y)$ définie en (12) est solution de l'équation (10) pour $f = \delta_y$. En d'autres termes, elle est harmonique partout sauf en y ! L'observation-clé pour construire une fonction harmonique *en tout point* et positive réside dans la remarque suivante : prenons une suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

- quand $n \to \infty$, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathscr{C}$;
- $(Gf_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathscr{C}$ vers une fonction non nulle (les fonctions Gf_n étant définies par (11)).

Sous ces conditions, $\lim_{n \to \infty} Gf_n$ sera une fonction harmonique positive.

L'exemple fondamental d'une telle construction est le suivant : fixons $x_0 \in \mathscr{C}$ et prenons

$$f_n = \frac{1}{G(x_0, y_n)} \delta_{y_n}, \tag{13}$$

pour une suite de points $(y_n)_{n \geqslant 0}$ allant vers l'infini dans $\mathscr{C}$ telle que la suite $(Gf_n)_{n \geqslant 0}$ converge (alors nécessairement vers une fonction non nulle, puisque prenant la valeur 1 en x_0). La limite définit une fonction harmonique, qui dépend *a priori* de la façon avec laquelle la suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ va à l'infini, mais ne dépend de x_0 qu'à une constante multiplicative près. L'ensemble des fonctions harmoniques ainsi obtenues est appelé la frontière de Martin de la marche.

Le *théorème de représentation de Martin* affirme alors que *toute* fonction harmonique égale à 1 en x_0 peut être obtenue comme combinaison convexe d'éléments de la frontière de Martin (le théorème donne en plus une structure particulière, voir [8], qui va au-delà du cadre de cette introduction). Ce théorème donne donc une description de l'ensemble des fonctions harmoniques positives, à condition de pouvoir décrire la frontière de Martin.

Présentons une application de cette théorie au problème de l'unicité de la fonction harmonique positive. Imaginons que pour y_n tendant vers l'infini, la fonction de Green (12) admette l'asymptotique

$$G(x, y_n) \sim \frac{1}{|x - y_n|^\alpha} V(x) F(y_n), \tag{14}$$

où V est la fonction harmonique donnée en (9), F est une fonction indépendante de x, et α est un paramètre dépendant éventuellement de y_n. Pour la suite f_n introduite en (13) et en omettant tout problème de convergence quand n tend vers l'infini, on aura

$$Gf_n(x) \sim \frac{V(x)F(y_n)}{V(x_0)F(y_n)} \frac{|x_0 - y_n|^\alpha}{|x - y_n|^\alpha} \sim \frac{V(x)}{V(x_0)}.$$

On voit donc que pour toute suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ tendant vers l'infini dans le cône, Gf_n converge vers la fonction harmonique positive V, à une constante multiplicative près. Cela prouve l'unicité de la fonction harmonique positive.

L'un des premiers travaux prouvant de tels résultats fut [1], en lien avec des algèbres de Lie. Dans le cas d'un cône $\mathscr{C}$ convexe ou assez régulier et sous certaines conditions de moments des accroissements de la marche aléatoire, une preuve du découplage (14) est donnée dans [10] et expliquée dans le prochain paragraphe.

Asymptotique du noyau de Green

Pour comprendre le découplage asymptotique de $G(x,y)$ évoqué en (14), il est instructif de décomposer la fonction de Green (12) comme suit :

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \sum_{n=o(|x-y|)^2} \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x^{\mathscr{C}} > n) \\ &\quad + \sum_{n \gtrsim |x-y|^2} \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x^{\mathscr{C}} > n) \\ &:= G_{\mathrm{negl}}(x,y) + G_{\mathrm{fluc}}(x,y), \end{aligned} \tag{15}$$

où le symbole « $\gtrsim$ » désigne donc les indices n absents de la première somme, de manière à n'en oublier aucun. En effet, nous savons qu'une marche aléatoire non conditionnée fluctue avec une amplitude $\sqrt{n}$ au temps n ; cela rend naturelle la décomposition ci-dessus quand $|x-y|$ devient grand, et on s'attend à ce que G_{negl} soit négligeable devant G_{fluc}.

Intéressons-nous au second terme dans (15). Quand n est nettement plus grand que $|x-y|$, la position relative de x et y importe peu ; seules comptent les positions de x et y par rapport au bord. Le terme

$$\mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x^{\mathscr{C}} > n) \tag{16}$$

vaut donc approximativement

$$Cn^{-d/2}\mathbb{P}(\tau_x^{\mathscr{C}} \geqslant n/2)\mathbb{P}(\overline{\tau}_y^{\mathscr{C}} \geqslant n/2),$$

où $C > 0$ est une constante et $\overline{\tau}_y^{\mathscr{C}}$ représente le temps de sortie pour la marche $(-S_n)_{n \geqslant 1}$: en effet, du point de vue de y la marche aléatoire va à l'envers ! La contribution $n^{-d/2}$ est la contribution typique venant du théorème central de la limite locale en dimension $d \geqslant 1$, voir (2). Utilisant (9), on déduit que lorsque $y \to \infty$,

$$G_{\mathrm{fluc}}(x,y) \sim V(x) \sum_{n \gtrsim |x-y|^2} n^{-d/2-p/2}\mathbb{P}(\overline{\tau}_y^{\mathscr{C}} \geqslant n/2).$$

Quand y tend vers l'infini dans le cône, deux situations peuvent se présenter : soit la distance de y au bord reste macroscopique devant $|y|$, soit y s'approche du bord de $\mathscr{C}$ en allant vers l'infini. Dans le premier cas, la marche renversée issue de y ne voit pas le bord, et on peut ignorer le terme $\mathbb{P}(\overline{\tau}_y^{\mathscr{C}} \geqslant n/2)$. Dans le deuxième cas, la marche aléatoire partant de y ne voit pas l'origine du cône mais un cône $\mathscr{C}_y$ tangent à $\mathscr{C}$ en un point proche de y. En raffinant les résultats de [7], il est possible de montrer que $\overline{\tau}_y^{\mathscr{C}}$ se comporte de manière semblable à (9) pour le cône tangent $\mathscr{C}_y$, ce qui correspond à l'asymptotique

$$\mathbb{P}(\overline{\tau}_y^{\mathscr{C}} > n) \sim \mathbb{P}(\overline{\tau}_y^{\mathscr{C}_y} > n) \sim \frac{F(y)}{n^{q/2}},$$

où $F(y)$ ne tend pas vers 0 et q est le paramètre p du cône tangent $\mathscr{C}_y$. En sommant les contributions de G_{fluc} sur $n \gtrsim |x-y|^2$, on a alors le comportement asymptotique

$$G_{\mathrm{fluc}}(x,y) \sim V(x)F(y)|x-y|^{-d-p-q+2}. \tag{17}$$

Le problème restant est de savoir quand, dans (15), $G_{\mathrm{negl}}(x,y)$ est effectivement négligeable par rapport à $G_{\mathrm{fluc}}(x,y)$. Posons

$$q_0 = \sup_{\mathscr{K} \text{ cône tangent à } \mathscr{C}} q_{\mathscr{K}}.$$

Le raisonnement précédent via (17) permet d'interpréter $d + p + q_0 - 2$ comme la décroissance maximale de $G_{\mathrm{fluc}}(x,y)$ quand y tend vers l'infini. Si $\mathbb{E}[|S_1|^{d+p+q_0-2}] = \infty$, on peut construire un exemple (semblable aux contre-exemples pour l'inégalité de Markov quand la condition de moment n'est plus vérifiée) pour lequel

$$G_{\mathrm{negl}}(x,y) \geqslant \mathbb{P}(x + S_1 = y, \tau_x^{\mathscr{C}} > 1) \geqslant |x-y|^{-d-p-q_0+2}$$

quand y tend vers l'infini, et donc pour lequel, en vertu de (17), $G_{\mathrm{negl}}(x,y)$ n'est pas négligeable devant $G_{\mathrm{fluc}}(x,y)$.

On peut montrer qu'une condition suffisante pour garantir la négligeabilité de $G_{\mathrm{negl}}(x,y)$ consiste à imposer $\mathbb{E}[|S_1|^{d+p+q_0-2+\varepsilon}] < \infty$ pour un

$\varepsilon > 0$ quelconque. On a alors, sous cette nouvelle condition de moment,

$$G(x,y) \sim V(x)F(y)|y-x|^{-d-p-q+2}$$

quand $|y|$ tend vers l'infini et, d'après le paragraphe sur la frontière de Martin, ce découplage entraîne l'unicité (à constante multiplicative près) de la fonction harmonique positive.

3. Au-delà du cas homogène à dérive nulle

Nous allons présenter deux résultats importants, décrivant l'ensemble des fonctions harmoniques positives dans un cône dans le cas où la marche aléatoire a une dérive non nulle ou n'est pas homogène. Le cas d'une dérive non nulle, qui est traité en premier en suivant [13], conduit à une caractérisation topologique de la frontière de Martin à l'aide d'une courbe particulière. Dans le cas d'une marche aléatoire non homogène avec dérive nulle, qui est abordé dans un deuxième temps et suit [3], il est possible de retrouver l'unicité de la fonction harmonique, comme dans le cas homogène.

3.1 – Dérive non nulle : heuristique et résultats

Commençons par évoquer le fameux théorème de Ney et Spitzer [16], traitant du cas classique de marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$ homogènes, irréductibles et avec dérive, pour lequel les fonctions exponentielles jouent un rôle central. Pour plus de commodité nous nous placerons en dimension $d = 2$; les techniques et résultats se généralisent *verbatim* en dimension quelconque.

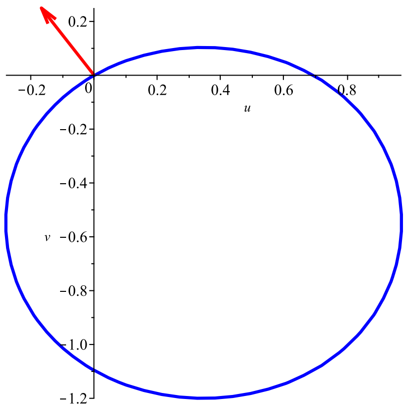
Posons $L(u,v) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} f(i,j)\exp(ui+vj)$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ où, rappelons-le (voir la section 1), $f(i,j)$ représente la probabilité de saut $\mathbb{P}(S_1 = (i,j)|S_0 = (0,0))$. Un calcul simple montre qu'une fonction exponentielle $h(i,j) = \exp(ui+vj)$ est harmonique si et seulement si son paramètre $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ satisfait à l'équation

$$L(u,v) = 1. \tag{18}$$

La fonction L est convexe et, en $(u,v) = (0,0)$, $L(0,0) = 1$, $\nabla L(0,0) = \mathbb{E}[S_1] \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Hess}[L](0,0)$ est la matrice de covariance de S_1, donc définie positive.

Une dérive nulle garantit pour une marche irréductible que seul le point $(u,v) = (0,0)$ est solution de (18), comme alors $(0,0)$ est le minimum global de L. À l'inverse, en présence d'une dérive, $L(0,0)$ n'est plus le minimum de L et cette même équation (18) est satisfaite par le bord d'un convexe fermé d'intérieur non vide. Elle définit donc un ensemble homéomorphe à $\mathbb{S}^{d-1}$, c'est-à-dire un cercle en dimension 2. Nous représentons figure 2 la courbe de niveau (18) pour la marche $L(u,v) = \frac{e^u}{6} + \frac{e^{-u}}{3} + \frac{3e^v}{8} + \frac{e^{-v}}{8}$. La dérive $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$ est orthogonale à la courbe en l'origine.

Figure 2 – Un exemple de courbe de niveau (18)



Ney et Spitzer [16] obtiennent l'asymptotique des fonctions de Green

$$G(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(x+S_n = y)$$

et en déduisent que l'ensemble des (u,v) caractérisés par (18) représente exactement la frontière de Martin.

Avant de passer au cas d'un cône (plus restreint géographiquement mais plus riche mathématiquement), évoquons brièvement la propriété de *minimalité* de certaines fonctions harmoniques. Une fonction harmonique positive h est dite minimale si les seules fonctions harmoniques g vérifiant $0 \leqslant g \leqslant h$ sont en fait proportionnelles à h.

D'après la théorie de la frontière de Martin et le résultat de Ney et Spitzer, les exponentielles $h(i,j) = \exp(ui+vj)$ définissent les seules fonctions harmoniques minimales. On peut retrouver cette propriété par un calcul direct. Si en effet $h(i,j)$ est harmonique, alors $h(i+1,j)$ l'est également. Sous une hypothèse non contraignante d'irréductibilité, on trouve facilement $h(i,j) \geqslant ch(i+1,j)$, où par exemple c est la probabilité de visiter $(i+1,j)$ en partant de (i,j) si celle-ci est non nulle, et donc par minimalité $h(i+1,j) = ah(i,j)$. Comme un raisonnement symétrique s'applique à $h(i,j+1)$, on aboutit à la propriété classique de morphisme caractérisant les fonctions exponentielles.

Examinons maintenant la situation des marches dans des cônes, à travers l'exemple du demi-plan $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Les marches aléatoires réfléchies ou tuées dans des demi-espaces $\mathbb{Z}^{d-1}\times\mathbb{N}$ sont des cas particuliers de *processus de Markov additifs* (parfois appelés Markov modulés) : l'une des coordonnées (ici la première, qui vit sur $\mathbb{Z}$) est la partie additive, invariante par translation ; la seconde coordonnée est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ (*a priori* inhomogène en espace) qui « module » le premier processus.

La structure des fonctions harmoniques minimales est claire : on peut appliquer l'argument précédent à $h(i+1,j)$ et déduire que toute fonction minimale harmonique prend la forme

$$h(i,j) = \exp(ui)h(0,j). \tag{19}$$

Cela nous permet d'effectuer une réduction de dimension. Supposons un instant u connu dans (19) ; alors la relation d'harmonicité discrète pour $h(i,j)$ se transforme en une relation analogue mais unidimensionnelle pour $h(0,j)$. On bascule alors dans la théorie discrète du potentiel sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, que nous ne développerons pas ici, mais pour laquelle de nombreux outils et résultats sont disponibles, et grâce à laquelle $h(0,j)$ peut être caractérisée.

Le point subtil est de trouver les valeurs possibles pour u dans (19). Suivant une idée originale de Foley et McDonald, on peut calculer de deux façons différentes la limite de

$$\frac{G\big((i+1,j),(k,\ell)\big)}{G\big((i,j),(k,\ell)\big)} \tag{20}$$

lorsque (k,ℓ) tend vers l'infini dans la direction de la dérive. Choisir cette direction particulière n'est en fait pas une restriction : on peut toujours s'y ramener grâce à une transformation de Doob comme présentée en section 1. D'une part, en utilisant les asymptotiques de chacune des fonctions de Green au numérateur et dénominateur, on aboutit à une limite dans (20) de la forme $h(i+1,j)/h(i,j)$, où h est une certaine fonction harmonique, dont on peut montrer qu'elle est minimale. Par ailleurs, en utilisant une méthode de « décomposition de Bernoulli », qui étudie la dépendance de la fonction de Green en les premiers pas, toujours dans la direction asymptotique dictée par la dérive, on trouve que la limite de (20) est égale à 1. Autrement dit, après conditionnement de Doob, on trouve systématiquement $u = 0$ dans (19).

Dans le cas des demi-espaces, les calculs sont menés dans [13]. Des idées similaires fonctionnent pour d'autres cônes, avec des détails plus complexes selon la nature des cônes.

3.2 – Marches inhomogènes et inégalités de Harnack

Les marches aléatoires $(x_0+S_n)_{n\geqslant 0}$ considérées jusqu'ici étaient homogènes en espace. Cela signifie (section 1) que le noyau de la marche non conditionnée est de la forme $k(x,y) = f(y-x)$, où $f:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}_+$ est une mesure de probabilité. Cette hypothèse est cruciale dans la section 2, puisqu'elle permet de réaliser un couplage entre marche aléatoire et mouvement brownien, expliquant ainsi les similitudes entre le comportement des fonctions harmoniques de la marche discrète et celles du cas diffusif. Cependant, une marche aléatoire générique est inhomogène en espace, et dans cette section nous présentons quelques idées qui s'appliquent dans ce cas non homogène.

Répondre à (Q1) (asymptotique de la probabilité de survie comme en (9)) dans le cas non homogène s'avère particulièrement complexe, en raison du comportement non régulier de la marche aléatoire. En revanche, il existe une approche permettant d'aborder la question (Q2) (description de l'ensemble des fonctions harmoniques). Cette méthode, décrite dans [3], conduit au premier résultat général d'unicité de la fonction harmonique positive.

De nouveau, la méthode consiste à comparer la situation discrète engendrée par la marche aléatoire à la situation continue d'un processus de diffusion. Rappelons qu'une fonction harmonique pour le mouvement brownien est une fonction harmonique au sens (classique) analytique du terme, c'est-à-dire vérifiant dans le domaine

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Un comportement bien connu des fonctions harmoniques pour le Laplacien (valide en fait pour tout opérateur différentiel elliptique) est la propriété de *moyennisation*, qui se traduit par l'*inégalité de Harnack* : il existe une constante universelle $C>0$ (dépendant uniquement de la dimension) telle que si f est une fonction positive harmonique sur une boule de centre x et de rayon $2R$, alors pour tous $y, z \in B(x, R)$ on a

$$f(z) \leqslant Cf(y). \tag{21}$$

Cette inégalité, qui peut s'obtenir directement à l'aide du noyau de Poisson dans le cas du Laplacien, se comprend intuitivement par le fait qu'une fonction harmonique varie peu quand elle s'éloigne du bord de son domaine de définition (précisément grâce à cette propriété de moyennisation).

Quand on impose de plus à la fonction harmonique de s'annuler sur le bord de son domaine, et si en outre ce bord est assez régulier (Lipschitz par exemple), on peut encore obtenir une inégalité de *Harnack au bord*, qui prend la forme suivante. Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que pour toutes fonctions f, g harmoniques positives sur l'intersection d'une boule $B(x, 2R)$ et d'un domaine, si f et g s'annulent sur le bord de ce domaine, alors

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \leqslant & C\frac{f(e)}{g(e)}, \\ f(x) & \leqslant & Cf(e), \end{cases} \tag{22}$$

où e est un point à distance macroscopique du bord (relativement à R). Par des méthodes assez générales, on peut montrer que les équations (21) et (22) assurent en même temps l'existence et l'unicité de la fonction harmonique positive s'annulant sur le bord, pour tout domaine au bord assez régulier.

L'important travail mené dans [3] est d'obtenir ces inégalités de Harnack dans le cas de marches aléatoires non homogènes à dérive nulle dans l'orthant $\mathbb{N}^d$. Ces marches doivent tout de même satisfaire à certaines conditions : tout d'abord elles doivent être elliptiques, ce qui signifie qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $k(x, x \pm e_i) \geqslant \alpha$ pour tout vecteur de la base canonique e_i. Cette condition est à rapprocher de la théorie des opérateurs différentiels elliptiques, pour lesquels les inégalités de Harnack existent. D'autre part, l'ensemble de pas doit être borné uniformément pour tout $x \in \mathbb{N}^d$. Cette dernière hypothèse est cruciale : dans le cas d'un ensemble de pas non bornés, les inégalités de Harnack peuvent ne plus être valables [15].

À l'aide de ces inégalités, les auteurs de [3] parviennent à prouver l'existence et l'unicité de la fonction harmonique positive (à constante multiplicative près) par des procédés très semblables à ceux utilisés dans le cas continu. En plus de constituer la première réponse à (Q2) dans un cadre général, ce résultat montre l'aspect central des inégalités de Harnack dans l'étude des chaînes de Markov discrètes. Cette approche a été poursuivie pour obtenir des estimées gaussiennes de marches aléatoires inhomogènes en espace dans des cônes, ou encore pour répondre à la question (Q2) dans le cas où le domaine sur lequel on restreint la marche aléatoire est un domaine Lipschitz.

4. Sur la construction explicite des fonctions harmoniques dans un quadrant

Cette section est consacrée à la question (Q3) dans le cas d'un quart de plan et d'une marche homogène.

Dans le cas classique continu, le calcul des fonctions harmoniques dans des cônes de $\mathbb{R}^d$ s'effectue facilement, grâce à la décomposition polaire. À titre d'exemple, en dimension 2, toute fonction harmonique $f(x, y) = \widetilde{f}(\rho, t)$ dans le cône d'ouverture θ

$$\{\rho e^{it} : \rho \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant \theta\}$$

s'écrira comme une somme pondérée de termes $\rho^{k\pi/\theta} \sin(kt\pi/\theta)$, avec $k \geqslant 1$. Dans le cas discret, l'absence de décomposition polaire sera source de complications considérables mais aussi de richesses.

La littérature existante donne des pistes sur des constructions possibles de fonctions discrètes harmoniques. Si des polynômes ou exponentielles harmoniques peuvent être obtenus de façon élémentaire, via une récurrence, c'est souvent l'existence d'une structure supplémentaire qui ouvre la voie à la construction de fonctions harmoniques. Par exemple, lorsque le cône est une chambre de Weyl, des outils comme le principe de réflexion, des déterminants de Vandermonde, ou un détour par la théorie des représentations et des réseaux de poids permettent d'exprimer des fonctions harmoniques, voir par exemple [1].

Nous souhaitons ici présenter une construction plus analytique, qui est l'objet du travail [12]. Notre approche, bien qu'intrinsèque à la dimension 2 (elle fonctionne *a priori* seulement dans le quart de plan – ou de façon équivalente dans tout cône convexe planaire, après transformation linéaire), ne suppose aucune symétrie ou structure additionnelle sur les pas. L'idée se résume simplement : en utilisant des séries génératrices, les équations d'harmonicité discrète (7) se reformulent en une *équation fonctionnelle*, qui sera énoncée en (23). Celle-ci appartient à une classe d'équations qui, du fait de ses apparitions répétées dans des problèmes de files d'attente [11], de processus stationnaires dans le quart de plan, de processus transients [14], ou encore d'énumération des chemins en combinatoire [4], s'est retrouvée au centre d'investigations poussées de la part de différentes communautés mathématiques.

Notre construction permet de décrire l'ensemble des fonctions harmoniques réelles (non nécessairement positives), qui apparaissent notamment dans des développements asymptotiques de certaines quantités pertinentes, comme la probabilité de survie (9). Elle conduit donc à la description de la structure de l'ensemble des fonctions harmoniques. En outre, dans le cas où la frontière de Martin est un singleton (par exemple quand la dérive est nulle, comme prouvé dans [10], voir notre section 2.3), notre construction permet également de calculer l'unique fonction harmonique positive, celle utilisée pour le conditionnement de Doob dans les sections 1 et 2.

4.1 – Une équation fonctionnelle...

Afin d'énoncer notre équation principale, nous introduisons une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$ avec probabilité de saut $f(k,\ell)$ dans la direction (k,ℓ). Supposons que les sauts positifs sont petits, c'est-à-dire que $f(k,\ell)=0$ si $k>1$ ou $\ell>1$; en revanche, les sauts négatifs peuvent être choisis arbitrairement grands. Introduisons le noyau de la marche

$$K(x,y)=xy\Big(\sum\nolimits_{k,\ell} f(k,\ell)x^{-k}y^{-\ell}-1\Big).$$

En vertu de notre hypothèse, $K(x,y)$ est un polynôme (ou une série bivariée si les sauts ne sont pas bornés). Étant donnée une fonction harmonique générique $h=(h(i,j))_{i,j\geqslant 1}$ avec conditions de Dirichlet (i.e., $h(i,0)=0$ pour $i\geqslant 1$ et $h(0,j)=0$ pour $j\geqslant 1$), sa *série génératrice* est définie par

$$H(x,y)=\sum_{i,j\geqslant 1} h(i,j)x^{i-1}y^{j-1}.$$

L'équation d'harmonicité (7) pour h (pour $\lambda=1$) se traduit alors par l'équation fondamentale

$$\begin{aligned} &K(x,y)H(x,y)=\\ &K(x,0)H(x,0)+K(0,y)H(0,y)-K(0,0)H(0,0). \end{aligned} \tag{23}$$

Montrons à titre d'exemple que l'équation (23) a bien lieu dans le cas de la marche dite simple : $f(1,0)=f(0,-1)=f(-1,0)=f(0,1)=\frac{1}{4}$. L'unique fonction harmonique positive vaut $h(i,j)=ij$ et a pour série génératrice $H(x,y)=\frac{1}{(1-x)^2(1-y)^2}$. L'égalité (23) provient alors de calculs élémentaires. La série génératrice

$$H(x,y)=\frac{6(xy-1)(y-x)}{(1-x)^4(1-y)^4},$$

qui correspond à la fonction harmonique signée $h(i,j)=ij(i^2-j^2)$, fournit un autre exemple de solution à l'équation (23).

4.2 – ... et de nombreuses questions

L'équation (23) montre que toute fonction génératrice d'une fonction harmonique doit prendre la forme (avec des notations évidentes)

$$H(x,y)=\frac{F(x)+G(y)}{K(x,y)} \tag{24}$$

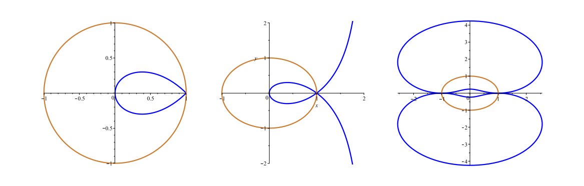
pour des séries entières F et G. En revanche, si $K(0,0)=0$, la formule (24) ne définit pas nécessairement une série entière bivariée. Quelles sont les séries F et G telles que (24) est bien une série en $(0,0)$? Quel est le domaine d'analyticité de $H(x,y)$ dans (24), ou de façon analogue, quelle est la croissance des fonctions harmoniques ? Quel choix de F et G conduit à des fonctions harmoniques positives ?

L'ouvrage [5] contient une idée féconde pour aborder les questions ci-dessus : dans un contexte probabiliste lié aux distributions stationnaires de marches aléatoires, les auteurs proposent d'évaluer l'équation fonctionnelle principale (23) sur

$$\mathscr{K}=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : |x|=|y|\leqslant 1 \text{ et } K(x,y)=0\}. \tag{25}$$

Si, au premier abord peut-être, l'ensemble (25) paraît surprenant, il présente l'avantage de ne contenir que des x et y petits en module, donc on a de bonnes chances de pouvoir y évaluer nos séries génératrices ; de plus, lors de l'évaluation le terme de gauche de (23) disparaîtra, comme par définition $K(x,y)=0$. En outre, les rôles joués par x et y sont clairement symétriques dans (25) ; finalement, les projections de cet ensemble s'avèrent décrire des courbes intéressantes $\mathscr{S}_x$ et $\mathscr{S}_y$, voir la figure 3.

FIGURE 3 – Projection en x de l'ensemble (25)



À gauche sur la figure 3, en bleu, la courbe $\mathscr{S}_x = \mathscr{S}_y$ définie par (25) dans le cas de la marche simple. Elle est contenue dans la courbe avec auto-intersection représentée au milieu. À droite, la courbe $\mathscr{S}_x$ pour la marche $(-1,1),(1,0),(0,-1)$ est l'intersection de la courbe représentée avec le disque unité. Le cercle unité est représenté en couleur or (sur les trois graphiques).

4.3 – Réduction à un problème frontière

Si h est effectivement harmonique, l'évaluation de l'équation (23) pour $(x,y) \in \mathscr{K}$ donne immédiatement

$$F(x) + G(y) = 0, \tag{26}$$

où F et G sont définies en (24). Supposons pour la fin de la section 4 nous trouver dans le cas symétrique $f(k,\ell) = f(\ell,k)$, car alors les projections $\mathscr{S}_x = \mathscr{S}_y$ de (25) sont les mêmes en x et en y, ce qui simplifiera notre présentation.

Si Ψ_1 (resp. Ψ_2) est une *application conforme* entre le demi-plan supérieur $\mathscr{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (resp. inférieur $\mathscr{H}_-$) et le domaine intérieur à $\mathscr{S}_x = \mathscr{S}_y$, alors on reformule (26) comme le *problème frontière* suivant. Définissons d'abord la fonction

$$g(t) = \begin{cases} F(\Psi_1(t)) & \text{si} \quad t \in \mathscr{H}_+, \\ -G(\Psi_2(t)) & \text{si} \quad t \in \mathscr{H}_-, \end{cases} \tag{27}$$

et faisons tout de suite une première remarque. Supposant F et G analytiques à l'intérieur de $\mathscr{S}_x$, la fonction g est alors analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. La fonction g est alors dite sectionnellement analytique.

Plus intéressant encore, la condition (26) se réécrit simplement comme

$$g^+(t) - g^-(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{28}$$

où $g^+(t)$ et $g^-(t)$ représentent les limites de $g(z)$ quand $z \to t$ dans $\mathscr{H}^+$ et $\mathscr{H}^-$, respectivement. Il est particulièrement frappant qu'après l'utilisation des séries génératrices et différentes reformulations, l'équation d'harmonicité (7) devient équivalente à une condition tout à fait classique de continuité (28) pour la fonction g en (27).

Toute fonction entière, en particulier tout polynôme, est continue au voisinage de $\mathbb{R}$ et donc résout (28). Via les changements de variables inverses (notamment dans les applications conformes), on décrit l'ensemble de toutes les fonctions harmoniques. Cette approche permet de répondre aux différentes questions posées dans la section 4.2. Nous conjecturons [12] que dans le cas d'une dérive nulle, l'unique fonction harmonique positive correspond à prendre $g(t) = t$ dans (27) et (28). Positivité (de la fonction harmonique) rimerait donc avec minimalité (du degré du polynôme t dans $g(t) = t$).

5. Applications en combinatoire

5.1 – Motivations et reformulation probabiliste

Depuis les années 2000, la communauté combinatoire s'est également emparée de questions étroitement liées aux marches (aléatoires ou déterministes) dans des cônes. Une des motivations principales est l'existence de *bijections* entre des modèles de marches dans des cônes et de nombreux *objets combinatoires* : permutations, tableaux de Young, marches ordonnées, orientations bipolaires, etc., voir par exemple [4]. En parallèle de ces motivations exogènes, les marches dans des cônes sont peu à peu devenues un objet combinatoire d'intérêt propre ; l'un des objectifs majeurs est de *classifier* les différents modèles de marches selon la complexité de la fonction génératrice de comptage associée, nous y reviendrons plus bas.

Du point de vue combinatoire, le problème typique est le suivant : on fixe un cône $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^d$ et un ensemble de pas ou directions possibles $\mathscr{S}$ de $\mathbb{Z}^d$; on s'intéresse alors aux nombres entiers

$$c(x;n) \quad \text{et} \quad c(x,y;n),$$

qui comptent respectivement le nombre de chemins construits à partir de n sauts de $\mathscr{S}$, partant de x et restant dans le cône pour le premier, et un raffinement de la quantité précédente prenant en compte une arrivée fixée en y, de telle sorte que $\sum_{y\in\mathscr{C}} c(x,y;n) = c(x;n)$.

Le lien avec les quantités probabilistes précédemment introduites est clair : en renormalisant par le cardinal de l'ensemble de pas à la puissance n (qui trivialement compte le nombre de marches partant de x sans contrainte de cône ni de point d'arrivée), on retrouve respectivement la probabilité de survie (9) et la probabilité locale (16) :

$$\begin{cases} \frac{c(x;n)}{|\mathscr{S}|^n} &= \mathbb{P}(\tau_x^{\mathscr{C}} > n), \\ \frac{c(x,y;n)}{|\mathscr{S}|^n} &= \mathbb{P}(x + S_n = y, \tau_x^{\mathscr{C}} > n). \end{cases} \tag{29}$$

Reposant sur l'approximation de la marche aléatoire par un mouvement brownien (section 2), pour des raisons intrinsèques l'approche probabiliste ne permet pas d'obtenir des expressions exactes pour les nombres combinatoires d'intérêt $c(x;n)$ ou $c(x,y;n)$. Elle est en revanche parfaitement adaptée à des considérations asymptotiques, via les résultats obtenus par Denisov et Wachtel (voir (9) pour la probabilité de survie et (16) pour la probabilité locale).

L'approche probabiliste permet aussi de compter (asymptotiquement) des *chemins pondérés* dans des cônes, ce qui par définition revient à poser des probabilités de transition non uniformes sur les pas de $\mathscr{S}$. C'est une généralisation naturelle ; par exemple, certains modèles de marches uniformes en dimension $d \geqslant 2$ sont équivalents, après projection, à des modèles de marches pondérées en dimension $d' < d$.

En conclusion, la connaissance des fonctions harmoniques discrètes associées aux marches ainsi que de l'exposant critique du cône conduit à des asymptotiques précises pour les nombres de marches $c(x;n)$ et $c(x,y;n)$, via (9) et (29).

5.2 – Classes de fonctions

De façon plus inattendue, l'interprétation probabiliste (29) permet d'aborder la question de la *classification* des fonctions génératrices

$$\sum_{n \geqslant 0} c(x;n)t^n \quad \text{ou} \quad \sum_{n \geqslant 0} c(x,y;n)t^n \tag{30}$$

au sens suivant. Étant donnée une série $\sum_{n\geqslant 0} c_n t^n$, on voudrait la situer dans la hiérarchie suivante des fonctions :

- fonctions *rationnelles* (quotients de deux polynômes),
- fonctions *algébriques* (solutions d'une équation polynomiale),
- fonctions *différentiellement finies* (solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux),
- fonctions *différentiellement algébriques* (également solutions d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux, mais *a priori* non linéaire).

Hors de ces cas avec structure restent les

- fonctions *hypertranscendantes* (solutions d'aucune équation différentielle algébrique, à l'instar de la fonction Γ d'Euler ou de la fonction ζ de Riemann).

Dire si la série génératrice d'un modèle combinatoire appartient à l'un ou l'autre de ces ensembles de fonctions permet de classifier ce modèle au sein d'une classe plus vaste (par exemple les marches à petits pas dans le quadrant comme dans [4, 9]) ; cela donne en outre une mesure de sa complexité. Observons également qu'il est équivalent de dire qu'une série est différentiellement finie ou que ses coefficients sont P-récursifs, c'est-à-dire satisfont à une équation de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux (on peut penser aux nombres de Fibonacci, aux nombres de Catalan ou encore à la factorielle). L'existence de telles récurrences est très naturelle en combinatoire, dans la mesure où elles donnent accès au calcul efficace et rapide de coefficients associés à de grands indices. Ajoutons que les différents ensembles de fonctions susmentionnés satisfont à différents théorèmes de clôture (ils restent stables par somme, produit, parfois composition, produit de Hadamard, etc.), ce qui les rend manipulables.

5.3 – Rationalité des exposants critiques et nature des séries génératrices

Connaître l'asymptotique des coefficients c_n donne une indication, voire une preuve, du fait que leur série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} c_n t^n$ n'appartient pas à l'une des classes de fonctions mentionnées plus haut. Ainsi par exemple, si

$$c_n \sim K \cdot r^n \cdot n^\alpha \tag{31}$$

et si r est un nombre transcendant ou si l'exposant critique α est irrationnel ou un nombre entier négatif, alors la série ne peut pas être algébrique. Dans un esprit similaire, si la série est différentiellement finie, alors nécessairement r et α dans (31) sont tous deux des nombres algébriques.

Dans un contexte plus combinatoire, mentionnons le résultat profond suivant dû à André, Chudnovski et Katz (présenté en détail dans [2]). Si une suite d'entiers $(c_n)_{n\geqslant 0}$ se comporte asymptotiquement comme (31) et si la série associée est une nouvelle fois différentiellement finie, alors nécessairement α est rationnel.

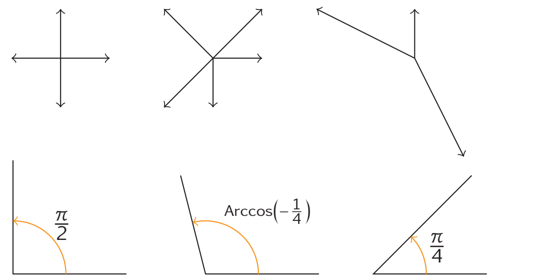
Avec cela en tête, il est naturel de se pencher sur la question suivante : étant donnés nos nombres de marches $c(x;n)$ et $c(x,y;n)$ et leurs séries associées (30), sous réserve qu'ils puissent être décrits asymptotiquement comme (31), quand leur exposant asymptotique est-il rationnel ou irrationnel ? Par exemple, est-il possible d'étudier la rationalité de p dans (9) ?

Cela ouvre tout un champ de questionnements. Il y a peu à dire en dimension 1, car les exposants typiques sont rationnels (le plus souvent $0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$). En dimension deux, on utilise d'abord (9) et (29) pour voir que l'exposant critique α dans (31) vaut $\alpha = -\frac{p}{2}$ pour $c(x;n)$ en dérive nulle. Un théorème de la limite locale (asymptotique de (16)) et (29) prouverait que $\alpha = -p-1$ pour $c(x,y;n)$ sans condition sur la dérive. Les résultats de Denisov et Wachtel conduisent à

$$p = \frac{\pi}{\operatorname{Arccos} a}, \tag{32}$$

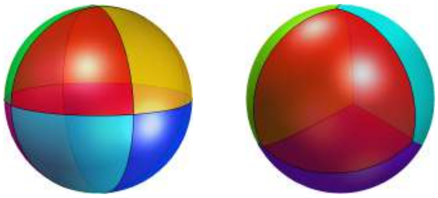
où a est naturellement associé à la marche aléatoire et s'interprète comme un coefficient de corrélation. L'algébricité de a est immédiate par construction (il est calculé en résolvant un système d'équations polynomiales). Mieux, la rationalité de p dans (32) est accessible et permet (voir [2]) de prouver que tout un ensemble de modèles admet des séries non différentiellement finies. Ainsi les premier et dernier modèles sur la figure 4 possèdent un α rationnel, tandis qu'on prouve facilement que $p = \frac{\pi}{\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{4})} \notin \mathbb{Q}$ pour la marche du milieu sur la figure 4.

Figure 4 – Exemples en dimension 2 : des modèles de marches et la valeur de Arccos a dans (32) associée



En dimension $d \geqslant 3$, Denisov et Wachtel [7] expriment α au moyen de la valeur propre principale d'un problème de Dirichlet. De ce fait, on se heurte dès la dimension 3 à des questions de théorie spectrale encore ouvertes, comme par exemple le problème suivant : on considère un triangle sphérique et on essaie de calculer la première valeur propre pour le problème de Dirichlet. À gauche sur la figure 5, la marche simple dans l'octant correspond à un triangle sphérique équilatéral avec angle $\frac{\pi}{2}$, dont le spectre est parfaitement connu. À droite sur la même figure, un grand triangle équilatéral d'angle $\frac{2\pi}{3}$, qui correspond à une marche dans l'octant $\mathbb{N}^3$ avec sauts égaux aux trois vecteurs de la base canonique plus $(-1,-1,-1)$. Les combinatoriciens nomment cet ensemble de pas "Kreweras 3D", en lien avec les anciens travaux de Germain Kreweras. On conjecture que le premier exposant est irrationnel dans ce second cas.

Figure 5 – En dimension 3 l'exposant critique est lié à la valeur propre principale pour le problème de Dirichlet sur un triangle sphérique



Références

[1] P. Biane. « Quantum random walk on the dual of SU(n) ». *Probab. Theory Related Fields* **89**, nº 1 (1991), p. 117-129. issn : 0178-8051. doi : 10.1007/BF01225828. url : `https://doi.org/10.1007/BF01225828`.

[2] A. Bostan, K. Raschel et B. Salvy. « Non-D-finite excursions in the quarter plane ». *J. Combin. Theory Ser. A* **121** (2014), p. 45-63. issn : 0097-3165. doi : 10.1016/j.jcta.2013.09.005. url : `https://doi.org/10.1016/j.jcta.2013.09.005`.

[3] A. Bouaziz, S. Mustapha et M. Sifi. « Discrete harmonic functions on an orthant in $\mathbb{Z}^d$ ». *Electron. Commun. Probab.* **20** (2015), no. 52, 13. doi : 10.1214/ecp.v20-4249. url : https://doi.org/10.1214/ecp.v20-4249.

[4] M. Bousquet-Mélou et M. Mishna. « Walks with small steps in the quarter plane ». In : *Algorithmic probability and combinatorics*. Vol. 520. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, p. 1-39. doi : 10.1090/conm/520/10252. url : https://doi.org/10.1090/conm/520/10252.

[5] J. W. Cohen et O. J. Boxma. *Boundary value problems in queueing system analysis*. **79**. North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, p. xii+405. isbn : 0-444-86567-5.

[6] R. D. DeBlassie. « Exit times from cones in $\mathbf{R}^n$ of Brownian motion ». *Probab. Theory Related Fields* **74**, nº 1 (1987), p. 1-29. issn : 0178-8051. doi : 10.1007/BF01845637. url : https://doi.org/10.1007/BF01845637.

[7] D. Denisov et V. Wachtel. « Random walks in cones ». *Ann. Probab.* **43**, nº 3 (2015), p. 992-1044. issn : 0091-1798. doi : 10.1214/13-AOP867. url : https://doi.org/10.1214/13-AOP867.

[8] J. L. Doob. « Discrete potential theory and boundaries ». *J. Math. Mech.* **8** (1959), 433-458, erratum 993. doi : 10.1512/iumj.1959.8.58063. url : https://doi.org/10.1512/iumj.1959.8.58063.

[9] T. Dreyfus et al. « On the nature of the generating series of walks in the quarter plane ». *Invent. Math.* **213**, nº 1 (2018), p. 139-203. issn : 0020-9910. doi : 10.1007/s00222-018-0787-z. url : https://doi.org/10.1007/s00222-018-0787-z.

[10] J. Duraj et al. « Martin boundary of random walks in convex cones ». *Ann. H. Lebesgue* **5** (2022), p. 559-609. doi : 10.5802/ahl.130. url : https://doi.org/10.5802/ahl.130.

[11] G. Fayolle, R. Iasnogorodski et V. Malyshev. *Random walks in the quarter plane*. Second. **40**. Probability Theory and Stochastic Modelling. Algebraic methods, boundary value problems, applications to queueing systems and analytic combinatorics. Springer, Cham, 2017, p. xvii+248. isbn : 978-3-319-50928-0; 978-3-319-50930-3. doi : 10.1007/978-3-319-50930-3. url : https://doi.org/10.1007/978-3-319-50930-3.

[12] V. H. Hoang, K. Raschel et P. Tarrago. « Constructing discrete harmonic functions in wedges ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **375**, nº 7 (2022), p. 4741-4782. issn : 0002-9947. doi : 10.1090/tran/8615. url : https://doi.org/10.1090/tran/8615.

[13] I. Ignatiouk-Robert. « Martin boundary of a killed random walk on a half-space ». *J. Theoret. Probab.* **21**, nº 1 (2008), p. 35-68. issn : 0894-9840. doi : 10.1007/s10959-007-0100-3. url : https://doi.org/10.1007/s10959-007-0100-3.

[14] I. A. Kurkova et V. A. Malyshev. « Martin boundary and elliptic curves ». *Markov Process. Related Fields* **4**, nº 2 (1998), p. 203-272. issn : 1024-2953.

[15] G. F. Lawler et T. W. Polaski. « Harnack inequalities and difference estimates for random walks with infinite range ». *J. Theoret. Probab.* **6**, nº 4 (1993), p. 781-802. issn : 0894-9840. doi : 10.1007/BF01049175. url : https://doi.org/10.1007/BF01049175.

[16] P. Ney et F. Spitzer. « The Martin boundary for random walk ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **121** (1966), p. 116-132. issn : 0002-9947. doi : 10.2307/1994335. url : https://doi.org/10.2307/1994335.

[17] N. T. Varopoulos. « Potential theory in conical domains ». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **125**, nº 2 (1999), p. 335-384. issn : 0305-0041. doi : 10.1017/S0305004198002771. url : https://doi.org/10.1017/S0305004198002771.

Kilian Raschel

cnrs, Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques, université d'Angers

raschel@math.cnrs.fr

http://www.lmpt.univ-tours.fr/~raschel/

Kilian Raschel est directeur de recherche au cnrs. Il travaille sur différents modèles de probabilités intégrables comme les marches aléatoires dans des cônes et les modèles de dimères, en lien fort avec la combinatoire. Il est lauréat du prix Marc Yor 2020.

Pierre Tarrago

Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation, Sorbonne Université

pierre.tarrago@sorbonne-universite.fr

http://tarrago.perso.math.cnrs.fr/

Pierre Tarrago est maître de conférences à Sorbonne Université. Ses recherches portent notamment sur les probabilités libres et les marches aléatoires dans des cônes ; il s'intéresse tout spécialement à l'interface entre théorie des représentations et probabilités.

Nous remercions chaleureusement Irina Ignatiouk-Robert et Sami Mustapha pour leur disponibilité et leurs remarques. Nous adressons également nos vifs remerciements à Mireille Bousquet-Mélou, Aurélien Djament et Mylène Maïda pour leur relecture attentive de l'article et leurs nombreuses suggestions d'amélioration.

Un entretien avec Ivar Ekeland

Propos recueillis par Anne-Laure Fougères et Ivan Gentil à Lyon
le 20 septembre 2022.

L'interview a été réalisée à l'occasion d'une conférence donnée le 21 septembre 2022 par Ivar Ekeland à l'attention de l'ensemble des étudiants en master de l'université Lyon 1. De nombreux personnels de l'université ont également assisté à cet exposé. Ivar Ekeland étant depuis de nombreuses années un mathématicien mobilisé sur le sujet du dérèglement climatique, nous avons souhaité d'une part en savoir plus sur sa prise de conscience individuelle, et d'autre part interroger son point de vue sur l'implication de notre communauté mathématique dans son ensemble. Sans oublier de l'inviter à nous parler de sa riche carrière de mathématicien !

Nous te remercions vivement, Ivar Ekeland, d'avoir accepté notre proposition d'interview à l'occasion de ton exposé à l'université Lyon 1, intitulé : *Les sciences au temps du réchauffement*. Nous proposons d'axer notre entretien autour de 3 parties. La première sur ton parcours universitaire ; la seconde sur ta prise de conscience sur le réchauffement climatique ; et enfin la troisième, sur une question qui nous intéresse tout particulièrement, à savoir le rôle des mathématiques face à ce dérèglement climatique, ainsi que le comportement de la communauté des mathématiciennes et des mathématiciens face à ces problèmes d'avenir. Nous commençons donc par la première partie, ton parcours universitaire.

Je suis un pur produit du système français, passé par les classes préparatoires. J'ai fait des maths car j'étais bon en maths, et je suis rentré à l'École normale en 1963. C'est seulement un peu plus tard que je me suis aperçu que j'aimais les maths. À ce moment-là, à l'École normale, c'était l'époque des bourbakistes. Le grand chic était alors de faire des maths pures. Je me souviens notamment qu'il y avait un cours de topologie algébrique proposé par Henri Cartan. Normalement, si vous avez un cours de topologie algébrique à faire, vous commencez par exemple à déformer une sphère… et Cartan a fait un cours complet sur le lemme des cinq, c'est une sombre histoire de flèches [1]. On ne comprenait rien du tout… je ne suis pas allé au second cours. Je me suis dit que je n'étais pas fait pour les maths pures et je me suis tourné vers les maths appliquées. Les maths appliquées, à l'époque, c'était surtout Jacques-Louis Lions. Le caïman [2] de l'époque m'a dissuadé de travailler avec Lions, et j'ai été assez bête pour le croire. C'est à ce moment-là que j'ai rencontré Robert Pallu de la Barrière avec qui j'ai fait du contrôle optimal, à l'INRIA.

Peux-tu nous rappeler quand l'INRIA a été créé ?

L'INRIA a été créé à ce moment-là. C'était une époque de bouleversements importants, c'est aussi le moment où l'université Dauphine a été créée. En 1968, plusieurs choses se passent, il y a la révolte étudiante, et c'est le moment aussi où le général de Gaulle retire la France du dispositif militaire de l'OTAN [3]. Ainsi, l'OTAN quitte Paris et libère plusieurs bâtiments [4] ; il libère d'une part son Grand Quartier général des puissances alliées en Europe [5], à Rocquencourt – bâtiment qui deviendra l'INRIA –, et libère d'autre part le siège de l'OTAN, Porte Dauphine, qui deviendra dès 1968 l'université Paris-Dauphine.

À l'issue de la révolution étudiante de 1968, le gou-

1. Voir par exemple `https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_des_cinq`https ://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_des_cinq.
2. Un caïman était le petit nom donné aux enseignants de l'École normale ; il s'agit actuellement du nom donné à une personne occupant le poste d'AGPR (AGrégé PRéparateur).
3. En 1965, de Gaulle demande que la France cesse sa participation aux commandements intégrés et de ne plus mettre de forces à la disposition de l'OTAN, ce qui sera effectif en 1969.
4. On pourra voir le départ de l'OTAN de la place Dauphine dans le film *Le Cerveau* de 1968 avec Bourvil et Belmondo.
5. Le SHAPE (Supreme Headquarters Allied Powers Europe).

vernement découvre deux choses : la Sorbonne est trop importante et on manque de place. Le gouvernement découpe alors l'université de la Sorbonne en sept universités et crée aussi deux universités supplémentaires [6]. Les locaux de l'OTAN étaient destinés au ministère de l'Éducation nationale, qui devait quitter la rue de Grenelle, mais ils deviennent finalement une université : Edgar Faure, mis en difficulté à l'Assemblée nationale et à qui l'on reprochait de ne rien faire pour les étudiants, crée l'université Paris-Dauphine.

Donc l'INRIA est créé en janvier 1967 et je travaille avec Pallu de la Barrière. C'est à ce moment-là que je fais la connaissance de Jacques-Louis Lions. Dans ma thèse je travaille sur des problèmes de contrôle optimal en lien avec des équations aux dérivées partielles, et je découvre l'analyse convexe.

Tu as fait ta thèse avec Jacques-Louis Lions ou Pallu de la Barrière ?

J'ai fait ma thèse avec Pallu de la Barrière mais j'étais en contact avec Jacques-Louis Lions qui était dans le labo d'à côté. C'est essentiellement Lions qui m'a donné le sujet de thèse, Pallu de la Barrière était plutôt nominal. On était au début de l'analyse convexe, il y avait un formalisme qui me plaisait bien et j'ai fait ma thèse de 1967 à 1970. L'analyse convexe m'intéressait beaucoup, j'aime bien voir les choses et une fonction convexe, je vois ce que c'est. Je n'ai jamais été d'un tempérament très technique et on me l'a d'ailleurs reproché.

C'est une époque que l'on a oubliée. Quand j'ai terminé l'École normale en 67, François Bruhat, le directeur des études, nous a rassemblés. C'était la première fois qu'on le voyait. Il nous a dit : *Messieurs, qui d'entre vous veut rentrer au CNRS ?* Nous étions deux. *Les autres, tous assistants, à Paris bien sûr ?* Il faut savoir que je suis rentré au CNRS avant la thèse. C'est l'époque où l'enseignement supérieur est passé en quelques années de 50 000 à 500 000 étudiants. Tout ce qui se promenait sur la place de Paris avec un diplôme de maths dans la poche avait un poste. C'est quelque chose qui a totalement disparu. J'ai donc fait ma thèse au CNRS et au bout de trois ans j'ai démissionné, c'était la règle, on laissait la place aux autres.

En 1970, Jean-Pierre Aubin, le deuxième mathématicien qui a été nommé à Dauphine, me propose de venir le rejoindre. J'ai pris conseil auprès de Jacques-Louis Lions et je suis rentré à Dauphine en 1970, à 26 ans, comme maître de conférences [7]. Il y avait avec moi Jean-Pierre Aubin et Alain Bensoussan. Nous étions un groupe de trois professeurs, avec des assistants et des maîtres assistants. Nous nous sommes alors trouvés face à un choix à faire : Dauphine était une université nouvelle et expérimentale, on ne se bousculait pas pour y aller. Jean-Pierre Aubin a bien compris le problème, percevant que l'on ne rivaliserait pas avec les universités Paris 6 ou Paris 7. Par ailleurs, on ne souhaitait pas végéter et faire des TD à des économistes ou à des gestionnaires. Il nous fallait une UER [8] de mathématiques. Une fois la création de cette UER de maths obtenue, il s'agissait d'ouvrir une licence et une maîtrise de maths. Mais comment faire sans physicien ni chimiste chez nous ? On a souhaité faire quelque chose de nouveau, les maths sont un langage et ce langage doit être appliqué à quelque chose. Il n'y avait aucune raison que cela soit à la physique ou la chimie, et cela pouvait être appliqué à l'économie, ou à la gestion. On a donc créé un enseignement de mathématiques appliquées à l'économie, où l'on enseignait les maths, l'économie, la statistique et l'informatique. Pas de physique ni de chimie. Et on avait le droit de le faire car justement nous étions un établissement expérimental ! Ce n'était pas un diplôme national, une université ordinaire n'aurait pas pu le faire.

À l'époque, les maths étaient enseignées seulement dans le DEUG A où l'on apprenait les maths, la physique et la chimie.

Oui c'est cela, on a eu à Dauphine la permission de faire autrement car nous étions dans un établissement expérimental. Les universités Dauphine et de Vincennes ont expérimenté. L'université de Vincennes a par exemple pris des étudiants sans le bac. Et nous avons fait des maths sans physique ni chimie. Cela a très bien pris, notre formation s'est tout de suite adressée à un public de personnes qui aimaient les maths, qui ne voulaient pas être professeurs et ne voulaient pas faire de physique. On s'est beaucoup mobilisé, on allait à la sorties des lycées pour inciter des jeunes à venir.

Par ailleurs on a lancé simultanément la première année et le troisième cycle. On a fait les deux en

6. La deuxième université créée à ce moment-là est l'université de Vincennes, qui a ensuite déménagé à Saint-Denis.

7. Techniquement, maître de conférences à cette époque est l'équivalent aujourd'hui de professeur des universités de 2e classe ; le statut de « professeur des universités » est créé en 1979.

8. Les unités d'enseignement et de recherche (UER) étaient les ancêtres des unités de formation et de recherche (UFR), créées par la loi Savary de 1984.

même temps, on n'a pas attendu que ça monte. Bien entendu, il y avait des assistants et maîtres assistants avec nous pour enseigner. Par la suite c'est devenu un diplôme national. Grâce à cela, on a appris l'économie et la théorie des jeux. J'ai dû faire le premier cours de théorie des jeux en France au niveau universitaire. C'était aussi l'époque de la recherche opérationnelle.

Je continue alors à travailler en analyse convexe, c'est l'époque où je découvre le principe variationnel [9]. Le CEREMADE [10] est créé en 1970, et l'on reste toujours avec la même idée : on fait de belles maths et on enseigne les maths pour l'économie... et il faut dire que ça fonctionne ! Le rythme de vie était différent, ça va sûrement étonner les collègues. Un professeur de maths faisait 1h30 de cours par semaine, l'année universitaire se terminait en juin et recommençait le 1 novembre. Ce qui fait que l'on avait tout l'été pour travailler, il y avait beaucoup d'espace pour la recherche. Je passais en général l'été aux États-Unis, en particulier à Madison. Après, cela s'est rétréci ; lors de ma dernière année à Dauphine, en 2003, il y avait beaucoup plus d'étudiants, des diplômes professionnels, et on travaillait tout le mois de juillet pour les enseignements. Les oraux des DESS [11] étaient en juillet, et l'année recommençait début septembre. J'ai vu l'évolution en cinquante ans, et il faut préciser que les étudiants en ont profité. Les universitaires ont pris en charge toute une génération d'étudiants.

Aux débuts de ce programme à l'université Dauphine, les promotions étaient de combien ?

Au début les promotions étaient de 30 étudiants environ, les étudiants ne se bousculaient pas pour venir. Les promotions ont vraiment augmenté dans les années 1985 car le président de l'université, Henri Tezenas du Montcel, a organisé la sélection à Dauphine, s'opposant à la loi Savary [12]. Le fait que Dauphine sélectionne a attiré beaucoup d'étudiants, la France est comme ça. J'ai toujours été investi dans mon université, et j'en ai été élu président de 1989 à 1994.

Côté recherche, en 1970 j'ai écrit un livre sur l'analyse convexe avec Roger Témam qui est devenu un livre de référence [13]. En 1973 je suis invité par Felix Browder dans le département de maths de Chicago. Et un jour dans mon bureau, on m'informe que deux professeurs d'économie demandent à me voir. Il faut savoir que le département d'économie de Chicago est le département des prix Nobel. Il y a plus de prix Nobel [14] d'économie dans l'université de Chicago que de prix Nobel en France, toutes disciplines confondues. Je vois débarquer deux jeunes brésiliens, c'étaient José Scheinkman et Luis Araujo qui sont maintenant très connus. Ils ne comprenaient pas un point très précis de mon livre d'analyse convexe. Il n'y avait pas d'erreur mais cela prouvait qu'ils avaient lu mon livre avec un papier et un crayon. Grâce à José Scheinkman et Aloiso Araujo, j'ai eu un accès direct au département d'économie de Chicago, et ils utilisaient de plus l'analyse convexe dans leurs recherches ! J'ai ensuite invité José Scheinkman à Dauphine, il nous a aidés à mettre en place de nouveaux enseignements. À ce moment-là, j'enseignais beaucoup l'économie. J'avais des contacts en économie, et même si cela a pris du temps car il faut parler aux gens et apprendre à les connaître, j'ai commencé à faire de la recherche en économie.

Dans le prolongement de l'analyse convexe, dans les années 80, je sais alors tout ce que je souhaite savoir sur le problème de minimisation : minimiser une fonction sur quelque chose, je sais faire. Je découvre en revanche le problème de trouver un point selle, et ce n'est pas la même chose ! Il y a un article fondateur de Paul Rabinowitz [15] qui cherche des solutions périodiques de systèmes hamiltoniens. Pour cela, il dispose du principe de moindre action. Les trajectoires du système hamiltonien sont des points critiques du principe de moindre action. J'ai une fonctionnelle qui tend vers $+\infty$ dans une direction et vers $-\infty$ dans une autre direction et Paul Rabinowitz, le premier, trouve une méthode pour trouver un point selle de la fonctionnelle. C'est à ce moment-là que j'ai travaillé avec Frank Clarke [16]. On a découvert une méthode de dualité permettant de faire la même chose que dans le cas convexe. C'est une nouvelle période qui commence pour moi et je me mets à travailler dans le domaine de la mécanique

9. Ivar Ekeland,*On the variational principle,* J. Math. Anal. Appl. vol. 47 n°2 1974
10. Centre De Recherche en Mathématiques de la Décision (CEREMADE), laboratoire de mathématiques de Dauphine.
11. Les DESS sont devenus en 2010 les M2 professionnels.
12. La loi d'Alain Savary de 1983 supprime en particulier la sélection à l'université.
13. *Convex analysis and variational problems*, Gauthier-Villars. ix, 340 pp., 1974.
14. Il faut rappeler que ce n'est pas un prix Nobel mais le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel.
15. *Periodic solutions of Hamiltonian systems*. Commun. Pure Appl. Math. 31, 156-184 (1978).
16. Désormais connu sous le nom de Francis Clarke, ancien professeur à l'université Lyon 1.

hamiltonnienne. C'est-à-dire que je ne cherche plus à minimiser une fonction, convexe ou non, mais à résoudre $f' = 0$. C'est une des choses dont je suis le plus fier. Ça a été un mélange extraordinaire de mathématiques, il y avait de l'analyse fonctionnelle, c'est-à-dire une fonctionnelle qui tend vers $\pm\infty$ dans des directions différentes, de la théorie de Morse, du calcul des variations, de la théorie ergodique, de la géométrie symplectique, etc.

Ainsi tu tombes dans les maths pures que tu avais volontairement évitées pendant tes études.

Oui effectivement, mais ce ne sont pas seulement des maths pures. Je ne considère pas les équations différentielles ordinaires comme des maths pures. Pour moi c'est tellement visuel, les problèmes hamiltoniens c'est la mécanique céleste, c'est concret ! J'ai pris beaucoup de plaisir à faire ces maths.

Et paf, en 1989, je suis élu président de l'université Paris-Dauphine et j'en suis content. Avant, vous n'êtes qu'un mathématicien, après, les gens vous parlent en tant que président. On peut parler aux autres personnes de l'université, par exemple aux économistes. On rentre dans leur monde, on est forcé de s'intéresser à leurs problèmes, de voir ce qu'ils font. En retour, ils sont forcés de vous parler, de s'apercevoir que les matheux ne sont pas fous ! On peut se faire des ennemis mais aussi des amis. François Guichardin, historien italien du XVIe siècle, dit dans son livre Histoire d'Italie : *magistratus virum ostendit*. C'est-à-dire, le magistrat (la fonction) révèle la personne. La fonction, le pouvoir, agit comme un révélateur non seulement pour vous mais aussi pour les autres. On se fait connaître et les gens voient qui vous êtes.

Le mandat de président n'était pas renouvelable à l'époque et donc en 1994 je ne suis plus président. Que faire alors ? Les collègues qui travaillaient dans les systèmes hamiltoniens ne m'avaient pas attendu ! Je prends donc une année sabbatique. C'est comme le 10000 m, si tu tombes au début, les autres ne t'attendent pas ! Et c'est à ce moment que j'ai vraiment travaillé en économie. J'ai commencé une collaboration avec Pierre-André Chiappori, qui était à Chicago à ce moment-là, et qui est maintenant à Columbia. Chiappori m'a posé la question suivante : quand un champ de vecteurs est-il combinaison linéaire de champs de gradients ? On sait qu'un champ de vecteurs est un gradient s'il y a égalité dans les dérivées croisées ; colinéaire à un gradient c'est un peu plus compliqué. Je me suis plongé sans succès dans mes cours de Madame Lelong et j'ai trouvé la réponse dans les oeuvres complètes d'Élie Cartan, ça faisait partie des choses oubliées. Pour résoudre certains problèmes fondamentaux de la théorie économique classique j'ai dû aller chercher le théorème de Cartan-Kähler [17]. Ce résultat est une généralisation du théorème de Cauchy-Kovalevskaya, encore un très beau théorème qui mélange l'algèbre et l'analyse, que très peu de gens connaissent.

Et c'est là que l'on découvre des trous de la connaissance mathématique. Quand on est jeune, on a l'impression que tous les problèmes sont résolus, il n'y a plus rien à faire. À mon âge, on ne sait rien ! Notamment dans le domaine des EDP. Si l'on prend un système de trois équations linéaires du premier ordre à coefficients non constants, personne ne sait s'il y a une solution ou pas. On connaît des cas particuliers, le cas général on ne le connaît pas.

J'ai donc travaillé avec Chiappori et ensuite, en 2003, je suis parti pour Vancouver, où j'ai pris la direction du PIMS (Pacific Institute for the Mathematical Sciences). Lorsque j'ai quitté Dauphine en 2003, cela faisait 33 ans que j'étais dans la même université, il était temps de partir.

On est venu te chercher pour diriger le PIMS ?

Oui, il y avait un poste, une chaire de recherche pour un scientifique extérieur. J'ai postulé et j'ai eu le poste. J'ai ensuite pris la direction du PIMS.

Se retrouver directement à la direction du PIMS, ce n'est pas facile, surtout arrivant dans un autre système, très différent de celui que tu connaissais ?

Oui, cela n'a pas été simple. Mais il y a des choses très bien, étonnantes pour un français. Par exemple, le fait qu'en arrivant, vous avez un budget de recherche et il n'y a pas de contrôle a priori. Ici en France si vous voulez acheter un livre il faut demander une autorisation, là-bas non. Vous engagez la dépense et on voit après. C'était Byzance ! Ce qui est très difficile à comprendre pour un français, c'est qu'il s'agit d'un état fédéral. C'est-à-dire que la recherche dépend du gouvernement fédéral et l'enseignement dépend de l'université et du gouvernement local. Tout ne marche pas aussi bien avec un étage supplémentaire. J'étais quand même

17. Bryant, Robert L. ; Chern, S. S. ; Gardner, Robert B. ; Goldschmidt, Hubert L. ; Griffiths, P. A. Exterior differential systems. Mathematical Sciences Research Institute Publications 18. (1991).
18. Unité mixte Internationale (UMI).

moins inséré qu'en France mais on a avancé, maintenant le PIMS est une UMI CNRS [18]. C'est aussi une autre culture, mais travailler dans le même laboratoire est aussi une manière de connaître les gens. Au PIMS, nous avions des financements beaucoup moins assurés, il fallait toujours se battre pour avoir de l'argent. J'ai été très pris par la direction du PIMS et c'est alors que je me suis intéressé au problème du climat.

On peut donc continuer sur la deuxième partie de cette entrevue, et évoquer ta prise de conscience des enjeux climatiques.

C'est très lié à Vancouver. Je suis allé à Vancouver en 2003 car j'y avais des liens, notamment avec Frank Clarke. On était, à l'époque, très bons copains, et on a travaillé ensemble. Je l'avais invité à Paris et je suis allé le voir à Vancouver en 1977. On travaillait sur des problèmes de dualité pour des problèmes hamiltoniens.

Je connaissais donc Vancouver depuis 1977 et j'ai pu suivre les grandes évolutions entre 1977 et maintenant. La Colombie-Britannique est grande comme 4 fois la France, il y a environ 5 millions d'habitants et les ressources naturelles sont essentielles pour cette province. J'y ai vu plusieurs crises, arrivées principalement à partir de 2003. Il y a eu la crise du bois. La Colombie-Britannique est une jungle tempérée, et le pays était couvert de bois, avec des essences très hautes... qui ont été essentiellement rasées. La première chose que les européens ont fait, c'est de couper les arbres et de les vendre. Il reste encore quelques forêts primitives dans des endroits peu accessibles, ou dans les parcs nationaux. Les arbres des forêts primitives sont absolument étonnants, ils maintiennent leur propre immunité. Les forêts rasées ont été replantées, mais avec une seule essence, comme on le fait actuellement; ces arbres ont maintenant 40 ou 50 ans, et ont commencé à mourir à cause de ce que l'on appelle le scolyte du pin [19]. C'est une espèce qui a toujours existé, mais elle n'a jamais fait beaucoup de dégâts car d'une part elle s'attaquait seulement au pin, et d'autre part elle était détruite par le froid, une nuit à -30°C ou 15 jours à -20°C. Or, depuis 20 ans, il n'y a jamais eu de tels évènements climatiques et le scolyte du pin s'en est donné à cœur joie. Le scolyte n'est pas nuisible en lui-même, mais il introduit un champignon dans l'arbre, qui fait mourir ce dernier en le rendant bleu qui plus est, inutilisable donc! Un arbre qui meurt favorise par ailleurs les incendies.

Ensuite on a beaucoup étudié les problèmes liés au saumon. Il y a beaucoup d'élevages de saumons et les élevages détruisent le saumon sauvage. Deux problèmes importants concernent ces élevages. Premièrement, tous ces animaux sont rassemblés dans des nasses et ce sont des nids à épidémies. On est obligé de les vacciner et de leur donner des antibiotiques. Les saumons d'élevage contaminent alors les saumons sauvages. D'autre part, le pou du saumon (salmon lice) prolifère dans ces élevages. Ces parasites détruisent les saumons sauvages et ces problèmes ont un gros impact sur l'industrie.

Tu prends donc conscience de tous ces problèmes dès 2003, lorsque tu arrives à Vancouver ?

Oui, j'ai vu que ce paradis était fragile, car Vancouver est un paradis. J'ai pu prendre conscience de ces problèmes car à Vancouver, on vit très près de la nature. D'ordinaire, dans une ville, on a peu d'occasions de voir des animaux, peu d'occasions de voir la nature, on ne se rend pas compte des changements. Je vous parle de choses qui se sont passées en 2000 ou 2003. Au PIMS, on avait des chercheurs qui s'intéressaient aux problèmes liés aux saumons, car il y avait aussi un aspect mathématique dans ce domaine. J'ai parlé à des statisticiens travaillant sur les problèmes des forêts, sur la propagation des feux, la propagation des épidémies, etc. Il y avait également Marc Lewis, en Alberta, qui faisait de la dynamique des populations. J'avais ainsi une confirmation mathématique de ce qui se passait, en particulier à Vancouver.

En tant que directeur du PIMS, je regardais les projets. Des chercheurs demandaient des financements, et je voyais qu'il se passait des choses. Les photos décrivant les projets de recherche n'étaient pas très belles à voir, comme des saumons mangés vivants par des parasites. C'était déjà, en 2003, un enjeu scientifique majeur, il y avait des problèmes mathématiques intéressants. Et puis, cette notion d'un paradis fragile... paradis où à mon arrivée en 1977, je me demandai si je m'y installerais!

Mais peut-être que l'élément le plus important que j'ai découvert à Vancouver est le problème de la pêche. Je savais qu'il y avait un important département de pêcherie au PIMS, avec un dénommé Daniel Pauly. Je lis souvent *Nature*, et ils avaient classé Daniel Pauly parmi les 50 scientifiques les plus im-

19. Le scotyle du pin attaque aussi la forêt landaise.
20. Rashid Sumaila travaille à l'Institute for the Oceans and Fisheries à l'université de Colombie-Britannique.

portants. Les collaborations sur le problème des pêcheries que j'ai eues à Vancouver sont avec l'un de ses collaborateurs, Rashid Sumaila [20]. J'avais lu dans *Nature* ce que Pauly avait fait, il avait fait une chose extrêmement difficile, il avait compté les poissons. À la fin des années 80, il y avait une controverse pour savoir si l'on détruisait ou non les stocks de poissons.

Tu veux dire qu'à la fin des années 80, on ne savait pas si l'on détruisait les stocks de poissons ?

L'industrie disait, *bien sûr que non, on pêche autant de poissons qu'avant !* Comment voulez-vous savoir ? On ne pouvait distinguer les poissons dans la mer sans les pêcher. Pour les vaches c'est plus facile, on va dans les prés et on les compte, mais les poissons comment fait-on ? Les seules données dont Pauly disposait étaient ce que les gros bateaux pêchaient et ramenaient à quai. Ce sont des bateaux qui partent 6 mois ou un an, qui pêchent et congèlent. Vous avez une information supplémentaire, vous savez où ils sont passés. Alors avec çà, veuillez reconstituer l'endroit où a été pêché tel poisson ! Pauly a développé une méthode – là, la biologie intervient, car on doit savoir où vivent certaines espèces –, et Pauly a démontré que l'on épuisait les stocks de poissons, car on ne pêchait pas les mêmes. Non seulement on épuisait les populations, mais de plus, les chiffres déclarés par la Chine étaient faux ; les chinois l'ont reconnu depuis. Pauly a réalisé une prouesse extraordinaire.

Je me suis intéressé au problème, j'ai alors appris l'état des océans, et j'ai été extrêmement frappé. L'océan est le poumon de la planète, la moitié de l'oxygène que l'on respire vient du phytoplancton et il se passe des choses terribles, les poissons disparaissent. Dans le golfe du Mozambique, il n'y a plus de poissons, il n'y a plus que des méduses. J'apprends tout ça quand j'arrive au PIMS en 2003, et lorsque je pars en 2011, j'ai collaboré sur ces problèmes avec Rashid Sumaila. Il y a d'ailleurs de très beaux problèmes de maths, si ça intéresse des collègues. Avec Sumaila [21], on avait étudié la question d'équité intergénérationnelle : si vous voulez, les économistes ont toujours l'idée du planificateur bienveillant ; les modèles climatiques sont des modèles d'optimisation, c'est-à-dire que vous avez un critère, vous écrivez $e^{-\rho t}$, et vous maximisez. Ça a un certain mérite, mais... le planificateur bienveillant n'existe pas ! Maintenant vous pouvez essayer de faire autre chose. Si par exemple on fait intervenir les générations futures, alors si vous changez un peu de point de vue, vous aboutissez à un problème de maths extraordinairement intéressant qui est : au lieu d'écrire $\int e^{-\rho(t)} U(ct)dt$, i.e., au lieu de mettre le facteur d'actualisation $e^{-\rho(t)}$, vous mettez un facteur d'actualisation qui est décroissant, mais qui n'est pas exponentiel, par exemple, une combinaison linéaire de 2 exponentielles. À ce moment-là, les problèmes d'optimisation n'existent plus ; c'est-à-dire que vous pouvez optimiser, mais l'optimisation calculée à l'instant 1 sera différente de l'instant 2, et il faut faire complètement autre chose. J'ai beaucoup étudié ce genre de chose, j'ai regardé cela sur un modèle climatique, et on rentre dans quelque chose qui est beaucoup plus près de la réalité, au sens où vous voyez ce qui se passe. Par exemple, dans le cas de la France, il y a un gouvernement aujourd'hui et il va décider. Oui, mais... il y a l'annualité budgétaire, et dans un an, il se reposera la question, et fera peut-être autre chose. Donc il y a ce principe d'incohérence temporelle, à savoir que les décideurs changent, et n'ont pas toujours les mêmes taux d'actualisation ; et à ce moment-là, la question est non pas « qu'est-ce qu'il y a de mieux à faire », mais : comment je peux lier mes successeurs, comment je peux contraindre mes successeurs, peut-on trouver une règle du jeu que tout le monde suivra ? Et ça, c'est un très joli problème de maths ! J'avais travaillé dessus [22], et pour ceux qui aiment les équations différentielles, il y avait une très belle application du théorème de la variété centrale [23].

Donc je crois que du point de vue vraiment scientifique, il y a eu deux choses sur la prise de conscience ; il y a eu une question personnelle – je voyais ce qui se passait –, et il y a eu deux questions scientifiques. La première est la collaboration avec les personnes travaillant dans le domaine des océans, et la seconde – il faut le dire ! –, c'est l'inanité des modèles économiques sur le climat, des modèles de croissance optimale. Le prototype étant le modèle de Nordhaus [24] qui ne tient pas debout, c'est presque criminel de dire des choses comme cela.

21. *Equilibrium resource management with altruistic overlapping generations.* JEEM, Volume 70, 2015.

22. En collaboration avec Lazrak, A. *The golden rule when preferences are time inconsistent.* Math Finan Econ 4, 29–55 (2010).

23. Le concept de théorème de la variété centrale est en lien avec les systèmes dynamiques, `https://en.wikipedia.org/wiki/Center_manifold`https ://en.wikipedia.org/wiki/Center_manifold

24. William Nordhaus, économiste américain qui reçoit le prix Nobel d'économie en 2018 pour ses travaux en lien avec le réchauffement climatique et l'économie.

Et sur le réchauffement global de la planète ? Tu nous parles de l'industrie de la pêche, de l'industrie du bois, c'est assez local et ça concerne surtout Vancouver. Mais sur le réchauffement global et les émissions de CO_2 ? Tu es contemporain du rapport Meadows [25] de 1972, ou bien de la célèbre conférence de Grothendieck de 1971 [26].

Oui j'avais entendu parler du rapport Meadows, il avait fait du bruit à l'époque et avait été très discuté et critiqué notamment par les économistes. Disons que j'ai toujours milité politiquement, en particulier je me suis beaucoup intéressé à la Palestine. Par ailleurs, des personnes comme Grothendieck ou Smale [27] avaient surtout mis au devant de la scène le danger de la guerre nucléaire. Je savais ce que pensait Grothendieck et j'étais d'accord avec lui. Il n'y avait pas vraiment de prise de conscience sur les limites de la croissance. Et le rapport Meadows est arrivé un peu au mauvais moment… c'était l'époque du triomphe des matheux parmi les économistes, en particulier avec la théorie des équilibres en économie. À cette époque, personne ne songeait aux ressources.

Mais quels sont les problèmes les plus urgents ? Maintenant, je considère que les anciens problèmes n'ont pas disparu, mais le problème le plus urgent est le réchauffement climatique et les gens ne le comprennent pas. Entre 1989 et 1994, j'étais président d'université, je ne pouvais rien faire ; et tu es pris par ton métier aussi…

Peux-tu dire à quel moment tu prends conscience que le réchauffement climatique est le problème numéro 1 ? Quand on nous explique les problèmes de pêcherie on tombe des nues, quand on nous explique les problèmes du bois, on tombe des nues, et puis quand on nous explique le problème de la Palestine, bien entendu c'est un problème extrêmement compliqué, effroyable. Et comme tu le dis, il y a le problème si important qu'est le réchauffement climatique. Est-ce qu'à un moment il y a eu une prise de conscience brutale du problème qui s'est produite ? Est-ce qu'il y a eu pour toi une rupture, ou est-ce venu petit à petit ?

Si je reviens aux années 70, 80, 90 jusqu'en 2000, on n'y pensait pas beaucoup. C'était moins urgent, je prenais l'avion sans réfléchir, pour un oui ou pour un non… Bien entendu, les pêcheries, les forêts etc., c'est lié au réchauffement climatique, on le savait. Mais, l'urgence, le sentiment que c'est vraiment urgent et qu'il faut faire quelque chose, on peut dire effectivement que c'est après ma retraite en 2011, quand justement je n'ai plus eu de soucis par ailleurs. La retraite, c'est très intéressant parce que l'on n'a plus d'obligations, c'est un peu le moment où l'on se pose, on réfléchit. Je me suis dit « Maintenant, il faut que je fasse des choses importantes ».

(IG) 2011, c'est déjà tôt. À cette époque, on partait à Banff [28] presque tous les ans. Si j'avais compris à cette époque le problème climatique, je ne serais pas allé à toutes ces conférences.

Après la retraite, il y a le luxe extraordinaire de pouvoir faire ce que l'on veut. Et il y a autre chose : plus on s'intéresse aux problèmes de la planète, plus on y plonge. Et là je me suis dit, finalement qu'est-ce que l'on peut faire, vu mon âge et ce que je sais faire, on va préparer un cours [29]. On peut enseigner le problème climatique à nos étudiants.

(ALF) Oui c'est un moyen d'entrer dans la problématique, d'apprendre des choses. Faire un cours est le meilleur moyen de s'approprier le sujet.

Nous le savons tous, le meilleur moyen d'apprendre quelque chose est de l'enseigner. Sur le réchauffement climatique, j'ai pensé que la meilleure chose à faire était de faire prendre conscience aux gens, et le plus tôt possible ! Pour cela il fallait faire un cours sur le sujet très tôt dans le cursus universitaire. Et faire prendre conscience aux étudiants que le problème est global.

On arrive maintenant à la troisième partie, la place des mathématiques, mais aussi de la communauté des mathématiciennes et des mathématiciens, face à ce problème. Que penses-tu de la place d'une jeune mathématicienne ou d'un jeune mathématicien dans un monde où le voyage sera l'excep-

25. Rapport aussi intitulé *The Limits to Growth* publié en 1972 par le club de Rome.
26. Conférence donnée au CERN par Grothendieck intitulé *Allons-nous continuer la recherche scientifique ?*, cf. `https://www.cairn.info/revue-ecologie-et-politique-2016-1-page-159.htm`.
27. En recevant la médaille Fields en 1966 à Moscou, Smale dénonce la guerre au Vietnam mais aussi la maltraitance soviétique des opposants.
28. À Banff, Canada, où se trouve le Banff International Research Station (BIRS), institut de recherche équivalent à Oberwolfach en Europe.
29. Ivar et ses collaborateurs ont créé un cours pour les étudiants de première année de l'université Paris-Dauphine qui est devenu obligatoire en 2020, `https://dauphine.psl.eu/dauphine/responsabilite-sociale-universite/formation-et-enseignement/cours-les-enjeux-ecologiques-du-21e-siecle`

tion, as-tu un avis sur la question ? Quel bouleversement la communauté va-t-elle subir ? Imagines-tu un monde de recherche mathématique sans la frénésie des voyages ?

Sur la question des voyages, on a eu une réunion à Dauphine avec Valérie Masson-Delmotte, on a bien compris l'importance des contacts humains. En revanche, de vieux crocodiles comme moi ont établi des contacts humains il y a 20 ou 30 ans. Ce n'est pas la peine de prendre l'avion pour voir des gens que l'on connaît depuis toujours. Mais les jeunes doivent établir leurs contacts et ils ont probablement encore besoin de voyager. Ceci dit, il y a des gradations dans les voyages en avion, est-ce que l'on reste une semaine, un mois etc. En Europe on prend le train. Mais il est vrai que les jeunes ont besoin de construire un réseau, tandis que les gens d'un certain âge en ont beaucoup moins besoin, ils peuvent l'entretenir, et alors là, il faut être plus sévère avec eux.

On parle d'un monde bas-carbone, où le voyage en avion sera une telle exception que les contacts et les recherches seront peut-être plus européens. As-tu une idée de l'avenir des voyages en avion ?

Je sens mal les voyages en avion dans l'avenir, les avions rejettent tellement de carbone que je ne vois pas comment on pourra les maintenir. Sur l'Europe, les trains c'est très bien, encore faudrait-il que l'on baisse un peu les prix des voyages car à l'heure actuelle on peut aller de Paris en Croatie pour 24 euros et pour aller à Marseille c'est 100 euros. Ce n'est pas normal. Mais cela n'empêche pas d'établir des contacts en Europe, et d'envoyer des gens passer 6 mois plus loin. Peut-être pas aller à Banff une semaine, mais un séjour de 6 mois à Vancouver pourquoi pas. Ça signifie que les voyages seront plus longs. De toute façon, on le sentira à cause du prix des voyages, je ne vois pas comment les voyages en avion pourraient continuer au prix où ils sont maintenant, et les budgets des laboratoires seront plombés.

Même si les prix sont multipliés par deux, les voyages en avion ne vont pas tellement diminuer. Avec des prévisions du GIEC [30] où il faut parvenir à 2 tonnes par an et par habitant en 2040, ça ne peut pas tenir.

Je pense que les prix des carburants vont augmenter et plus tard il n'y en aura plus, tout simplement. À l'heure actuelle, la consommation des énergies fossiles augmente de 3% par an, et la production plafonne. Où va-t-on trouver le carburant ?

Dans les gaz de schiste ?

Cela ne suffira pas. Le baril est actuellement à 100$ environ, et ce n'est pas la faute de la guerre en Ukraine. On ne pourra pas faire fonctionner les avions au charbon. Sur toutes ces politiques, je pense que si on ne le fait pas volontairement, ça sera imposé et ça sera beaucoup plus dur.

Si c'est imposé, cela pourrait-il être par le ministère, ou par les laboratoires ?

Je crois que les choses viennent d'en bas, qu'elles doivent venir des laboratoires, en concertation avec les membres de ces laboratoires.

Se passe-t-il quelque chose, au niveau du CEREMADE, par exemple ?

Oui, il se passe des choses ; à nouveau, je précise bien que je suis à la retraite ! Il y a une commission qui s'est réunie, et il y a une réflexion sur le problème. La commission a mis en place une base de données pour recenser les émissions de gaz à effet de serre dues aux déplacements professionnels. Un outil collectif a été créé, permettant à chacun de connaître son impact personnel et d'établir un bilan global au niveau du laboratoire. Des discussions sont ouvertes sur des actions à mener pour limiter les émissions de gaz à effet de serre. On décidera ensuite si on limite ou pas. Il y a une action entreprise au sein du CEREMADE et je l'approuve.

Cela sous-entend un bouleversement à un horizon proche, on évoque souvent celui de 2030, des 8 prochaines années, donc !

Est-ce un bouleversement, je ne sais pas... Cela ne me gêne pas de prendre le train pour l'Europe.

Tu dois être invité à beaucoup de conférences dans le monde entier ?

Je suis à la retraite je te rappelle... et il y a eu le COVID. Je vois autour de moi, les gens de la génération de mes enfants font du télétravail, c'est général. Au Canada, en France, les entreprises sont au télétravail. Je ne sais pas si c'est un effort monstrueux pour les mathématiciens de se mettre au télétravail plutôt que de ne plus voyager en avion. C'est ce qui se passe dans les grandes entreprises. Elles ont diminué leurs budgets de voyages en avion, les

30. Rapport spécial du GIEC sur les impacts du réchauffement global de 1.5°, 2018, cf. `https://www.ipcc.ch/sr15/`

grandes entreprises ont découvert qu'avec le télétravail on peut faire beaucoup de choses. Une grande entreprise moderne est une entreprise avec des salariés qui travaillent en Europe, en Amérique et en Asie, et les gens font des visioconférences.

Tu crois que l'on peut se faire un réseau comme ça ?

Oui, c'est un changement d'habitude, et cela se pratique dans les entreprises. Je pense que ça sera imposé par le prix des carburants. La difficulté que je vois est l'enseignement. Discuter recherche par visioconférence avec des collègues, je veux bien, enseigner à 30 ou 40 personnes, c'est plus délicat. Mais ça, on peut le faire en local. Je ne vois pas pourquoi ça serait un effort surhumain chez les mathématiciens alors que ça se fait couramment dans les grandes entreprises. Je vois autour de moi, tout est en télétravail.

(IG) Actuellement en 2022, les conférences mathématiques reprennent au maximum. Il semble que les voyages aient repris comme avant le Covid, sans changement réel.

Je peux te dire qu'il y a eu des changements dans les grandes entreprises.

(IG) Ces grandes entreprises ont dû y trouver un gain économique...

Oui, mais cela se fera aussi dans les laboratoires. À nouveau, je pense que les échanges personnels sont importants, surtout pour les jeunes ; un post-doc va aller passer un an ailleurs, et on ne va pas l'envoyer en bateau en Chine. Mais entre le train en Europe et le télétravail, on peut déjà faire beaucoup de choses. A-t-on par exemple tiré un bilan de l'ICM [31] 2022 ? Il a eu lieu à distance, en a-t-on souffert ? Si même l'ICM peut le faire, on peut le faire.

(ALF) J'ai une question plus personnelle. Cette prise de conscience de l'urgence m'a fait me questionner sur mon propre rôle. Est-ce vraiment le moment pour que je fasse des maths ? C'est une question que je me pose, alors que je fais justement des maths dans le domaine du changement climatique. La prise de conscience m'a déstabilisée.

Il faut faire des maths. On vit dans un monde de mensonges. Les gens vous racontent des histoires, les mots n'ont plus de sens, il y a du greenwashing partout, on ne sait pas ce qui est vrai ou ce qui est faux. En maths, tu peux apprendre aux gens qu'il y a une vérité, c'est quand même énorme ! En maths, c'est le seul endroit où tu peux dire ce qui est vrai ou faux. TotalEnergies te dit, on est tout vert, tu vas sur le site de Total et tout est vert. Ils ne parlent pas de pétrole, le mot est sale. En maths il y a une vérité. Si tu apprends ça aux étudiants, c'est un cadeau énorme que tu leur fais. C'est un principe fondamental dans tout ce qui est en lien avec les maths. L'autre chose, ce sont les sujets auxquels on les applique. La statistique en soi, c'est déjà important ; quand tu parles aux gens qui s'intéressent vraiment au réchauffement climatique, ils disent que ce que tu dois apprendre aux étudiants, c'est la notion de statistique scientifique ! Il faut qu'ils comprennent que quand le GIEC dit qu'il y a 50% de chances que quelque chose se produise, ce n'est pas la même chose que quand le gouvernement dit le taux de croissance de l'an prochain sera de 2%. Ce n'est pas la même chose. Les statistiques sont cruciales, et ce n'est pas facile. Les prévisions en matière climatique sont accompagnées de probabilités. Que veulent-elles dire exactement ? Peut-on leur faire confiance ? Dans quelles mesures ?

(IG) C'est donc de la recherche mathématique ?

Là, c'est de l'éducation, ce n'est pas de la recherche. L'éducation est bien entendu cruciale.

(ALF) Je suis d'accord. La difficulté pour moi est plus d'aller en conférence, de voir que l'on a remplacé les données de finance ou d'actuariat par des données de disparition de telle ou telle espèce... On utilise certes des données en lien avec le changement climatique, mais c'est *business as usual* quand même ! Les conférences ronronnent, les publications aussi. C'est tout un système qui n'est pas sobre, dans lequel on ajoute de la complexité pour construire du nouveau.

Je ne connais pas le domaine de la statistique. Je peux te dire qu'en économie tout le monde s'en fout du réchauffement climatique, on n'en parle pas. Les cinq revues majeures d'économie n'ont jamais publié un seul article sur le réchauffement. Ils ne s'y intéressent pas pour des raisons institutionnelles, ou d'autres raisons. Si les statisticiens s'y intéressent, je ne peux que les féliciter ! La deuxième chose c'est que je vois des problèmes statistiques fondamentaux et nouveaux. Par exemple, peux-tu mesurer la biodiversité ? Existe-t-il des indicateurs sur le nombre d'espèces présentes par mètre carré ? Comment fais-tu pour compter les poissons qui sont

31. ICM est le congrès international des mathématiciens qui se réunit tous les 4 ans.

dans l'océan ? Donc des problèmes de stat, il y en a, une des difficultés du problème c'est qu'il n'y a pas beaucoup de données.

(IG) C'est pour cela que l'on n'en parle pas ?

Oui c'est certainement une raison. Les problèmes de statistique sont énormes. Que fais-tu comme statistique ?

(ALF) J'étudie la modélisation d'événements extrêmes, les modèles statistiques permettant d'évaluer les risques de survenue d'événements rares, tels que les inondations ou les vagues de chaleur, par exemple.

Tu n'as pas l'air enthousiaste ?

(ALF) C'est vrai, je suis en questionnement par rapport à l'utilité de mon travail. C'est certes personnel, mais je ne suis pas seule dans cette situation de questionnement de sur quoi et où faire sa recherche [32]. Quand je lis les rapports du GIEC, parfois je me dis : à présent on en sait assez, maintenant il faut qu'on bouge ! Comme si je devais dédier mon temps de recherche à comprendre comment on peut bouger, comment on met en mouvement les humains !

Je suis d'accord avec toi que sur le problème du réchauffement climatique, fondamentalement on en sait assez. Ce n'est pas un article de plus qui va changer grand chose.

(ALF) Oui, pour bouger, on en sait assez. Ne devrions-nous pas décider globalement, en tant que chercheurs, de prendre un tantième du groupe, motivé pour y aller, au sein duquel on se dit que l'on s'attaque à ces problèmes urgents. Bien entendu on sort de notre domaine de compétences. Par exemple, je ne sais pas comment on fait pour travailler avec les problèmes d'une ville, comment on met en place des choses à une échelle locale, comment on planifie une chaîne d'actions… choses que les mathématiciens ne savent pas faire seuls, certes, mais je veux croire qu'une recherche collective est possible.

Qu'on en sache assez, ça je suis d'accord. Ce n'est pas en perfectionnant les modèles numériques que l'on va convaincre. Maintenant, que cela soit un sujet intéressant sur lequel travailler, c'est certain aussi. Je préfère travailler là-dessus que sur autre chose. Mais moi je suis à la retraite… Ceci dit, il y a encore des choses intéressantes. Je te signale un problème qui est posé régulièrement par des juristes, c'est le problème des néonicotinoïdes. On dit que les néonicotinoïdes tuent les abeilles. Ces insecticides nuisent aux abeilles parce que l'on fait des expériences qui le prouvent. Mais ces expériences sont de nature statistique. Le juge, lui, ne veut pas de cela ; il veut une chaîne de causalités, c'est-à-dire qu'il veut que l'on lui démontre que telle abeille est morte à cause de tel truc, par tel biais etc. Il y a un énorme fossé entre ce que le juge veut et ce que les scientifiques ont, ils ont des facteurs statistiques.

(ALF) Les chaînes causales sont des problèmes bien délicats.

Oui mais c'est ce que veut le juge. C'est un vrai problème, concret. Ces problèmes sont comme la neige vierge, tu fais ton chemin, personne n'y est jamais passé. Ça me rappelle un étudiant à qui j'avais donné un sujet, qui est revenu me voir en me disant : il n'y a pas de littérature… je n'avais pas à lui donner ce problème. Mais ici, c'est un vrai problème !

(IG) Tu dis, on va attaquer en justice pour défendre les abeilles. Mais honnêtement, on sait où est le problème, c'est le système qui est mal fait, la justice n'est pas à la hauteur. On ne va pas attendre 10 ans pour convaincre que ce sont ces néonicotinoïdes qui causent la mort des abeilles. J'ai l'impression que l'on attaque le problème par le mauvais côté.

Écoute, je ne suis pas d'accord avec toi pour plusieurs raisons. D'abord, chacun fait ce qu'il veut, chacun fait ce qu'il peut. Il y a un article dans Nature qui raconte qu'un juriste ayant travaillé des années sur ce sujet est allé se coller les mains sur le site de Monsanto. Je comprends très bien ceux qui font de l'action directe, mais tout le monde n'est pas comme ça. L'avantage si tu attaques en justice, c'est que tu éduques le juge. Par exemple, tu ne peux pas défendre les abeilles, les abeilles ne sont pas une personne. Maintenant, prenons l'Amoco Cadiz qui s'est échoué et a déversé des tonnes de pétrole sur les côtes bretonnes en 1974, il n'a nui à personne. Il n'y avait pas moyen de l'attaquer. Il a nui à la côte bretonne mais ce n'est pas une personne. Alors il a fallu faire des lois pour éduquer le juge ; maintenant il y a un délit d'atteinte à l'environnement, ça n'existait pas avant. Et puis ça ne marche pas si mal que ça, l'état a été condamné plusieurs fois. Ça ne lui fait pas plaisir. Par ce biais,

32. Voir par exemple `https://www.lemonde.fr/sciences/article/2022/06/27/ces-chercheurs-tentes-par-la-bifurcation-ecologique_6132235_1650684.html`.

tu éduques aussi toute la société. Et enfin, ce sont des problèmes scientifiques intéressants.

(IG) Tu es engagé depuis longtemps dans la cause du climat. As-tu eu des conflits avec des collègues sur ce sujet-là ?

Non, pour le climat non. Pour le CEREMADE, on a fait une base de données, il y a des collègues qui disent que c'est de la paperasserie, on a eu ce genre de réactions. Ils ne voient pas encore l'utilité, ou bien ça ne les intéresse pas, tout simplement. Mais des conflits non, des divergences oui. Par contre j'ai des articles qui ne sont pas passés dans des revues, notamment en finance, car je dénonçais un greenwashing. Mais il n'y a pas d'argent en jeu dans la communauté mathématique.

(IG) Il n'y a pas d'argent mais des idées politiques. Depuis quelque temps, on entend des collègues demander plus d'argent pour la recherche mathématique... croyant peut-être s'attaquer à la résolution du problème climatique par des innovations techniques. Mais on sait que des moyens supplémentaires ce sont aussi des émissions de CO_2 en plus...

Ce n'est pas comme cela que je vois les choses. Je pense que le monde va changer profondément, que le prix des énergies fossiles va exploser, que les voyages à 20 euros ce sera fini. Je pense également que la science va changer, c'est-à-dire que tout l'accent qui a été mis sur la finance pendant des années et des années, maintenant il va falloir s'occuper du monde autour de nous. Ça va arriver. Il y a la responsabilité sociale des entreprises, il y a une demande des jeunes et il y aura une prise de conscience que les problèmes sont globaux.

Aux jeunes étudiants, je dirai que si vous imaginez que vous allez entrer dans un monde où les mathématiciens font des maths dans un coin, les informaticiens de l'informatique dans un autre coin, de même pour les historiens etc., alors vous vous fourrez le doigt dans l'oeil. C'est fini, ça. Les problèmes qui vont se poser sont des problèmes globaux. Après les incendies de cet été, on va replanter des forêts ; les mêmes ? Il va falloir réfléchir à ça, en parler à des biologistes etc. ce sont des réflexions collectives. Non il n'y aura pas plus d'argent aux maths, mais il y aura de l'argent pour de grands projets et les matheux finiront par s'intéresser aux problèmes qui les entourent.

La pensée en silo, tout le monde séparé, c'est terminé. Tout le monde pense que la guerre en Ukraine, c'est la faute de Poutine. Je veux bien, mais ce n'est pas lui qui a inventé la raréfaction des ressources. Ce sont des guerres pour les ressources qui commencent.

Ce que tu veux dire, c'est que l'on ne dit pas le vrai nom de ce qui se passe. C'est le début des problèmes des ressources.

Oui, on a tout en même temps, on a la raréfaction des ressources, le réchauffement climatique et la perte de la biodiversité. Ce qui va intéresser les gens, ce sont ces problèmes-là, et on ne les résoudra pas séparément.

(IG) J'entends, mais pour l'instant, on ne prend pas du tout cette direction-là. Pour l'instant il n'y a pas de changement, par exemple au niveau de l'État français.

Le changement viendra par en bas, on a fait le cours climat à Dauphine, personne ne nous l'a demandé. Je suis bien d'accord avec toi sur le président de la république, mais il ne fera pas ce qu'il veut, si ça continue comme ça, on aura des troubles dans ce pays. Il se passe des choses extraordinaires, l'Europe souhaite plafonner les prix du gaz russe car les russes font trop de profits et financent la guerre en Ukraine. Mais ce sont ici les fondements de la théorie du marché qui sont remis en cause ; ce que j'ai enseigné pendant des années, c'est qu'il faut maximiser les profits... Il y a de grands bouleversements idéologiques. On est vraiment dans une prise de conscience et de transition. Les consommations augmentent, et les ressources ne suivent pas. Il y aura de grands changements. Cela me rappelle la formule, Il faut bien que je les suive puisque je suis leur chef [33].

Merci beaucoup Ivar d'avoir accepté de répondre à nos questions !

33. Citation attribuée à Ledru-Rollin, en 1849.

Ivar Ekeland est né en 1944 à Paris. Ses travaux portent sur l'optimisation, la mécanique hamiltonienne et la géométrie symplectique, ainsi que sur l'économie et la finance. Il est membre de la Société Royale du Canada et de l'Academia Europea, membre étranger des académies des sciences de Norvège, de Palestine et d'Autriche. Il a été président de l'université Paris-Dauphine et directeur du Pacific Institute of Mathematical Sciences. Ivar Ekeland a toujours été un mathématicien engagé dans la défense des droits humains, en particulier à travers l'aurdip (Association des Universitaires pour le Respect du Droit International en Palestine) dont il est président. Il est aussi très engagé pour la cause environnementale. En plus de ses écrits scientifiques, il a publié de nombreux livres de vulgarisation, dont une bande dessinée, avec Étienne Lécroat, intitulée *Urgence climatique, il est encore temps!*

... les inégalités isopérimétriques

• B. KLOECKNER

Quand on parle de l'inégalité isopérimétrique, on pense bien sûr à l'énoncé suivant.

Théorème 1. *Tout domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ voit son périmètre $|\partial\Omega|$ et son aire $|\Omega|$ reliés par l'inégalité*

$$|\partial\Omega|^2 \geqslant 4\pi|\Omega|.$$

De plus en cas d'égalité, Ω est un disque rond.

Ce résultat était connu dès l'Antiquité grecque, mais on peut considérer que sa démonstration remonte au XIXe siècle. Si la notion d'aire (et plus loin de volume) $|\Omega|$ ne pose pas de problème (on peut simplement considérer la mesure de Lebesgue de Ω), la définition exacte du périmètre $|\partial\Omega|$ est négociable et conditionne la classe de domaines qu'on considère, notamment la régularité de leur bord. Ces questions prennent une grande importance dans certaines démonstrations, mais en ce qui concerne l'énoncé on peut penser simplement à des domaines à bords lisses, le périmètre étant alors la longueur usuelle $\int \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$ où γ est un paramétrage du bord ; et en plus grande dimension on pourra utiliser le volume usuel de dimension $n-1$ pour une hypersurface.

FIGURE 1 – Un domaine Ω (à gauche) qui n'est pas symétrique dans la direction L (verticale ici, dessinée en rouge à droite) peut être amélioré en Ω' (à droite) obtenu en symétrisant par rapport à L chacune des tranches définies par la direction orthogonale. Le volume n'est pas modifié, mais le périmètre est diminué de deux façons : en réunissant des tranches non connexes, et par effet de convexité en répartissant les variations de largeur à égalité entre les côtés de gauche et de droite.

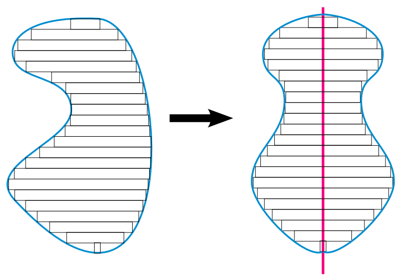
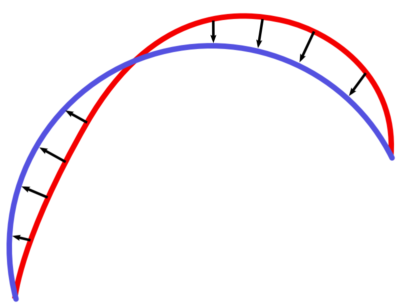


FIGURE 2 – Si $\partial\Omega$ n'est pas de courbure constante (un morceau représenté en rouge), la déformer localement de sorte à lisser les variations de courbure tout en laissant $|\Omega|$ inchangé va raccourcir $|\partial\Omega|$ (en bleu).



1. Démontrer l'inégalité isopérimétrique dans le plan

Tout d'abord Steiner, sachant que la forme ronde est la seule à admettre une symétrie axiale dans chaque direction, démontre que si Ω n'est pas symétrique dans une direction L, on peut l'« améliorer » en un domaine Ω' de même volume, mais de périmètre strictement plus petit, par ce qu'on appelle maintenant le procédé de symétrisation de Steiner (figure 1). Le problème de cette méthode est qu'il manque un ingrédient pour conclure : l'existence d'un minimiseur ! C'est alors une formidable motivation pour développer un domaine à part entière, le calcul des variations.

Une seconde approche d'esprit similaire consiste à considérer le bord de Ω comme une courbe paramétrée et montrer que si la courbure n'est pas constante, on peut améliorer Ω en déformant légèrement le bord localement (figure 2). Le problème de l'existence d'un minimiseur se pose encore, il faut bien choisir la classe de régularité des courbes qu'on considère.

2. Isopérimétrie euclidienne en dimension supérieure

Il faut encore un temps conséquent pour aboutir à une démonstration rigoureuse en dimension supérieure, aboutissant au résultat qu'on énonce sous la forme suivante (voir notamment [6]).

Théorème 2. *Tout domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vérifie*

$$|\partial\Omega| \geqslant \left|\partial B^n_{|\Omega|}\right|$$

où B^n_V est une boule ronde de volume V. En cas d'égalité, Ω est isométrique à $B^n_{|\Omega|}$.

On continue d'appeler $|\partial\Omega|$ le *périmètre* de Ω, bien qu'il s'agisse d'un volume $(n-1)$-dimensionnel ; les deux méthodes précédentes peuvent être utilisées, avec chacune leur propre difficulté.

La symétrisation de Steiner se définit de même façon par rapport à chaque direction d'hyperplan, et réduit le périmètre strictement si le domaine n'avait pas déjà une symétrie dans cette direction ; les seuls domaines ayant des symétries dans toutes les directions sont encore les boules rondes. Le problème est donc de montrer l'existence d'un minimum, ce qui demande de choisir de façon adéquate un espace de domaines dans lequel faire vivre Ω (qui doit contenir au moins les domaines auxquels on veut appliquer l'inégalité, par exemple les domaines à bords lisses) et une fonctionnelle de périmètre pour $|\Omega|$ (qui étende le volume riemannien du bord dans le cas des domaines à bord lisse). La notion qui s'est imposée est celle d'*ensemble de Caccioppoli*, directement reliée à la notion de *fonction à variation bornée*, c'est-à-dire qu'on utilise la dualité contre les divergences de champs de vecteurs partout de longueur au plus 1 (dans le cas d'un domaine à bord lisse, la formule de Stokes assure qu'on retrouve le périmètre usuel).

Cette approche admet des variations, ainsi Schwarz [7] (repris par [6]) remplace l'hyperplan par un sous-espace de plus petite dimension, et les tranches sont symétrisées en des boules de la dimension complémentaire plutôt que des intervalles.

La méthode variationnelle se complique substantiellement : lorsqu'on écrit qu'un domaine à bord lisse Ω est stationnaire pour la fonctionnelle de périmètre $|\partial\cdot|$ pour les déformations à volume constant, on obtient que la *courbure moyenne* du bord doit être constante (on dit que le bord est CMC). Il reste donc deux difficultés : montrer qu'on a des minimiseurs assez lisses pour que la courbure moyenne ait un sens, et que les seuls domaines compacts à CMC sont les sphères rondes ; un argument dit « du plan glissant » d'Aleksandrov permet pour ça de montrer, à nouveau, que Ω devrait être symétrique dans toutes les directions d'hyperplan.

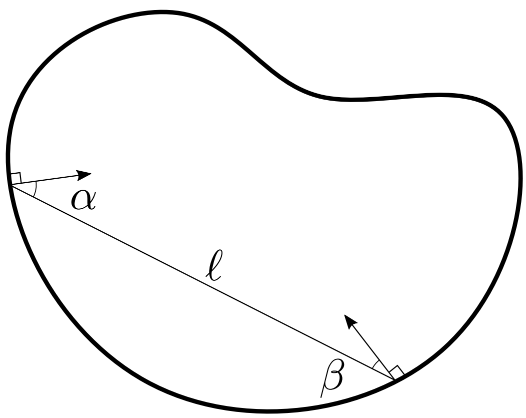
Méthodes directes. On dispose également d'autres méthodes, qui ne nécessitent pas de montrer a priori l'existence d'un minimiseur, mais montrent directement l'inégalité. Dans le plan, on peut utiliser les séries de Fourier ; en dimension quelconque, une approche utilise l'*inégalité de Brunn-Minkowski*, une autre due à Gromov repose sur un réarrangement (soit celui de Knothe et Rosenblatt, soit l'application de Brenier obtenue par le transport optimal) ; toutes les deux ont été souvent présentées. Une autre, reposant sur une idée de Croke [2] ne fonctionne qu'en dimensions 2 et 4 mais permet aussi de traiter le cas des domaines dans des variété de courbure majorée par une constante [4], dont on reparlera. L'idée est la suivante : on considère une mesure naturelle μ_Ω sur les cordes de Ω, c'est-à-dire les segments de droite orientés maximaux. On observe que les trois fonctions ℓ, α et β donnant pour chaque corde sa longueur et les angles qu'elle fait avec les normales aux points où elle rencontre le bord (figure 3) vérifient certaines relations :

$$\int \ell \,\mathrm{d}\mu_\Omega = |\mathbb{S}^{n-1}||\Omega| \qquad \int \frac{\ell^{n-1}}{\cos\alpha\cos\beta}\,\mathrm{d}\mu_\Omega \leqslant |\partial\Omega|^2$$

$$\int \frac{\ell^n}{n\cos\alpha}\,\mathrm{d}\mu_\Omega \leqslant |\partial\Omega||\Omega| \qquad \int \frac{\ell^{n+1}}{n(n+1)}\,\mathrm{d}\mu_\Omega \leqslant |\Omega|^2$$

(l'égalité est la formule de Santaló, les inégalités sont obtenues en paramétrant Ω ou son bord en coordonnées polaires depuis un point soit intérieur soit au bord, et en intégrant à nouveau sur ce point). On sait également que μ_Ω est symétrique en α et β, et on connaît ses marginales $\alpha_*(\mu_\Omega)$ et $\beta_*(\mu_\Omega)$. L'existence d'un domaine avec un certain volume $V = |\Omega|$ et un certain périmètre $P = |\partial\Omega|$ implique donc en poussant en avant μ_Ω par (ℓ, α, β), l'existence d'une mesure sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}]^2$ vérifiant certaines égalités et inégalités paramétrées par P, V. On considère alors le problème abstrait « pour quelles valeurs de P, V une telle mesure peut-elle exister ? », un problème de *faisabilité* en *programmation convexe*. On dispose alors de la dualité, qui permet d'obtenir des contraintes sur P et V en choisissant de bons « témoins » ; par exemple si on intègre une combinaison linéaire des quatre relations ci-dessus, si les coefficients correspondant aux inégalités sont positifs, et si on s'arrange pour que l'intégrande soit positive, on obtient une inégalité impliquant $|\partial\Omega|$ et $|\Omega|$. On peut de même faire intervenir toutes les autres contraintes connues sur μ, notamment ses marginales. En dimension 2 et 4 exactement, un petit miracle opère et on peut, en s'aidant de la connaissance que l'optimum devrait être réalisé par la mesure $\mu_{B^n_V}$, trouver des témoins assurant que la paire (P, V) n'est réalisable que si $P \geqslant |\partial B^n_V|$. Dans les autres dimensions, le problème de programmation convexe n'a pas gardé assez d'information du problème géométrique.

Figure 3 – Une corde et ses trois paramètres géométriques associés



3. Isopérimétrie dans les variétés

Face à une aussi belle inégalité, les géomètres se sont inévitablement posé la question : et dans ma variété riemanienne M préférée [1] ? On peut formuler la question en terme du *profil isopérimétrique* défini pour tout $V \in \mathbb{R}_+$ par

$$I_M(V) = \inf\left\{|\partial\Omega| : \Omega \subset M, |\Omega| = V\right\}$$

où on peut se restreindre disons aux domaines compacts à bords lisses (mais il n'est alors pas dit que la borne inférieure soit atteinte).

Schmidt [6] a traité dès la première moitié du XX$^\text{e}$ siècle le cas de la sphère ronde et de l'espace hyperbolique, c'est-à-dire les espaces de courbure constante : à nouveau, avec des arguments de symétrisation, on obtient que l'optimal est réalisé par les boules rondes. Notons X^n_κ ces espaces (ainsi X^3_1 est la n-sphère ronde de rayon 1, X^2_{-4} est le plan hyperbolique normalisé pour avoir courbure -4, et X^7_0 est $\mathbb{R}^7$ avec la métrique euclidienne, etc.). On notera I^n_κ, plutôt que $I_{X^n_\kappa}$ leurs profils isopérimétriques.

À ce jour, presqu'aucun autre cas n'est connu ; donnons deux exemples saisissants.

Problème 1. *Quel est le profil isopérimétrique du tore plat carré $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ en dimension $n \geqslant 3$?*

On peut espérer que les domaines optimaux sont les « tubes » obtenus comme r-voisinage de sous-tores $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ et leurs complémentaires, il y a donc un profil conjecturé. Aucun des outils connus ne semble permettre d'aborder la question.

Problème 2. *Quel sont les profils isopérimétriques des espaces symétriques de rang* 1 *(autres que la sphère et l'espace hyperbolique) ?*

Plutôt que définir les espaces symétriques de rang 1, disons qu'ils incluent $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$ et $\mathbb{C}\mathrm{H}^m$, analogues complexes (de dimension réelle $2m$) de la sphère et de l'espace hyperbolique. Ces espaces sont isotropes, c'est-à-dire qu'ils ont assez de symétries pour que tous les points et toutes les directions tangentes soient indiscernables (mais ils n'ont pas de courbure sectionnelle constante car tous les 2-plans tangents ne sont pas équivalents). On imagine que les domaines isopérimétriques ont les mêmes symétries donc sont des boules, sauf dans le cas de la courbure positive (par exemple $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$) pour les volumes assez grands où des voisinages de sous-espaces projectifs (et leurs complémentaires) sont également des compétiteurs naturels ; mais on en est encore réduit à conjecturer.

À défaut de traiter une variété donnée, on peut espérer donner des inégalités valables sur des classes de variétés et qui soient optimales pour cette classe. Deux exemples importants font l'objet de conjectures explicites.

1. Qu'on supposera toujours complète. Si votre variété riemannienne préférée n'est pas complète, je vous invite à m'envoyer sa description par courrier électronique, je suis curieux de la connaître !

Conjecture 1. *Si M^n est une sous-variété minimale de $\mathbb{R}^{n+m}$, alors $I_M \geqslant I_0^n$ (autrement dit l'inégalité euclidienne est aussi valable sur M).*

La conjecture a récemment été résolue dans le cas $m \in \{1,2\}$ par Brendle [1], qui donne un historique détaillé. Il est important de noter qu'il n'y a ici aucune hypothèse topologique, si ce n'est les contraintes dues à la minimalité (par exemple M ne peut être compacte).

Si on considère des variétés intrinsèques, on peut remarquer que pour tout V fixé, la fonction $\kappa \mapsto I_\kappa^n(V)$ est décroissante : plus la courbure est négative, plus l'inégalité isopérimétrique de l'espace à courbure constante correspondant est forte. On est amené à conjecturer :

Conjecture 2 (Cartan-Hadamard). *Une variété M^n complète, simplement connexe, à courbure majorée par $\kappa \leqslant 0$ vérifie $I_M \geqslant I_\kappa^n$.*

L'hypothèse de simple connexité évite les contre-exemples évidents que sont les quotients compacts de variétés à courbure négative, où les complémentaires de petites boules peuvent avoir un volume arbitrairement grand et un périmètre arbitrairement petit. Cette conjecture est démontrée en dimensions 2 [8] et 3 [3] ; en dimension 4, [2] traite la situation où $\kappa = 0$; la méthode expliquée dans la section 2 permet de traiter la dimension 4 pour $\kappa < 0$ jusqu'à un volume fini explicite, et pour $\kappa > 0$ en remplaçant la simple connexité (qui ne peut plus suffire) par l'unicité des géodésiques [4].

La place manque pour détailler les nombreuses autres questions isopérimétriques : versions avec une densité pondérant le volume et le périmètre, bulles multiples, isopérimétrie à l'extérieur ou à l'intérieur d'un convexe, stabilité des optimums... On pourra consulter par exemple [5] pour beaucoup plus d'information, mais j'espère avoir déjà convaincu que ce problème parmi les plus anciens est encore aujourd'hui une source de belles mathématiques.

Références

[1] S. Brendle. « The isoperimetric inequality for a minimal submanifold in Euclidean space ». *J. Amer. Math. Soc.* **34**, nº 2 (2021), p. 595-603.

[2] C. B. Croke. « A sharp four-dimensional isoperimetric inequality ». *Comment. Math. Helv.* **59**, nº 2 (1984), p. 187-192.

[3] B. Kleiner. « An isoperimetric comparison theorem ». *Invent. Math.* **108**, nº 1 (1992), p. 37-47.

[4] B. R. Kloeckner et G. Kuperberg. « The Cartan-Hadamard conjecture and the Little Prince ». *Rev. Mat. Iberoam.* **35**, nº 4 (2019), p. 1195-1258. issn : 0213-2230. doi : `10.4171/rmi/1082`. url : `https://doi.org/10.4171/rmi/1082`.

[5] A. Ros. « The isoperimetric problem ». In : *Global theory of minimal surfaces.* Vol. 2. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, p. 175-209.

[6] E. Schmidt. « Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl ». *Math. Z.* **49** (1943), p. 1-109. issn : 0025-5874. doi : `10.1007/BF01174192`. url : `https://doi.org/10.1007/BF01174192`.

[7] H. A. Schwarz. « Beweis des Satzes, daft die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens ». *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* **Bd. II** (1890), p. 327-340.

[8] A. Weil. « Sur les surfaces à courbure negative ». *C. R. Acad. Sci. Paris* **182** (1926), p. 1069-1071.

Benoît Kloeckner

Université Paris-Est Créteil, université Gustave Eiffel, cnrs, lama, Créteil

Benoît Kloeckner est enseignant-chercheur à l'université Paris-Est Créteil. Ses intérêts se sont constamment diversifiés, de la géométrie différentielle aux probabilités en passant par le transport optimal et les systèmes dynamiques, et ce sont plus récemment portés sur des applications des mathématiques à d'autres disciplines.

Merci à Stanislas Herscovich pour sa relecture de ce texte, à Sophie Grivaux pour m'avoir encouragé à l'écrire, et à Damien Gayet pour avoir géré la conséquence de cet encouragement.

À propos des « role models »

• S. BENZONI-GAVAGE

L'été dernier j'ai participé à une n-ième ($n \gg 1$) table ronde dont le sujet était la place des femmes en mathématiques. Nous étions cinq femmes et deux hommes dans le « panel ». De manière remarquable, l'audience était composée en grande majorité d'hommes. Habituellement on a plutôt l'impression de voir 80% de femmes dans ce genre d'événements. Ce fut donc réjouissant de voir tous ces collègues hommes présents et visiblement intéressés par le sujet.

Cette configuration a toutefois eu un inconvénient : nous avons entendu beaucoup plus d'hommes que de femmes s'exprimer, comme l'a fort justement fait remarquer une jeune collègue à la fin. C'est à dessein que je dis « s'exprimer » et non « poser des questions », car ils avaient peu de questions et beaucoup de certitudes.

Immanquablement, l'un de ces collègues, un homme blanc certainement bien intentionné, a évoqué la nécessité d'avoir plus de modèles, des « role models » [1] pour les groupes sous-représentés en mathématiques.

Je me contenterai ici de parler d'un seul groupe sous-représenté et à propos duquel je me sens légitime : les femmes, soit la moitié de l'humanité au cas où il serait nécessaire de le rappeler. Voici ce que m'inspire l'idée des « role models », un peu à contre-courant de certaines initiatives.

Les « role models » entretiennent les préjugés. Pourquoi invoque-t-on des femmes comme « role modeles », si ce n'est pour bien insister sur le fait qu'il est possible de faire des mathématiques de haut niveau tout en étant une femme ? Je dois dire que cela me laisse perplexe, au moins en ce qui concerne les pays comme le nôtre où les filles ont le même accès à l'éducation que les garçons.

Même si je sais qu'en pratique elles ne font pas les mêmes choix que les garçons, répéter encore et encore aux jeunes que les femmes peuvent faire des maths, voire y exceller, me semble être contre-productif. Car j'y vois un risque non négligeable que cela entretienne les préjugés contre lesquels on cherche à lutter.

Des préjugés enracinés dans des visions pas si anciennes selon lesquelles les femmes seraient incapables d'étudier les mathématiques, sans parler de devenir mathématiciennes. À peine un siècle en arrière, Henri Lebesgue affirmait que les femmes sont « physiologiquement incapables d'absorber le vaste programme des hommes » [2]. Plus près de nous, en 1966, Richard Feynman racontait innocemment comment il s'était rendu compte que « l'esprit féminin est capable de comprendre la géométrie analytique » en entendant des étudiantes parler de tricot [3]. De par divers témoignages concordants, j'ai le regret de dire que de telles visions ne sont malheureusement pas éteintes parmi les mathématiciens actuels.

Il y a un siècle, les rarissimes femmes qui réussissaient à surmonter les obstacles pour devenir mathématicienne se voyaient refuser tout statut ou reconnaissance auxquels elles pouvaient légitimement prétendre. Malgré ses travaux et son influence remarquables, Emmy Noether n'a jamais pu obtenir un poste de professeure jusqu'à sa mort prématurée en exil de l'Allemagne nazie. Aujourd'hui, il y a toujours très peu de femmes lauréates des prix les plus prestigieux. Maryna Viazovska, la deuxième femme médaillée Fields de tous les temps, a récem-

1. L'expression ne se traduisant pas bien en français, je l'utilise en anglais dans le texte.
2. Henri Lebesgue, Contre la fusion des agrégations de mathématiques masculine et féminine, L'enseignement secondaire des jeunes filles, 47e année, novembre 1928, pp. 49-55.
3. Richard Feynman, What is science ?, 15th annual meeting of the National Science Teachers Association, New York City 1966.
4. Nature, News Q&A, 15 July 2022

ment déclaré [4] : « Mon rêve est qu'il devienne banal qu'une femme obtienne un prix majeur. »

Les « role models » sont intimidantes. Rêvons avec Maryna Viazovska. Nous ne sommes pas tout à fait près d'atteindre ce but, comme le montre l'affiche du dernier Heidelberg Laureate Forum [5]. Quoi qu'il en soit, des modèles comme elle ou Maryam Mirzakhani (médaillée Fields 2014) ou encore Karen Uhlenbeck (prix Abel 2019) sont pour le moins intimidantes.

Le côté intimidant est là même si l'on considère un exemple de personnalité « role model » moins connue, en tout cas pour le grand public, comme Dusa McDuff. En 1991, Dusa McDuff racontait publiquement son histoire de mathématicienne, ses déboires et réussites. Tout dans son histoire est intimidant, du milieu dans lequel elle a évolué aux personnes avec lesquelles elle a travaillé ou vécu, et bien sûr ses travaux. Comment une élève d'âge scolaire pourrait-elle s'identifier à elle, même sans connaître tous les éléments permettant de percevoir son caractère exceptionnel ?

On pourrait multiplier les exemples de mathématiciennes extraordinaires auxquelles on fait appel comme « role models ». Je n'en citerai qu'une, que j'ai la chance de connaître depuis sa thèse : Laure Saint-Raymond. Sa carrière stratosphérique n'est-elle pas intimidante, sans parler de sa vie privée parfois évoquée dans les portraits qu'on fait d'elle ?

Je l'évoque elle en particulier car elle fait partie des mathématiciennes qui se disent « très heureuses ». C'est en tout cas par ces mots qu'elle avait conclu une table ronde sur les femmes et les mathématiques il y a quelques mois. À la suite de quoi j'avais eu un petit échange avec elle, pour comprendre ce qu'elle voulait dire.

Si j'ai bien compris, son objectif principal en disant cela est d'éviter de dissuader les jeunes femmes de s'engager dans les mathématiques. Elle craint en effet que toutes ces tables rondes sur les femmes et les mathématiques, ainsi d'ailleurs que les campagnes de lutte contre le harcèlement sexuel, soient contre-productives.

Les « role models » sont un pis-aller. Il est vrai que nous perdons des femmes à tous les niveaux en mathématiques, depuis les filières secondaires jusqu'aux carrières académiques en passant par les études supérieures. C'est le fameux « leaky pipeline ». Il y a tant d'étapes dans leur vie où les filles et les femmes ont tendance à abandonner les mathématiques. En tant que communauté, nous devons vraiment prêter attention aux trop rares étudiantes et collègues femmes si nous voulons augmenter leur nombre.

À cet égard, il peut être utile que les jeunes femmes soient accompagnées dans les départements et laboratoires de mathématiques par des femmes jouant un rôle de modèle, ou plus exactement de personne ressource, à même de comprendre « de l'intérieur » le vécu de ces jeunes femmes (n'oublions pas que les hommes sont à la fois « juges et parties », comme l'écrivait Poullain de la Barre [6] en ... 1673!). Disons que c'est un pis-aller, pour pallier une situation subie par un groupe sous-représenté, une situation vraiment inconfortable.

Je ne parle pas ici des problèmes graves, bien plus qu'inconfortables, liés à des faits de harcèlement sexuel voire de violences sexuelles, qu'il faut bien sûr traiter avec les moyens appropriés. Je parle juste du « sexisme ordinaire », qui s'immisce partout y compris chez des personnes bien intentionnées. Les phrases blessantes, aux conséquences potentiellement importantes sur les parcours de vie, doivent pouvoir être partagées avec des personnes de confiance. Des « role models » si on veut, tant que nous parlons de modèles « ordinaires », pas de ces mathématiciennes aux résultats incroyablement impressionnants qui ont surmonté les difficultés et sont en quelque sorte des « survivantes ».

L'une de mes « role models », car j'en ai eu, était Michelle Schatzman. À mes yeux, elle faisait partie de la catégorie que je viens de citer : une survivante impressionnante. Elle se disait « homme généralisé » [7]. Je n'ai jamais bien compris ce qu'elle voulait dire par là. Ce qui est sûr, même si je lui dois beaucoup, c'est que je n'ai jamais pu lui confier les phrases ouvertement sexistes que j'avais entendues à mon égard.

Derrière l'idée des « role models » il y a celle du mentorat. Je me méfie beaucoup du mentorat. Car le paternalisme n'est jamais loin. Il peut même être exercé par des femmes (« hommes généralisés »

5. `https://www.heidelberg-laureate-forum.org/forum/9th-hlf-2022/laureates-9th-hlf-2022.html`
6. De l'Égalité des deux sexes, discours physique et moral où l'on voit l'importance de se défaire des préjugez, Paris, Chez Jean du Puis, 1673.
7. Michelle Schatzman, Abécédaire, 10 décembre 2001 https://www.math.u-bordeaux.fr/~cpoignar/Michelle/abecedaire-Michelle.pdf

ou pas), voire se muer en condescendance. Un ou une mentor, quels que soient son profil, ses faits de gloire et sa bonne volonté, peut faire plus de mal que de bien.

Les décisions individuelles tiennent souvent à un fil. Il faut s'accrocher, particulièrement dans nos métiers. Une maladresse d'une personnalité influente comme un ou une mentor peut avoir des conséquences qu'elle ne mesure pas, n'étant en général pas formée à ce rôle. Finalement, à vouloir lutter contre le sexisme et la condescendance par le mentorat, on peut en engendrer encore plus.

Au lieu de lutter contre le mauvais comportement de certains individus, nous essayons de former les femmes à le supporter et à adopter une attitude plus ambitieuse, plus compétitive. Je pense que nous passons à côté de l'essentiel. En cela je me sens tout à fait en phase avec la mathématicienne britannique Eugenia Cheng lorsqu'elle prône un monde mathématique plus « congressif », un mot qu'elle a inventé pour affirmer son point de vue de manière originale sur les questions de genre : il faut lire son livre « x+y : A Mathematician's Manifesto for Rethinking Gender » (Profile Books 2021) pour saisir vraiment ce qu'elle entend par là, mais pour résumer grossièrement, un monde « congressif » se nourrit de coopération tandis qu'un monde « ingressif » se nourrit de compétition.

D'autres domaines scientifiques sont sans doute aussi « ingressifs », mais c'est particulièrement frappant pour les mathématiques. Or, même sans utiliser ces néologismes, on peut observer une différence de comportement entre filles et garçons, qui se manifeste par exemple dans la proportion de filles aux Olympiades de mathématiques ou dans les filières dites sélectives de l'enseignement supérieur à forte composante mathématique.

Cette différence de comportement commence très tôt dans la vie des filles et des garçons, comme l'a par exemple documenté la sociologue française Clémence Perronnet, autrice du livre « La bosse des maths n'existe pas » (Autrement, 2021). Les garçons osent, les filles beaucoup moins. Ce n'est pas inné. Cela arrive insidieusement au cours de leur scolarité.

Les garçons ont-ils besoin de « role models » pour s'engager dans les mathématiques ? Je n'en ai pas l'impression. Il devrait en être de même pour les filles, si la société cessait d'entretenir des préjugés d'un autre temps.

Quelques souhaits pour l'avenir. J'aimerais conclure en citant à nouveau Maryna Viazovska : « Peut-être que ce prix [sa médaille Fields] pourrait avoir un effet positif sur les jeunes femmes, mais ce qui est beaucoup plus important, c'est ce qui se passe tôt à l'école – le dur travail quotidien qui est fait par les parents, enseignants, professeurs d'université. » Prenons donc notre part du travail : rendons le monde des mathématiques plus ouvert à différentes façons d'être, de se former et de travailler ; montrons-le sous une forme équilibrée, sans survaloriser les récipiendaires de médailles et autres récompenses prestigieuses concentrées sur une infime minorité de la communauté. Ceci suppose de sensibiliser tout le monde, bien au-delà des personnes intéressées par les tables rondes sur la place des femmes en mathématiques.

Post-scriptum. J'ai dans un premier temps rédigé cette tribune à chaud, après la table ronde mentionnée au début. Je l'ai diffusée via mon compte Twitter : #unpopularopinion *Why I'm fed up with the idea of role models*, sans que cela suscite beaucoup de réactions (une poignée de « retweets » et de « likes » et si, quand même, une traduction en italien publiée par Roberto Natalini sur MaddMaths!).

J'ai entendu depuis, lors de la table ronde « Société, Diversité, Parité » aux Assises des mathématiques que la promotion de « role models » était relativement peu efficace.

Dans sa conférence au tout nouveau Séminaire de diffusion des mathématiques, l'économiste Guillaume Hollard signale néanmoins comme « pistes prometteuses les actions qui consistent à augmenter la confiance », dont l'idée des « role models » ainsi que celles du « growth mindset » (entraînement du cerveau) et du « locus of control » (contre le syndrome de l'imposteur·euse).

Il indique également que les études effectuées jusqu'ici à ce sujet ont leurs limites. Il est grand temps d'enquêter à grande échelle auprès des principales intéressées.

Focus sur la Synthèse nationale sur les mathématiques

- G. Allaire
- F. Hérau
- M. Peigné

La synthèse nationale des mathématiques, c'est quoi ce truc ? 300 pages, sérieusement ?

F. Hérau. C'est sûr que 300 pages, cela peut effrayer, mais c'était difficile de faire plus court. Le comité a choisi de privilégier le contenu aux effets de manches et phrases chocs. Le volume 2 de 80 pages contient ainsi un panorama des mathématiques et de leurs interactions en 14 chapitres allant des ÉDP ou de l'algèbre jusqu'aux interactions avec les sciences humaines, issu de plus de 200 interviews, avec de magnifiques textes du comité. Ne pas mettre de contenu scientifique était inenvisageable, c'était du coup difficile de faire plus court et je vous laisse faire le calcul du nombre moyen de pages consacrées à chaque domaine. Le volume 3 de 64 pages, de nature bibliographique, contient beaucoup de tableaux sur les spécificités de la production française (et mondiale), et propose l'analyse la plus précise possible, allant jusqu'au niveau régional. Le volume 1, de 100 pages, plus politique, promeut d'abord les mathématiques pour tous les lecteurs et les lectrices avec un bref historique et une tentative d'explication tant de leur beauté que de leur utilité, avant de dresser un diagnostic, puis des recommandations. Il se termine par des annexes chiffrées indispensables pour rendre le document crédible. Finalement, le cœur de l'analyse du comité (les chapitres 2 et 3 du volume 1) ne fait que 55 pages, conclusion comprise, si vous êtes pressés. Et, le soir, au coin du feu, n'hésitez pas à feuilleter un ou deux chapitres du volume 2 sur ce qui se fait, s'est fait ou doit se faire dans l'un des 14 domaines qui y sont abordés.

À quoi ça sert ?

M. Peigné. Cette synthèse sert à poser, en cette année 2022, un diagnostic précis sur la recherche française en mathématiques. Et ce diagnostic porte autant sur le contenu scientifique que sur son fonctionnement. La recherche française est d'exceptionnelle qualité, c'est un atout du pays, et cela est chiffré et argumenté dans le rapport, mais il y a des raisons de s'alarmer quant à sa capacité à relever les défis d'un monde numérisé, d'un pays qui a besoin de réponses mathématiques à de nombreux enjeux scientifiques, sociétaux, économiques, technologiques, sanitaires et écologiques. Ces réponses passent par des efforts en matière de formation, du primaire jusqu'au doctorat, par la consolidation de la structuration nationale comme régionale, par de véritables interactions avec les autres acteurs grâce par exemple au développement de postdoctorats longs ou en entreprise. Cela passe aussi, au sein même de la communauté mathématique, par un changement de mentalité sur la formation et les débouchés de nos étudiantes et étudiants : dans tous les domaines des mathématiques, fondamentales ou appliquées, on doit former plus de docteurs pour les besoins économiques et sociétaux du pays. Il faut dépasser le seul horizon des carrières dans l'enseignement supérieur et la recherche. Cela passe également par une véritable politique de promotion des femmes dans les sciences et en particulier dans les mathématiques, un soutien à une politique d'édition vertueuse et de qualité et une véritable reconnaissance des activités liées à la diffusion scientifique. Cela passe enfin par un véritable effort du pays pour mettre plus de bras dans cet effort mathématique car la communauté mathématique arrive à bout de souffle (on pourra à ce sujet lire la section 3.3 du volume 1 de la synthèse).

À qui est destinée cette synthèse ? Question subsidiaire : qui lit quoi (autrement dit, à qui sont destinées les différentes parties) ?

G. Allaire. Elle est adressée à toutes et tous. Bien sûr, aux mathématiciennes et mathématiciens eux-mêmes qui pourront s'y reconnaître et à qui elle offrira matière à réflexion sur leur discipline et la manière dont ils l'exercent. Mais surtout aux non-mathématiciens ! Ainsi les scientifiques des autres disciplines pourront y voir les bénéfices mutuels des interactions présentes et potentielles. Le volume 1, plus précisément, a vocation à être un outil d'aide à la politique scientifique de tous les décideurs et acteurs de l'enseignement supérieur et de la recherche, aussi bien les organismes, universités et écoles, sociétés savantes et institutions - avec qui le dialogue a été fécond pendant la préparation du rapport - que les plus hautes instances de l'État. Enfin elle est aussi destinée aux acteurs industriels, économiques, sociaux, dont les entreprises, avec qui le dialogue, dans le cadre de l'Agence pour les mathématiques en interaction avec les entreprises et la société (AMIES) par exemple, ne fait que débuter tant les besoins de mathématiques, de mathématiciennes et de mathématiciens sont grands. En ce sens ce rapport HCÉRES de synthèse vient en complément d'autres rapports, comme par exemple celui sur l'impact économique des mathématiques publié par le CNRS à l'occasion des Assises des Mathématiques qui se sont déroulées en novembre 2022 à Paris, quasi au même moment que la parution de la synthèse.

Qui a participé à l'écriture de la synthèse ?

M. Peigné. Le comité que nous avons présidé et coprésidé avec Grégoire était constitué d'une quinzaine d'expertes et d'experts nationaux et internationaux, sollicités par les conseillers scientifiques du HCÉRES, Frédéric Hérau et Philippe Elbaz-Vincent, qui nous ont accompagnés pendant tout le processus. Le choix des membres du comité s'est fait avec le souci d'assurer d'une part une couverture thématique large et d'autre part la plus grande variété possible en termes d'origine institutionnelle, afin de mener un travail qui soit résolument non biaisé et proche du terrain. Le rapport a été écrit en toute indépendance, y compris vis-à-vis du HCÉRES, c'était une des conditions de notre participation pour relever ce défi passionnant. Notre motivation profonde était de produire une analyse, reposant sur des faits et des chiffres indiscutables car garantis par l'HCÉRES. Nous voulions aussi, à destination de nos interlocuteurs et des décideurs, faire toute une série de recommandations motivées afin qu'ils s'en inspirent pour définir leur politique scientifique à venir.

Comment ont été élaborées les recommandations de la synthèse ? En particulier, les recommandations concernant le volet enseignement ?

G. Allaire. Pour faire cette analyse et ces recommandations, nous nous sommes appuyés sur des données inédites issues de 10 années d'évaluations de laboratoires par l'HCÉRES et de l'analyse bibliométrique de l'Observatoire des Sciences et Techniques (cf. le volume 3), qui a su prendre en compte les attentes du comité. D'autres données et avis ont été récoltés à partir d'interviews, d'entretiens institutionnels, de lecture de multiples rapports. Les interviews ont nourri le volume 2 sur l'analyse de la discipline et de ses interactions scientifiques, ainsi que les analyses du volume 1. Les recommandations se sont alors imposées après le diagnostic. Une dizaine de réunions de travail du comité mais aussi de très nombreux échanges internes et une longue phase de rédaction ont permis au comité de dresser une liste de 21 recommandations et une recommandation conclusive sur l'opportunité d'un programme 2030 sur les mathématiques. Concernant les recommandations sur le problème de la parité et celui de l'enseignement dans le primaire et le secondaire, elles se sont comme les autres, imposées après l'analyse. Ces problèmes sont prégnants, les mathématiciennes et mathématiciens doivent se les approprier et les défendre auprès des décideurs. À noter que les questions autour de l'enseignement n'étaient pas dans la feuille de route du comité mais sont revenues de façon récurrente au cours des échanges, elles ont donc toute leur place dans cette synthèse.

Le comité est composé de :
Grégoire Allaire, Professeur à l'École polytechnique (vice-président du comité), Hélène Barucq, Directrice de recherche à INRIA, Valérie Berthé, Directrice de recherche au CNRS, Gérard Biau, Professeur à Sorbonne Université, Piermarco Cannarsa, Professeur à l'université de Rome Tor-Vergata, Patrick Cattiaux, Professeur à l'université de Toulouse, Clotilde Fermanian Kammerer, Professeure à l'université Paris Est-Créteil, Patrick Foulon, Directeur de recherche émérite au CNRS, François Laudenbach, Professeur émérite à l'université de Nantes, Violaine Louvet, Ingénieure de recherche calcul scientifique au CNRS, Pascal Massart, Professeur à l'université Paris-Saclay, Philippe Michel, Professeur à l'École polytechnique fédérale de Lausanne, Frédéric Patras, Directeur de recherche au CNRS, Marc Peigné, Professeur à l'université de Tours (président du comité), Alessandra Sarti, Professeure à l'université de Poitiers (a quitté le comité au 31/12/2021); Eric Sonnendrücker, Professeur au Max-Planck Institute for Plasma Physics.
Accompagnés des conseillers scientifiques au HCÉRES :
Philippe Elbaz-Vincent, Professeur à l'université Grenoble-Alpes, Frédéric Hérau, Professeur à Nantes Université.

Lectures grothendieckiennes
P. Cartier et al.
Société Mathématique de France, Spartacus IDH, 2021. 304 p. isbn : 978-2-85629-950-0

Le volume *Lectures grothendieckiennes*, récemment publié par les éditions Spartacus sous le parrainage de la Société Mathématique de France, rassemble huit textes consacrés à la pensée d'Alexander Grothendieck et à ses ramifications. Ces textes sont des mises en formes d'interventions de divers conférenciers dans le séminaire éponyme qui s'est tenu à l'École normale supérieure (rue d'Ulm) entre 2017 et 2018. Les intervenants du séminaire étaient en majeure partie des mathématiciens travaillant sur des sujets proches des recherches d'A. Grothendieck, mais il se trouvait aussi parmi eux des philosophes et des logiciens. Le propos du séminaire était d'examiner la réception et les filiations des idées de ce mathématicien plutôt que de présenter les détails techniques de ses travaux, et les exposés étaient pour la plupart au moins partiellement accessibles à des auditeurs possédant une culture mathématique de base.

Le personnage d'Alexander Grothendieck n'est plus à présenter, tant son œuvre a influencé l'ensemble des mathématiques contemporaines. Tout mathématicien s'intéressant à l'algèbre et à la théorie des catégories rencontre à tout moment des concepts forgés par ce dernier et, dans le cas de la géométrie algébrique, c'est l'ensemble du sujet qui a été refondu par A. G. et son école. Ses idées ont cependant également essaimé dans la topologie et la logique, en particulier par le biais du concept de topos. Par ailleurs, les premiers travaux d'A. G., qui concernaient l'analyse fonctionnelle, ont aussi eu une grande influence sur cette discipline.
Les textes rassemblés dans ce volume ne concernent qu'une petite partie de l'héritage grothendieckien. Les thèmes suivants y sont abordés :

1. la notion de topos (Olivia Caramello, Colin McLarty et Alain Connes) ;
2. l'analyse fonctionnelle (Pierre Cartier et Gilles Pisier) ;
3. les réflexions d'A. G. sur la connaissance et la vérité dans son texte tardif *La clé des songes* (Laurent Lafforgue) ;
4. le soubassement philosophique et méthodologique de l'œuvre mathématique d'A. G. (Jean-Jacques Szczeciniarz) ;
5. le rôle de l'analyse complexe dans la pensée d'A. G. (Fernando Zalamea).

Le volume est également doté d'une préface de Peter Scholze, un éminent mathématicien qui a poursuivi la réflexion d'A. G. sur la topologie étale et le site cristallin (parmi ses nombreux travaux). Enfin, on trouve en préambule un mémento des principaux concepts introduits par A. G., rédigé par l'éditeur Frédéric Jaëck. Ce mémento, intitulé *Petit vocabulaire grothendieckien*, donne une mesure de l'ampleur de sa pensée et on ne peut qu'espérer que d'autres séminaires prennent le relai et poursuivent la réflexion sur son héritage intellectuel. Il serait par exemple intéressant de présenter la postérité de la notion de schéma et de ses généralisations (espaces et champs algébriques, log-schémas… en particulier à la lumière des travaux de B. Toën et de ses collaborateurs), de la K-théorie (en particulier à la lumière des travaux de D. Quillen et de S. Bloch entre 1970 et 1990, puis de ceux de V. Voevodsky dans les années 1990), de la géométrie anabélienne et de la conjecture de la section (en particulier au vu de la démonstration par A. Tamagawa et S. Mochizuki dans les années 1990 de la conjecture d'A. G. sur la détermination d'une courbe sur un corps de nombres par son groupe fondamental), de la topologie étale (généralisée récemment en topologie pro-étale par P. Scholze et D. Clausen pour les besoins de la cohomologie ℓ-adique), de la cohomologie cristalline (qui a par exemple mené dans les années 1980 aux conjectures de J.-M. Fontaine en théorie de Hodge p-adique et à la définition par P. Berthelot de la cohomologie rigide, ainsi qu'à l'introduction récente de la cohomologie prismatique par P. Scholze et B. Bhatt), et enfin de la notion de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne et de la notion de dérivateur (on pensera ici aux travaux de D. Quillen sur les catégories de modèles dans les années 1970, à la géométrie algébrique dérivée développée par de nombreux mathématiciens depuis les années 1990, et aux travaux récents de J. Lurie). Cette liste de sujets n'est pas exhaustive et les développements ultérieurs mentionnés entre parenthèses ne font pas justice, tant s'en faut, aux travaux sur chacun des thèmes mentionnés. Il ne s'agit ici que de donner une idée de la richesse des recherches que les concepts introduits par A. G. ont suscitées.

Voici maintenant une recension plus détaillée des différents articles contenus dans le volume. Faute de place, nous ne pourrons discuter que quelques aspects de chaque texte.

La notion de topos

Dans la première partie de son article intitulé *La « notion unificatrice » de topos*, Olivia Caramello donne une présentation informelle, mais pourtant claire et informative, de la notion de topos, d'une partie de son histoire et de son utilisation dans diverses parties des mathématiques. La notion de topos prend sa source dans la réflexion d'A. G. sur les espaces fibrés (voir à ce sujet la contribution de Colin McLarty) ainsi que dans la définition abstraite de la cohomologie qu'il donna dans un article célèbre publié en 1957 dans le *Tohoku Mathematical Journal*. La notion de topos est introduite dans l'exposé IV du 1er volume du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie de 1963-1964 (SGA 4.1). Un topos est une catégorie qui est équivalente à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site (un site étant une catégorie munie d'une topologie généralisée, cette dernière étant une donnée d'une classe de flèches censées jouer le rôle des inclusions d'ouverts dans le cadre classique). Un espace topologique ordinaire donne ainsi lieu à un topos mais on peut montrer que la catégorie des représentations d'un groupe a aussi une structure naturelle de topos (on appelle ce topos le *topos classifiant* du groupe). Comme l'explique O. Caramello, il semble que A. G. voyait un topos sous différents angles : d'une part comme un espace topologique généralisé, d'autre part comme un espace classifiant, mais aussi, de manière plus générale, comme un univers où on peut pratiquer les mathématiques. Ce dernier point de vue est justifié par le fait que les propriétés catégoriques d'un topos sont semblables à celles de la catégorie des ensembles (qui est aussi un topos, le *topos ponctuel*). On rappelle qu'au début des années 1970, le logicien W. Lawvere s'est intéressé à ce dernier point de vue et a proposé de considérer des modèles de théories du premier ordre dans des topoi quelconques (plutôt que seulement dans le topos ponctuel, comme dans la théorie des modèles classique). Ceci a mené au développement de la *logique catégorique*, et en particulier à celui des logiques multivaluées.
La deuxième partie du texte d'O. Caramello est plus technique et présente certains de ses propres travaux sur la notion de topos. Ces travaux exploitent un point de vue nouveau, à savoir que les topoi permettent de construire des ponts entre diverses théories munies du même topos classifiant, ce dernier mettant en exergue des structures fondamentales de ces théories.
Le texte *Grothendieck's two intuitions of topos* de Colin McLarty est une étude historique et philologique de la notion de topos.
Dans la première partie de son exposé, l'auteur défend la thèse selon laquelle l'origine des topoi est à chercher dans un exposé que J.-P. Serre fit en 1958 à Paris, au cours duquel il introduisit un certain

groupe de cohomologie fabriqué au moyen des espaces principaux homogènes sous un groupe constant. A. G. se trouvait dans l'assistance et C. McLarty argumente, textes et témoignages oraux à l'appui, que c'est à la suite de cet exposé qu'il envisagea pour la première fois la notion de topos, conçu comme un objet muni d'une topologie généralisée permettant de calculer la cohomologie d'un faisceau dont la restriction à la topologie de Zariski est trop pauvre.

La deuxième partie de l'article se concentre sur des exposés concernant les topoi que A. G. fit en 1973 à Buffalo aux usa. Ces exposés furent enregistrés sur des cassettes magnétiques dont certaines purent être retranscrites. C. McLarty cite des passages de ces enregistrements dans son article, lesquels montrent que A. G. avait repris à ce moment-là sa réflexion sur les topoi comme alternatives à la catégorie des ensembles (on notera que ceci semble être indépendant des travaux de W. Lawvere, qui avait à la même époque des préoccupations semblables). Certains extraits suggèrent que A. G. cherchait à élucider la compatibilité entre ses trois intuitions du topos mais, sauf erreur du recenseur, il semble qu'il n'a pas eu le temps de mener cette réflexion à bien dans ses exposés (ou du moins dans ce qui en subsiste).

Le texte d'Alain Connes *Un topo sur les topos* est assez foisonnant, mais il a grosso modo trois parties.

Dans la première partie, il est question, comme dans les contributions de C. McLarty et O. Caramello, de l'origine de la notion de topos. Le propos ici est assez semblable à celui des deux autres exposés sur les topoi mais il s'y trouve un peu de matériel supplémentaire, en particulier des passages de la correspondance Grothendieck-Serre et des extraits inédits des enregistrements des conférences américaines d'A. G. L'auteur cite aussi un long passage de *Récoltes et semailles*, un vaste mémoire rédigé par A. G. au début des années 1980. A. G. y explique que seuls les topoi donnent un cadre assez large pour pouvoir calculer des groupes de cohomologie intéressants sans perdre l'intuition topologique. Il s'y trouve plusieurs images frappantes, comme celle du topos comme « vaste lit conjugal » du « nombre et de la grandeur », un espace topologique ordinaire étant « trop étriqué ».

Dans la deuxième partie du texte, l'auteur s'intéresse à la vision du topos comme univers, et il montre, exemples à l'appui, que le passage du langage des ensembles à celui des faisceaux d'ensembles introduit un « aléa » (une variabilité) dans tous les objets mathématiques que l'on considère, tout en préservant la possibilité de faire des opérations ensemblistes naïves. Cet « aléa » mène en particulier à des logiques multivaluées en un sens très large.

Dans la troisième partie de son texte, l'auteur explique comment le concept de topos l'a guidé dans sa définition, avec C. Consani, du *site arithmétique*. Le *site arithmétique* est un topos qui joue un rôle de fond dans l'approche à l'hypothèse de Riemann que l'auteur a développée au début des années 1990. À l'examen, il nous semble cependant que la définition du site arithmétique est surtout liée à une définition très succincte des catégories additives que A. G. donna autour de 1962. Les catégories additives firent leur apparition dans l'œuvre d'A. G. à peu près au même moment où ce dernier forma l'intuition du topos (les faisceaux sur un site donnant lieu à beaucoup de catégories additives) mais elles ne sont pas directement liées à ces objets.

L'analyse fonctionnelle

L'article *Il a tué l'analyse fonctionnelle* de Pierre Cartier revient sur les débuts de l'activité mathématique d'A. G., qui concernaient l'analyse fonctionnelle. P. Cartier a fait ses études à l'école normale (rue d'Ulm) au début des années 1950 et son cursus universitaire a donc commencé peu après celui d'A. G. Il est ainsi l'un des rares mathématiciens disposant encore d'informations de première main sur les premiers pas d'A. G. dans le monde académique. Le texte contient quantité d'anecdotes et de faits dont le souvenir se serait peut-être perdu sans cet effort de rédaction. L'auteur passe d'abord en revue les travaux de S. Banach et de son école jusqu'au début de la Seconde Guerre mondiale puis il décrit les problèmes auxquels faisait face l'analyse fonctionnelle de l'après-guerre à la suite de ces travaux. Il mentionne ensuite que J. Dieudonné et L. Schwartz se trouvaient à Nancy à la fin des années 1940, et que c'est là qu'ils rencontrèrent A. G. pour la première fois. Après la fin de ses études à Montpellier, A. G. s'était d'abord rendu à Paris et y avait rencontré H. Cartan, et c'est sur les conseils de ce dernier qu'il était venu les voir à Nancy. J. Dieudonné suggéra d'abord à A. G. de travailler sur une série de quatorze problèmes d'analyse fonctionnelle qu'il avait énoncés dans un de ses articles avec L. Schwartz. Au grand étonnement de J. Dieudonné, A. G. parvint à résoudre rapidement ces problèmes. Après ces débuts spectaculaires, L. Schwartz lui proposa de travailler sur un problème qui était motivé par *le théorème du noyau*, un résultat qu'il venait de démontrer. Le problème était le suivant : quelle est la bonne définition du produit tensoriel de deux espaces de Banach ? A. G. conclut rapidement que deux définitions différentes étaient également plausibles, l'une correspondant au point de vue *projectif* (au sens catégorique) et l'autre au point de vue *injectif*, qui est dual du premier. L'existence de ces deux produits tensoriels mena à nombre de travaux par la suite (voir à ce sujet l'article de G. Pisier) et elle est aussi à la racine de la définition des espaces dits *nucléaires* (où les deux produits tensoriels coïncident). Dans le dernier paragraphe de son article, P. Cartier explique comment, selon lui, A. G. passa de l'analyse fonctionnelle à la géométrie algébrique. Cette transition aurait eu lieu dans le contexte d'exposés de J.-P. Serre au Séminaire Cartan, où ce dernier avait proposé une approche via les méthodes de l'analyse fonctionnelle à ce qui s'appelle maintenant la *dualité de Serre*. J.-P. Serre avait aussi essayé à la même époque de trouver une démonstration complète du *théorème de Dolbeault* (où apparaît le fameux opérateur différentiel $\bar{\partial}$, dont le noyau est constitué des formes différentielles holomorphes). Il est bien connu que A. G. donna par la suite (dans le cas des variétés algébriques) une preuve algébrique et faisceautique de la dualité de Serre et que la théorie de la cohomologie des faisceaux jointe à un lemme de Poincaré convenable permet de démontrer rapidement le théorème de Dolbeault. On voit donc que l'article que A. G. publia dans le *Tohoku Mathematical Journal* est lié aux problèmes que J.-P. Serre cherchait à résoudre dans le cadre du Séminaire Cartan. Par ailleurs, les deux définitions du produit tensoriel d'espaces de Banach peuvent, comme on l'a vu plus haut, être également comprises de manière catégorique. Tous les éléments sont donc en place pour une utilisation de méthodes catégoriques en géométrie algébrique.

L'article *Le produit tensoriel d'espaces de Banach depuis Grothendieck* de Gilles Pisier décrit la postérité de six questions que A. G. posa dans un court article publié en 1953, intitulé *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Cet article fut à peine remarqué au moment de sa publication et fut redécouvert en 1968 par J. Lindenstrauss et A. Pelczynski, qui notèrent que certains problèmes formulés pendant les années 1960 avaient déjà été conjecturés par A. G. dans son article. Une grande partie de ces problèmes concerne la comparaison des deux produits tensoriels possibles d'espaces de Banach et les normes auxquelles ils donnent lieu. Faute de place (et aussi de compétence), nous ne pourrons tous les passer en revue et nous nous bornerons à décrire un résultat simple qui est lié à plusieurs d'entre eux. Il s'agit de l'énoncé suivant, appelé *Inégalité de Grothendieck*.
Soit $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espace euclidien (resp. hermitien) de dimension n. Soit $[a_{ij}]$ une matrice $n \times n$ réelle (resp. complexe). Alors il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sup\{\Big|\sum_{ij} a_{ij}\langle x_i, x_j\rangle\Big|, x_i, x_j \in H, \|x_i\| = \|x_j\| = 1\} \leqslant K \sup\{\Big|\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j\Big|, x_i, x_j \in \mathbf{K}, |x_i| = |x_j| = 1\}$$

où $\mathbf{K}$ est le corps des réels ou des complexes selon que H est euclidien ou hermitien. Cette inégalité est une version élémentaire (due à J. Lindenstrauss et A. Pelczynski) d'un résultat que A. G. appelle « théorème fondamental » dans son article de 1953. Malgré la simplicité de l'énoncé, la constante K est fort mystérieuse et il n'existe apparemment pas de formule simple qui l'exprime en termes de constantes fondamentales. Des travaux de U. Haagerup et A.-M. Davie de la fin des années 1980 ont montré que si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ alors $1,338 < K \leqslant 1,405$. Par ailleurs, de façon très inattendue, l'inégalité de Grothendieck fait depuis le début des années 2000 l'objet de recherches en informatique théorique. Le lien est le suivant. Le côté gauche de l'inégalité peut être calculé en temps polynomial alors qu'on ne sait calculer le côté droit (sans la constante K) qu'en temps exponentiel ! Cela signifie que la constante K mesure d'une certaine façon le hiatus entre le calcul en temps polynomial et en temps exponentiel, et qu'elle est donc liée au fameux problème P≠NP de l'informatique théorique. L'avenir nous dira peut-être quelle est la véritable signification de ce lien.

Les réflexions d'A. Grothendieck sur la connaissance et la vérité dans son texte *La clé des songes*

Dans son exposé *La notion de vérité selon Grothendieck* Laurent Lafforgue revient sur *La clé des songes*, un texte que A. G. rédigea à la fin des années 1980. Alors que dans *Récoltes et semailles*, son mémoire antérieur plus connu, A. G. mêle réflexions mathématiques, considérations philosophiques, récriminations et éléments biographiques, il ne s'intéresse plus aux mathématiques dans *La clé des songes* et il ne revient que peu sur son histoire personnelle. Il s'agit d'une sorte de méditation, où A. G. cherche à comprendre sa relation personnelle avec la connaissance, la recherche et la vérité. Le texte propose d'une part une véritable gnoséologie, qui semble très originale, mais il contient aussi beaucoup de passages assez déroutants. A. G. y explique par exemple que Dieu lui parle directement pendant ses rêves et qu'il lui a annoncé « l'avènement d'une ère nouvelle ». Malgré ces étrangetés, on y trouve aussi de très beaux passages sur le processus de découverte et sur la révélation de l'évidence cachée. L. Lafforgue propose un mode de lecture inhabituel de *La clé des songes*. Au lieu d'en fournir une interprétation globale, il s'intéresse à un ensemble de mots ou de syntagmes récurrents dans le texte et il étudie leurs ramifications conceptuelles. C'est une approche intéressante, herméneutique plutôt qu'analytique, et elle a l'avantage de ne pas imposer au lecteur une certaine manière de comprendre le texte. Le terme le plus important qu'utilise A. G. est certainement « l'état de vérité », qui est l'état dans lequel se trouve le sujet connaissant lorsque l'évidence lui est apparue. Il 'accueille' alors humblement la connaissance. L. Lafforgue souligne que A. G. ne cherche jamais à définir la notion de vérité mais qu'il ne doute jamais de la possibilité d'accéder à cette dernière. Il ajoute qu'A. G. se différencie en cela de beaucoup de philosophes dont c'est la préoccupation majeure, et que cela est d'autant plus remarquable que dans son œuvre mathématique il attache beaucoup d'importance à trouver les bonnes définitions des concepts. D'autres termes clés du texte sont « la foi » (nécessaire pour trouver le chemin de la vérité), et aussi « l'erreur », les erreurs n'étant que des « marches sur le chemin de la vérité ». Il est intéressant de noter que même si l'imagerie de *La clé des songes* est souvent d'inspiration chrétienne, la conception de la connaissance qu'on y trouve ne s'inscrit apparemment pas dans une théologie de la révélation. Dieu y est présenté comme un simple guide pour le sujet à la recherche de l'évidence. Sa nature n'est pas révélée par un évènement et il ne constitue pas l'objet dernier de toute connaissance.

Le soubassement philosophique et méthodologique de l'œuvre mathématique d'A. Grothendieck

Dans son article ambitieux *Prolégomènes à une étude philosophique de l'œuvre de Grothendieck* Jean-Jacques Szczeciniarz revient sur certains concepts fondamentaux introduits par A. G. et en propose un commentaire philosophique. L'article commence par une longue introduction méthodologique, où l'auteur explique comment on peut tirer des leçons philosophiques d'un développement mathématique. Son point de vue est que « La pensée philosophique se manifeste au cœur même de la pratique mathématique ; elle surgit parfois ou émerge, prescrit ses exigences, de façon diverse continue ou discrète, dans des reprises réflexives d'abord mathématiques, dans ses visées de concepts ou de thèmes philosophiques [. . .], dans ses exigences de synthèse. » Ainsi « Les mathématiques nous offrent [. . .] une sorte de dépassement de leur propre réflexivité, et un ensemble de virtualités philosophiques à même de modifier, bousculer même les dispositifs philosophiques ». Ce qui intéresse donc l'auteur est le processus de synthétisation qui a lieu en mathématiques à la suite d'une sorte de dépassement. En termes plus profanes, cette synthétisation est la généralisation des concepts à laquelle l'examen d'un problème mathématique peut mener. Cette synthétisation est particulièrement intéressante chez A. G., car « [. . .] ce que nous pourrions appeler la visée architectonique est présente d'emblée chez Grothendieck. Cette immédiateté de l'architectonique, ce fait-là nous incite à dire qu'il "tend" vers la philosophie. » En d'autres termes (c'est notre interprétation), les mathématiques d'A. G. sont pour l'auteur un lieu privilégié de généralisation des concepts, car elles sont traversées par le souci de déterminer d'emblée la généralité naturelle des concepts utilisés. Dans la suite de son texte, J.-J. Szczeciniarz examine l'un après l'autre certains objets mathématiques introduits par A. G. et cherche à comprendre le mécanisme de généralisation qui a mené à leurs définitions. Il donne par exemple une interprétation kantienne du processus qui a mené à la définition du spectre d'un anneau commutatif, un objet dans lequel s'opère une synthèse de l'algèbre et de la géométrie. Il passe ensuite à la définition du schéma, et à son interprétation comme foncteur, qu'il voit à la suite de J. Cavaillès comme le résultat de plusieurs « thématisations » husserliennes. Il examine aussi les notions de platitude, de schéma de Hilbert, et de schéma formel. On notera que J.-J. Szczeciniarz fait dans son texte l'effort louable de donner des définitions mathématiques précises des objets qu'il considère. Il est l'un des rares philosophes à avoir fait l'effort de se plonger dans les détails techniques des mathématiques qui l'intéressent. Pour comprendre pleinement la portée de son analyse des concepts introduits par A. G., il faut avoir une culture philosophique autant que mathématique, ce dont peu de lecteurs disposeront.

Le rôle de l'analyse complexe dans la pensée d'A. Grothendieck

Le propos de l'article *La variable complexe dans l'œuvre grothendieckienne* de Fernando Zalamea est de comprendre le rôle qu'a joué la variable complexe (c'est-à-dire la théorie des fonctions holomorphes) dans les travaux d'A. G. L'auteur explique en préambule que cette théorie a été déterminante dans le développement scientifique de A. G et aussi que les concepts et méthodes introduites par A. G. se caractérisent par leur souplesse, leur naturalité et leur universalité. Il n'est pas clair à ce stade du texte en quoi cette dernière assertion est liée à l'importance de la variable complexe pour A. G. Cependant, il affirme vers la fin de son texte que la variable complexe a aussi ces trois vertus et que c'est dans cette coïncidence qu'on doit chercher la raison profonde de l'importance des fonctions holomorphes dans l'opus grothendieckien. Il semble que ce soit la seule justification qu'il donne pour affirmer, comme il le fait dans les paragraphes suivants, que tous les grands concepts introduits par A. G. prennent leur source dans une intuition provenant de la variable complexe. Les catégories additives, la K-théorie, les espaces nucléaires, le théorème de Riemann-Roch et la dualité seraient ainsi tous enracinés dans cette intuition. Chemin faisant, et bien que cela semble un peu hors de propos, il passe en revue les références à B. Riemann dans les écrits d'A. G. Il mentionne une discussion de l'œuvre de B. Riemann dans *Récoltes et Semailles* et il remarque que le mot Riemann apparaît dans « sphère de Riemann » et « théorème de Riemann-Roch ». Il suggère que l'intérêt que A. G. a porté à la sphère de Riemann et au théorème de Riemann-Roch prend source dans son admiration pour le mathématicien allemand. Le lien (ténu) entre cette digression et les fonctions holomorphes est alors apparemment le fait que la sphère de Riemann a une structure complexe.
Cette présentation des choses nous semble assez déroutante. F. Zalamea veut relier trois thèmes décidément hétérogènes : les vertus des méthodes introduites par A. G., la flexibilité de la variable complexe, et l'admiration d'A. G. pour l'œuvre de B. Riemann. En consultant les nombreux textes d'A. G. cités par l'auteur, on ne trouve cependant (sauf erreur du recenseur) aucun texte qui présente la variable complexe comme exemplaire de quelque façon, ou même de référence où elle fournisse explicitement le prototype d'un nouveau concept. Par ailleurs, aucune citation ne suggère que l'intérêt d'A. G. pour le théorème de Riemann-Roch ou ses quelques travaux de jeunesse sur la sphère de Riemann soient liés à son admiration pour B. Riemann.

Notre sentiment est que les variétés analytiques complexes ont bien joué un rôle important pour A. G. car souvent les premières preuves de théorèmes de géométrie algébrique complexe sont analytiques. Historiquement, la préoccupation d'A. G. est souvent de remplacer des méthodes analytiques peu transparentes par des preuves algébriques et structurales. À titre d'exemple, on voit ceci à l'œuvre dans la démonstration schématique de la formule de Riemann-Roch pour une courbe projective lisse. La démonstration analytique fait appel à la théorie de l'uniformisation et quitte le territoire algébrique alors que la démonstration schématique est un simple dévissage une fois qu'on dispose de la théorie des faisceaux cohérents et de la dualité de Serre pour le faisceau trivial. Cependant, rien ne suggère que la théorie des fonctions holomorphes ait été en tant que telle un catalyseur dans l'approche d'A. G. aux mathématiques.

Damien RÖSSLER
Université d'Oxford

La Lumière révélée
Serge HAROCHE
Odile Jacob, 2020. 512 p. ISBN : 9782738151711

Ce livre écrit par l'un des principaux acteurs des développements récents de la physique quantique est passionnant à plusieurs titres. Disons tout de suite que c'est un livre de vulgarisation c'est-à-dire s'adressant à des lecteurs a priori non spécialistes, désireux de comprendre les différentes étapes franchies dans la compréhension de la nature de la lumière et de ses conséquences.
L'auteur souhaite s'adresser en particulier aux jeunes : lycéens, étudiants, thésards, et leur faire partager sa passion pour la recherche. Je ne doute pas que les mathématiciens (et les mathématiciennes !) pourront également trouver du plaisir à suivre les développements de cette aventure, et ses rebondissements, que constitue l'approfondissement des connaissances de la lumière, et de ses interactions avec la matière, contée par celui qui a contribué récemment (2006) à produire des photons isolés sur des échelles de temps relativement longues jusque-là jamais atteintes.
Ce livre a un double objectif : décrire à travers l'histoire les différentes étapes (parfois contradictoires) en vue de comprendre les phénomènes lumineux et comment le parcours personnel de l'auteur lui a permis de rejoindre cette histoire par ses travaux, et ceux de son équipe, dans les cinquante dernières années.
Ce livre retrace une grande partie de l'histoire de la physique depuis Descartes, Newton, Huygens jusqu'à Einstein, Schrödinger, Heisenberg puis Kastler, Aspect, Cohen-Tannoudji et Haroche. En particulier son analyse comparative entre la théorie de la relativité (restreinte et générale) et la théorie quantique est très instructive. Il faut souligner que S. Haroche fait constamment preuve d'un grand souci pédagogique pour ne pas perdre le lecteur par des détails techniques en donnant une formulation imagée de concepts subtils évoqués (polarisation, dualisme onde-corpuscule, relations d'incertitude, intrication quantique). Le lecteur mathématicien pourrait être frustré de ne trouver que peu d'équations (sauf le système de Maxwell) dans cet ouvrage. Mais ce n'est clairement pas l'objectif du livre, qui est de se restreindre à une présentation qualitative des théories évoquées, toujours en les reliant aux données expérimentales. Par ailleurs S. Haroche, à l'interface entre modèles théoriques et expériences en laboratoire, met clairement en évidence le rôle fondamental des mathématiques dans l'élaboration des modèles de la physique moderne.
Les lecteurs hésitant à se lancer dans la lecture de cet ouvrage très documenté pourront se faire

une première idée de son contenu en consultant la leçon inaugurale de S. Haroche au Collège de France [a] ou encore son discours de réception du prix Nobel [b] pour les travaux plus récents.
Le livre présent donne beaucoup plus de détails sur l'aventure humaine extraordinaire que constituent les étapes successives franchies dans la compréhension des phénomènes lumineux, au cœur de la physique contemporaine avec le rôle prépondérant des LASERS. L'auteur montre comment une succession de travaux a permis des progrès importants pour une meilleure compréhension de la zone de transition entre l'univers quantique et ses lois étranges, et l'univers classique, que nous percevons à notre échelle, régi par les théories de Newton et de Maxwell.
Dans sa présentation l'auteur écrit « Ce livre entrelace cette histoire de la lumière avec mon expérience personnelle ». Ce point de vue rend l'ouvrage très vivant avec des allers-retours entre histoire des sciences et l'itinéraire personnel de l'auteur. Le chapitre I raconte comment l'auteur est arrivé à s'intéresser à l'optique quantique. Dans les deux derniers chapitres (VI et VII), il explique les travaux récents dont il est l'un des acteurs (qui lui ont valu le prix Nobel de Physique en 2012). Le chapitre VI décrit la progression des travaux de l'auteur depuis sa thèse de doctorat (1970) jusqu'à la direction d'une équipe de recherche à l'ÉNS de la rue d'Ulm (1978). Dans le chapitre VII, il explique comment, en s'appuyant sur l'expertise acquise précédemment, il parvient avec son équipe à réaliser en laboratoire (2006) cette fameuse boîte à photons, imaginée par Gamov en 1930 qui en fabriqua un exemplaire fictif pour l'offrir à Bohr et Einstein en cadeau de Noël. Le prix Nobel récompensera Serge Haroche (conjointement avec David Wineland) pour ces travaux en 2012.
Ces deux chapitres sont très instructifs car ils font particulièrement bien ressentir aux lecteurs ces moments cruciaux où des prédictions théoriques issues de modèles mathématiques abstraits (Einstein, Schrödinger, Heisenberg) sont vérifiées expérimentalement malgré certains de leurs aspects paradoxaux. Les pères fondateurs de la physique quantique avaient bien imaginé ces expériences de pensée (par exemple le chat de Schrödinger) mais doutaient de leur concrétisation possible en laboratoire. L'acteur et le témoin privilégié qu'est S. Haroche nous fait revivre cette aventure fascinante en nous faisant partager l'émotion du chercheur lorsqu'il atteint un objectif qu'il poursuit depuis des années malgré les obstacles, les tâtonnements et les difficultés à surmonter. Parallèlement il met également l'accent sur l'aspect collectif de la recherche scientifique, le rôle crucial des échanges et des coopérations entre chercheurs tant au niveau local qu'au niveau international.
Les chapitres II à V présentent un panorama de la science de la lumière du XVII^{e} au XX^{e}. Ces chapitres d'histoire pourront intéresser un large public, scientifique ou non, désireux de se cultiver.
L'auteur aime la précision, aussi certaines descriptions très détaillées de montages expérimentaux pourraient lasser le lecteur. Ces passages ne doivent pas le décourager de poursuivre la lecture. Il n'est pas nécessaire de lire le livre linéairement, un sommaire détaillé permet de choisir les chapitres dans un ordre a priori quelconque, quitte à faire des allers-retours.
Le livre se termine par une postface où S. Haroche fait part de ses réflexions sur la place et le rôle de la science dans la société contemporaine.
En conclusion je recommande chaleureusement la lecture de cet ouvrage où chacun pourra trouver un intérêt en fonction de ses interrogations et acquérir des connaissances solides sur les fondements sur lesquels repose un domaine clé de la physique, de ses avancées les plus récentes, des méthodes utilisées et des questions encore non résolues.
Il se trouve qu'après la rédaction de cette notice, le prix Nobel de physique 2022 a été attribué à A. Aspect (université Paris-Saclay), conjointement avec J. Clauser et A. Zeilinger, pour avoir mis en évidence en laboratoire des paires de photons intriqués, mettant ainsi un point final au débat théorique entre Bohr et Einstein, à l'avantage de Bohr.

Didier ROBERT
Université de Nantes

a. https://books.openedition.org/cdf/527
b. https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/haroche-lecture.pdf

Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien

2023

mercredi 18 janvier 18h30
Laure Saint-Raymond
IHÉS
Décrire mathématiquement les gaz : le défi de Boltzmann

Gilles Coulon 2019-8866

mercredi 8 février 18h30
Grégory Miermont
Éns Lyon
Blaise Pascal, géomètre du hasard

mercredi 22 mars 18h30
Virginie Bonnaillie-Noël
Éns Paris
Peut-on entendre la forme d'un tambour ? D'après Mark Kac

Tangente l'aventure mathématique

Animath

mercredi 12 avril 18h30
David Harari
Université Paris-Saclay
Legendre : à la recherche de solutions entières

BnF

Société Mathématique de France SMF

Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium
Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque
Entrée libre sur inscription : https://smf.emath.fr/BNF/2023

Instructions aux autrices et auteurs

Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions TeX courantes (TeX Live et MacTeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTeX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TeX à jour.

Classe LaTeX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.