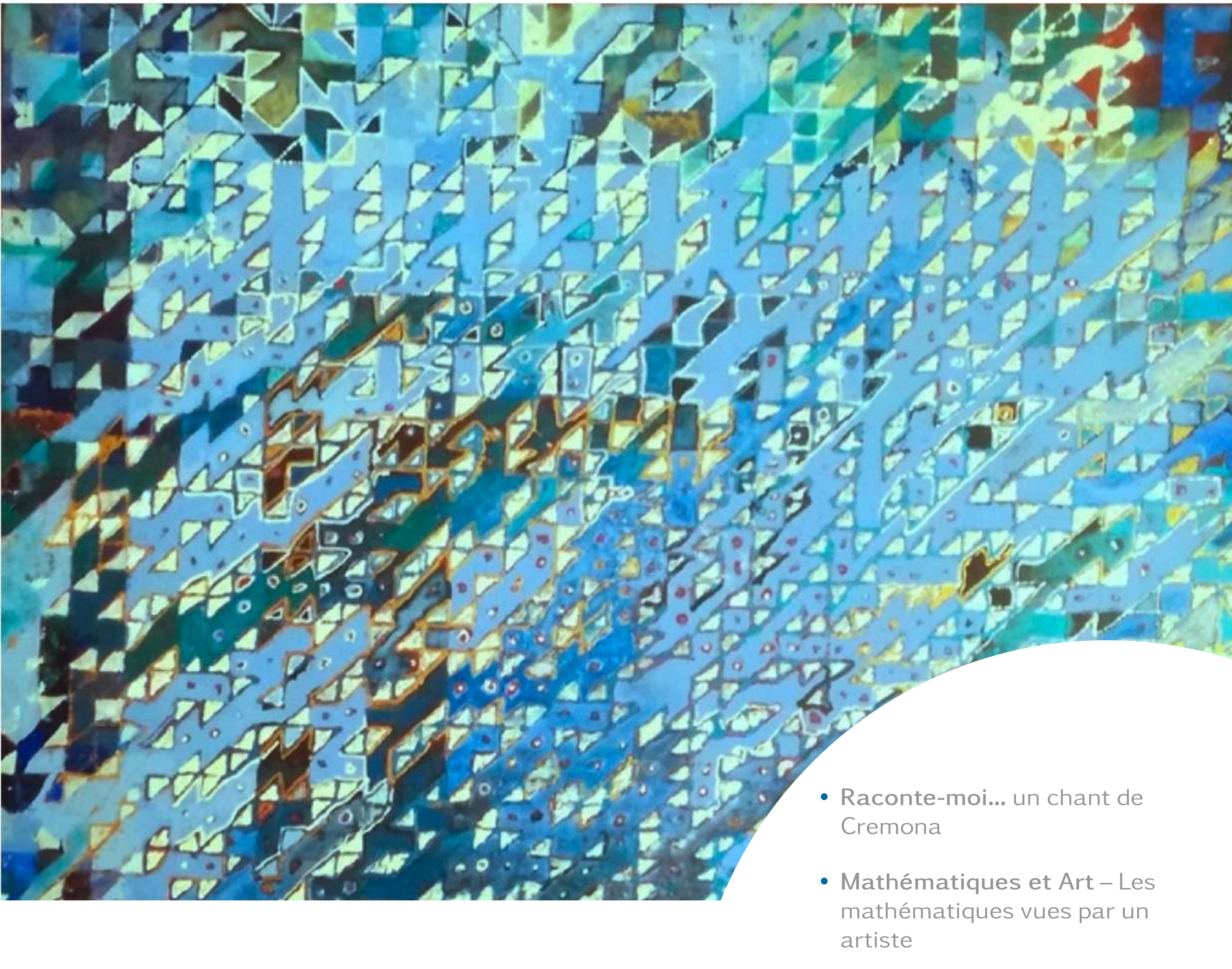
JUILLET 2024 – N^{o} 181

la Gazette

de la Société Mathématique de France



- **Raconte-moi...** un chant de Cremona
- **Mathématiques et Art** – Les mathématiques vues par un artiste
- **Rétroviseur** – 50 ans des Journées EDP

Société Mathématique de France

SMF

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

ISSN : 2825-8231

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. *Let All Blues Rejoice*, acrylique sur toile, 120x120 cm, œuvre de Reg Alcorn (2019), reg-alcorn.fr. (crédit : Reg Alcorn).

la Gazette
de la Société Mathématique de France

N° 181

Éditorial

À vous qui lisez La *Gazette*,

Le comité de rédaction se joint à moi pour saluer l'élection d'Isabelle Gallagher à la présidence de la SMF et lui souhaiter de mener à bien des projets ambitieux pour l'association.

L'indépendance est chère à l'esprit mathématicien : présente comme notion dans plusieurs domaines des mathématiques, elle y a même parfois pour synonyme liberté. Cela évoque l'absence, ou tout du moins l'atténuation, de contraintes, indispensable à la créativité qui est fondamentale pour tout travail mathématique.

Créée pour vous, la *Gazette* reflète ainsi la vie des mathématiques : leur naissance à travers les articles de recherche, leur caractère immémorial dans l'Histoire, leur vivacité par le biais des entretiens, leur beauté en Art...

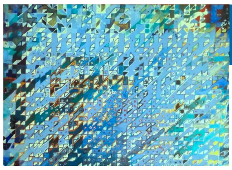
Vous trouverez tout cela dans ce numéro, qui vous communiquera comme de coutume la passion que partagent les auteurs avec le comité de rédaction, passion matérialisée dans ces pages comme une récompense à un long et minutieux travail collectif.

Puisse la trêve estivale permettre la régénération de l'énergie et l'apaisement des esprits fatigués par une longue et difficile année !

À vos jeux mathématiques de l'été,

Pauline Lafitte

la Gazette
de la Société Mathématique de France



Nº 181

Sommaire

Société Mathématique de France SMF

Nº 181

Mot de la présidente

C'est avec un grand plaisir que j'écris aujourd'hui mon premier « Mot de la Présidente », qui ouvre cette *Gazette* de juillet 2024. Mes premiers mots seront pour Fabien Durand, à qui je succède à la présidence de la SMF, et que je remercie pour son travail au service de la communauté tout au long de son mandat de président : le rapport moral de l'année écoulée figure en début de cette *Gazette*, et vous permettra de mesurer le travail accompli. Je remercie aussi par avance le Conseil d'Administration, le Conseil Scientifique, le bureau de la SMF, mais aussi tout le personnel administratif aussi bien à l'IHP qu'au CIRM, pour leur soutien et leurs conseils à venir, sur lesquels je sais que je pourrai compter. Je remercie enfin le Comité Éditorial de la *Gazette* dont le travail constant permet à chacun et chacune d'entre vous de recevoir, tous les trimestres, un nouvel exemplaire de ce magazine.

Alors que j'écris ces lignes, un rendez-vous électoral important nous attend. Vous qui les lisez, vous savez l'issue de ces élections qui m'est encore inconnue. Il n'est pas facile dans ces conditions de formuler des vœux et des engagements pour mon mandat, si ce n'est que la SMF continuera à affirmer et à faire connaître l'importance des mathématiques et des sciences en général, à destination de tous et toutes. Elle poursuivra, peut-être plus que jamais, ses actions pour les droits humains. Et elle maintiendra sa vocation d'être le lieu de rencontre et de diffusion de tous les domaines des mathématiques, à tous les niveaux depuis l'enseignement scolaire jusqu'à la recherche dans nos universités. J'aurai l'occasion de vous en dire davantage dans les *Gazettes* à venir, et pour en savoir plus sur les activités de la SMF au jour le jour, je vous invite à parcourir le site `smf.emath.fr` où elles sont décrites en détail.

Pour accompagner cette *Gazette*, vous trouverez un numéro spécial « Ateliers clefs en main » : plusieurs collègues, en réponse à un appel à contribution dans la *Gazette* de 2022, y partagent leurs travaux de diffusion. Cette initiative est en lien avec le site « Kits mathématiques » (`kits.math.cnrs.fr`) que je vous encourage à consulter également !

Je vous souhaite à tous et à toutes une bonne lecture, et un bel été. Et surtout, n'oubliez pas d'adhérer et de faire adhérer à la SMF !

Le 1er juillet 2024

Isabelle Gallagher, présidente de la SMF

Rapport moral, période de juin 2023 à juin 2024

1. Affaires générales

Le féminin générique sera utilisé dans cette section.

1.1 – Situation générale

En 2023, la crise sanitaire est derrière nous.

Le télétravail partiel (2 jours par semaine) mis en place lors de cette crise est toujours en place sans que cela affecte le fonctionnement de la SMF. Les salariés apprécient cette souplesse.

Le Conseil Scientifique de la SMF a été en grande partie renouvelé.

La SMF poursuit la conduite du programme *MathC2+* conventionnée avec le MENJS et ANIMATH . Ce sont plus de 1500 élèves qui en ont bénéficié en 2023. La Fondation du Collège de France et la Fondation du CNRS font partie des partenaires financiers.

La SMF poursuit son engagement pour la « Science Ouverte ». Rappelons que depuis juin 2022 les versions électroniques des ouvrages parus avant 2020 des collections *Cours Spécialisés*, *Panoramas et Synthèses*, et, *Séminaires et Congrès*, sont librement téléchargeables. Les livres parus après cette date deviendront électroniquement accessibles à leur tour dès lors qu'un seuil de vente aura été atteint. Ce modèle est intitulé « Buy-to-Open » (B2O). En 2023 ce sont 4252 téléchargements de nos livres qui ont été effectués sur notre site.

La SMF avait coutume à chaque période estivale de soutenir des docteures titulaires de l'agrégation dont la demande de report de stage avait été refusée par leur rectorat. En 2022 ce sont 13 lettres de soutien qui avaient été écrites, 18 en 2021 et 18 en 2020. En 2023 aucune demande n'est parvenue à la SMF.

Grâce à l'activité de Mélanie Guenais sur le front de la réforme du lycée, la SMF a bénéficié d'un éclairage médiatique hors du commun.

1.2 – Adhérents

Au 31 décembre 2023 la SMF comptait exactement 1691 adhérentes et adhérents. En 2022 elle en comptait 1756, 1731 en 2021, 1800 en 2020, 1841 en 2019, 1783 en 2018, 1829 en 2017 et 1830 en 2016. C'est un très mauvais résultat.

Après une augmentation des adhésions, qui sont passées de 70 à 75 € en 2023, il a été décidé de ne pas les augmenter en 2024 pour les individus. L'adhésion institutionnelle est passée de 310 à 320 €.

Il est important de rappeler que depuis six ans, les doctorantes et doctorants bénéficient de 3 années d'adhésion gratuite.

1.3 – La *Gazette*

La *Gazette* s'adresse à la communauté mathématique dans son ensemble à travers des articles de mathématiques aux thèmes variés, travaillés pour être accessibles, en particulier les « Racontemoi… », mais aussi des entretiens qui mettent en perspective aussi bien le travail que la passion et l'engagement d'esprits mathématiciens. Elle couvre des sujets importants de la vie de la communauté, à travers des articles de fond ou même des dossiers, tel celui sur les IREM ou sur le Congrès International des Mathématiques en 2022. Des thèmes d'actualité comme les modèles de publication, les questions de parité ou l'inauguration de la Maison Poincaré sont traités, sous forme d'articles ou de tribunes.

1.4 – Parité

Deux stages Maths C pour L ont eu lieu en 2023, le premier au CIRM en février et le suivant à Amiens en juin. Il s'agit de stages d'une semaine non mixte pour étudiantes de Licence de découverte du milieu de la recherche en mathématiques. Ils étaient organisés conjointement avec la SMAI et la SFDS . Ce sont 48 étudiantes qui y ont participé provenant de

20 universités différentes. Rappelons qu'il ne s'agit pas de trouver les futurs talents mais de montrer aux étudiantes que les carrières scientifiques leur sont accessibles. Ce programme a bénéficié d'un important soutien financier de la part de nombreux collègues. Merci.

1.5 – Les prix

Le Bureau actuel de la SMF n'est pas favorable à l'attribution de prix financiers en guise de récompenses pour les prix auxquels elle est associée. Mais il faut composer avec l'histoire et les partenaires.

L'association Maurice Audin a décidé d'associer l'Académie des Sciences au Prix Audin. Une convention a été rédigée et débattue mais pas encore signée.

À l'initiative de l'Epijournal EPIGA la SMF s'est associée à la création du *prix Demailly pour la Science Ouverte*. Aucune subvention ne sera attribuée. Le prix sera un *Gömböc*.

1.6 – Événements scientifiques et parrainages

La SMF n'attribue aucune subvention à des événements qu'elle n'organise pas. Elle propose depuis plusieurs années son parrainage pour des événements organisés par des collègues. Il suffit de remplir un formulaire en ligne. Ensuite, suivant le type d'événement, la demande est soumise au Conseil Scientifique de la SMF, au Conseil d'Administration ou au Bureau. Les exigences pour être parrainé sont affichées sur le site de la SMF. La parité au sein des instances de l'événement et des oratrices et orateurs sont des éléments incontournables dans l'évaluation du parrainage. Ce sont 12 parrainages qui ont été attribués cette année.

La SMF finançait les semaines SMF-CIRM et sollicitait des collègues pour organiser les États de la Recherche sans attribuer de financement. Il a été décidé de fusionner les deux programmes en conservant les États de la Recherche et d'attribuer 3000 € par an à ce programme.

La SMF a organisé avec la SMAI et la SFDS , et sous l'égide de l'INSMI , la dixième *Journée d'accueil en mathématiques* pour nos jeunes recrutées.

1.7 – Bilan carbone

La SMF a signé un manifeste pour la « Limitation de l'avion dans les laboratoires de mathématiques : horizon 2030 ».

1.8 – Droits humains

Les violations des droits humains affectant la communauté mathématique ont pris cette année toutes les dimensions, des « simples menaces » pesant sur la recherche au bafouement des droits fondamentaux d'individus, et jusqu'aux tragédies d'ampleur.

Argentine. La SMF, sollicitée par la *Red de Autoridades de Institutos de Ciencia y Tecnología*, apporte son soutien aux scientifiques d'Argentine alarmés par les décisions gouvernementales. La prospérité comme la stabilité ne sauraient exister sans science ou sans éducation.

France. La « loi Darmanin » sur l'immigration de décembre 2023 a entraîné des protestations unanimes de la communauté universitaire. La SMF s'est jointe au texte du Collège des sociétés savantes de France dénonçant cette loi.

Iran. Cécile Kohler et Jacques Paris sont toujours détenus en Iran depuis plus de deux ans. La SMF est parmi les signataires d'une tribune demandant leur libération et leur rapatriement sans condition.

Russie. Mikhaïl Lobanov, à nouveau inquiété par les autorités de son pays au printemps 2023, n'est actuellement pas en Russie. Azat Miftakhov, libéré en septembre 2023, a été réincarcéré le jour même puis condamné à 4 autres années de prison ; un appel est en cours. La SMF a écrit et continue d'écrire aux tribunaux russes.

Mais l'année a surtout été marquée par les massacres du Moyen-Orient. La situation humanitaire empire à chaque instant. Si la voix de la SMF ne sera sans doute pas plus entendue que les plus hautes instances internationales, notre société répète son attachement axiomatique à des principes tenus pour évidents, dont le droit à l'éducation.

On voudrait finir sur une bonne nouvelle : voir la charte dont s'est doté le CIRM , qui veut pérenniser le climat de tolérance en cette institution.

2. Le pôle de Luminy

2.1 – La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro, lien entre le routeur et la SMF).

Cette année, nous avons poursuivi notre réflexion sur la modernisation de la Cellule : installation prochaine de bornes wifi pour couvrir l'ensemble du bâtiment, et achat prévu d'un chariot élévateur pour soulager le travail du personnel lors des inventaires et des désherbages.

Lors de la Journée consacrée aux Lycées au cirm (les journées de diffusion du cirm), nous avons tenu pour la deuxième fois un stand de la smf à destination des personnels enseignants et de l'Inspection académique (dans le cadre de la liaison Lycée/Enseignement supérieur) : échanges sur les réformes de l'enseignement et la place des mathématiques, le rôle de la smf, dons de goodies et d'exemplaires de la *Gazette* pour sensibiliser les personnels à soutenir la smf (dont nous rappelons qu'elle est une des tutelles du cirm). Le stand a été de nouveau très apprécié et ce fut l'occasion aussi de revoir des personnels vus l'an passé, ce qui amorce un processus de sensibilisation sur la durée.

Enfin, toute l'équipe de la Cellule souhaite remercier Fabien Durand pour son engagement et sa bienveillance tout au long de son mandat de Président de la smf depuis 4 ans.

Encore merci pour tout Fabien et bon vent dans tes nouveaux projets !

2.2 – cirm 2023

Situation générale. 2023 a été une excellente année pour le cirm avec plus de 5000 participants, record absolu de participation depuis la création du cirm. L'agrandissement des locaux en 2019 porte enfin ses fruits après la période de pandémie. Par ailleurs, le cirm a bénéficié du soutien de ses tutelles (cnrs, amu, smf). L'insmi a débloqué des financements exceptionnels en fin d'année. La subvention du mesri, des collectivités locales (Région Sud, ville de Marseille) ainsi que le soutien du labex carmin et de l'institut Archimède ont aussi permis au cirm d'assurer sa stabilité financière.

Bilan des activités scientifiques 2023. Le nombre de participants, 5080 en présentiel, avec 120 événements au total montre l'attractivité du cirm. Ces chiffres sont à comparer avec 4735 en présentiel en 2019. L'activité scientifique est toujours de grande qualité.

Voici un bilan chiffré des activités de l'année : 32 écoles et conférences, le cemracs, le mois thématique, 7 programmes pluriannuels, 44 workshops, 29 recherches en résidences donc 1 cimpa-cirm Fellowship et 3 cirm-aims, 3 projets Boum-Smai ont eu lieu en 2023.

Chaire Jean-Morlet. [1] Les deux chaires Morlet ont été de beaux moments de science. Le premier semestre était porté par Peter Stevenhagen (Leiden, Pays-Bas) sur *les statistiques arithmétiques : découvrir et prouver l'aléatoire en théorie des nombres.* Son co-porteur a aussi organisé le mois thématique, l'ensemble a été un vrai succès. Le lauréat de la chaire du second semestre était Jayadev Athreya (Université de Washington, usa). Son programme portait sur *la renormalisation et visualisation en géométrie, systèmes dynamiques et théorie des nombres*. Le semestre s'est parfaitement déroulé. De nombreux invités étrangers ont été présents au cirm tout au long du semestre. En outre, le cirm a fêté les dix ans de la chaire Morlet en novembre 2023. La cérémonie qui a eu lieu à la mairie de Marseille a été une réussite, la moitié des lauréats de la chaire Morlet étaient présents montrant ainsi leur attachement au cirm. Des exposés scientifiques ont été donnés par des anciens lauréats de la chaire, deux expositions sur le travail de Maryam Mirzakhani ont été réalisées ainsi qu'une œuvre d'art qui se trouve dans la bibliothèque.

LabEx carmin et archimede. Cette année, l'institut archimede a soutenu financièrement 12 conférences et écoles, 4 événements de la chaire Morlet. Le LabEx carmin a, quant à lui, participé au financement de 17 écoles et conférences, 3 événements de la chaire Morlet, à la réalisation audiovisuelle et à l'achat de matériel informatique et audiovisuel.

Diffusion scientifique. Le cirm est toujours très présent en ce qui concerne les activités de diffusion scientifique. Deux sessions de l'école des « cigales » ont eu lieu, une au printemps et l'autre à l'automne. De nombreuses initiatives régionales ont repris ce dispositif montrant ainsi son utilité. Le cirm a aussi reconduit sa « journée des lycées » et a participé au festival des sciences, à un festival à Rognac, au dispositif « Regards de Géomètre ». De nombreuses classes de collège et lycée sont accueillies tout au long de l'année dans la bibliothèque.

1. www.chairejeanmorlet.com

Bibliothèque audiovisuelle. La chaine Youtube du CIRM est toujours très regardée, la bibliothèque audiovisuelle s'est bien enrichie. Elle comporte plus de 2500 vidéos qui sont toutes exportées sur carmin.tv.

Charte. Une charte contre le harcèlement et les discriminations au CIRM a été rédigée avec la SMF. Elle est affichée dans de nombreux lieux (salles de conférences, restaurant, couloirs ...) et se trouve aussi sur le site du CIRM.

Travaux. Comme les années précédentes, des travaux d'amélioration ont été effectués grâce à une subvention exceptionnelle de l'INSMI. Le café des calanques a été entièrement transformé. De nombreux travaux énergétiques ont été réalisés.

Ressources Humaines. L'équipe du CIRM connaît année après année de nombreux changements. Le directeur général des services a quitté le CIRM. Une personne est arrivée au service rencontres sur un poste CNRS. Deux personnes en CDD se sont succédé à la bibliothèque. Un personnel SMF de la cellule informatique a réussi un concours CNRS, un CDD SMF a été transformé en CDI. Un personnel SMF du service technique a quitté le CIRM et a été remplacé par un personnel en CDD au CNRS.

En conclusion, l'activité du CIRM en 2023 a été très soutenue, toujours riche en événements de qualité. Le CIRM continue sa démarche inclusive et s'ouvre à un public toujours plus large.

3. Secteur grand public

3.1 – Conférences publiques

Les conférences grand public de la SMF se composent de trois cycles :

- « Un texte, un mathématicien » ayant lieu à la BnF (13e arrondissement de Paris) quatre fois par an, plus quelques séances exceptionnelles partout en France ;
- « Une question, un chercheur » se déroulant à l'IHP une fois par an ;
- « Mathématiques étonnantes », qui se déplace dans les universités, avec traditionnellement deux occurrences annuelles pour ce qui est de la région parisienne.

Un texte, un mathématicien

Ce cycle fait découvrir la recherche en mathématiques à un large public, formé notamment d'élèves de lycée, ainsi que d'enseignants et enseignantes. Il repose sur une approche personnelle et souvent historique, mettant en valeur le rôle des publications mathématiques, comme il se doit dans le cadre de la Bibliothèque nationale de France. La collaboration avec l'association Animath permet d'assurer des « pré-conférences » qui préparent et encouragent la participation des groupes de lycées.

La SMF assure depuis une dizaine d'années quatre conférences par an, de janvier à avril, données par des mathématiciens professionnels. Le grand auditorium de la BnF (350 places) est régulièrement rempli, les conférences sont disponibles en ligne et, sur demande acceptée par les orateurs, reprises dans d'autres régions.

En 2023, le cycle a été un succès en termes de participation. Nous espérions itérer cette réussite pour la saison 2024. Quatre exposés étaient programmés : *La symétrie dans tous ses états : les travaux révolutionnaires de Sophus Lie* par Martin Andler, *Maryam Mirzakhani et la géométrie des surfaces* par Elise Goujard, *Peut-on entendre la forme d'un tambour ? D'après Mark Kac* par Virginie Bonnaillie-Noël et *Les idéaux d'Emmy Noether* par Xavier Caruso. Si les deux premières séances ont rempli l'auditorium, les deux dernières ont vu une baisse de fréquentation, sans doute due au (nouveau) calendrier scolaire en lycée. Pour la première fois depuis la création du cycle, cette année la moitié des exposés parlait de mathématiciennes !

L'année 2025 sera l'occasion de fêter les 20 ans du cycle, avec une séance spéciale « anniversaire », en préparation, et un changement de nom du cycle !

Nous avons également eu le plaisir de décentraliser des séances partout en France, à Rennes en octobre avec François Charles, et à Nancy en novembre avec Grégory Miermont, et à Angers en janvier avec Marie Théret. Si vous voulez organiser des exposés dans votre ville, n'hésitez pas à contacter la SMF qui se fera un plaisir de vous conseiller un ou une oratrice, et vous aider pour la mise en place de l'exposé !

Une question, un chercheur

Le cycle « Une question, un chercheur » a lieu deux fois par an, avec un exposé de physique et un de mathématiques. C'est la SFP qui s'occupe de la physique, et la SMF des mathématiques. La conférence de mathématiques a lieu à l'IHP le jeudi soir, et le public visé est constitué d'élèves de prépa scientifique et de licence de mathématiques, ainsi que d'enseignants. il est organisé en collaboration avec le cycle MATHEMATIC PARK.

L'exposé de mathématiques a eu lieu en décembre et l'oratrice était Nalini Anantharaman, sur le sujet *Peut-on entendre la forme d'une bouteille ?*, qui a rempli l'amphithéâtre Hermite. L'exposé de physique (sur *La révolution des exoplanètes*, par Guillaume Hébrard) a lui aussi fait le plein !

Mathématiques étonnantes

Le troisième cycle,« Mathématiques étonnantes », met en valeur des interactions inattendues entre les mathématiques, notamment celles réputées « théoriques », et d'autres domaines, en insistant en particulier sur toutes les applications surprenantes de cette science. Son originalité se reflète dans sa forme : chaque conférence est donnée par deux personnes, l'une issue des mathématiques, l'autre d'un autre domaine. On démontre ainsi comment certains problèmes très concrets soulèvent des questions théoriques remarquables.

Le cycle 2023/2024 s'est composé d'une unique séance, à Jussieu (Sorbonne Université) : Amandine Aftalion et Antoine Le Hyaric ont parlé d'*Optimisation de la course à pied*. N'hésitez pas à solliciter la SMF si vous voulez organiser une séance dans vos murs !

3.2 – Prix diffusion et enseignement

En 2024, la société Mathématique de France a décerné les prix D'Alembert pour la diffusion mathématiques et Jacqueline-Ferrand pour l'innovation pédagogique. Le jury, renouvelé aux deux tiers par rapport à la session précédente, s'est réuni le jeudi 4 avril 2024. Après présentations des nombreux dossiers de candidature et discussions sur l'originalité, la qualité et le public touché par les différentes actions, il a été décidé d'attribuer

- le prix D'Alembert 2024 à la Compagnie Terraquée pour ses spectacles à sujets mathématiques, pour son implication dans les activités de formation pour les enseignant·es comme pour les étudiant·es ainsi que pour l'organisation du festival Maths en Ville qui crée une importante dynamique locale à partir de leurs activités,
- le Prix Jacqueline-Ferrand 2024 à la mallette pédagogique Cormécouli (Corpus Médiéval des Comptabilités urbaines ligériennes), ressource pédagogique développée conjointement par des personnes de différents horizons apportant des compétences mathématiques, historiques et pédagogiques.

3.3 – Salon Culture et Jeux Mathématiques

La SMF est à nouveau représentée dans le comité de pilotage du 25e salon Culture et Jeux Mathématiques qui s'est tenu cette année sur la place Saint-Sulpice du 23 au 26 mai sur le thème Flamme Mathématique.

La SMF, avec les autres sociétés savantes, est directement impliquée dans l'animation d'un stand sur l'orientation et les métiers des mathématiques.

Sur ce stand, les élèves, les parents, les professeurs, le public sont accueillis pour répondre aux questions qu'ils peuvent se poser sur les métiers des mathématiques ou qui nécessitent des études de mathématiques.

4. Enseignement

4.1 – Présentation

- **Constitution et fonctionnement usuel.**
  La commission enseignement est constituée de 12 à 15 membres. Elle se réunit 2 fois par an et comporte en son sein des représentants des autres sociétés savantes de mathématiques la SFDS, la SMAI, l'ARDM, l'ADIREM [2], les professeurs de classes préparatoires de l'UPS et ceux du second degré, l'APMEP [3]. La SMF est aussi membre de la CFEM [4].
- **Les actions au travers du Collectif Maths&Sciences.**
  Depuis 2022, sous l'impulsion de la vice-présidente de la SMF, les actions de la commission enseignement ont permis la création du Collectif Maths&Sciences. Il est constitué actuellement de plus de trente associations

2. Assemblée des directeurs des IREM, Instituts de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques.
3. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.
4. Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques.

ou structures regroupant bien au-delà des mathématiques et de la communauté universitaire. Il dispose d'un site web[5] sur lequel se trouvent l'ensemble des publications et les informations principales concernant ses interventions dans la vie publique et les médias. C'est dans ce cadre que les actions concernant l'enseignement et plus largement les questions de parité en mathématiques et en sciences ont été réalisées et rendues visibles par les médias, les politiques et dans la vie publique.

4.2 – Publications

Depuis mai 2023, une quinzaine de textes publiés au travers de tribunes ou d'articles, de notes d'analyse, de rapports, notes ou avis techniques.

- **Medias**
  - Quatre tribunes collectives publiées dans *Le Monde* sur : la nécessité de revoir la gouvernance éducative ; l'impasse de la réforme du lycée ; la nécessité de mettre en place un plan interministériel pour la formation en mathématiques et en sciences pour le pays ; donner des éléments pour améliorer la politique de recrutement et de formation des enseignants.
  - Tribune dans La Recherche sur les impacts de la réforme du lycée pour les conditions et les contenus de formation des élèves.
  - Article publié dans The Conversation sur les effets de la réforme du lycée sur les profils scientifiques et les filles.
- **Textes publics**
  - Note d'analyse des recommandations de PISA sur le système éducatif.
  - Rapport sur le recrutement et la formation des enseignants
  - Bilan des sciences au lycée 2024 en graphiques
- **Notes et rapports internes**
  - Rapport d'audition pour la mission exigence des savoirs.
  - Notes techniques pour le ministère de l'industrie, Matignon et le haut commissariat au plan.
  - Avis sur les projets de programmes de mathématiques des cycles 1 et 2 pour le conseil supérieur des programmes.
  - Bilan sur la formation scientifique depuis 50 ans et ses perspectives pour le lycée en cours de rédaction, faisant suite aux réunions du Collectif Maths&Sciences de septembre et décembre 2023.
  - Alerte sur le concours de l'agrégation et la restriction des possibilités de report de stage pour poursuivre en M2 recherche auprès des ministères.

4.3 – Prises de parole

Depuis mai 2023, plusieurs dizaines d'interventions publiques ou privées ont eu lieu en lien avec les actions du Collectif, relayées par tout type de médias, presse, radio, télévision, internet, réseau, par les partenaires économiques ou académiques. Les sollicitations par le monde politique montrent la reconnaissance des actions et l'identification de la SMF et de sa vice-présidente, comme le Collectif Maths&Sciences, en tant qu'acteurs légitimes dans le paysage politique sur les questions liées à l'enseignement, la formation, la parité dans les carrières professionnelles en mathématiques et en sciences. Certaines de ces interventions sont répertoriées sur le site de la SMF.[6]

- Dans l'espace public
  - **Enseignement - « choc des savoirs », Singapour, PISA et formation des enseignants**
    Une vingtaine d'interviews et invitations à des émissions par les médias sur les questions liées à l'enseignement des mathématiques et les annonces concernant le « choc des savoirs » entre août 2023 et mars 2024. Quelques interviews sur les annonces de réforme des concours.
  - **Parité**
    Une dizaine d'invitations en conférences ou tables rondes sur le sujet de la parité en mathématiques et en science aussi bien par le milieu universitaire que par le milieu professionnel ou les médias. Plusieurs interviews ou podcasts sur le sujet également.
- Dans l'espace politique
  - **Ministères**
    Des échanges avec l'Éducation nationale, l'Enseignement supérieur, l'industrie, Matignon, le Haut Commissariat au plan avec le soutien des partenaires économiques.

5. https://collectif-maths-sciences.fr/
6. https://smf.emath.fr/smf-dossiers-et-ressources/dossiercommuniquesreformemathssciences-collection

– **Assemblée nationale**
  Audition en table ronde par la mission parlementaire en charge du dossier sur le recrutement et la formation des enseignants.
– **Conseil supérieur des programmes**
  consultation sur la refonte des programmes de mathématiques des cycles 3 et 4 et du nouveau « bac de mathématiques ».

4.4 – Pour en savoir plus

- La *Gazette* de la SMF n'a souhaité relayer aucune de ces publications ou interventions. Concernant l'action menée par le Collectif Maths&Sciences, le n°178 du mois d'octobre 2023 restitue la période de mars à juillet 2022 (et le n°172 la période de janvier à mars 2022).
- La revue *Matapli* de la SMAI n°132 de novembre 2023 relaie les actions de la période de janvier 2022 à novembre 2023 : `http://smai.emath.fr/IMG/pdf/matapli132web.pdf`
- Le *Bulletin de la CFEM* n° 52 de mars 2024 relaie les actions menées d'avril 2023 à mars 2024 (et le n°51 de mars 2023 celles de janvier 2022 à mars 2023) : `http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem`.
- Le *Bulletin 1024 de la Société Informatique de France* n°23 d'avril 2024 propose une présentation générale des contenus et du déroulé des actions du Collectif Maths&Sciences depuis son origine jusqu'en mars 2024 : `https://doi.org/10.48556/SIF.1024.23.5`.

5. Publications

La SMF gère 9 revues internationales et collections de livres. Elle prend en charge l'ensemble du processus de publication, depuis la soumission, l'édition d'épreuves, jusqu'à la diffusion dans le monde entier. La SMF est donc une maison d'édition indépendante qui ne bénéficie d'aucun soutien financier récurrent de la part d'une institution ou d'une société privée pour cette activité.

5.1 – Bilan de l'année

Grâce à l'implication des deux responsables du suivi éditorial des publications, O. Boubakeur pour la plupart des revues et M.-F. Koussémon pour les *Annales de l'ENS*, le rythme des sorties de nos revues se maintient. Quelques retards sont encore à déplorer cette année mais la stratégie de diversification de nos prestataires pour la composition commence à porter ses fruits. À noter, une augmentation ponctuelle de la pagination des *Annales de l'ENS* pour l'année 2023 (1800 pages au lieu des 1500 habituelles) a permis de résorber partiellement le backlog de la revue. Cette mesure est bien sûr conjuguée à un travail de sélection extrêmement rigoureux de la part du comité éditorial des *Annales* : qu'il en soit ici remercié.

L'année 2023 a vu une baisse du nombre de sorties de livres : seulement deux ouvrages dans la collection *Panoramas & Synthèse*. Le travail des comités de *Cours Spécialisés* et de *Documents Mathématiques* s'effectue dans le temps long et cela explique l'absence de sortie dans ces collections en 2023. L'année 2024 ne devrait heureusement pas être calquée sur celle qui vient de s'écouler. La collection *Regards Mathématiques* (co-édition avec l'IHP) trouve son rythme de croisière avec une sortie annuelle.

La cadence de sortie des livres reste un point de réflexion important : dans certaines collections, les projets éditoriaux sont nombreux et la chaîne de production devient parfois limitante. Nous avons travaillé à ce que l'étape de production soit la mieux réglée possible pour perdre le moins de temps tout en effectuant un travail de qualité.

Pour préserver le fragile équilibre financier des activités d'édition, la SMF a augmenté ses tarifs d'abonnements d'environ 5% (et une augmentation légèrement supérieure sur le prix de la version papier). Cette augmentation est calculée au plus juste pour que les livres et revues de la SMF restent accessibles au plus grand nombre.

Certains éditeurs et/ou comités éditoriaux arrivent au terme de leurs mandats à la SMF : qu'ils soient ici remerciés pour le travail accompli et leur souci permanent de la qualité scientifique des revues et livres publiés par la SMF. Ainsi, les comités de *Panoramas & Synthèses*, du *Bulletin* et *Mémoires de la SMF*, de la *Revue d'Histoire des Mathématiques* et d'*Astérisque* ont été (en totalité ou partiellement) renouvelés.

Une réunion a eu lieu le 12 octobre 2023 avec les rédacteurs et rédactrices en chef·fe des revues et collections de la SMF. Cette réunion a permis de discuter de nombreuses problématiques communes et s'est révélé un moment d'échanges très dense.

5.2 – Science Ouverte

Ce sujet majeur pour la SMF revêt plusieurs aspects : assurer l'accessibilité aux résultats scientifiques le plus rapidement possible mais aussi à des collègues dont les moyens sont très limités. La réflexion sur ce sujet ne peut cependant pas ignorer les problématiques économiques qui l'accompagnent : il nous faut maintenir l'équilibre financier qui permet de rémunérer nos salariées.

La SMF est résolument engagée dans cette démarche que l'on appelle communément désormais la « Science Ouverte ». Voici les dernières initiatives mises en œuvre (*cf.* également le paragraphe 5.3).

Abonnements gratuits et dons de livres

La SMF continue la mise en place d'abonnements gratuits (électroniques) vers les institutions africaines qui le souhaitent. Il faut toutefois noter que cette opération est parfois compliquée à mettre en pratique car les moyens techniques des universités en question sont malheureusement limités.

Dans la continuité de ce qui a été amorcé en 2022, la SMF a réalisé cette année encore des dons de livres issus du précédent désherbage, à des établissements de pays ayant peu de moyens, notamment en faveur de l'Ukraine et de Madagascar. Nous avons aussi poursuivi notre opération de mise en place d'abonnements gratuits en direction de ce type de pays dans le cadre de la Science ouverte, opération conduite depuis 2022.

Buy to Open (B2O)

Rappelons que, depuis 2022, les livres des collections *Cours Spécialisés, Panoramas & Synthèses* et *Séminaires et Congrès* sont diffusés sous le modèle Buy-to-Open (B2O) et que ceux parus avant 2020 sont en téléchargement gratuit sur le site de la SMF.

Subscribe to Open

La SMF a entrepris d'étendre l'ouverture de ses collections à ses revues. L'année 2023 a été celle d'une expérimentation menée au niveau du *Bulletin de la SMF* : la diffusion de cette revue suit le modèle Subscribe-to-Open (S2O), une déclinaison du B2O pour les abonnements (ouverture après dépassement d'un seuil d'abonnements). Malheureusement cette ouverture ne s'est pas produite alors que le seuil était quasiment atteint. Nous espérons que cette année l'expérimentation sera concluante ; le comité du *Bulletin* fait de son mieux pour susciter des abonnements auprès des institutions étrangères.

La SMF a bénéficié du soutien de l'INSMI pour mener à bien cette opération.

Prix Demailly

La SMF, avec la SMAI, la SFDS et l'*Épijournal de Géométrie Algébrique,* est à l'initiative de la création du « prix Demailly pour la science ouverte en mathématiques ». Ce prix vise à mettre en lumière une action collective en faveur de la science ouverte, que ce soit du point de vue de l'édition scientifique, des logiciels libres ou du travail collaboratif. La récompense attribuée (un Gömböck) est d'ordre symbolique et reflète la volonté de la SMF de promouvoir les actions en faveur de la communauté mathématique plutôt que les réalisations individuelles. Le premier prix sera décerné le 12 juin 2024 à l'IHP lors d'une demi-journée consacrée à la science ouverte (au sein de la conférence Epiga 2024).

5.3 – Les projets

Compte tenu des sollicitations pour publier des livres de mathématiques ne relevant pas *a priori* des collections usuelles de la SMF, une nouvelle collection est en passe de voir de le jour. Elle accueillera des ouvrages traitant de mathématiques en lien avec d'autres thématiques comme l'enseignement, la société, la diffusion…

La SMF et Spartacus-idh travaillent activement à la publication des cours Peccot du Collège de France (avec l'aval du Collège de France). Cela se fera à travers une sous-collection de la collection *Cours Spécialisés* et le premier volume devrait être publié avant fin 2024.

Au niveau national, les discussions avec les autres acteurs de l'édition académique (en mathématiques) vont bon train. L'objectif est de mettre en place une structure commune nous permettant de mieux coordonner nos actions, notamment en matière de science ouverte. Pour l'instant, ce collectif regroupe l'IHP, le RNBM, le CCSD, MATHDOC, la SFDF, la SMAI et la SMF.

5.4 – Évolutions techniques

L'utilisation d'EditFlow (logiciel de gestion du flux éditorial) est maintenant généralisée au niveau des revues de la SMF.

Un travail récent a permis d'automatiser en grande partie la saisie des DOI (Digital Object Identifier) pour un meilleur référencement des articles publiés à la SMF. Cette automatisation a permis notamment de combler certaines lacunes observées dans les plages de DOI d'articles plus anciens et elle facilite grandement le travail des deux responsables éditoriales de la SMF.

6. Rapport financier année 2023

Le but de ce document est de faire une rapide présentation de l'état des comptes en 2023 pour la SMF et le CIRM. Commençons par un tableau résumant les principales informations. L'année 2023 aura été marquée par un reflux de l'inflation qui nous aura néanmoins imposé des augmentations de nos tarifs afin de faire face aux hausses de nos coûts. Bien que le tandem SMF-CIRM continue d'être positif, grâce à un CIRM qui se porte très bien, la partie SMF possède un bilan négatif, même si les résultats sont en progrès.

	2023	2022
Résultat net (SMF-CIRM)	202 k€	123 k€
Résultat net (SMF)	-19 k€	-71 k€
Résultat net (CIRM)	221 k€	194 k€
Chiffre d'affaire (CIRM)	2986 k€	2586 k€

6.1 – SMF

Les actions principales de la SMF consistent essentiellement à :

- communiquer auprès du grand public sur les mathématiques, aussi bien sur l'aspect enseignement que recherche ;
- éditer des revues scientifiques et des livres ;
- informer ses adhérents via l'envoi de la *Gazette* de la SMF.

La SMF présente un résultat négatif d'exploitation de 19 k€ en 2023. En 2022, ce résultat était négatif de 71 k€.

Plus précisément, la baisse des produits de 144 k€ est due à :

- une hausse des ventes de 23 k€ ;
- la baisse des contributions financières de 147 k€. En 2022 la SMF a reçu une subvention de 101 k€ du CNRS pour des actions vers les pays en développement dont une partie avait fait l'objet d'un report de fonds dédiés sur l'exercice. Les autres subventions du CNRS passent de 41 k€ en 2022 à 16 k€ en 2023 ;
- l'utilisation de 49 k€ de fonds dédiés.

Notons que les cotisations sont stables, la légère hausse des tarifs compense l'érosion du nombre d'adhérents.

La baisse des charges de 190k€ est due à :

- la baisse des autres achats et charges externes de 86 k€, principalement sur les achats relatifs à la fabrication des ouvrages (-32 k€, composition et impression) et à la variation de stock (-22 k€) ;
- la dotation aux provisions pour dépréciation des stocks pour 35 k€ en raison de son augmentation ;
- la diminution des reports en fonds dédiés de 120 k€ (consommation sur l'exercice 2023 par rapport à 2022).

Notons de plus que les subventions accordées pour le soutien du projet de la science ouverte se terminent en 2024.

Pour conclure, grâce aux augmentations de tarifs, la marge directe sur les ventes augmente. Cependant, cela ne suffit pas car le calcul direct de la composition des ouvrages ne prend pas en compte les salaires. Il est probable que d'autres augmentations seront nécessaires pour arriver à l'équilibre.

6.2 – CIRM

Pour rappel, le CIRM est une Unité Mixte gérée par le CNRS, la SMF et l'université de Marseille. Le CIRM présente un résultat positif d'exploitation de 221 k€ en 2023. En 2022, ce résultat était positif de 194 k€.

L'augmentation des produits de 411k€ s'explique principalement par :

- la hausse de 396 k€ du chiffre d'affaire dont 285 k€ sur les chambres, 198 k€ sur les repas. D'un autre côté, les frais de visio qui représentaient 93 k€ ont été arrêtés en 2023 ;
- la hausse des subventions d'exploitation de 17 k€ notamment liée à la subvention pour les 10 ans de la Chaire Morlet.

Il est à noter une augmentation de 26 k€ du résultat financier du CIRM en lien avec les intérêts des livrets.

L'augmentation des charges de 414 k€ qui s'explique principalement par :

- l'augmentation des charges de repas de EUREST de 257 k€ en lien avec l'augmentation de l'activité ;
- la hausse des charges d'électricité de 55 k€, malgré 18 k€ d'aides accordées par l'État. Ainsi l'augmentation réelle est de 73 k€ ;
- la hausse de la masse salariale de 44 k€ liée au remplacement d'un salarié CNRS, parti en 2023, par un salarié du CIRM, compensée par le salaire exceptionnel d'un chercheur allemand de 9 k€ en 2022 ;
- l'augmentation des honoraires de 26 k€ ;
- la hausse des frais de déplacement et réception de 17 k€ liée notamment à la cérémonie de la Chaire Morlet.

6.3 – Conclusion

L'ensemble CIRM-SMF affiche un résultat positif de 202 k€, contre un résultat de 123 k€ en 2022. La SMF est déficitaire de 19 k€ et le CIRM est excédentaire de 221 k€.

Pour la SMF, le résultat comptable de 2023 s'améliore, en raison des augmentations de tarifs. Mais cela reste insuffisant, et nous serons attentifs dans les prochaines années à mettre en adéquation le prix de nos livres et revues, avec les charges que nous devons supporter.

Pour le CIRM, le taux d'occupation pour les conférences ainsi que pour l'hôtellerie est à un niveau record, ce qui entraîne une hausse conséquente du chiffre d'affaires. Il faudra néanmoins rester vigilant sur la hausse des charges liées aux repas EUREST, la hausse des frais d'énergie et la baisse éventuelle de certaines subventions dans les années à venir.

Ce rapport moral se veut le bilan de l'ensemble des activités au sein de la SMF depuis un an. Le personnel de la SMF et de très nombreux bénévoles y ont contribué, nous les remercions tous : membres du Bureau, du Conseil d'administration et du Conseil scientifique de la SMF, directeurs et membres des comités de rédaction, ainsi que tous ceux qui interviennent, ponctuellement ou plus régulièrement, et qui offrent leurs compétences sans compter leur temps avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par S. Ballet, B. Claudon, F. Durand, T. Dreyfus, M. Guenais, P. Hubert, P. Laffite, avec l'aide de O. Boubakeur, M.-F. Koussémon, C. Munusami, C. Pain et C. Ropartz. Remercions enfin F. Petit pour sa relecture attentive (de ce rapport mais aussi des épreuves de la *Gazette* et autres textes tout au long de l'année).

Non au passage des laboratoires de mathématiques en ZRR (Zone à Régime Restrictif) !

Dans le cadre de la « protection du potentiel scientifique et technique de la nation », les laboratoires correspondant à la vague C de l'évaluation HCERES sont évalués en vue d'un passage en zone à régime restrictif (ZRR). Ce processus sera étendu aux autres laboratoires dans les prochaines années. La SMF, la SMAI et la SFdS ont rédigé un texte afin de rappeler leur engagement pour une recherche ouverte sur la société et le monde : un passage en ZRR serait un renoncement à la circulation des idées et aux échanges scientifiques, en particulier internationaux. Le passage des laboratoires de mathématiques en ZRR engendrerait par ailleurs des lourdeurs administratives et des surcoûts que nos laboratoires ne peuvent supporter. Les trois sociétés savantes ont donc appelé la communauté mathématique à se mobiliser contre le passage des laboratoires en ZRR.

L'ouverture de la recherche mathématique sur le monde et la société et la circulation des idées scientifiques sont des principes essentiels. Nous nous opposons au passage en ZRR des laboratoires de mathématiques qui les mettrait nécessairement à mal.

Les « Zones à régime restrictif » (ZRR) sont actuellement en discussion pour de nombreux laboratoires de mathématiques (vague C des évaluations HCERES, les autres suivront). Il s'agit de mesures de sécurité s'appliquant aux laboratoires de recherche. Le régime de sécurité proposé, très contraignant, doit s'appliquer non seulement aux recherches touchant la sécurité et la défense, mais aussi aux « intérêts économiques de la nation », ce qui consiste de fait à inclure aussi les recherches en mathématiques.

Parmi les restrictions imposées dans les ZRR, on trouve : accès au laboratoire et recrutements soumis à approbation du Fonctionnaire Sécurité Défense au moins deux mois à l'avance, temps de visite limité et visite surveillée, publications soumises à autorisation du directeur de laboratoire. Ces mesures sont manifestement prévues pour des secteurs très sensibles. Les auditions à l'Assemblée nationale de mars 2019 montraient d'ailleurs un décalage énorme entre le monde universitaire et celui de la sécurité voire du renseignement. Il serait regrettable que la confusion entre les diverses formes de l'activité scientifique contraigne les laboratoires à passer sous un régime inadapté.

La recherche en mathématiques est effectivement déterminante pour les intérêts économiques de la nation (on préférerait des investissements à des contraintes). En revanche, la science française s'enrichira de son rayonnement, pas de son cloisonnement. Les mesures ZRR sont des freins à la circulation des idées et à la coopération scientifique. Elles mettent à mal l'unité des laboratoires et la sérénité de leur cadre de travail. Les lourdeurs administratives qu'elles engendrent sont disproportionnées, contre-productives et ingérables dans la plupart des structures, insuffisamment dotées pour les mettre en place. Le passage en ZRR freinerait la recherche des laboratoires concernés et compromettrait le lien entre enseignement et recherche en interdisant l'accès des étudiants aux laboratoires. Il nuirait à l'attractivité de la science française en dissuadant, par des lenteurs administratives supplémentaires, les meilleurs candidats internationaux de postuler en France.

Nous rappelons notre attachement à une recherche mathématique et une science ouvertes. La Conférence des présidents de sections du Comité national (CPCN) du CNRS, le Conseil scientifique de l'INRIA, la Société Informatique de France, ont déjà émis de vives critiques contre le régime de ZRR. La SMF se joint à leurs critiques et demande que les laboratoires de mathématiques restent des lieux ouverts où les échanges scientifiques sont favorisés. Nous appelons la communauté mathématique et les directeurs d'unité de recherche à s'opposer à la mise en place des ZRR dans les laboratoires de mathématiques.

Auditions de l'AN (mars 2019) :
`https://www.assemblee-nationale.fr/dyn/opendata/RAPPANR5L15B1796.html`
FAQ du SGDNS pour les arguments promotionnels des ZRR : `https://www.sgdsn.gouv.fr/nos-missions/proteger/proteger-le-potentiel-scientifique-et-technique-de-la-nation/foire-aux-questions`

Sept concepts attribués à Siméon-Denis Poisson

- Y. Kosmann-Schwarzbach
- J.-R. Chazottes (trad.)

Siméon-Denis Poisson a vingt-cinq ans lorsqu'il est nommé professeur de mathématiques à l'École polytechnique en 1806. Élu à l'Académie des sciences de Paris six ans plus tard, il en est rapidement devenu l'un des membres les plus influents. L'origine et les développements ultérieurs des nombreux concepts mathématiques et physiques qui portent son nom constituent des épisodes intéressants de l'histoire des sciences. Nous tenterons d'en esquisser quelques-uns dans cet article.

1. Le mathématicien et physicien Poisson (1781-1840)

Pithiviers est une petite ville située à 80 km au sud de Paris, réputée pour sa pâtisserie particulière et savoureuse, appelée « pithiviers », et pour le miel de grande qualité produit dans ses environs. Mais la ville a un autre titre de gloire. C'est là qu'est né, en 1781, Siméon-Denis Poisson, qui allait devenir le mathématicien et physicien mathématicien dont le nom est attaché à la loi de Poisson, aux crochets de Poisson, à la géométrie de Poisson, aux algèbres de Poisson et à bien d'autres concepts, formules, équations et théorèmes.

Il n'a que huit ans lorsque la Révolution française éclate. Son père est un soldat à la retraite qui occupe un modeste poste administratif. La Révolution permet aux garçons issus de familles comme la sienne d'obtenir une éducation convenable. En 1794, l'École polytechnique, d'abord appelée École centrale des travaux publics, est créée pour former des ingénieurs dotés d'une solide formation scientifique. À l'époque, comme aujourd'hui, l'admission se fait par concours. Encouragé par l'un de ses professeurs au lycée, et muni d'un certificat attestant de son amour profond de la liberté, de l'égalité et de toutes les convictions fondamentales de la République, dont la « haine des tyrans », Poisson se présente au concours d'entrée en 1798 et il est classé premier. C'est le début d'une très brillante carrière, ponctuée de nombreux changements de régime : d'abord la République révolutionnaire, puis l'Empire napoléonien, la restauration de la royauté en 1815, sous Louis XVIII jusqu'à sa mort en 1824, suivi par le plus autocratique Charles X, puis la révolution de 1830 et enfin la monarchie constitutionnelle de Louis-Philippe. Poisson ne connaîtra pas le régime suivant, la brève république de 1848, car il meurt en 1840 à l'âge de 58 ans.

Dix ans après sa mort, une statue grandeur nature de Poisson fut érigée dans sa ville natale. Aujourd'hui encore, une place du centre de Pithiviers porte son nom, mais la statue en bronze a disparu, comme tant d'autres en France et ailleurs, ayant été fondue pendant l'occupation allemande de Pithiviers lors de la Seconde Guerre mondiale.

Carte postale avec la statue de Poisson

Lorsque Poisson entre à l'École polytechnique, les professeurs sont parmi les plus éminents scientifiques de l'époque : Joseph Louis Lagrange (1736-1813) et Gaspard Monge (1746-1818) enseignaient les mathématiques, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) était examinateur de mathématiques, Jean Baptiste Biot (1774-1862) était examinateur de physique, et Antoine-François de Fourcroy (1755-1809) était professeur de chimie.

Le volume 4 du *Journal de l'École polytechnique*, daté de 1801-1802, contient trois articles rédigés par Poisson en 1799 ou au début de 1800, alors qu'il était encore élève. L'un d'eux traite de la classification des quadriques et constitue une « addition » à un article de Monge et Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834), tous deux professeurs à l'École polytechnique. Cette note de trois pages [6] doit être une remarque qu'il a faite sur une publication de ses professeurs, et elle est signée par l'un d'entre eux, Hachette, ainsi que par Poisson. C'est à la fois le premier et le dernier article cosigné par Poisson.

Dans le même volume, on trouve le « Mémoire sur l'élimination dans les équations algébriques » qui contient une nouvelle preuve simplifiée du théorème d'Étienne Bézout (1730-1783) sur le degré de la résultante attachée à une paire d'équations algébriques, et le « Mémoire sur la pluralité des intégrales dans le calcul des différences » [11], qu'il avait lu devant l'Institut National, qui avait remplacé l'Académie des sciences en 1795, le 16 frimaire de l'an 9 du calendrier révolutionnaire, soit le 8 décembre 1800. Dans ce mémoire, il généralise une remarque de Laplace sur les solutions des équations différentielles du premier ordre. Le rapport de deux membres de l'Académie, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) et Sylvestre François Lacroix (1765-1843), est conservé dans les archives de l'Académie des sciences. Dans la conclusion de leur « Rapport sur un mémoire du citoyen Poisson sur le nombre d'intégrales complettes [sic] dont les équations aux différences finies sont susceptibles », de quatre pages, ils écrivent :

> « Il résulte au moins que la théorie établie par ce jeune géomètre est exacte, et quand même elle ne serait pas susceptible d'applications utiles dans les problèmes qui conduisent à ce genre d'équations, on doit toujours regarder comme contribuant au progrès de la science l'éclaircissement d'un problème

> d'analyse qui jusqu'à présent était resté dans une grande obscurité. »

Et ils recommandent la publication de l'article de Poisson. Legendre et Lacroix n'étaient pas enthousiastes, mais ils n'ont certainement pas découragé le jeune mathématicien prometteur.

À la fin de ses études à l'École polytechnique, Poisson est immédiatement nommé assistant et, en 1802, il est appelé à « remplacer temporairement le citoyen Fourier », c'est-à-dire, Joseph Fourier (1768-1830), qui développera bientôt les séries et les intégrales dites de Fourier. Quatre ans plus tard, à l'âge de vingt-cinq ans, il est nommé « Instituteur d'Analyse », c'est-à-dire professeur titulaire de mathématiques, à la place de Fourier qu'il remplaçait déjà depuis quatre ans. Les archives de l'École polytechnique contiennent la confirmation de la nomination de Poisson au poste de Fourier, datée du 11 brumaire an 11 (2 novembre 1802), ainsi que la lettre d'accompagnement, datée du 17 mars 1806, du décret officiel de l'Empereur nommant Poisson « Instituteur d'Analyse » à l'École polytechnique.

S.-D. Poisson par E. Marcellot, 1804

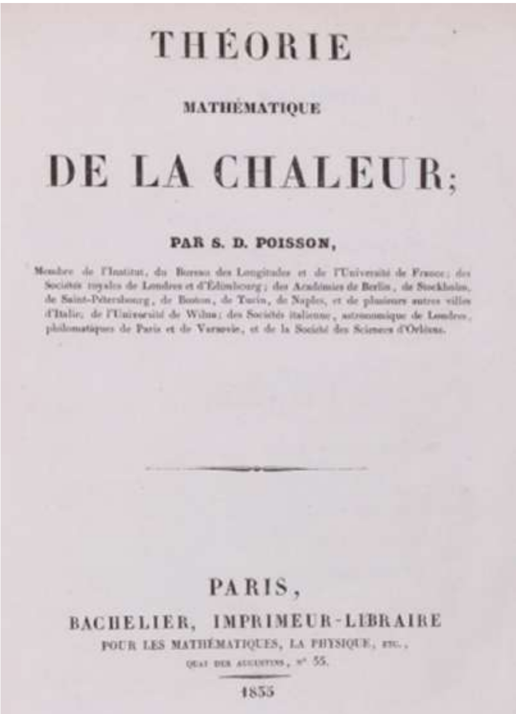
En 1804, Poisson apparaît sous les traits d'un jeune et beau professeur dans un portrait du peintre E. Marcellot, aujourd'hui conservé dans les collections de l'École polytechnique.

En 1809, Napoléon décrète l'ouverture d'une « Université Impériale » réorganisée, et Poisson y devient le premier professeur de mécanique. Une affiche annonçant l'ouverture des cours en avril 1811 se trouve encore dans les collections de la Bibliothèque nationale de France et précise que les cours de Poisson à la Sorbonne, pour reprendre l'ancien nom qui a survécu à toutes les réformes, révoltes étudiantes et réorganisations jusqu'à nos jours, seraient donnés les lundis et vendredis. Les autres professeurs étaient Lacroix, pour le calcul différentiel et intégral, Louis-Benjamin Francœur (1773-1849) pour l'algèbre supérieure, Hachette pour la géométrie descriptive et Biot pour l'astronomie.

Lorsqu'il y a enfin une vacance à l'Académie des sciences, c'est dans la section de physique, en 1812, et Poisson est élu pour l'occuper. Son rôle au sein de l'Académie devient rapidement prééminent, en particulier lors de l'élection des nouveaux membres. Il est chargé de rédiger de nombreux rapports. L'un d'entre eux, rédigé en 1816, me semble particulièrement intéressant car il montre Poisson, déjà membre respecté de l'Académie, en position de juger un jeune scientifique inconnu, tout comme il avait été jugé par Legendre et Lacroix en 1800. Il y rapporte, avec André-Marie Ampère (1775-1836), sur un mémoire de Claude Pouillet (1790-1868) consacré au phénomène des anneaux colorés. Leur conclusion sur le travail présenté par ce « jeune physicien » rappelle beaucoup celle de Legendre et Lacroix sur le « jeune géomètre » Poisson, seize ans plus tôt, et ils recommandent eux aussi la publication du mémoire. Leur jugement est juste, puisque Pouillet enseignera ensuite à l'École polytechnique et à la Sorbonne, et sera élu à l'Académie. Ce rapport, conservé dans les archives de l'Académie des sciences, est un manuscrit autographe de Poisson.

Un autre aspect du rôle de Poisson au sein de l'Académie est important, même s'il fut parfois controversé. Il était souvent amené à lire les articles soumis pour publication aux *Mémoires de l'Académie*. Dans plusieurs cas, il a rendu un grand service à la communauté scientifique en résumant dans ses propres termes les points principaux de ces articles, parfois de nombreuses années avant qu'ils ne soient révisés et publiés. Une controverse est née lorsque Poisson a utilisé ces articles en ne mentionnant pas suffisamment ses sources. Le cas le plus connu est celui de son amère dispute avec Fourier. Ayant eu accès au manuscrit sur la théorie de la chaleur que Fourier avait soumis à l'Académie en 1807, il publie en 1808 un exposé détaillé du sujet dans le *Bulletin de la Société Philomatique* (*Bulletin des Sciences*), sous le titre « Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, par M. Fourier » et signe P, son initiale. Alors que, de 1814 à 1825, Poisson publie de nombreux mémoires sur les séries trigonométriques et la théorie de la chaleur, le texte de Fourier, révisé, ne sera publié qu'en 1822, bien plus tard que les premiers articles de Poisson [1]. Une âpre querelle de priorité éclate en 1815 entre les deux scientifiques, au cours de laquelle Fourier écrit une lettre à Laplace, blâmant à la fois Poisson et Biot :

> « [Ils] reconnaissent qu'ils n'ont pu donner jusqu'ici aucun résultat différent des miens [. . .] mais ils disent qu'ils ont une autre manière de les exposer et que cette manière est excellente et la véritable. [. . .] Mais ce n'est pas reculer les limites des sciences que de présenter sous une forme que l'on dit être différente des résultats que l'on n'a pas trouvés soi-même. »



THÉORIE

MATHÉMATIQUE

DE LA CHALEUR;

PAR S. D. POISSON,

Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes et de l'Université de France; des Sociétés royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, de Boston, de Turin, de Naples, et de plusieurs autres villes d'Italie; de l'Université de Wilna; des Sociétés italienne, astronomique de Londres, philomatiques de Paris et de Varsovie, et de la Société des Sciences d'Orléans.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1835

Lorsque Gaston Darboux (1842-1917) édite les œuvres de Fourier en 1890, il inclut le compte rendu de Poisson de 1808, en expliquant : « Cet article [...] n'est pas de Fourier. Signé avec l'initiale "P", il a été écrit par Poisson qui était rédacteur de la partie mathématique du *Bulletin des Sciences*. En raison de l'intérêt historique qu'il présente en tant que première publication ayant fait connaître la théorie de Fourier, nous avons cru devoir le reproduire dans son intégralité. » En 1808, Fourier avait obtenu l'équation de la chaleur et l'avait résolue dans un cas particulier, en cherchant la solution sous forme de série trigonométrique. Poisson établit l'équation de la chaleur pour le cas de conductivité variable dans son « Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides », publié dans le *Journal de l'École polytechnique* en 1823, et l'a incluse dans son livre de 1835, *Théorie mathématique de la chaleur* [18].

De 1820 à sa mort, Poisson joue un rôle important dans l'organisation de l'enseignement en France, en tant que membre puis, après 1822, en tant que trésorier du Conseil royal de l'instruction publique. Comme responsable des mathématiques en France, il a exercé une influence considérable et s'est battu pour que l'enseignement des mathématiques soit dispensé à tous les élèves, y compris ceux qui étudient principalement les sciences humaines. Quand il présidait le jury de l'agrégation, il s'est efforcé de maintenir un examen unique pour les mathématiques et la physique. Il s'est fait le champion des mathématiques, mais il a également compris que les deux domaines devaient être développés simultanément au niveau du collège, du lycée et de l'université, comme c'était le cas dans ses recherches.

2. Quelques concepts dus à Poisson

Le nom de Poisson est si fréquemment mentionné dans tellement de contextes en mathématiques et en physique qu'il serait vraiment laborieux de retrouver la première formulation de chacun de ses concepts ou théorèmes parmi ses plus de deux cents publications. Je n'en mentionnerai ici que quelques-uns.

2.1 – L'équation de Poisson

Les premières contributions significatives de Poisson à la théorie de l'électrostatique remontent à 1811-1813, lorsqu'il se penche sur la détermination de la distribution des charges électriques dans les corps chargés en utilisant des techniques ana-

1. Sur le livre de Fourier, voir Jean Dhombres, Pour le bicentenaire de la parution de la « Théorie analytique de la chaleur », *Gazette de la* SMF, n° 175, 2023.

lytiques telles que les développements en série. Le magnétisme sera abordé dans un article ultérieur. Dans son « Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement » [13], publié dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* de 1823, on trouve, p. 463, « $\Delta V = 0, = -2k\pi, = -4k\pi$, selon que le point M sera situé en dehors, à la surface ou en dedans du volume que l'on considère ». Ici, k représente la densité de charge constante du corps chargé. (C'est Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui traitera plus tard le cas de la densité variable.) Le cas de l'équation $\Delta V = 0$ était déjà bien connu, puisqu'il s'agit de la célèbre équation de Laplace. Poisson avait obtenu une équation satisfaite par le potentiel en un point situé à l'intérieur du corps chargé, mais la nouveauté de l'article de 1823 était de traiter le cas d'un point situé à la surface du corps. Ce cas est maintenant connu comme l'« équation de Poisson » en électromagnétisme. Elle a en effet été découverte par Poisson.

L'importance de ces articles a été immédiatement reconnue par George Green (1793-1841), qui a donné son nom à la fonction de Green et au théorème de Green-Riemann. En 1828, dans la préface de son *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, Green cite les travaux de Poisson en bonne place et, parlant des articles de 1811 et 1812, il écrit :

> « Peu de choses semblent avoir été faites dans la théorie mathématique de l'électricité [. . .] lorsque M. Poisson présenta à l'Institut français deux mémoires d'une singulière élégance, relatifs à la distribution de l'électricité à la surface de sphères conductrices, préalablement électrisées et mises en présence l'une de l'autre » [2].

La renommée de la théorie mathématique de l'électrostatique de Poisson se reflète dans le jugement d'E. T. Whittaker (1873-1956) dans *The History of the Theories of Æther and Electricity* en 1910. En ce qui concerne le mémoire de Poisson de 1812, il écrit : « La théorie électrostatique a cependant été soudainement poussée à un stade de développement assez mûr par Siméon-Denis Poisson, dans un mémoire qui a été lu à l'Académie des sciences en 1812 [. . .]. La rapidité avec laquelle Poisson est passé, en un seul mémoire, des éléments les plus simples du sujet à des problèmes aussi complexes que ceux qui viennent d'être mentionnés, peut certainement susciter l'admiration » [3]. Il conclut :

> « Son succès s'explique sans doute en partie par le haut degré de développement auquel l'analyse avait été portée par les grands mathématiciens du dix-huitième siècle ; mais [. . .] les recherches de Poisson doivent être considérées comme un splendide hommage à son génie » [4].

Plus tard, il a examiné la « théorie de l'induction magnétique de Poisson », rejetant son interprétation physique, mais notant que les formules dérivées par Poisson étaient valables.

Et, en 1939, l'historien des sciences Mario Gliozzi, dans un article analysant « Il contributo del Poisson all'electrologia », concluait que la publication de Poisson de 1813 était un article tout à fait remarquable.

2.2 – Le coefficient de Poisson

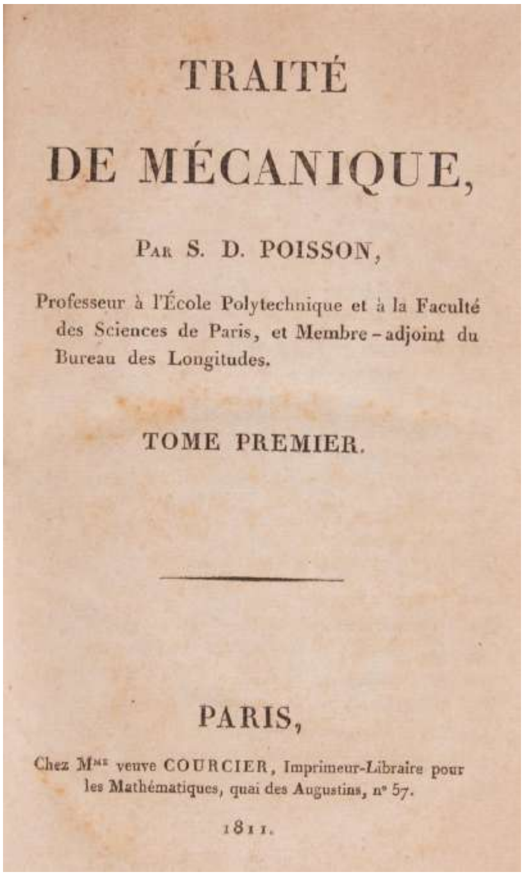
L'histoire du coefficient de Poisson est celle d'un concept dont les applications actuelles et quotidiennes sont aussi surprenantes que nombreuses. J'ai entendu une belle conférence de Tadashi Tokieda à Paris, en 2012, qui commençait par Poisson, continuait avec l'origami, et se poursuivait avec une variété étonnante de questions contemporaines dans la science des matériaux. J'ai ensuite lu l'article du physicien George Neville Greaves (1945-2019) [5], qui présente à la fois un historique et une description détaillée de la théorie et de la pratique actuelles de ce concept, que je résumerai brièvement ici. Tout a commencé par un « concept de forme versus volume », que Poisson esquisse dans son *Traité de Mécanique* [19], publié pour la première fois en 1811, où il écrit à la page 476 du volume 2 :

2. « Little appears to have been effected in the mathematical theory of electricity [. . .] when M. Poisson presented to the French Institute two memoirs of singular elegance, relative to the distribution of electricity on the surfaces of conducting spheres, previously electrified and put in presence of each other. »

3. « Electrostatical theory was, however, suddenly advanced to quite a mature state of development by Siméon-Denis Poisson, in a memoir which was read to the French academy in 1812 [. . .]. The rapidity with which in a single memoir Poisson passed from the barest elements of the subject to such recondite problems as those just mentioned may well excite admiration. »

4. « His success is, no doubt, partly explained by the high state of development to which analysis had been advanced by the great mathematicians of the eighteenth century ; but [. . .] Poisson's investigation must be accounted a splendid memorial of his genius. »

« Chacun des éléments dans lesquels nous avons partagé la masse fluide, changera de forme pendant l'instant $\mathrm{d}t$, et il changera même de volume, si le fluide est compressible ; mais comme sa masse devra toujours rester la même, il s'ensuit que, si nous cherchons ce que deviennent son volume et sa densité à la fin du temps $t+\mathrm{d}t$, leur produit devra être le même qu'à la fin du temps t. »


TRAITÉ

DE MÉCANIQUE,

PAR S. D. POISSON,

Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, et Membre-adjoint du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

PARIS,

Chez M^{ME} veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1811.

Dans un court article paru dans les *Annales de chimie et de physique* en 1827, « Sur l'extension des fils et des plaques élastiques », Poisson introduit le coefficient sans dimension qui porte son nom et, au moyen d'un calcul fondé sur la théorie de l'interaction moléculaire de Laplace, annonce que sa valeur est $\frac{1}{2}$, conformément aux expériences récentes faites sur le laiton par le baron Charles Cagniard de La Tour (1777-1859) et par Félix Savart (1791-1841), sur les vibrations des plaques, dont les résultats ont été récemment présentés à l'Académie. Poisson développe la théorie de l'élasticité dans plusieurs articles qu'il présente à l'Académie des sciences entre 1823 et 1828 et qu'il publie entre 1828 et 1830, en introduisant le rapport entre la déformation dans la direction transversale et la déformation dans la direction principale.

Une dizaine d'années plus tard, la précision des mesures expérimentales augmentant, il a été démontré que l'hypothèse de la constance du coefficient de Poisson pour tous les matériaux était fausse, mais le conflit entre l'hypothèse des molécules en interaction et la théorie du continu de Sophie Germain (1776-1831) et d'Augustin Cauchy (1789-1857) n'a été résolu que bien plus tard. Dans les années 1860, James Clerk Maxwell (1831-1879) a défendu le point de vue de Poisson, mais William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) a déclaré qu'il avait déjà été prouvé qu'il était faux par George Stokes (1819-1903) en 1845. Jusqu'aux années 1970, la variabilité du coefficient de Poisson pour chaque type de matériau n'avait été établie qu'expérimentalement par des ingénieurs « pour qui les propriétés macroscopiques étaient souveraines »[5]. Cependant, il a été démontré que sa variabilité, contrairement à celle des autres modules élastiques, est limitée à l'intervalle $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$. Le nombre de publications concernant le coefficient de Poisson a augmenté de façon exponentielle après 1970, lorsqu'on a découvert que ce concept permettait de comprendre « le rétrécissement des artères en cas d'hypertension, la résilience des os et des implants médicaux, la rhéologie des cristaux liquides, le modelage des fonds océaniques, l'aplatissement de la Terre et la sismologie planétaire après l'impact d'un météore » [5]. C'est à cette époque que les matériaux à coefficient de Poisson négatif ont commencé à apparaître et ont trouvé d'innombrables et importantes applications qui ont été judicieusement évoquées dans la conférence divertissante de Tokieda évoquée plus haut. C'est le résultat du travail de nombreux physiciens, à commencer par Roderic Lakes en 1987 et Neville Greaves, l'auteur de l'article que nous avons tenté de résumer ici, qui a observé que « Siméon-Denis Poisson est particulièrement connu pour un coefficient, une quantité sans dimension, qui aujourd'hui a acquis une signification physique étonnamment omniprésente »[6].

5. « for whom macroscopic properties were sovereign » [5].

6. « Siméon-Denis Poisson is particularly remembered for a ratio, a dimensionless quantity, wich today has surprising acquired a ubiquitous physical significance. » Voir également l'article détaillé de G. N. Greaves et al., « Poisson's ratio and modern materials », *Nature Materials*, vol. 10, November 2011.

2.3 – La tache de Poisson

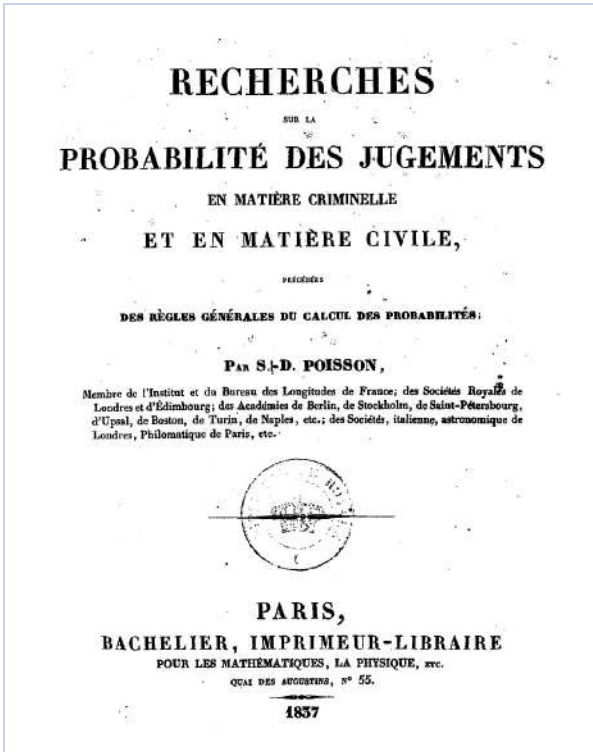
La contribution de Poisson à l'optique n'est pas un traitement réussi des phénomènes généraux de la lumière, mais une prédiction basée sur ses capacités de calcul. Comme Laplace, il soutenait que tous les phénomènes peuvent être expliqués par l'interaction moléculaire. Il s'opposait à la théorie d'Augustin Fresnel (1788-1827), fondée sur une théorie ondulatoire. Lorsqu'en 1817 l'Académie des sciences examina les candidatures à un grand prix pour l'étude de la diffraction de la lumière, Poisson était membre de la commission chargée d'examiner le dossier de Fresnel. Convaincu que Fresnel se trompait, Poisson proposa une expérience qui prouverait qu'une conséquence mathématique de la formule de Fresnel était contraire à l'intuition et réfuterait sa théorie. Lorsque la conséquence de la théorie de Fresnel que Poisson avait déduite et considérée comme absurde fut testée expérimentalement, ce qu'il avait jugé absurde fut effectivement observé : une tache lumineuse apparut au centre de l'ombre d'un disque éclairé par une source située sur son axe. Ce phénomène fut alors appelé par dérision « tache de Poisson ». L'expérience suggérée par Poisson avait produit un résultat en faveur de Fresnel qui se vit décerner le prix.

2.4 – La loi de Poisson

La loi de Poisson est probablement l'occurrence du nom de Poisson la plus fréquente dans la littérature scientifique.

Poisson n'a pas été le premier à s'intéresser aux probabilités. Blaise Pascal (1623-1662), Christiaan Huygens (1629-1695), John Arbuthnot (1667-1735), Giovanni Battista Vico (1668-1744), Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707-1788) dans son *Essai d'arithmétique morale*, de 1777, avaient tous écrit sur ce sujet, et même Voltaire avait écrit un pamphlet, *Essai sur les probabilités en fait de justice*, en 1772, mais ce n'était pas un travail mathématique, et la cinquième édition revue et augmentée de l'*Essai philosophique sur les probabilités* de Laplace, écrit en 1814, a été publiée dans le volume 7 de ses œuvres en 1825. En 1981, Bernard Bru, dans son article sur Poisson et la théorie des probabilités [1], a écrit qu'un précurseur de la loi de probabilité qui porte le nom de Poisson se trouve dès 1718 dans l'ouvrage du mathématicien huguenot travaillant en Angleterre, Abraham de Moivre (1667-1754), *The Doctrine of Chances*. Mais sous sa forme actuelle, la distribution de Poisson apparaît pour la première fois à la page 262 du mémoire de Poisson de 1829, « Mémoire sur la proportion des naissances des filles et des garçons », publié dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* de 1830 [12], et réapparaît dans son livre ultérieur, *Recherches sur la probabilité des jugements* [16], publié en 1837, où l'on peut lire à la page 206,

$$P = \left(1 + \omega + \frac{\omega^2}{1\times 2} + \frac{\omega^3}{1\times 2\times 3} + \cdots + \frac{\omega^n}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}\right) e^{-\omega}.$$


RECHERCHES

SUR LA

PROBABILITÉ DES JUGEMENTS

EN MATIÈRE CRIMINELLE

ET EN MATIÈRE CIVILE,

PRÉCÉDÉES

DES RÈGLES GÉNÉRALES DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR S.-D. POISSON,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés, italienne, astronomique de Londres, Philomatique de Paris, etc.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, ETC.

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1837

Les polynômes de Poisson-Charlier, dont la suite est apparue pour la première fois dans les travaux de l'astronome et statisticien suédois Carl Vilhelm Ludwig Charlier (1862-1934), sont liés à la distribution de Poisson. C'est le mathématicien allemand Gustav Doetsch (1892-1977) qui les a appelés polynômes de Charlier dans le titre d'un article publié dans *Mathematische Annalen* en 1934 où il discutait de l'équation qu'ils satisfont. Le rapporteur pour l'article de Doetsch pour *Zentralblatt* a écrit la définition de ces polynômes en termes d'une suite de fonctions définies par récurrence à partir de la loi de Poisson (Poissonsche Verteilung) et a noté la propriété d'orthogonalité qu'ils satisfont par rapport à la densité de Poisson, d'où la terminologie actuelle. Dans une note parue dans les *Annals of*

Mathematical Statistics en 1947, Clifford Truesdell (1919-2000) a déduit leurs propriétés de celles des F-fonctions qu'il a introduites, et intitulé son article « A note on the Poisson-Charlier functions » [21]. C'est ainsi que le nom de Poisson fut associé à des concepts inventés cent ans après sa mort.

2.5 – La formule de sommation de Poisson

La formule de sommation de Poisson est si bien connue qu'elle est souvent appelée simplement « la formule de Poisson ». Pourquoi la formule

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathscr{F} f(n),$$

où $\mathscr{F} f$ est la transformée de Fourier de f, définie par

$$\mathscr{F} f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

est-elle attribuée à Poisson ? Dans l'espoir de trouver des références qui nous mèneraient à ses articles originaux, nous avons ouvert un manuel moderne, *Sphere Packings, Lattices and Groups* (1999), par John Conway et N. J. A. Sloane. Présentant les fonctions thêta de Jacobi, ils écrivent à la page 103 :

> « Ces fonctions sont liées par un labyrinthe d'identités [. . .]. On peut les considérer comme des conséquences de la version générale de la formule de sommation de Poisson ».

Comment la référence à Poisson est-elle parvenue à Conway et Sloane à la fin du XXe siècle, et que trouvons-nous dans l'œuvre de Poisson ? Heureusement, ils renvoient à la page 475 du traité classique de Whittaker et Watson, *A Course of Modern Analysis* (1927), qui, à leur tour, renvoient à l'article de Poisson de 1823 dans le *Journal de l'École polytechnique* intitulé « Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries » [17]. C'est là, à la page 420, que nous lisons la formule

$$\pi + 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-4k\pi^2 n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{4k}},$$

que Poisson a obtenue en travaillant sur une évaluation précise du reste de la formule de sommation que Leonhard Euler avait obtenue en 1736 et que Colin Maclaurin avait énoncée dans son *Treatise of Fluxions* de 1742. Puisque la transformée de Fourier de $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ est $\mathscr{F} f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{\alpha}}$, lorsque la formule précédente est réécrite sous la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-4k\pi^2 n^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n^2}{4k}},$$

nous reconnaissons la formule de sommation

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathscr{F} f(n),$$

pour chaque fonction f_k définie par $f_k(x) = \mathrm{e}^{-4k\pi^2 x^2}$.

Ce que Whittaker et Watson ont observé, c'est qu'en posant $4k\pi = -\mathrm{i}\tau$, la formule de Poisson peut être réécrite comme suit :

$$\theta_3(0;\tau) = \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}\tau}}\,\theta_3\Big(0;-\frac{1}{\tau}\Big),$$

qui est le cas particulier pour $z = 0$ de la formule générale de transformation de la troisième fonction thêta, à savoir

$$\theta_3(z;\tau) = \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}\tau}}\,\mathrm{e}^{\frac{z^2}{\pi \mathrm{i}\tau}}\,\theta_3\Big(\frac{z}{\tau};-\frac{1}{\tau}\Big).$$

qui est le cas particulier pour $z = 0$ de la formule générale de transformation de la troisième fonction thêta, à savoir

$$\theta_3(z;\tau) = \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}\tau}}\,\mathrm{e}^{\frac{z^2}{\pi \mathrm{i}\tau}}\,\theta_3\Big(\frac{z}{\tau};-\frac{1}{\tau}\Big).$$

Ils ont également indiqué qu'un cas plus général se trouve dans le « Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies » de Poisson, publié en 1827 dans les *Mémoires de l'Académie des sciences*, un an avant que Jacobi ne publie « Suite des notices sur les fonctions elliptiques » dans le Journal de Crelle, qui a été suivi par son traitement complet des identités satisfaites par les fonctions thêta dans ses *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, publié à Koenigsberg en 1829.

Aujourd'hui, la formule de sommation, généralisée dans la théorie des représentations de groupes, a des applications à la théorie des réseaux et aux codes correcteurs d'erreurs, que Poisson n'aurait pas pu prévoir.

2.6 – Le noyau de Poisson et la formule intégrale de Poisson

Si l'on ouvre n'importe quel livre moderne sur la théorie du potentiel, on trouvera sans aucun doute une définition du « noyau de Poisson » et une preuve de la « formule intégrale de Poisson », souvent appelée simplement « formule de Poisson », pour le cas d'un demi-plan et pour un disque dans le plan, souvent aussi pour la sphère dans l'espace à trois dimensions ou en dimension supérieure. Comment ces formules sont-elles parvenues aux auteurs modernes et où apparaissent-elles dans la vaste production mathématique de Poisson ?

Ce qui est devenu connu sous le nom de « problème de Dirichlet » pour un domaine dans l'espace à n dimensions, qui consiste à déterminer la valeur d'une fonction harmonique à l'intérieur du domaine, étant donné la valeur de la fonction sur la frontière du domaine, a été formulé pour un disque dans le plan par Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) dans un article du Journal de Crelle en 1828.

Dans une étude sur l'histoire des séries de Fourier, Jean-Pierre Kahane (1926-2017) a énuméré, parmi les avancées réalisées au xix^e siècle sur le sujet des séries trigonométriques, la solution par Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) du problème de Dirichlet pour le cercle au moyen de la formule de Poisson, en 1872. En fait, l'article de Schwarz [20] dans le *Journal f}ur die reine und angewandte Mathematik* de 1872, contient la formule qui exprime la valeur d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un disque en tant qu'intégrale impliquant uniquement les valeurs de cette fonction sur le cercle le délimitant, à savoir

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\phi)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\phi)+r^2}\,\mathrm{d}\psi.$$

Mais il écrit : « Il est facile de reconnaître l'idée fondamentale de la preuve de Poisson dans la preuve que l'on trouve dans § 5.*b* » [7]. Schwarz a attribué cette formule à Carl Neumann (1832-1925) dans son article [9] dans le volume 59 de la même revue. On trouve effectivement cette formule à la p. 365 de l'article de Neumann. Bien qu'il ne soit pas fait mention de Poisson dans l'article de Neumann, Schwarz fait en revanche de nombreuses références aux articles de Poisson de 1815 et 1823, ainsi qu'à son livre sur la théorie de la chaleur, *Théorie mathématique de la chaleur*, et à trois autres articles publiés en 1827, 1829 et 1831. Il nous donne ainsi un guide utile pour entrer dans le labyrinthe des mémoires parfois très longs que Poisson a écrits, dont beaucoup comportent une « suite » et une « addition ».

La recherche de Poisson a commencé dès 1813 dans son « Mémoire sur les intégrales définies » [15] publié dans le *Journal de l'École polytechnique*. Cet article est suivi d'un autre mémoire, de soixante pages, en 1820, « Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de grandeurs périodiques, et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes » [10], publié dans la même revue, puis de la « Suite du mémoire sur les intégrales définies et la sommation des séries » [17] en 1823.

Poisson essayait d'établir des formules d'interpolation à la Lagrange. En 1820, dans son mémoire sur les séries de fonctions périodiques, il avait démontré que, étant donnée une suite finie de $m-1$ quantités, $y_1,\ldots,y_{m-1}$, en fixant $z_j = \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \sin\left(\frac{kj\pi}{m}\right)$, il s'ensuit que $y_n = \sum_{j=1}^{m-1} z_j \sin\left(\frac{nj\pi}{m}\right)$. Il écrit que cette formule est un cas particulier de la formule de Lagrange dans son ouvrage *Recherches sur la nature et la propagation du son*, qui avait paru dans le premier volume des *Mémoires de l'Académie de Turin* en 1759. Ensuite, par passage à la limite et en échangeant la sommation et l'intégration, il déduit la formule suivante $f(x) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{m}\right)\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{m}\right)f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$, qu'il attribue également à Lagrange. Dans ce long mémoire, il exprime son objectif de remplacer la sommation d'une série par le calcul d'une intégrale ou inversement, et il traite de la question de la sommation des séries de sinus et de cosinus. Il écrit : « Il sera avantageux de les réunir toutes sous un même point de vue et de déduire ces valeurs d'une méthode uniforme ». À la page 422, il introduit l'évaluation d'une fonction à l'aide de l'intégration au moyen de ce que l'on appellera plus tard un noyau de Poisson, et il en donne de nombreuses applications, notamment au mouvement d'une corde vibrante composée de deux parties faites de matériaux différents et au mouvement d'un corps pesant suspendu à un fil élastique.

Ce qui ressort clairement de la lecture de Poisson, c'est qu'il n'essayait pas de résoudre le problème dit de Dirichlet, sauf peut-être dans le cas d'un problème appliqué lié à ses recherches plus générales, mais qu'il est revenu plusieurs fois à la théorie des séries trigonométriques et qu'il essayait en fait de prouver le théorème dit de Fourier, c'est-à-dire qu'il cherchait à prouver la convergence de la « série de Fourier » d'une fonction donnée vers la fonction elle-même. Ses tentatives de traitement rigoureux de cette question, ainsi que le traitement ultérieur par Cauchy en 1823, n'ont pas été couronnées de succès, mais c'est au cours

7. « Man wird auch in dem Beweise, der in Section 5 unter *b* enthalten ist, die Grundgedanken des Poissonschen Beweises leicht wiedererkennen. »

d'une telle recherche que Poisson a introduit la fonction connue sous le nom de noyau de Poisson et l'intégrale connue sous le nom d'intégrale de Poisson. Ces deux termes sont justifiés, mais leur apparition dans la théorie des fonctions harmoniques et la théorie du potentiel est plus tardive, avec Dirichlet et Schwarz. En conclusion, nous pouvons affirmer que, d'une part, le noyau de Poisson a bien été introduit par Poisson dans ses tentatives de prouver la convergence des séries de Fourier de fonctions d'un type général, et que, d'autre part, Poisson n'a pas utilisé la formule intégrale correspondante dans la recherche d'une solution générale de l'équation de Laplace, mais seulement dans des cas particuliers issus de problèmes en physique.

2.7 – Les crochets de Poisson

Tout a commencé en mécanique céleste. Après les mémoires de Lagrange de 1808 et 1809 sur la variation des axes principaux des orbites planétaires et sur une théorie générale de la variation des constantes arbitraires en mécanique, c'est dans le célèbre « Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique », publié par Poisson en 1809 [14], que les crochets de Poisson sont apparus en tant que tels. Lagrange avait obtenu leur expression par une procédure complexe qui revenait - en termes modernes - à inverser la matrice des composantes de la 2-forme symplectique canonique. Poisson désigne les coordonnées de la position du corps par ϕ, ψ, θ et les composantes de sa vitesse par s, u, v, et il écrit :

> Il est visible que le premier membre de cette équation est une différentielle complète par rapport à t ; en intégrant, nous aurons donc cette équation fort simple
>
> $$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\phi}-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\phi} +\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\psi}-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\psi} +\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\theta}-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}=\text{const.}$$
>
> On conçoit que la constante qui fait le second membre de cette équation, sera en général une fonction de a et b, et des constantes arbitraires contenues dans les autres intégrales des équations du mouvement ; [...] mais, afin de rappeler l'origine de cette quantité, qui représente une certaine combinaison des différences partielles des valeurs de a et b, nous ferons usage de cette notation (b, a), pour la désigner ; de manière que nous aurons généralement
>
> $$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\phi}-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\phi} +\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\psi}-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\psi} +\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\theta}-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}=(b,a).$$

(Il existe une discussion courte mais détaillée de l'article de Poisson dans l'ouvrage de René Dugas, *Histoire de la Mécanique* [4], avec des notations modernes qui rendent le raisonnement de Poisson facile à comprendre et facilitent la lecture de son texte original.)

C'est dans ce premier article que Poisson introduit le changement de variables faisant passer de $(q_i, \dot{q}_i)$ à (q_i, p_i), où les p_i sont les quantités conjuguées, ou moments, des q_i, définis par $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, lorsque L est la fonction lagrangienne, ouvrant la voie à la forme hamiltonienne des équations du mouvement, déjà implicite chez Lagrange, finalement obtenue par Cauchy dans un mémoire lithographié en 1831, qui n'a été imprimé que plus tard, en 1834 en italien et en 1835 en français, et finalement publiée par William Rowan Hamilton (1805-1865) dans son « Second mémoire sur une méthode générale en dynamique »[8] en 1835. Poisson est revenu sur le sujet en 1816.

En 1850, Jacobi, lisant une biographie de Poisson (peut-être celle d'Arago ?), a redécouvert ce qui est devenu le théorème de Poisson, à savoir que le crochet de Poisson de deux intégrales du mouvement est une intégrale du mouvement. Il s'exclama que ce théorème était « vraiment prodigieux » et s'efforça d'expliquer ce que, selon lui, son auteur et les auteurs ultérieurs n'avaient pas perçu.

L'omniprésence des crochets de Poisson, des algèbres de Poisson et des variétés de Poisson en mécanique, en physique théorique et dans un nombre impressionnant de domaines mathématiques soulève la question suivante : comment cela s'est-il produit ? L'histoire des crochets de Poisson implique, en plus de Lagrange, Cauchy et Hamilton, principalement Jacobi, Liouville et Lie (1842-1899), et

8. « Second essay on a general method in dynamics ».

culmine dans l'explication du rôle qu'ils ont joué dans le développement de la mécanique quantique. L'histoire est bien sûr trop longue pour être décrite ici. Même une brève histoire de la géométrie de Poisson impliquerait une excursion dans l'histoire de la géométrie symplectique. Je me contenterai de signaler que le terme « crochets de Poisson » ne semble pas avoir été adopté avant que Whittaker ne l'utilise dans son *History of the Theories of Æther and Electricity* en 1910. Auparavant, on les appelait généralement des « expressions », tandis qu'un auteur, Joseph Graindorge (1843-1889), écrivait en 1872 qu'il utilisait la « notation de Poisson ».

Dès 1857, Arthur Cayley (1821-1895), dans un « Report of the British Association for the Advancement of Science », avait prédit l'importance que prendraient plus tard les crochets de Poisson, par opposition aux parenthèses de Lagrange : « La théorie de Poisson donne lieu à des développements qui semblent n'avoir aucun équivalent dans la théorie de Lagrange » [9]. En effet, alors que les parenthèses de Lagrange sont les composantes d'une 2-forme fermée, un concept qui n'est apparu qu'avec Élie Cartan (1869-1951) juste avant 1900, les crochets de Poisson satisfont à l'identité que Jacobi a démontrée vers 1840 (publiée à titre posthume en 1862), et l'identité de Jacobi est devenue le fondement de la théorie des algèbres de Lie.

3. Conclusion

La plupart des jugements portés sur l'œuvre de Poisson au xixe siècle, mais pas tous, sont extrêmement élogieux. Le physicien et astronome François Arago (1786-1853), qui était alors Secrétaire perpétuel (président) de l'Académie des sciences, déclara lors des funérailles de Poisson en 1840 : « Le génie ne meurt pas ainsi ; il se survit dans ses œuvres », et dix ans plus tard, il écrivait dans un autre éloge en forme de biographie scientifique que Poisson avait « trois qualités : le génie, l'amour du travail et l'érudition mathématique » [10]. Mais l'auteur d'une histoire des sciences mathématiques et physiques en 12 volumes publiés dans les années 1880, Maximilien Marie, consacre plusieurs pages à un résumé désobligeant de l'activité de Poisson : « Poisson n'a pas tenu, à beaucoup près, les promesses de sa jeunesse », affirmant que sa position dans n'importe quel débat aurait toujours été erronée, et Pierre Costabel [2], bien que moins négatif, a écrit une appréciation sévère.

Lorsque les premiers bâtiments de la Sorbonne furent inaugurés en 1890, cinquante ans après la mort de Poisson, c'est Charles Hermite (1822-1901) – qui a donné son nom aux polynômes d'Hermite et aux matrices hermitiennes – qui prononça un discours [7] en présence du président français de l'époque, Sadi Carnot. Il choisit de revenir sur les travaux et l'héritage des professeurs qui avaient occupé les premières chaires de la Faculté des sciences lors de sa création en 1809. Il déclara : « Poisson est l'un des grands géomètres de ce siècle », avant de passer en revue les réalisations de Poisson en physique mathématique : « Pour Laplace et Poisson, l'analyse pure n'est pas l'objet, mais l'instrument », et il poursuit : « Mais en ayant un autre but, Poisson et Fourier contribuent au développement de l'Analyse qu'ils enrichissent de méthodes, de résultats nouveaux, de notions fondamentales ». Il souligna le fait que Poisson était un disciple de Laplace, mais il annonçait également ce qui allait suivre, en se référant au travail de Poisson sur ce qui était déjà connu sous le nom de « théorème de Poisson ». « Mais il se rattache aussi à l'analyse de notre temps dans une question de la plus grande importance et qui présente un intérêt singulier au point de vue de l'invention mathématique. » Il poursuivit en citant une phrase en latin écrite par Jacobi que je comprends comme suit : « Voici un exemple qui montre clairement que, si les problèmes ne sont pas déjà formulés dans notre esprit, il se pourrait bien que nous ne voyions pas des découvertes de la plus haute importance qui sont sous nos yeux ».

Poisson était-il mathématicien ou physicien ? S'il a été appelé « géomètre » par Arago, Hermite et d'autres, c'est parce que « géomètre » était le terme générique pour mathématicien jusqu'à beaucoup plus tard au xixe siècle. Son ambition était d'écrire un traité complet de physique mathématique. Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, ont tous contribué à la fois aux « mathématiques pures » et à la résolution de problèmes de physique, parfois très appliqués, comme la géodésie, avec les outils mathématiques qu'ils ont forgés. Les travaux de Poisson sur la théorie du magnétisme ont eu des applications importantes pour les instruments de navigation des navires. Sa théorie moléculaire, à la suite de La-

9. « The theory of Poisson gives rise to developments which seem to have nothing corresponding to them in the theory of Lagrange. »
10. « On se demandera sans doute comment, durant une vie si courte et consacrée en grande partie au professorat, notre confrère était parvenu à attaquer et à résoudre tant de problèmes. Je répondrai que c'est par la réunion de trois qualités : le génie, l'amour du travail et l'érudition mathématique. »

place, ne l'emporte pas sur la théorie ondulatoire défendue par Fresnel, mais en ce qui concerne la théorie de l'élasticité, certaines de ses idées, qui avaient été discréditées, ont retrouvé leur importance dans le développement récent des matériaux composites.

Poisson n'a jamais voyagé. Après être venu à Paris à l'âge de 17 ans pour entrer à l'École polytechnique, il ne quitta la capitale que pour rendre visite à Laplace à Arcueil, à quelques kilomètres de la limite sud de Paris, où il rejoignait les autres membres de la Société d'Arcueil, un petit cercle de scientifiques éminents, ainsi nommé d'après leur lieu de réunion. Mais ses publications à l'étranger furent nombreuses et son influence en Allemagne, en Angleterre et en Russie est considérable. Plusieurs de ses livres ont été traduits et des extraits ou des résumés de ses articles ont été publiés dans le *Zeitschrift für Physik*, dans les *Annalen der Physik*, et dans les *Philosophical Transactions* [11].

Mais la théorie des algèbres de Lie a dû attendre d'autres génies pour être développée, et la géométrie de Poisson a dû attendre plus d'un siècle et demi pour être développée sous diverses formes dans les travaux, entre autres, de Wolfgang Pauli, George W. Mackey, Wlodzimierz Tulczyjew, Vladimir Maslov, Robert Hermann, Alexander Kirillov, Moshé Flato, André Lichnerowicz et Alan Weinstein.

De son vivant, Poisson a joué un rôle prépondérant dans la science française. Ses explications des phénomènes physiques ont pour la plupart été infirmées par ses contemporains ou par des physiciens ultérieurs, mais ses réalisations dans le domaine de la physique mathématique demeurent. Il a souvent trouvé les bonnes équations en utilisant les mauvais arguments physiques. Il possédait des capacités de calcul exceptionnelles et son héritage en mathématiques est essentiel. Il a fait progresser les mathématiques en essayant de résoudre des problèmes de physique, parfois avec succès, parfois sans succès, et il faut se souvenir de lui pour les concepts, les équations, les formules et les théorèmes. Il a fait la démonstration que les problèmes de physique peuvent suggérer des mathématiques entièrement abstraites, ce que nous appelons aujourd'hui la physique mathématique.

Références

[1] B. Bru. « Poisson et le calcul des probabilités ». In : *Siméon-Denis Poisson, Les Mathématiques au service de la science*. Sous la dir. d'Y. Kosmann-Schwarzbach. Éditions de l'École polytechnique, 2013, p. 333-355.

[2] P. Costabel. « S.-D. Poisson ». In : *Dictionary of Scientific Biography*. Vol. XV, Suppl. 1, 1978, p. 480-490. Une traduction française par l'auteur est parue dans [8], 21-39.

[3] P. Dugac. « Liste des travaux de Siméon-Denis Poisson ». In : *Siméon-Denis Poisson, Les Mathématiques au service de la science*. Sous la dir. d'Y. Kosmann-Schwarzbach. Éditions de l'École polytechnique, 2013, p. 423-436.

[4] R. Dugas. *Histoire de la Mécanique*. Ré-édition, Éditions Jacques Gabay, 1996. Éditions du Griffon et Dunod, 1950.

[5] G. N. Greaves. « Poisson's ratio over two centuries : challenging hypotheses ». *Notes and Records of the Royal Society* **67** (2013), p. 37-58.

[6] C. Hachette et S.-D. Poisson. « Addition au mémoire précédent ». *Journal de l'École polytechnique, 11e cahier* (1800), p. 170-173.

[7] C. Hermite. « Discours prononcé à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne ». *Bulletin administratif de l'instruction publique* **46**, nº 867 (août 1889), p. 269-279.

[8] Y. Kosmann-Schwarzbach, éd. *Siméon-Denis Poisson, Les Mathématiques au service de la science*. Éditions de l'École polytechnique, 2013.

[9] C. Neumann. « Über die Integration der partiellen Differentialgleichung : $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$ ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **59** (1861), p. 335-366.

[10] S.-D. Poisson. « Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques, et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes ». *Journal de l'École polytechnique, 18e cahier, nº11* (1820), p. 417-489.

[11] S.-D. Poisson. « Mémoire sur la pluralité des intégrales dans le calcul des différences ». *Journal de l'École polytechnique, 11e cahier* (1800), p. 173-181.

[12] S.-D. Poisson. « Mémoire sur la proportion des naissances des filles et des garçons ». *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* **9** (1830), p. 239-308.

11. Ces références ne figurent pas dans la liste autographe de ses œuvres, aujourd'hui conservée à la Bibliothèque de l'Institut, que Poisson a lui-même dressée peu avant sa mort. Elles avaient échappé au travail méticuleux et précieux de Pierre Dugac dans [3].

[13] S.-D. Poisson. « Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement ». *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* **VI** (1823), p. 441-570.

[14] S.-D. Poisson. « Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique ». *Journal de l'École polytechnique, 15e cahier, n°8* (1809), p. 266-344.

[15] S.-D. Poisson. « Mémoire sur les intégrales définies ». *Journal de l'École polytechnique, 16e cahier, n°9* (1813), p. 215-246.

[16] S.-D. Poisson. *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*. Paris, 1837.

[17] S.-D. Poisson. « Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries ». *Journal de l'École polytechnique, 19e cahier, n°12* (1823), p. 404-509.

[18] S.-D. Poisson. *Théorie mathématique de la chaleur*. Paris, 1835.

[19] S.-D. Poisson. *Traité de Mécanique*. Veuve Courcier. Paris, 1811.

[20] H. A. Schwarz. « Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **74** (1872), p. 218-253.

[21] C. Truesdell. « A note on the Poisson-Charlier functions ». *Annals of Mathematical Statistics* **18** (1947), p. 450-454.

Yvette Kosmann-Schwarzbach

Ancienne professeure à l'École polytechnique

yks@math.cnrs.fr

Yvette Kosmann-Schwarzbach a une longue carrière d'enseignement et de recherche en géométrie différentielle et physique mathématique. Elle a enseigné à l'université de Lille de 1969 à 1993 (avec une mission à l'université de Madagascar en 1972, un détachement à l'université de Tel-Aviv en 1973-74, et un poste à Brooklyn College, cuny, de 1979 à 1982), puis elle a été nommée à l'École polytechnique de 1993 jusqu'à sa mise à la retraite en 2006. Elle a publié de très nombreux articles, depuis les « Dérivées de Lie des spineurs » (1972), en passant par « From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras » en 1996 et jusqu'à « Modular classes of Lie algebroid morphisms », publié avec Camille Laurent-Gengoux et Alan Weinstein (2008) et « Nijenhuis structures on Courant algebroids » (2011). Elle a édité un livre en français sur Siméon-Denis Poisson (2013) et publié une monographie, « The Noether Theorems » (2011, révisé en 2018). La deuxième édition de son manuel d'enseignement, « Groups and Symmetries, From Finite Groups to Lie Groups », a paru en 2022.

Jean-René Chazottes (Trad.)

cnrs & École polytechnique

jeanrene.chazottes@cnrs.fr

Jean-René Chazottes est directeur de recherche au cnrs, au Centre de Physique Théorique de l'École polytechnique. Ses travaux se concentrent sur l'étude probabiliste des systèmes dynamiques, la physique statistique et l'écologie mathématique. Il est également passionné par l'histoire des sciences.

Article dédié à Jean-Pierre Bourguignon à l'occasion de son 75e anniversaire, initialement paru dans *Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, sigma 18 (2022), 092, 13 pages.

Théorie des modèles et équations différentielles

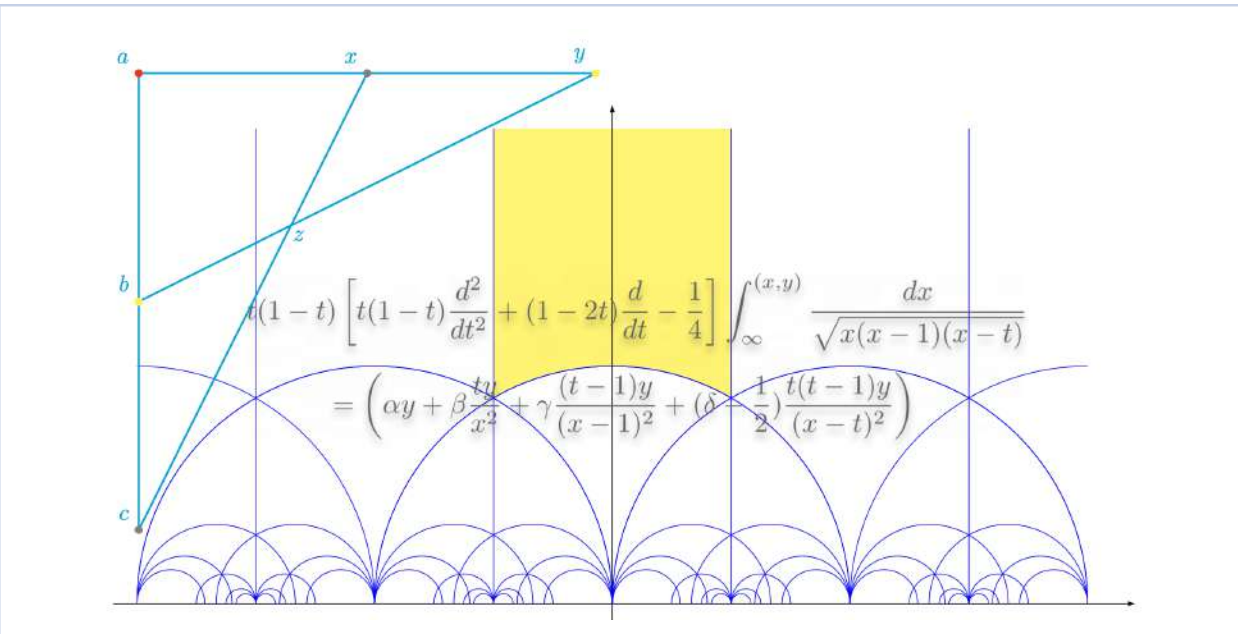
• J. Nagloo

Introduction

L'approche modèle-théorique des équations différentielles possède une riche et longue histoire qui débute avec les travaux de A. Robinson [24]. La théorie des corps différentielllement clos de caractéristique nulle, DCF_0, a été étudiée de façon intensive et a joué un rôle important dans le développement de la théorie des modèles géométriques. Cette théorie sous-tend aussi une des applications les plus spectaculaires de la logique à la théorie des nombres : la preuve par E. Hrushovski de la conjecture de Mordell-Lang sur les corps de fonctions. En outre, l'étude de DCF_0 a conduit à un développement conséquent de la théorie de Galois des équations différentielles et de ses applications.

Néanmoins, ce n'est que très récemment que des techniques modèles-théoriques ont été utilisées pour étudier les équations différentielles classiques. D'abord dans les travaux de l'auteur et de A. Pillay sur les solutions des équations de Painlevé [17], [16] et ensuite à travers ceux de J. Freitag et T. Scanlon [8] sur l'équation différentielle satisfaite par la fonction modulaire j. Plus récemment, [4] a étudié les équations différentielles satisfaites par les fonctions automorphes fuchsiennes et, ce faisant, prouvé une vieille affirmation de P. Painlevé concernant leur *irréductibilité* (1895).

Dans cet article, nous donnons un aperçu des applications récentes de la théorie des modèles à l'étude des équations différentielles. L'accent sera mis sur le rôle de la classification des ensembles fortement minimaux et sur les résultats obtenus en transcendance fonctionnelle. Inévitablement, beaucoup d'autres aspects intéressants et importants de l'interaction entre théorie des modèles et algèbre différentielle seront omis.



Géométrie algébrique différentielle

La géométrie algébrique différentielle, dont l'origine remonte au début des années 1930, a été fondée par J. Ritt et E. Kolchin. Bien qu'elle ne soit pas très connue, elle offre un cadre général (algébrique) pour l'étude des équations différentielles et son approche est semblable à celle de l'étude des équations polynomiales en géométrie algébrique. Dans cet article, nous nous concentrerons sur les équations différentielles ordinaires mais nous évoquerons le cas des équations aux dérivées partielles et aux différences dans notre conclusion. La référence standard pour cette section est le livre de Kolchin [12]. On supposera que tous les corps considérés sont de caractéristique nulle.

Définition 1. Un *corps différentiel* (K,δ) est un corps K muni d'une dérivation $\delta : K \to K$, i.e., un morphisme de groupe additif satisfaisant à la règle de Leibniz $\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$.

Le *corps des constantes* C_K de K est défini ensemblistement comme $\{x \in K : \delta(x) = 0\}$. En général, nous écrirons x' pour $\delta(x)$ et $x^{(n)}$ pour $\underbrace{\delta \circ \ldots \circ \delta}_{n}(x)$.

Exemple 1. $(\mathbb{C}(t), d/dt)$ le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$ en une seule indéterminée, avec pour corps des constantes $\mathbb{C}$.

On associe à un corps différentiel (K,δ) *l'anneau des polynômes différentiels* $K\{\mathbf{X}\}$ en m variables différentielles $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_m)$. Par variables différentielles, on sous-entend une collection dénombrable $\{X_1^{(n)},\ldots,X_m^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'indéterminées algébriquement indépendantes sur K munies d'une action de la dérivation δ telle que $\delta(X_i^{(n)}) = X_i^{(n+1)}$. Un élément de $K\{\mathbf{X}\}$, appelé *polynôme différentiel* sur K, est simplement un polynôme à coefficients dans K mais dans les variables $\mathbf{X},\mathbf{X}',\mathbf{X}^{(2)},\ldots$. La notation $\mathbf{X}^{(n)}$ représente $(X_1^{(n)},\ldots,X_m^{(n)})$. Si $f \in K\{\mathbf{X}\}$, *l'ordre* de f, noté $ord(f)$, est le plus grand entier n tel que $X_i^{(n)}$ apparaisse dans f pour un certain i.

Exemple 2. $f(X) = (X')^2 - 4X^3 - tX$ est un polynôme différentiel dans $\mathbb{C}(t)\{X\}$ avec $ord(f) = 1$.

Comme on peut le remarquer, si $f \in K\{\mathbf{X}\}$, alors $f(\mathbf{X}) = 0$ est une équation différentielle ordinaire (algébrique). Plus généralement, un sous-ensemble fermé de Kolchin de K^n désigne l'ensemble des zéros d'un système fini d'équations polynomiales différentielles, c'est-à-dire, un ensemble de la forme

$$V(S) = \{y \in K^n : f(y) = 0 \text{ pour tout } f \in S\}$$

où S est un sous-ensemble fini de $K\{\mathbf{X}\}$. Les complémentaires des ensembles fermés de Kolchin forment la base d'une topologie, appelée topologie de Kolchin, et sont les analogues différentiels des ensembles fermés pour la topologie de Zariski. Un *ensemble Kolchin-constructible* est simplement une combinaison booléenne d'ensembles fermés de Kolchin. Étant donné un corps différentiel (K,δ), la dérivation δ s'étend de manière unique à la clôture algébrique K^{alg} de K. Cependant, pour que les ensembles fermés de Kolchin aient des points dont les coordonnées proviennent du corps des coefficients, il faut que ce dernier satisfasse à une condition beaucoup plus forte qu'être algébriquement clos.

Définition 2. Un corps différentiel (K,δ) est dit *différentiellement clos* si pour tous f,g dans $K\{X\}$ avec $ord(f) > ord(g)$, il existe $y \in K$ tel que $f(y) = 0$ et $g(y) \neq 0$.

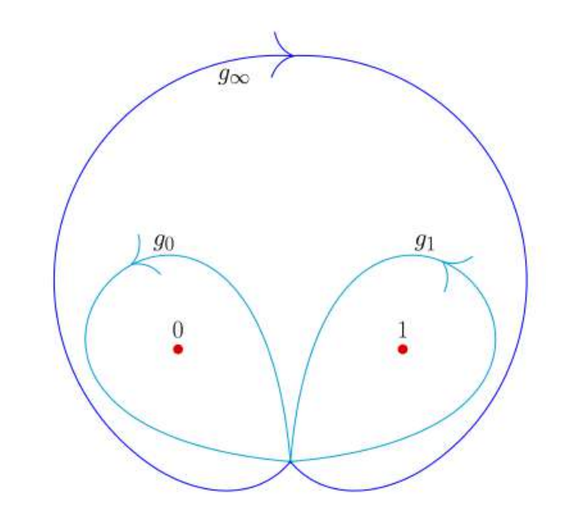
La géométrie algébrique différentielle, telle que développée par Kolchin, étudie les ensembles fermés de Kolchin à coefficients dans un corps différentiellement clos. À ce stade, mentionnons que les ensembles fermés de Kolchin peuvent avoir une structure algébrique très riche. Prenons par exemple le corps des constantes : si K est différentiellement clos, la définition 2 entraîne que C_K est un corps algébriquement clos. Ce qui est moins évident, c'est que C_K est le seul sous-corps algébriquement clos de K qui soit défini par une équation différentielle. Un autre exemple intéressant et bien connu est celui d'un polynôme différentiel linéaire homogène

$$f(X) = X^{(n)} + a_{n-1}X^{(n-1)} + \cdots + a_1X' + a_0X, \quad a_i \in K.$$

On constate que l'ensemble fermé de Kolchin associé (dans un corps différentiellement clos K) est un espace vectoriel sur C_K.

L'approche de Kolchin a été déterminante dans le développement d'une théorie de Galois pour les équations différentielles qui consolide et étend la théorie de Picard-Vessiot pour les équations différentielles linéaires. Par exemple, pour un corps différentiellement clos K, le groupe de Galois d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans K est un groupe algébrique linéaire défini sur C_K. Dans sa théorie des extensions fortement normales, Kolchin généralise ce résultat aux équations différentielles logarithmiques en leur associant des groupes de Galois qui sont des groupes algébriques, non nécessairement linéaires.

Figure 1 – Lacets g_0,g_1,g_∞ dans le plan complexe autour des singularités $0, 1, \infty$ de l'équation hypergéométrique. Le groupe de Galois différentiel est la clôture de Zariski dans $GL_2(\mathbb{C})$ du groupe de monodromie de l'équation.



La théorie de Galois développée par Kolchin pour les équations différentielles a permis de répondre à des questions liées à la structure des ensembles Kolchin-constructibles. De plus, son approche coïncide avec celle de la théorie des modèles des corps différentiellement clos. Avant de poursuivre, mentionnons le théorème de plongement de Seidenberg, qui relie le cadre différentiel abstrait au cadre analytique complexe. Dans ce qui suit, nous désignons par $\mathbb{C}\{\{t\}\}$, l'anneau des germes de fonctions méromorphes en zéro, Seidenberg démontre (cf. [25]) :

Théorème 1. *Soit K un corps différentiel finiment engendré sur $\mathbb{Q}$. Il existe alors un plongement différentiel de K dans $\mathbb{C}\{\{t\}\}$.*

Au cours de la dernière décennie, et comme nous le verrons dans la cinquième section, le théorème de Seidenberg a joué un rôle crucial dans l'application des techniques de l'algèbre différentielle à la théorie des nombres.

Théorie des modèles

Pour les sujets abordés dans cet article, nous recommandons le livre de D. Marker [14] ou l'article de É. Bouscaren [3]. Le point de départ de la théorie des modèles est la notion de modèle d'une théorie du premier ordre. Ici, par *théorie du premier ordre T*, nous entendons un ensemble d'axiomes (ou plus précisément de phrases du premier ordre) dans un langage fixe L. Le langage L est simplement un ensemble de symboles constants, de symboles de fonctions et de symboles de relations. Nous supposons que le langage est dénombrable.

Exemple 3. Un exemple familier de théorie du premier ordre est T_G, la théorie des groupes, qui consiste en les axiomes habituels pour les groupes exprimés en utilisant le langage $L_G = (e,*)$ ainsi que les symboles logiques $=, (,), \exists$ et $\forall$.

Une *structure* pour un langage L, ou une L-*structure* en abrégé, est un ensemble comprenant des interprétations pour chaque symbole de L. Un *modèle* d'une théorie T est simplement une L-structure dans laquelle les axiomes de T sont vrais. Dans l'exemple 3, nous voyons que $(\mathbb{N}, 0, +)$ et $(\mathbb{Z}, 0, +)$ sont tous deux des L_G-structures, et que seule la dernière est un modèle de T_G car elle vérifie l'existence d'un inverse pour tout élément.

La notion de formule (bien formée) étend celle d'axiome en autorisant les variables libres, c'est-à-dire, celles qui ne sont pas quantifiées. En reprenant l'exemple 3, nous voyons qu'une formule bien formée avec la variable libre X est $\phi(X) := \forall\, Y(X * Y = Y * X)$. Pour un modèle G (c'est-à-dire un groupe), si $C(G)$ désigne l'ensemble des éléments de G qui satisfont à la formule $\phi(X)$ alors $C(G)$ est le centre de G. Le centre $C(G)$ est un exemple d'ensemble définissable :

Définition 3. Pour un modèle M d'une théorie T, un *ensemble définissable* $Y \subset M^n$ est un ensemble de la forme

$$Y = \{\mathbf{y} \in M^n : \phi(\mathbf{y}) \text{ est vraie}\}$$

où ϕ est une L-formule en n variables libres.

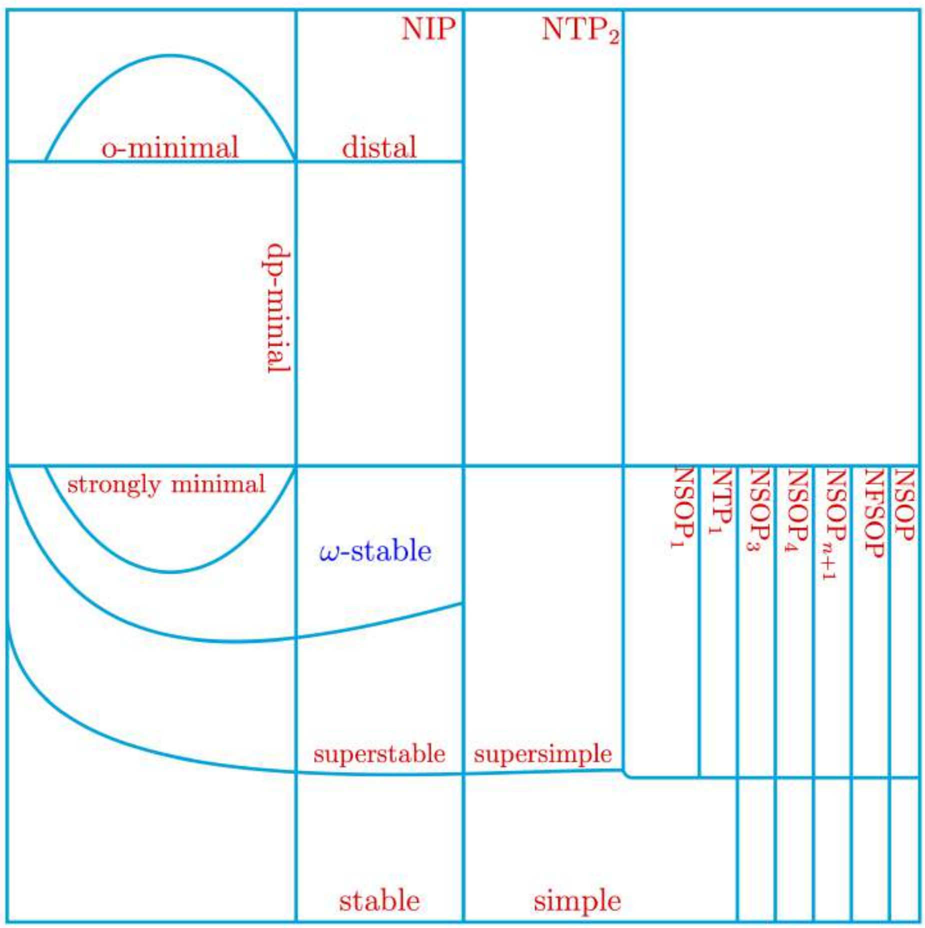
Remarque 1. Pour tout sous-ensemble A d'un modèle M, on peut étendre le langage L en ajoutant un symbole constant pour chaque élément $a \in A$. On désigne généralement le nouveau langage obtenu par L_A. Si, dans la définition 3, on remplace L par L_A pour un certain $A \subset M$, on obtient la définition d'un ensemble A-définissable, plus précisément, d'un ensemble définissable avec *paramètres* dans l'ensemble A.

Pour une théorie T fixée, un des principaux objectifs de la théorie des modèles est d'étudier *tous* les ensembles définissables dans un modèle quelconque de T. Cela serait bien sûr sans espoir si l'on ne pouvait identifier des classes de structures où il existe un certain contrôle sur les ensembles définissables. En théorie des modèles, cela conduit à la distinction entre les structures ou théories « modérées (tame) » et « sauvages (wild) ». Dans cet article, nous présentons deux exemples venant du contexte « modéré », à savoir l'élimination des quantificateurs et l'ω-stabilité. Il existe de nombreuses autres distinctions naturelles entre « modérée » et « sauvage », dont certaines sont illustrées dans la figure 2.

On dit d'une théorie T qu'elle a *élimination des quantificateurs* si pour chaque formule $\phi(\mathbf{X})$ il existe une formule sans quantificateur $\psi(\mathbf{X})$ telle que les deux définissent le même ensemble définissable. Il s'ensuit que pour les théories avec élimination des quantificateurs, les ensembles définissables sont définis à l'aide de formules « simples ».

Une théorie T est ω-stable si on peut attacher à chaque ensemble définissable X une dimension ordinale intrinsèque appelée rang de Morley et notée $RM(X)$. En termes approximatifs, on définit le rang de Morley par récurrence de la façon suivante : $RM(X) = 0$ si X est fini, et $RM(X) \geqslant \alpha + 1$ s'il existe une collection dénombrable de sous-ensembles définissables X_i deux à deux disjoints de X tels que $RM(X_i) \geqslant \alpha$ pour tout $i < \omega$ (avec une extension naturelle de cette définition par récurrence aux ordinaux limites). Le rang de Morley de X vaut α si $RM(X)$ est supérieur à α mais pas à α+1. En utilisant ce rang, on peut définir dans T de bonnes notions d'indépendance et de dimension, analogues aux notions d'indépendance linéaire et de base dans l'étude des espaces vectoriels.

Figure 2 – L'univers de la théorie des modèles tel que décrit dans *forkinganddividing.com*. Dans cette carte des théories, une théorie ω-stable est idéalement située à la gauche de la division « modérée/sauvage ».



La théorie ACF_0 des corps algébriquement clos de caractéristique zéro avec les axiomes évidents donnés dans le langage des anneaux $L_R = (+,-,\cdot,0,1)$ possède à la fois l'élimination des quantificateurs et est ω-stable. Dans ce cadre, l'élimination des quantificateurs est équivalente au théorème de Chevalley-Tarski selon lequel, sur un corps algébriquement clos, la projection d'un ensemble constructible est constructible. Le rang de Morley d'un ensemble définissable dans ACF_0 correspond à la dimension de Krull de sa clôture de Zariski, tandis que la notion d'indépendance est équivalente à l'indépendance algébrique.

La théorie DCF_0

Rassemblons les idées des deux premières sections. Nous renvoyons le lecteur à [13] pour le contexte historique et des détails supplémentaires. Dans le contexte des corps différentiellement clos, le langage pertinent est $L_\delta = (+,-,\cdot,\delta,0,1)$, le langage des anneaux différentiels.

Pour tous entiers positifs n, d_1 et d_2, on peut écrire un axiome (dans L_δ) qui affirme que si f est un polynôme différentiel d'ordre n et de degré au plus d_1 et g est un polynôme différentiel non nul d'ordre inférieur strict à n et de degré au plus d_2, alors il existe une solution à $f(X) = 0$ et $g(X) \neq 0$. La théorie obtenue en ajoutant cette famille dénombrable d'axiomes aux axiomes pour les corps et la dérivation s'appelle la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique zéro et est notée DCF_0. Cette théorie se situe du côté modéré de plusieurs des lignes de démarcation les plus importantes de la théorie des modèles, comme l'a montré Blum [2] :

Théorème 2. *La théorie DCF_0 élimine les quantificateurs et est ω-stable.*

Dans le reste de l'article $\mathcal{U}$ désigne un modèle saturé [1] de DCF_0 .

L'élimination des quantificateurs signifie qu'un ensemble $Y \subseteq \mathcal{U}^n$, définissable dans DCF_0 avec paramètres dans un sous-corps différentiel K de $\mathcal{U}$, n'est rien d'autre qu'un ensemble Kolchin-constructible défini sur K. D'autre part, comme nous l'avons vu plus haut, l'ω-stabilité signifie (entre autres) que tout ensemble définissable possède un rang de Morley à valeur ordinale bien défini. La notion d'indépendance dans $\mathcal{U}$ est la suivante : $\mathbf{a}$ est *indépendant* de $\mathbf{b}$ sur K si $K\langle \mathbf{a}\rangle$ est algébriquement disjoint de $K\langle \mathbf{b}\rangle$ sur K. Ici $K\langle \mathbf{a}\rangle = K(\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{a}^{(2)},\ldots)$ désigne le corps différentiel engendré par $\mathbf{a}$ sur K.

Outre le rang de Morley, nous disposons également d'un autre invariant pour les ensembles définissables, appelé *l'ordre de Morley*. Pour $\mathbf{a} \in \mathcal{U}^n$ et K sous-corps différentiel de $\mathcal{U}$, nous définissons $ord(\mathbf{a}/K)$ comme le degré de transcendance du corps $K\langle \mathbf{a}\rangle$ sur K. Si $Y \subseteq \mathcal{U}^n$ est définissable sur K, on pose $ord(Y) = sup\{ord(\mathbf{a}/K) : \mathbf{a} \in Y\}$. On peut montrer que $RM(Y)$ est toujours inférieur ou égal à $ord(Y)$. De plus, $RM(Y) < \omega$ si et seulement si $ord(Y) < \omega$. Nous verrons plus loin des exemples de fermés de Kolchin pour lesquels le rang de Morley est strictement inférieur à l'ordre.

Définition 4. Soit $Y \subseteq \mathcal{U}^n$ un ensemble définissable.

1. Y est dit *fini dimensionnel* (ou de rang fini) s'il a un ordre fini, i.e., $ord(Y) < \omega$.
2. Y est dit *fortement minimal* s'il est infini et si pour tout sous-ensemble définissable $Z \subseteq Y$, soit Z ou $Y \setminus Z$ est un ensemble fini.

Si Y est fortement minimal, alors il est de rang de Morley un. Les ensembles fortement minimaux déterminent, d'une manière précise (qui ne sera pas discutée dans cet article), la structure de *tous* les ensembles définissables fini-dimensionnels. Ce fait, qui découle de considérations très générales en théorie des modèles, s'applique à toute théorie ω-stable et est obtenu en particulier grâce à la notion très robuste d'indépendance.

Remarquons que si Y est un ensemble définissable avec $ord(Y) = n$, alors Y est fortement minimal si et seulement si Y ne peut être écrit comme l'union disjointe d'ensembles définissables d'ordre n et, si pour *tout* corps différentiel K sur lequel Y est défini et tout élément $y \in Y$, alors le degré de transcendance $tr.deg(K\langle y\rangle/K)$ de $K\langle y\rangle$ sur K vaut 0 ou n.

Exemple 4. Le corps des constantes $C_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ est un ensemble fortement minimal.

Exemple 5. Si f est un polynôme en 2 variables absolument irréductible sur K, un sous-corps différentiel de $\mathcal{U}$, alors le sous-ensemble Y de $\mathcal{U}$ défini par $f(y,y') = 0$ est fortement minimal, d'ordre 1.

Il est assez difficile de montrer qu'un ensemble défini par une équation différentielle donnée est fortement minimal. En effet, sauf pour des cas limités ou spéciaux, aucun outil général n'est disponible. Par exemple, nous renvoyons le lecteur à la section 5.17 de [13], pour les calculs (fastidieux)

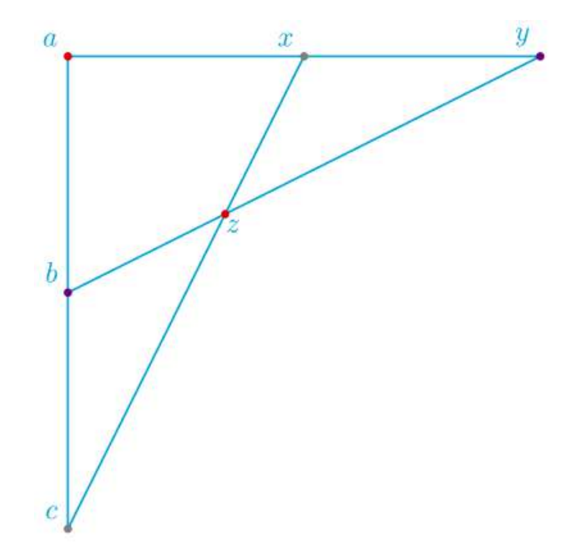
1. La saturation pour les corps différentiels est une notion de richesse du corps différentiel qui généralise dans ce cadre l'idée qu'un corps algébriquement clos de degré de transcendance indénombrable sur le corps des nombres premiers est suffisamment riche.

permettant de montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{U}$ défini par $\{yy'' = y', y' \neq 0\}$ est fortement minimal, d'ordre 2.

Néanmoins, l'objectif de comprendre tous les ensembles définissables dans DCF_0 passe par une compréhension complète des ensembles fortement minimaux. Une quantité considérable de travail, débutant dans les années 1990, a été consacrée à cela. Le résultat le plus profond dans cette direction, dû à E. Hrushovski et Z. Sokolovic [11], concerne la classification des ensembles fortement minimaux qui ont des structures « non triviales ».

Définition 5. Soit Y un ensemble fortement minimal défini sur un corps différentiel K. On dit que Y est *géométriquement trivial* si pour tous $y_0, y_1, \dots, y_n$ dans Y tels que $y_0 \in K\langle y_1, \dots, y_n\rangle^{alg}$, alors il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $y_0 \in K\langle y_i\rangle^{alg}$.

Figure 3 – Présence d'un groupe définissable : dans un ensemble fortement minimal non géométriquement trivial, on peut trouver une *configuration de groupe*. Tout point est de rang de Morley 1, chaque droite est de rang 2 (i.e. toute paire de points sur la droite est indépendante, mais un troisième point de la droite dépend des deux autres) et trois points non colinéaires sont indépendants.



Par essence, un ensemble géométriquement trivial peut avoir au plus une structure « binaire ». Le corps des constantes $C_{\mathcal{U}}$ n'est pas géométriquement trivial. Il en va de même pour les groupes définissables (c'est-à-dire les ensembles définissables dotés d'une structure de groupe définissable).

Les travaux de Hrushovski et Sokolovic n'ont pas tenté de classifier tous les ensembles fortement minimaux géométriquement triviaux. En revanche, une étape clé de leurs travaux, qui s'appuient sur ceux d'A. Buium, a été l'identification de certains groupes algébriques différentiels « exotiques » (c'est-à-dire des groupes définissables où l'ensemble définissable sous-jacent est fermé de Kolchin et non de Zariski).

On considère une variété abélienne A définie sur $\mathcal{U}$, c'est-à-dire, un groupe algébrique qui est une variété algébrique projective définie sur $\mathcal{U}$. On identifie A avec l'ensemble $A(\mathcal{U})$ de ses $\mathcal{U}$-points, qui forme un groupe abélien. La clôture de Kolchin du sous-groupe de torsion de A est le plus petit fermé de Kolchin contenant les éléments d'ordre fini de A. Elle s'avère jouer un rôle fondamental dans la classification de Hrushovski et Sokolovic.

Théorème 3. *Soit A une variété abélienne définie sur $\mathcal{U}$. Nous identifions A avec l'ensemble $A(\mathcal{U})$ de ses $\mathcal{U}$-points. Soit $A^\sharp$ la clôture de Kolchin du sous-groupe de torsion de A. Alors,*

1. *$A^\sharp$ est un groupe différentiel algébrique et est Zariski dense dans A ;*
2. *si A est une variété abélienne simple qui n'est pas définie sur $C_{\mathcal{U}}$, alors $A^\sharp$ est fortement minimal.*

Le groupe $A^\sharp$ est appelé le *noyau de Manin* de A. Une propriété remarquable de $A^\sharp$ est que tout sous-ensemble définissable de ce groupe est une combinaison booléenne finie de classes suivant des sous-groupes définissables. Le résultat de Hrushovski et Sokolovic est qu'à équivalence près, le corps de constantes $C_{\mathcal{U}}$ et les groupes $A^\sharp$ couvrent tous les exemples non géométriquement triviaux !

Théorème 4 (Le théorème de Trichotomie). *Si $Y \in \mathcal{U}^n$ est fortement minimal, alors il réalise une et une seule des conditions suivantes*

1. *Y est géométriquement trivial, ou*
2. *(Cas-Groupe) Y est* non orthogonal *au noyau de Manin $A^\sharp$ d'une variété abélienne simple A qui ne descend pas à $C_{\mathcal{U}}$, ou*
3. *(Cas-Corps) Y est* non orthogonal *au corps des constantes $C_{\mathcal{U}}$.*

On dit que deux ensembles fortement minimaux Y et Z sont *non orthogonaux* s'il existe un sous-ensemble définissable $R \subset Y \times Z$ de cardinal infini tel que $\pi_{Y\restriction R}$ et $\pi_{Z\restriction R}$ soient des fonctions à fibres finies. Ici, $\pi_Y : Y \times Z \to Y$ et $\pi_Z : Y \times Z \to Z$ désignent respectivement les projections sur Y et Z. Il n'est pas difficile de voir que la non-orthogonalité induit une relation d'équivalence sur les ensembles fortement minimaux. De plus, si Y et Z sont des ensembles fortement minimaux non orthogonaux, alors $ord(Y) = ord(Z)$.

Le travail de Hrushovski et Sokolovic n'a jamais été publié. En revanche, une preuve alternative de la caractérisation des ensembles fortement minimaux de type corps – une étape clé – est donnée dans les travaux de A. Pillay et M. Ziegler [22]. Un bon résumé de la preuve du Théorème 4 se trouve dans [16, Section 2.1].

Il existe d'autres conséquences intéressantes et importantes du théorème de trichotomie méritant d'être mentionnées ici. Tout d'abord, si $A^\sharp$ est le noyau de Manin d'une variété abélienne simple A ne descendant pas à $C_{\mathcal{U}}$, alors $ord(A^\sharp) \geqslant 2$. Par conséquent, les ensembles fortement minimaux d'ordre 1 sont soit géométriquement triviaux, soit non orthogonaux à $C_{\mathcal{U}}$. Deuxièmement, les ensembles fortement minimaux définis sur $C_{\mathcal{U}}$ et d'ordre $\geqslant 2$ sont tous géométriquement triviaux ! Ce fait surprenant a été quelque peu oublié pendant un certain temps, mais il joue désormais un rôle crucial dans certaines des applications de la théorie des modèles à la transcendance fonctionnelle, comme nous le verrons dans la section suivante.

Enfin, il convient de mentionner que la forte minimalité est étroitement liée à la notion d'irréductibilité de Painlevé pour les équations différentielles. Sans entrer dans les détails, une équation différentielle est dite *irréductible* si aucune de ses solutions ne peut s'exprimer en terme de fonctions spéciales plus « simples », par exemple, de solutions d'équations différentielles linéaires, d'intégrales premières de feuilletage de codimension 1, ... La question de l'irréductibilité des équations différentielles de Painlevé a fait partie pendant longtemps des conjectures ouvertes dans la théorie des fonctions spéciales non linéaires.

Trivial Pursuits et applications

Comme nous l'avons vu, le théorème de trichotomie, qui donne un théorème de classification très général pour les ensembles fortement minimaux, n'a rien à dire sur les ensembles géométriquement triviaux. Comprendre la structure de ces ensembles fortement minimaux, ou "trivial pursuits" (nom donné par J. Baldwin et L. Harrington), est l'un des problèmes ouverts les plus importants dans l'étude de DCF_0. Mais à ce jour, très peu de progrès ont été réalisés. Pendant longtemps, on a conjecturé que tous les ensembles fortement minimaux géométriquement triviaux n'avaient pas (ou très peu) de structure et que, par exemple, tout élément y d'un ensemble Y fortement minimal et géométriquement trivial n'était *interalgébrique* qu'avec un nombre fini d'éléments de Y. Plus précisément,

Définition 6. Soit Y un ensemble fortement minimal défini sur un corps différentiel K. L'ensemble Y est dit *ω-catégorique* si pour tout uplet $\mathbf{b}$ de $\mathcal{U}$, l'ensemble $K\langle \mathbf{b}\rangle^{alg} \cap Y$ est fini.

Si un ensemble fortement minimal est ω-catégorique, alors il est géométriquement trivial. Un résultat frappant d'E. Hrushovski [10] est que la réciproque est vraie pour les ensembles fortement minimaux d'ordre 1 (cf. [21, Cor 1.82] et [7] pour une généralisation) :

Théorème 5. *Soit $Y \subset \mathcal{U}^n$ un ensemble fortement minimal géométriquement trivial d'ordre* 1*. Alors Y est ω-catégorique.*

Ce résultat de Hrushovski a donné lieu à une conjecture sur les ensembles fortement minimaux géométriquement triviaux d'ordre arbitraire : *pour les corps différentiellement clos, tout ensemble fortement minimal, géométriquement trivial est ω-catégorique*. Cette conjecture a cependant été réfutée dans [8] qui montre que l'équation différentielle d'ordre 3 satisfaite par la fonction modulaire j en constitue un contre-exemple (voir ci-dessous). La question suivante reste cependant ouverte.

Question 1. *Est-ce que tous les ensembles fortement minimaux géométriquement triviaux d'ordre* 2 *sont ω-catégoriques ? En d'autres termes, existe-t-il un contre-exemple d'ordre 2 ?*

À ce stade, mentionnons que si un ensemble fortement minimal Y défini sur K est d'ordre n, son ω-catégoricité peut se traduire en des résultats de transcendance très forts : il existe un entier m tel que si $y_1, \ldots, y_k$ dans Y sont distincts et engendrent un corps différentiel $K\langle y_1, \ldots, y_k\rangle$ de degré de transcendance nk sur K, alors pour tout y dans Y en dehors d'un ensemble fini de cardinal mk, le degré de transcendance $tr.deg(K\langle y_1, \ldots, y_k, y\rangle / K)$ de $K\langle y_1, \ldots, y_k, y\rangle$ sur K vaut $n(k+1)$. Il s'ensuit qu'établir la minimalité forte, la trivialité géométrique et la ω-catégoricité d'un ensemble définissable dans DCF_0 fait partie intégrante d'une stratégie visant à prouver des résultats de transcendance fonctionnelle pour les solutions d'équations différentielles. Au cours des dernières décennies, à la suite des travaux sur le théorème de comptage de Pila-Wilkie dans le contexte de l'o-minimalité (une branche de la théorie des modèles), les résultats de transcendance fonctionnelle ont suscité un regain d'intérêt, en partie en raison de leur lien avec les conjectures sur les points spéciaux de variétés algébriques. L'approche utilisant la théorie des modèles de corps différentiels apporte une nouvelle approche complémentaire aux précédentes. À ce titre, une réponse positive à la question ci-dessus serait d'un grand intérêt. Nous allons maintenant illustrer ce propos en examinant plusieurs applications récentes de la théorie des modèles, en particulier celles liées aux « trivial pursuits » de certaines équations différentielles classiques.

Équations de Painlevé génériques

Les équations de Painlevé sont des équations différentielles ordinaires du second ordre et se répartissent en six familles $P_I - P_{VI}$, où P_I consiste en l'unique équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 + t,$$

et $P_{II}-P_{VI}$ dépendent de paramètres complexes. Ces familles d'équations ont été principalement découvertes au début du xx^e siècle par P. Painlevé et complétées par B. Gambier et R. Fuchs. Elles décrivent les équations différentielles ordinaires de la forme $y'' = f(y, y', t)$ (où f est une fraction rationnelle à coefficients complexes) qui ont la propriété de Painlevé : toute solution analytique locale s'étend en une solution méromorphe sur le revêtement universel de $P^1(\mathbb{C}) \setminus S$, où S est l'ensemble fini des singularités de l'équation. Ces équations apparaissent dans différents domaines de la physique, tels que, par exemple, la mécanique statistique, la relativité générale ou encore l'optique non linéaire.

Exemple 6. La seconde équation de Painlevé $P_{II}(\alpha)$ est donnée par

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + ty + \alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$. Les solutions de cette équation apparaissent de façon fréquente en théorie des matrices aléatoires (cf. [6]).

Painlevé pensait que les ensembles définis par les équations de Painlevé seraient « irréductibles », du moins pour des valeurs générales des paramètres. Cette « irréductibilité » que nous avons définie sous les termes modèles-théoriques de forte minimalité, a été établie dans une série d'articles rédigés par K. Okamoto, K. Nishioka, M. Noumi, H. Umemura et H. Watanabe (cf. [19] pour un historique plus approfondi). En particulier, la première équation de Painlevé est fortement minimale et il s'avère que $P_{II}(\alpha)$ l'est si et seulement si $\alpha \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Par équation de Painlevé *générique*, nous entendons une équation de la famille $P_I - P_{VI}$, telle que tous les paramètres complexes correspondants soient transcendants et algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, $P_{II}(\pi)$ est une équation *générique*. Les travaux de Watanabe et d'autres auteurs montrent que toutes les équations de Painlevé génériques sont fortement minimales. Ces travaux ont laissé cependant en suspens la question de la structure fine de ces ensembles définissables. Nous avons désormais une réponse complète.

Théorème 6. *Soient $y_1, \ldots, y_n$ des solutions distinctes d'une même équation de Painlevé générique. Alors, $y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n'$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(t)$, i.e.,*

$$tr.deg(\mathbb{C}(t)(y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')/\mathbb{C}(t)) = 2n.$$

En particulier, les équations de Painlevé génériques sont toutes ω-catégoriques. K. Nishioka [18] a prouvé ce résultat pour P_I en utilisant de l'algèbre différentielle. Cependant, ses calculs et ses techniques ne semblent pas s'appliquer aux autres équations. L'auteur, dans [15] et dans un travail en collaboration avec Pillay dans [17], a prouvé le résultat pour toutes les autres équations en utilisant la théorie des modèles. Ces preuves s'appuient fortement sur un travail antérieur [16] dans lequel la trichotomie est utilisée pour montrer que les équations de Painlevé génériques sont toutes géométriquement triviales.

Cette approche modèle-théorique a également permis de montrer que les équations génériques de la plupart des familles d'équations de Painlevé distinctes sont orthogonales. Des travaux sont actuellement en cours pour obtenir une classification complète des relations algébriques entre les solutions des équations de Painlevé (voir [9] pour certain progrès). À ce jour, à l'exception de la deuxième équation de Painlevé (pour laquelle l'auteur a montré par exemple que l'ensemble définissable sous-jacent est géométriquement trivial si et seulement si $\alpha \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$), l'étude des équations de Painlevé non génériques est largement ouverte. La question suivante fournit un exemple de questions élémentaires auxquelles on aimerait pouvoir répondre.

Question 2. *Pour quelles valeurs des paramètres* *d'une équation de Painlevé donnée, est-il vrai que si $y_1,\ldots,y_n$ sont des solutions distinctes, non algébriques sur $\mathbb{C}(t)$, alors*

$$tr.deg(\mathbb{C}(t)(y_1,y_1',\ldots,y_n,y_n')/\mathbb{C}(t)) = 2n\,?$$

Fonctions automorphes fuchsiennes

Nous considérons maintenant les généralisations les plus naturelles des fonctions trigonométriques et elliptiques (c'est-à-dire les fonctions périodiques).

Supposons que $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$ soit un groupe fuchsien, c'est-à-dire, un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$. Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré. On rappelle que $PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$ par homographies : pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ et $\tau \in \mathbb{H}$, on note

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}.$$

Un point $\tau \in \mathbb{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ est appelé une *pointe*, en anglais *cusp*, si son stabilisateur $\Gamma_\tau = \{g \in \Gamma \;:\; g\cdot\tau = \tau\}$ est d'ordre infini. Nous considérons ici des groupes fuchsiens Γ de première espèce (*i.e.*, tels que tout point de $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ soit dans l'adhérence de Γ-orbites de $\mathbb{H}$) et de genre zéro (*i.e.*, l'ensemble des γ-orbites $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ peut être compactifié en une surface de Riemann compacte de genre zéro). Une *fonction automorphe f* pour Γ est une fonction sur $\mathbb{H}$, satisfaisant

$$f(g\cdot\tau) = f(\tau) \quad \text{pour tout } \; g \in \Gamma \text{ et } \tau \in \mathbb{H},$$

et telle que f est méromorphe en toute pointe de Γ. La collection $\mathscr{A}_0(\Gamma)$ de toutes les fonctions automorphes pour Γ est un corps qui est engendré (sur $\mathbb{C}$) par une fonction automorphe appelée *hauptmodul* ou *fonction modulaire principale* pour Γ. On fixe désormais un tel hauptmodul qu'on note $j_\Gamma(t)$. Il convient de mentionner que ces fonctions ont été introduites (et étudiées) par H. Poincaré [23] au cours de ses travaux posant les fondations de la géométrie hyperbolique.

C'est un résultat classique que la fonction modulaire principale $j_\Gamma(t)$ satisfait à une équation différentielle ordinaire du troisième ordre de type Schwarzien

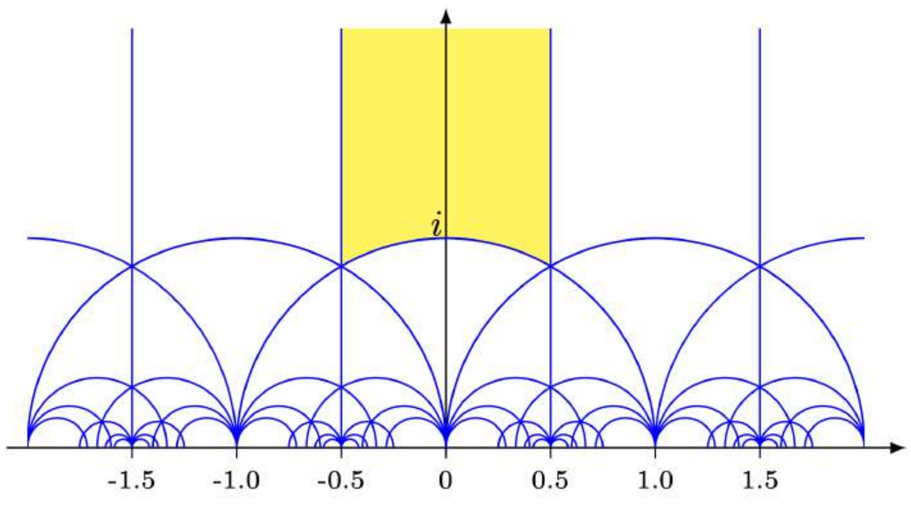
$$S_t(y) + (y')^2 R_{j_\Gamma}(y) = 0. \qquad (\star)$$

Ici $S_t(y) = \left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ représente la dérivée schwarzienne ($' = \frac{d}{dt}$) et

$$R_{j_\Gamma}(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1-\alpha_i^{-2}}{(y-a_i)^2} + \sum_{i=1}^{r}\frac{\beta_i}{y-a_i}$$

avec $a_1,\ldots,a_n$ et $\beta_1,\ldots,\beta_n$ des nombres réels dépendants de Γ et j_Γ. Toute solution dans $\mathscr{U}$ de l'équation schwarzienne $(\star)$ peut être considérée via le théorème de plongement de Seidenberg comme une fonction méromorphe un ouvert de $\mathbb{C}$ et est donc de la forme $j_\Gamma(g\cdot t)$ pour un certain $g \in GL_2(\mathbb{C})$. On notera X_Γ l'ensemble des solutions dans $\mathscr{U}$ de l'équation schwarzienne $(\star)$. Notons que c'est un ensemble définissable sur $\mathbb{C}$.

Figure 4 – Le domaine fondamental d'un groupe fuchsien de première espèce – ici $PSL_2(\mathbb{Z})$ – est un polygone hyperbolique avec un nombre fini de côtés et une aire finie.



Exemple 7. Si $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$, alors le j-invariant

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots,$$

où $q = e^{2\pi i\tau}$, est une fonction modulaire principale. L'équation différentielle schwarzienne associée est donnée par

$$R_j(y) = \frac{y^2 - 1968y + 2654208}{y^2(y-1728)^2}.$$

De façon surprenante, P. Painlevé a affirmé en 1895 que l'ensemble X_Γ défini par l'équation ($\star$) était fortement minimal. K. Nishioka a prouvé que le hauptmodul j_Γ ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique d'ordre inférieur ou égal à deux sur $\mathbb{C}(t, e^{\lambda t})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Il a également obtenu une forme très faible de l'affirmation de Painlevé dans le cas où Γ est un groupe triangulaire hyperbolique, c'est-à-dire un groupe engendré par les symétries par rapport aux côtés d'un triangle hyperbolique. Dans le cadre de leurs travaux [8] sur les propriétés modèle-théoriques du j-invariant, J. Freitag et T. Scanlon, tout en ignorant à cette époque l'affirmation de Painlevé, en donnent une preuve complète pour le groupe fuchsien $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Théorème 7. *Soit $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$. L'ensemble définissable par l'équation différentielle schwarzienne ($\star$) est fortement minimal, géométriquement trivial mais pas ω-catégorique.*

Leur démonstration repose sur un résultat de transcendance très profond de J. Pila [20] appelé le théorème d' Ax-Lindemann-Weierstrass modulaire avec dérivées (voir ci-dessous).

Remarque 2. Sachant que l'ensemble définissable associé au j-invariant est fortement minimal, il n'est guère surprenant que ce dernier ne soit pas ω-catégorique. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes modulaires $\Phi_n(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ fournissent des relations d'interalgébricité entre un nombre infini de solutions de l'équation différentielle schwarzienne. Plus précisément, si g_1 et g_2 sont dans la même classe suivant $GL_2(\mathbb{Q})$, alors $\Phi_n(j(g_1 \cdot t), j(g_2 \cdot t)) = 0$ pour un certain entier n.

Pendant un certain temps, le résultat de Freitag et Scanlon qui fournit un contre-exemple à l'ω-catégoricité des ensembles fortement minimaux, a paru être une anomalie et semblait donc fermer la porte à une classification possible des ensembles fortement minimaux géométriquement triviaux. Cependant, l'étude de l'équation différentielle schwarzienne ($\star$) pour des groupes fuchsiens de première espèce et de genre zéro arbitraires nous a permis de relativiser les résultats obtenus pour $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$. Une question naturelle et essentielle est la suivante : existe-t-il un moyen d'expliquer l'existence des polynômes modulaires ? La réponse est encore une fois très classique et s'interprète via la notion de commensurabilité.

Rappelons que deux sous-groupes G et H de $PSL_2(\mathbb{R})$ sont commensurables, noté $G \sim H$, si leur intersection $G \cap H$ est d'indice fini à la fois dans G et dans H. Pour un groupe fuchsien Γ, notons $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ le commensurateur de Γ, à savoir

$$\mathrm{Comm}(\Gamma) = \{g \in PSL_2(\mathbb{R}) \,:\, g\Gamma g^{-1} \sim \Gamma\}.$$

Si $g \in \mathrm{Comm}(\Gamma) \setminus \Gamma$, alors l'intersection $\Gamma_g = g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma$ est un groupe fuchsien de première espèce, avec le même ensemble de pointes que Γ. Comme les fonctions $j_\Gamma(t)$ et $j_\Gamma(g^{-1}t)$ sont des fonctions modulaires principales respectivement pour Γ et $g\Gamma g^{-1}$, il s'ensuit que ce sont aussi des fonctions automorphes pour Γ_g. Les travaux de H. Poincaré montrent que deux fonctions automorphes pour un même groupe fuchsien sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}$. Il existe donc un polynôme $\Phi_g \in \mathbb{C}[X,Y]$ non nul, tel que $\Phi_g(j_\Gamma(t), j_\Gamma(g \cdot t)) = 0$. Un tel polynôme est appelé un *polynôme Γ-spécial*.

Ainsi, si Γ est d'indice infini dans $\mathrm{Comm}(\Gamma)$, alors il existe une infinité de polynômes Γ-spéciaux. Comme corollaire, on trouve que l'ensemble des g dans $GL_2(\mathbb{C})$ tels que $j_\Gamma(gt)$ soit algébrique sur $\mathbb{C}(j_\Gamma(t))$ est infini. En particulier, si l'on peut prouver la forte minimalité de l'ensemble défini par l'équation schwarzienne pour un tel groupe, la non-ω-catégoricité de l'ensemble en découlerait immédiatement. Il s'avère que les groupes Γ ayant cette propriété d'« indice infini » sont bien connus en théorie des groupes.

Soit F un corps de nombres totalement réel, i.e., dont l'image sous tout plongement dans $\mathbb{C}$ est contenu dans $\mathbb{R}$. Soit A une algèbre de quaternions, i.e., une algèbre centrale simple de dimension 4 sur F satisfaisant à la condition suivante : si $\phi_1, \dots, \phi_n$ sont les n plongements de F dans $\mathbb{C}$ alors il existe des $\mathbb{R}$-isomorphismes ρ_i,

$$\rho_1 : A \otimes_{F^{\phi_1}} \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R}), \rho_i : A \otimes_{F^{\phi_i}} \mathbb{R} \to H,$$

où H désigne l'algèbre des quaternions de Hamilton et la notation F^{ϕ_i} souligne que dans le produit tensoriel considéré, $\mathbb{R}$ est muni de la structure de F-algèbre obtenue via le plongement ϕ_i. En notant $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, on considère un ordre $\mathcal{O}$ de A, c'est-à-dire un sous-anneau de A qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $4n$. On note

$\mathcal{O}^1$ le sous-groupe de $\mathcal{O}$ formé par les éléments x tels que $\det(\rho_1(x))$ vaut 1. Son image $\rho(\mathcal{O}^1)$ sous ρ est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\Gamma(A,\mathcal{O}) = \rho(\mathcal{O}^1)/\{+I_2,-I_2\}$ est un sous-groupe fuchsien $PSL_2(\mathbb{R})$.

Définition 7. Un groupe fuchsien Γ est dit *arithmétique* s'il est commensurable avec un groupe de la forme $\Gamma(A,\mathcal{O})$.

Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$ et ses sous-groupes d'indice fini sont les exemples les plus connus de groupes arithmétiques. Le théorème suivant est un résultat profond sur les groupes arithmétiques dû à Margulis.

Théorème 8. *Le groupe Γ est arithmétique si et seulement si il est d'indice infini dans $\mathrm{Comm}(\Gamma)$. Il existe donc une infinité de polynômes Γ-spéciaux.*

Le travail de l'auteur en collaboration avec G. Casale et J. Freitag [4], donne une preuve complète de l'affirmation de Painlevé et révèle un lien profond entre la notion de catégoricité et le caractère arithmétique des groupes fuchsiens.

Théorème 9. *Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce et de genre zéro et soit X_Γ l'ensemble défini par l'équation scwharzienne ($\star$). Alors*

1. *X_Γ est fortement minimal et (ainsi) géométriquement trivial ;*
2. *X_Γ est ω-catégorique si et seulement si Γ n'est pas un groupe arithmétique.*

Les techniques utilisées dans la preuve du théorème 9 reposent sur la théorie de Galois différentielle, la monodromie des équations différentielles linéaires, l'étude des solutions algébriques et liouvilliennes, les travaux d'algèbre différentielle de Nishioka sur l'irréductibilité au sens de Painlevé de certaines équations schwarziennes, ainsi que sur une machinerie considérable issue de la théorie des modèles des corps différentiellement clos. La question suivante peut être considérée comme le prochain défi majeur dans la classification des ensembles fortement minimaux, géométriquement triviaux dans les corps différentiellement clos.

Question 3. *Est-ce que tout ensemble définissable dans DCF_0, fortement minimal et non ω-catégorique est relié dans un sens à définir à un groupe arithmétique fuchsien ?*

Enfin, mentionnons que cette classification modèle-théorique complète des ensembles définissables associés à l'équation schwarzienne ($\star$) a été utilisée dans [4] pour donner une preuve du théorème d'Ax-Lindemann-Weierstrass avec dérivées pour Γ : soit $V \subset \mathbb{A}^n$ une variété algébrique irréductible définie sur $\mathbb{C}$ telle que $V(\mathbb{C}) \cap \mathbb{H}^n \neq \emptyset$ et que V se projette de manière dominante sur chacune de ses coordonnées (chaque fonction coordonnée est non constante). Soient $t_1,\dots,t_n$ les fonctions sur V induites par les fonctions coordonnées canoniques sur $\mathbb{A}^n$. On dit que $t_1,\dots,t_n$ sont Γ-*géodésiquement indépendantes* s'il n'y a aucune relation de la forme $t_i = g \cdot t_j$ avec $i \neq j$ et $g \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$.

Théorème 10. *Dans les notations ci-dessus (et sous l'hypothèse $V(\mathbb{C}) \cap \mathbb{H}^n \neq \emptyset$), si $t_1,\dots,t_n$ sont Γ-géodesiquement indépendantes alors les $3n$ fonctions*

$$j_\Gamma(t_1), j'_\Gamma(t_1), j''_\Gamma(t_1)\dots, j_\Gamma(t_n), j'_\Gamma(t_n), j''_\Gamma(t_n)$$

(définies localement) sur $V(\mathbb{C})$ sont algébriquement indépendantes sur le corps $\mathbb{C}(V)$ des fonctions rationnelles sur V.

Comme mentionné précédemment, J. Pila [20] avait déjà prouvé ce résultat pour $PSL_2(\mathbb{Z})$. J. Freitag et T. Scanlon [8] ont généralisé le résultat de Pila pour les sous-groupes arithmétiques de $PSL_2(\mathbb{Z})$. Le théorème d'Ax-Lindemann-Weierstrass (la plupart du temps sans dérivées) a également été prouvé par divers auteurs dans le contexte plus général des variétés de Shimura. Le travail de [4] diffère de tous les précédents en ce qu'il ne repose pas sur des techniques d'*o-minimalité* et qu'il aborde les groupes non arithmétiques ainsi que les relations algébriques entre les fonctions et leurs dérivées.

Par delà DCF_0

Nous terminons par quelques mots sur les équations aux dérivées partielles et les équations aux différences. Nous désignons par $DCF_{0,m}$ la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique nulle avec m dérivations commutatives (contexte des équations aux dérivées partielles) et par $ACFA$ la théorie des corps algébriquement clos munis d'un automorphisme générique (contexte des équations discrètes ou aux différences). La théorie $DCF_{0,m}$ est également ω-stable et élimine les quantificateurs. Cependant, l'étude des ensembles fortement minimaux dans $DCF_{0,m}$ n'est pas suffisante pour décrire la complexité de tous les ensembles définissables. En effet, il existe ce que l'on appelle des types réguliers de rang infini qui interviennent dans la classification des ensembles définissables de $DCF_{0,m}$. Un type régulier de rang infini existe pour DCF_0. Mais il est unique et c'est dans la partie de rang fini de DCF_0 que réside la majeure partie de la complexité modèle-théorique. Le théorème de trichotomie n'a donc pas encore été complètement établi dans $DCF_{0,m}$ pour $m > 1$. D'autre part, $ACFA$ n'est pas ω-stable mais est plutôt une théorie dite *simple* (caractérisée par l'existence d'une bonne notion d'indépendance). De plus, bien que les ensembles définissables soient toujours donnés par des formules suffisamment simples, $ACFA$ n'a pas d'élimination complète des quantificateurs. Une version du théorème de trichotomie est cependant valable pour $ACFA$ (cf. [5]) et elle a été utilisée avec succès pour obtenir de nouveaux résultats en théorie des nombres et en dynamique algébrique.

Cependant, à l'exception de quelques exemples, les applications de la théorie des modèles à l'étude d'équations classiques aux dérivées partielles ou aux différences sont encore peu nombreuses. Il y a cependant de nombreux exemples dans $DCF_{0,m}$ et $ACFA$ analogues à ceux étudiés pour DCF_0. Dans $DCF_{0,m}$, s'attaquer aux équations schwarziennes généralisées pour les uniformisateurs des variétés de Shimura est d'un grand intérêt (voir [1] pour des progrès récents). Dans $ACFA$, prouver que les équations de q-Painlevé sont irréductibles (au sens de Painlevé) est un défi. Ces équations aux q-différences sont des analogues discrets des équations différentielles de Painlevé. En fait, dans de nombreuses situations en physique, les équations de Painlevé résultent d'un processus de confluence, i.e., d'un processus de passage à la limite quand q tend vers 1, des équations de q-Painlevé. Nous pensons que, comme pour DCF_0, l'étude de ces classes d'équations différentielles et aux différences permettra de poser et de résoudre des questions importantes sur la structure des ensembles définissables dans les théories respectives.

Références

[1] D. Blázquez-Sanz et al. « A differential approach to Ax-Schanuel, I, » *arXiv :2102.03384* (2023).

[2] L. C. Blum. *Generalized Algebraic Structures : A Model Theoretical Approach*. Thesis (Ph.D.)–Massachusetts Institute of Technology. 1969, (no paging).

[3] É. Bouscaren. « Introduction à la théorie des modèles ». *Gaz. Math.*, nº 149 (2016), p. 18-32. issn : 0224-8999,2275-0622.

[4] G. Casale, J. Freitag et J. Nagloo. « Ax-Lindemann-Weierstrass with derivatives and the genus 0 Fuchsian groups, » *Accepted in Annals of Mathematics; arXiv :1811.06583* (2018).

[5] Z. Chatzidakis, E. Hrushovski et Y. Peterzil. « Model theory of difference fields. II. Periodic ideals and the trichotomy in all characteristics ». *Proc. London Math. Soc. (3)* **85**, nº 2 (2002), p. 257-311. issn : 0024-6115,1460-244X. doi : 10.1112/S0024611502013576. url : https://doi.org/10.1112/S0024611502013576.

[6] P. J. Forrester et N. S. Witte. « Painlevé II in random matrix theory and related fields ». *Constr. Approx.* **41**, nº 3 (2015), p. 589-613. issn : 0176-4276. doi : 10.1007/s00365-014-9243-5.

[7] J. Freitag et R. Moosa. « Finiteness theorems on hypersurfaces in partial differential-algebraic geometry ». *Adv. Math.* **314** (2017), p. 726-755. issn : 0001-8708. doi : 10.1016/j.aim.2017.04.008.

[8] J. Freitag et T. Scanlon. « Strong minimality and the *j*-function ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **20**, nº 1 (2018), p. 119-136. issn : 1435-9855. doi : 10.4171/JEMS/761.

[9] J. Freitag et J. Nagloo. « Algebraic relations between solutions of Painlevé equations, » *arXiv :1710.03304* (2022).

[10] E. Hrushovski. « ODEs of order 1 and a generalization of a theorem of Jouanolou ». *Unpublished preprint* (1995).

[11] E. Hrushovski et Z. Sokolovic. « Strongly miniMR2031753al sets in differentially closed fields ». *Unpublished preprint* (1994).

[12] E. R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973, p. xviii+446.

[13] D. Marker. « Model Theory of Differential Fields ». In : *Model theory of fields*. Vol. 5. Lecture Notes in Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1996, p. x+154. isbn : 3-540-60741-2. doi : 10.1007/978-3-662-22174-7.

[14] D. Marker. *Model theory*. **217**. Graduate Texts in Mathematics. An introduction. Springer-Verlag, New York, 2002, p. viii+342. isbn : 0-387-98760-6.

[15] J. Nagloo. « Algebraic independence of generic Painlevé transcendents : PIII and PVI ». *Bull. Lond. Math. Soc.* **52**, nº 1 (2020), p. 100-108. doi : 10.1112/blms.12309.

[16] J. Nagloo et A. Pillay. « On algebraic relations between solutions of a generic Painlevé equation ». *J. Reine Angew. Math.* **726** (2017), p. 1-27. issn : 0075-4102. doi : 10.1515/crelle-2014-0082.

[17] J. Nagloo et A. Pillay. « On the algebraic independence of generic Painlevé transcendents ». *Compos. Math.* **150**, nº 4 (2014), p. 668-678. issn : 0010-437X. doi : 10.1112/S0010437X13007525.

[18] K. Nishioka. « Algebraic independence of Painlevé first transcendents ». *Funkcial. Ekvac.* **47**, nº 2 (2004), p. 351-360. ISSN : 0532-8721. DOI : 10.1619/fesi.47.351.

[19] K. Okamoto. « The Hamiltonians associated to the Painlevé equations ». In : *The Painlevé property*. CRM Ser. Math. Phys. Springer, New York, 1999, p. 735-787.

[20] J. Pila. « Modular Ax-Lindemann-Weierstrass with derivatives ». *Notre Dame J. Form. Log.* **54**, nº 3-4 (2013), p. 553-565. ISSN : 0029-4527. DOI : 10.1215/00294527-2143853.

[21] A. Pillay. « Differential fields ». In : *Lectures on algebraic model theory*. Vol. 15. Fields Inst. Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 1-45.

[22] A. Pillay et M. Ziegler. « Jet spaces of varieties over differential and difference fields ». *Selecta Math. (N.S.)* **9**, nº 4 (2003), p. 579-599. ISSN : 1022-1824. DOI : 10.1007/s00029-003-0339-1.

[23] H. Poincaré. « Théorie des groupes fuchsiens ». *Acta Math.* **1**, nº 1 (1882), p. 1-76. ISSN : 0001-5962,1871-2509. DOI : 10.1007/BF02391835. URL : https://doi.org/10.1007/BF02391835.

[24] A. Robinson. « On the concept of a differentially closed field ». *Bull. Res. Council Israel Sect. F* **8F** (1959), 113-128 (1959).

[25] A. Seidenberg. « Abstract differential algebra and the analytic case ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), p. 159-164. ISSN : 0002-9939,1088-6826. DOI : 10.2307/2033416. URL : https://doi.org/10.2307/2033416.

Joel Nagloo

Department of Mathematics, Statistics, and Computer Science, University of Illinois, Chicago.
jnagloo@uic.edu

Joel Nagloo est un mathématicien mauricien, spécialiste en théorie des modèles, algèbre différentielle et théorie des nombres. Il est professeur de mathématiques à l'University of Illinois à Chicago et a reçu en 2023 l'AMS Centennial Research Fellowship Award. Il collabore actuellement avec des mathématiciens français, colombien et américains autour des conjectures de type Ax-Schanuel.

Cet texte est la traduction d'un article paru dans les *Notices de l'AMS* : « Model theory and differential equations » ; Notices of the American Mathematical Society (2021), Vol. 68, nº 2 177-185.

L'auteur remercie les référés anonymes pour leurs précieux commentaires et suggestions. Il remercie également C. Hardouin pour son travail de traduction de cet article.

Les mathématiques vues par un artiste : des objets mathématiques qui inspirent

- S. Vinatier
- R. Alcorn

Cet article présente une série de tableaux réalisés par le peintre Reg Alcorn[1] depuis 2017, intitulée *Transitions* et riche de près de 200 œuvres, ainsi que les deux objets mathématiques qu'il utilise pour déterminer la structure des toiles de cette série, l'un ancien et l'autre plus récent, le carreau de Truchet et la spirale d'Ulam.

Let All Blues Rejoice, acrylique sur toile, 120 × 120 cm

© Reg Alcorn (2019)

Le titre de notre article fait écho à celui publié précédemment par les mêmes auteurs dans le même journal [19], dans lequel nous présentions une action de l'IREM de Limoges et de l'artiste Reg Alcorn, en collaboration avec le CCSTI[2] du Limousin *Récréasciences*, de diffusion de la culture mathématique à travers des supports artistiques : plusieurs périodes de l'histoire de l'art permettaient d'éclairer et de mettre en avant des notions mathématiques (l'Antiquité et la proportion, le Moyen Âge arabo-andalou et les pavages, la Renaissance et la perspective). L'art de Reg Alcorn était alors « au service » des thématiques développées par cette action, avec la production de tableaux supports pour les explications des notions artistiques et mathématiques visées. Dans la série *Transitions*, l'artiste renverse la perspective : il met au service de sa recherche artistique personnelle des objets tirés de son étude des mathématiques et de leur histoire, pour produire des œuvres originales sans autre visée qu'artistique[3].

On peut penser qu'il s'agit là d'un effet du travail mené précédemment en commun par l'artiste Reg Alcorn et l'IREM de Limoges, qui a fortement enrichi les personnes impliquées sur le plan de leurs connaissances dans les domaines mathématique (ou scientifique) et artistique, respectivement. L'artiste s'est plongé dans de nombreux ouvrages mathématiques (destinés au grand public, aux étudiants, voire aux chercheurs), ce qui a suscité chez lui une véritable fascination pour certains des objets ou concepts rencontrés. Au point qu'après une phase de maturation, deux d'entre eux, provenant d'époques et de contextes très différents, se sont retrouvés mêlés dans la série de tableaux *Transitions*.

Nous les décrivons tour à tour dans les deux parties suivantes, en saisissant l'occasion de développer certains aspects mathématiques ou historiques bien au-delà de ce qui est nécessaire pour comprendre comment l'artiste les utilise, avec l'es-

1. `https://www.reg-alcorn.fr/`
2. Centre de culture scientifique technique et industrielle.
3. C'est à ce titre que Reg Alcorn figure comme auteur de cet article, presque entièrement rédigé par le premier auteur et reposant essentiellement sur le travail de recherche artistique du second.

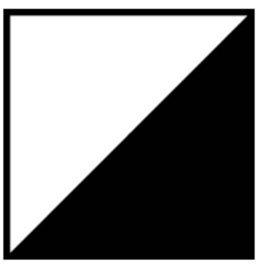
poir que ces digressions intéressent le lectorat de la *Gazette*. Sans prétendre faire œuvre d'historien et en restant à la surface des théories mathématiques, il nous a semblé agréable de présenter ces objets à travers les circonstances de leur découverte, surprenantes dans les deux cas, de montrer comment ils ont été appréhendés et comment ils se rattachent à des questions mathématiques de premier plan au début du XVIIIe siècle ou aujourd'hui. Enfin, pour celles et ceux qui préfèrent se concentrer sur les liens entre art et mathématiques, les définitions des objets aux débuts des parties 1 et 2 devraient suffire pour apprécier la recette de Reg Alcorn pour les toiles de sa série *Transitions*, que nous donnons dans la troisième et dernière partie.

Nous sommes redevables aux deux rapporteurs anonymes de l'article pour leur lecture attentive et pour de nombreux conseils avisés.

1. Carreaux de Truchet

Le premier ingrédient mathématique de la série *Transitions*, le carreau de Truchet, est lui-même au carrefour des sciences et des arts, comme nous allons le voir. Il remonte à un jalon important du développement de la combinatoire, quand le Père Sébastien Truchet (1657-1729), mathématicien, typographe, « horloger, grand spécialiste des canaux, inventeur d'innombrables machines (canons, machines à transplanter les arbres, cadrans solaires, etc.) dont les fameux tableaux mécaniques de Marly » [1], s'intéresse aux différentes positions respectives de deux *carreaux mi-partis de deux couleurs*. Étant donnés deux carrés identiques, partagés en deux selon la diagonale, avec une moitié blanche et l'autre noire (voir figure 1), de combien de façons peut-on les disposer l'un par rapport à l'autre ?

Figure 1 – Carreau de Truchet



Cette question est traitée par Truchet de façon systématique dans un mémoire de 1704 de l'Académie royale des sciences [18].

Combinatoire et pavages. Avant de présenter sa réponse, notons que l'objectif de Truchet est d'étudier les pavages décoratifs qu'on peut réaliser à partir de ce carreau (il en propose une sélection dans son mémoire). C'est d'ailleurs la motivation qu'il donne lui-même à son étude, en guise d'introduction à son *Mémoire* [18, p. 363] :

> *Dans le dernier voyage que j'ai fait au Canal d'Orléans par ordre de fon Alteffe Royale, je trouvai dans un Château nommé La Motte S. Lyé à 4 lieues en-deça d'Orléans, plufieurs Carreaux de fayence quarrés & mipartis de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étaient deftinés à carreler une Chapelle & plufieurs autres appartemens. Pour pouvoir former des deffeins & figures agréables par l'arrangement de ces carreaux, j'examinai d'abord en combien de manieres deux de ces Carreaux pourroient fe joindre enfemble, en les difpofant toujours en échiquier.*

Ce travail, dans lequel le hasard et la curiosité semblent avoir joué un rôle important, permet de lui attribuer une place de précurseur dans l'histoire de l'étude des pavages, qui fut peu pratiquée par les scientifiques avant le XIXe siècle et les travaux autour de la cristallographie (il eut tout de même Kepler [4] comme très illustre prédécesseur dans ce domaine [10]). Il repose de plus sur une étude combinatoire, discipline pour laquelle son apport est décrit dans [16, p. 377] dans ces termes :

> *Le traité de Truchet est d'une importance considérable car il s'agit essentiellement d'un traitement graphique de la combinatoire, un sujet qui, sous l'influence de Pascal, Fermat et Leibniz, était à l'avant-garde des mathématiques de l'époque.* [5]

L'originalité en son temps de sa démarche mêlant combinatoire et pavages est également soulignée par André et Girou [3, p. 11].

4. Johannes Kepler, astronome allemand, 1571-1630.
5. *« Truchet's treatise is of considerable importance for it is in essence a graphical treatment of combinatorics, a subject that, under the influence of Pascal, Fermat and Leibniz, was at the forefront of mathematics at the time. »*

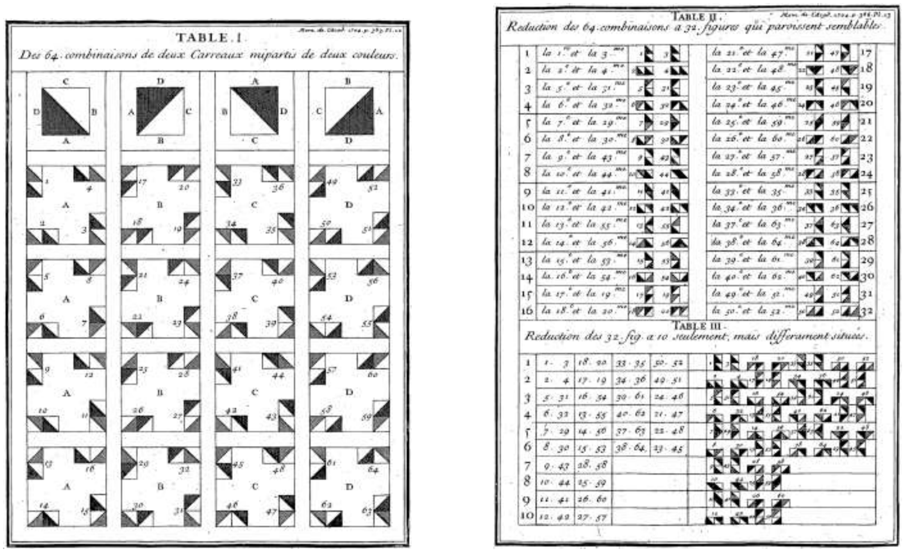
Le mémoire de Truchet. Il présente d'abord les 64 combinaisons obtenues en considérant que les deux carreaux sont différents : le premier a 4 orientations possibles, de même pour le second qui peut de plus être placé contre n'importe lequel des 4 côtés du premier. Ce nombre de combinaisons se réduit immédiatement à 32 si l'on ne différencie plus les deux carreaux, puis à 10 si, de plus, on raisonne à rotation près des paires construites [6]. Ces combinaisons et réductions sont illustrées par deux planches de [18] reproduites dans la figure 2.

L'article [15], en plus d'étudier la patrimonialisation sous diverses formes (mathématique, ludique, pédagogique) du carreau de Truchet, note fort justement que 10 égale le nombre de combinaisons avec répétition possible de 2 objets parmi 4. Cette égalité ne nous semble pas immédiatement signifiante : s'il faut bien choisir deux carrés parmi les quatre, avec répétition possible, pour former les motifs considérés par Truchet, et si à rotation près on peut les disposer en ligne, l'ordre dans lequel on les dispose a une importance (ab ne donne pas le même résultat que ba, à rotation près) et certains motifs ainsi formés sont identiques après rotation, comme ab et dc. Cependant ces deux effets se compensent : les involutions définies sur $\{a, b, c, d\}^2$ par $(x, y) \mapsto (y, x)$ et $(x, y) \mapsto (r(y), r(x))$, où r est le « demi-tour » qui échange a avec c et b avec d, ont toutes les deux 4 points fixes et 6 paires de couples en relation, donc ont le même nombre d'orbites ; or celles de la première involution correspondent aux combinaisons avec répétition possible et celles de la seconde aux motifs de deux carreaux à rotation près.

Le « traitement graphique » du problème combinatoire, évoqué par [16], réside aussi dans l'organisation spatiale des configurations possibles, qui rend compte de l'étude systématique menée par Truchet : dans chaque colonne de sa table I (voir la figure 2), le « premier » carreau est dans l'orientation dessinée en première ligne, tandis que celle du « deuxième » varie en fonction de la ligne ; enfin les 4 positions relatives apparaissent aux quatre coins de chaque case. La disposition des configurations montre l'exhaustivité de la recherche initiale, il n'y a plus alors qu'à identifier celles qui sont semblables selon les critères retenus (tables II et III de la figure 2).

L'auteur indique ensuite qu'il a commencé un travail sur les combinaisons de 3, 4 et 5 carreaux mi-partis, mais qu'il n'en est pas satisfait et que celui-ci sera publié plus tard (ce qui ne sera pas le cas). Bien sûr, la complexité augmente très rapidement avec le nombre de carreaux, comme on pourra le vérifier dans les tableaux de Reg Alcorn, ne serait-ce que parce que les dispositions spatiales des 3, 4 ou 5 carreaux sont multiples : en ligne, en « L », en carré, en « T », en croix…

Figure 2 – Tables des combinaisons obtenues par Truchet [18]

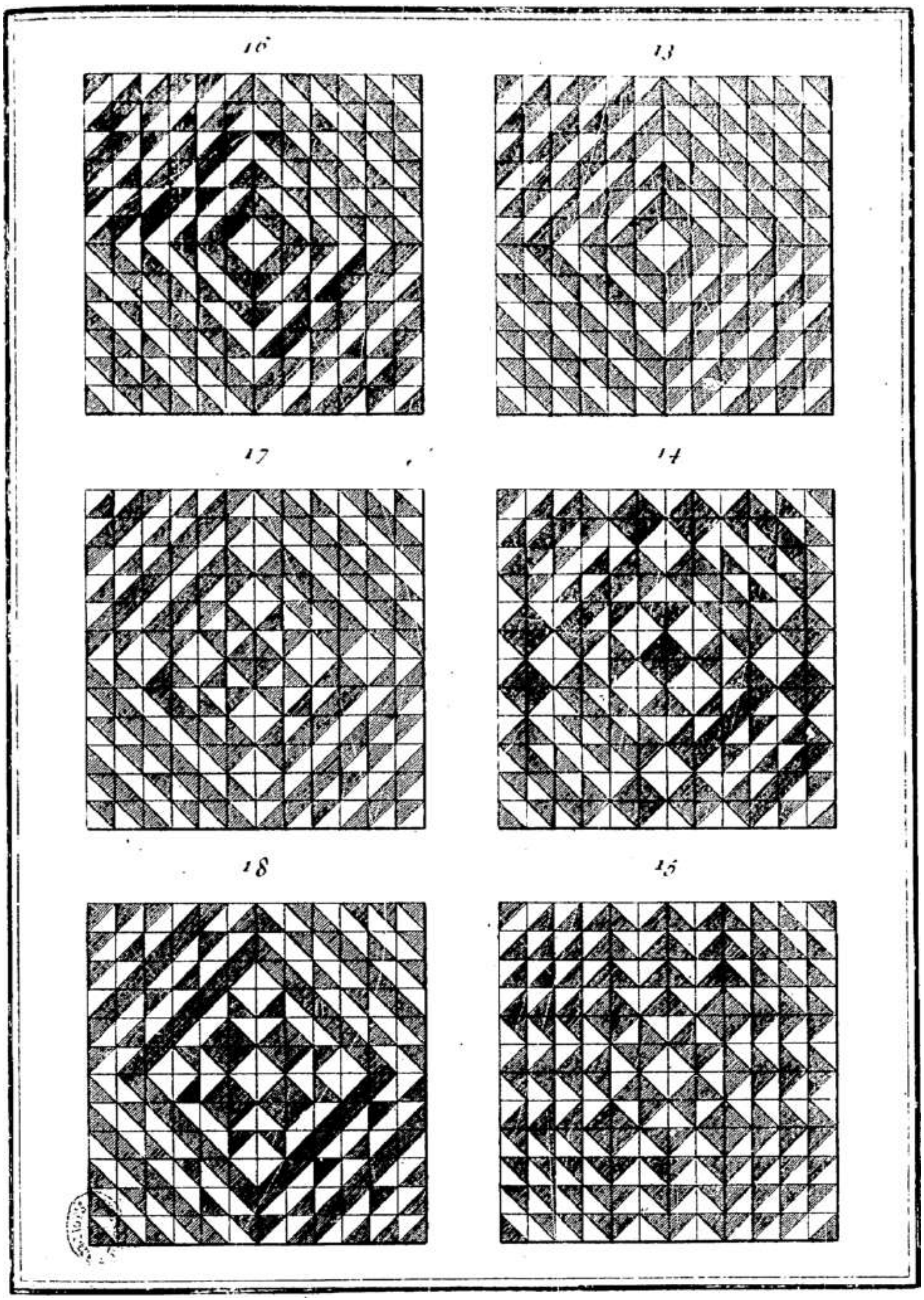


6. Voir la note 5. de [16, p. 384] pour une discussion sur ces réductions.

Enfin, Truchet présente 7 planches de dessins de pavages obtenus en combinant certaines des 64 combinaisons de carreaux qu'il a répertoriées : elles comportent 24 pavages de taille 12×12 carreaux et 6 de taille 24×18, choisis parmi 100 pavages mis au net, eux-mêmes sélectionnés parmi des dessins en « trop grande quantité pour les rapporter tous » [18, p. 364].

Un autre révérend du même ordre religieux que le Père Truchet, Dominique Doüat, a repris ce travail et publié en 1722 une *Méthode pour faire une infinité de dessins* [8] contenant 72 pavages produits avec les carreaux mi-partis de Truchet. Nous reproduisons une de ses planches en figure 3.

Figure 3 – Une planche de pavages du Père Doüat [8]



Sources. Pour tout ce qui touche à Truchet, le site de Jacques André[7] est une mine de documents et de références très précieuse, qui s'ajoute à ses propres publications sur le sujet [1, 3]. Il mentionne notamment la possibilité de consulter le mémoire de Truchet [18] sur la base documentaire Gallica de la Bibliothèque nationale de France (avec les planches de gravures en amont du mémoire), ainsi qu'en traduction anglaise dans [16]. L'ouvrage de Douät [8] (qu'André met à disposition, précédé d'une riche introduction) ainsi que l'article *Carreau (Architecture)* [7] de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, dont on va parler ci-dessous, sont également accessibles sur Gallica en fac-similé. Pour tous ces documents, les liens vers Gallica sont indiqués dans la bibliographie. André pointe aussi la version transcrite de l'*Encyclopédie* sur le site du projet ARTFL[8], voir également l'*Édition Numérique Collaborative et CRitique de l'Encyclopédie* qui mêle transcription et fac-similé de la première édition[9].

On trouvera également sur le site de Jacques André un document [2] rassemblant des planches d'illustrations de pavages de Truchet issues de plusieurs sources : de Truchet lui-même, dans son mémoire [18] et dans la *Description des arts et métiers*, encyclopédie dont le projet fut lancé par Colbert, dirigée notamment par Réaumur, à laquelle il participa[10] ; de Doüat [8] ; de l'*Encyclopédie* [7], dont il reproduit la *Table des 64 combinaisons*[11] (tout en signalant une erreur) ; d'un ouvrage postérieur d'un architecte (Lemaire, 1862), dont il reproduit deux planches de même inspiration.

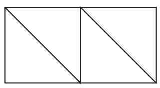
Dans l'*Encyclopédie*. Diderot reprend fidèlement le contenu du mémoire de Truchet dans l'article « Carreau » de l'*Encyclopédie* [7] : il présente les 64 combinaisons obtenues en différenciant les deux carreaux considérés, ainsi que les réductions à 32 et à 10 combinaisons que nous avons décrites. Il continue en ajoutant une dernière (double) réduction, consistant à identifier les combinaisons identiques par inversion des couleurs ou par retournement (cette dernière identification est décrite comme suit : « si on les suppose tracées sur un papier transparent, on verra les unes en les regardant à travers le papier, comme on voit les autres sur le papier même » [7, p. 700]). Il ne reste alors que 4 classes de combinaisons. Il conclut la réduction ainsi :

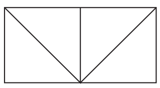
> *Peut-être qu'en cherchant quelque maniere de disposer les combinaisons de ces carreaux sur le papier, on eût rencontré quelque loi qui auroit dispensé de l'énumeration précédente : mais c'est ce que personne n'a encore tenté, non plus que la combinaison de plusieurs carreaux, & moins encore la combinaison de carreaux partis de plusieurs couleurs.*

Il est intéressant de noter que Diderot termine cette étude en soulignant quelques brèches dans les connaissances de l'époque sur ce thème, qu'on peut interpréter comme des questions ouvertes à la communauté scientifique ; et tout aussi intéressant de savoir que l'artiste Reg Alcorn s'engouffrera allègrement dans une variante de cette dernière brèche, en déclinant à plaisir les couleurs des moitiés des carrés qu'il disposera sur sa toile, profitant pleinement de sa liberté artistique et trouvant là un terrain où exprimer son talent. Pour décrire la manière dont il les dispose, nous introduirons un peu plus bas, dans la partie 2, un deuxième objet mathématique plus récent et plus complexe.

Une autre énumération des combinaisons. Avant cela, tentons une réponse à la première question de Diderot : montrons comment arriver plus rapidement aux 4 combinaisons terminales que par les réductions successives de Truchet et de Diderot. Nous partons de 2 carrés vides, il n'y a, à rotation près, qu'1 manière de les assembler côte à côte :

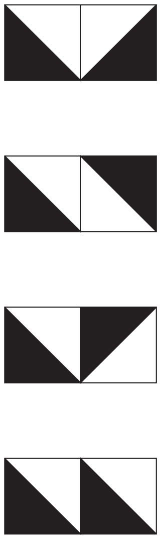
Nous ajoutons maintenant une diagonale à chacun : il y a, a priori, 2 choix possibles de la diagonale dans chacun des 2 carrés, donc 4 possibilités ; mais elles sont 2 par 2 identiques par retournement, ce qui nous laisse les deux configurations :





7. http://jacques-andre.fr/faqtypo/truchet/
8. L'adresse actuelle de l'article *Carreau* est https://artflsrv04.uchicago.edu/philologic4.7/encyclopedie0922/navigate/2/0/0/0/0/0/0/0/704?byte=9012576
9. http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/
10. Les planches datent de 1705, mais cette encyclopédie n'a commencée à être publiée par fascicules qu'à partir de 1761.
11. Consultable également ici : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k316518d/f488.item.r=encyclop%C3%A9die%20architecture

Il nous faut maintenant colorier une moitié sur 2 dans chaque carré. À nouveau, dans chacune des deux configurations, il y a 2 choix de la moitié à colorier dans chacun des 2 carrés, soit a priori 4 possibilités pour chaque configuration, ce qui ferait 8 possibilités au total. Mais chacune d'entre elles est accompagnée de celle où les couleurs sont inversées, donc si l'on identifie les combinaisons identiques par inversion des couleurs, cela divise le nombre de possibilités par 2 et on obtient les 4 combinaisons suivantes :



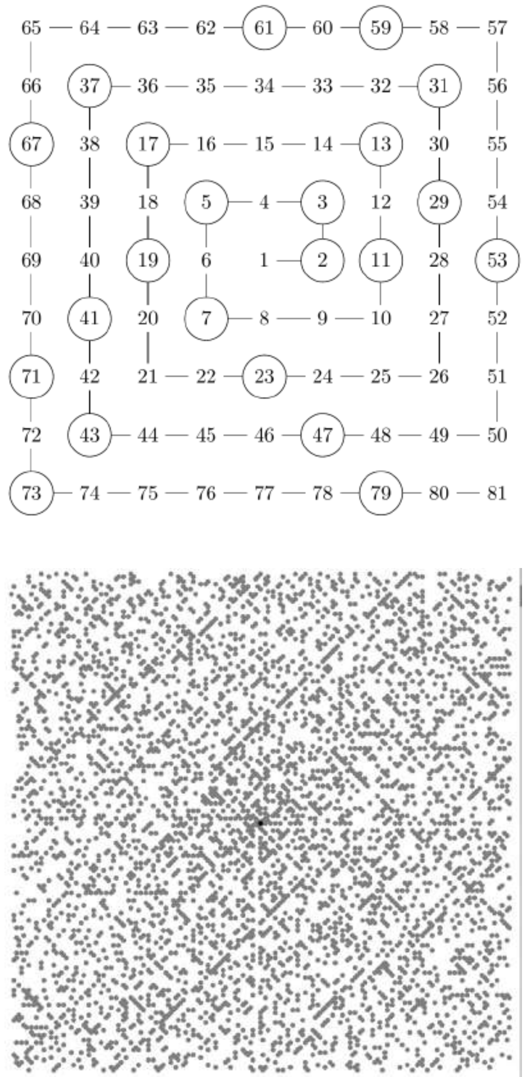
Le résultat indique une autre piste de démonstration, encore plus directe : à rotation près, on peut disposer les deux carreaux en ligne et, à retournement et inversion des couleurs près, on peut se ramener à avoir le motif  en premier ; il reste alors à choisir le deuxième motif parmi les 4 possibles.

2. La spirale d'Ulam

Nous en venons à notre deuxième ingrédient mathématique.

L'ennui créateur. D'après Martin Gardner [12] qui raconte l'histoire dans un article de la revue grand public *Scientific American* [11], le mathématicien Stanislaw Ulam, qui s'ennuyait en assistant à une conférence à l'automne 1963, commença à dessiner une grille sur une feuille pour figurer un échiquier ; changeant d'avis, il se mit à numéroter les intersections en partant du centre de la grille et en tournant autour de lui en spirale, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; puis commença à encercler les nombres premiers et à voir se former, à sa grande surprise, des lignes dans les directions diagonales (figure 4).

Figure 4 – Spirales d'Ulam 9×9 (les nombres premiers sont entourés) et 200×200 (les nombres premiers sont représentés par un point gris, 1 au centre par un point noir.)



Comme le remarque Gardner, ce fait n'est pas très significatif pour une petite spirale, dans la mesure où les entiers appartenant à une ligne de direction diagonale sont tous de même parité, où tous les premiers (sauf un [13]) sont impairs et où la densité

12. Écrivain américain (1914-2010), grand vulgarisateur des mathématiques.
13. ou plutôt sauf 2 !

des premiers est forte parmi les plus petits entiers. Ainsi dans la spirale 9×9 représentée en figure 4, les 21 premiers impairs sont répartis parmi seulement 41 positions possibles, formant des lignes parallèles aux diagonales…

Consolidation. Cependant, Ulam put vérifier avec deux collaborateurs, Stein et Wells [17], que le phénomène observé n'était pas cantonné aux petits entiers, mais semblait bien être une propriété générale des nombres premiers. Pour cela, ils utilisèrent l'ordinateur MANIAC II de leur institution de recherche, le laboratoire *Los Alamos* de l'université de Californie, ainsi que des bandes magnétiques contenant des tables de nombres premiers, pour obtenir les spirales portant sur de bien plus grands nombres d'entiers (des photos des spirales obtenues avec 10 000 et 65 000 entiers sont reproduites dans [11], elles ressemblent à la spirale de la figure 4, à des échelles différentes).

Aussi frappantes que soient ces images d'alignements inattendus des nombres premiers, au point que la spirale d'Ulam fit la une du numéro de *Scientific American* dans lequel figure l'article de Gardner, Ulam et ses collaborateurs expliquent qu'elles proviennent des grands nombres de valeurs premières prises par certaines fonctions quadratiques des entiers, du type $n \mapsto an^2+bn+c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, comme la fameuse « formule d'Euler »

$$E(n) = n^2 + n + 41 \qquad (1)$$

dont toutes les valeurs pour n entre 0 et 39 sont des nombres premiers distincts (!) et qui prend environ 47,5% de valeurs premières parmi ses valeurs jusqu'à 10 000 000 [17, p. 520]. Ulam et ses collaborateurs ont identifié d'autres formes quadratiques avec des taux τ élevés de valeurs premières jusqu'à 10 000 000, notamment :

$$4n^2 + 170n + 1847 \quad (\tau \approx 46{,}6\%)\,,$$
$$4n^2 + 4n + 59 \quad (\tau \approx 43{,}7\%) \qquad (2)$$

Cependant le rapporteur de l'article leur a signalé que les valeurs aux entiers de la première sont incluses dans la suite des nombres produits par la formule d'Euler (sur des entiers pairs) :

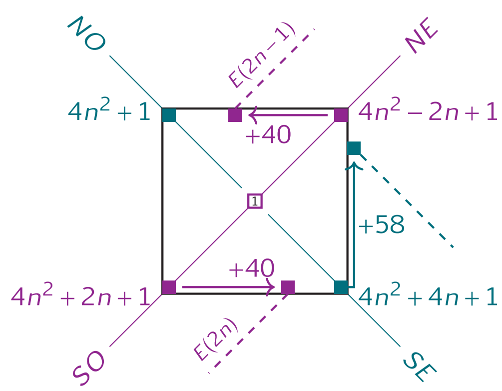
$$4n^2 + 170n + 1847 = E(2n + 42)$$

Le taux de 46,6% de valeurs premières parmi les valeurs jusqu'à 10^7 de $E(2n+42)$ est à peu de choses près le taux de valeurs premières parmi les valeurs jusqu'à 10^7 de E aux entiers pairs ; par comparaison avec le taux global, celui aux entiers impairs doit être de 48,4%. Nous ignorons si cette légère différence entre les taux aux entiers pairs et impairs se confirme asymptotiquement. Nous verrons plus bas que les connaissances concernant le comportement asymptotique du nombre de valeurs premières des polynômes sont essentiellement conjecturales.

Alignements parallèles aux demi-diagonales. Il est facile de se repérer dans la spirale d'Ulam en observant (sur la figure 4) que le morceau de spirale qui va de 1 jusqu'à $(2n+1)^2$ pour un entier n forme un carré [14] de côté $2n+1$ centré en 1, avec le nombre $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$ dans le coin inférieur droit. On en déduit immédiatement les expressions des nombres situés aux autres coins du carré de côté $2n+1$. Ils forment les 4 demi-diagonales partant de 1, on les porte sur la figure 5.

Par exemple, les nombres de la demi-diagonale sud-est sont les carrés des entiers impairs, de la forme $4n^2 + 4n + 1$, si bien que les valeurs de la deuxième forme quadratique mentionnée dans (2), $(4n^2 + 4n + 1) + 58$, occupent pour n assez grand la translatée de cette demi-diagonale de 58 vers le haut (on tourne dans le sens anti-horaire, à l'instar d'Ulam).

Figure 5 – Alignements parallèles aux demi-diagonales



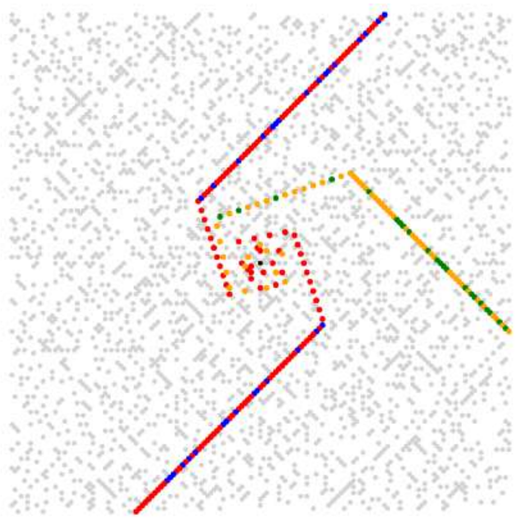
De même, les nombres de la demi-diagonale nord-est (resp. sud-ouest) sont les entiers de la forme $4n^2 - 2n + 1$ (resp. $4n^2 + 2n + 1$), si bien que les valeurs de la formule d'Euler (1) aux entiers im-

14. On considère ici que chaque entier est inscrit dans une case carrée de côté 1, ces cases étant adjacentes comme les carreaux de la partie 3.1.

pairs, $E(2n-1) = (4n^2 - 2n + 1) + 40$ (resp. pairs, $E(2n) = (4n^2 + 2n + 1) + 40$), occupent pour n assez grand la translatée de la demi-diagonale nord-est (resp. sud-ouest) de 40 vers la gauche (resp. droite).

On voit donc apparaître en figure 6 des alignements de nombres premiers dans les directions parallèles aux diagonales, produits par les formes quadratiques (1) et (2), qui d'après [17] prennent de nombreuses valeurs premières aux entiers jusqu'à 10^7. Pour savoir si ce phénomène perdure au-delà de cette valeur, lorsqu'on agrandit encore la taille de la spirale, il faut s'intéresser au comportement asymptotique de ces polynômes.

FIGURE 6 – Dans la spirale d'Ulam 160×160, $E(n)$ pour $n \leqslant 160$: en rouge (valeurs premières) et bleu (autres valeurs) ; $4n^2+4n+59$ pour $n \leqslant 80$: en orange (valeurs premières) et vert (autres valeurs)



Comportement asymtotique. La « Conjecture F » de Hardy et Littlewood (1923) prévoit le comportement asymptotique du nombre de valeurs de la variable, entier naturel inférieur à un réel positif x, pour lesquelles r polynômes à coefficients entiers prennent simultanément des valeurs premières, sous la forme d'une constante dépendant des polynômes étudiés multipliée par la fonction $x/(\ln x)^r$, voir [5] pour plus de détails dans le cas général.

Dans [13], Jacobson et Williams étudient des polynômes de degré 2 qui généralisent la formule d'Euler, de la forme $f_A(x) = x^2 + x + A$ avec $A \in \mathbb{Z}$. En notant $P_A(n)$ le nombre de valeurs premières prises par f_A aux entiers naturels inférieurs ou égaux à n et $\Delta = 1 - 4A$ le discriminant de f_A, ils énoncent la Conjecture F sous la forme :

$$P_A(n) \sim 2C(\Delta) \int_0^n \frac{dx}{\ln f_A(x)} \qquad (3)$$

où la *constante de Hardy-Littlewood* $C(\Delta)$ est définie par le produit eulérien :

$$C(\Delta) = \prod_{p \geqslant 3} \left(1 - \frac{\left(\frac{\Delta}{p}\right)}{p-1} \right).$$

Il s'agit d'un produit sur les premiers p impairs, $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ désignant le symbole de Legendre de Δ sur p. On peut vérifier par le calcul (via une intégration par parties) ou à partir de la formulation de la conjecture donnée dans [5] (noter que la constante y est définie par un produit eulérien portant sur *tous* les premiers) que l'équivalence (3) peut également s'écrire

$$P_A(n) \sim C(\Delta) \frac{n}{\ln n}. \qquad (4)$$

Sous cette conjecture, la constante $C(\Delta)$ a donc une influence déterminante sur le comportement asymptotique du nombre de valeurs premières prises par f_A.

Les résultats numériques vont dans le sens de la Conjecture F. Pour $A = 41$, on a $C(-163) = 3{,}3197732$ et le polynôme d'Euler $x^2 + x + 41$ prend 87% de valeurs premières jusqu'à 100 (valeur estimée à l'aide de (4) : 72%) et 47,5% jusqu'à $3162 = \lfloor \sqrt{10^7} \rfloor$ d'après [17] (valeur estimée : 41,2%). On apprend dans [13] que ce taux est de 22,08% jusqu'à 10^7 (valeur estimée : 20,6%) et que, pour $A' = 3\,399\,714\,628\,553\,118\,047$, on a $C(-13\,598\,858\,514\,212\,472\,187) = 5{,}3670819$ et 25,17% de valeurs premières jusqu'à 10^7 ; même si ce taux est inférieur à la valeur estimée (33,3%), il est supérieur au taux correspondant pour $A = 41$, ce qui semble corroborer le fait qu'une plus grande constante de Hardy-Littlewood correspond asymptotiquement à un plus grand nombre de valeurs premières.

La valeur de $C(\Delta)$ associée à l'entier A' considéré ci-dessus était la plus grande connue avant les calculs présentés dans [13]. La prépublication [4, §4.2] explique comment déterminer une valeur approchée de grande précision de $C(\Delta)$ et donne aussi en exemple la valeur beaucoup plus faible pour $A = 75$, $C(-299) = 0{,}3109767$. La valeur maximale pour $C(\Delta)$ trouvée par Jacobson et Williams est 5,65726388 (sous l'hypothèse de Riemann généralisée), correspondant à un entier dont l'écriture décimale compte 71 chiffres.

Progressions arithmétiques. On verra également dans [5] que, si la Conjecture F générale est étayée par des calculs numériques et des méthodes de crible, elle n'est prouvée que dans le cas d'1 polynôme de degré 1 : elle se ramène alors au théorème des *progressions arithmétiques* de Dirichlet (dans la version quantitative démontrée par de La Vallée Poussin), qui énonce que pour tous entiers a, b premiers entre eux, le polynôme $ax+b$ prend une infinité de valeurs premières (réparties uniformément dans les classes inversibles modulo a). Plus précisément, en notant $P_{a,b}(n)$ le nombre de valeurs premières de $ax+b$ aux entiers naturels inférieurs ou égaux à n, on a l'équivalent

$$P_{a,b}(n) \sim \frac{a}{\varphi(a)} \frac{n}{\ln n}$$

où φ est l'indicatrice d'Euler, ce qui confirme l'équivalence (4) et explicite la constante de Hardy-Littlewood dans ce cas particulier. Ce résultat en degré 1 a lui aussi une interprétation graphique : écrivons les entiers dans une grille rectangulaire de largeur donnée, en commençant en haut à gauche et en remplissant la grille ligne par ligne. Les nombres $an+b$ pour $n \in \mathbb{N}$ se trouvent alors sur une droite (découpée en morceaux par la grille), ses valeurs premières produisent donc là encore des alignements.

Dans tous les autres cas on ne sait même pas prouver que le nombre dont la conjecture prédit le comportement asymptotique tend vers l'infini avec x. Par exemple les valeurs aux entiers des deux polynômes x et $x+2$ qui sont simultanément premières sont les premiers jumeaux, dont on ne sait pas s'ils sont en nombre infini ou non.

En degré 1, on en sait encore plus grâce au Théorème de Green et Tao [12] : non seulement les progressions arithmétiques contiennent une infinité de nombres premiers, mais il existe des progressions arithmétiques de nombres premiers de longueur quelconque : pour tout entier naturel k, il existe des premiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$ qui sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique, c'est-à-dire tels que les différences $p_{i+1} - p_i$ sont constantes. La preuve du théorème n'est pas constructive et la recherche de telles suites est difficile, la raison étant présumée très grande[15].

Petites valeurs de la variable. Différents travaux ont étudié les valeurs premières d'autres polynômes de degré 2, avec des coefficients et pour des valeurs de la variable plus petites, donc davantage susceptibles d'expliquer les lignes visibles sur les tracés de petite taille de la spirale d'Ulam. Le polynôme de degré 2 :

$$36x^2 + 18x - 1801 \tag{5}$$

détient le record actuel du nombre de valeurs premières distinctes consécutives : 45 (entre −33 et 11, établi par Ruby en 1989) ; il fait donc mieux que le polynôme d'Euler (on ne connaît que 2 autres polynômes dans ce cas, dus à Fung et datant de 1988). De plus il prend 49 valeurs premières distinctes en 50 valeurs consécutives de la variable, avec 5 départs possibles entre −41 et −33. On pourra consulter l'introduction et la partie 2 de [9] pour des détails.

Dans cet article, Dress et Olivier présentent les résultats de leur recherche numérique de polynômes ayant un grand nombre de valeurs premières, en ne comptant que les valeurs premières *distinctes* prises pour 50, 100, 500 ou 1000 valeurs consécutives de la variable. Dans ce dernier cas, ils améliorent nettement les résultats antérieurs avec les polynômes :

- $x^2 + x - 1\,354\,363$: 698 valeurs premières (de $x = 1\,139$ à $x = 2\,138$) ;
- $x^2 + x - 752\,293$ et $4x^2 + 2x - 349\,513$: 685 valeurs premières ;
- $4x^2 + 2x - 501\,229$: 684 valeurs premières.

On note que $36x^2+18x-1801 = E(6x+1)-1844$ et que, pour tout $A \in \mathbb{Z}$:

$$x^2+x+A = E(x)+A-41 \text{ et } 4x^2+2x+A = E(2x)+A-41$$

si bien que les polynômes que nous venons de considérer produisent dans la spirale d'Ulam, comme la formule d'Euler, des alignements parallèles aux demi-diagonales nord-est et/ou sud-ouest, dès lors que la valeur de la variable est suffisamment grande.

De nombreux autres polynômes prenant un grand nombre de valeurs premières apparaissent dans [9], qui ne sont ni de cette forme, ni de la deuxième repérée par Ulam et ses collaborateurs (2), y compris en degré 2. On trouvera dans [14] une description précise des alignements susceptibles d'apparaître dans la spirale d'Ulam, ainsi que des figures montrant la répartition des valeurs de certains de ces autres polynômes (dans le plan enroulé en spirale comme pour la spirale d'Ulam), comme celle de la figure 7 page suivante.

15. Le record actuel est pour $k = 27$, établi par Gahan en 2019, voir `https://oeis.org/A327760`

FIGURE 7 – Valeurs du polynôme de Fung $103n^2 + 31n - 3391$ pour $n \leqslant 1000$ (en rouge les valeurs premières)

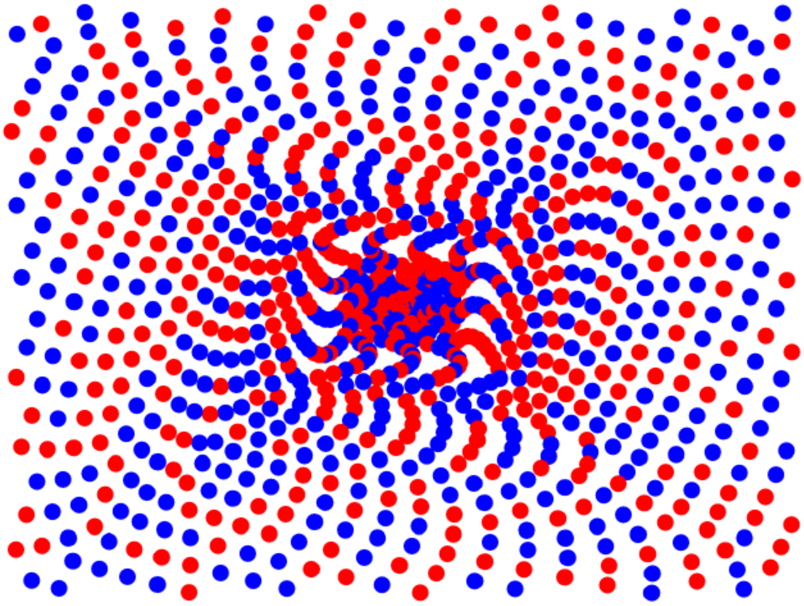
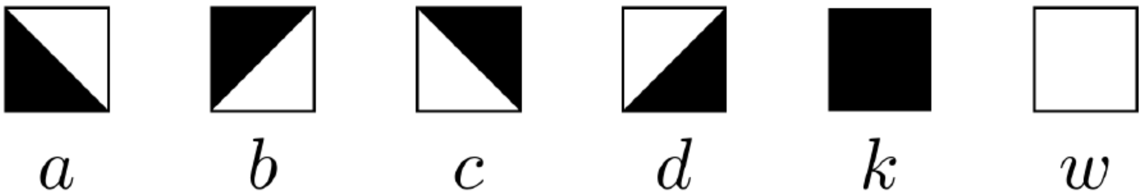


FIGURE 8 – Les carreaux de Truchet complétés

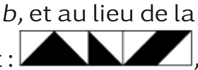


3. La genèse de la série de tableaux *Transitions*

À l'origine de la série *Transitions*, il y a … une envie de géométrie ! À la suite de nombreux autres artistes, Reg Alcorn cherchait un procédé géométrique susceptible de structurer les toiles de sa nouvelle série. Parmi les artistes ayant suivi cette voie et ayant pour certains des liens avec les mathématiques, on peut citer quelques-uns des plus connus : Mondrian (1872-1944), Kandinsky (1866-1944), Vasarely (1906-1997), Morellet (1926-2016) et bien sûr Picasso (1881-1973) et le mouvement du Cubisme en général pour l'analyse du regard et la géométrisation de l'espace.

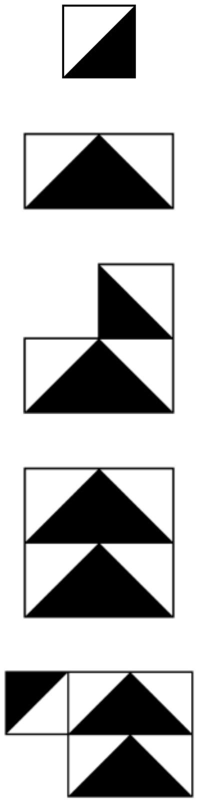
3.1 – Le procédé de Reg Alcorn

Pour sa série de tableaux *Transitions*, l'artiste a mis au point un procédé systématique [16] déterminé par les deux ingrédients mathématiques présentés ci-dessus : carreaux de Truchet et spirale d'Ulam, à peu de choses près. En effet, aux quatre carreaux obtenus en tournant le carreau de Truchet de la figure 1, il en ajoute deux : un carré entièrement blanc et un carré entièrement noir. Il est pratique de les coder comme dans la figure 8.

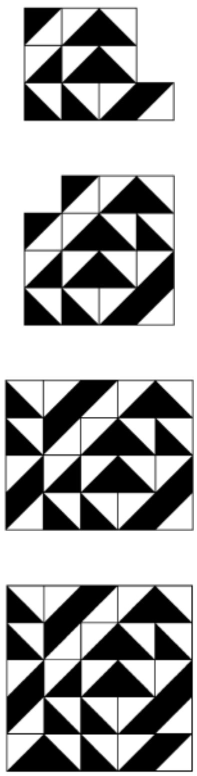
Il choisit alors une séquence de quelques-uns de ces carreaux, de longueur quelconque, par exemple *daadb*, et au lieu de la disposer en ligne, ce qui donnerait : , il l'enroule en spirale à partir du centre du tableau et en répétant la séquence à l'identique jusqu'à remplir le tableau. Dans notre

16. Au long des deux centaines de tableaux réalisés dans cette série, il en déviera parfois tout de même.

exemple, les premières étapes sont :

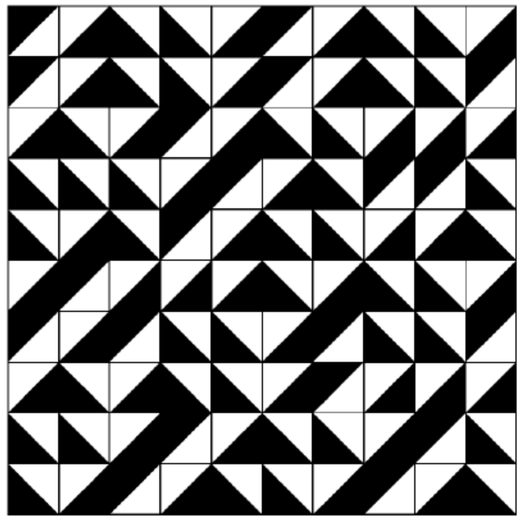


pour la première occurrence de la séquence, puis :



avec respectivement 2, 3, 4 et 5 occurrences (on obtient alors un carré complet). La figure 9 donne le résultat avec 20 occurrences de la séquence (donc 100 carreaux formant un carré 10×10).

FIGURE 9 – Le motif *daadb* enroulé en spirale (répété 20 fois)

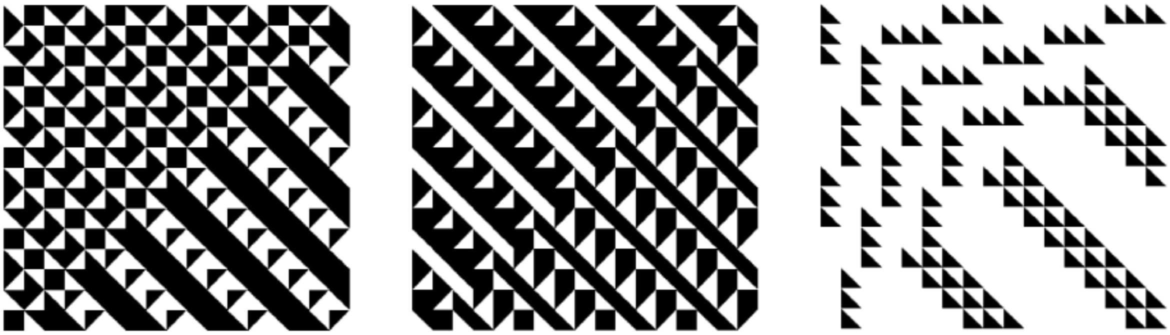


On constate immédiatement que le procédé très simple mis en œuvre produit rapidement des figures complexes, imprévisibles bien que déterminées par la séquence choisie au départ, en particulier très dépendantes de sa longueur.

Par exemple, on observe sur la figure 10 page suivante que les séquences de longueur multiple de 4 donnent des motifs nettement plus réguliers que l'exemple de longueur 5 choisi ci-dessus, notamment parce que les nombres appartenant à l'une quelconque des demi-diagonales du motif sont toujours congrus modulo 4.

C'est donc le même carreau qu'on retrouve tout le long (resp. au moins une fois sur deux) d'une demi-diagonale d'un motif produit par une séquence de longueur 4 (resp. 8). Notons que l'interversion de deux carreaux produit, même dans ce cas, des effets très différents.

Figure 10 – *abck*, *abkc* et *aaawwwww*



Un *atlas* de séquences est en préparation, qui devrait montrer l'incroyable richesse de ce procédé, en supplément des toiles réalisées par l'artiste dont on donne quelques exemples supplémentaires ci-dessous.

3.2 – Un travail sur la couleur

Une fois la séquence sélectionnée et la structure du tableau déterminée, tout l'art de Reg Alcorn consiste à choisir les couleurs qui remplaceront le noir et le blanc des zones dessinées par le pavage réalisé, insistant sur certains motifs, en révélant parfois des différents en fonction de l'éloignement du spectateur [17], provoquant des effets visuels saisissants comme dans les tableaux reproduits en figure 11, où les juxtapositions complexes de couleurs troublent et aspirent le regard et peuvent même, en vraie grandeur, faire douter de la réalité de l'image qu'on a pourtant sous les yeux.

Combiner les couleurs. Au départ, la règle consiste à choisir deux couleurs principales, par exemple un rouge et un vert qui se complètent bien, et à attribuer l'une aux zones blanches dessinées par le pavage, l'autre aux zones noires. Cependant tout n'est pas tout noir ou tout blanc dans le monde de la peinture, et différentes combinaisons des deux couleurs vont pouvoir remplacer l'une ou l'autre, pour une zone donnée, obtenues soit par mélange dans des proportions variées, soit par superposition de l'une sur l'autre. Le choix d'une variante ou d'une autre pourra par exemple être guidé par les formes qui apparaissent et la volonté de les mettre en avant ou pas, ou simplement par l'harmonie des couleurs du tableau.

Figure 11 – Les tableaux *Golden Orbweaver*, huile sur toile, 130 × 130 cm (2018) ; *Garden Raga*, acrylique sur toile, 130 × 130 cm (2019) ; *Stripe Break*, acrylique sur toile, 120 × 120 cm (2020)

17. Il est frappant qu'avec un tout autre point de vue sur les pavages de Truchet, [16] insiste également sur les différences de perception en fonction de l'éloignement par rapport au motif ou de l'échelle à laquelle on le considère.

Ensuite, au long du lent et délicat travail de remplissage des zones, si minutieux, l'artiste laisse son inspiration faire émerger une troisième couleur plus chaude par-ci, une autre plus froide par-là, en même temps que le tableau général prend forme dans son esprit et qu'il sent qu'il faut ou non élargir sa palette. Si bien qu'au final, il n'y a plus vraiment de règle qui tienne pour ce qui est des couleurs : la contrainte donnée par les motifs dessinés par le pavage est le cadre où la liberté de l'artiste de les choisir, de les agencer, de les faire agir les unes avec les autres, s'épanouit. Selon ses mots :

> *En découvrant une image de la spirale d'Ulam dans un tout autre contexte, j'ai vu le potentiel. La création des tableaux au début dépend beaucoup de ces calculs, mais dans l'élaboration, l'œil et l'intuition entrent en jeu également.*

Précision. Longtemps adepte d'une peinture rapide dans laquelle les coups de pinceaux amalgament les couleurs en des textures riches et vibrantes, aux contours un peu flous, Reg Alcorn a utilisé une nouvelle manière de peindre pour la série *Transitions*. Un travail lent et précis, des contours très nets, qu'il avait auparavant expérimentés dans des toiles à motifs géométriques inspirés notamment des pavages de Penrose.

Si les couleurs sont bien délimitées sur la toile, prévoir l'effet que produira leur juxtaposition dans les motifs créés par la séquence de carreaux de Truchet est une gageure que seuls la grande expérience et le sens des couleurs de l'artiste permettent de relever. Avec de belles surprises à la clef dans certains cas, lorsque les couleurs « vibrent » au contact l'une de l'autre, dès lors que le regard se trouve à la bonne distance de la toile. Tout ceci est le fruit d'une recherche au long cours, ainsi qu'il l'explique :

> *J'ai cherché longtemps comment développer une grammaire formelle capable d'exploiter ces combinaisons, afin de créer les configurations intrigantes mais lisibles pour n'importe quelle harmonie, et mettre en valeur les identités uniques des couleurs.*

Pigments. Notons que la chimie des pigments est très importante pour ce travail, par exemple le secteur rouge-vert montre des variations significatives dans l'impact visuel selon qu'on utilise, par exemple, du rouge de cadmium foncé en combinaison avec du vert phtalocyanine, ou un rouge oxyde de fer avec une terre verte.

En fait, il existe une dizaine de rouges haut de gamme, selon les fabricants de peinture, composés de pigments d'origine minérale, végétale ou synthétique, avec des différences de teinte, de transparence ou d'opacité. Leur texture dépend de l'épaisseur de la peinture, des adjuvants et des outils utilisés, du grain de la toile et de sa préparation pour accueillir la couleur. Prenons en exemple deux couleurs : le rouge de cadmium clair, couleur opaque, vive avec un grand impact visuel et le rouge alizarine de cramoisi, couleur transparente, très foncée, à tendance rouge violet. Leur juxtaposition rehausse leurs identités tandis que leur superposition modifie les couleurs simultanément.

> *Les tableaux de la série « Transitions » invitent à percevoir une perspective chromatique, qui donne l'illusion que les couleurs sont à différentes distances. La composition de ces tableaux m'a transporté dans cette odyssée passionnante, exploitant l'alchimie des couleurs et de multiples combinaisons sans être engagé dans la représentativité. C'est le cœur de « Transitions ».*

3.3 – Variations

La règle que nous avons décrite pour déterminer les motifs dessinés, le choix d'une séquence de carreaux de Truchet entourées en spirale, a elle aussi subi des exceptions, voire des transgressions, au fil des très nombreuses toiles réalisées, qui se sont souvent révélées judicieuses et riches de nouvelles perspectives. Ainsi certains tableaux sont construits à partir de plusieurs spirales partant de foyers différents, ce qui peut provoquer la sensation d'une peinture plus réaliste : avec cinq foyers, on pensera presque instinctivement aux formes à cinq branches, plus ou moins symétriques, qui sont si familières dans l'environnement naturel, à commencer par celle d'une silhouette avec une tête, deux bras et deux jambes, comme floutée par le procédé pictural, pour peu que les couleurs choisies par le peintre la fassent apparaître.

Pour d'autres tableaux, les carreaux de Truchet sont remplacées par des rectangles « pythagoriciens » coupés selon une diagonale en deux triangles de côtés 3 – 4 – 5, enroulés en spirale de la même façon que précédemment. La première conséquence est que les toiles ne sont plus nécessairement carrées, ce qui était presque toujours le cas auparavant, par construction ; la deuxième est que les lignes délimitant la spirale sont moins fondues dans le motif général, laissant davantage apparaître la structure du tableau. Enfin, les triangles allongés font émerger des formes plus lisses, plus souples que ce qu'on obtenait avec les carreaux de Truchet. Bien sûr l'artiste s'est aussi amusé à mélanger des carreaux « grecs » à ceux de Truchet, voire à des carrés coupés en quatre triangles selon les diagonales, les combinaisons sont infinies... On en donne un exemple en figure 12.

Figure 12 – *Snow step*, huile sur toile, 120 × 120 cm

© Reg Alcorn (2023)

3.4 – From so simple a beginning

Une caractéristique frappante du procédé de Reg Alcorn est que malgré sa grande simplicité, il produit des motifs extrêmement riches et complexes. La musique est un autre domaine artistique où l'on retrouve fréquemment cette caractéristique.

Le musicien de musique électronique *Grand Ciel* l'a expérimentée, notamment en mélangeant des boucles de sons très simples de longueurs différentes (sur trois, quatre et cinq temps par exemple), à l'occasion d'une conférence-performance organisée par l'IREM de Limoges pour la Fête de la Science 2019, au Musée national Adrien Dubouché de Limoges, dans le cadre de l'*Année des mathématiques*. Ce spectacle intitulé *From so simple a beginning* tentait de mettre en scène cette caractéristique, avec une performance en direct du peintre et du musicien improvisant de façon coordonnée, après une conférence à deux voix donnée par le premier auteur et son collègue Olivier Prot, pour présenter le thème, la spirale d'Ulam et le procédé de Reg Alcorn.

Lors d'une deuxième présentation plus longue du spectacle, nous avions également proposé un exemple de question mathématique dans laquelle la complexité apparaît inopinément dans un problème facile à énoncer, en l'occurrence la fonction de Jacobsthal qui associe à tout entier n l'écart maximal entre deux entiers premiers à n successifs, et dont on ne connaît qu'une soixantaine de termes lorsqu'on l'applique aux primorielles [18], les premiers étant :

$$2, 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34$$

et le suivant n'est pas 38 mais 40 !

Le titre du spectacle provient d'une citation de Charles Darwin [6], montrant que cette caractéristique, bien loin de ne concerner que les arts ou les mathématiques, est intrinsèque à l'évolution de la vie :

> *From so simple a beginning, endless forms most beautiful and most wonderful have been, and are being, evolved.*

qu'on peut traduire comme suit : « D'un commencement si simple, une infinité de formes si belles et si merveilleuses ont évolué et évoluent encore. »

Références

[1] J. André. « De Pacioli à Truchet : trois siècles de géométrie pour les caractères ». In : *13e colloque Inter-IREM d'épistémologie et histoire des mathématiques*. Sous la dir. de J.-P. Escofier. 4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée. IREM de Rennes. Rennes, France, mai 2002.

[2] J. André. *Les planches de pavages de Truchet*. 2010. url : `http://jacques-andre.fr/faqtypo/truchet/truchet-planches.pdf`.

[3] J. André et D. Girou. « Father Truchet, the typographic point, the Romain du roi, and tilings ». *TUGboat* **20**, n° 1 (1999), p. 8-14.

18. `https://oeis.org/A048670`

[4] H. Cohen. « High precision computations of Hardy - Littlewood constants ». 1996. url : https://oeis.org/A221712/a221712.pdf.

[5] K. Conrad. « Hardy-Littlewood constants ». In : *Mathematical properties of sequences and other combinatorial structures (Los Angeles, CA, 2002)*. Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2003, p. 133-154.

[6] C. Darwin. *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. London : John Murray, 1859.

[7] D. Diderot. *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. **II**. Paris : Briasson, 1752. Chap. Carreau, s. m. (Architecture), 699a-701b. url : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50534p/f705.item.

[8] D. Doüat. *Méthode pour faire une infinité de desseins différens avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale : ou observations du Père Dominique Doüat Religieux Carmes de la Province de Toulouse sur un mémoire inséré dans l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris l'année 1704, présenté par le Révérend Père Sébastien Truchet religieux du même ordre, Académicien honoraire*. Jacques Quillau, Imprimeur Juré de l'Université, 1722. url : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5823204r?rk=21459;2.

[9] F. Dress et M. Olivier. « Polynômes prenant des valeurs premières ». *Experiment. Math.* **8**, nº 4 (1999), p. 319-338. issn : 1058-6458.

[10] P. Esperet et D. Girou. « Coloriage du pavage dit "de Truchet" ». *Cahiers GUTenberg* **31** (déc. 1998), p. 5-16.

[11] M. Gardner. « Mathematical Games. The remarkable lore of the prime numbers ». *Scientific American* **210**, nº 3 (mars 1964), p. 120-130.

[12] B. Green et T. Tao. « The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions ». *Ann. of Math. (2)* **167**, nº 2 (2008), p. 481-547. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2008.167.481.

[13] M. J. Jacobson Jr. et H. C. Williams. « New quadratic polynomials with high densities of prime values ». *Math. Comp.* **72**, nº 241 (2003), p. 499-519. issn : 0025-5718. doi : 10.1090/S0025-5718-02-01418-7.

[14] S. Marquès et S. Vinatier. « Alignments in Ulam's spiral ». En préparation. 2024.

[15] L. Rougetet et M. Boutin. « Jeu de parquet et combinaisons, ou la double patrimonialisation d'un objet et de ses savoirs mathématiques ». *Philosophia Scientiæ* **26-2**, nº 2 (2022), p. 91-122. url : https://www.cairn.info/revue-philosophia-scientiae-2022-2-page-91.htm.

[16] C. S. Smith et P. Boucher. « The Tiling Patterns of Sebastien Truchet and the Topology of Structural Hierarchy. » *Leonardo* **20**, nº 4 (1987), p. 373-385. issn : 0024094X.

[17] M. L. Stein, S. M. Ulam et M. B. Wells. « Mathematical Notes : A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes ». *Amer. Math. Monthly* **71**, nº 5 (1964), p. 516-520. issn : 0002-9890. doi : 10.2307/2312588.

[18] S. Truchet. « Mémoire sur les combinaisons ». *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1704), p. 363-372. url : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3486m/f517.item.

[19] S. Vinatier et R. Alcorn. « Les maths vues par un artiste : une expérience de diffusion de la culture mathématique via l'art et l'histoire de l'art ». *Gaz. Math.*, nº 144 (2015), p. 48-53. issn : 0224-8999.

Stéphane Vinatier

mathis - xlim umr 7252 cnrs - Université de Limoges

stephane.vinatier@unilim.fr

Stéphane Vinatier est professeur des universités. Il travaille en théorie algébrique des nombres au sein de l'institut xlim. Ancien directeur de l'irem et président de l'adirem, il s'intéresse à l'enseignement et à la diffusion des mathématiques.

Reg Alcorn

https://www.reg-alcorn.fr/

William Reginald Alcorn est né en 1950 en Zambie de parents irlandais et écossais. Une passion pour la peinture se révèle très tôt. Après des études dans les humanités en Angleterre, il voyage en Europe, pour se fixer en France. Avec les projets engagés dans la musique, les langues, les sciences et récemment les mathématiques, il divise son temps entre son atelier de peintre et les animations de vulgarisation, notamment dans le cadre des activités de l'irem de Limoges.

Un entretien avec Yves Colin de Verdière

Propos recueillis par Frédéric Faure (ff) et San Vũ Ngọc (svn).

FF – Peux-tu nous parler de ton enfance et de tes premiers souvenirs mathématiques ?

Du point de vue de l'enfance, j'ai été gâté parce que je suis d'une famille bourgeoise du 6e arrondissement à Paris. Une histoire qu'on raconte, c'est que, quand j'étais en maternelle, l'instituteur voulait absolument que j'utilise un boulier pour compter et que j'avais refusé absolument d'utiliser le boulier. [rires] Ça, c'est la légende familiale. Un truc qui m'avait marqué quand même, j'étais en Sixième et c'était un problème de maths assez tordu. Un problème de robinet ou je ne sais plus quoi. Je vais voir mon papa et je lui dis « Bah écoute, j'ai ce machin-là » alors il pose « $X = ..$, $Y = ..$, $Z = ...$ ». Il a transcrit les données du problème et tout était devenu complètement trivial. Tu vois, c'est quand même d'une puissance absolument incroyable. On avait écrit un système de 2 ou 3 équations, puis c'était super bête. Ça m'avait marqué, je me suis dit quand même, il y a quelque chose là, c'est pas la peine de se tordre les méninges avec les robinets...

SVN – Tu intègres l'École normale supérieure en 1964. Peux-tu nous raconter comment les choses se passaient ?

En fait, il n'y avait pratiquement pas de cours à l'école. On allait suivre les cours de la licence à Jussieu et les plus courageux allaient jusqu'à Orsay. On n'avait que deux cours sur place dont je me souvienne la première année. On avait un cours d'Henri Cartan auquel je ne comprenais absolument rien et un cours de Jacques Dixmier sur les groupes de Lie que je comprenais un petit peu mieux. Au fond il ne se passait pas grand chose et on devait se débrouiller par soi-même. En première année, on passait la licence.

En 2e année, on suivait les cours de dea, ce qui correspond maintenant au master 2 : j'ai suivi un cours de Gustave Choquet et deux cours de Laurent Schwartz. Laurent Schwartz était un enseignant extraordinaire, tout était absolument limpide, Choquet était plus poétique et son cours demandait plus de travail après coup. En 2e année il y avait aussi un séminaire organisé par François Bruhat où les élèves faisaient des exposés. J'avais été chargé du théorème de Malgrange sur l'existence de solutions fondamentales pour les équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Malheureusement, j'avais commencé par regarder dans le bouquin de Hörmander où il faisait tous les espaces fonctionnels exacts dans lesquels ça marchait, et puis, quelques jours avant l'exposé, j'ai découvert qu'on avait la thèse de Malgrange dans les Annales de Fourier et là c'était bien plus simple parce que c'était juste l'application de Hahn Banach ! Enfin, c'était tout à fait lisible et donc j'étais assez content. Je peux aussi ajouter qu'on a eu quelques séries de conférences magnifiques : Leray, Lions, Kahane, Malgrange ...

SVN – Et les relations entre les élèves ?

À l'école normale, c'était assez sympa, parce qu'en particulier, on était mélangés avec les littéraires... Il y avait aussi l'agitation politique avant 68. Il y avait la guerre du Vietnam. Tu vois pour moi qui sortait de ce milieu un peu fermé, c'était quand même la grande ouverture politique. Et puis le truc qui était bien aussi, c'était le Ruffin et les cours de gym. Il y avait du sport le matin 3 fois par semaine dans les jardins de l'école et Ruffin, le prof de gym, était vachement sympa. C'était un type super cultivé, on discutait un peu de tout. Et puis, contrairement à tous les autres profs de sport que j'avais eus avant, il ne se foutait pas de nous quand on n'arrivait pas à faire les choses, tu vois ? Je me souviens, j'étais en Terminale, je n'arrivais pas à lancer le poids, mais personne ne m'avait expliqué comment lancer le poids, alors je lançais et il tombait quoi ! Le prof considérait que je faisais exprès. Il y avait des anciens comme Jean-Pierre Serre qui venaient au sport, mais moi je ne savais pas encore qui était

Serre! [rires]. C'est qu'il devait habiter tout près, il était déjà prof au Collège de France. Donc il venait à la gym le matin!

SVN – Ensuite, tu deviens l'équivalent de maître de conférences à Paris 7.

François Bruhat, le directeur des études, au mois de juin 1968, nous a réunis. Il a pris la liste, puis il a demandé à chacun où il voulait aller, cnrs, ou Orsay ... [rires] Ça s'est fait, il nous a donné les papiers ensuite pour candidater. Alors moi mon idée était, à terme, de ne pas rester à Paris, donc, en attendant, j'ai candidaté à Paris. J'ai été recruté à Paris 7. La rentrée 68, ça été un peu compliqué parce qu'ils avaient réorganisé toute l'université. J'ai commencé mes cours au mois de décembre, juste avant Noël. On n'avait pas encore de bureau à l'époque. Enfin, on pouvait travailler à l'ihp. Donc j'ai travaillé pas mal à la bibliothèque de l'ihp. Il n'y avait que les profs qui avaient des bureaux, c'était des petits bureaux et il y avait trois profs dans un bureau, donc c'était le bazar. Puis je travaillais chez moi, enfin chez mes parents! Je n'avais que peu d'obligations. Je n'avais pas de directeur de thèse et encore moins de sujet. Donc j'allais à la bibliothèque, je travaillais et j'ai lu pas mal de trucs à droite à gauche.

FF – Comme mission, c'était avant tout l'enseignement, ce type de postes?

Non, j'étais censé faire de la recherche. Officiellement, c'était Choquet mon directeur de thèse. Parce qu'il fallait quand même avoir un directeur de thèse officiel : pour la prime de recherche, il fallait quelqu'un qui signe. Ensuite je suis allé voir un peu ce que Schwartz faisait : c'était un peu bizarre parce que je n'avais rien à faire, essentiellement. Ça a duré 2 ans. Ensuite, j'ai fait mon service militaire et je faisais de l'enseignement à des sous-officiers. C'était assez intéressant parce qu'ils étaient motivés : pour eux, c'était une manière d'être promu. Je m'étais marié juste avant mon service militaire et je pouvais rentrer chez moi le soir. C'était assez cool, et j'ai continué à faire des maths en autodidacte. J'avais très peu d'heures de cours, donc j'empruntais des documents à la bibliothèque et j'ai lu. Par exemple, plusieurs articles de Smale sur les systèmes dynamiques etc. J'ai lu pendant mon service militaire. Voilà, ça ne menait pas à grand-chose tout ça. Enfin, je croyais que ça ne donnait pas grand chose mais en fait si.

SVN – À quel moment rencontres-tu Marcel Berger?

À la rentrée 71, ça a été un coup de chance. J'ai été amené à faire les travaux dirigés du cours de géométrie différentielle de Marcel Berger. J'avais suivi le cours de Schwartz donc je connaissais un peu les variétés. Et puis je me dis, ce type-là, il est sympa et pas prétentieux, je vais aller voir ce qu'il fait. J'ai commencé à aller au séminaire Berger, pardon, il fallait dire le « séminaire de géométrie riemannienne de Paris 7 ». Je ne connaissais vraiment rien en géométrie riemannienne, alors au début je ne faisais qu'écouter. Et puis, à un moment, je me suis dit, mais au fond, les autres, ils ne comprennent pas plus que moi. Je posais alors des questions bêtes et en fait, ça marchait assez bien [rires]. C'était très sympa parce qu'on avait ce séminaire le mardi matin, à Jussieu, ensuite, on allait manger ensemble. Et après, on se retrouvait dans le bureau de Berger pour des discussions informelles, on échangeait. Berger avait un réseau de relations, il y avait beaucoup de visiteurs, des gens célèbres : Weinstein par exemple, Singer aussi étaient venus au séminaire Berger. C'est là que j'ai fait connaissance de Victor Guillemin. Donc c'était vraiment bien! Un autre truc qui était vraiment intéressant, c'est que Berger recevait plein de preprints. À l'époque, on recevait les preprints papier et il les amenait au séminaire. Il les mettait sur une table. Puis on se servait! C'est ainsi que je me suis emparé des papiers de Balian et Bloch sur le spectre et les géodésiques périodiques et cætera [1]. Balian et Bloch sont deux physiciens de Saclay. Ils ont écrit des papiers absolument magnifiques où ils font essentiellement la formule de trace qui relie le spectre du laplacien aux géodésiques périodiques dans le cas d'un domaine dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Et c'est assez précis, c'est pas complètement rigoureux bien sûr. En plus ils avaient fait une analyse numérique du problème. Ils avaient regardé la densité des valeurs propres de la boule, et puis ils avaient observé dans la densité des valeurs propres les oscillations qui étaient liées aux trajectoires périodiques. Ces physiciens n'étaient pas complètement coupés du monde mathématique, ils avaient entendu parler du problème de Kac « can one hear the shape of a drum? » [16]. Je crois que même Selberg est cité dans leurs papiers et c'est pour ça qu'ils avaient envoyé leurs preprints à Marcel Berger. Je me suis dit, « mais ça a l'air magnifique leur truc ». Puis j'ai commencé tout de suite à comprendre leur papier, enfin à *vouloir* comprendre leur papier.

FF – Et le style du papier ne t'a pas gêné?

Non pas du tout. Le problème c'est qu'ils faisaient le cas d'un domaine à bord et on sait bien que mathématiquement c'est plus compliqué. Par ailleurs, chez Berger, il y avait Lionel Bérard-Bergery qui avait regardé de près la formule de Selberg. Il avait fait des extensions de la formule de Selberg dans le cas multidimensionnel, donc je connaissais la formule de Selberg. Je me suis dit qu'il devait y avoir un truc qui couvre un peu tout ça et donc j'ai commencé à travailler d'arrache-pied. J'ai fait ma thèse assez rapidement en fait. Mais ce n'était pas du tout le style de Berger parce que c'était de l'analyse. À l'époque, il faut voir que les gens ne connaissaient pas la phase stationnaire qui était quand même le truc de base. J'avais été voir dans le bouquin de Maslov [17], c'était expliqué. Je ne connaissais pas la démonstration de Hörmander[15] de la phase stationnaire, qui est absolument magnifique comme tu sais, avec le Lemme de Morse. Et donc c'était un peu à la main. Et puis, ça s'est fait assez vite, j'ai soutenu ma thèse fin 73. Ce dont je parle, le service militaire, je l'ai fini en juin 71. Les résultats, je les avais en 72, donc ça m'a pris un peu plus d'un an. J'ai donné mon manuscrit à Berger [8, 9], il en a bavé pour vérifier [2], mais il a dit « c'est bon, tu peux soutenir ta thèse ». Et à l'époque c'était la thèse d'État (en gros l'HDR), on ne soutenait pas de thèse intermédiaire.

FF – C'est à ce moment que tu pars à Grenoble ?

Après ma thèse, donc en 74, je commence à candidater à tous les postes qu'il y avait et en particulier il y avait un poste à Paris 7. Donc je me suis dit que j'allais aussi candidater à Paris 7 après tout. Et puis je n'ai été retenu sur aucun poste de province : les gens ne me connaissaient pas. J'ai été recruté Prof à Paris 7 finalement. C'était un peu bizarre, c'était du recrutement local. J'ai continué à bosser et fait quelques trucs tant que j'étais encore à Paris. Je surveillais un petit peu les postes qui m'intéressaient, à Strasbourg, Nice et Grenoble. J'avais candidaté à Strasbourg, il y avait un poste mais le poste était déjà pré-rempli donc ce n'était pas très utile. À Nice ça ne s'était pas très bien passé, je ne sais plus pourquoi. J'avais commencé à bosser avec Jacques Chazarain qui était à Nice et j'avais des anciens collègues de promo qui étaient à Nice, donc ça m'intéressait. À Grenoble, j'avais commencé à communiquer avec Jacques Vey par courrier.

SVN – C'est à cette époque que commence l'aventure Besse ?

Oui, ça a commencé en 74 ou 75. Il y avait deux sujets : les variétés à géodésiques toutes périodiques et puis un sujet de topologie algébrique, je ne me rappelle plus très bien.

SVN – Je crois que Berger disait qu'ils avaient mis topologie algébrique pour que ce soit accepté par le CNRS.

Oui exactement. On a commencé avec les variétés à géodésiques toutes périodiques et ensuite on a écrit ce fameux bouquin sur les surfaces de Zoll[3]. C'était une activité collective du séminaire. Mais on n'avait pas d'ordinateur à l'époque. Je me souviens, pour la bibliographie on faisait des petites fiches. Ensuite on a mis les fiches dans l'ordre alphabétique et ensuite chacun était chargé d'un chapitre. Moi je m'étais occupé du chapitre sur le spectre et malheureusement je ne m'étais pas intéressé aux histoires de multiplicité. Tu sais, le fait que la multiplicité est polynomiale [10].

SVN – Et c'est là que tu as rencontré Vey à Besse ?

Oui je pense que c'est là que je l'ai rencontré la première fois. Et ensuite je ne sais plus pourquoi on a commencé à communiquer sur le lemme de Morse avec forme volume. C'était la période où j'étais en train de bouger. Il y a un prof à Grenoble qui est décédé au printemps 76 et ils ont publié le poste en cours d'année. Donc j'ai candidaté, il y avait assez peu de candidats. J'ai été recruté grâce à l'appui de Malgrange et de Boutet de Monvel, je suis arrivé à Grenoble en janvier 77. On a déménagé assez vite et on est venu s'installer à Grenoble. C'était une bouffée d'oxygène, on a pu louer une maison, les enfants ont eu chacun leur chambre. À Paris, on était très bien rue Croulebarbe dans le quartier des Gobelins, mais c'était un petit appart, les enfants étaient tous les trois dans la même chambre. C'était compliqué, on était obligé de s'échapper le week-end pour prendre l'air, donc on était assez content de venir à Grenoble. Et voilà, quand je suis arrivé à Grenoble, il y avait Vey, c'était la personne qui m'intéressait le plus, il y avait Malgrange aussi bien sûr, et puis oui il y avait Boutet de Monvel aussi. J'étais décidé de toutes manières. C'était un labo qui avait bonne réputation. Alors le Lemme de Morse avec forme volume, ça avait été démarré par Jacques Vey, mais il l'avait fait dans le cas analytique. La forme normale convergeait. On avait correspondu sur le cas C^∞, mais on s'était mal compris, on a recommencé à en discuter quand je suis arrivé. Il pensait que je savais le démontrer et moi aussi je pensais qu'il savait le démontrer. Alors on a dit qu'on allait quand même le faire. On l'a fait et on a écrit un papier en commun [14].

SVN – Par rapport à la séparation entre Paris et la province, tu es prof à Grenoble alors que tu aurais pu être prof à Paris.

Oui j'étais prof à Paris et je suis là à Grenoble. J'aurais pu rester à Paris. La situation a bien évolué parce que, en particulier grâce à l'action du cnrs, les centres de province se sont quand même bien développés. Tu vois quand je suis parti de Paris, un certain nombre de collègues ont trouvé ça bizarre, du fait que j'avais déjà un poste à Paris, que je parte de Paris. Alors, il y a même des collègues (je ne donnerai pas le nom!) qui m'ont dit « mais tu veux arrêter de faire des maths ? »

FF – C'est ensuite que tu as travaillé sur le théorème d'ergodicité quantique ?

Oui alors le théorème d'ergodicité quantique c'est assez incroyable, car c'est mon papier le plus cité [5], alors qu'il fait partie des papiers qui m'ont demandé le moins de travail. Je vais expliquer ça. En fait, Steve Zelditch s'était pointé un jour dans mon bureau. Tu vois je ne le connaissais pas, je vois un type arriver, il se présente, « Je m'appelle Steve Zelditch ». Il voulait me voir puis il commence à me raconter le théorème d'ergodicité quantique. Puis ensuite je réfléchis et je regarde le papier de Zelditch [19]. Zeldich l'avait fait dans le cas des variétés hyperboliques, c'est-à-dire à courbure −1. Le seul truc c'était donc de construire une quantification positive, c'est-à-dire étant donné un symbole positif d'avoir un opérateur pseudodifférentiel qui est positif. J'ai discuté avec les collègues des équations aux dérivées partielles et ils savaient faire ça. Donc c'était fini pour le cas général. Mais ce fut un peu désagréable pour Zelditch parce que mon papier est paru avant le sien. Mais c'est quand même Zelditch qui était allé chercher le travail de Shnirelman [18].

SVN – À cette même période, c'est aussi le développement de l'école semi-classique française.

C'est assez étonnant parce qu'au début, j'ai appris l'analyse microlocale à la Hörmander, Duistermaat etc., les opérateurs intégraux de Fourier. J'ai mis un certain temps à comprendre que la version à petit paramètre était intéressante. Au début, j'avais compris que c'était une généralisation, mais que ce n'était pas vraiment le cœur du problème. J'étais un peu réticent, surtout qu'André Voros m'avait expliqué qu'il suffisait de faire une transformation de Fourier par rapport au paramètre semi-classique pour se ramener à la théorie habituelle. Donc je me suis dit, il n'y a rien de très étonnant. Ensuite, je me suis rendu compte petit à petit que c'était un outil d'une souplesse extraordinaire, qui s'appliquait à plein de situations, que c'était finalement un bon contexte pour faire les choses. Ce n'était pas forcément le contexte pour tout faire, mais que c'était un bon contexte. Et puis ça s'est beaucoup développé avec Johannes Sjöstrand, Didier Robert, Bernard Helffer, enfin les gens que vous connaissez.

FF – Et après ces quelques années d'activité de recherche, est-ce que tu avais une sorte de vision claire de ton projet, de ta progression ?

Non, j'avais juste une vision claire, c'était qu'il fallait changer de sujet dès que ça devenait trop technique. Ce que je trouve intéressant, en maths, c'est de démarrer des nouveaux trucs. Parce que je ne suis pas un technicien si tu veux, je n'aime pas les choses très techniques, très longues. Tu vois maintenant les gens font des papiers énormes, des papiers de 100 pages, et je crois que ce n'était pas mon truc. Un peu de paresse je pense. J'aimais bien m'intéresser à des choses nouvelles, donc soit aller voir du côté de la physique, soit d'autres sujets, comme quand j'ai commencé à m'intéresser aux graphes par exemple.

FF – Donc c'était un peu hasardeux ?

Oui c'étaient des rencontres et ça restait un peu ouvert. Mon idée était qu'une fois qu'on a accumulé quelques techniques, par exemple l'analyse microlocale ou d'autres choses, on peut intervenir avec d'autres gens et ces techniques vont être utiles. C'est une façon de penser. C'était ça mon idée, mais je n'avais pas de plan : ça me faisait plaisir de faire des choses nouvelles et de voir des gens.

FF – Est-ce qu'il y a eu des moments émotionnellement intenses où tu sentais que tu faisais des progrès ?

Il y a eu toute l'époque où j'ai pensé réussir à démontrer l'hypothèse de Riemann. C'était très stressant. C'était parti de deux choses. Werner Müller de Bonn était venu et, à l'époque, je ne savais pas cette histoire pour les surfaces de Riemann, comme quoi le spectre discret est plongé, etc. Müller m'a dit qu'il n'y avait rien de connu à part le cas des variétés arithmétiques pour lequel on sait qu'il y a une infinité de valeurs propres, comme Selberg l'a démontré, et qui satisfont à l'asymptotique de Weyl. Parallèlement il y avait Henri Cohen qui avait été recruté à l'institut Fourier vers la fin des années 70.

On avait fait un séminaire avec Cohen sur le prolongement analytique des séries d'Eisenstein sur les variétés hyperboliques à cusps. Il y avait un bouquin écrit par Kubota, un mathématicien japonais, tout un bouquin pour faire le prolongement méromorphe. Puis un jour je me suis aperçu que je savais faire le prolongement méromorphe en 3 pages… Donc j'ai écrit une note aux Comptes Rendus avec la démonstration complète du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein [12], qui n'était finalement pas un problème de théorie des nombres. C'était un problème d'analyse. J'étais assez content, donc j'ai continué à m'intéresser à ça et à re-réfléchir à la question de Müller, à savoir le spectre plongé. Alors je savais par une discussion avec les physiciens que le spectre de valeurs propres plongées dans le continu c'était instable. Donc la réponse normale c'était qu'en général il n'y en avait pas ou pas beaucoup et effectivement ce n'était pas trop difficile. C'étaient les mêmes outils que j'avais utilisés pour le prolongement méromorphe et donc j'ai montré ce truc-là, que, pour les variétés à courbures négatives, génériquement (mais pas dans le cas hyperbolique), il n'y a pas de valeur propre plongée dans le spectre continu. Ensuite ça a été très popularisé par Sarnak qui s'est beaucoup intéressé à cette histoire de spectre plongé. Il était bien mieux outillé que nous, parce qu'il vient de la théorie des nombres. Donc ça a duré un certain temps. Il y avait aussi cette histoire des pseudo-laplaciens [6] qui avait été introduits par Lax et Phillips et ça donnait une petite prise, peut-être, pour l'hypothèse de Riemann. Donc j'ai essayé et c'était hyper stressant parce que ça ne marchait pas. Mais j'avais une idée quand même, c'était d'écrire la formule de trace pour ces pseudo-Laplaciens et la formule ressemblait à la formule que l'on espère en théorie des nombres. Voilà, ça n'a pas marché.

SVN – Et à quel moment, as-tu décidé que ça ne marcherait pas ?

Oh, assez vite, ça m'a occupé pendant un an ou deux quoi.

FF – Activement ?

Oui, oui, activement, jour et nuit. C'était un sacré truc. Physiquement très dur.

FF – Est ce qu'il y a eu d'autres moments ensuite où tu as eu…

… des illuminations ? Oui par exemple avec l'invariant pour les graphes [11]. On a le truc de planarité qui s'appelle l'invariant de Colin de Verdière. C'est un nombre qui est associé à un graphe et qui mesure la planarité du graphe, c'est quand même assez joli, assez simple. Heureusement, j'avais rencontré François Jaeger qui m'a en particulier parlé des mineurs de graphes et du théorème de Robertson-Seymour. Je vois un peu mon critère de planarité comme un analogue quantique du théorème des 4 couleurs et j'avais réfléchi à une vraie preuve (*i.e.* sans ordinateur) de ce dernier.

Ensuite les choses récentes, quand j'ai commencé à bosser avec Laure Saint-Raymond sur les ondes internes. Ça a été assez rigolo cette affaire. Elle venait d'arriver à l'Éns Lyon et elle, ce qui l'intéressait, c'était de travailler avec les physiciens, de comprendre ce qu'ils font. Donc au labo de physique de l'Éns Lyon, ils faisaient des expériences avec les ondes internes, avec des attracteurs, et on voyait des trajectoires. Emmanuel Trélat lui avait suggéré de me contacter sur le problème qu'elle regardait. Donc elle est venue me voir à Grenoble, elle me dit : « oui, il y a ce truc là, c'est intéressant. Si tu as envie on pourrait travailler ensemble là-dessus. » J'étais très touché, tu sais c'est une vedette Laure Saint-Raymond, alors travailler avec elle, c'est un peu impressionnant. J'ai appris après qu'elle était aussi impressionnée que moi, alors c'était assez drôle [rires]. Et alors on a commencé à bosser, et on a réalisé que c'était de l'analyse microlocale avec des pseudo-diffs, des choses tout à fait à notre portée [13].

SVN – De quand datent tes discussions avec des physiciens ?

André Voros est probablement le premier physicien avec qui j'ai vraiment discuté. Il faisait du semi-classique. C'est un bon copain, André. Je l'avais rencontré ensuite à plein d'occasions, mais c'est pratiquement un matheux ! Il y a un moment où je me suis senti plus scientifique que purement matheux. Ensuite les grands trucs avec la physique, ça a été quand même avec Michel Campillo sur la sismologie [7]. Ça s'est fait un peu par hasard. C'étaient les années 2000 et c'était un autre collègue physicien qui m'avait parlé de Campillo. Il m'avait dit « Campillo, il fait des trucs absolument incroyables [4] ». Il arrive à utiliser le bruit des ondes sismiques pour faire de l'imagerie du sous-sol. Ça m'a intéressé, c'était un peu étonnant quand même, d'habitude le bruit est une nuisance. Donc j'ai commencé à aller écouter ce qu'il racontait et ça a été vraiment intéressant parce que ce n'était pas très compliqué conceptuellement du point de vue des maths.

Il arrivait à faire de l'imagerie sismique très performante, à avoir des images de la croûte terrestre absolument incroyables avec des méthodes complètement nouvelles. Ce qu'il faisait, c'est enregistrer le bruit sismique, c'est-à-dire le bruit qu'on a dans les sismomètres tout le temps. Du bruit dont on ne sait rien faire *a priori*, mais on l'enregistre à plusieurs endroits, et l'idée c'est que ces signaux de bruits n'étaient pas indépendants. Il y avait une corrélation entre eux, et cette corrélation était vraiment un signal fiable qui donnait de l'information sur la propagation d'un point à l'autre. Ça s'est avéré être une méthode très très performante parce qu'on peut la faire n'importe où et parce qu'on n'a pas besoin de ce qu'on avait avant. Avant, on avait des tremblements de terre, on avait les explosions, si tu veux. Et là du coup, on peut suivre en continu ce qui se passe ! C'est une méthode vraiment extraordinaire. Ensuite on a fait un petit séminaire avec ses élèves où je parlais alternativement avec les physiciens. Il y avait plein de gens qui voulaient travailler avec lui, des élèves, des post-docs etc. Mon but, à l'époque, c'était de comprendre leur représentation mentale des objets. Moi, j'avais ma propre représentation mentale qui était un peu différente. Je voulais un peu essayer de comprendre comment ça se passait dans leur tête. Alors je ne sais pas si j'ai réussi, mais je pense qu'à certaines occasions, j'ai compris qu'eux ils avaient compris comment je voyais les choses.

SVN – Malgré tout, ce n'est pas si courant, les mathématiciens qui frayent avec les physiciens comme ça et qui trouvent des problèmes vraiment intéressants. Parfois ce sont des mathématiciens très appliqués, mais toi on ne peut pas dire qu'on peut te classer comme un mathématicien appliqué !

La difficulté je crois, c'est que, dans un certain nombre de domaines, les physiciens ont de l'avance. En mécanique quantique ou en physique du solide, tu ne peux pas apprendre grand chose aux physiciens. Alors qu'en sismologie, ou pour ce truc de mécanique des fluides que j'ai fait avec Laure Saint-Raymond, c'est un peu différent. Il y avait assez peu de matheux. Sur les ondes internes, il n'y en avait pratiquement pas. Il y avait un vieux papier de Ralston, mais il y avait très peu de choses en fait. Je trouve que c'est ça la difficulté avec la physique. Les physiciens, de toutes les manières, tu ne leur apprends absolument rien. Ils savent faire ! Donc j'ai eu de la chance quand même. Ces deux exemples, la sismologie et puis les ondes internes, ce sont des choses où les physiciens n'étaient pas trop des théoriciens. Du point du de vue mathématiques, il n'y avait presque rien. C'était assez intéressant ! C'est ce que j'ai dit tout à l'heure. C'est vraiment intéressant quand on est vraiment au début du truc. Par exemple, Michel Campillo, il ne se rendait sans doute pas compte au début du progrès qu'il avait fait faire.

SVN – Donc ce qui a joué quand même beaucoup, c'est un peu ta curiosité ?

Oui curiosité, puis le hasard ! Et de ce point de vue là, c'est pas mal d'être enseignant parce qu'on rencontre des gens. Si tu veux, quand tu enseignes dans les premières années de l'université, tu rencontres des physiciens, … Et c'est pas si mal, hein ? Une chose que j'ai comprise assez vite, c'est que, faire des mathématiques appliquées, ce n'était pas faire de la collaboration avec les mathématiciens appliqués. Qu'il fallait aller un cran au-delà, il fallait aller voir les physiciens, les biologistes. Et c'est une chose qui n'était pas si courante.

SVN – J'avais une question un peu plus générale. Est-ce que tu as une espèce de méthode ? Enfin, quand tu as un problème difficile, comment est-ce que tu l'attaques ?

Ma stratégie de base, c'est de de trouver des exemples simples où on ne sait pas faire. Ça aide beaucoup de trouver un exemple simple. Ne pas se précipiter sur un problème dans un contexte très général, mais comprendre au fond où est-ce qu'on est arrêté ? On prend un exemple, pas forcément l'exemple que les gens ont regardé, mais un autre exemple, et cætera.

SVN – Justement quand tu essayes comme ça, de résoudre un problème, est-ce que tu te mets tout de suite à écrire sur le papier ou est-ce que tu as besoin de réfléchir ?

Depuis un certain temps, je fais de la marche tous les jours, au moins 1h et ça m'aide beaucoup pour les maths, je réfléchis. Mon truc ce n'est pas tout de suite les calculs. C'est vraiment bien de se représenter les problèmes, d'avoir des idées nouvelles et ça vient en marchant ou quand tu n'as rien d'autre à faire dans le train par exemple. Un trajet en train, tu restes absent et tu peux avoir des idées. Tu vois, je ne suis pas trop algébriste, je suis plutôt géomètre. C'est plutôt une vision des objets géométriques qui me saisit.

SVN – As-tu des conseils à donner aux jeunes mathématiciens ? Ou, si tu avais 20 ans aujourd'hui, qu'est-ce que tu ferais ?

Je ne sais pas. Maintenant les normaliens, ils ont quand même beaucoup plus d'encadrement. Il y a vraiment un labo sur place et ils ont l'occasion de rencontrer plus de chercheurs. Nous, la difficulté c'est qu'on ne rencontrait pas de chercheurs ou très très peu. Il y avait les Caïmans : Morlet et Sansuc, mais autant que je me souvienne, j'interagissais très peu avec eux. Et là maintenant, enfin je ne sais pas pour les autres, mais au moins pour les normaliens, c'est très facile de rencontrer des gens, d'aller discuter, et de s'orienter. Mais on peut quand même avoir les pires inquiétudes. Sur la façon dont les choses se passent et la difficulté pour les jeunes d'obtenir des postes. C'est devenu quand même très difficile ! Moi, honnêtement, je pense que je n'aurais pas survécu à ce système s'il avait fallu faire des post-docs pendant plusieurs années, avant d'avoir quelque chose de stable. Je n'aurais pas été suffisamment motivé pour avoir un poste définitif à 30 ans ou 35 ans. Ce sont des choses qui arrivent, des personnes très bien et qui ont des postes très tard ! Je ne sais pas comment survivre dans ces conditions. Même psychologiquement, quoi. Je veux dire encore du point de vue financier : on trouve des post-docs, on va à droite à gauche mais, même l'idée du post-doc si tu veux. Tu fais ta thèse, tu as l'impression d'avoir fait une bonne thèse. Et puis il faut recommencer autre chose à un autre endroit avec d'autres personnes. Je pense que ça ne convient pas à tout le monde. C'est ça, moi je suis un cas qui n'est pas du tout le cas typique actuellement. Quelqu'un qui ferait ça maintenant, il serait dégagé du système parce qu'au bout de 2 ans, il n'aurait rien fait et il n'aurait même pas de directeur de thèse.

SVN – Actuellement, est-ce que tu penses qu'il y a des sujets qui sont particulièrement porteurs ?

J'ai l'impression que les probabilités sont très porteuses. C'était quand même un sujet qui était marginal et puis c'est devenu vraiment fondamental. Moi, je suis nul en probas, je n'ai jamais enseigné les probas, mais je pense que c'est un sujet porteur. Peut-être que je me trompe. Les probas en lien avec d'autres mathématiques. Les équations différentielles stochastiques, ce qu'a fait Le Gall et toute cette bande sur les triangulations aléatoires, ... Tout ce qui se passe dans ce domaine-là que je ne connais pas bien, mais j'ai l'impression qu'il se passe beaucoup de choses.

SVN – Et quand tu en as marre de faire des maths, si ça t'arrive, qu'est-ce que tu fais ?

Mon grand truc, c'est la Bretagne. Maintenant j'ai une maison en Bretagne donc on y passe beaucoup de vacances. On a des petits-enfants et on s'occupe d'eux. En Bretagne, ce que j'aime bien c'est faire du kayak, nager, tout ça... Et c'est vrai que je fais un break complet pendant l'été. Je suis un peu mon mail mais, parfois à la rentrée, je me dis « je n'ai plus d'idées, je vais arrêter, j'en ai marre, c'est trop dur ! » [rires] Je fais un break très long.

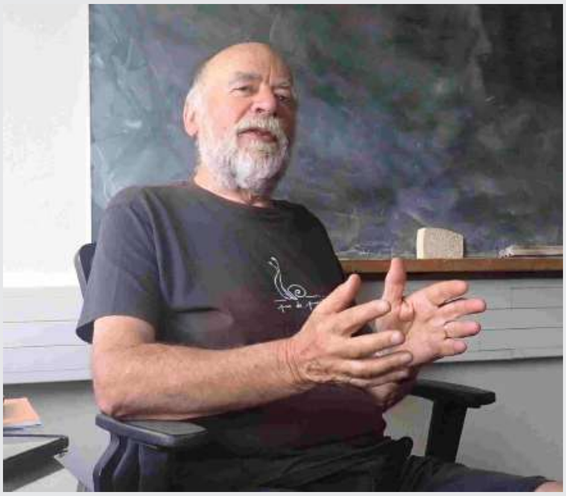
SVN – Est-ce que tu arrives à t'y remettre après ? Il y a des gens qui disent que, s'ils font des breaks, c'est trop difficile de s'y remettre.

Des fois c'est dur, des fois ça va bien. Maintenant, j'ai une bonne liste de problèmes, donc ça va mieux qu'à une certaine période. J'ai eu des périodes, où ça ne redémarrait pas. Maintenant, ça ne m'arrive plus. Peut-être parce que j'ai des collaborateurs qui me relancent vers la fin des vacances !

SVN – Et toi, est-ce que tu avais des trucs particuliers à dire ?

Non, j'ai eu beaucoup de chance finalement ! Par mon éducation, les profs que j'ai eus, les écoles où je suis allé. Ma thèse aussi. C'est vrai que quand tu es jeune et que tu fais directement un truc que tout le monde remarque, ça aide un peu quand même ! Là il y a un peu une question de chance de tomber sur un bon sujet. C'est un peu le hasard. Bon, la curiosité joue. Les qualités intrinsèques jouent certainement, mais être dans un milieu propice où ça va se développer naturellement et où tu n'auras pas trop d'efforts à faire pour trouver ta voie joue aussi. C'était un peu étonnant, cette époque ! Parce qu'il y avait peu de cours. L'important c'est ce qui se passait entre les élèves et ce n'était pas si mal ! Ensuite, ils ont créé le magistère avec tous les cours à l'école normale et je pense qu'il a commencé à y avoir une pression sur les élèves du point de vue scolaire. Nous, on n'avait aucune pression...

Je veux aussi mentionner que, si au début je travaillais vraiment seul, j'ai eu par la suite la chance d'avoir de nombreux collaborateurs et élèves. Pour finir, la vie de famille a été importante pour moi et je voudrais remercier mon épouse, Marie-Jo, pour ce qu'elle a été et est encore pour moi tous les jours.



Yves Colin de Verdière, né en 1945, est un mathématicien spécialiste de géométrie spectrale et d'analyse microlocale avec des contributions allant de la géométrie riemannienne à l'étude du chaos quantique, de la sismologie et des ondes internes en physique en passant par la théorie des graphes. Il a soutenu en 1973 une thèse d'état sur le lien entre le spectre du laplacien et les géodésiques périodiques sous la direction de Marcel Berger. Après 9 années passées à l'université Paris 7, il a été professeur des universités à l'université de Grenoble de 1977 à 2005 et il y est professeur émérite depuis 2005. Il a été membre senior de l'Institut Universitaire de France (1991-2001) et il est membre honoraire étranger de l'Académie américaine des arts et des sciences depuis 2005. Il est lauréat du prix Ampère (1999) et de la médaille Émile Picard (2018) de l'Académie des sciences.

Références

[1] R. Balian et C. Bloch. « Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. III : Eigenfrequency density oscillations ». *Ann. Phys.* **69** (1972), p. 76-160.

[2] M. Berger. « Yves and Arthur : some recollections ». *Ann. Inst. Fourier* **57**, nº 7 (2007), p. 2083-2089.

[3] A. Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[4] M. Campillo et A. Paul. « Long-range correlations in the diffuse seismic coda ». *Science* **299**, nº 5606 (2003), p. 547-549.

[5] Y. Colin de Verdière. « Ergodicité et fonctions propres du laplacien ». *Comm. Math. Phys.* **102**, nº 3 (1985), p. 497-502.

[6] Y. Colin de Verdière. « Pseudo-laplaciens. II ». *Ann. Inst. Fourier* **33**, nº 1 (1983), p. 87-113.

[7] Y. Colin de Verdière. « Semiclassical analysis and passive imaging ». *Nonlinearity* **22**, nº 6 (2009), r45-r75.

[8] Y. Colin de Verdière. « Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. I ». *Compos. Math.* **27** (1973), p. 83-106.

[9] Y. Colin de Verdière. « Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. II ». *Compos. Math.* **27** (1973), p. 159-184.

[10] Y. Colin de Verdière. « Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques ». *Comment. Math. Helv.* **54**, nº 3 (1979), p. 508-522.

[11] Y. Colin de Verdière. « Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité. (On a new graph invariant and a planarity criterion) ». *J. Comb. Theory, Ser. B* **50**, nº 1 (1990), p. 11-21.

[12] Y. Colin de Verdière. « Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein ». *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* **293** (1981), p. 361-363.

[13] Y. Colin de Verdière et L. Saint-Raymond. « Attractors for two-dimensional waves with homogeneous Hamiltonians of degree 0 ». *Comm. Pure Appl. Math.* **73**, nº 2 (2020), p. 421-462.

[14] Y. Colin de Verdière et J. Vey. « Le lemme de Morse isochore ». *Topology* **18** (1979), p. 283-293. issn : 0040-9383.

[15] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition. Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. x+440.

[16] M. Kac. « Can one hear the shape of a drum? » *Am. Math. Mon.* **73** (1966), p. 1-23.

[17] V. P. Maslov. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques.* French. Études mathématiques. Paris : Dunod; Paris : Gauthier-Villars. XVI (1972). 1972.

[18] A. I. Šnirel'man. « Ergodic properties of eigenfunctions ». *Uspehi Mat. Nauk* **29**, nº 6(180) (1974), p. 181-182.

[19] S. Zelditch. « Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces ». *Duke Math. J.* **55**, nº 4 (1987), p. 919-941.

Un entretien avec Marie-Françoise Roy

En février 2023, Marie-Françoise Roy a accordé un entretien à la *Gazette*, évoquant sa vie personnelle, scientifique, militante ainsi que son engagement pour la communauté mathématique tout au long de sa carrière jusqu'à aujourd'hui. Ses propos ont été recueillis à Lille par Laurence Broze, Sophie Dabo et Mylène Maïda et retranscrits sous la forme du récit que nous vous proposons ici.

Conference on Global Approach to the Gender Gap (2019)

L'enfance

Marie-Françoise Roy est née en 1950. C'est d'abord la « petite fille » qu'elle fut et ses parents que nous l'invitons à présenter. Sa mère a suivi des études de médecine, mais a été mère au foyer pendant plusieurs années, avant d'exercer la médecine générale dans le pavillon familial. Son père, issu d'une famille pauvre et brillant littéraire s'était arrêté au baccalauréat, du fait de la guerre pendant laquelle il a été soldat sept ans. Cadre dans les assurances, il a poursuivi en parallèle une carrière de romancier amateur.

Un fait saillant de son enfance reste la séparation avec sa cousine Jocelyne, qui vivait chez ses parents et était comme une grande sœur pour elle, organisait des jeux et était très imaginative. Au décès de son père, Jocelyne sera « reprise » par sa mère, laissant à Marie-Françoise un sentiment de perte. L'enfance insouciante s'est ainsi arrêtée à 6 ans, elle se met alors à dévorer les livres. Aînée de trois enfants, elle a été identifiée dès la petite enfance pour sa précocité intellectuelle. Excellente élève, elle a d'abord suivi les enseignements d'une école primaire privée, tenue par des religieuses, avant de rejoindre le lycée public, deux établissements réservés aux filles. Elle fait remarquer la singularité de son parcours d'adolescente alors que ses cousins et cousines ne sont pas allés jusqu'au baccalauréat, comme la majorité de leur classe d'âge. Elle était cet oiseau rare qui étudiait le grec et le chinois et était ressentie comme différente. On se moquait gentiment d'elle.

Marie-Françoise est lauréate du baccalauréat à 17 ans. La suite de son parcours scolaire la conduira dans une classe préparatoire du lycée Condorcet à Paris qui comptait alors 4 filles en Sup et elle seule en Spé M'. Le lycée Condorcet était un lycée de garçons, le plus commode pour elle car elle arrivait de banlieue à la Gare Saint-Lazare. Mai 68 a lieu pendant qu'elle est en Sup, ce qui crée une tension avec son environnent familial qui veut contrôler ses activités. Pas encore majeure, elle réussit parfois à s'échapper pour des manifestations où elle découvre qu'on s'y rassemble, qu'on y chante (aussi), découverte qui a pris le relais alors qu'elle a cessé de croire en Dieu. Elle est admise à l'Éns de Sèvres, à 19 ans. À l'époque, elle se voit devenir professeure de lycée.

Le début de sa carrière, de ses engagements

Elle allait suivre la plupart de ses cours à l'université. Il y avait également des cours entre filles à l'Éns, c'est là qu'elle rencontre, Yvette Amice, théoricienne des nombres, qui leur parle d'analyse complexe, sujet qui ne figurait pas alors au programme de l'université. C'est Yvette Amice, la première, qui l'encourage à faire de la recherche, comme une évidence.

Elle évoque son itinéraire académique qui s'est doublé d'un engagement sur des questions de société qu'elle a poursuivi, sous diverses formes, à toutes les étapes de sa vie. Elle a failli rater l'agrégation pour avoir été trop happée par l'action militante, auprès de familles immigrées, et négligé la préparation au concours.

À 22 ans elle estime avoir eu « juste des espérances » et ne pas avoir fait ses preuves en recherche, mais a pu bénéficier de circonstances favorables : soutenue par l'Éns de Jeunes Filles de Sèvres, elle est recrutée à Rennes pour un an puis obtient un poste à Paris Nord. Plus tard elle s'installera à Rennes. Les portes qui s'étaient ouvertes à elle, se sont refermées aussitôt, faisant d'elle pendant longtemps, la plus jeune des enseignants-chercheurs du laboratoire.

Son engagement féministe et syndical

C'est dans ce contexte qu'elle rencontre le féminisme.

Elle fait remonter sa révolte féministe à l'école primaire, devant les diktats de cette grammaire qui enseigne que « le masculin l'emporte sur le féminin ». Cette envie de changer la grammaire, si injuste, lui est restée. L'importance qu'elle donne à l'écriture inclusive date de son enfance. Quel contraste entre les mathématiques, qui tombent toujours juste, et cette grammaire absurde où le masculin l'emporte sur le féminin...

Autre expérience marquante, en maternelle, elle a passé quelques mois dans une école mixte où elle a peur des garçons qui courent à toute vitesse et occupent tout l'espace, elle se cache dans les jupes de la maîtresse. Le rejet de la force brute masculine lui vient de cette époque. Lors des années passées dans des « structures de filles », les garçons, elle les « croisait » dans la rue ... il n'y avait aucune domination masculine dans la vie scolaire.

Pour revenir à 1969, la majorité était fixée à 21 ans alors qu'elle se sentait parfaitement adulte à 19 ans, d'où l'obligation de tricher sur son âge pour rencontrer un gynécologue et obtenir des pilules contraceptives. Elle devient membre du Mouvement pour la liberté de l'avortement et de la contraception (MLAC), avec les permanences dans les rues et la libération de la parole des femmes qui parlent enfin de leurs avortements clandestins en public. Elle assiste des femmes pour des avortements par la méthode de Karman.

Son engagement féministe est permis par le solide soutien que lui apporte son mari Michel Coste à la maison, pour le ménage, leur premier bébé. C'est la manière dont il conçoit son propre engagement féministe, « assurer l'intendance » !

Cette forte mobilisation cesse en 1975 avec la légalisation, sous la présidence de Valéry Giscard d'Estaing, de la contraception, de l'avortement, et la majorité à 18 ans. Aux premières années de son mariage, avant ces réformes, la notion de chef de famille existait encore !

C'est le moment où Marie-Françoise et Michel vont tous les deux adhérer à la CFDT. Elle est attirée par un syndicat « pour toute l'université » sans hiérarchie, de la femme de ménage au professeur de classe exceptionnelle. C'était aussi l'époque de l'autogestion, avec notamment l'aventure de l'usine horlogère LIP en 1973. Elle n'a jamais pris de responsabilité particulière au sein de l'université Paris Nord. Elle participait à des collectifs d'enseignants, elle cite Marie Duflo, Jean-François Méla, avec qui elle travaillait sans qu'il n'y ait aucune hiérarchie.

Son engagement passionné à l'international prend ses sources à l'époque où Allende a été président au Chili, puis où des exilés sont arrivés en France après le coup d'état. Cela ne l'a pas empêchée de s'impliquer dans des questions plus locales, comme la grève des charges dans son immeuble de la « cité Allende » (déjà tout un programme s'amuse-t-elle), pour protester contre le fait que les ascenseurs soient toujours en panne dans cette résidence où elle logeait avec sa famille.

C'était le début des travaux sur les femmes et les maths au niveau des IREM et elle y participe activement. Il y avait Éliane Cousquer de Lille, Monique Pontier-Sueur d'Orléans et bien d'autres. Elles publient en 1979 une brochure à l'IREM de Paris Nord : « La mathématique : nom masculin pluriel », qui évoquait déjà les questions dont on parle toujours aujourd'hui : les stéréotypes, les manuels scolaires, l'anxiété des maths, l'exclusion des femmes. Il y avait aussi un groupe de travail « sexe et mathématiques » qui avait été épinglé par la Cour des comptes en raison de son intitulé ! C'était bien après Michèle Vergne qui avait posé le problème de la place des femmes en mathématiques dès les années 70.

Son engagement en mathématiques

Durant sa jeunesse, elle n'a pas particulièrement été encouragée à se diriger vers les mathématiques. Elle était bonne en tout au lycée. Finalement elle est contente d'avoir choisi les mathématiques plutôt que l'archéologie, l'étymologie ou l'anthropologie même si ces sujets la passionnent toujours. Car elle a conclu que faire des maths ne lui fermait aucune porte, cela ne l'empêchait pas d'être cinéphile, de lire des romans et des essais, ... alors que si elle avait arrêté les maths, une porte se serait fermée. En plus, franchement, ajoute-t-elle, j'avais beaucoup de facilités...

S'agissant des mathématiques donc, son premier projet a été de faire de l'histoire des maths en se disant qu'ainsi elle allait comprendre les grandes tendances des mathématiques actuelles. Mais grâce à sa rencontre avec René Taton, elle a compris que le travail historique était plus détaillé et moins grandiose que ce qu'elle imaginait. Elle n'a pas regretté son choix de « faire des maths pour de bon ». Elle continue à aimer la réflexion épistémologique liée à ses recherches et adore qu'un même problème soit abordé de différentes manières, par la logique, la géométrie ou l'algèbre, voire l'algorithmique, avec différents éclairages [1].

Elle réalise un DEA de logique avec Jean-Louis Krivine, dont elle admire le livre sur la théorie des ensembles paru aux PUF, et poursuit en thèse avec Jean Bénabou. Celui-ci travaillait sur les liens entre la théorie des catégories et la logique et cherchait des étudiants. Il les recrute, elle et Michel Coste. Michel soutient sa thèse d'état très vite, en 1977 et Marie-Françoise un peu plus tard en 1981, après avoir eu ses deux enfants. Ce décalage provient aussi du fait que Michel est entré au CNRS alors qu'elle, enseignante-chercheuse, s'est intéressée aussi à l'enseignement, et a connu une période de démotivation par rapport à la recherche lors de la naissance de ses enfants.

Elle rencontre des collègues étrangers par l'intermédiaire du séminaire Bénabou qui était devenu un lieu de rassemblement, de convergence, une sorte de melting pot. Elle finit par « atterrir » dans un domaine plus concret, celui de la géométrie algébrique réelle qui n'était pas du tout développée à l'époque. La première manifestation officielle de ce nouveau domaine des mathématiques fut le premier congrès de géométrie algébrique réelle qui s'est tenu à Rennes en 1981 et qu'elle a co-organisé.

C'est à cette époque qu'ont été créés des postes qui offraient la possibilité de passer deux ans en coopération et que Marie-Françoise et Michel sont partis au Niger avant de revenir à Rennes. Cette coopération entre Rennes et le Niger se basait sur l'existence d'échanges préalables entre l'IREM de Rennes et celui de Niamey. Au retour de ces deux années de coopération, un poste de professeur avait été promis à Michel. Elle avait des points de chute scientifiques à Rennes mais son poste était à Paris Nord, pas à Rennes! Elle part donc « sans filet » … avec un contrat de coopérante. Heureusement, au retour un échange de postes de maîtres de conférences entre Paris Nord et Rennes a pu être mis en place. En 1985, elle devient professeure. Selon les règles actuelles elle n'aurait pas pu être promue, puisqu'elle était déjà en poste à Rennes. Ni son travail précédent à Paris Nord, ni ses années au Niger n'auraient été prises en compte. Elle juge cette mobilité obligatoire au moment du passage professeur.e rigide et très injuste.

Son expérience au Niger

Dans ce départ au Niger entrait aussi une envie de changer de cadre, de quitter Villetaneuse et la cité Allende d'où les jeunes universitaires s'étaient peu à peu retirés. Elle avait eu un tout premier contact avec l'Afrique dans son enfance car sa mère très catholique avait des liens avec des religieux engagés dans des léproseries au Bénin et leur envoyait des médicaments et des bandages. Elle était aussi partie en vacances en Algérie avec Michel, dans un contexte militant. Mais elle ne connaissait pas vraiment la réalité de l'Afrique.

Une fois sur place, leur mission consistait à créer à l'université de Niamey une maîtrise alors que jusque-là l'offre était uniquement au niveau de la licence. Marie-Françoise et Michel organisent un séminaire de recherche et travaillent sur un projet de livre sur la géométrie algébrique réelle. Quelques collègues français viennent aussi les visiter sur place.

Pour elle, ce séjour au Niger correspond à un « passage à l'état adulte » avec des responsabilités, l'encadrement de ses premiers étudiants en thèse, un changement de dimension de son action, et aussi des revenus plus confortables.

« Nous avons emporté avec nous l'idée de conserver des relations avec le Niger, créer un partenariat scientifique à long terme. La maîtrise a survécu mais son aspect novateur s'est réduit, revenu à des enseignements plus classiques quand nous n'avons plus été là ».

En revanche, la coopération Rennes Niamey a été très efficace pendant plusieurs années, permettant la formation d'une quinzaine d'enseignants-chercheurs, dont une seule femme. C'est le point de départ de sa participation aux activités du CIMPA, puis d'un réseau de formation de recherche en algèbre et géométrie concernant plusieurs pays de l'Afrique de l'Ouest.

C'est aussi le point de départ d'une autre aventure, le soutien à l'auto-développement du peuple nigé-

1. Pour un article évoquant plus précisément ses travaux en mathématiques, nous renvoyons à l'article récent de Saugata Basu `https://www.ams.org/notices/202403/rnoti-p313.pdf` dans les Notices of the AMS, volume 71, number 3, March 2024.

2. `https://www.tarbiyya-tatali.org/`

rien dans le cadre de Tarbiyya Tatali [2], réseau d'associations au Niger et en France, qui travaille pour le développement durable, et dont la survie est loin d'être assurée avec le coup d'état au Niger en juillet 2023 et le divorce qui ne cesse de s'aggraver entre la France et le Niger.

Le retour en France

Le retour à Rennes n'a pas été compliqué à gérer. Marie-Françoise et Michel étaient très absorbés par la rédaction de leur livre *Géométrie algébrique réelle*, avec Jacek Bochnak. À partir de 87, leurs intérêts scientifiques ont un peu divergé. Elle s'est tournée davantage vers le calcul formel, qui se développait et ses liens avec l'algorithmique et l'informatique théorique. Elle participe à un GRECO (groupement de recherches coordonnées, ancêtre des GDR), des journées sont organisées, avec un groupe de travail à Rennes en algèbre commutative effective, des cours de DEA.

En 1985, elle est invitée à parler de géométrie algébrique réelle dans un congrès de logique à Orsay. Assiste à son exposé Leonore Blum, théoricienne des modèles qui s'est orientée vers l'informatique et qui avait été présidente de l'Association for Women in Mathematics (AWM). Celle-ci l'invite à parler des femmes et des mathématiques en France, dans un panel pour le Congrès international (ICM) de Berkeley en 1986. Pour préparer son intervention, elle contacte la centaine de femmes membres de la SMF auxquelles elle envoie un questionnaire et elle obtient une trentaine de réponses. C'est le point de départ de la création de l'association *femmes et mathématiques* en 1987, elle en est la première présidente. Parallèlement, elle participe à la création de European Women in Mathematics (EWM) dont la première réunion se déroule à Paris. Elle est ensuite invitée par Jean-Pierre Bourguignon à organiser une table-ronde pour le premier colloque MATHS A VENIR en 1987 [3].

Les responsabilités nationales, les honneurs

Les responsabilités exercées par la suite, comme la présidence de la commission de mathématiques au CNRS par exemple, lui semblent surtout liées au coup de projecteur dû à ses activités « femmes & mathématiques ». Quand on lui propose une responsabilité, un honneur, elle ne refuse pas car elle pense qu'accepter participe de la lutte contre l'invisibilisation des femmes. Elle essaye ensuite de le faire du mieux qu'elle peut. Il est destructeur de se poser trop de questions. Soit elle a le temps, elle dit oui, soit elle refuse. Si elle accepte, elle le fait à fond. Mais accepter reste toujours un effort, « l'objectif pour moi demeure d'éviter au maximum de subir le complexe de l'imposteur ».

Tout compte fait, être une femme l'a plutôt aidée. De Michel, elle dit « C'est plutôt moi qui lui fais de l'ombre. C'est profondément injuste mais je l'accepte, et il l'accepte aussi, car il faut redresser une situation ».

Le Prix Irène Joliot-Curie reçu en 2004 l'a particulièrement touchée, elle succédait à Françoise Héritier et se sentait très honorée. Elle a également reçu 2 doctorats *honoris causa* « c'était plutôt rigolo, ça a permis à mes petits-enfants de me décerner le titre de "Mamie Potter" ».

Depuis quelques temps, elle observe qu'un effort est fait pour la présence des femmes invitées dans les colloques au niveau international et en France aussi, par exemple pour les 150 ans de la SMF. Mais le problème reste énorme pour les mathématiciennes dans l'enseignement supérieur et la recherche en France, et ne fait que s'aggraver, la présence des filles dans les filières mathématiques au lycée étant en plein régression. Elle pense « depuis toujours » qu'il faut un fléchage de postes pour les femmes. Elle-même a bénéficié d'un tel mécanisme lorsqu'elle est entrée à Sèvres : en dépit de son rang, excellent, elle n'aurait sans doute pas été admise à Ulm. Sans son admission à Sèvres, elle n'aurait pas eu une carrière aussi brillante. C'était une forme de quota. Une politique de quota ne devrait pas être permanente mais durer autant que nécessaire pour sortir de l'ornière actuelle. L'idée lui semble progresser chez les femmes et chez les hommes. Elle est quand même étonnée d'avoir constaté que certaines femmes politiques, comme Valérie Rabault lors des Assises des mathématiques en 2022, se déclarent hostiles aux quotas pour les mathématiciennes alors que, sans eux, elles ne seraient pas arrivées aux hautes fonctions politiques qu'elles exercent.

Société Mathématique de France (SMF)

Elle a été la quatrième [4] femme à être présidente de la SMF, de 2004 à 2007. Elle venait de termi-

3. Sur les colloques MATHS A VENIR 1987 et 2009, voir : « MATHS A VENIR 2009 », Gazette de la SMF, 124, avril 2010.
4. Marie-Louise Dubreil-Jacotin en 1952, Yvette Amice en 1975, Mireille Martin-Deschamps de 1998 à 2001.

ner son mandat de directrice de l'irmar. Elle était membre de la smf depuis longtemps. Elle avait été élue au Conseil de la smf en 1988 lorsque Michel Demazure était président, mais n'avait pas exercé de fonction particulière. C'est Michel Waldschmidt qui lui propose de lui succéder. La présidence de la smf était à l'époque une tâche assez solitaire, et plutôt chronophage. Elle est heureuse d'avoir contribué à renforcer la visibilité de la smf au cirm, et à augmenter son audience, en offrant notamment une adhésion gratuite aux doctorantes et doctorants. Un mandat de trois ans ne permet pas de s'attaquer à tous les chantiers. Depuis cette époque, la smf a continué à évoluer, son site s'est notamment beaucoup modernisé. Elle souligne aussi l'excellent travail de Valérie Berthé en tant que rédactrice en chef de la Gazette qui a permis de rénover profondément celle-ci. Et salue le récent changement de titre, la *Gazette des mathématiciens* étant devenue la *Gazette de la Société Mathématique de France*, cessant ainsi d'exclure les mathématiciennes.

Et après ?

Après son mandat à la tête de la smf, elle s'engage dans l'organisation du colloque MATHS A VENIR 2009 ainsi que dans diverses responsabilités internationales. Au cimpa, elle devient chargée de mission pour l'Afrique sub-saharienne en 2007, fonction qu'elle occupe pendant six ans. Par ailleurs, elle relance ewm dont elle devient convenor de 2009 à 2013. Elle soutient Marie-Françoise Ouedraogo qui avait été nommée responsable de la commission pour les femmes africaines au sein de l'Union Mathématique Africaine, pour qu'elle développe une association indépendante en Afrique, l'African Women in Math Association (awma), similaire à ewm. À cette époque, Ingrid Daubechies était présidente de l'International Mathematical Union (imu) et souhaitait donner de la visibilité aux actions des femmes au niveau international. Elle demande à Caroline Series d'écrire des pages web concernant les mathématiciennes dans le monde sur le site de l'imu. Marie-Françoise y collabore car elles se connaissent toutes deux depuis le début d'ewm. Ingrid propose à l'imu de créer le Committee for Women in Mathematics (cwm). Marie-Françoise en devient présidente de 2015 à 2022 avec Caroline Series puis Carolina Araujo comme vice-présidentes. cwm comporte à l'heure actuelle 175 « ambassadrices » dans le monde entier. Elle s'implique ensuite dans le projet Gender Gap in Science, projet pluridisciplinaire soutenu par l'International Science Council qui étend un questionnaire développé par les physiciennes et une étude sur les modes de publication en mathématiques réalisé avec zbMATH. L'imu donne une forte priorité à ce projet dont elle devient une des deux coordonnatrices [5] .

Et maintenant ?

Elle continue à faire des maths avec des collègues au Sénégal, en Argentine, aux États-Unis et en France. Au niveau international, elle est fière d'avoir été nommée par l'université de Ziguinchor facilitatrice pour la création d'un centre sur le modèle du cirm, le projet cirius.

À la suite de ses différentes responsabilités, elle est heureuse d'avoir pu passer le relais à des personnes de qualité. Elle aime beaucoup les évolutions récentes des mathématiques, leurs ouvertures thématiques, leurs nouveaux outils.

De gauche à droite Louis Mahé, Marie-Françoise Roy, Michel Coste (2011)

5. La smf a publié en mai 2024 un supplément « Pour la parité en sciences. Une approche globale des inégalités femmes-hommes en mathématiques, informatique et sciences : comment les mesurer ? comment les réduire ? ». `https://smf.emath.fr/node/3649974` coordonné par Marie-Françoise et Colette Guillopé composé de la traduction française des principaux chapitres du Gender Gap in Science book A Global Approach to the Gender Gap in Mathematical, Computing, and Natural Sciences : How to Measure It, How to Reduce It ?, 2021, imu, isbn 978-3-00-065533-3. `https://zenodo.org/records/3882609` assortis de deux chapitres sur les inégalités femmes-hommes en mathématiques en France et en Afrique.

... un Chant de Cremona

• A. Fanelli

Un conte de géométrie algébrique, librement inspiré de *A Christmas Carol* de Charles Dickens.

1. Premier couplet

Les dinosaures étaient morts, pour commencer. Là-dessus, pas l'ombre d'un doute. Tous les géomètres algébristes le savaient depuis les années 80. Tous sauf Nicolas Plat*, pourrait-on dire. Son bureau de la rue d'Ulm était poussiéreux et on n'y avait pas vu d'étudiant depuis de nombreuses années. Ce jour-là, la porte du bureau de Monsieur Plat était fermée, comme d'habitude, quand quelqu'un frappa.*
« Entrez. »
« Bonne année à vous, monsieur ! »
Monsieur Plat leva les yeux de son vieil ordinateur portable et fit un sourire forcé à son ancienne thésarde. Depuis sa soutenance, il avait perdu tout contact avec elle.
« Je ne comprends pas pourquoi vous travaillez sur ce groupe de Cremona » lui disait-il pendant leurs discussions au tableau « Ce n'est rien de plus qu'un exemple ! »
« Monsieur, il n'y a rien de plus beau que la géométrie birationnelle de $\mathbb{P}^n$! »
« Bah ! » dit Monsieur Plat « Sottise ! »

Depuis l'époque de Filippo Brunelleschi, les architectes, les peintres et bien-sûr les mathématiciens savent que la façon la plus naturelle de compactifier le plan $\mathbb{A}^2$ (ou l'espace $\mathbb{A}^3$) consiste à ajouter une droite (ou un plan) à l'infini.

Soient $n \geqslant 0$ un entier et k un corps.

Définition 1. L'espace projectif de dimension n est

$$\mathbb{P}^n_k := (k^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$$

où $(x_0 \dots, x_n) \sim (y_0 \dots, y_n)$ si $(y_0 \dots, y_n) = \lambda(x_0 \dots, x_n)$, avec $\lambda \in k^*$. L'image de $(x_0 \dots, x_n)$ dans le quotient $\mathbb{P}^n_k$ est noté $[x_0 : \dots : x_n]$.

Par construction, lorsque $k = \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}^0_{\mathbb{R}} = \mathbb{A}^0_{\mathbb{R}} = \{\text{point}\}\ ;$$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{A}^0_{\mathbb{R}} \simeq \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1\ ;$$

et en général :

$$\mathbb{P}^n_k = \mathbb{A}^n_k \cup \mathbb{A}^{n-1}_k \cup \dots \cup \mathbb{A}^1_k \cup \mathbb{A}^0_k.$$

On peut examiner les applications polynomiales inversibles sur $\mathbb{P}^n_k$ et il n'est pas difficile de voir que ce groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k)$ coïncide avec $\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$, c'est-à-dire les matrices inversibles à coefficients dans k, quotienté par son centre.

Plus généralement, on peut examiner les applications *inversibles* de la forme

$$f \colon \mathbb{P}^n_k \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k\ [x_0 : \dots : x_n] \mapsto [f_0(x_0, \dots, x_n) : \\ \dots : f_n(x_0, \dots, x_n)]$$

où les f_i sont des polynômes du même degré sans facteurs communs. La flèche pointillée exprime le fait que ces applications sont en général définies uniquement sur un sous-ensemble ouvert dense de $\mathbb{P}^n_k$. Ces applications sont dites *birationnelles*.

Définition 2. Soient $n \geqslant 1$ un entier et k un corps. Le *groupe de Cremona* de rang n est défini comme

$$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k) := \{f \colon \mathbb{P}^n_k \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k \mid f \text{ est birationnelle}\}.$$

Si $n \geqslant 2$, on peut facilement voir que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \subsetneq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$: définissons

$$(n=2) \quad \iota \colon \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow \mathbb{P}^2_k \qquad \iota([x_0 : x_1 : x_2]) \\ = [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1].$$

Clairement, ι est bien définie sur l'ensemble ouvert $\mathbb{P}^2_k \setminus \{[1:0:0],[0:1:0],[0:0:1]\}$. De plus, $\iota \circ \iota = \mathrm{id}$, donc $\iota \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_k)$.

Les groupes de Cremona ont été introduits par Luigi Cremona [6, 7], et l'étude de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ est devenue centrale dans les premières décennies du XX^e^ siècle, avec les progrès de l'école italienne de Guido Castelnuovo et Federigo Enriques. La théorie des surfaces algébriques et leur classification ont été développées à cette époque.

Cependant, plusieurs questions naturelles sur les groupes de Cremona sont restées ouvertes jusqu'à assez récemment...

2. Deuxième couplet

Quand Monsieur Plat s'éveilla, il faisait si noir, que, regardant depuis son bureau, il pouvait à peine distinguer les étagères et le tableau noir. S'endormir à son bureau n'était pas quelque chose d'inhabituel pour lui. Il se leva, alluma la lumière et vit un calcul au tableau noir, issu d'une discussion avec son ancienne étudiante.

$$\begin{gathered}(k^d,+)\times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n \\ ((t_1,\dots,t_d),(x_1,\dots,x_n)) \mapsto \left(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+\sum_{i=1}^{d} t_i x_1^i\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Une image vivante et animée de lui-même, du temps de sa jeunesse, accompagné de ses camarades, lui vint à l'esprit. Il suivait un cours sur les groupes algébriques et ses camarades avaient l'habitude de l'appeler Fidel Plat, *et cela le rendait très fier. À l'époque, il aimait construire des exemples géométriques pour mieux comprendre les énoncés du cours et il trouvait cela révolutionnaire.*
Toutes ces pensées le mirent dans une humeur nostalgique et plus sombre qu'à l'accoutumée.

Les géomètres algébristes étudient les *variétés algébriques* sur un corps k, qui sont, en gros, les objets géométriques définis par des équations polynomiales avec des coefficients dans k, contenus dans un certain espace projectif.
Un *groupe algébrique* G est un *objet groupe* dans la catégorie des variétés algébriques sur k, c'est-à-dire une variété algébrique avec une structure de groupe compatible avec la structure de variété algébrique.

Diverses questions peuvent être posées à propos de la structure de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$. Par exemple, l'action (1) montre qu'on peut définir une action du groupe algébrique $(k^d,+)$ sur l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$. En homogénéisant les coordonnées, on voit que cette action se prolonge à une action *rationnelle* (i.e. définie sur un ouvert dense) de $(k^d,+)$ sur $\mathbb{P}_k^n$. En d'autres termes, nous réalisons $(k^d,+)$ en tant que sous-groupe algébrique de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$, pour tout $d \geqslant 1$. Ceci n'est qu'un exemple, car les groupes de Cremona contiennent de nombreux autres sous-groupes algébriques de dimension arbitrairement grande.

Question 1. *[11] Peut-on introduire une structure universelle d'un groupe algébrique (de dimension infinie) sur les groupes de Cremona ?*

Cette question a récemment reçu une réponse, grâce à Jérémy Blanc et Jean-Philippe Furter. De plus, les auteurs décrivent les obstructions topologiques à être un groupe algébrique.

Théorème 1. *[3] Soit k un corps algébriquement clos. Il n'existe aucune variété algébrique de dimension infinie sur k qui soit homéomorphe à* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$.

3. Troisième couplet

Monsieur Plat quitta son bureau et ferma la porte à clé. Il réalisa que le couloir avait subi une transformation surprenante. Les murs et le plafond étaient si richement décorés de guirlandes de feuillage verdoyant, qu'on eut dit un bosquet véritable dont toutes les branches reluisaient de baies cramoisies.
« Ces étudiants engagés pour l'environnement ont transformé ce bâtiment en jungle, » pensa-t-il.
Quelques collègues prenaient un café dans la salle détente et Monsieur Plat pouvait entendre quelques mots.
« C'est un drôle de type, le vieux bonhomme ! » dit l'un, « c'est vrai, et il pourrait être plus agréable, mais ses défauts portent avec eux leur propre châtiment. » Ils parlaient de lui.
« Le châtiment pour avoir prouvé de beaux théorèmes, dans leur forme la plus générale, avec des méthodes élégantes et sans se salir les mains avec des équations ? Pas si simple... » se dit tristement Monsieur Plat.

Federigo Enriques, l'un des premiers mathématiciens à avoir étudié les groupes de Cremona, conjectura à la fin du XIXᵉ siècle que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ est un groupe simple [8]. Cette conjecture, naturelle du point de vue de la théorie des groupes, resta ouverte pendant plus d'un siècle, jusqu'aux travaux de Serge Cantat et Stéphane Lamy.

Théorème 2. *[5] Le groupe de Cremona* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ *n'est pas simple.*

Les techniques développées dans ce travail nécessitent une étude minutieuse de l'action de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ sur un espace hyperbolique de dimension infinie $\mathbb{H}_\infty(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ par des isométries.

Cette nouvelle approche par la géométrie hyperbolique a été développée au cours des dernières années : en particulier, Anne Lonjou et Christian Urech ont exploité l'action par isométries des groupes de Cremona sur des *complexes de cubes*, c'est-à-dire des unions de cubes unitaires euclidiens de dimension finie collés ensemble par des isométries entre certaines faces. Cette approche a fourni plusieurs résultats anciens et nouveaux sur les groupes de Cremona, à la fois du point de vue de la théorie des groupes et de la dynamique [9].

4. Quatrième couplet

Le vieux mathématicien quitta la salle détente sans être vu, le cœur plein de tristesse. Il s'arrêta au bout d'un couloir presque abandonné, devant la porte de son bureau, et lut son propre nom : Nicolas PLAT. Il ouvrit la porte et se tint devant une pièce lugubre, misérable et en ruine. « Qu'est-ce qui ne va pas chez moi ? » se demanda-t-il, il sauta vers le tableau et vit apparaître soudainement

$$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus_I \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Il réfléchit et s'exclama : « C'est surprenant ! Quelle façon élégante de voir les fibrés en coniques ! »

En 2018, une médaille Fields a été décernée à Caucher Birkar pour ses résultats sur la bornitude des variétés de Fano [1, 2]. Conjecturalement, toutes les variétés algébriques de toute dimension peuvent être construites en utilisant trois briques élémentaires :

1. variétés de Fano (en gros, *des variétés avec une courbure positive*) ;
2. variétés Calabi-Yau (= *variétés plates*) ;
3. variétés de type général.

Les résultats de bornitude de Birkar pour les variétés de Fano, la conjecture dite de *Borisov-Alexeev-Borisov (ou BAB)*, nous disent en gros que, pour toute dimension fixe, il existe seulement un nombre fini de familles de variétés de Fano, à isomorphisme algébrique près. Ces résultats ont des conséquences révolutionnaires sur la géométrie des variétés rationnelles (c'est-à-dire birationnelles à $\mathbb{P}^n$) et, en particulier, sur la structure des groupes de Cremona ! Une première conséquence est une propriété algébrique remarquable.

Définition 3. Un groupe Γ a la *propriété de Jordan* s'il existe un nombre $j \in \mathbb{N}$ tel que tout sous-groupe fini $G \subset \Gamma$ contient un sous-groupe normal, abélien $A \subset G$ d'indice $|G : A| \leqslant j$.

Grâce aux travaux de Yuri Prokhorov et Costantin Shramov, nous savons que la conjecture BAB implique le résultat suivant.

Théorème 3. *[10] Pour tout $n \geqslant 1$, le groupe de Cremona* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ *a la propriété de Jordan.*

Plus récemment, Jérémy Blanc, Stéphane Lamy et Susanna Zimmermann ont prouvé que la non-simplicité de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ peut également être déduite de la conjecture BAB.

Théorème 4. *[4] Pour chaque $n \geqslant 3$, il existe un homomorphisme de groupe comme dans* (2)*, où l'ensemble I a le même cardinal que $\mathbb{C}$.*
En particulier, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ *n'est pas simple.*

La stratégie pour produire des homomorphismes surjectifs $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ consiste à étudier les *fibrés en coniques rationnels* (en gros, des variétés rationnelles couvertes par des coniques) et les applications birationnelles entre eux (appelées *liens de Sarkisov*).

5. Cinquième couplet

Soudain, quelqu'un frappa à la porte.
Monsieur Plat l'ouvrit, et son ancienne thésarde réapparut.
« Désolé monsieur, j'ai oublié mon sac à dos. »
« Une fille pleine d'intelligence ! Une fille remarquable ! » dit Plat, la faisant presque sursauter.
« Vous sentez-vous bien ? Ma visite n'est pas opportune, je suppose... Je suis sûre que j'ai interrompu vos maths... »
« Fort bien ; mais je vous dirai, » ajouta Plat « que je ne puis laisser plus longtemps aller les choses comme cela. Et donc, » Plat continua, « j'ai plein de questions pour vous sur ces groupes de Cremona ! »

Références

[1] C. Birkar. « Anti-pluricanonical systems on Fano varieties ». *Ann. of Math. (2)* **190**, nº 2 (2019), p. 345-463. issn : 0003-486X,1939-8980. doi : 10.4007/annals.2019.190.2.1. url : https://doi.org/10.4007/annals.2019.190.2.1.

[2] C. Birkar. « Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties ». *Ann. of Math. (2)* **193**, nº 2 (2021), p. 347-405. issn : 0003-486X,1939-8980. doi : 10.4007/annals.2021.193.2.1. url : https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.2.1.

[3] J. Blanc et J.-P. Furter. « Topologies and structures of the Cremona groups ». *Ann. of Math. (2)* **178**, nº 3 (2013), p. 1173-1198. issn : 0003-486X,1939-8980. doi : 10.4007/annals.2013.178.3.8. url : https://doi.org/10.4007/annals.2013.178.3.8.

[4] J. Blanc, S. Lamy et S. Zimmermann. « Quotients of higher-dimensional Cremona groups ». *Acta Math.* **226**, nº 2 (2021), p. 211-318.

[5] S. Cantat et S. Lamy. « Normal subgroups in the Cremona group ». *Acta Math.* **210**, nº 1 (2013). With an appendix by Yves de Cornulier, p. 31-94. issn : 0001-5962,1871-2509. doi : 10.1007/s11511-013-0090-1. url : https://doi.org/10.1007/s11511-013-0090-1.

[6] L. Cremona. « Sulle transformazioni geometriche delle figure piane ». *Mem. Acad. Bologna (2)* **2** (1863), p. 621-630.

[7] L. Cremona. « Sulle transformazioni geometriche delle figure piane ». *Mem. Acad. Bologna (2)* **5** (1865), p. 3-35.

[8] F. Enriques. « Conferenze di Geometria : fundamenti di una geometria iperspaziale ». *Bologna* (1895).

[9] A. Lonjou et C. Urech. « Actions of Cremona groups on CAT(0) cube complexes ». *Duke Math. J.* **170**, nº 17 (2021), p. 3703-3743. issn : 0012-7094,1547-7398. doi : 10.1215/00127094-2021-0061. url : https://doi.org/10.1215/00127094-2021-0061.

[10] Y. Prokhorov et C. Shramov. « Jordan property for Cremona groups ». *Amer. J. Math.* **138**, nº 2 (2016), p. 403-418. issn : 0002-9327,1080-6377. doi : 10.1353/ajm.2016.0017. url : https://doi.org/10.1353/ajm.2016.0017.

[11] I. R. Shafarevich. « On some infinite-dimensional groups ». *Rend. Mat. e Appl. (5)* **25**, nº 1-2 (1966), p. 208-212. issn : 1120-7175.

Andrea Fanelli

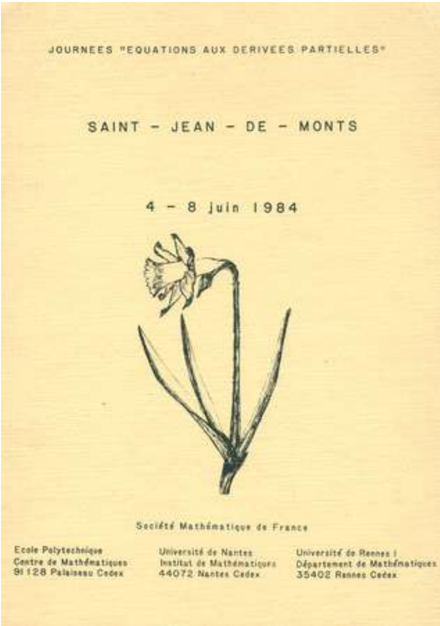
Université de Bordeaux, cnrs, Bordeaux inp, imb, umr 5251, Talence, France

andrea.fanelli@math.u-bordeaux.fr

Andrea Fanelli est un géomètre algébriste, spécialisé dans les variétés et les fibrations de Fano en géométrie birationnelle, avec des applications au groupe de Cremona. Après ses études de licence et de master à l'université de Rome Sapienza, il a soutenu sa thèse sous la direction de Paolo Cascini à l'Imperial College London en 2015. Il a travaillé en tant que post-doc à Bâle (Suisse), Düsseldorf (Allemagne) et Versailles. Depuis 2019, il est maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux.

Cinquante ans des Journées Équations aux Dérivées Partielles, 1974-2024

- P. Bolley
- J. Camus
- B. Helffer
- G. Métivier
- D. Robert



Au printemps 1974 eut lieu la première édition des « Journées Équations aux Dérivées Partielles ». Cinquante après, elles sont toujours là, sans cesse renouvelées et réinventées. Sans chercher à en tracer toute l'histoire, nous souhaiterions, dans ce texte, esquisser une réponse à la question : comment et pourquoi sont-elles nées et se sont développées ?

Tout d'abord il faut se souvenir que dans les années cinquante-soixante les Équations aux dérivées partielles (EDP) ont connu un formidable développement et que de nouveaux points de vue et de nouvelles techniques ont émergé. En particulier, en complément des méthodes, disons pour aller vite, d'analyse fonctionnelle, d'estimations, d'inégalités a priori, qui restent de toute façon indispensables, et au-delà de la classification « elliptique-parabolique-hyperbolique », avec sa variante « dégénérée » ou « fuchsienne », s'est dégagé tout un courant visant à étudier et expliquer les propriétés qualitatives des EDP à partir de l'analyse de leur symbole[1]. Par exemple pour des questions d'hypoellipticité, de résolubilité locale, d'unicité des solutions, de propagation des singularités, de construction de solutions approchées pour des opérateurs différentiels et de théorie spectrale. Avec de nouveaux outils comme le calcul pseudo-différentiel, les opérateurs Fourier Intégraux, et des avatars comme le calcul semi-classique, l'optique géométrique, ou plus tard, toujours pour aller vite, dans la catégorie « analyse microlocale » . Sans oublier la version de l'école japonaise des micro-fonctions. Ce passage au microlocal, dans « l'espace des phases », n'est évidemment pas sans lien avec la physique, les questions de quantification, leurs versions semi-classiques et aussi la théorie de la diffusion. Une première fonction des Journées EDP a été de contribuer à la diffusion en France de ces nouvelles orientations des EDP et au lancement de toute une communauté de jeunes mathématiciens sur ces thématiques. Une deuxième fut de donner de la visibilité à des équipes de province naissantes à une époque où la recherche était encore très centrée sur Paris.

1. Le symbole d'un opérateur différentiel est une fonction scalaire sur l'espace des phases (espace cotangent) obtenue par analyse de Fourier.

Rappelons-nous aussi le contexte de la recherche dans les années soixante-dix. Reimaginons un monde sans internet, sans ordinateur, sans traitement de texte, presque sans téléphone, où donc les échanges étaient lents, et infiniment plus rares. Un monde coupé en deux aussi, entre Est et Ouest. Une communauté française avec des moyens beaucoup plus chiches qu'ils l'ont été à partir des années quatre-vingt-dix et qu'ils le sont aujourd'hui, même si certains disent qu'aujourd'hui encore... Les débutants, et plus encore les provinciaux, avaient donc très peu l'occasion de rencontrer les grands noms et encore moins de se faire connaître. Dans ce contexte, les Journées EDP ont joué un rôle crucial de diffusion, de formation, d'aide aux débutants. C'était là une troisième motivation : elles ont effectivement contribué à lancer des générations d'e-d-pistes. Par exemple, dès les premières éditions, les débutants ont pu rencontrer et parler devant Nirenberg, Trèves, Hörmander, Leray... pour n'en citer que quelques-uns.

1. De Rennes à Saint-Jean-de-Monts

Les Journées EDP 1974-76 à Rennes

En juin 1973, Jacques Camus organise une première rencontre de trois jours à Rennes de quelques chercheurs en équations aux dérivées partielles, essentiellement des élèves de Charles Goulaouic et Mohamed Salah Baouendi.

Ces journées ont été les prémices de journées plus importantes tenues à Rennes entre 1974 et 1976, et qui ont pris dès l'année suivante, en juin 1974, le nom de « Journées Équations aux Dérivées Partielles ».

Les thèmes abordés lors de ces journées ont porté principalement sur l'analyse des équations aux dérivées partielles linéaires : problèmes elliptiques dégénérés, hypo-ellipticité, hypo-analyticité, problèmes de Cauchy, construction de paramétrix, propagation des singularités, théorie spectrale, ... Ces problèmes ont été traités en particulier par [2] S. Alinhac, M. S. Baouendi, P. Bolley, J.-M. Bony, L. Boutet de Monvel, J. Camus, J. Chazarain, M. Derridj, C. Goulaouic, A. Grigis, B. Helffer, G. Métivier, J.-F. Nourrigat, Pham The Laï, D. Robert, J. Sjöstrand, C. Zuily.

Les actes de ces Journées ont été publiés en 1975 sous la forme d'un volume dans *Astérisque* [3] et les deux autres années 1974 et 1976 dans les Publications des Séminaires de l'université de Rennes [4].

Lors d'une rencontre au Séminaire Jean Leray au Collège de France, des discussions ont lieu entre J. Camus et Pham The Laï, élève de Jean Leray, qui animait alors une équipe nantaise sur la théorie spectrale des équations aux dérivées partielles et les estimées de leurs valeurs propres (asymptotiques de Weyl). Le rapprochement de ces deux équipes s'est fait naturellement compte-tenu des sujets abordés à cette période à Rennes et à Nantes, problèmes elliptiques singuliers et études du comportement des valeurs propres associées à ces opérateurs, en rapport en particulier avec les travaux de M.S. Baouendi-C. Goulaouic (1969), C. Nordin (1972), rapprochement qui s'est renforcé par la suite par des rencontres régulières.

Après concertation, Jacques Camus et Charles Goulaouic proposent à Pham The Laï (et son équipe nantaise) de co-organiser les « Journées Équations aux Dérivées Partielles » 1977 à Saint-Jean-de-Monts, avec le soutien des équipes EDP d'Orsay, de l'École polytechnique et de Rennes.

Pour ceux qui ne l'ont pas connu, rappelons que Charles Goulaouic était un battant, quelqu'un qui avait une vision des évolutions mondiales, on pourrait dire une vision stratégique des EDP et au-delà. Il avait aussi un sens de l'organisation. Il a eu une influence considérable, bien au-delà de ses élèves, par des conseils, des discussions et ses capacités d'animation, partout où il est passé, à Rennes, à Orsay et à l'École polytechnique où il a fondé le séminaire Goulaouic-Schwartz.

Pendant de nombreuses années ce séminaire et les Journées EDP ont été en symbiose par leur esprit et le public concerné. Un autre point commun entre le séminaire et les Journées est l'importance donnée aux actes écrits des exposés, publiés, ce qui permettaient de les prolonger et d'en garder trace, une tradition également transmise dans les séminaires de Nantes et de Rennes. Dans l'esprit des organisateurs il était essentiel de faire de ces Journées un lieu de rencontre et d'échange entre chercheurs débutants et chercheurs confirmés.

Les premières Journées EDP 1977-78 à Saint-Jean-de-Monts

Pour la commodité de l'hébergement, et à l'initiative de Pham The Laï, les organisateurs nantais

2. Des noms ont pu être oubliés involontairement, que ces collègues nous excusent.

choisissent le vvf de Saint-Jean-de-Monts (à 70 km de Nantes) pour l'édition 1977 des Journées. L'hébergement du vvf était plutôt bien adapté pour accueillir un grand nombre de participants, notamment la première semaine de juin, avant la saison touristique.

Cette édition 1977, qui se déroule sur une semaine, regroupe une vingtaine de conférenciers et une soixantaine de participants provenant principalement des équipes françaises. Parmi les quelques participants étrangers, M. S. Baouendi (Purdue) a joué un rôle important pour tous les élèves de C. Goulaouic. Dans ces débuts, le choix des conférenciers était fait par les équipes de Rennes, Nantes et l'École polytechnique.

On se souvient notamment de la conférence de Jean Leray, minutieusement préparée sur le tableau noir, portant sur l'analyse lagrangienne et la théorie de Maslov. Les actes de ces Journées 1977 ont été publiés dans un Lecture Notes [1]. L'édition 1978 a également eu lieu à Saint Jean-de-Monts et s'internationalise avec des participants et conférenciers venant de Copenhague, Düsseldorf, Lund, Purdue, Kyoto, ... Il est à noter que, si en 1977, tous les exposés, sauf un, sont en français, en 1985 ils sont pour moitié en français et en anglais, et à partir de 1985 environ, la plupart des conférences ont lieu en anglais.

Les Journées edp 1979 à Saint-Cast

Pour 1979, les organisateurs rennais choisissent Saint-Cast, les rochers de la Bretagne nord plutôt que la plage de sable vendéenne.

Cette année est marquée par une avancée notable sur les edp non linéaires avec la présentation des travaux de Jean-Michel Bony sur le calcul paradifférentiel.

Ensuite les Journées sont de retour à Saint-Jean-de-Monts pour une longue période et nous donnons dans la suite quelques détails sur l'historique de ces vingt années.

2. Les Journées edp 1980-99 à Saint-Jean-de-Monts

De nouveau, le vvf de Saint Jean-de-Monts nous a accueillis. Sa directrice, Madame Ruchaud, nous réservait toujours un excellent accueil et faisait le maximum pour nous fidéliser. Les repas étaient de bonne qualité, et notamment le repas du mercredi soir où les « fruits de mer » étaient appréciés. De plus elle avait pris l'initiative d'informer les élus locaux, maire et député, ainsi que la presse locale Ouest-France, Presse-Océan, de la tenue d'un colloque international en mathématiques dans son établissement.

Figure 1 – Ouest France, juin 1980

70 participants français et étrangers aux journées « Equations aux dérivées partielles » :

Dynamisme de la recherche.... malgré le soleil

Les brûlantes radiations du soleil de juin, véritable invitation à la sieste et aux vacances, n'ont pas troublé les travaux des quelque 70 participants aux cinq journées « Equations aux dérivées partielles » qui se sont déroulées cette semaine au V.V.F. de Saint-Jean-de-Monts.

Créées à l'initiative de l'université de Rennes, ces journées sont organisées annuellement et ce depuis 1973, par les instituts de mathématiques des universités de Rennes et de Nantes, par le centre mathématique de l'Ecole polytechnique, sous le patronage de la Société mathématique de France et du Centre national de recherches scientifiques, elles ont pour but de regrouper chaque année au début du mois de juin l'ensemble des chercheurs venant d'universités françaises et de certaines universités étrangères pour exposer les résultats obtenus pendant l'année écoulée, confronter les recherches en cours et proposer les thèmes nouveaux.

Ces traditionnelles réunions sont un facteur de dynamisme dans la recherche scientifique de haut niveau, favorisant les contacts enrichissants entre chercheurs jeunes et expérimentés, leurs succès n'est jamais démenti. Parmi les 70 participants le nombre de chercheurs étrangers est particulièrement important et nombre de nations sont représentées, Algérie, Brésil, Chine, Danemark, Etats-Unis, Espagne, Japon, Maroc, Tunisie et Suisse.

La quintescence des travaux réalisés sera santionnée par la publication d'un document inclus dans une revue scientifique internationale diffusée à grande échelle et éditée par les services de l'Ecole polytechnique, et permettra aux esthètes en la matière de découvrir l'essentiel des interventions de quelque vingt conférenciers (dont cinq femmes).

L'encadrement de ce congrès était assuré par MM. Jacques Camus université de Rennes, Pham The Lai (université de Nantes), et Charles Goulaouix (école technique). Notons que c'est la troisième fois que le V.V.F. abrite cette assemblé studieuse et tous les congressistes n'ont eu qu'à se féliciter de l'accueil très chaleureux de Mlle Ruchaud, directrice, et du personnel de l'organisation parfaite des conditions matérielles et bien entendu de l'environnement agréable de la station. Ceci motivera peut-être les organisateurs à reconduire ces journées d'étude à Saint-Jean-de-Monts, dans les années à venir, preuve s'il en est que la station balnéaire est aussi domaine de prédilection, en périodes pré et post-estivales, de nombreux groupes de travail.

FIGURE 2 – Ouest France, juin 1981

Le congrès international de mathématiques et d'informatique à Saint-Jean-de-Monts

Saint-Jean-de-Monts a accueilli pendant près d'une semaine les plus éminents mathématiciens mondiaux. En effet, les traditionnelles journées « équations aux dérivées partielles » organisées par les professeurs Jacques Camus (université de Rennes), Charles Goulaouic (Ecole Polytechnique) et Pham The Lai (université de Nantes) ont eu lieu de nouveau au V.V.F. de Saint-Jean-de-Monts du 1er au 5 juin.

Colloque très important puisque l'on notait la présence de 120 participants. Venus du monde entier : Algérie, Belgique, Danemark, Espagne, Italie, Japon, Norvège, Suède, Suisse, Tunisie et des Etats-Unis, ces mathématiciens se sont réunis à cette occasion pour exposer et confronter leurs travaux.

Ces journées présentent cette année un caractère particulier à la fois par la qualité scientifique exceptionnelle et le nombre important de leurs participants. La municipalité de Saint-Jean-de-Monts a bien voulu mettre à la disposition des organisateurs de ce colloque les possibilités d'accueil du Palais des Congrès. Le dévouement du personnel du V.V.F. de la station, et en particulier sa directrice Mlle Ruchaud, ont permis le déroulement de cette réunion dans des conditions optimales. Les participants ont exprimé leurs plus vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué aux succès de cette rencontre. Depuis 10 ans c'est l'une des réunions les plus importantes qui a lieu sur le territoire français.

Lors du déjeuner de clôture, où l'on remarquait la présence de M. Mauger, député de la Vendée, de M. Jean Jacques Viguié, conseiller général, maire de Saint-Jean-de-Monts, et de M. Café, président de l'Office de Tourisme de la station, le maire de la ville a montré sa vive satisfaction du choix de Saint-Jean-de-Monts pour le déroulement de ce séminaire, dont il a souhaité le renouvellement l'an prochain.

Ainsi le maire de Saint-Jean-de-Monts, Monsieur Jean-Jacques Vigué, a remis la médaille de la ville à Louis Nirenberg en 1981, et en 1993 le nouveau maire, Monsieur André Ricolleau, a remis la médaille de la ville à Lars Hörmander.

Figure 3 – Presse Océan, juin 1981

Les mathématiques à Saint-Jean-de-Monts

P.O
du 06/06/81

Ils ont « planché » près de la plage...

● CHALLANS. – Les plus grands noms des mathématiques s'étaient donnés rendez-vous, à Saint-Jean-de-Monts, durant cette semaine, où 120 professeurs, venant de 12 pays différents ont « planché » sur les « équations aux dérivées partielles ». Ce séminaire était organisé par les professeurs Jacques Camus (université de Rennes), Charles Goulaouie (école polytechnique) et Phan The Laï (université de Rennes).

Le nombre important de participants et la qualité scientifique exceptionnelle de ce séminaire a frappé les observateurs. Il est maintenant certain que ces travaux donneront lieu à un certain nombre de publications dans les mois à venir. Soulignons que, parmi les congressistes, la délégation américaine était la mieux représentée puisqu'une quinzaine d'éminents mathématiciens n'ont pas hésité à franchir l'Atlantique pour participer à ces travaux. Lors de la clôture de ce séminaire, M. Viguié, maire de Saint-Jean-de-Monts, a remis la médaille de la ville à M. Louis Mirenberg (USA), à la fois en tant que grand mathématicien et plus âgé des congressistes.

L'accueil fourni par les VVF de Saint-Jean-de-Monts ayant ravi les participants, il est fort possible que le congrès 82 se déroulera, de nouveau, à Saint-Jean-de-Monts. Ce qui sera, à n'en pas douter, un honneur pour la région...

Figure 4 – K.Taïra, J. Camus, Pham The Laï, Noirmoutier, juin 1981

Figure 5 – Le Palais des congrès, juin 1990

Le planning des Journées, du lundi midi au vendredi midi, était conçu de sorte à faire une pause le mercredi après-midi pour laisser la place à des rencontres libres, studieuses ou touristiques, entre les participants.

Depuis 1981 les organisateurs rencontraient régulièrement le maire pour lui présenter le colloque, et à l'occasion, le solliciter pour améliorer l'organisation matérielle des Journées. Il y avait notamment deux difficultés matérielles à surmonter pour les organisateurs : la salle des conférences et le tableau noir.

Face au succès grandissant des Journées, la salle du vvf s'était avérée rapidement trop petite et de plus il n'y avait pas de tableau noir.

Grâce aux bonnes relations avec la municipalité, les organisateurs ont pu obtenir une aide matérielle de la mairie de Saint-Jean-de-Monts, à savoir disposer de la grande salle du Palais des congrès pour les conférences. Les participants, de l'ordre d'une centaine chaque année, y étaient confortablement installés (parfois trop à l'heure de la sieste !).

Le problème des tableaux n'était toujours pas résolu, « Beamer » n'existait pas encore, et les mathématiciens préféraient le tableau noir au rétro-projecteur. Les organisateurs amenaient donc chaque année 3 tableaux de Nantes et Rennes. Ensuite le Palais des congrès a accepté que les tableaux soient stockés sur place.

La participation à ces journées a rapidement augmenté, environ 70-80 personnes dès 1978 pour atteindre environ 120 participants en 1981. De même la dimension internationale de ces Journées s'est largement affirmée avec par exemple en 1981, environ 20 pays représentés et la présence de mathématiciens prestigieux. Un comité scientifique a été mis en place pour le choix des conférenciers à partir des années 1980.

Le Palais des congrès est à environ 2 km du VVF, parcours le long de la plage que nous effectuions quatre fois chaque jour. Ces déplacements étaient propices à de nombreuses discussions mathématiques et favorisaient en particulier une osmose entre participants jeunes (et débutants à l'époque) comme par exemple S. Serfaty, I. Gallagher (1998), Gilles Lebeau (82-87-92), moins jeunes et quelques grands invités comme par exemple S. Agmon (87-96), R. Beals (80-81-84), M. Sh. Birman (94), A. Connes (97), C. Fefferman (81), G. Grubb (78-81-86-87-88), L. Hörmander (87-93), M. Kashiwara (77), J. J. Kohn (81), J. Leray (77), R. Melrose (87), Y. Meyer (81-83-84), S. Mizohata (79-81), L. Nirenberg (81), E. M. Stein (82-85-95), F. Trèves (75-81-83-87-92-95).

Par ailleurs, ces échanges ont permis de développer plus largement les interactions entre écoles de différentes origines géographiques bien au-delà des équipes fondatrices : Bordeaux, Dijon, Grenoble, Lille, Nice, Paris-Nord, Reims, ... Dans les années 1970-80 les possibilités de communication étaient naturellement plus restreintes : courrier postal, téléphone (avec un coût élevé des communications), rencontres à Paris dans des séminaires. En particulier le séminaire Goulaouic-Schwartz que fréquentait le noyau dur des participants aux Journées EDP était le lieu où se préparaient ces Journées.

3. Évolution thématique des Journées

Les thèmes de départ principalement orientés vers les thématiques de recherche des élèves de Charles Goulaouic, se sont élargis rapidement dans différentes directions liées notamment aux autres équipes qui se sont manifestées lors de ces journées récurrentes, mais aussi liées au sens de l'évolution naturelle des recherches sur le plan international. Notamment, les opérateurs pseudo-différentiels, l'analyse harmonique, les EDP non linéaires, les problèmes à singularités coniques, les problèmes de Cauchy, la théorie spectrale et les problèmes semi-classiques, l'analyse complexe. C. Goulaouic souhaitait vivement que des travaux théoriques sur les EDP non linéaires se développent dans les équipes françaises.

Une nouvelle organisation s'est mise en place à partir de 1984 par la présence de mini-cours thématiques. Les premiers cours ont été donnés par J.-M. Bony et par H. Brézis (1984). Voici une liste (non exhaustive) de sujets traités.

– Calcul paradifférentiel et applications (J.-M. Bony - 1984).
– Effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique (J. Sjöstrand -1985).
– Théorie de la diffusion pour des équations semi-linéaires (J. Ginibre - 1985).
– Problèmes de Cauchy et ondes non linéaires (G. Métivier - 1986)
– Régularité des solutions de certaines équations elliptiques en dimension 2 et formule de la co-aire (J.-M. Ghidaglia - 1993)
– On global existence and blowup of classical solutions to multidimensional quasilinear wave equations (S. Alinhac - 2002).
– Quelques modèles en médecine (E. Grenier - 2004).

4. Financement et Publications

Financement

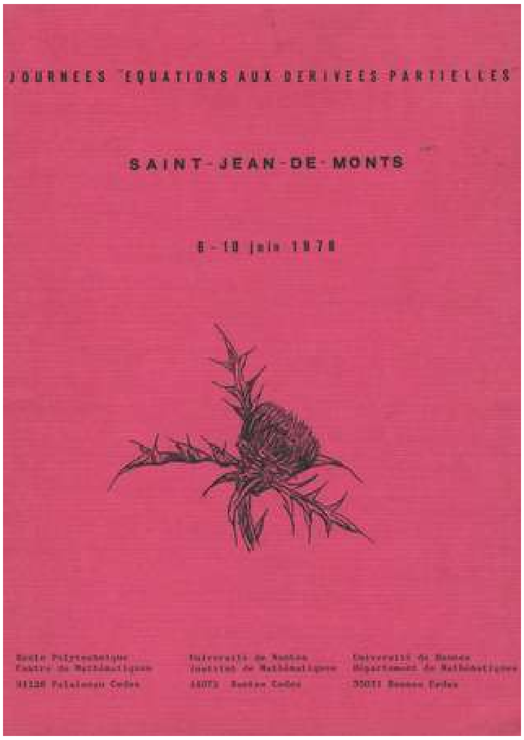
Le financement de ces Journées n'était pas toujours très facile.

À côté des équipes fondatrices Rennes-Nantes-École polytechnique, au fil du temps, beaucoup d'autres équipes sont venues prêter main forte, certaines régulièrement, pour soutenir d'une manière ou d'une autre l'organisation de ces Journées. Ainsi le financement était assuré au coup par coup essentiellement par les universités de Rennes, Nantes, l'École polytechnique, la Société Mathématique de France, le CNRS, et ponctuellement par d'autres organismes tels que les Départements de Mathématiques de Paris XI-Orsay, Bordeaux, Reims, Paris XIII, Rouen, les universités de Lund (Suède), de Copenhague (Danemark), la Municipalité de Saint-Jean-de-Monts (avec parfois des négociations de dernière minute), le Conseil régional des Pays de la

Loire, les fonds européens [3]. Mais, chaque année, les demandes d'aide devaient être renouvelées.

En particulier le CNRS a toujours soutenu les Journées. Son aide n'a jamais fait défaut, même s'il a fallu quelquefois discuter et argumenter longuement. Mais les arguments étaient bons et le CNRS a suivi. À partir de 1994, une étape importante pour la pérennité des Journées a été la création du Groupement De Recherche « Équations aux Dérivées Partielles » du CNRS, auquel participent les équipes de l'École polytechnique, des universités de Bordeaux, Nantes, Paris XI, Paris XIII, Reims et Rennes. Les Journées ont alors été organisées dans le cadre de ce GDR avec un financement assuré pour les années suivantes.

Publications



Dans le contexte des années 1970-90 l'information scientifique circulait essentiellement sous forme papier. La rédaction d'exposés de séminaires ou groupes de travail fournissait alors des documents de travail très utiles, en particulier pour les jeunes chercheurs. Parmi ces séminaires citons Rennes, Nantes, Grenoble, polytechnique (séminaire Goulaouic-Schwartz). Les publications des actes des Journées EDP ont été assurées chaque année très rapidement :

- en 1974 et 1976 par le département de Mathématiques de l'université de Rennes, [4] ;
- en 1975 par la Société Mathématique de France dans *Astérisque*[3] ;
- en 1977 dans *Lecture Notes in Mathematics*[1] ;
- de 1978 à 2001 par les Presses de l'imprimerie de l'École polytechnique, et en partie par le département de Mathématiques de l'université de Nantes,[2].

Pour la première édition le secrétariat de l'X (Michèle Lavallette [4] et Marie-José Lécuyer) avaient choisi de dessiner un chardon d'une part pour distinguer cette publication du séminaire Schwartz et son célèbre papillon et d'autre part parce que le chardon pousse dans les dunes de Saint-Jean-de-Monts. Plus tard le chardon a été remplacé par d'autres plantes comme par exemple (voir première figure) une jonquille en 1984.

- avec l'aide de la Cellule MathDoc (UMS 5638, UJF/CNRS) pour les années 2002-03-04.

L'ensemble des publications de 1974 à 2018 a été numérisé et est consultable en ligne[2].

Quelques anecdotes

L'ambiance des Journées était à la fois studieuse et détendue. Le choix de la première semaine de juin au bord de la grande plage de sable de Saint-Jean-de-Monts participait sans doute à cette détente.

Les Journées avaient souvent lieu en même temps que le tournoi de Roland Garros que les passionnés de tennis pouvaient suivre pendant les pauses d'après déjeuner.

Afin de donner place à un plus grand nombre d'exposés, il a été tenté de programmer des exposés le soir après le dîner, mais cette expérience a rapidement été abandonnée pour laisser place à des discussions informelles, voire certaines distractions, comme le jeu de dames que pratiquaient volontiers J.-M. Bony et A. Grigis.

3. Après de longues démarches, les organisateurs ont pu obtenir un financement assez important de l'Europe pour couvrir les frais, hébergement et transport, de 25 jeunes participants européens.
4. Nous remercions Michèle Lavallette de nous avoir transmis des informations concernant la publication des actes des journées.

Il arrivait parfois, que les discussions soient animées et les échanges un peu vifs, comme par exemple des discussions autour des méthodes d'analyse algébrique appliquées aux équations aux dérivées partielles. La suite a montré que ces méthodes avaient également leur intérêt.

Lors de soirées après le repas, nous avons pu apprécier les concerts donnés par Isabelle Gallagher à l'alto, Jean-Yves Chemin au violon et Raphaël Danchin au piano, avec les voix de Xavier Saint-Raymond, Nicolas Lerner.

5. La période post-Saint-Jean-de-Monts : les Journées EDP de 2000 à 2024

À la fin des années 1990, la direction du VVF de Saint-Jean-de-Monts a changé et les conditions d'accueil se sont dégradées. Les Journées changent alors de lieu avec quelques tentatives dans l'ouest : La Chapelle-sur-Erdre (2000), Plestin-les-Grèves (2001), puis en 2002-03-04 Forges-les-Eaux où les Journées sont organisées par l'École polytechnique et l'université de Rouen. En particulier les Journées 2003 ont été dédiées à la mémoire de Charles Goulaouic décédé 20 ans plus tôt. Une dédicace de Y. Meyer figure dans les actes des journées 2003.

À partir de 2005, une équipe émanant du GDRAEDP prend la responsabilité de l'organisation du colloque sur une période de quatre ans et les Journées ont lieu successivement à Évian, Biarritz, Roscoff, Obernai et depuis 2023 à Aussois.

Pour conclure, on peut dire qu'au fil du temps ces Journées sont devenues une œuvre collective qui est venue concrétiser l'ambition initiale de former une communauté scientifique entre chercheurs débutants et chercheurs confirmés autour des EDP dans un esprit d'ouverture, ambition d'être très généraliste, de permettre à toute une variété de problématiques et de techniques concernant les EDP de se rencontrer, de diffuser, d'interagir et ainsi de se renouveler. Bien sûr tous les aspects des EDP n'ont pas été abordés, loin de là. Mais beaucoup de frontières ont été explorées, avec l'analyse harmonique, la physique mathématique, la mécanique, ... comme on peut le voir avec les noms de certains invités cités précédemment. Alors, oui, curiosité, ouverture, renouvellement sont les maîtres mots de l'esprit des « Journées Équations aux Dérivées Partielles » perpétué par tous les organisateurs successifs. L'aventure s'est prolongée jusqu'en 2024 et continuera sûrement bien au-delà pour le plus grand plaisir de ses initiateurs.

Références

[1] *Équations aux dérivées partielles : proceedings, Saint-Jean-de-Monts*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.

[2] *Journées équations aux dérivées partielles*. https ://proceedings.centre-mersenne.org/journals/JEDP/. 1974-2018.

[3] « Journées : Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975) ». *Astérisque*, n° 34-35 (1976).

[4] *Publications des séminaires de l'université de Rennes*. 1974-1976.

Remerciements. Les auteurs remercient Romain Joly pour nous avoir encouragés à écrire cet historique et Gabriel Rivière pour ses relectures attentives.

Femmes, vulgarisation et pratique des sciences au siècle des Lumières. Les Dialogues sur l'astronomie et la Lettre sur la figure de la Terre de César-François Cassini de Thury
David Aubin
Brepols, 2020. 310 p. isbn : 978-2-503-58603-8

La forme du Dialogue ou de l'Entretien dans la littérature scientifique s'inscrit dans une longue tradition – héritée des auteurs grecs classiques – à laquelle Giuseppe Moletti au xvi^e^ siècle ou encore Galileo Galilei au xvii^e^ siècle ont contribué. Publiés ou restés à l'état de manuscrits, ces textes ont en général une visée didactique pour un public plus large que les seuls savants. Rédigés bien souvent en langue vernaculaire à partir de la période humaniste, ils mettent en scène deux protagonistes (voire plus), l'un jouant le rôle du maître et l'autre celui de l'élève. Bien que majoritairement masculins, ceux-ci laissent parfois la place, dès la Renaissance dans des textes philosophiques, à une femme, comme par exemple dans le *Dialogo della signora Tullia d'Aragona della infinità di Amore*, publié en 1547 ou *Il Raverta, Dialogo di M. Giuseppe Betussi* publié en 1562. C'est dans cette tradition où le Dialogue (ou l'Entretien) a vocation à instruire et à divertir au travers des échanges entre un astronome philosophe et une femme que s'inscrivent le célèbre texte des *Entretiens sur la pluralité des mondes* de Fontenelle (1686), ou le manuscrit inédit des *Dialogues sur l'astronomie* de César-François Cassini de Thury (1740-1742) – dit Cassini III – et sa *Lettre sur la figure de la Terre* (1742) que David Aubin publie dans cet ouvrage. Ce dernier met ainsi à la disposition d'un large lectorat deux textes inscrits dans ce genre littéraire de « mise à portée de tous » de l'astronomie, répandu également dans les journaux, au cours de la première moitié du xviii^e^ siècle en France. Leur lecture par les non-spécialistes sera facilitée par l'appareil critique (à quelques parties très techniques près qui pourront être survolées au besoin), tandis que les historiennes et historiens y trouveront une source inédite, offrant de riches pistes d'analyses.

L'ouvrage est organisé en quatre parties principales largement illustrées de gravures d'époque ou d'extraits des manuscrits, éclairant de manière adaptée le texte. Dans l'*introduction générale* (p. 1-40), David Aubin propose aux lectrices et lecteurs des éléments de contextualisation des sciences astronomiques dans la période qui précède et suit directement l'écriture du manuscrit. Les *Dialogues sur l'astronomie* (p. 43-224) donnent accès à la transcription complète et à l'édition critique du texte des entretiens mettant en scène une jeune femme et un philosophe astronome. Ils sont suivis par la lettre *Sur la figure de la terre* (p. 225-246), elle-même transcrite et dotée d'un riche appareil critique. L'ouvrage se conclut sur un *Épilogue* intitulé *Femmes, amateurs et astronomes au siècle des Lumières* (p. 247-272) visant à analyser sur un plus long terme le travail de vulgarisation de Cassini de Thury. Cet ensemble textuel est complété par une *chronologie* (p. 273-276) mêlant événements majeurs de l'histoire de France (règnes de Louis XIV et Louis XV), de l'histoire de l'astronomie et de l'histoire des Cassini (de Cassini I à Cassini IV) ; une *bibliographie* conséquente (p. 277-296) ; un *index* des noms propres et communs (p. 297-306) et une *table des 58 figures* (p. 307-308).

L'*Introduction* proposée par David Aubin nous rappelle que la période supposée de l'écriture de ces *Dialogues* clôt un long épisode d'oppositions entre cartésiens et newtoniens, en particulier sur la « figure de la Terre ». En France, les cartésiens représentés par Jacques Cassini (1677-1756), dit Cassini II (le père de Cassini III), sont les tenants d'une Terre allongée aux pôles, les newtoniens emmenés par Maupertuis défendent une Terre aplatie aux pôles. Les résultats obtenus par les savants de l'Académie des sciences de Paris, dont Maupertuis, durant l'expédition menée en Laponie entre

1736 et 1738 confirment cette seconde hypothèse. Dès 1738, les Cassini reconnaissent leur erreur et invoquent le manque de précision des mesures disponibles jusque-là. C'est donc à la suite de cet épisode que Cassini III entreprend la rédaction de ces *Dialogues* qui visent plusieurs objectifs. Tout d'abord, répondre devant un large public aux détracteurs des Cassini en mettant au centre des débats l'importance de la précision des mesures. Pour cela, il reprend la forme de l'entretien dans une approche mondaine déjà classique à cette période du dialogue entre une femme et un savant. Soutenir l'importance du travail de son père passe non pas par un échange sur des questions philosophiques (les systèmes du monde) qui ont mobilisé les savants au cours de la première moitié du XVIIIe siècle (comme c'est le cas dans les *Entretiens* de Fontenelle), mais par une discussion sur des questions techniques. C'est grâce à une femme qui « tient ici la plume » (p. 1) – en tant qu'autrice des *Dialogues* –, qui observe et qui calcule, qui interroge et contredit l'astronome, que Cassini III démontre la validité des méthodes de Cassini II (dont les *Éléments d'astronomie* publiés en 1740 sous-tendent la majorité des calculs et démonstrations réalisés dans les *Dialogues*). En mobilisant la figure de la femme savante de la période des Lumières, l'astronome inscrit son texte dans le genre littéraire de l'astronomie de Fontenelle, tout en s'en écartant par l'approche très technique (calculatoire et observationnelle) du texte. S'arrêtant sur cette figure, David Aubin s'interroge sur la réalité de la présence des femmes dans la pratique de l'astronomie au cours de la première moitié du XVIIIe siècle, tout en rappelant les préjugés de genre qui s'y attachent (p. 29). Mais, il ne trouve ni dans le quotidien des épouses des Cassini, ni dans les pratiques instrumentales de Victoire Pigeon (1724-1765), une inspiration possible pour le personnage de l'élève astronome.

La transcription des *Dialogues* est précédée dans la partie « Sur la présente édition » (p. 43) par la description matérielle du manuscrit conservé à l'Observatoire de Paris. Celui-ci est constitué de 78 feuillets répartis en 8 cahiers dont le 7e est manquant. Il est entièrement écrit de la main de Cassini III. David Aubin indique les éléments de datation de l'écriture du manuscrit, la localisation exacte des entretiens grâce à la description des instruments qui est donnée dans le texte, les événements astronomiques réels qui jouent un rôle dans le manuscrit et les sources majeures utilisées par Cassini III dans son texte. Il propose un découpage des *Dialogues* en trois parties : d'abord des dialogues légers entre un astronome « frivole » et une femme privilégiée qui n'est préoccupée que par les sciences (cette partie s'étend de la préface écrite par cette femme au 3e entretien) ; ensuite des échanges scientifiques sur la précision des mesures, l'aberration, la réfraction, la notion de parallaxe [a] (du 4e au 7e entretien) ; et enfin une partie très technique, voire abrupte, du point de vue des calculs et des développements géométriques (géométrie sphérique) où l'astronome parfois déstabilisé par les questions de son interlocutrice prend totalement sa position de maître (du 8e au 10e entretien, et les annexes). La numérotation des entretiens n'est pas complètement explicitée sous la plume de Cassini mais reconstruite par David Aubin, qui fournit également les conventions de transcription adoptées (p. 52-53), des éléments de mathématiques et d'astronomie modernisés de manière à faciliter la compréhension du lectorat. La transcription débute par la préface des entretiens, écrite par le personnage féminin de Cassini III. Ce texte est précédé par un résumé de son contenu proposé par David Aubin. L'appareil critique associé à la transcription éclaire le positionnement du texte par rapport aux *Entretiens* de Fontenelle, les enjeux de la vulgarisation scientifique posés dans le texte, le rôle moteur de la narratrice (qui conduit parfois dans les *Dialogues* à une inversion des rapports de genre) et l'originalité technique du texte. Suivent les 10 entretiens où se mêlent discussions galantes, pratiques mondaines (bal), définitions astronomiques, démonstrations et calculs de géométrie euclidienne et sphérique, conversions, etc. Chacun d'entre eux est résumé par David Aubin en amont du texte, et richement annoté du point de vue des pratiques calculatoires et expérimentales en astronomie de manière à fournir, dans le langage mathématique actuel, un texte compréhensible au lectorat du XXIe siècle (les calculs réalisés par Cassini III restant accessibles dans le corps de la transcription). David Aubin signale les erreurs de l'astronome et les corrige (p. 159 ou p. 182 note 55).

Cinq annexes – rédigées par Cassini II – principalement techniques sont également présentes, sans être précédées d'un résumé, mais toujours accompagnées d'un appareil critique. Enfin, le texte de la

Lettre sur la figure de la Terre écrite d'Avignon, en novembre 1742, semble-t-il de la main de Cassini III est contextualisée par David Aubin. Le texte de la lettre rapporte les échanges scientifiques ayant lieu au cours d'un dîner organisé par une femme savante. Les échanges mettent en scène les tenants du parti des Cassini et ceux de Maupertuis, la dame se ralliant aux newtoniens. Dîner fictif ou réel, artifice littéraire pour défendre les pratiques de trois générations de Cassini ou résumé fidèle d'un évènement de la vie de Cassini III, aucun élément dans la lettre ne permet de trancher. David Aubin suggère que Mary Wortley Montagu (1689-1762), savante lettrée, fervente défenseuse de l'inoculation contre la petite vérole et admiratrice de Francesco Algarotti – auteur de *Il newtonianismo per le dame* (1737) mettant en scène une marquise et un astronome –, pourrait avoir inspiré le personnage de la dame de cette lettre. Là-encore, l'astronome de l'Académie des sciences prend la défense des travaux des Cassini, soulignant ce que l'astronomie leur doit malgré leur erreur sur la figure de la Terre. L'*Epilogue* intitulé « Femmes, amateurs et astronomes au siècle des Lumières » prolonge la réflexion initiée sur les questions de vulgarisation en astronomie, en complétant les deux textes manuscrits déjà présentés par des documents imprimés (brochures, gravure) et une lettre manuscrite de Cassini III, produits entre 1769 et 1771. Ils démontrent l'intérêt de l'astronome pour l'instruction astronomique envers les amateurs, dont les femmes font partie et confirment son positionnement dans une approche observationnelle de cet enseignement pour donner à comprendre. David Aubin fournit ensuite quelques éléments historiographiques qui éclairent les pratiques calculatoires de quelques femmes collaborant avec l'astronome Jérôme Lalande – lui aussi investi dans la vulgarisation en astronomie –, comme Nicole Reine Lepaute ou Louise Dupiéry dans la seconde moitié du siècle. Cassini III révèle d'ailleurs une attitude condescendante envers Reine Lepaute bien loin de l'image du philosophe astronome qu'il décline dans ses *Dialogues*. Malgré tout, il incarne pour l'auteur « une forme cohérente de modernité scientifique » caractérisée par « une originalité radicale en tant que vulgarisateur de l'astronomie au siècle des Lumières » (p. 271).

L'accès fourni par cette édition à plusieurs manuscrits de Cassini III relatifs à la mise en scène de femmes dans la vulgarisation de l'astronomie est une riche contribution à l'historiographie de cette discipline et à l'histoire des représentations des femmes dans les sciences. Il faut saluer la bibliographie conséquente composée largement d'imprimés du xviiie siècle qui nourrissent l'appareil critique notamment du point de vue des pratiques astronomiques. Les spécialistes des calculs astronomiques de cette période regretteront peut-être la reconstruction moderne des approches mathématiques, mais les béotiens l'apprécieront. Quelques rares coquilles seront vite corrigées par le lectorat et une confusion entre les constellations du zodiaque et les signes astrologiques nécessiterait d'être levée (p. 53 et note 24 p. 79) pour tenir compte de la précession des équinoxes et modifier les dates associées. Compte tenu du titre de l'ouvrage *Femmes, vulgarisation et pratiques des sciences au siècle des Lumières*, il me paraît regrettable que certains angles de ce questionnement qui apparaît en filigrane dans les manuscrits n'aient pas été explorés et que la bibliographie secondaire associée ne soit pas plus développée. Ainsi, l'accès à l'éducation aux sciences pour les femmes n'apparaît que par le biais de la vulgarisation sans que cette dernière ne soit contextualisée par rapport aux autres formes d'instruction que les femmes mobilisent. De même, l'importance du statut marital des femmes ou du pouvoir des normes de genre sur la capacité des femmes à accéder aux savoirs astronomiques apparaissent comme des angles morts du texte. À titre personnel, je ne partage pas plusieurs affirmations de l'auteur concernant l'histoire des femmes en sciences, mais je ne discuterai ici que de quelques-unes d'entre elles. Ainsi, David Aubin nous indique que « dans leurs nombreux écrits scientifiques [. . .], les astronomes ne les [les femmes] mentionnent jamais » (p. 25). Pourtant, quelques notes apparaissent, ici et là, dans les journaux d'observations de quelques astronomes de l'Observatoire de Paris, comme Philippe La Hire (à la fin du xviie siècle) ou Jérôme Lalande dans la seconde moitié du xviiie siècle. Ils y indiquent les observations et/ou les calculs faits par des femmes de leur entourage, seules ou auprès de l'astronome. Plus loin, l'affirmation : « on peut d'ailleurs, dans un certain sens, très exactement dater de 1742, l'acte de naissance de la figure de la – femme astronome – » (p. 26) me paraît erronée. Déjà au moins depuis la fin du xviie siècle et le début du xviiie siècle, Elisabeth Hevelius – représentée sur une gravure de 1673 réalisant des observations astronomiques – ou Maria Margarethe Winkelmann – élève de l'astronome Christoph Arnold – constituent pour les savants des figures de femmes astronomes, construites en parallèle de la figure des femmes savantes, déjà véhiculée par la pièce de Molière en 1672. Cassini III a sans aucun doute contribué à enrichir cette représentation par ses *Dialogues* (1740-1742), en livrant une figure féminine qui est positionnée dans la préface de l'auteur comme l'autrice de l'ouvrage, mais seulement à nos yeux de lectrices et lecteurs du XXI[e] siècle, puisque le texte de son manuscrit ne semble pas avoir circulé. Les Dialogues de Cassini III n'ont donc pas contribué à façonner la figure de la « femme-astronome » dans le récit historique, mais ils nous en livrent grâce à cette édition une facette inédite.

Remerciements. Je souhaite remercier chaleureusement Christophe Eckes, Pauline Lafitte, Colette Le Lay et Jeanne Peiffer pour leur lecture attentive de ce texte et pour leurs précieux conseils qui ont contribué à l'améliorer.

Isabelle Lémonon-Waxin
Centre François Viète, Cermes3

---

a. En astronomie, la parallaxe est l'angle sous lequel on peut voir une longueur donnée depuis un astre. On parle de parallaxe diurne pour les objets du système solaire (la longueur est alors le rayon de la Terre), ou de parallaxe annuelle pour les étoiles proches (la longueur est alors le rayon de l'orbite terrestre).

SRS
SwissMAP Research Station in Les Diablerets

Call for proposals 2026

SwissMAP Research Station (SRS)

International topical conferences and targeted workshops in the fields of mathematics and theoretical physics.

Around 18 events throughout the year

Fully equipped conference & meeting rooms

Full board accommodation

Based in Les Diablerets, Switzerland

Interested in organizing a conference in 2026 at the SRS?
Application template available online: **swissmaprs.ch**

Deadline: October 15, 2024

contact@swissmaprs.ch

UNIVERSITÉ DE GENÈVE ETH zürich | Swiss National Science Foundation SwissMAP The Mathematics of Physics National Centre of Competence in Research

Instructions aux autrices et auteurs

Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Dupliprint – 733 rue Saint Léonard – 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.