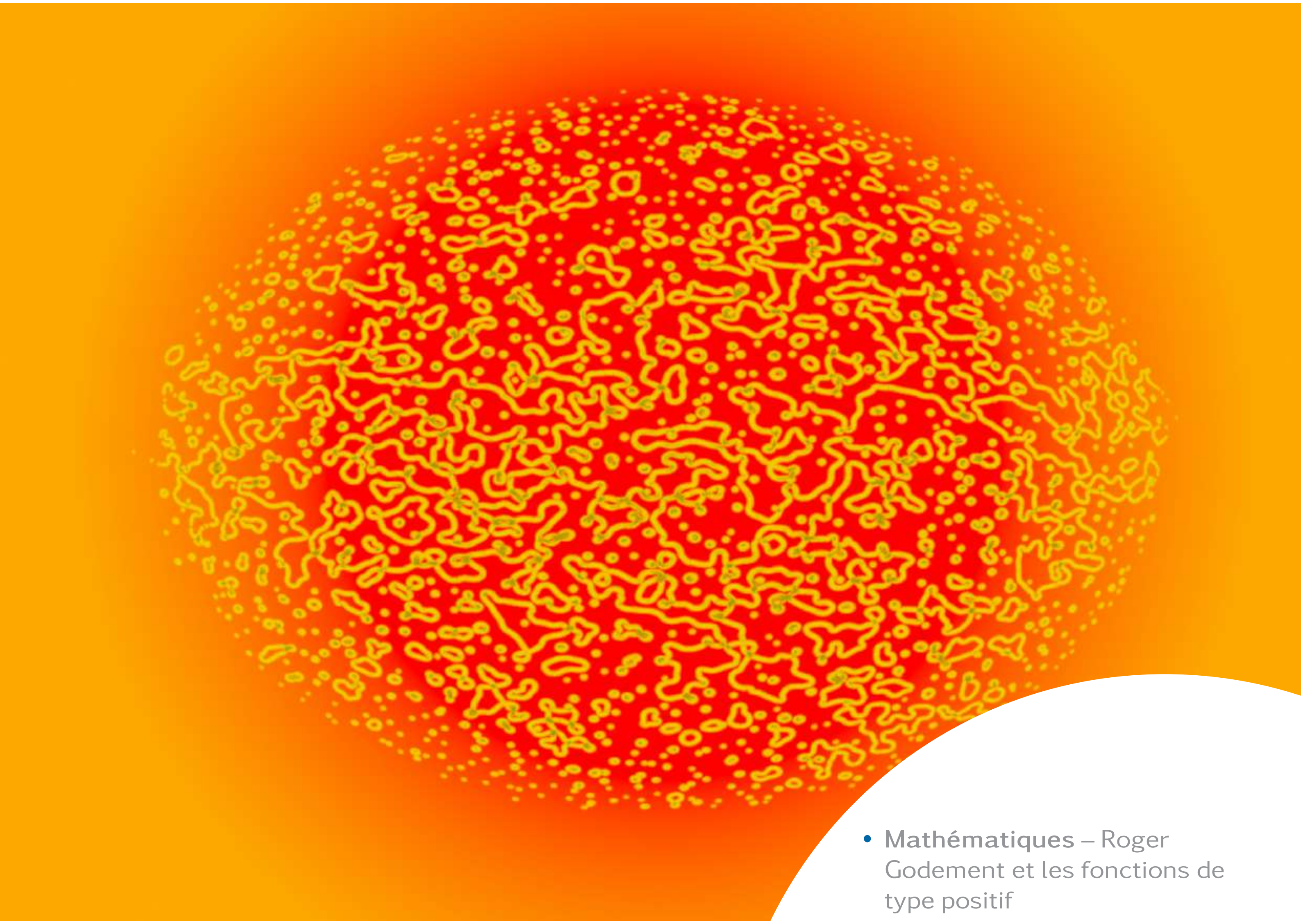
OCTOBRE 2024 – N° 182

la Gazette
de la Société Mathématique de France



- **Mathématiques** – Roger Godement et les fonctions de type positif
- **Raconte-moi...** les Algorithmes du Rubik's cube
- **Carnet** – Hommage à Eugenio Calabi

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – https://smf.emath.fr

Directrice de la publication : Isabelle Gallagher

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. Simulation des trajectoires des valeurs propres pour une perturbation de rang un d'une matrice gaussienne complexe de taille 2000. (crédit : Guillaume Dubach).

Nº 182

Éditorial

À vous qui lisez La *Gazette*,

Je veux dans ces lignes rendre hommage aux auteurs, ponctuels ou récurrents, qui dédient un temps important à l'écriture d'articles qu'ils polissent tout spécialement pour vous. Ces bijoux, que nous les ayons sollicités ou qu'ils nous les aient offerts spontanément, font briller des histoires, des résultats, des vies mathématiques. Ils révèlent des facettes méconnues de domaines exotiques, de personnalités fortes et inspirantes et mettent en lumière des solutions aussi bien à des problèmes théoriques qu'à des questions sociétales.

Vous trouverez dans ce numéro le compte rendu de la septième Journée Parité qui s'est tenue à l'Institut de Mathématiques de Marseille en juillet dernier, par Olga Paris-Romaskevich, que nous publions maintenant traditionnellement en octobre. Un retour sur « Matheuses », comme un écho à l'entretien de Clémence Perronnet et de Nicolas Raymond publié dans la *Gazette* d'avril dernier, nous est livré par Anne de Roton. De personnalité il est question dans ce carnet consacré à Eugenio Calabi disparu il y a tout juste un an, recueilli par Jean-Pierre Bourguignon, très fidèle contributeur à la *Gazette*. Alexandre Afgoustidis, en s'appuyant notamment sur des correspondances d'avant 1950 et sur la thèse de Roger Godement, expose les fonctions de type positif et leur rôle majeur dans le paysage mathématique moderne. Le sentier de l'engagement politique de célèbres mathématiciens dans le mouvement « Survivre et vivre » est retracé par Céline Pessis dans un récit poignant. Le spectre des matrices aléatoires est un sujet brûlant, conté dans ces pages par Guillaume Dubach et Jana Reker, qui nous offrent de plus cette couverture tout en dentelle. Enfin, détendons-nous, ou au contraire concentrons-nous ! Le cube d'Ernõ Rubik, un casse-tête cinquantenaire, est méthodiquement et mathématiquement décomposé par Yannis Monbru.

Voilà de quoi apporter de la lumière mathématique à ces jours de plus en plus courts !

Pauline Lafitte

Déjà en librairie,

Introduction aux espaces de Hilbert

Bernard Randé

- Un périple fabuleux, à mi-chemin entre les espaces vectoriels de dimension finie et les espaces de Banach
- Une approche éminemment pédagogique, dont Bernard Randé a le secret
- Cent vingt pages d'exercices, corrigés avec soin, et sept cents pages de plaisir

Calvage & Mounet

www.calvage-et-mounet.fr

la Gazette
de la Société Mathématique de France

N° 182

Sommaire

Société Mathématique de France SMF

Nº 182

Mot de la présidente

J'espère que la trêve estivale a été reposante, et que la rentrée universitaire se passe le mieux possible!

Comme tous les ans, mais (sans que nous ne sachions encore l'expliquer) de manière beaucoup moins intense ces deux dernières années, la SMF a été alertée cet été par des doctorants·e·s et jeunes docteur·e·s qui souhaitent garder le bénéfice de l'agrégation tout en faisant une année d'ATER ou de post-doctorat, et dont la demande a été refusée. Rappelons que – quand la demande est justifiée bien entendu – la SMF peut contacter les rectorats pour plaider la cause de ces jeunes collègues, le plus souvent avec succès. Notons néanmoins une nouveauté cette année au sujet des reports de stage : d'après une note de service de la DGRH d'avril 2024, l'inscription en deuxième année d'un master de recherche n'est pas un motif recevable permettant de justifier un report de stage, contrairement à l'usage des années précédentes. La communauté s'est mobilisée au printemps dernier pour protester contre cette décision : elle n'a pas eu de conséquence dommageable cette année à notre connaissance, mais le problème reste entier pour l'an prochain et nous maintiendrons notre vigilance et notre mobilisation.

La SMF va poursuivre cette année ses actions en direction du grand public. Je souhaite en particulier évoquer les stages *MathC2+* à destination des élèves de collège et lycée, programme créé en 2011 par Animath, et coordonné par la SMF, Animath et le Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse. Stéphane Seuret, ancien président de la SMF, s'en est occupé avec énergie et passion pendant ces 4 dernières années et je lui exprime toute ma gratitude. Mireille Fouquet et Mathilde Herblot ont accepté de prendre la suite de Stéphane Seuret, je les en remercie sincèrement. Fabien Durand, mon prédécesseur à la présidence de la SMF, a été à l'initiative des stages *Math C Pour L*. Il a accepté de poursuivre cette année, avec tout son enthousiasme et son dynamisme : rappelons que, grâce à ce programme, plusieurs fois par an un groupe d'étudiantes de Licence se retrouve pendant une semaine dans une université – de préférence pas la leur – pour apprendre, entendre, et faire des maths dans une ambiance bienveillante. Ce programme connaît un grand succès et j'en profite pour remercier Fabien de continuer à l'animer. Je ne listerai pas ici les autres actions de diffusion et de médiation de la SMF (vous trouverez comme toujours toutes nos activités sur notre site internet) mais je profite de ce mot pour vous annoncer que le cycle « Un texte, un mathématicien », organisé conjointement par la SMF et la Bibliothèque Nationale de France, profite de ses 20 ans pour changer de nom : ce sera dorénavant « Un texte, une aventure mathématique » ! Pour fêter cet anniversaire, un événement spécial sera organisé au printemps 2025 sous la houlette de Pierre-Antoine Guihéneuf, notre chargé de diffusion grand public. Nous vous en dirons plus bientôt.

La SMF continuera également cette année à réfléchir et à agir sur des questions en lien avec l'enseignement des mathématiques et des sciences plus généralement. Le Collectif Maths & Sciences, créé en 2022 à l'initiative de Mélanie Guenais (Vice présidente Enseignement et Formation de la SMF) a rédigé à la fin de l'été une tribune lançant l'alerte sur le décrochage des inscriptions en école d'ingénieur. Vous la trouverez sur le site internet de la SMF.

Cette année universitaire verra, exceptionnellement, deux sessions des « États de la recherche » au CIRM à Luminy : l'une intitulée « Dynamique arithmétique, algébrique, et analytique » en janvier, et l'autre intitulée « Théorie cinétique et mécanique des fluides : couplages, échelles et asymptotiques », en mars. Rappelons que ces sessions ont pour vocation de présenter l'état de l'art sur un sujet en plein essor, notamment pour les non-spécialistes.

Enfin l'année universitaire culminera en juin avec le quatrième congrès national de la SMF. Celui-ci, organisé notamment par notre trésorier Thomas Dreyfus, aura lieu à Dijon du 2 au 6 juin 2025. Comme les sessions précédentes, il regroupera pendant une semaine des collègues travaillant sur des thématiques des plus fondamentales aux plus appliquées, et permettra d'établir un panorama des dernières avancées des mathématiques françaises. Des tables rondes seront également organisées, et l'Assemblée Générale de la SMF sera exceptionnellement délocalisée à Dijon pour l'occasion. Notez d'ores et déjà cette semaine de mathématiques dans vos agendas !

Je vous souhaite à tous et à toutes une bonne année universitaire. Et surtout, n'oubliez pas d'adhérer et de faire adhérer à la SMF !

Le 1er octobre 2024
Isabelle Gallagher, présidente de la SMF

La SMF participe activement depuis bientôt 3 ans au Collectif Maths&Sciences, né des alertes de la SMF au sujet des impacts de la réforme du lycée de 2019 sur l'enseignement des mathématiques et son accès aux filles. Depuis, les thèmes de réflexion de ce groupe se sont élargis en fonction de l'actualité et des sollicitations extérieures. Le document qui suit restitue le rapport et les recommandations [1] issus de l'audition du Collectif Maths&Sciences [2] du 13 mars 2024 par la mission d'information de la commission des affaires culturelles et de l'éducation de l'Assemblée nationale sur « le recrutement et la formation du personnel enseignant dans les collèges et lycées publics ». Cette mission parlementaire constituée fin 2023 est présidée par Roger Chudeau, député du Loir-et-Cher, et Cécile Rilhac, députée du Val-d'Oise. Elle s'inscrit dans un contexte de crise mondiale du recrutement, aggravé en France par la diminution brutale des recrutements en 2022 suite au déplacement du concours du CAPES en fin de deuxième année de Master (M2).

En avril 2024, alors que le travail de la commission se poursuit, le président de la République annonce la mise en place dès la rentrée 2024 de l'avancement du concours en fin de licence (L3). Malgré des délais précipités et les nombreuses alertes de la communauté académique, un projet de décret parait fin mai 2024. Il prévoit un nouveau statut pour les lauréats des concours qui ne seraient plus fonctionnaires-stagiaires, s'opposant au code de la fonction publique. Le texte, unanimement contesté, est alors renvoyé vers le Conseil d'État dont la décision est rendue le 8 juillet 2024, au lendemain du second tour des élections législatives anticipées. La dissolution de l'Assemblée nationale et la démission du gouvernement auront eu finalement raison de son application immédiate, laissant dorénavant le temps d'un véritable échange.

Le texte qui suit – inscrit dans une démarche de temps long conformément au souhait de la mission, interrompue par la dissolution – permet de contribuer à alimenter les réflexions sur ce sujet crucial.

Rapport sur le recrutement et la formation du personnel enseignant dans les collèges et lycées

• M. Guenais

1. Préliminaire

Le Collectif Math&Sciences [3] est un groupe de réflexion dont l'objectif est l'amélioration de la formation scientifique, en particulier au lycée et notamment pour ce qui concerne les inégalités de genre. Il regroupe une trentaine d'associations scientifiques (mathématiques, informatique, physique, biologie, chimie, économie, histoire des sciences) d'universitaires, d'enseignants du second degré et des classes préparatoires aux grandes écoles, d'associations de promotion des femmes en sciences et des partenaires des fédérations d'entreprises. Il produit des documents d'analyse à partir de données publiques et des expériences du ter-

1. Une annexe est disponible sur le site du Collectif Maths&Sciences.
2. Il était représenté par sa coordinatrice, Mélanie Guenais, vice-présidente de la SMF, Yves Bertrand, président de la Société Informatique de France, Marie-Line Chabanol, présidente de l'Assemblée des Directeurs d'IREM, et Lara Thomas, vice-présidente de l'UPA (association des professeurs scientifiques des classes préparatoires BCPST, TB et ATS bio).
3. Plus d'informations sur le site https://collectif-maths-sciences.fr/.

rain dans le but d'évaluer les politiques éducatives concernant la formation scientifique. À partir des connaissances scientifiques et techniques dont il dispose, il échange pour imaginer des pistes d'amélioration susceptibles d'éclairer les politiques publiques. Avant tout, nous soulignons qu'une politique éducative efficace nécessite de s'inscrire dans la durée.

Recommandation
Penser les réformes sur le temps long en y associant en amont l'organisation de leur évaluation ainsi que les professionnels de l'éducation.

2. Élaboration des réformes

Dans son rapport de 2023, la Cour de comptes souligne l'instabilité de l'organisation de la formation initiale et des recrutements en raison des nombreuses réformes qui se sont succédé, en particulier depuis 2010. Notons que l'enchaînement des réformes semble être une exception française et que les plus grands établissements internationaux se caractérisent tous par une stabilité structurelle sur un temps très long. Cette instabilité est problématique à plusieurs niveaux :

– le milieu de l'enseignement est un écosystème qui évolue sur le temps long. Toute nouvelle réforme perturbe son équilibre qui met du temps à se rétablir. Elle a un coût sur l'efficacité du système éducatif [4] ;
– l'enchaînement des réformes est incompatible avec une démarche d'évaluation des dispositifs. Or, cette démarche est indispensable pour identifier les moyens efficaces à mettre en œuvre.

Pour réussir les réformes décidées par les politiques publiques, il nous paraît nécessaire de :
PLANIFIER - ORGANISER - IMPLIQUER - ÉVALUER.

Recommandation
Rationaliser la politique éducative.
Avant toute mise en place de nouveaux dispositifs, il nous semble indispensable pour pouvoir progresser de construire en amont le protocole d'évaluation associé : cela suppose d'avoir défini des objectifs à atteindre, des indicateurs qui permettent de mesurer leur réalisation, et d'assurer un suivi de ces indicateurs, rigoureux, transparent et indépendant.

Pour réussir les réformes, il ne suffit pas de les décider verticalement : les rapports de l'OCDE rappellent régulièrement l'importance de l'implication et la participation des différents professionnels de l'éducation dans l'élaboration des réformes, d'un dialogue ouvert, de l'appui sur les données probantes de la recherche [5]. En voici quelques extraits :

– « Les réformes ne sont efficaces que si elles sont adoptées par l'ensemble du système. Créer la confiance et construire des ponts entre les secteurs (publics et privés) et les principales parties prenantes (représentants publics, privés, parents, enseignants, élèves) grâce à la transparence et à un dialogue ouvert nécessite de jongler avec les différentes attentes et besoins des acteurs et secteurs clés. Un engagement à partager des informations et à répondre aux préoccupations des différentes parties prenantes permet une plus grande confiance et une plus grande appropriation de la réforme, ce qui est important pour son succès. » [6]
– « L'expérience d'un certain nombre de pays indique que, à moins que les enseignants et leurs représentants ne soient activement impliqués dans la formulation de la politique enseignante et ne ressentent un sentiment d'appropriation de la réforme, il est peu probable que des changements substantiels soient mis en œuvre avec succès. »
– « Au lieu de suivre une approche descendante, dans laquelle les décideurs politiques

4. Ruiz, A. (2023). Conclusion « Laws » of Curriculum Implementation and the Future in Which We Are Living. In : Shimizu, Y., Vithal, R. (eds) Mathematics Curriculum Reforms Around the World. New ICMI Study Series. Springer, Cham. `https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_19`. « Except in the case of curricular changes with very little scope, reforms must be conceived as long-term processes ». Voir aussi Michèle Artigue « Pisa 2022 : les mauvais résultats sont principalement dus aux réformes incessantes » Café pédagogique, 2023.
5. Burns, T., F. Köster et M. Fuster (2016), Education Governance in Action : Lessons from Case Studies, Educational Research and Innovation, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/9789264262829-en`. P.172 : Five elements that together comprise the foundation of effective modern governance.
6. OCDE (2018), Responsive School Systems : Connecting Facilities, Sectors and Programmes for Student Success, OECD Reviews of School Resources, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/9789264306707-en`.

déterminent isolément l'approche qui correspond au cadre d'apprentissage, les gouvernements et les systèmes éducatifs devraient suivre une approche ascendante qui implique les enseignants et les écoles et s'appuie sur leurs connaissances pour élaborer les politiques. »[7]

3. Rôle des politiques envers le métier d'enseignant

Il nous semble important de penser un parcours de formation des enseignants en adéquation avec les besoins : ceux des enseignants, ceux de la nation. Les politiques publiques interviennent dans :

- l'organisation du recrutement ;
- la définition des missions professionnelles ;
- l'organisation de l'exercice du métier et du développement professionnel.

Les pouvoirs publics ont pour mission de garantir un vivier renouvelé, à la formation adaptée et de qualité, répondant aux besoins d'un enseignement performant, aussi bien pour l'acquisition des savoir-faire et connaissances disciplinaires que pour l'accompagnement humain des élèves au sein de la classe. Cela suppose de veiller à l'évolution des besoins, de planifier les recrutements, d'évaluer l'adéquation des besoins du terrain pour les élèves avec les contenus de formation. Cela suppose aussi de veiller à garantir un vivier de personnes susceptibles d'entrer dans le métier.

Recommandation
Planifier les recrutements en appliquant la loi prévue par l'article L911-28 du Code de l'Éducation : « Un plan de recrutement des personnels est publié, chaque année, par le ministre chargé de l'éducation. Il couvre une période de cinq ans et est révisable annuellement. »

4. Attractivité

La baisse de l'attractivité du métier se traduit de plusieurs manières :

- la baisse de sélectivité du concours lié à la baisse du nombre et du niveau disciplinaire attendu des candidats ;
- le non-remplissage des postes ouverts au concours ;
- le recours accru aux contractuels ou à des personnels insuffisamment formés ;
- la pénurie de personnel enseignant en établissement.

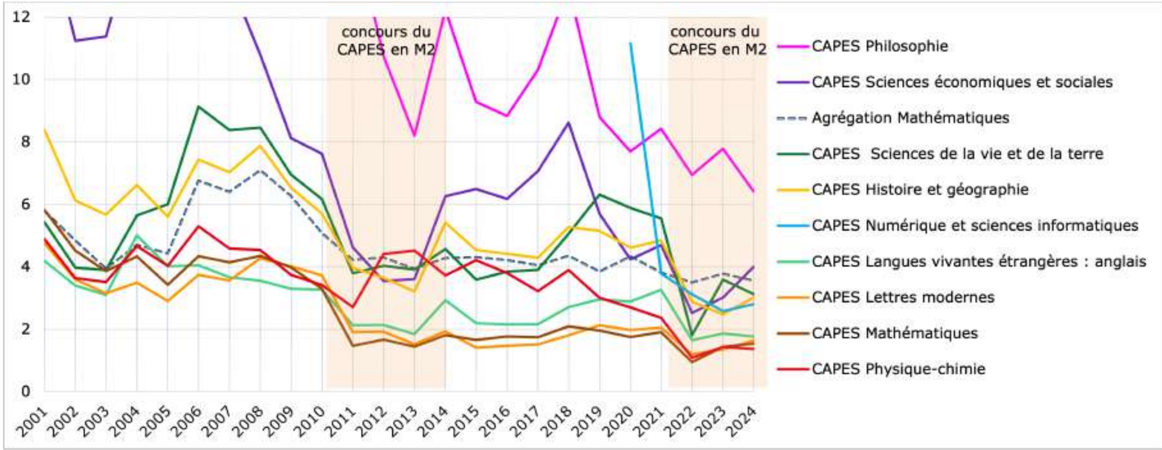
Bien qu'elle soit un problème général, l'attractivité du métier d'enseignant est devenue très critique en France après la réforme de 2021. Elle se traduit par une baisse massive du nombre de candidats aux concours, principalement due au passage du concours en M2. Les effets observés sur le vivier des candidats suite à la réforme de 2011, déjà fondée sur le report en M2 du concours, rendaient prévisibles les impacts de 2022 : les mêmes causes produisent les mêmes effets. Sauf à vouloir détruire le vivier, c'est l'absence de planification et d'évaluation qui mène à ce type d'erreur, pénalise lourdement notre pays et fragilise à terme notre enseignement. La figure 1, page ci-contre, reprend le suivi de quelques concours de recrutement au cours des 20 dernières années[8].

La chute du nombre de candidats par poste en 2022 a entraîné ou accentué des pénuries dans certaines disciplines. Les mathématiques sont les plus impactées, suivi par les lettres et l'anglais, puis par la physique-chimie depuis 2022. La situation extrême des mathématiques provient vraisemblablement d'une compétition avec l'offre d'emploi privé, qui propose des salaires plus élevés et des métiers plus valorisés avec de nombreuses possibilités d'évolution. L'informatique, la physique ou les disciplines technologiques risquent de rencontrer les mêmes problématiques. Au contraire, les secteurs d'emplois compatibles avec des parcours vers l'enseignement de la philosophie, des SES, de l'histoire-géographie ou des SVT semblent moins concurrentiels.

La très forte augmentation en France (la plus forte des pays de l'OCDE) des déclarations de pénurie depuis 2018[9], où la situation était bien meilleure, confirme l'impact significatif de la réforme du concours et de la formation de 2022 sur l'attractivité du métier. Il y a donc une cause structurelle à cette baisse de candidats : elle est en partie liée à l'organisation du concours placé trop tardivement dans le cursus universitaire.

7. OCDE (2018), Teaching for the Future : Effective Classroom Practices To Transform Education, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/9789264293243-en`.
8. `https://www.devenirenseignant.gouv.fr/donnees-statistiques-des-concours-du-capes-de-2023-1298`.
9. OCDE (2023), PISA 2022 Results (Volume II) : Learning During – and From – Disruption, PISA, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/a97db61c-en`. P.174, figure II.5.3.

FIGURE 1 – Nombre de candidats présents par poste aux concours



Les autres causes sont conjoncturelles et dépassent le cadre national. Elles concernent l'image du métier dans la société, qui est liée aux conditions de travail. Les perceptions des étudiantes et étudiants révélées par l'enquête IPSOS pour la Cour des comptes en 2022 donnent des pistes intéressantes pour y remédier :

– les étudiants estiment que l'image du métier d'enseignant se dégrade, alors qu'il est déjà au bas de leur classement tant pour le prestige que l'attractivité des professions accessibles avec un master ;
– les aspects attractifs des métiers déclarés sont l'intérêt propre, le salaire, les possibilités d'évolution de carrière, la valorisation sociale ;
– l'intérêt déclaré pour le métier d'enseignant concerne la transmission des savoirs et le lien social avec les élèves ;
– le rejet du métier d'enseignant est attribué aux conditions de travail (manque de moyens, élèves difficiles), au salaire, au manque de reconnaissance par la société ;
– les difficultés du métier perçues par les étudiants concernent la gestion de classe, la possibilité de faire progresser tous les élèves, le manque d'intérêt des élèves, le manque de soutien des enseignants dans leur travail.

Ces visions données par les étudiants coïncident largement avec les constats de l'OCDE [10]. L'imaginaire du métier par les étudiants semble donc assez fidèle à la réalité observée sur le terrain. Par conséquent, en se basant sur les enquêtes précédentes et sur les retours des professionnels de terrain, les pistes d'amélioration de l'image du métier semblent directement liées aux conditions d'exercice.

Note sur le coût enseignant en France

Le ratio coût enseignant par élève (y compris comparé au budget de l'Éducation nationale) comparé aux performances en mathématiques dans la dernière enquête PISA est l'un des plus bas de toute l'OCDE [11]. On n'améliorera pas le niveau des élèves sans augmentation de ce coût : les salaires et le temps de travail devant élève sont des priorités qu'il est nécessaire de faire évoluer.

Recommandations

- **Améliorer l'image du métier et les conditions de travail :**
  – améliorer les salaires, diminuer le temps devant élèves, la taille des classes en cas de besoin ;
  – institutionnaliser un temps dédié au développement professionnel incluant concertation avec les pairs et formation professionnelle en lien avec la recherche disciplinaire, didactique et pédagogique. Valoriser l'engagement en formation dans l'évolution professionnelle ;

10. OCDE (2023), Regards sur l'éducation 2023 : Les indicateurs de l'OCDE, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/ffc3e63b-fr`. Voir p. 436 les observations faites dans les filières professionnelles.

11. Ibid, graphique C7.3 : le coût enseignant est l'un des plus faibles comparé aux dépenses élèves. À mettre en regard des performances en mathématiques du rapport PISA 2022, graphique D3.1 : les enseignants gagnent 12% de moins que les autres salariés à diplôme équivalent.

- impliquer davantage les enseignantes et enseignants dans l'élaboration des dispositifs nouveaux décidés pour montrer la reconnaissance par la hiérarchie de l'importance de leur rôle ;
- revoir les règles de mobilité et d'affectation dans les zones difficiles, etc.

- **Avancer le concours actuellement placé en fin de M2 :**
  - le retour du concours en M1 permettrait de revenir à une organisation connue et à peu près stabilisée, dont on connaît les points forts et à améliorer ;
  - l'avancée du concours en L3 permettrait un meilleur étalement de la formation en alternance et une rémunération complète des lauréats dès le M1, mais nécessite pour réussir d'associer les professionnels de la formation à la définition du nouveau cadre, de planifier et d'anticiper l'évaluation et d'assurer les moyens pour la mise en œuvre et le suivi d'une nouvelle réforme.

Point de vigilance

Un enseignant n'est pas un exécutant. La capacité d'autonomie des enseignants dans leur pratique relève de leur statut de cadre, justifié par le grade de master. Reconnaître cette fonction de cadre, et les responsabilités afférentes, fait partie de la reconnaissance institutionnelle nécessaire à la valorisation de l'image du métier [12].

5. Formation initiale

La formation initiale telle qu'elle était organisée entre 2013 et 2021 était largement appréciée par les étudiants d'après l'enquête IPSOS pour la Cour des comptes (73% des étudiants en formation satisfaits [13]). La professionnalisation absente lors de la réforme 2011 est devenue possible après 2014 avec une année de M2 payée comme stagiaire en alternance à mi-temps. L'organisation actuelle perd en qualité de ce point de vue en raison des perturbations liées au déroulement du concours, de nouveau en M2.

Soulignons que les savoirs théoriques et académiques dispensés pendant le master sont étroitement liés aux savoirs professionnels. Les enseignements disciplinaires et didactiques sont spécifiques aux savoirs à enseigner et servent la qualité des constructions d'activités propices aux apprentissages disciplinaires. Ils sont indispensables pour fournir à l'enseignant des compétences solides qui lui permettront d'améliorer sa démarche de réflexion et de perfectionner sa pratique sur le temps long.

Recommandation

Garantir une formation initiale attractive et de qualité pour assurer une entrée réussie dans le métier :

- maintenir des enseignements disciplinaires et des enseignements didactiques sur toute la durée du master, dans un volume horaire au minimum équivalent à la formation actuelle ;
- planifier une entrée progressive dans le métier étalée tout au long de la formation, avec une augmentation très progressive de la partie professionnelle ;
- rémunérer pendant la formation en master les lauréats du concours comme fonctionnaires stagiaires.

Points de vigilance

- Garantir le cadre formatif des périodes de stages pour ne pas les considérer comme des ajustements possibles pour la gestion des ressources humaines dans les établissements. La prise de responsabilité de classe devrait rester réservée pour l'année de M2 sans dépasser le mi-temps.
- Nécessité de définir les nouveaux contenus du concours en cas d'une avancée en fin de licence.
- Nécessité de penser une articulation cohérente avec les contenus de licence, particulièrement pour les concours bivalents (physique-chimie, histoire-géographie), sans créer de parcours de licence tubulaire vers le CAPES qui nuiraient à l'attractivité de ces parcours.

Origine du vivier et pré-recrutement

Particulièrement pour les mathématiques, l'informatique, la physique, la faible part des élèves

12. OCDE (2005), Teachers Matter : Attracting, Developing and Retaining Effective Teachers, Education and Training Policy, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/9789264018044-en`. P.16 « Transformer l'enseignement en une profession riche en connaissances ».
13. Ipsos – Facteurs d'attractivité ou de rejet du métier enseignant chez les étudiants – Cour des comptes – mai 2022.

en licence et les effets de la réforme du lycée sur les effectifs des élèves de formation scientifique ne permettent pas d'envisager la formation initiale comme unique voie d'accès au concours. Actuellement, en mathématiques, environ 50% des lauréats du CAPES sont des extérieurs aux formations MEEF [14] et/ou des reconversions. Des dispositifs de pré-recrutements adaptés, suivis dans la durée et évalués pourraient amener davantage d'étudiants et d'étudiantes vers les formations d'enseignants. Actuellement, les dispositifs se succèdent sans pilotage ni évaluation de leur efficacité. Le dispositif actuel AED-prépro [15] pose de nombreux problèmes, dont l'un des plus sérieux est son incompatibilité avec la préparation de l'agrégation. Les élèves méritants mais socialement défavorisés sont donc écartés de l'agrégation, plus valorisée économiquement que le CAPES. Ce dernier doit être repensé avec les responsables de formations universitaires pour améliorer la cohérence des parcours des étudiants qui en bénéficient. D'autres difficultés liées à la nature du contrat AED-prépro, mal adapté aux objectifs académiques aussi bien qu'à l'évolution de la prise en charge progressive des gestes professionnels seraient à repenser.

Le cas des personnels contractuels

Le rapport PISA reporte un taux élevé de personnels non titulaires et insuffisamment formés dans les établissements français. Il montre également que la performance des élèves en mathématiques est plus faible dans les établissements qui ont recours à ces personnels enseignants, avec une baisse plus marquée en France qu'en moyenne dans l'OCDE [16]. L'absence de formation à l'enseignement et à la didactique de la discipline est un obstacle majeur à la qualité de l'enseignement et à son efficacité sur les performances des élèves [17]. Il est indispensable de prévoir un accompagnement sur le temps long pour les contractuels arrivant dans le métier qui ne se limite pas à l'adaptation pour la prise de poste mais prenne en compte un temps de formation analogue à celui de la formation initiale. Notons que l'ensemble des lauréates et lauréats des concours est accueilli en DIU (ou Diplôme Inter-Universitaire, anciennement DU). Les personnels contractuels pourraient également être accueillis de manière analogue aux DIU en 1re ou 2e année des masters MEEF pour recevoir une formation adaptée à leur fonction. Il est essentiel que les personnels contractuels bénéficient d'une formation systématique et rémunérée analogue aux DIU qui leur permette d'acquérir les gestes professionnels et de monter en compétences.

6. Formation continue - Développement professionnel

La formation continue est indispensable au développement professionnel et à l'amélioration des carrières. Elle doit aussi accompagner la formation des personnels contractuels. Rappelons que la faiblesse de la formation continue des enseignants est une exception française. Par exemple le système de Singapour prévoit un droit à la formation de 100 heures par an.

L'articulation entre formation initiale et formation continue, en lien avec l'université est essentielle pour la cohérence des parcours [18]. Si l'INSPE [19] semble actuellement l'interlocuteur privilégié pour coordonner formation initiale et continue, il est aussi indispensable de garantir son maintien en tant que structure universitaire, seule capable d'assurer une formation de haut niveau de connaissances et savoir-faire indépendante des orientations politiques.

Les difficultés actuelles résident dans l'absence de structuration d'une formation continue clairement identifiée et reconnue par l'ensemble des acteurs de l'éducation : à Québec, la formation continue est principalement à la charge des universités. Une réflexion sur une meilleure coordination semble indispensable au bon fonctionnement de la formation continue et de sa qualité.

Des structures universitaires pour la formation continue comme les instituts de recherche sur l'en-

14. Master MEEF : master des métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation.
15. AED-prépro : contrat d'assistant d'éducation en préprofessionnalisation accessible à partir du L2 pour une durée de 4 ans, à la condition d'une poursuite d'étude en master MEEF.
16. OCDE (2023), PISA 2022 Results (Volume II) : Learning During – and From – Disruption, PISA, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/a97db61c-en` p. 176 figure II.5.5 et p. 377 tableau IIB1.5.4.
17. Pietro Sancassani, The effect of teacher characteristics on students' science achievement, IFO Working Papers, n° 348, 2021, Munich, `https://hdl.handle.net/10419/231544`.
18. OCDE (2019), Résultats de TALIS 2018 (Volume I) : Des enseignants et chefs d'établissement en formation à vie, TALIS, Éditions OCDE, Paris, `https://doi.org/10.1787/5bb21b3a-fr`. Voir P. 48.
19. INSPE : Institut national supérieur du professorat et de l'éducation, en charge des masters MEEF. Organisme académique cogéré par le rectorat et l'université de rattachement.

seignement des mathématiques ou des sciences (IREM ou IRES selon les académies) sont bien implantées et favorisent les communautés apprenantes horizontales et en liaison avec les enseignants-chercheurs et les formateurs et formatrices de la formation initiale. L'augmentation des contraintes administratives dégrade son fonctionnement. Elles manquent de reconnaissance et de moyens, notamment en temps enseignants-chercheurs, pour pouvoir pérenniser et développer l'offre de formation et les actions dans les « labomaths »[20] des établissements scolaires notamment.

Des présentations d'informations émanant de la hiérarchie institutionnelle sont souvent faites dans le cadre de la formation continue. Elles ne sont pas comparables aux formations basées sur les échanges de pratiques et en lien avec la recherche, en particulier didactique et disciplinaire, qui participent au développement professionnel. Il est nécessaire de distinguer clairement ces actions qui n'ont pas la même finalité.

Les formateurs académiques, même s'ils ont une certification (CAFFA ou CAFIPEMF[21]), n'ont pas tous suivi de formation de formateurs qui leur permette entre autres de monter en compétences disciplinaires et didactiques et sur la démarche de recherche.

Recommandation
Restructurer globalement une formation continue incluant :

– une coopération entre tous les acteurs et actrices impliqués, universitaires, formateurs, enseignants- chercheurs, inspecteurs pédagogiques, ainsi que la simplification des procédures administratives ;
– des moyens financiers et humains à la hauteur des enjeux, notamment dans le supérieur ;
– des temps spécifiques intégrés dans les services des enseignants ;
– des liens humains et des formations en présentiel et dans la durée ;
– des formations de formateurs portant sur la didactique et le disciplinaire.

Mélanie Guenais

Université Paris Saclay
melanie.guenais@universite-paris-saclay.fr

Vice-présidente de la SMF en charge de l'enseignement et de la formation, Mélanie Guenais est aussi fondatrice et coordinatrice du Collectif Math&Sciences depuis 2022. Son action concerne la production de textes d'analyse des impacts des politiques publiques sur la formation scientifique et leur diffusion pour les médias et les politiques.

Ce rapport constitue la synthèse d'un important travail collectif qui a mobilisé aussi bien le Collectif Maths&Sciences que la commission enseignement de la SMF ou les collègues responsables de formation des enseignants de la liste debat-meef. L'autrice remercie toutes celles et ceux qui ont contribué à sa réalisation, et en particulier : Pierre Arnoux (CFEM), Michèle Artigue (CFEM), Yves Bertrand (SIF), Anne Broise (responsable MEEF), Marie-Line Chabanol (ADIREM), Anne Cortella (CFEM), Edwige Godlewski (SMAI), Mariam Haspekian (ARDM), Magdalena Kobylanski (SMF), Bertrand Lebot (SMF), Simon Modeste (CFEM), François Moussavou (SMF), Louise Nyssen (CFEM), Lara Thomas (UPA), Fabrice Vandebrouck (SMF).

20. Les labomaths sont issus des préconisations du rapport Torossian-Villani de février 2018 : « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques ». La mesure 16 propose la création d'un espace dédié aux échanges de pratique et au partage des connaissances pour les enseignants dans les établissements scolaires. Pour remplir son objectif de formation continue, il doit rester en lien étroit avec les universitaires et la recherche didactique et disciplinaire. Voir le Vademecum sur le site Eduscol : https://eduscol.education.fr/document/1483/download?attachment

21. CAFFA : certificat d'aptitude aux fonctions de formateur académique ; CAFIPEMF : certificat d'aptitude aux fonctions d'instituteur ou de professeur des écoles maître formateur

Une brève histoire des perturbations non hermitiennes de rang un

• G. Dubach
• J. Reker

Les perturbations de faible rang de matrices aléatoires ont été au cœur de nombreux travaux ces vingt dernières années. En particulier, les cas non hermitiens, moins représentés dans la littérature en règle générale, font ici l'objet d'une attention spéciale en raison de leurs applications à la physique et à l'étude des réseaux de neurones. Petit tour d'horizon.

C'est une idée vieille comme le monde – bon, n'exagérons pas : vieille comme l'algèbre linéaire. On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_N(\mathbb{C})$, que l'on va *perturber* (par exemple, additivement) par une autre matrice $R \in \mathscr{M}_N(\mathbb{C})$. On s'intéresse alors au spectre de la matrice $M+R$, que l'on compare à ceux de M et R. Cette idée de base admet de multiples déclinaisons. Dans ce qui suit, néanmoins, on se limitera aux cas suivants : tout d'abord, la perturbation R sera *de rang un* – ce qui, il faut bien l'avouer, simplifie considérablement l'analyse [1]. Ensuite, bien qu'une très vaste littérature concerne des situations où M et R sont normales (par exemple toutes deux hermitiennes, comme dans le célèbre phénomène de transition BBP [2]), on se penche ici sur des cas *anormaux*, à savoir :

1. le cas d'une matrice aux entrées indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) sans symétrie particulière ;
2. le cas d'une matrice hermitienne perturbée de façon anti-hermitienne (modèle $H+\mathrm{i}\Gamma$) ;
3. enfin, le cas d'une matrice unitaire, perturbée multiplicativement par une matrice non unitaire (modèle UA).

Un point commun entre ces différentes situations est que M sera toujours, pour nous, une matrice aléatoire, et que nous ferons varier continûment la perturbation R afin de considérer la dynamique des valeurs propres, qui suivent des trajectoires aléatoires dans le plan complexe.

Le phénomène principal qui nous intéresse est l'émergence d'un ou plusieurs *outliers*. Ce mot d'anglais n'ayant pas encore d'équivalent exact en français, nous l'emploierons tel quel ; mais il mérite que l'on en précise d'abord la définition : est appelée *outlier*, en principe, toute valeur propre éloignée du reste du spectre, ou éloignée d'une zone considérée comme typique pour un spectre aléatoire. On s'attend par ailleurs, dans la plupart des cas, à ce que cette valeur propre soit localisable (il s'agira, par exemple, d'en borner les fluctuations). Plus précisément, on dira qu'une valeur propre λ_1 est un *outlier fortement séparé* s'il existe deux domaines D_1 et D_2 tels que, avec *forte probabilité*,

(i) $\lambda_1 \in D_1$;
(ii) $\lambda_2, \cdots, \lambda_N \in D_2$;
(iii) et tel que D_1 soit *loin* de D_2.

Les domaines D_1, D_2 peuvent être aléatoires ou déterministes. Ils dépendent également de la taille N des matrices – et l'on s'intéresse généralement au régime dans lequel cette taille tend vers l'infini. Dans ce contexte, la notion de forte probabilité concernera des événements dont le complémentaire est de probabilité plus petite que n'importe quelle puissance négative de N, et la séparation entre les domaines D_1 et D_2 jouera sur différentes échelles en fonction de N.

Dans chacun des modèles présentés ci-dessous, la localisation du ou des outliers est une question centrale en vue des applications – et c'est une

1. Sous les dehors trompeurs d'une excessive simplicité, ces perturbations de rang un, comme on va le voir, ont déjà une structure très riche ; elles ont fait récemment l'objet d'un savoureux article de survey de Peter Forrester [10].
2. Pour Baik, Ben Arous et Péché, en référence à l'article pionnier [1].

bonne nouvelle, parce que c'est aussi ce à quoi les techniques disponibles nous donnent accès le plus directement. Mais il y a d'autres questions naturelles qui sont plus difficiles à aborder. L'étude précise des fluctuations de l'outlier, de la forme des trajectoires, ou encore de l'origine de l'outlier dans le spectre de M, nécessite une analyse plus poussée. Et puisque dans le monde non hermitien, il convient de distinguer *deux* types de vecteurs propres, c'est à l'étude d'une dynamique couplée entre valeurs propres, vecteurs propres à droite, et vecteurs propres à gauche, que ces questions nous invitent.

1. Le labyrinthe de Ginibre : perturbations de matrices aléatoires non hermitiennes

Évoquons tout d'abord le cas d'une matrice aléatoire M sans symétrie particulière. L'intérêt pour les perturbations de rang un d'une telle matrice a été suscité par l'article de Rajan et Abbott de 2006 [28], qui établit la pertinence de ce modèle pour l'étude des réseaux de neurones [3]. Le point de départ de Rajan et Abbott est la *loi de Dale*, qui stipule qu'un neurone donné est soit inhibiteur soit excitateur de tous les autres neurones. Cela se traduit dans leur modèle par une matrice de rang un, de la manière suivante : pour modéliser la *matrice synaptique* (qui décrit les interactions entre neurones), on part d'une matrice R de valeurs moyennes, où les entrées des colonnes correspondant aux neurones excitateurs sont toutes à une certaine valeur positive $\mu_E > 0$, et celles des colonnes correspondant aux neurones inhibiteurs à une valeur négative $\mu_I < 0$, ce qui forme bien une matrice de rang un, que l'on perturbe ensuite par un bruit aléatoire G (aux entrées essentiellement indépendantes) qui correspond aux fluctuations attendues autour des valeurs moyennes. On souhaite comprendre la distribution des valeurs propres de $G + R$, modèle idéalisé de matrice synaptique. Cela rejoint bien sûr la philosophie générale exposée plus haut, à un détail près – non pas mathématique mais linguistique : pour nous, c'est la matrice R qui est considérée comme une « perturbation » de faible rang de la matrice aléatoire G. Formellement, cette différence de point de vue ne change rien ; on cherche de toute façon à considérer ce système dans tous les régimes possibles : on étudiera donc, par exemple, $G + tR$, avec t un paramètre que l'on peut soit fixer soit faire varier continûment.

Les questions soulevées par Rajan et Abbott [28] ont été évoquées par Terence Tao lors d'un workshop à l'American Institute of Mathematics, auquel participaient également Alice Guionnet et Percy Deift. Alice Guionnet avait récemment travaillé, avec Mylène Maïda et Florent Benaych-Georges, sur un problème analogue dans le cas hermitien [2]; Percy Deift quant à lui aurait appuyé l'idée d'utiliser l'identité de Sylvester, à savoir, que pour tous $A \in \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{C})$, on a

$$\det(I_n + AB) = \det(I_d + BA), \qquad (1)$$

ce qui permet de réduire la dimension du problème, dans le cas général d'une perturbation de rang $d \geqslant 1$ fixé [4]. De ces discussions a résulté l'article de Tao [32], dont nous présentons ci-dessous quelques résultats emblématiques, pour les perturbations de rang $d = 1$.

On considère une matrice G dont les entrées sont des variables aléatoires complexes i.i.d. On peut par exemple prendre des variables gaussiennes complexes : c'est ce qui s'appelle une matrice de Ginibre complexe, en hommage aux premiers résultats emblématiques de Jean Ginibre [19] sur ce modèle. Ainsi donc, considérons, pour fixer les idées :

$$(G_{ij})\ i.i.d., \qquad G_{ij} \overset{d}{=} \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \tfrac{1}{N}). \qquad (2)$$

Les valeurs propres de cette matrice G convergent en distribution vers la loi circulaire de Girko, ce qui signifie que la position d'une valeur propre typique se rapproche en distribution d'un point uniforme sur le disque unité, quand $N \to \infty$. On sait (voir notamment les travaux de Djalil Chafaï [5]) qu'une perturbation de faible rang ne modifie pas la loi circulaire, du moins macroscopiquement, c'est-à-dire que le comportement typique d'une valeur propre n'est pas affecté. Néanmoins, une telle perturbation peut créer des outliers, ce qu'un résultat de Tao confirme, dès lors que la perturbation a elle-même une valeur propre non nulle assez grande. Il s'agit plus précisément du cas où la perturbation est hermitienne et positive de rang un.

3. Il s'agit, en l'occurrence, de réseaux de *vrais* neurones ; mais ces applications se situent à l'interface entre les neurosciences computationnelles, qui visent à comprendre le fonctionnement du cerveau, et l'étude de réseaux de neurones artificiels en vue de l'IA. Une autre application naturelle des perturbations de faible rang à ces domaines est présentée dans l'article récent [31].

4. Pour une preuve de cette identité classique, voir Oraux X-Éns [12].

Théorème 1 (Tao [32]). *Soit v un vecteur unitaire indépendant de G et μ un scalaire fixé. Alors le spectre de*

$$G + \mu\sqrt{N}vv^*$$

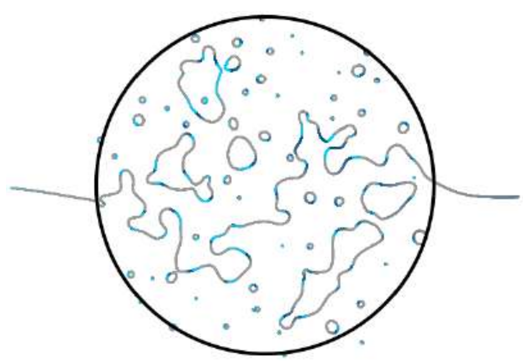
comporte un unique outlier $\lambda_1 = \mu\sqrt{N} + o(1)$, tandis que le reste du spectre est contenu dans un disque $D(0, 1 + o(1))$ avec forte probabilité, et converge faiblement vers la loi circulaire pour $N \to +\infty$.

Remplaçons la valeur $\mu\sqrt{N}$ par un paramètre de temps $t \in \mathbb{R}$, et considérons les trajectoires des valeurs propres des matrices

$$G(t) = G + tvv^*, \quad t \in \mathbb{R},$$

à N fixé. Ces trajectoires sont représentées ci-dessous, où les couleurs ont été réglées de sorte qu'elles tendent vers le bleu clair en $t \to -\infty$ et vers le bleu foncé en $t \to +\infty$ en passant par le gris. On constate, tout d'abord, que le spectre limite est le même des deux côtés ; c'est un peu surprenant à première vue, mais en fait c'est logique. Pour tout N fixé, les limites des valeurs propres sont les mêmes pour $t \to \pm\infty$, elles convergent vers des valeurs que l'on peut calculer [5]. Visuellement, les trajectoires des valeurs propres se recollent donc les unes aux autres et forment des boucles dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la boucle la plus grande étant celle de l'outlier, qui passe par le point à l'infini.

FIGURE 1 – Trajectoires de $G + tvv^*$ pour une matrice de Ginibre G de taille 100×100.



Ce résultat de Tao ne fait que prouver rigoureusement une intuition très naturelle ; il n'est, à vrai dire, guère surprenant. Mais l'article et les simulations de Rajan et Abbott repèrent également un cas de figure assez inattendu : certaines perturbations de rang un peuvent créer non pas un, mais plusieurs outliers, non fortement séparés au sens défini plus haut. Un autre théorème de Tao vient confirmer et préciser ce phénomène. En voici un énoncé très proche [6] :

Théorème 2. *Soient v un vecteur unitaire fixé, w un vecteur unitaire aléatoire uniforme indépendant de G, et μ un scalaire fixé, alors le spectre de*

$$G + \mu\sqrt{N}vw^*$$

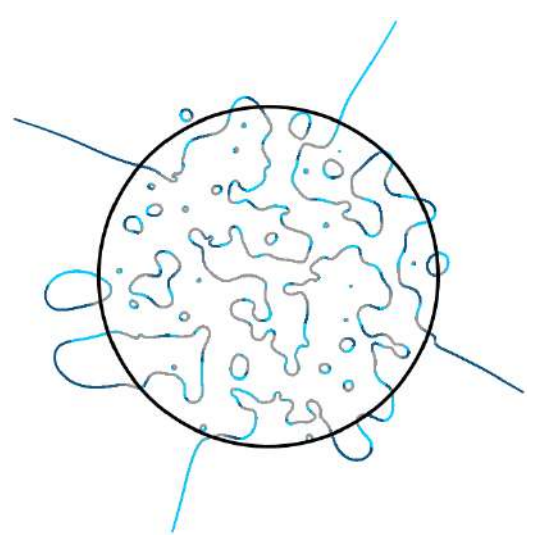
a un certain nombre (aléatoire) d'ordre $O(1)$ d'outliers, dont la distribution correspond asymptotiquement à celle des zéros d'une série entière gaussienne.

Une image des trajectoires dans ce cas de figure est donnée ci-dessous, et la différence avec le cas précédent est assez flagrante. Alors : d'où vient ce nuage de points au-delà du disque unité et pourquoi n'apparaît-il pas lorsque $w = v$? L'heuristique est la suivante [7]. On considère le processus aléatoire

$$G(t) := G + tvw^*,$$

pour des vecteurs v et w que l'on pourra spécifier plus tard.

FIGURE 2 – Trajectoires de $G + tvw^*$ pour une matrice de Ginibre G de taille 100×100 dans le cas où w est uniforme.



5. Il s'agit des zéros de la fonction $\mathscr{W}_N$ introduite dans le calcul qui suit.
6. La seule différence est que l'article [32] considère une autre distribution sur le vecteur w, plus adaptée au contexte des matrices synaptiques de [28] ; mais l'esprit est exactement le même.
7. Cette approche est assez naturelle et s'applique également aux cas hermitiens tels que ceux traités par exemple en [2, 3].

Pour caractériser le spectre de $G(t)$, on commence par écrire, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{Sp}(G)$ et $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow \det(G(t) - zI_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(I_N + (G - zI_N)^{-1} t v w^*) = 0, \end{aligned}$$

puis on utilise une propriété élémentaire que les anglo-saxons – avec la flexibilité syntaxique désarmante dont ils ont le secret – appellent tout simplement le *matrix-determinant lemma* :

$$\det(I_N + (G - zI_N)^{-1} t v w^*) = 1 + t w^*(G - zI_N)^{-1} v. \quad (3)$$

Remarquons que c'est un cas particulier de l'identité de Sylvester (1), que l'on peut aussi vérifier ici directement en considérant les valeurs propres de ces opérateurs, puisque vw^* est de rang un. On trouve donc l'équivalence :

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow 1 + t w^*(G - zI_N)^{-1} v = 0 \\ &\Leftrightarrow w^*(zI_N - G)^{-1} v = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Autrement dit le spectre de la matrice perturbée $G(t)$ correspond à des lignes de niveau de la fonction méromorphe aléatoire

$$\mathscr{W}_N(z) := w^*(zI_N - G)^{-1} v. \quad (4)$$

Cette fonction dépend des variables aléatoires G, v et w ; de manière typique, elle a N pôles qui sont les valeurs propres de G. Pour tout z au-delà du rayon spectral (remarquons qu'il suffit de prendre $|z| > 1 + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ fixé [8]), on peut écrire :

$$\mathscr{W}_N(z) = \frac{w^* v}{z} + \sum_{k \geqslant 1} \frac{w^* G^k v}{z^{k+1}}. \quad (5)$$

On s'intéresse à l'ensemble des outliers au-delà de $1 + \epsilon$,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| > 1 + \epsilon,\ \mathscr{W}_N(z) = \frac{1}{t} \right\}.$$

Dans le premier cas de figure ($w = v$), le premier terme de (5) est z^{-1}, tandis qu'une analyse assez rapide montre que le reste de l'expression est de taille typique $N^{-1/2}$, en accord avec la normalisation de la matrice G aux entrées i.i.d. (2). La caractérisation du spectre de $G(t)$ devient donc

$$\frac{1}{t} = \mathscr{W}_N(z) = \frac{1}{z} + O(N^{-\frac{1}{2}}) \quad (6)$$

et l'on s'attend (avec raison) à un unique outlier dans un voisinage de $z = t$. Ce raisonnement peut être rendu parfaitement rigoureux à l'aide du théorème de Rouché [9] [30], et en donnant un sens probabiliste précis à l'approximation (6).

Dans le second cas de figure (Théorème 2) où w est choisi au hasard, uniformément, et indépendamment de v, alors $w^* v$ est aussi un terme d'ordre $N^{-1/2}$, et l'on peut prouver par des techniques classiques que les coefficients de (5), correctement normalisés, convergent vers des gaussiennes indépendantes :

$$\forall k \geqslant 0,\ \sqrt{N} w^* G^k v \xrightarrow[N \to \infty]{d} g_k.$$

Notons g la série entière gaussienne correspondante :

$$g(z) = \sum_{k \geqslant 0} g_k z^k. \quad (7)$$

Ainsi donc, on obtient [10] la convergence

$$\sqrt{N} \mathscr{W}_N(z) \xrightarrow[N \to \infty]{d} g\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ce qui correspond bien à l'affirmation du Théorème 2 : avec $t = \mu\sqrt{N}$ pour μ fixé, les valeurs propres de $G(t)$ correspondent, à la limite, aux inverses des zéros de la fonction

$$g(z) - \frac{1}{\mu},$$

qui sont typiquement en nombre fini, d'ordre 1.

Outre les applications déjà citées ([28, 31]) à la modélisation des réseaux de neurones biologiques, des perturbations de faible rang de certaines matrices apparaissent également dans l'étude des réseaux de neurones artificiels et tout particulièrement dans les LLM (Large Language Models) tels que le célèbre GPT-4. On peut mentionner, par exemple, la technique LoRA (Low Rank Approximation [21]) qui permet d'adapter un modèle entraîné

8. Conditionner sur l'événement $\mathrm{Sp}(G) \subset D(0, 1 + \epsilon)$, ne pose pas de problème car on sait que le complémentaire de cet événement a une probabilité exponentiellement faible en N : typiquement, une matrice aux entrées i.i.d. n'a aucun outlier, comme cela a été démontré récemment avec brio sous des hypothèses optimales [4].

9. On rappelle ici ce théorème incontournable : si f et g sont des fonctions holomorphes sur un domaine Ω et vérifiant $|f - g| < |g|$ le long d'un lacet simple $\gamma \subset \Omega$, alors f et g ont le même nombre de zéros sur le compact K qui constitue l'intérieur du lacet. Ce résultat possède des applications très utiles et bien connues des *dog walkers* new-yorkais : si l'on veut éviter que la laisse s'enroule autour d'un arbre, il suffit de faire en sorte qu'elle soit toujours plus courte que la distance qui sépare le *dog walker* de l'arbre. Les mauvaises langues, néanmoins, prétendent que ce principe était déjà connu et appliqué avant l'émergence de l'analyse complexe.

10. Sans surprise, mais à quelques détails techniques près, résolus par Krishnapur [24] et dont nous faisons grâce aux lecteurs.

au départ pour un certain type de tâche à réaliser une tâche différente à moindre frais ; on peut ainsi personnaliser GPT-4 en lui apportant des éléments absents de sa base de donnée initiale. Plus généralement, ces phénomènes d'apparition d'un ou plusieurs outliers au-delà d'une certaine force de la perturbation peuvent être compris comme analogues à l'acquisition d'une certaine faculté au-delà d'une certaine dose d'entraînement ; de tels effets de seuils sont observés aussi bien pour un système apprenant à jouer au casse-brique via un algorithme de *reinforcement learning* que pour l'apprentissage des mathématiques par un être humain [11].

Sur le plan purement mathématique et tout particulièrement d'un point de vue probabiliste, la forme de ces trajectoires, la taille et la longueur de leurs concaténations, et tout particulièrement celles de l'unique chemin entre les outliers dans le cas $v = w$, sont autant de paramètres aléatoires que l'on peut légitimement se donner pour défi de quantifier.

Ajoutons en guise d'ouverture que ces trajectoires suivent une équation assez remarquable, que voici :

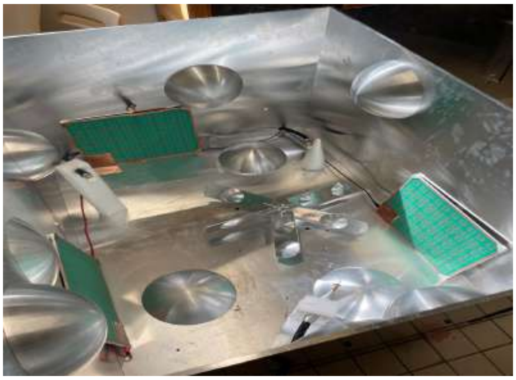
$$\lambda_j''(t) = 2\lambda_j'(t) \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_k'(t)}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad t > 0, \tag{8}$$

où les valeurs initiales $\lambda_i(0), \lambda_i'(0)$ sont déterminées par la matrice G et par la perturbation – autrement dit, tout l'aléa est contenu dans ces conditions initiales, à partir desquelles se produit une évolution déterministe (mais potentiellement chaotique en raison des singularités, lorsque deux valeurs propres se retrouvent proches l'une de l'autre). Pour étudier en détail ces trajectoires, "il suffirait" de réussir à combiner une connaissance assez précise de l'aléa initial avec une étude quantitative de l'équation (8) – qui après tout n'est jamais qu'une équation différentielle ordinaire... Avis aux amateurs !

2. Les chaises musicales : perturbation anti-hermitienne d'une matrice aléatoire hermitienne

Les justifications historiques du modèle suivant nous emmènent vers la théorie de la dispersion quantique chaotique (*quantum chaotic scattering*), qui étudie par exemple des expériences faites avec des chambres de réverbérations chaotiques comme celles utilisées à l'Institut de Physique de Nice [12] (voir par exemple l'article fondateur [33] et les travaux plus récents [20, 27]). Il s'agit d'un appareil encombrant au mode d'emploi compliqué, mais dont le fonctionnement est essentiellement similaire à celui d'un four à micro-ondes : une source émet des ondes électromagnétiques qui sont réfléchies par les murs de la cavité. Mais au lieu de créer une onde stationnaire (qui permet de réchauffer un plat de manière contrôlée), une chambre réverbérante chaotique, comme celle de la figure 3, doit avoir plusieurs irrégularités qui *dispersent* les ondes d'une manière plus complexe et imprévisible.

Figure 3 – Exemple d'une installation expérimentale pour observer des phénomènes chaotiques de dispersion quantique. Source : U. Kuhl.



Schématiquement, la dispersion d'une onde électromagnétique est décrite par un opérateur S qui transforme l'onde entrante ψ_{in} en une onde sortante ψ_{out} par l'équation

$$\psi_{out} = S\psi_{in}. \tag{9}$$

L'opérateur de dispersion S (*scattering operator*) encode tout le processus et est lié au Hamiltonien H, un opérateur auto-adjoint avec un spectre qui correspond aux niveaux d'énergie du système quantique fermé. Cependant, suivre chaque onde de manière déterministe est impossible (par définition, pour un système chaotique) et on utilise plutôt un modèle statistique : c'est là qu'entrent en jeu les matrices aléatoires ! Un bon candidat pour modéliser H est une matrice hermitienne aux entrées gaussiennes et essentiellement i.i.d. à la symétrie hermitienne près (c'est ce que l'on appelle le gue,

11. Conformément à l'aphorisme bien connu de Von Neumann : *en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.*
12. INPHYNI, Université Côte d'Azur.

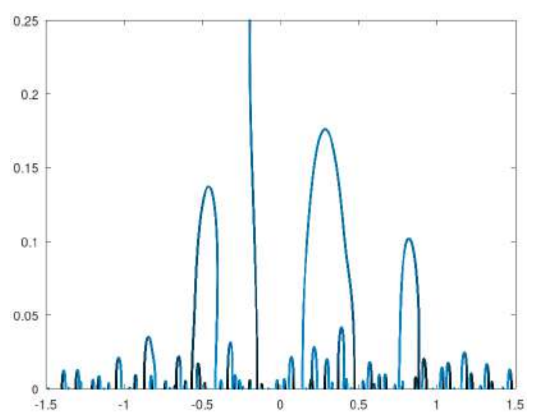
pour *Gaussian Unitary Ensemble*). L'hypothèse de travail est que l'on retrouve le spectre du Hamiltonien, dans la limite où $N \to \infty$. En réalité, la dispersion n'est pas un processus parfaitement isolé et le système quantique peut échanger de l'énergie avec son environnement. Au lieu d'utiliser la matrice H directement, le système quantique ouvert est donc associé à un Hamiltonien *effectif* $H_{eff} = H + \mathrm{i}\Gamma$ qui n'est plus auto-adjoint (voir [17] pour les détails). Dans le cas le plus simple, l'interaction avec l'environnement passe par M canaux désignés à l'avance, et l'on a $\Gamma = VV^*$ avec une matrice $V \in \mathbb{C}^{N\times M}$. Ces considérations sont à l'origine de l'intérêt des physiciens (et, à leur suite, des mathématiciens) pour les perturbations anti-hermitiennes de faible rang de matrices hermitiennes. Comme précédemment, le cas le plus simple et le plus connu est celui d'une perturbation anti-hermitienne de rang 1, pour laquelle un unique outlier apparaît. En physique, l'étude de l'émergence de cet outlier (aussi appelé *broad resonance*) s'inscrit dans la pratique plus générale d'une activité connue sous le nom de capture des résonances (*resonance trapping*).

Soient donc : H une matrice complexe hermitienne, v un vecteur unitaire, $t > 0$ un paramètre de temps, et considérons la matrice perturbée

$$G(t) = H + \mathrm{i}tvv^*. \tag{10}$$

On s'intéresse au spectre de $G(t)$, dont les trajectoires sont représentées ci-dessous.

Figure 4 – Trajectoires des valeurs propres pour H une matrice GUE de taille 100×100. L'évolution du paramètre t est indiquée par une variation de couleur, du noir (t=0) au bleu ($t \to \infty$).



Du côté des physiciens, il est connu depuis longtemps qu'une transition se produit autour de $t = 1$: voir par exemple les travaux pionniers de Dittes, Heyes et Rotter [6] qui font allusion à cette échelle de temps critique ; ceci a par la suite été vérifié expérimentalement (voir notamment [26]).

Du côté mathématique, on peut établir les résultats suivants lorsque H est une matrice du GUE :

- pour $t = 0$, les valeurs propres de $G(0) = H$, sont proches en distribution de la loi du demi-cercle, de densité $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ sur $[-2,2]$;
- pour $t \leqslant 1$, il n'y a pas d'outlier, au sens où l'on peut prouver que toutes les valeurs propres restent proches (distance d'ordre $\frac{1}{N}$) de la droite réelle avec forte probabilité ;
- pour tout $t > 1$ fixé, il y a un unique outlier, et fortement séparé ; citons par exemple le résultat suivant :

Théorème 3 (O'Rourke et Matchett Wood [25]). *Pour $t > 1$ et $\epsilon > 0$ fixés, avec forte probabilité il y a un outlier λ_1 dans un voisinage de $\mathrm{i}(t - \frac{1}{t})$. Pour le reste du spectre, on a*

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall j \geqslant 2,\ \mathfrak{Im}\,\lambda_j < \frac{N^\epsilon}{N},$$

et les parties réelles $(\mathfrak{Re}(\lambda_j))_{j=2}^N$ convergent toujours vers la loi du demi-cercle dans la limite $N \to \infty$.

- enfin, lorsque $t \to \infty$, l'outlier tend vers l'infini, tandis que les autres valeurs propres convergent vers des valeurs réelles [13].

Le comportement général de ces valeurs propres justifie la métaphore des *chaises musicales*, dans la mesure où elles suivent des trajectoires relativement imprévisibles dans le demi-plan supérieur avant de revenir sur la droite réelle, à l'exception d'une valeur propre (l'outlier) qui est exclue du groupe.

Remarquons que pour ce système, la partie imaginaire de la trace est connue : on a

$$\sum_{j \geqslant 1} \mathfrak{Im}(\lambda_j) = \mathfrak{Im}\,\mathrm{Tr}(H + \mathrm{i}tvv^*) = t.$$

Comme par ailleurs, ces parties imaginaires sont positives, l'outlier que l'on attendrait au voisinage de $\mathrm{i}t$ est en réalité légèrement en-dessous, près d'une position typique $\mathrm{i}(t - \frac{1}{t})$. Les parties imaginaires des autres valeurs propres se répartissent les miettes que l'outlier veut bien leur laisser, d'ordre $\frac{1}{t}$.

13. Ces limites correspondent aux $N-1$ valeurs propres d'un mineur de H. En particulier, elles sont entrelacées avec les N valeurs propres initiales.

Pour étudier ce système, prenons z dans le demi-plan supérieur ($\Im(z) > 0$) et appliquons le *matrix-determinant lemma* comme précédemment. On trouve

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow \det(G(t) - zI_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(I_N + (H - zI_N)^{-1}\mathrm{i}tvv^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \mathrm{i}tv^*(H - zI_N)^{-1}v = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathscr{W}_N(z) := v^*(H - zI_N)^{-1}v = \frac{\mathrm{i}}{t}. \end{aligned}$$

Jusque là, c'est le même calcul qu'avant, mais à partir de maintenant la méthode doit être adaptée car il serait trop cavalier de développer $v^*(H - zI_N)^{-1}v$ dans le régime qui nous intéresse. Heureusement, nous sommes retombés sans y songer sur un objet bien connu. Dans l'immense littérature qui concerne les matrices aléatoires hermitiennes figurent en bonne place les lois locales : le but du jeu est d'estimer la résolvante $(H - zI_N)^{-1}$ lorsque z est au-dessus du spectre, avec la partie imaginaire la plus petite possible. L'idée générale est que, dans un régime approprié, la trace de la résolvante est proche de la transformée de Stieltjes du demi-cercle :

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(H - zI_N)^{-1} \simeq m_{\mathrm{sc}}(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{x=-2}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-z}\mathrm{d}x.$$

Alors, bon. Notre fonction $\mathscr{W}_N$ n'est pas une trace de résolvante, certes, mais elle est de la même famille. C'est une sorte de coefficient diagonal de résolvante, qui fait l'objet d'un théorème spécial appelé *loi locale isotrope* [22] et qui permet de justifier l'approximation

$$\mathscr{W}_N(z) \simeq m_{\mathrm{sc}}(z)$$

dans un certain domaine (et avec un terme d'erreur plus grand que pour une loi locale classique : cet objet est plus instable qu'une trace de résolvante). Lorsque ce terme d'erreur est suffisamment petit, néanmoins, on s'attend à ce que l'outlier soit proche d'une solution de l'équation

$$m_{\mathrm{sc}}(z) = \frac{\mathrm{i}}{t}.$$

Pour une matrice du GUE ou tout autre matrice convergeant vers la loi du demi-cercle, cette prédiction correspond précisément au $\mathrm{i}(t - \frac{1}{t})$ du Théorème 3. En revanche, notons que selon la même logique, on peut aussi concocter des situations où plusieurs outliers apparaissent pour certaines valeurs de t, typiquement si la loi limite n'est pas la loi du demi-cercle, et que la transformée de Stieltjes n'est pas injective [29].

Comme pour le labyrinthe de Ginibre (partie 1), la fonction $\mathscr{W}_N$ caratérise le spectre de $G(t)$ via une relation simple et donc contient en théorie toutes les informations sur les trajectoires $\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)$ des valeurs propres. La première chose que l'on peut déduire immédiatement, c'est que les trajectoires ne se croisent (presque) jamais. En effet, en admettant que $\lambda_j(t) = \lambda_k(s)$, on trouve

$$\frac{\mathrm{i}}{t} = \mathscr{W}_N(\lambda_j(t)) = \mathscr{W}_N(\lambda_k(s)) = \frac{\mathrm{i}}{s} \tag{11}$$

d'où l'on déduit que $t = s$: c'est un fait déterministe que deux trajectoires ne peuvent se croiser qu'au même temps t ! Mais avec $t = s$, une intersection correspond à un zéro d'ordre au moins deux de $\mathscr{W}_N - \frac{\mathrm{i}}{t}$ qu'on peut traduire en une condition géometrique [14], pour conclure enfin par des considérations de dimensions que cet événement a une probabilité nulle.

On peut aussi être plus précis quant à l'échelle de temps au-delà de laquelle le perdant de ce jeu de chaises musicales peut être distingué avec quasi-certitude.

Théorème 4 (Dubach et Erdős [7]). *Sous des conditions générales* [15] *sur H qui garantissent la loi locale isotrope, pour tout $\epsilon > 0$ fixé et $t > 1 + N^{-1/3+\epsilon}$, avec forte probabilité, il existe un unique outlier fortement séparé.*

Pour reprendre l'heuristique en la détaillant un peu : rappelons que l'on a

$$\mathscr{W}_N(z) := v^*(H - zI_N)^{-1}v \tag{12}$$

et que les valeurs propres au temps t sont exactement données par

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \Im z > 0,\, \mathscr{W}_N(z) = \frac{\mathrm{i}}{t} \right\}.$$

14. On peut le résumer par une image : les zéros de $\mathscr{W}_N'$ sont des points aléatoires du plan en nombre fini, et le fait qu'un de ces points tombe pile sur une trajectoire est un événement de probabilité nulle.

15. Ceci couvre le cas du GUE (entrées gaussiennes), mais plus généralement les matrices de Wigner (entrées i.i.d. plus générales, avec des conditions sur les moments).

16. En matrices aléatoires, on dit que la suite a_n est dominée stochastiquement par la suite $b_n > 0$ (notation : $a_n \prec b_n$) si pour tout $\epsilon > 0$, on a $|a_n| < b_n n^{\epsilon}$ avec forte probabilité. C'est un concept pratique pour travailler avec des ordres de grandeur en n pour des variables aléatoires dans la limite $n \to \infty$.

La loi locale isotrope de [22] nous donne la domination stochastique [16]

$$|\mathscr{W}_N(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \prec \frac{1}{\sqrt{N\,|\mathfrak{Im}\, z|}}.$$

Pour tout $t > 0, \epsilon > 0$, on définit le domaine

$$\mathscr{R}_{t,\epsilon} = \left\{ \mathfrak{Re}(z)^2 + \left(\mathfrak{Im}(z) - \left(t - \frac{1}{t}\right)\right)^2 > \frac{N^\epsilon}{N \cdot \mathfrak{Im}(z)} \right\}.$$

En combinant la domination stochastique avec le théorème de Rouché, on prouve que les fonctions $w(z) - \frac{\mathrm{i}}{t}$ et $m_{sc}(z) - \frac{\mathrm{i}}{t}$ auront le même nombre de zéros dans $\mathscr{R}_{t,\epsilon}$. En particulier, l'outlier se trouve dans un disque

$$D\left(\mathrm{i}\left(t - \frac{1}{t}\right), \frac{N^\epsilon}{\sqrt{N\left(t - \frac{1}{t}\right)}}\right),$$

dont le centre est bien la position typique $\mathrm{i}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, tandis que le reste des valeurs propres vérifie

$$\mathfrak{Im}(\lambda_j) < \frac{N^\epsilon}{\left(N\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)}.$$

Un calcul direct permet de conclure dès que t est au-delà de l'échelle $1 + O(N^{-1/3})$! Cette technique permet donc d'établir qu'il y a forte séparation de l'outlier au-delà d'une certaine échelle de temps. Néanmoins, elle ne suffit pas à prouver que cette échelle est optimale. Cette confirmation a été fournie peu de temps après par l'article de Fyodorov, Khoruzhenko et Poplavskyi [15] qui estime précisément le nombre moyen de points dans un rectangle bien choisi :

Théorème 5 (Fyodorov, Khoruzhenko et Poplavskyi [15]). *Si l'on définit*

$$\mathscr{N}_t(y) := \mathbb{E}[\#\{\lambda \in Sp(G(t)) : \mathfrak{Im}(\lambda) > y\}],$$

on a, quand $N \to \infty$,

$$\mathscr{N}_t(y) \sim \frac{1}{y}\, e^{-Ny(t+\frac{1}{t})}\, I_1(2Ny)$$

où I_1 désigne une fonction de Bessel modifiée de première espèce et y peut dépendre de N.

En particulier, pour $t = 1 \pm O(N^{-1/3})$, cette estimation prouve l'existence d'un nuage de valeurs propres dont les parties imaginaires sont d'ordre $O(N^{-1/3})$. La technique utilisée est un calcul direct assez virtuose, rendu possible par le fait que, dans le cas où H est une matrice du GUE, le système est complètement intégrable, ce qui avait été montré une vingtaine d'années auparavant par deux des trois mêmes auteurs [14]. Dans le cas du GUE, on dispose d'une densité explicite pour la loi jointe des valeurs propres de $H + \mathrm{i}tvv^*$:

$$\frac{1}{Z_{N,t}} \delta_{\sum \mathfrak{Im}\, z_i = t} \prod_{i<j} |z_i - z_j|^2\; e^{-\frac{N}{2}(t^2 + \sum \mathfrak{Re}(z_k^2))}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dans le demi-plan supérieur $\{\mathfrak{Im}\, z \geqslant 0\}$.

Nous arrêterons là ce bref survol du modèle des chaises musicales. Mentionnons pour finir une question ouverte très intrigante : puisqu'il s'agit d'un processus continu et sans intersection de trajectoires, de quelle partie du spectre initial (celui de $G(0) = H$) l'outlier provient-il ? Toutes les simulations aussi bien que les calculs tendent à montrer que l'essentiel de l'action se passe dans un petit voisinage de l'origine. Néanmoins, les méthodes actuelles échouent à démontrer rigoureusement que l'outlier provient d'un tel voisinage avec forte probabilité, pour des raisons techniques sérieuses et qui requièrent sans doute que soit inventée une nouvelle approche.

3. Le modèle *UA* : perturbation multiplicative d'une matrice unitaire

Toujours en lien avec la théorie de la dispersion quantique, notre troisième et dernier modèle provient de l'étude des systèmes en temps discret. Il fut introduit par Fyodorov [13] dans le contexte suivant : considérons un système quantique simple qui interagit avec son environnement. Pour chaque temps (discret) n, l'état du système est représenté par un vecteur $\psi_{sys}(n)$, et par ailleurs on considère des signaux $\psi_{in}(n)$ et $\psi_{out}(n)$ qui entrent et sortent du système pour tout n. L'évolution de ce système 'ouvert' est alors décrite par la relation

$$\begin{pmatrix} \psi_{sys}(n+1) \\ \psi_{out}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{sys}(n) \\ \psi_{in}(n) \end{pmatrix} =: M \begin{pmatrix} \psi_{sys}(n) \\ \psi_{in}(n) \end{pmatrix}$$

assortie d'une contrainte qui garantit la conservation d'énergie. Les éléments de M sont des opérateurs qui décrivent la transformation entre les signaux d'environnement et le système :

– M_{11} : évolution interne ;

- M_{12} : signal entrant $\to$ système ;
- M_{21} : système $\to$ signal sortant ;
- M_{22} : transmission entrant $\to$ sortant.

En appliquant quelques transformations [17], l'évolution interne prend la forme

$$M_{11} = U\sqrt{I_N - \tau^*\tau},$$

où U est unitaire et les valeurs propres de $\tau^*\tau$ (pour τ une matrice rectangulaire $M \times N$) sont associées aux coefficients de transmission qui décrivent le couplage entre le système et son environnement. Dans le cas le plus simple, l'interaction passe par d canaux bien définis, et la perturbation $\tau^*\tau$ prend une forme diagonale :

$$\tau^*\tau = \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_d, 0, \dots, 0). \qquad (13)$$

Notons que le cas $\tau = 0$ correspond à un système quantique *fermé* (sans interactions avec l'environnement), qui est décrit par une évolution unitaire. Pour modéliser sa dynamique chaotique par une approche statistique appropriée, une distribution s'impose : la mesure de Haar sur le groupe unitaire, c'est-à-dire que la matrice U est échantillonnée d'une manière uniforme sur $U_N(\mathbb{C})$. Dans le jargon historique des matrices aléatoires, on appelle ça le cue (pour *Circular Unitary Ensemble*).

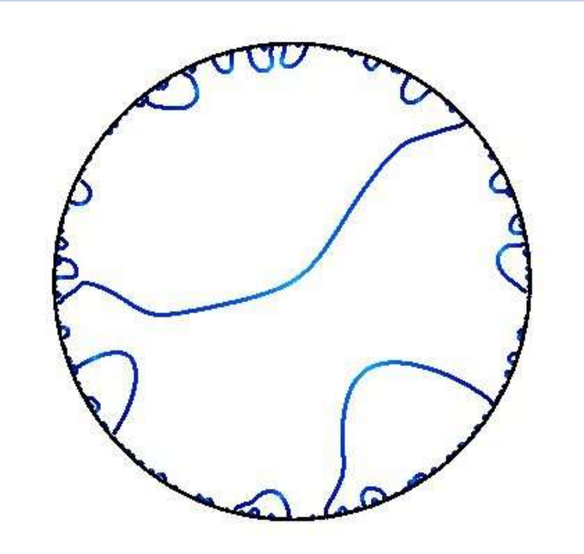


Figure 5 – Trajectoires du modèle UA de taille 250×250. L'évolution du paramètre t est indiquée par la variation de couleur de noir ($|t|$=1) à bleu ($t \to 0$).

Voilà pour le contexte. Mathématiquement, on va voir qu'il y a des analogies mais aussi des différences significatives avec les exemples précédents. Pour U une matrice du cue et

$$A(t) := (\mathrm{I}_N - (1-t)vv^*)$$

une perturbation de faible rang de l'identité [18] selon un vecteur unitaire v, on considère *le modèle UA* donné par

$$G(t) = UA(t), \qquad t \in [-1, 1]. \qquad (14)$$

On parle d'une *perturbation multiplicative de rang un* pour signifier que la matrice A diffère de l'identité par une matrice de rang un. La dynamique des valeurs propres ressemble à une version circulaire et inclusive [19] des chaises musicales : au départ et à l'arrivée, c'est-à-dire pour $t = \pm 1$, $G(t)$ est une matrice unitaire et les valeurs propres sont toutes de module 1. Au milieu de la dynamique, le spectre de $G(0)$ est identique à celui d'une matrice unitaire tronquée, avec une valeur propre ajoutée à l'origine. Une image de ces trajectoires est donnée sur la figure 5.

On observe que la plupart des valeurs propres font de (très) petites boucles au bord du disque unité, mais il y a une trajectoire qui traverse le disque et passe par zéro (quand $t = 0$). C'est cette valeur propre qui est ici l'*outlier* principal : en effet, c'est celle qui s'éloigne le plus du bord du disque, qui est la plus influencée par la perturbation multiplicative, et que l'on peut isoler facilement du reste du spectre. Un argument analogue à celui de la section 2, permet de montrer que les trajectoires de ce modèle UA ne se croisent pas et de déduire un système d'équations différentielles ordinaires pour les décrire (voir [8]). Tout cela n'est vrai que pour une perturbation de rang un. Et il y a même une formule pour la densité jointe des valeurs propres de (14) dans la littérature.

Théorème 6 (Fyodorov [13]). *La densité jointe des valeurs propres du modèle UA est proportionnelle à*

$$(1-|t|^2)^{1-N} \prod_{i<j} |z_i - z_j|^2 \, \mathbf{1}_{\{|t|^2 = \prod |z_i|^2\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dans le disque unité, avec une constante de normalisation qui est indépendante de t.

17. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Fyodorov [13] pour les détails techniques que nous omettons ici.
18. Le cas typique est celui d'une matrice diagonale $A(t) = \mathrm{diag}(t, 1, \dots, 1)$, que l'on obtient avec (13) quand $d = 1$, et que l'on retrouve ici en prenant $v = e_1$. Cette généralisation apanivore permet simplement de retrouver des notations proches de celles des cas précédents.
19. Il n'y a, en effet, pas de perdant. L'outlier est la valeur propre qui passe par le centre, avant de revenir sur le cercle unité.

L'échelle de temps $t \sim N^{-1/2}$ joue un rôle privilégié pour le modèle UA. En étudiant (14) pour ce choix de t, un résultat de Forrester et Ipsen [11] montre que la distribution jointe des valeurs propres a comme un air de déjà-vu.

Théorème 7 (Forrester et Ipsen [11]). *Pour $\mu > 0$ fixé et $t = \mu N^{-1/2}$, le spectre de* (14) *converge en loi vers la distribution des zéros de la série entière gaussienne* (7).

Pour s'en convaincre, reprenons le calcul dont nous commençons à avoir pris l'habitude. Pour $|z| < 1$ cette fois, on trouve

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow \det(G(t) - zI_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - (1-t)v^*(U - zI_N)^{-1}Uv = 0. \end{aligned}$$

Cela nous donne (encore) une fonction méromorphe aléatoire

$$\widetilde{\mathscr{W}}_N(z) := v^*(I_N - zU^*)^{-1}v$$

qui caractérise le spectre de $G(t)$ via la relation

$$z \in \mathrm{Sp}(G(t)) \Leftrightarrow \widetilde{\mathscr{W}}_N(z) = \frac{1}{1-t}.$$

Comme $|z| < 1$, on peut développer sans crainte :

$$\widetilde{\mathscr{W}}_N(z) = \sum_{k \geqslant 0} v^*(zU^*)^k v = 1 + \sum_{k \geqslant 1} c_k z^k \qquad (15)$$

et les coefficients c_k, correctement renormalisés par un facteur $\sqrt{N}$ convergent vers des gaussiennes indépendantes. Bref, après ce petit tour de passe-passe, on retombe sur la série gaussienne (7). Les valeurs propres au temps $t = \mu N^{-1/2}$ correspondent, à la limite, aux racines de $g - \mu$.

Il s'avère que cette échelle $t \sim N^{-1/2}$ considérée par Forrester et Ipsen pour obtenir la convergence ci-dessus régit également l'émergence de l'outlier. C'est en fait à cette échelle que tout se passe.

Théorème 8 (Dubach et Reker [8]). *Pour tout $\epsilon > 0$, $|t| < N^{-1/2-\epsilon}$, il existe un unique outlier fortement séparé. De plus, l'échelle $N^{-1/2}$ est optimale.*

L'idée est similaire aux arguments exposés dans les sections précédentes : on veut attraper l'outlier au lasso, en utilisant le théorème de Rouché sur un contour approprié. Cependant, la symétrie du modèle UA ne permet pas de travailler avec une approximation complètement déterministe ; il faut garder une petite dose d'aléatoire. Pour ce faire, notons que, grâce à (15), la fonction

$$\widetilde{\mathscr{W}}_N(z) = v^*(I_N - zU^*)^{-1}v$$

est donnée par une série et écrivons

$$\widetilde{\mathscr{W}}_N(z) = 1 + v^*U^*vz + \widetilde{w}_2(z).$$

Ce sont les fluctuations du terme linéaire qui importent et qu'il convient de garder à part. Comme le CUE est un ensemble assez régulier, l'erreur $\widetilde{w}_2$ est dominée stochastiquement de manière uniforme dans un disque centré en 0 de rayon $1 - N^{-\delta}$ pour $\delta > 0$. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, on obtient la borne

$$\widetilde{w}_2(z) < \frac{N^{\epsilon}|z|^2}{\sqrt{N}(1-|z|)} \qquad (16)$$

avec forte probabilité. Alors, pour

$$f(z) := \widetilde{\mathscr{W}}_N - \frac{1}{1-t}$$

et

$$g(z) := 1 + v^*U^*vz - \frac{1}{1-t}$$

on a

$$|f - g| = |\widetilde{w}_2|$$

et l'on vérifie que $|f - g| < |g|$ sur le domaine

$$\widetilde{\mathscr{R}}_{t,\epsilon} = \left\{ |z| < 1 \;\middle|\; \frac{N^{\epsilon}|z|^2}{1-|z|} < |v^*U^*v|\,|z - z_t| \right\}$$

avec forte probabilité, où z_t désigne l'unique zéro de g. On peut donc appliquer le théorème de Rouché sur le domaine $\widetilde{\mathscr{R}}_{t,\epsilon}$ et prouver que l'outlier est fortement séparé.

Enfin, notons que cet argument s'applique aussi à des matrices aléatoires unitaires au-delà du seul cas du CUE. En fait, c'est vrai pour tout ensemble qui satisfait à la borne (16) pour $\widetilde{\mathscr{W}}_N$ ainsi que l'inégalité

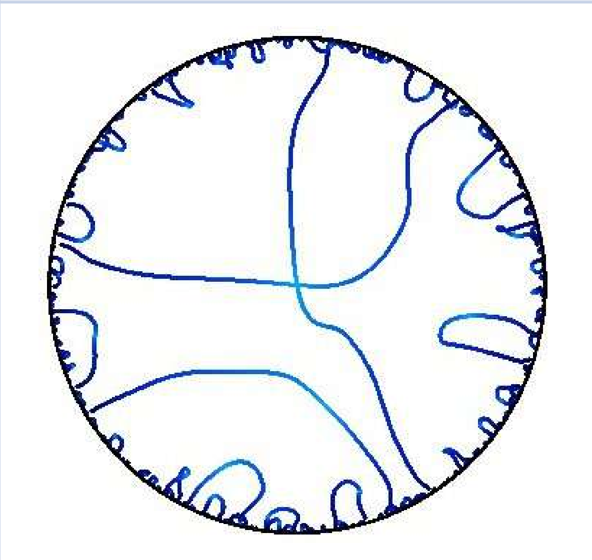
$$N^{1/2-\epsilon} < v^*U^*v < N^{1/2+\epsilon}$$

pour tout $\epsilon > 0$, avec forte probabilité. Notamment, ce n'est pas une propriété qui dépend de la répulsion des valeurs propres de U : elle est toujours vérifiée si ces valeurs propres suivent un processus α-déterminantal avec $\alpha \in [-1, 1]$. Ces processus fournissent une interpolation continue entre un processus ponctuel avec répulsion (cas *déterminantal* : $\alpha = -1$) et un processus avec attraction (cas *permanental* : $\alpha = 1$), en passant par des points indépendants ($\alpha = 0$).

Le modèle UA est sans doute celui dans lequel l'espoir de résoudre de nouveaux problèmes par des calculs exacts est le plus concret. Il possède une symétrie complète par rotation qui joue un rôle essentiel dans notre analyse (permettant notamment une preuve directe du caractère optimal de l'échelle $N^{-1/2}$) ainsi que dans le travail à venir de Fyodorov, Khoruzhenko et Prellberg [16] : cette symétrie permet d'invoquer des résultats puissants et parfois contre-intuitifs tels que le théorème de Kostlan (voir [23, 9]) qui affirme que les points d'un processus ponctuel aléatoire en deux dimensions peuvent se repousser fortement tout en ayant des rayons indépendants. Enfin, il semble également naturel de vouloir généraliser les résultats existants à des perturbations de plus haut rang qui préservent la symétrie de rotation. La figure ci-dessous représente les trajectoires pour une perturbation de rang deux.

Ainsi s'achève, avec ces considérations sur les perturbations multiplicatives faiblement non unitaires, notre bref tour d'horizon des perturbations non hermitiennes de rang un de matrices aléatoires.

Figure 6 – En considérant le modèle UA avec une perturbation de rang deux on obtient deux outliers.



Épilogue : les vecteurs propres sont-ils de droite ou de gauche ?

Pour une matrice hermitienne H et une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, la tradition veut que les vecteurs propres à droite soient privilégiés, c'est-à-dire que l'on considère par défaut des vecteurs-colonnes u tels que

$$Hu = \lambda u.$$

Cela dit, si u est un vecteur propre à droite, on peut tout aussi bien constater que le vecteur-ligne u^* est un vecteur propre à gauche, pour la même valeur propre, c'est-à-dire que

$$u^* H = \lambda u^*.$$

Autrement dit, pour un vecteur propre dans le monde hermitien, être à gauche ou à droite, ça ne change pas grand chose. Il en va tout autrement dans le monde non hermitien... Si G est une matrice complexe diagonalisable (ce qui est le cas avec probabilité 1 pour les modèles habituels de matrices aléatoires), on peut écrire

$$G = P\Delta P^{-1}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N),$$

puis considérer $R_1, \dots, R_N$ les colonnes de P et $L_1, \dots, L_N$ les lignes de P^{-1}, qui vérifient

$$GR_j = \lambda_j R_j, \quad L_j G = \lambda_j L_j.$$

On voit donc que R_i est un vecteur propre à droite, et L_i est un vecteur propre à gauche, pour la même valeur [20] propre λ_i. Ces deux vecteurs peuvent être très différents... Par ailleurs, aucune de ces deux familles n'est, en général, une famille orthogonale – mais l'orthonormalité ($u_i^* u_j = \delta_{ij}$) du cas hermitien est remplacée par la bi-orthogonalité. En effet,

$$L_i R_j = \delta_{ij},$$

ce qui découle directement de $P^{-1}P = I_N$. Une perturbation de la matrice non hermitienne G modifie tous ces éléments ensemble, de manière couplée. Dans tous les modèles présentés ci-dessus, la dérivée des valeurs propres s'exprime en fonction des valeurs propres *et* des vecteurs propres, et ainsi de suite. Comment résumer cette information pour que ce système titanesque devienne (au moins partiellement) intelligible ? Plusieurs méthodes peuvent être envisagées. Une piste privilégiée est l'étude de quantités homogènes dépendant des deux types de vecteurs propres, telles que la matrice $\mathscr{O}$ des overlaps [18] dont les entrées sont données par un produit de produits scalaires hermitiens entre vecteurs propres à droite et à gauche :

$$\mathscr{O}_{ij} = (L_i L_j^*)(R_j^* R_i).$$

Mais ceci est une autre histoire...

20. Il est bon de remarquer que les vecteurs propres, qu'ils soient à gauche ou à droite, partagent les mêmes valeurs.

Références

[1] J. Baik, G. Ben Arous et S. Péché. « Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices ». *Ann. Probab.* **33**, nº 5 (2005), p. 1643-1697.

[2] F. Benaych-Georges, A. Guionnet et M. Maïda. « Large deviations of the extreme eigenvalues of random deformations of matrices ». *Probab. Theory Relat. Fields* **154** (2012), p. 703-751.

[3] F. Benaych-Georges et R. R. Nadakuditi. « The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices ». *Adv. Math.* **227**, nº 1 (2011), p. 494-521.

[4] C. Bordenave, D. Chafaï et D. García-Zelada. « Convergence of the spectral radius of a random matrix through its characteristic polynomial ». *Probab. Theory Relat. Fields* (2022), p. 1-19.

[5] D. Chafaï. « Circular law for noncentral random matrices ». *J. Theor. Probab.* **23**, nº 4 (2010), p. 945-950.

[6] F.-M. Dittes, H. Harney et I. Rotter. « Formation of fast and slow decay modes in N-level systems coupled to one open channel ». *Phys. Lett. A* **153**, nº 451–455 (1991).

[7] G. Dubach et L. Erdős. « Dynamics of a rank-one perturbation of a Hermitian matrix ». *Electron. Commun. Probab.* **28** (2023), p. 1-13.

[8] G. Dubach et J. Reker. « Dynamics of a rank-one multiplicative perturbation of a unitary matrix ». *À paraître dans Random Matrices : Theory Appl., https ://doi.org/10.1142/S2010326324500072* (2024).

[9] G. Dubach. « Powers of Ginibre eigenvalues ». *Electron. J. Probab.*, nº 23 (2018), p. 1-31.

[10] P. J. Forrester. « Rank 1 perturbations in random matrix theory – a review of exact results ». *Random Matrices : Theory Appl.* **12**, nº 4 (2023), p. 2330001.

[11] P. J. Forrester et J. R. Ipsen. « A generalization of the relation between zeros of the complex Kac polynomial and eigenvalues of truncated unitary matrices ». *Prob. Theory Relat. Fields* **31** (2019), p. 833-847.

[12] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas. *Oraux X-ENS : Algèbre 2.*

[13] Y. V. Fyodorov. « Spectra of random matrices close to unitary and scattering theory for discrete-time systems ». In : *Disordered and complex systems*. Vol. 553. AIP Conference Proceedings. Melville, NY : Amer. Inst. Phys., 2001, p. 191-196.

[14] Y. V. Fyodorov et B. A. Khoruzhenko. « Systematic analytical approach to correlation functions of resonances in quantum chaotic scattering ». *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999), p. 65-68.

[15] Y. V. Fyodorov, B. A. Khoruzhenko et M. Poplavskyi. « Extreme Eigenvalues and the Emerging Outlier in Rank-One Non-Hermitian Deformations of the Gaussian Unitary Ensemble ». *Entropy* **25**, nº 74 (2023).

[16] Y. V. Fyodorov, B. A. Khoruzhenko et T. Prellberg. « Zeros of conditional Gaussian analytic functions, random sub-unitary matrices and q-series ». *En préparation.* (2024).

[17] Y. V. Fyodorov et D. V. Savin. « Resonance Scattering of Waves in Chaotic Systems ». In : *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*. Oxford Handbooks in Mathematics. Oxford : Oxford University Press, 2011, p. 703-722.

[18] Y. V. Fyodorov et B. Mehlig. « Statistics of resonances and nonorthogonal eigenfunctions in a model for single-channel chaotic scattering ». *Phys. Rev. E* **66**, nº 4 (2002), p. 045202.

[19] J. Ginibre. « Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices ». *J. Math. Phys.* **6** (1965), p. 440-449.

[20] J.-B. Gros, U. Kuhl, O. Legrand et F. Mortessagne. « Lossy chaotic electromagnetic reverberation chambers : Universal statistical behavior of the vectorial field ». *Phys. Rev. E* **93** (2016), p. 032108.

[21] E. J. Hu, Y. Shen, P. Wallis, Z. Allen-Zhu, Y. Li, S. Wang, L. Wang et W. Chen. « Lora : Low-rank adaptation of large language models » (2021). eprint : `arXiv:2106.09685`.

[22] A. Knowles et J. Yin. « The isotropic semicircle law and deformation of Wigner matrices ». *Commun. Pure Appl. Math.* **66**, nº 11 (2013), p. 1663-1749.

[23] E. Kostlan. « On the spectra of Gaussian matrices ». *Linear Algebra Its Appl.* **162** (1992), p. 385-388.

[24] M. Krishnapur. « From random matrices to random analytic functions ». *Ann. Probab.* **37**, nº 1 (2009), p. 314-346.

[25] S. O'Rourke et P. Matchett Wood. « Spectra of nearly Hermitian random matrices ». *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **53**, nº 3 (2017), p. 1241-1279.

[26] E. Persson, I. Rotter, H.-J. Stoeckmann et M. Barth. « Observation of Resonance Trapping in an Open Microwave Cavity ». *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), p. 2478-2481.

[27] C. Poli. « Chaos ondulatoire en milieux ouverts : Approche statistique par la théorie des matrices aléatoires non-hermitiennes ». Thèse de doct. Université Nice Sophia Antipolis, 2009.

[28] K. Rajan et L. F. Abbott. « Eigenvalue spectra of random matrices for neural networks ». *Phys. Rev. Lett.* **97**, nº 18 (2006), p. 188104.

[29] J. Rochet. « Complex outliers of Hermitian random matrices ». *J. Theor. Probab.* **30**, nº 4 (2017), p. 1624-1654.

[30] E. Rouché. « Mémoire sur la série de Lagrange ». *Journal de l'École impériale polytechnique* **39**, n° XXII (1862), p. 193-224. url : `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433694t/f222.item`.

[31] F. Schuessler, A. Dubreuil, F. Mastrogiuseppe, S. Ostojic et O. Barak. « Dynamics of random recurrent networks with correlated low-rank structure ». *Phys. Rev. Res.* **2**, n° 1 (2020), p. 013111.

[32] T. Tao. « Outliers in the spectrum of iid matrices with bounded rank perturbations ». *Probab. Theory Relat. Fields* **155** (2013), p. 231-263.

[33] J. Verbaarschot, H. Weidenmüller et M. Zirnbauer. « Grassmann integration in stochastic quantum physics : the case of compound-nucleus scattering ». *Physics Reports* **129**, n° 6 (1985), p. 367-438.

Guillaume Dubach

cmls, École polytechnique, 91120 Palaiseau, France

`guillaume.dubach@polytechnique.edu`

Guillaume Dubach est professeur Monge au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'École polytechnique. Il a reçu le *Shiing-Shen Chern Young Faculty Award* 2024 pour ses recherches en matrices aléatoires.

Jana Reker

umpa, Éns Lyon, 69007 Lyon, France

`jana.reker@ens-lyon.fr`

Jana Reker vient de soutenir sa thèse à l'ist Austria. Elle est maintenant en post-doctorat à l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Éns Lyon.

Cet article a pour point de départ les travaux récents des deux auteurs et un mini-cours donné par G. D. à l'Institut Henri Poincaré dans le cadre du séminaire Matrices Et Graphes Aléatoires (mega). Nous tenons à remercier les organisateurs et les participants du mega, tout particulièrement Raphaël Ducatez dont les notes ont été le point de départ de cet article, ainsi que Margaret Bilu, Victor Dubach, Aniss Farès et George-Ioan Stoica pour leurs nombreuses suggestions. Nous avons, enfin, grandement bénéficié de la relecture attentive de deux excellents rapporteurs, Pauline Lafitte et Maxime Février, que nous remercions chaleureusement !

Roger Godement et les fonctions de type positif

Ce texte évoque les fonctions de type positif et leur histoire avant 1950, et présente des extraits de lettres écrites par Roger Godement – qui leur consacra sa thèse en 1946.

• A. Afgoustidis

Les fonctions de type positif apparaissent en analyse et en probabilités vers 1910. Trente ans plus tard, elles contribuent à ouvrir la voie vers l'étude des représentations de dimension infinie des groupes topologiques localement compacts. C'est sur cela que porte la thèse de Godement, en 1946.

On a retrouvé récemment des lettres que Godement envoyait entre 1945 et 1955 à Henri Cartan, qui fut son « directeur » de thèse. Le comité de rédaction de la *Gazette* m'a proposé de présenter quelques extraits de ces lettres, en les replaçant dans leur contexte mathématique. C'est l'occasion de donner un aperçu de l'ambiance de cette époque, mais aussi d'évoquer la circulation des idées mathématiques dans les années 1930 et 1940 ; et de voir comment une notion apparue dans des questions d'analyse classique en vint à jouer un rôle important dans l'évolution de la théorie des représentations.

1. Les fonctions de type positif de 1909 à 1932

1.1 – Définition et premier exemple

Soient E un ensemble et K une fonction de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E, formons la matrice

$$M_K(x_1,\dots,x_n) = (K(x_i,x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}. \qquad (1)$$

On dit que K est *de type positif* si cette matrice est toujours hermitienne positive, quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et le n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$.

Soient G un groupe et f une fonction de G dans $\mathbb{C}$. On dit que f est *de type positif* si la fonction $K_f\colon (x,y)\mapsto f(x^{-1}y)$, de $G\times G$ dans $\mathbb{C}$, est de type positif au sens ci-dessus. On notera alors $M_f(x_1,\dots,x_n)$ pour la matrice (1), plutôt que $M_{K_f}(x_1,\dots,x_n)$.

Par exemple, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors f est de type positif si pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ de nombres réels, la matrice

$$M_f(x_1,\dots,x_n) = (f(x_j - x_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

est hermitienne et positive.

Donnons un premier exemple de fonction de type positif sur $\mathbb{R}$. Fixons un nombre réel λ et considérons la fonction $e_\lambda\colon x\mapsto \exp(i\lambda x)$. Pour tout $n\geqslant 1$ et tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, la matrice $M_{e_\lambda}(x_1,\dots,x_n)$ est $(\overline{\exp(i\lambda x_k)}\exp(i\lambda x_\ell))_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$. Pour voir qu'elle est hermitienne positive, il suffit de remarquer que c'est une *matrice de Gram*. Rappelons en effet que si H est un espace hilbertien complexe et si $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille finie de vecteurs de E, alors la matrice

$$\mathrm{Gram}_H(u_1,\dots,u_n) = (\langle u_i,u_j\rangle_H)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

est hermitienne positive. Si $H=\mathbb{C}$ avec sa structure usuelle d'espace hilbertien, et si $u_j = \exp(-i\lambda x_j)$ pour tout j, alors $\mathrm{Gram}_H(u_1,\dots,u_n) = M_{e_\lambda}(x_1,\dots,x_n)$. Ainsi, la fonction e_λ est de type positif.

1.2 – Mercer et les noyaux de type positif

Le premier à évoquer les fonctions de type positif semble être James Mercer, dans un texte de 1909 sur la théorie des équations intégrales [30]. Pour en décrire le contexte, fixons des nombres réels a et b avec $a<b$, et notons E l'espace des fonctions continues de $I=[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Supposons fixées des fonctions continues $K\colon I\times I\to\mathbb{R}$ et $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$. Dans les premières années du XX$^{\text{e}}$ siècle, Ivar Fredholm [17] puis David Hilbert [23] étudient les équations de la forme $f+\int_I K(\cdot,y)f(y)dy=\varphi$, où l'inconnue est une fonction $f\in E$. Hilbert fait un grand pas en reliant l'étude de cette équation à la « réduction » de la forme bilinéaire

$$(f,g)\mapsto \int_{I\times I} K(x,y)f(x)g(y)dxdy \qquad (2)$$

sur $E\times E$. C'est le point de départ de la « théorie spectrale » en dimension infinie.

Alors que les premiers travaux de Hilbert sur ces questions sont tout récents, Mercer demande : parmi les noyaux $K\colon I\times I\to\mathbb{R}$ qui sont symétriques (c'est-à-dire vérifient $K(x,y)=K(y,x)$ pour tout (x,y)), quels sont ceux pour lesquels la forme bilinéaire (2) est positive ? Il découvre que ce sont précisément les noyaux qui sont de type positif au sens du § 1.1. Il montre ensuite que pour ces noyaux, la forme (2) admet une bonne « réduction » au sens de Hilbert : dans la terminologie actuelle, cela revient à diagonaliser l'opérateur $f\mapsto\int_I K(\cdot,y)f(y)dy$ dans une base hilbertienne de $L^2(I;\mathbb{R})$. J'évoquerai au § 4 la postérité des idées de Mercer dans l'étude des processus stochastiques.

Pour des précisions sur les résultats de Mercer et de ses contemporains, et pour bien d'autres aspects de l'histoire des fonctions de type positif, on pourra consulter le texte de James Stewart [38].

1.3 – Des exemples probabilistes

Si Mercer est l'un des premiers à évoquer les fonctions de type positif (et semble créer le terme), la source la plus importante pour les développements en théorie des groupes est à chercher plus près des probabilités que des équations intégrales.

Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, convenons que sa *transformée de Fourier* est la fonction $\widehat{\mu}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $\widehat{\mu}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}e^{-i\lambda x}d\mu(x)$. Dans le langage probabiliste, la fonction $\lambda\mapsto\hat{\mu}(-\lambda)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire distribuée selon la loi μ.

Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est un n-uplet de nombres réels avec $n\geqslant 1$, alors les fonctions $e_{\lambda_j}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ fournissent des éléments de l'espace hilbertien $L^2(\mathbb{R};\mu)$, et on constate aussitôt que

$$M_{\hat{\mu}}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\mathrm{Gram}_{L^2(\mathbb{R};\mu)}(e_{\lambda_1},\dots,e_{\lambda_n}).$$

La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est donc une fonction de type positif sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est continue (par convergence dominée) et vérifie $\hat{\mu}(0)=1$.

On obtient ainsi beaucoup de fonctions de type positif « naturelles » sur $\mathbb{R}$; la fonction e_λ du § 1.1 correspond au cas où μ est la masse de Dirac en λ.

La notion de fonction de type positif sur $\mathbb{R}$ (en une variable), et le procédé ci-dessus pour en construire, semblent apparaître pour la première fois en 1923 dans un texte de Maximilian Mathias [28]. Je n'ai pas connaissance d'indications laissant penser que Mathias connaissait les travaux sur les équations intégrales du § 1.2. Il parle de « positiv-definite Funktion », ce qui est probablement à l'origine de la terminologie anglophone actuelle (moins heureuse, à mon avis, que celle de Mercer).

Mathias cherchait à adapter, pour la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}$, des observations sur les séries de Fourier faites autour de 1910. Considérons $\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, vu comme le cercle unité dans $\mathbb{C}$; à toute mesure positive μ sur $\mathbb{S}^1$, on peut associer la suite $\hat{\mu}=(\hat{\mu}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de μ, définie par $\hat{\mu}_n=\int_{\mathbb{S}^1}\overline{z}^n\,d\mu(z)$ pour $n\in\mathbb{Z}$. Quelles sont les suites de nombres complexes que l'on peut obtenir ainsi ? C'est le « problème des moments trigonométrique », résolu par Gustav Herglotz en 1911 [22].

Théorème 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une mesure positive et de masse finie μ sur $\mathbb{S}^1$ vérifiant $u_n=\hat{\mu}_n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$;*

(ii) *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de type positif.*

La notion de suite de type positif venait d'apparaître, implicitement, chez Otto Toeplitz [41], pour reformuler algébriquement des conditions qu'obtenait Constantin Carathéodory sur les coefficients de Fourier de certaines fonctions analytiques d'une variable complexe.

Mathias prouve que si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction continue intégrable dont la transformée de Fourier est de type positif, alors $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$; mais il n'obtient pas tout à fait l'analogue du th. 1 pour la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$. Le mérite en revient à Salomon Bochner, dans ses leçons (*Vorlesungen*) de 1932 sur les intégrales de Fourier [7].

Théorème 2. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f=\hat{\mu}$;*
2. *la fonction f est continue, de type positif, et vérifie $f(0)=1$.*

2. Des probabilités aux groupes

Vers 1932, les fonctions de type positif sont donc fermement ancrées dans l'analyse classique et, dirions-nous aujourd'hui, dans les probabilités. Comment cette notion migre-t-elle vers la théorie des représentations de groupes ?

Les représentations dont il est question ici sont des représentations *unitaires*. Soit G un groupe topologique. Si H est un espace hilbertien complexe et si $\mathscr{U}(H)$ désigne le groupe des automorphismes unitaires de H, alors une *représentation unitaire de G dans H* est un morphisme $\pi\colon G \to \mathscr{U}(H)$ tel que l'application $(g,x) \mapsto \pi(g)x$ soit continue de $G \times H$ dans H.

2.1 – Le lien entre groupes, analyse harmonique et mécanique quantique

Entre 1926 et 1932, des liens profonds apparaissent entre des thèmes auparavant éloignés [1] :

(a) l'analyse harmonique (disons, de Fourier);
(b) la théorie des représentations de groupes;
(c) la théorie spectrale et l'analyse fonctionnelle;
(d) la Mécanique quantique.

L'histoire de ces rapprochements est fascinante. Je ne peux la retracer ici, mais Bourbaki, par exemple, l'a fait récemment [11].

Disons simplement que c'est Hermann Weyl qui tisse les liens entre les représentations de groupes et les autres sujets ci-dessus. Il opère en 1926 la jonction entre représentations des groupes compacts [2], analyse harmonique et théorie spectrale (avec son étudiant Fritz Peter [33]), guidé par le lien entre l'analyse de Fourier sur le cercle $\mathbb{S}^1$ et les représentations du groupe commutatif compact correspondant [3]. Sa généralisation à tous les groupes compacts utilise de manière essentielle la théorie spectrale telle qu'étudiée par Hilbert et ses élèves. Peu après, dans des textes retentissants parus en 1927-1928 [47, 46], il montre ce que les représentations peuvent apporter à la jeune Mécanique quantique. Voir les récits de Thomas Hawkins [21, ch. 4] et d'Armand Borel [10].

Quant au lien entre théorie spectrale et Mécanique quantique, on sait le rôle qu'eut John von Neumann dans sa formulation [32], en définissant les espaces hilbertiens et les opérateurs partiels (habituellement dits « non bornés »), en dévoilant leur rôle pour la formulation de la théorie quantique, et en prouvant le théorème spectral pour les opérateurs partiels auto-adjoints. Rappelons sommairement que dans la formulation de von Neumann, l'espace des états d'un système quantique est représenté par un espace hilbertien complexe H, et les grandeurs physiques observables par des opérateurs partiels auto-adjoints sur H; le théorème spectral donne accès aux spectres de ces opérateurs, et ainsi aux nombres réels représentant les résultats de mesures des grandeurs en question.

Ces développements suscitent évidemment beaucoup de travaux mêlant les thèmes (a)-(d).

Un exemple frappant est le *théorème de Stone* sur les représentations unitaires du groupe des translations de $\mathbb{R}$. Weyl avait remarqué que si H est un espace hilbertien et si u est un endomorphisme continu auto-adjoint de H, alors l'application $t \mapsto \exp(itu)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{U}(H)$, est une représentation unitaire du groupe $\mathbb{R}$; certains opérateurs venus de la mécanique quantique fournissaient donc des représentations de groupe. Il avait espéré que toute représentation unitaire de $\mathbb{R}$ soit en fait de la forme $t \mapsto \exp(itu)$ où u n'est plus nécessairement un endomorphisme continu de H, mais un *opérateur partiel auto-adjoint* sur H (tel qu'étudié par von Neumann dans le contexte ci-dessus) [4]. Presque aussitôt, c'est Marshall Stone, en marge de la rédaction de son grand livre sur la théorie spectrale hilbertienne [5], qui démontre la « conjecture » de Weyl à l'aide du théorème spectral [40].

Le théorème de Stone est l'un des premiers résultats significatifs sur les représentations unitaires d'un groupe non compact; comme on le voit, il est motivé par la mécanique quantique, et en lien étroit avec la théorie spectrale hilbertienne.

1. Le lien entre (a) et (c) était bien sûr connu; mais avant 1926, il ne semble pas que les autres l'aient été.

2. L'étude des représentations des groupes compacts était aussi jeune que la Mécanique quantique : jusqu'en novembre 1924 (travaux de Schur, puis Weyl), on ne s'intéressait aux représentations linéaires que pour les groupes finis.

3. Si l'on voit $\mathbb{S}^1$ comme le cercle unité dans $\mathbb{C}$, alors toute représentation irréductible de $\mathbb{S}^1$ sur un espace hilbertien H est de la forme $e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}\mathrm{Id}_H$, où n est un élément de $\mathbb{Z}$. Les fonctions $e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^1)$, et l'analyse harmonique s'intéresse beaucoup à cette base. Pour décrire sommairement ce que Weyl fait de cette idée dans le cas d'un groupe compact G arbitraire, mentionnons que si μ est une mesure de Radon sur G invariante par translations, alors Peter et Weyl construisent dans [33] une base hilbertienne de $L^2(G;\mu)$ à partir des représentations unitaires irréductibles de G – plus précisément, une base formée de coefficients matriciels de représentations irréductibles (ces coefficients matriciels sont définis ci-dessous, au § 2.2)

4. On dit que u est le *générateur infinitésimal* de la représentation donnée; la théorie moderne des probabilités connaît bien, elle aussi, les générateurs infinitésimaux de (semi-)groupes à un paramètre d'opérateurs stochastiques.

5. Le livre de Stone, paru en 1932 [39], fut la première référence « canonique » pour le point de vue post-hilbertien sur la théorie spectrale, à la suite des travaux de von Neumann et de Stone lui-même.

Les liens entre nos thèmes (a) à (d) étaient donc très porteurs à l'époque où Bochner prépare ses *Vorlesungen* et démontre le th. 2. Il a de bonnes raisons de se tenir au courant des liens qu'on vient d'évoquer : Bochner était l'un des meilleurs spécialistes des « fonctions presque périodiques » d'Harald Bohr, qui ont connu une grande vogue à peu près à la même période, et qui apparaissent souvent dans les textes de Weyl et von Neumann [6].

En 1933, dans le noir contexte que l'on sait, Bochner et Weyl quittent l'Europe et acceptent des postes à l'IAS de Princeton. Ils y rejoignent von Neumann, qu'ils semblent déjà bien connaître tous les deux. Il est probable que Bochner et von Neumann aient beaucoup discuté des liens entre analyse harmonique, théorie des groupes et analyse fonctionnelle. Ils étudieront ensemble les fonctions presque périodiques sur un groupe quelconque [8].

2.2 – Riesz, Bochner et le théorème de Stone

C'est aussi en 1933 qu'apparaît le premier lien entre fonctions de type positif et représentations de groupes. Il est établi par Frédéric Riesz [35], et indépendamment par Bochner lui-même [6], à propos du théorème de Stone. C'est l'observation suivante.

Soit G un groupe topologique. Considérons une représentation unitaire $\pi\colon G \to \mathcal{U}(H)$ de G dans un espace hilbertien complexe H.

À tout vecteur ξ de H, on peut associer une fonction $c_{\pi,\xi}\colon G \to \mathbb{C}$ en posant $c_{\pi,\xi}(g) = \langle \xi, \pi(g)\xi\rangle_H$. On dit que $c_{\pi,\xi}$ est le *coefficient matriciel diagonal* [7] de π associé au vecteur ξ. Cette fonction est toujours continue et de type positif : en effet, si $(g_1,\dots,g_n)$ est une famille finie de points de G, alors $M_{c_{\pi,\xi}}(g_1,\dots,g_n) = \mathrm{Gram}_H(\pi(g_1)\xi,\dots,\pi(g_n)\xi)$.

Riesz et Bochner observent ce qui précède dans le cas où G est le groupe des translations de $\mathbb{R}$. Et ils montrent que cela permet de *déduire le théorème de Stone de celui de Bochner*.

Voici une idée vague de l'argument de Riesz. Pour tout $\xi \in H$, on vient de voir que $c_{\pi,\xi}$ est une fonction de type positif sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Bochner, c'est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité μ_ξ sur $\mathbb{R}$. Reste à déduire des mesures μ_ξ, $\xi \in H$, un opérateur partiel auto-adjoint u sur H, et à montrer qu'on a $\pi(u) = \exp(itu)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela se fait par le truchement du théorème spectral : dans l'une de ses versions classiques, ce dernier prend la forme d'une bijection entre opérateurs partiels auto-adjoints sur H et *résolutions de l'identité* de H (sortes de mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans les orthoprojecteurs de H). Riesz construit une telle résolution à partir des μ_ξ, et en déduit le théorème de Stone.

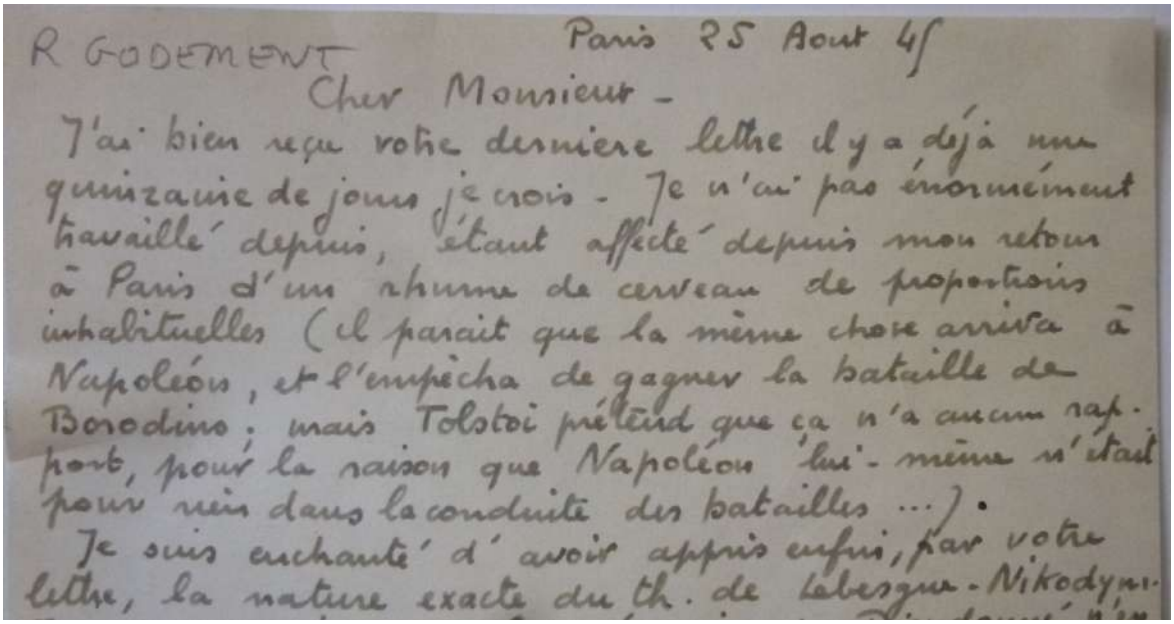
2.3 – Le séminaire Julia de 1934-1935

Le séminaire Julia, organisé entre 1933 et 1939, fut l'un des premiers séminaires de mathématiques en France, après le séminaire Hadamard organisé entre 1920 et 1937. Michèle Audin en a étudié et publié les archives [3]. En forçant beaucoup le trait [8], on peut y penser comme à une sorte d'ancêtre du séminaire Bourbaki : il se tenait à l'IHP, on y donnait des exposés sur l'actualité mathématique, et ces exposés étaient rédigés. C'est d'ailleurs en marge de ce séminaire que s'organisent les premières discussions sur un projet de « traité d'analyse », futur *Éléments de mathématique*.

Pour l'année 1934-1935, le thème choisi est : « espace de Hilbert » [4]. Les orateurs des trois dernières séances sont André Weil, John von Neumann et Henri Cartan. Weil parle le 8 avril des fonctions presque périodiques. L'exposé du 6 mai est donné par von Neumann ; annoncé à la séance précédente comme portant sur les représentations de groupes, il porte finalement sur les « anneaux d'opérateurs », avec l'intention explicite d'appliquer les seconds aux premières. Le 20 mai, Cartan présente le mémoire de Riesz sur le théorème de Stone.

6. Soient G un groupe topologique et $f\colon G \to \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. On dit que f est *presque périodique* si, dans l'espace des fonctions continues bornées de G dans $\mathbb{C}$, les ensembles de translatées $\{(g \mapsto f(ag)), a \in G\}$ et $\{(g \mapsto f(ga)), a \in G\}$, sont relativement compacts pour la topologie de la convergence uniforme. Cette notion est due à von Neumann (1933 [31]) et généralise la notion de fonction presque périodique sur $\mathbb{R}$ d'Harald Bohr (1925 [9]). Comme de très nombreux travaux des années 1925-1933 avaient montré que les fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}$ ont des propriétés remarquables du point de vue de l'analyse harmonique, la généralisation à un groupe quelconque a soulevé de grands espoirs. Mais les fonctions presque périodiques sont aujourd'hui presque oubliées. Il n'est probablement pas absurde de dire, comme Weil et Chevalley dans leur nécrologie mathématique de Weyl [14], que « leur rôle principal a été de préparer le point de vue moderne sur les groupes localement compacts ».
7. Les coefficients non nécessairement diagonaux sont les fonctions de la forme $g \mapsto \langle \xi, \pi(g)\eta\rangle_H$ pour $\xi, \eta \in H$.
8. Michèle Audin explique en détail pourquoi cette vague parenté s'applique au moins aussi bien au séminaire Hadamard [3, § 4.3].

Figure 1 – Début de la lettre du 25 août 1945


R GODEMENT Paris 25 Aout 45
Cher Monsieur –
J'ai bien reçu votre dernière lettre il y a déjà une
quinzaine de jours je crois – Je n'ai pas énormément
travaillé depuis, étant affecté depuis mon retour
à Paris d'un rhume de cerveau de proportions
inhabituelles (il paraît que la même chose arriva à
Napoléon, et l'empêcha de gagner la bataille de
Borodino ; mais Tolstoi prétend que ça n'a aucun rap-
port, pour la raison que Napoléon lui-même n'était
pour rien dans la conduite des batailles ...).
Je suis enchanté d'avoir appris enfin, par votre
lettre, la nature exacte du th. de Lebesgue-Nikodym.

3. La thèse et les lettres de Godement

Plusieurs des exposés donnés cette année-là font référence à un « mémorial (à paraître) » de Weil. Ce sera *l'intégration dans les groupes topologiques et leurs applications* [44], que Weil rédige en 1935 pour faire le point sur les résultats connus sur les représentations des groupes compacts, et sur les groupes localement compacts commutatifs et leurs caractères. Il y introduit les fonctions de type positif sur un groupe quelconque, et démontre l'analogue du théorème de Bochner sur un groupe abélien localement compact. Ce livre est toujours, à mon avis, une belle introduction au sujet. Weil évoquera plus tard [45] l'objectif implicite de l'ouvrage :

> Je l'avais entrepris surtout avec l'espoir d'ouvrir la voie à une généralisation de la théorie des représentations des groupes finis et des groupes compacts ; non seulement je n'atteignis pas la terre promise des représentations de dimension infinie, mais je m'arrêtai avant même de l'entrevoir. Je me décourageai trop tôt quand je vis que les coefficients des représentations de degré fini des groupes de Lie simples non compacts ne sont pas de carré intégrable [...]. Peut-être, pour une démarche aussi hardie, fallait-il l'esprit sans préjugé d'un physicien ; ce sont bien en effet Dirac, Wigner, Bargmann qui ont ouvert la voie à cet égard, à propos du groupe de Lorentz.

Les « physiciens » en question sont motivés par l'idée suivante, évoquée par Dirac dès 1936 : si H est un espace hilbertien modélisant les états d'un système quantique, et si le système se plie aux lois de la relativité restreinte qui sont invariantes par les groupes de Lorentz $\mathrm{SO}(3,1)$ et de Poincaré $\mathrm{SO}(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$, alors H doit porter une représentation de l'un de ces groupes. En 1939, sur une suggestion de von Neumann, Wigner classifie les représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$; c'est la première étude détaillée des représentations d'un groupe qui n'est ni compact ni abélien [48].

Roger Godement, né en 1921, entre à l'École normale en 1940. Il fait partie de la première promotion appelée à suivre l'enseignement d'Henri Cartan, qui vient d'être nommé à Paris. Six ans plus tard, en juillet 1946, Godement est le premier mathématicien à soutenir sa thèse sous la « direction » de Cartan (qui tenait aux guillemets). Le titre est : *les fonctions de type positif et la théorie des groupes* [19]. J'espère que le § 2.3 montre que ce choix de sujet n'est pas vraiment une surprise ; nous verrons comment le travail de Godement contribue à ouvrir le chemin qu'espérait Weil.

Avant la Seconde Guerre mondiale, Cartan vivait à Strasbourg et avait dû quitter précipitamment la ville lors de l'évacuation de septembre 1939. Il y revient en 1945 pour un détachement de deux ans. Godement reste à Paris et lui écrit de très nombreuses lettres, soigneusement conservées par Cartan. L'ouverture du fonds Henri Cartan conservé à l'Académie des sciences a permis à Christophe Eckes de redécouvrir ces lettres en octobre 2021. Malheureusement, nous n'avons que très peu de copies des lettres de Cartan à Godement.

On dispose ainsi de 54 lettres écrites entre 1945 et 1955, dont 34 pour la seule année universitaire 1945-1946 qui s'achève sur la soutenance. L'extrait de la fig. 1 vient de l'une des premières. Dans les lettres de 1945-1946, Godement parle surtout de mathématiques et de tracas matériels ou administratifs liés à sa fin de thèse. La suite de la correspondance mêle discussions mathématiques, échanges liés à Bourbaki, et nouvelles de la famille ou des postes universitaires.

Les extraits reproduits dans les § 3.3 et 3.5 en sont un petit échantillon, choisi pour ce qu'il dit du travail mathématique de Godement ou de la circulation des idées à cette époque. Avant d'évoquer les lettres elles-mêmes, j'énonce deux des principaux résultats de la thèse de Godement (§ 3.1-3.2).

3.1 – Le lien entre fonctions de type positif et représentations unitaires

Soit G un groupe localement compact. Nous avons vu au § 2.2, suivant Riesz et Bochner (1933), que si $\pi\colon G \to \mathcal{U}(H)$ est une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien H, alors pour tout $\xi \in H$, la fonction $c_{\pi,\xi}\colon G \to \mathbb{C}$ définie par $c_{\pi,\xi}(g) = \langle \xi, \pi(g)\xi \rangle_H$ est continue et de type positif. Godement observe que, réciproquement, *toutes les fonctions continues de type positif s'obtiennent à partir de représentations unitaires.*

Voyons comment Godement associe, à toute fonction continue $f\colon G \to \mathbb{C}$ de type positif, une représentation unitaire de G.

Pour $x \in G$, notons f_x la fonction $g \mapsto f(x^{-1}g)$. Soit V_f l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) de fonctions f_x, $x \in G$. Si $\varphi = \sum_{i\in I} \alpha_i f_{x_i}$ et $\psi = \sum_{j\in J} \beta_j f_{y_j}$ sont des éléments de V_f, posons $\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i \overline{\beta_i} f(x_i^{-1} y_j)$. Dire que f est de type positif, c'est précisément dire que cette formule définit [9] une *forme hermitienne positive* sur V_f. Cette forme est alors définie positive. En effet, supposons $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$; alors $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ pour tout ψ d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Or, la définition de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ implique aussitôt qu'on a $\langle \varphi, f_x \rangle = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$, si bien que $\varphi = 0$.

Soit H_f le complété de V_f pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tout $g \in G$, soit $\pi(g)\colon V_f \to V_f$ l'application $\sum \alpha_i f_{x_i} \to \sum \alpha_i f_{x_i g}$; alors $\pi(g)$ induit un endomorphisme unitaire de H_f. On constate alors que $\pi\colon G \to \mathcal{U}(H_f)$ est une représentation unitaire de G et vérifie $c_{\pi,f} = f$. Godement a donc démontré :

Théorème 3. *Si f est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue et de type positif ;*

(ii) *il existe une représentation unitaire π de G dans un espace hilbertien H, et il existe $\xi \in H$, tels qu'on ait $f = c_{\pi,\xi}$.*

Si l'on se donne une fonction f vérifiant (i), alors la construction ci-dessus fournit un couple (π, ξ) concret vérifiant $f = c_{\pi,\xi}$ et tel que le vecteur ξ de H soit *cyclique*, c'est-à-dire que $\pi(G)\xi$ engendre un sous-espace dense de H. Godement remarque que si l'on se donne une autre représentation unitaire $\pi'\colon G \to \mathcal{U}(H')$ et un vecteur cyclique $\xi' \in H'$, alors on a $c_{\pi,\xi} = c_{\pi',\xi'}$ si et seulement s'il existe un isomorphisme $T\colon H \to H'$ qui envoie ξ sur ξ' et *entrelace* π et π', c'est-à-dire vérifie $T(\xi) = \xi'$ et $T \circ \pi(g) = \pi(g)T'$ pour tout $g \in G$. En particulier, dans le th. 3, la classe d'équivalence de la représentation π est uniquement déterminée par f.

3.2 – Partitions des fonctions de type positif

Soient G un groupe localement compact et f une fonction continue de type positif sur G. Supposons que f corresponde par le th. 3 à une représentation π de G, uniquement déterminée à équivalence près. Peut-on donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que π soit irréductible ? Godement répond à cette question en introduisant la notion de *partition* des fonctions de type positif.

Appelons *partition de f* toute famille finie $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions de type positif vérifiant $f = \sum_{i\in I} f_i$. Di-

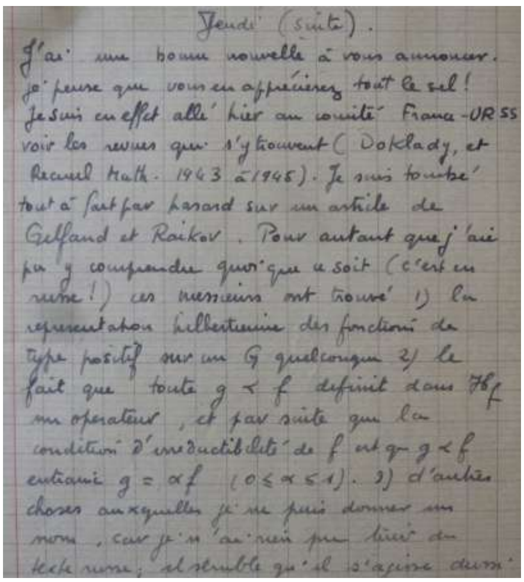
9. On a $\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{j\in J} \overline{\beta}_j \varphi(y_j)$, donc $\langle \varphi, \psi \rangle$ ne dépend que de φ et pas de son écriture sous la forme $\sum_{i\in I} \alpha_i f_{x_i}$. Par ailleurs, si f est de type positif, alors $f(g^{-1}) = \overline{f(g)}$ pour tout $g \in G$ puisque la matrice $\begin{pmatrix} f(1) & f(g) \\ f(g^{-1}) & f(1) \end{pmatrix}$ est hermitienne ; il en résulte que $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}$, ce qui prouve que $\langle \phi, \psi \rangle$ ne dépend aussi que de ψ. L'application $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle$ ainsi obtenue est clairement bilinéaire et définit une forme hermitienne sur V_f d'après ce qui précède. Enfin, si $\varphi = \sum_{i\in I} \alpha_i f_{x_i}$ alors $\langle \varphi, \varphi \rangle = \sum_{i\in I} |\alpha_i|^2$, donc la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

sons que f est *élémentaire* si les seules partitions de f sont les partitions *triviales* – celles où tous les f_i sont de la forme $\alpha_i f$, pour une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs de somme 1.

Supposons qu'on ait $f = c_{\pi,\xi}$, où $\pi\colon G \to \mathcal{U}(H)$ est une représentation unitaire et $\xi \in H$. Supposons que π ne soit pas irréductible, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace fermé H_1 de H qui soit stable par tous les $\pi(g)$ et différent de $\{0\}$ et de H. Soient ξ_1 et ξ_2 les projections orthogonales de ξ sur H_1 et l'orthogonal de H_1, respectivement. Alors il résulte aussitôt des définitions qu'on a $f = c_{\pi,\xi_1} + c_{\pi,\xi_2}$. Godement vérifie que la partition $(c_{\pi,\xi_1}, c_{\pi,\xi_2})$ de f est non triviale. La fonction f n'est donc pas élémentaire. Par contraposée, pour que f soit élémentaire, il est nécessaire que π soit irréductible. Godement démontre que c'est suffisant :

Théorème 4. *Soit $f\colon G \to \mathbb{C}$ une fonction de type positif, et soit π une représentation unitaire de G dont f est un coefficient matriciel diagonal ; alors π est irréductible si et seulement si f est élémentaire.*

Figure 2 – Début de la lettre du 7 février 1946


Jeudi (suite).
J'ai une bonne nouvelle à vous annoncer.
Je pense que vous en apprécierez tout le sel !
Je suis en effet allé hier au comité France-URSS
voir les revues qui s'y trouvent (Doklady, et
Recueil Math. 1943 à 1945). Je suis tombé
tout à fait par hasard sur un article de
Gelfand et Raikov. Pour autant que j'aie
pu y comprendre quoi que ce soit (c'est en
russe !) ces messieurs ont trouvé 1) la
représentation hilbertienne des fonctions de
type positif sur un G quelconque 2) le
fait que toute $g \prec f$ définit dans $\mathcal{H}_f$
un opérateur, et par suite que la
condition d'irréductibilité de f est que $g \prec f$
entraîne $g = \alpha f$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. 3) d'autres
choses auxquelles je ne puis donner un
nom, car je n'ai rien pu tirer du
texte russe ; il semble qu'il s'agisse d'un

3.3 – La surprise de février 1946

Les th. 3 et 4 sont aujourd'hui des résultats de base sur les représentations des groupes localement compacts. Godement les avait énoncés dans des notes aux Comptes-Rendus parues entre juillet 1945 et janvier 1946. Godement avait publié plusieurs autres notes à cette date : elles concernaient le cas des groupes abéliens, le lien entre fonctions de type positif et fonctions presque périodiques, et une généralisation du théorème ergodique de von Neumann.

Rebondissement le 6 février 1946 : Godement apprend « par hasard » que les théorèmes 3 et 4 ont été démontrés trois ans auparavant par Israel Gelfand et Dmitrii Raikov [18].

3.4 – Gelfand, Raikov et Krein

En fait, Gelfand a commencé à explorer systématiquement, depuis 1940, les représentations des groupes localement compacts généraux. Comment a-t-il conçu ce projet ? Il n'avait apparemment pas connaissance du livre de Weil (qui dit : « il semble que mon livre n'atteignit l'Union Soviétique que lorsqu'Élie Cartan l'apporta à Moscou, ainsi que les premiers volumes de Bourbaki, à l'été 1945 »).

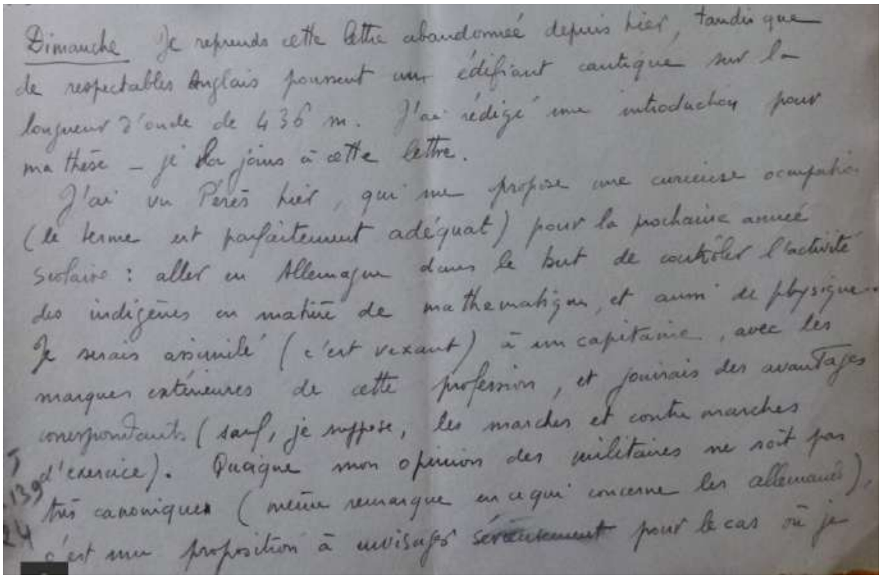
Gelfand avait déjà à son actif, à la fin des années 1930, d'avoir jeté les bases de la théorie des algèbres d'opérateurs, et il avait éclairé par là certains aspects de l'analyse harmonique et des fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}$.[10]

Il semble que l'idée de se tourner, pour les groupes non abéliens, vers les fonctions de type positif, puisse être reliée (*via* Raikov [34]) à des travaux de Mark Krein. Ce dernier publie en 1940 une note reliant algèbres d'opérateurs et fonctions de type positif sur les groupes [26]. Krein connaissait bien les travaux de Mercer et le problème des moments, qu'il avait évoqués à plusieurs reprises dans les années 1930. C'était aussi un spécialiste de la convexité dans les espaces de Banach (sujet alors récent). Le célèbre théorème de Krein–Milman paraît d'ailleurs aussi en 1940 [25]. Les deux sujets se rejoignent si l'on observe que pour tout groupe localement compact G, l'ensemble $\mathrm{Pos}(G)$ des fonctions continues de type positif sur G est une partie *convexe* de $L^\infty(G)$.

Dans leur texte de 1943, Gelfand et Raikov définissent les fonctions de type positif *élémentaires* du § 3.2, et remarquent que ce sont les *points extrémaux* de $\mathrm{Pos}(G)$ – ceux qui ne sont à l'intérieur d'aucun segment de droite contenu dans $\mathrm{Pos}(G)$. Une application ingénieuse du théorème de Krein–Milman leur permet alors de montrer que les représentations unitaires irréductibles *séparent les*

10. La preuve que Gelfand et Raikov donnent pour le th. 3, légèrement différente de celle du § 3.1, donnera d'ailleurs ce que l'on appelle aujourd'hui la « construction de Gelfand–Naimark–Segal » pour les C^*-algèbres.

Figure 3 – Un post-doc militaire ? (mai 1946)


Dimanche Je reprends cette lettre abandonnée depuis hier, tandis que de respectables Anglais poussent un édifiant cantique sur la longueur d'onde de 436 m. J'ai rédigé une introduction pour ma thèse – je la joins à cette lettre.

J'ai vu Pérès hier, qui me propose une curieuse occupation (le terme est parfaitement adéquat) pour la prochaine année scolaire : aller en Allemagne dans le but de contrôler l'activité des indigènes en matière de mathématiques, et aussi de physique. Je serais assimilé (c'est vexant) à un capitaine, avec les marques extérieures de cette profession, et jouirais des avantages correspondants (sauf, je suppose, les marches et contre marches d'exercice). Quoique mon opinion des militaires ne soit pas très canoniques (même remarque en ce qui concerne les allemands), c'est une proposition à envisager sérieusement pour le cas où je

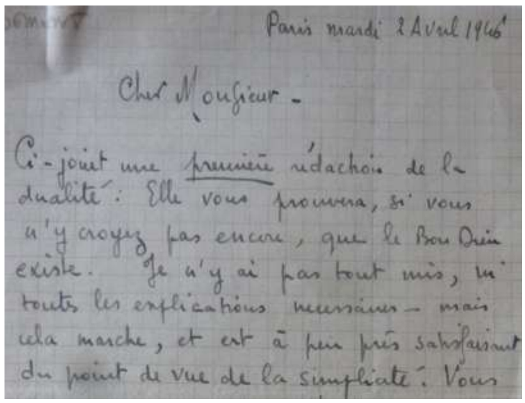
points de G (ce résultat est aujourd'hui connu sous le nom de « théorème de Gelfand–Raikov ») :

Théorème 5. *Si g et g' sont deux points distincts de G, alors il existe une représentation unitaire irréductible π de G telle qu'on ait $\pi(g) \neq \pi(g')$.*

Découvrant le « caractère rupinant des résultats » de Gelfand–Raikov, Godement s'aperçoit aussi qu'une bonne partie de ses propres idées n'est pas contenue dans leur mémoire, mais peut être précisée et simplifiée en adoptant leurs méthodes. [11]

Moins de six mois plus tard, le théorème de Krein–Milman devient l'un des outils de base de la version finale de sa thèse. Il utilise par exemple la convexité pour prouver que toute fonction continue de type positif sur G peut être approchée, uniformément sur tout compact, par des combinaisons linéaires de fonctions élémentaires (combinaisons qu'il appelle des « polynômes trigonométriques »). De même, Cartan et Godement déduisent des méthodes de Gelfand et Raikov un exposé complet, nettement simplifié, de la dualité et de l'analyse harmonique pour les groupes abéliens [12].

Figure 4 – Godement rassuré (avril 1946)


Paris mardi 2 Avril 1946

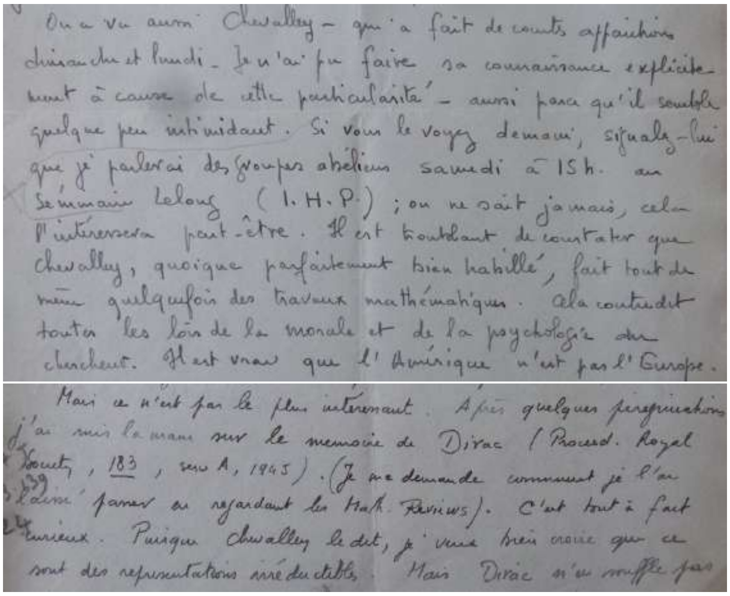
Cher Monsieur –

Ci-joint une première rédaction de la dualité : Elle vous prouvera, si vous n'y croyez pas encore, que le Bon Dieu existe. Je n'y ai pas tout mis, ni toutes les explications nécessaires – mais cela marche, et est à peu près satisfaisant du point de vue de la simplicité. Vous

Tout est bien qui finit bien. Godement soutient sa thèse en juillet 1946 ; les membres de son jury sont Élie Cartan, Henri Cartan et Jean Favard. Il est aussitôt nommé à Nancy (ce qui semble mettre fin à des inquiétudes sur son avenir matériel, régulièrement exprimées en 1945-1946 : voir la figure 3).

11. Disons un mot sur l'un des liens les plus simples entre fonctions de type positif et algèbres d'opérateurs, qui est à la base de ces simplifications. Soient G un groupe localement compact et μ une mesure de Radon sur G invariante par les translations $h \mapsto gh$ pour $g \in G$ (une telle mesure « de Haar » existe toujours). Si φ et ψ sont des fonctions intégrables sur G, définissons $\varphi * \psi$ comme la fonction $g \mapsto \int_G \varphi(h)\psi(gh^{-1})d\mu(h)$ sur G, et $\varphi^\dagger$ comme la fonction $g \mapsto \overline{\varphi(g^{-1})}$. Ces formules induisent, sur l'espace de Banach $L^1(G)$, une loi de composition $*$ et une involution $\dagger$. On dit qu'un élément ψ de $L^1(G)$ est *positif* s'il peut s'écrire sous la forme $\varphi^\dagger * \varphi$, où $\varphi \in L^1(G)$. Si $f\colon G \to \mathbb{C}$ est une fonction bornée, elle définit une forme linéaire T_f sur $L^1(G)$ par la formule $T_f(\varphi) = \int_G f(g)\varphi(g)d\mu(g)$; la fonction f est alors *de type positif* si et seulement si la forme linéaire T_f est *positive sur tout élément positif* de $L^1(G)$. Cela éclaire la définition des fonctions de type positif, et ouvre la voie à diverses généralisations – très utiles pour la théorie des représentations et au-delà.

Figure 5 – Rencontre avec Chevalley (mai 1946)

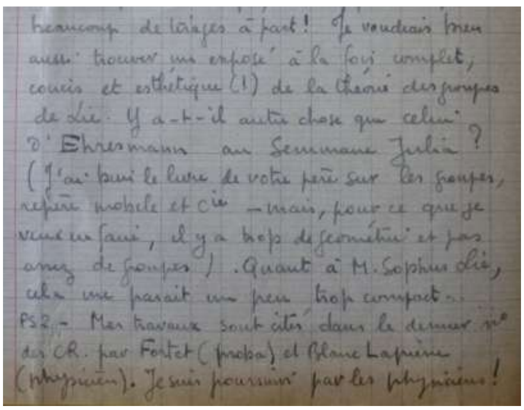

On a vu aussi Chevalley – qui a fait de courtes apparitions dimanche et lundi. Je n'ai pu faire sa connaissance explicitement à cause de cette particularité – aussi parce qu'il semble quelque peu intimidant. Si vous le voyez demain, signalez-lui que je parlerai des groupes abéliens samedi à 15h. au Séminaire Lelong (I.H.P.) ; on ne sait jamais, cela l'intéressera peut-être. Il est troublant de constater que Chevalley, quoique parfaitement bien habillé, fait tout de même quelquefois des travaux mathématiques. Cela contredit toutes les lois de la morale et de la psychologie du chercheur. Il est vrai que l'Amérique n'est pas l'Europe.

Mais ce n'est pas le plus intéressant. Après quelques pérégrinations j'ai mis la main sur le mémoire de Dirac (Proceed. Royal Society, 183, série A, 1945). (Je me demande comment je l'ai laissé passer en regardant les Math. Reviews). C'est tout à fait curieux. Puisque Chevalley le dit, je veux bien croire que ce sont des représentations irréductibles. Mais Dirac n'en souffle pas

3.5 – Sur la circulation des idées

D'autres extraits de la correspondance me semblent instructifs, à propos de l'évolution de la théorie des groupes à cette époque. Voyez par exemple cette lettre de mars 1946 où Godement cherche une référence « moderne » sur la théorie des groupes de Lie (Fig. 6). Plus tard dans l'année paraîtra *Theory of Lie groups* [13], de Chevalley – qui avait eu un rôle important dans la programmation du séminaire Julia.

Figure 6 – Poursuivi par les physiciens (mars 46)


beaucoup de loisirs à part ! Je voudrais bien aussi trouver un exposé à la fois complet, concis et esthétique (!) de la théorie des groupes de Lie. Y a-t-il autre chose que celui d'Ehresmann au Séminaire Julia ? (J'ai lu le livre de votre père sur les groupes, repère mobile et Cie – mais, pour ce que je veux en faire, il y a trop de géométrie et pas assez de groupes). Quant à M. Sophus Lie, cela me paraît un peu trop compact.

PS2 – Mes travaux sont cités dans le dernier n° des CR. par Fortet (proba) et Blanc Lapierre (physicien). Je suis poursuivi par les physiciens !

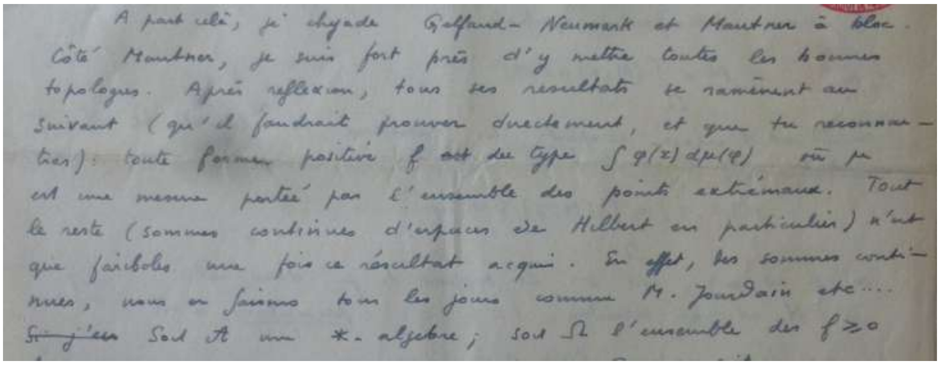
Le même Chevalley, alors en poste à Princeton, vient à Paris deux mois plus tard (Fig. 5). C'est visiblement lui qui informe Godement des travaux tout récents de Dirac, alors en visite à Princeton, sur les représentations du groupe de Lorentz $\mathrm{SO}(3,1)$ [16]. Ces travaux, et ceux d'Harish-Chandra qui fait alors sa thèse avec Dirac sur un sujet proche, auront une influence profonde sur l'évolution ultérieure de la théorie des représentations.

À Princeton toujours, le physicien Valentine Bargmann publie en 1947 une étude complète des représentations unitaires irréductibles du groupe $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$; il découvre notamment une série de représentations unitaires ayant des coefficients matriciels diagonaux de carré intégrable sur G, et prouve des relations d'orthogonalité entre ces coefficients analogues aux relations de Schur pour les représentations des groupes finis [5]. Sitôt mis au courant, Godement établit des relations d'orthogonalité du même type pour les coefficients matriciels de représentations de carré intégrable sur un groupe localement compact quelconque ; il utilise pour cela un beau résultat de sa thèse sur les fonctions de type positif de carré intégrable [19, th. 17].

La correspondance donne ainsi l'impression que, s'il est vrai que les idées mathématiques traversent l'Atlantique plus facilement que le rideau de fer, cela se fait à l'occasion des voyages des uns et des autres. De même, Cartan se rend aux États-Unis en 1948 ; à Harvard, il rencontre George Mackey et écoute Friedrich Mautner.

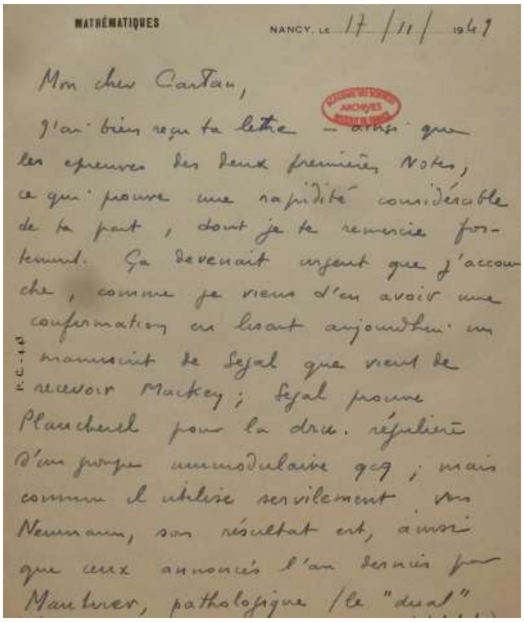
Les lettres de Godement montrent un intérêt mêlé de méfiance pour les travaux de Mautner [29] – il lui semble que des méthodes de type Krein–

Figure 7 – Tout près de Plancherel (novembre 1948)


A part cela, je dégrade Gelfand-Neumark et Mautner à bloc. Côté Mautner, je suis fort près d'y mettre toutes les bonnes topologies. Après réflexion, tous ses résultats se ramènent au suivant (qu'il faudrait prouver directement, et que tu reconnaitras) : toute forme positive f est du type $\int \varphi(x)\, d\mu(\varphi)$ où μ est une mesure portée par l'ensemble des points extrémaux. Tout le reste (sommes continues d'espaces de Hilbert en particulier) n'est que fariboles une fois ce résultat acquis. En effet, les sommes continues, nous en faisons tous les jours comme M. Jourdain etc... ~~Si j'en~~ Soit A une $*$-algèbre ; soit Ω l'ensemble des $f \geq 0$

Milman pourraient remplacer avantageusement ses arguments d'algèbres d'opérateurs. On sent la même distance aux travaux d'Irving Segal, qui songeait à utiliser des algèbres d'opérateurs en théorie des groupes dès 1941 [37] mais ne publie ses résultats qu'après 1947.

Figure 8 – Concurrence avec Segal (novembre 1949)


MATHÉMATIQUES NANCY, le 17/11/1949

Mon cher Cartan,

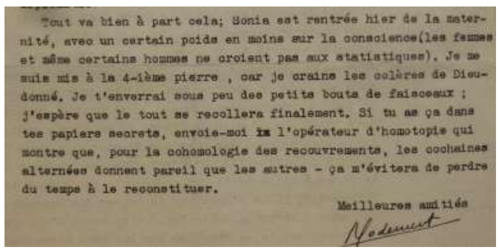
J'ai bien reçu ta lettre – ainsi que les épreuves des deux premières Notes, ce qui prouve une rapidité considérable de ta part, dont je te remercie fortement. Ça devenait urgent que j'accouche, comme je viens d'en avoir une confirmation en lisant aujourd'hui un manuscrit de Segal que vient de recevoir Mackey ; Segal prouve Plancherel pour la rep. régulière d'un groupe unimodulaire qcq ; mais comme il utilise servilement von Neumann, son résultat est, ainsi que ceux annoncés l'an dernier par Mautner, pathologique (le "dual"

Un an plus tard, c'est Mackey qui passe plusieurs mois à Nancy et informe Godement des résultats de Segal et Mautner sur la décomposition des représentations (« formule de Plancherel » [36]), que Godement avait pressentis sinon démontrés (Fig. 7).

Ce mélange d'échanges d'idées et de concurrence ne durera plus beaucoup : les derniers textes de Godement sur la théorie générale des représentations unitaires (consacrés à la notion de caractère pour les représentations de dimension infinie [12]) paraissent en 1954, avant son retour à Paris.

Il cesse vite de travailler sur les représentations à ce niveau de généralité (« abstract nonsense », dira-t-il) et s'intéresse aux formes automorphes : pour tout cela, voir l'entretien paru dans la *Gazette* en 2017 [2]. Peu après 1950, ses efforts de rédaction se concentrent sur un livre sur les faisceaux ([20], qui rendra grand service), et sur Bourbaki (livre d'Intégration, exposés au séminaire).

Figure 9 – Famille et faisceaux (juin 1954)


Tout va bien à part cela; Sonia est rentrée hier de la maternité, avec un certain poids en moins sur la conscience (les femmes et même certains hommes ne croient pas aux statistiques). Je me suis mis à la 4-ième pierre, car je crains les colères de Dieudonné. Je t'enverrai sous peu des petits bouts de faisceaux ; j'espère que le tout se recollera finalement. Si tu as ça dans tes papiers secrets, envoie-moi ~~im~~ l'opérateur d'homotopie qui montre que, pour la cohomologie des recouvrements, les cochaînes alternées donnent pareil que les autres – ça m'évitera de perdre du temps à le reconstituer.

Meilleures amitiés

Godement

12. Rappelons que si $\pi\colon G \to \mathscr{U}(H)$ est une représentation unitaire de G, et si l'espace H est *de dimension finie*, alors le caractère de π est la fonction $g \mapsto \mathrm{Tr}(\pi(g))$, de G dans $\mathbb{C}$; il résulte du th. 3 qu'elle est de type positif. Si H est de dimension infinie, les opérateurs $\pi(g)$ n'ont pas de trace en général ; la formule précédente ne permet donc pas de définir une fonction jouant le rôle du caractère de π. De 1948 à 1954, Godement étudie certaines mesures « de type positif » sur G, ou certaines distributions sur G dans le cas où G est un groupe de Lie, pouvant jouer un rôle analogue à celui des caractères pour les représentations unitaires de dimension infinie. Si G est un groupe de Lie semi-simple, Harish-Chandra adopte en 1951 une définition des caractères des représentations irréductibles qui utilise la théorie des distributions de Schwartz (indépendamment de Godement, mais suite à des discussions avec Chevalley). Les travaux d'Harish-Chandra sur ces caractères, qui s'étalent sur près de trente ans, restent vus d'aujourd'hui l'un des sommets du sujet.

4. Et aujourd'hui ?

Aujourd'hui, il me semble qu'on ne peut pas dire que les fonctions de type positif soient beaucoup étudiées pour elles-mêmes. Les généralités à leur propos se rencontrent surtout quand on s'instruit sur la théorie générale des représentations, sur les C^*-algèbres, ou sur les processus stochastiques ; en revanche, certaines fonctions de type positif jouent un rôle essentiel dans divers domaines.

Pour ce qui est des représentations, les th. 3 à 5 restent peut-être les résultats les plus utiles portant sur tous les groupes localement compacts. Ils servent surtout aux fondements de la théorie. Cela dit, beaucoup de travaux sur des classes particulières de groupes nécessitent une étude fine de *certains* coefficients matriciels diagonaux de représentations ; ces fonctions sont de type positif comme on l'a vu, mais les problèmes qui se présentent alors dépendent beaucoup de la structure du groupe étudié.

C'est le cas, par exemple, dans les travaux d'Harish-Chandra ou de Langlands concernant les représentations des groupes de Lie réductifs : l'importance de ces travaux (notamment pour l'étude des formes automorphes) n'est plus à démontrer, et le comportement de certains coefficients matriciels diagonaux y joue un rôle crucial – mais les méthodes les plus efficaces pour aborder ce sujet ne se rattachent pas vraiment aux généralités sur les fonctions de type positif.

D'autre part, beaucoup de « fonctions spéciales » de la physique mathématique (fonctions de Bessel, Jacobi, Legendre, et tant d'autres...) apparaissent comme coefficients matriciels diagonaux de représentations irréductibles. C'est fort utile pour comprendre et étudier les propriétés de ces fonctions à l'aide de la structure précise des groupes correspondants : un bon exemple est le texte encyclopédique de Vilenkin et Klimyk [43].

L'actualité récente concernant les fonctions de type positif sur des classes générales de groupes est probablement à chercher du côté des algèbres d'opérateurs.

Par exemple, les progrès récents sur les algèbres de von Neumann ont permis de mieux comprendre les fonctions de type positif sur les réseaux des groupes de Lie semi-simples. Or, la fonction indicatrice d'un sous-groupe discret Γ d'un tel groupe G est une fonction de type positif sur Γ, et cette fonction est constante sur les classes de conjugaison si et seulement si le sous-groupe Γ est distingué. Par conséquent, l'étude générale des fonctions de type positif invariantes par conjugaison sur G fournit des informations sur la structure des sous-groupes discrets distingués Γ de G, sur les actions ergodiques de tels Γ sur des espaces probabilisés, sur les sous-groupes discrets distingués aléatoires de G (travaux de Bader, Bekka, Boutonnet, Gelander, Houdayer, Peterson...). Voir l'exposé de Cyril Houdayer [24] au dernier Congrès international.

Pour donner un second exemple, considérons la variante suivante de la notion de fonction de type positif sur un groupe localement compact G : disons qu'une fonction $f\colon G \to \mathbb{C}$ est un *multiplicateur complètement borné* sur G s'il existe un espace hilbertien H et des applications continues bornées $\varphi, \psi\colon G \to H$ telles que l'on ait $f(g^{-1}h) = \langle \varphi(h), \psi(g)\rangle$ pour tout $(g,h) \in G^2$. Depuis un travail de Cowling et Haagerup [15], ces fonctions ont pris une importance croissante en théorie (géométrique) des groupes et en algèbres d'opérateurs, reliée à l'essor des divers visages de la propriété]T[de Kazhdan pour les groupes localement compacts. Elles ouvrent la voie à la notion de *moyennabilité faible* pour les groupes et les algèbres d'opérateurs (de Cannière, Cowling, Haagerup, Pisier, Ozawa, de Laat, Knudby...) ; voir par exemple la synthèse récente d'Ignacio Vergara [42].

Terminons en évoquant les processus stochastiques, car si vous aviez déjà rencontré les fonctions de type positif sans que ce soit en lien avec les représentations de groupes ou les algèbres d'opérateurs, c'était peut-être comme *fonctions de covariance de champs aléatoires*.

Convenons d'appeler *champ aléatoire* sur un ensemble E toute variable aléatoire dont les valeurs sont des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ (on disait naguère « fonction aléatoire »). Si Φ est un champ aléatoire sur E, alors pour tout $x \in E$, la valeur $\Phi(x)$ définit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons de plus que toutes les variances $\mathbb{V}[\Phi(x)]$, $x \in E$, soient *finies*. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe un espace probabilisé Ω tel que toutes les variables aléatoires $\Phi(x)$ s'identifient à des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$; l'hypothèse est alors que $\Phi(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$ pour tout $x \in E$.

La *fonction de covariance de* Φ est la fonction $C\colon E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $C(x,y) = \mathbb{E}[\Phi(x)\Phi(y)] = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R})}$. Elle ne dépend que de la *loi* du processus Φ, et elle est *toujours de type positif* : en effet, pour tous $n \geqslant 1$ et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, la matrice $(C(x_i,x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est égale à $\mathrm{Gram}_{L^2(\Omega;\mathbb{R})}(\Phi(x_1),\dots,\Phi(x_n))$. Le fait que C soit toujours de type positif était connu déjà de Michel Loève en 1945 [27], au moins quand $E = \mathbb{R}$; et peut-être n'était-il pas le premier.

C'est ainsi que les fonctions de type positif interviennent dans l'étude de processus stochastiques parmi les plus célèbres (y compris le mouvement brownien), et en analyse des données. Par exemple, si E est un espace topologique compact et si la fonction C est continue sur $E \times E$, alors les résultats de Mercer (1909) impliquent aussitôt l'existence d'un *développement de Karhunen-Loève* pour le processus Φ (voir par exemple [1, ch. 3]). De tels développements ont une portée pratique considérable de nos jours ; mais c'est une autre histoire.

Références

[1] R. J. Adler et J. E. Taylor. *Random fields and geometry*. Springer, 2007.

[2] M. Andler, N. Bergeron et L. Clozel. « Un entretien avec Roger Godement ». *Gaz. Math.*, nº 153 (2017), p. 27-45.

[3] M. Audin. *Le Séminaire de mathématiques 1933-1939. Tome 1 : l'histoire*. Publications du centre Mersenne, 2014. url : `https://proceedings.centre-mersenne.org/item/MALSM_2014__1_/`.

[4] M. Audin, éd. *Le Séminaire de mathématiques 1934-1935 : Espace de Hilbert*. CEDRAM, 2014. url : `https://proceedings.centre-mersenne.org/item/MALSM_2014__3_/`.

[5] V. Bargmann. « Irreducible unitary representations of the Lorentz group ». *Ann. of Math. (2)* **48** (1947), p. 568-640.

[6] S. Bochner. « Spektralzerlegung linearer Scharen unitärer Operatoren ». *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* (1933), p. 371-376.

[7] S. Bochner. *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig, 1932.

[8] S. Bochner et J. von Neumann. « Almost periodic functions in groups. II. » *Trans. Am. Math. Soc.* **37** (1935), p. 21-50.

[9] H. Bohr. « Zur theorie der fast periodischen funktionen, I ». *Acta Math.* **45**, nº 1 (1925), p. 29-127.

[10] A. Borel. « Hermann Weyl and Lie groups ». In : *Hermann Weyl, 1885–1985*. ETH Zürich, 1986, p. 53-82.

[11] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique : Théories spectrales, Chapitres 3 à 5*. Springer, 2023.

[12] H. Cartan et R. Godement. « Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abeliens localement compacts ». *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3)* **64** (1947), p. 79-99.

[13] C. Chevalley. *Theory of Lie groups. I*. Princeton Math. Ser. nº 8. Princeton University Press, 1946.

[14] C. Chevalley et A. Weil. « Hermann Weyl (1885–1955) ». *Enseign. Math. (2)* **3** (1957), p. 157-187.

[15] M. Cowling et U. Haagerup. « Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one ». *Invent. Math.* **96**, nº 3 (1989), p. 507-549.

[16] P. A. M. Dirac. « Unitary representations of the Lorentz group ». *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **183** (1945), p. 284-295.

[17] I. Fredholm. « Sur une classe d'équations fonctionnelles ». *Acta Math.* **27**, nº 1 (1903), p. 365-390.

[18] I. Gelfand et D. Raikov. « Irreducible unitary representations of locally bicompact groups ». *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* **13/55** (1943), p. 301-316.

[19] R. Godement. « Les fonctions de type positif et la théorie des groupes ». *Trans. Am. Math. Soc.* **63** (1948), p. 1-84.

[20] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, vol. 13. Hermann, 1958.

[21] T. Hawkins. *Emergence of the theory of Lie groups*. Springer, 2000.

[22] G. Herglotz. *Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis*. German. Leipz. Ber. 63, 501-511. 1911.

[23] D. Hilbert. « Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Erste Mitteilung. » *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1904), p. 49-91.

[24] C. Houdayer. « Noncommutative ergodic theory of higher rank lattices ». In : *Proceedings of the International congress of mathematicians 2022, Volume 4 : sections 5–8*. 2023, p. 3202-3223.

[25] M. Krein et D. Milman. « On extreme points of regular convex sets ». *Studia Math.* **9** (1940), p. 133-138.

[26] M. Krein. « A ring of functions on a topological group ». *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.* **29** (1940), p. 275-280.

[27] M. Loeve. « Sur la covariance d'une fonction aléatoire ». French. *C. R. Acad. Sci., Paris* **220** (1945), p. 295-296.

[28] M. Mathias. « Über positive Fourier-Integrale ». *Math. Z.* **16**, nº 1 (1923), p. 103-125.

[29] F. I. Mautner. « The completeness of the irreducible unitary representations of a locally compact group ». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **34** (1948), p. 52-54.

[30] J. Mercer. « Functions of positive and negative type, and their connection with the theory of integral equations. » *Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A* **209** (1909), p. 415-446.

[31] J. von Neumann. « Almost periodic functions in a group. I ». *Trans. Am. Math. Soc.* **36** (1934), p. 445-492.

[32] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Grundlehren Math. Wiss. vol. 38. Springer, 1932.

[33] F. Peter et H. Weyl. « Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. » *Math. Ann.* **97** (1927), p. 737-755.

[34] D. Raikov. « Sur les fonctions positivement définies ». *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* **26** (1940), p. 860-865.

[35] F. Riesz. « Über Sätze von Stone und Bochner ». *Acta Litt. Sci. Szeged* **6** (1933), p. 184-198.

[36] I. E. Segal. « An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups ». *Ann. Math. (2)* **52** (1950), p. 272-292.

[37] I. E. Segal. « The group ring of a locally compact group. I ». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **27** (1941), p. 348-352.

[38] J. Stewart. « Positive definite functions and generalizations, an historical survey ». *Rocky Mt. J. Math.* **6** (1976), p. 409-434.

[39] M. H. Stone. *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*. Colloq. Publ., Am. Math. Soc. vol. 15. Providence, RI, 1932.

[40] M. H. Stone. « Linear transformations in Hilbert space. III : Operational methods and group theory ». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **16** (1930), p. 172-175.

[41] O. Toeplitz. « Über die *Fourier*sche Entwicklung positiver Funktionen ». *Rend. Circ. Mat. Palermo* **32** (1911), p. 191-192.

[42] I. Vergara. « An invitation to weak amenability, after Cowling and Haagerup » (2024). arXiv : `2404.05513`.

[43] N. Y. Vilenkin et A. U. Klimyk. *Representation of Lie groups and special functions (3 volumes)*. Math. Appl., Sov. Ser. vol. 72, 74, 75. Kluwer, 1991–1995.

[44] A. Weil. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 869. Hermann, 1940.

[45] A. Weil. *Œuvres scientifiques. Collected papers. Vol. I (1926–1951)*. Springer Collect. Works Math. 2014.

[46] H. Weyl. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Leipzig : S. Hirzel, 1928.

[47] H. Weyl. « Quantenmechanik und Gruppentheorie ». *Z. Phys.* **46** (1927), p. 1-46.

[48] E. Wigner. « On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group ». *Ann. of Math. (2)* **40**, nº 1 (1939), p. 149-204.

Alexandre Afgoustidis

CNRS & Institut Élie Cartan de Lorraine

`alexandre.afgoustidis@math.cnrs.fr`

Alexandre Afgoustidis est chargé de recherche CNRS et travaille à l'institut Élie Cartan de Lorraine. Il s'intéresse notamment aux représentations des groupes de Lie réels ou p-adiques, et à l'analyse harmonique invariante.

Les lettres de Godement à Cartan m'ont été communiquées par Christophe Eckes ; je l'en remercie chaleureusement. Merci aussi aux collègues dont la relecture et les remarques ont permis d'améliorer ce texte.

Des bourbakistes en politique. Le mouvement Survivre et Vivre : de la « science pure » à l'écologie politique (1970-1975)

• C. Pessis

Dans l'après Seconde Guerre mondiale, les mathématiques françaises semblent préservées de la massification, de l'industrialisation et de la « militarisation » qui gagnent la recherche scientifique, sur le modèle de la « big science » américaine [1]. À l'instar d'Alexandre Grothendieck (médaille Fields en 1966), les mathématiciens les plus renommés se présentent volontiers comme des savant-philosophes, attachés à des principes moraux et participant à une œuvre supérieure d'élucidation du monde.

Pourtant, parmi ces mathématicien·nes qui traversent la « modernisation » dans un douillet repli aristocratique, certain.es s'éveillent dans l'après Mai 68, découvrant avec stupeur que les mathématiques sont devenues d'indispensables instruments de défense nationale et de gestion de la nouvelle société de masse.

En 1970, la création du mouvement Survivre marque l'entrée en dissidence de célèbres mathématiciens qui éprouvent brusquement le caractère insupportable de leur posture mandarinale et rejettent comme illusoire l'idéologie de la « science pure » dans laquelle ils évoluaient. À l'aveuglement, ces derniers « savants » [2] des temps modernes préfèrent le sabordement.

La première partie de cet article s'intéresse aux trajectoires des principaux mathématiciens aux origines de Survivre (A. Grothendieck, Claude Chevalley, Pierre Samuel, etc.) : de leur repli élitiste dans une « science pure » au sein du prestigieux groupe Bourbaki (lequel parvient, lors de son apogée scientifique dans les années 1950-60, à ralentir la montée des mathématiques appliquées [3]) à leur critique virulente du complexe scientifico-militaro-industriel au début des années 1970 (durant la guerre du Vietnam et la montée d'alertes planétaires globales). Alors que la figure de Grothendieck retient particulièrement l'attention depuis sa mort [4], les dimensions politiques et collectives de son engagement, souvent laissées dans l'ombre, sont ici pleinement restituées.

Participant des mouvements de critique radicale des sciences de ces années 68 [5], ces mathématicien·nes vont également jouer un rôle pionnier dans l'émergence du mouvement écolo-

1. D. Pestre, A. Dahan Dalmédico (dir.), *Les sciences pour la guerre, 1940-1960*, Presses de l'EHESS, Paris, 2004 ; D. Pestre, F. Jacq, « Une recomposition de la recherche académique et industrielle en France dans l'après-guerre, 1945-1970. Nouvelles pratiques, formes d'organisation et conceptions politiques », *Sociologie du travail*, n° 3, 1996, p. 263-277. Pour une analyse de l'époque, voir J.-P. Malrieu, « La militarisation de la recherche », *La Vie de la recherche scientifique*, n°135, printemps 1969, p. 23-25.

2. G. Edwards, A. Grothendieck, « Les savants et l'appareil militaire », *Survivre*, n°1, août 1970, p. 20-35.

3. A. Dahan Dalmedico, « Pur versus appliqué ? Un point de vue d'historien sur une "guerre d'images" », *La Gazette des mathématiciens*, n°80, juillet 1999, p. 31-45.

4. Voir notamment Y. Pradeu, *Algèbre*, Allia, 2016 ; P. Douroux, *Alexandre Grothendieck. Sur les traces du dernier génie des mathématiques*, Allary Editions, 2016. Voir aussi P. Cartier, « Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les "motifs") », Intervention au colloque de Cerisy, 1999, [en ligne], `https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Mathbiographies/CartierHerreman2.pdf`

5. Voir entre autres « Petit panorama de la critique des sciences dans les années 68 », in C. Pessis, *Survivre et Vivre*. Critique de la science, naissance de l'écologie, l'Échappée, 2014.

giste français. La deuxième partie de cet article rend compte de la centralité de la critique du développement technoscientifique dans les débuts de l'écologie politique. Elle étudie les modes de critiques et d'engagement promus par Survivre et Vivre pour construire un mouvement écologique technocritique (émancipé de l'autorité scientifique et experte et d'un solutionnisme vert).

Des mathématiciens face à la « big science » : le sabordement des derniers savants

Comme le rapporte *Le Monde*, « L'honorable M. Grothendieck – qui lance le mouvement Survivre – en short et crâne rasé »[6] ne passe pas inaperçu auprès des 3 000 mathématicien·nes réuni.es en Congrès International à Nice en septembre 1970. Au détour d'une démonstration, un mathématicien russe évoque un possible débouché militaire à ses travaux. Grothendieck l'interrompt : « Ne vaut-il mieux pas s'abstenir de faire des mathématiques qui ont une application militaire ? ». Dans Survivre, dont il distribue alors les 1 200 premiers exemplaires, Grothendieck poursuit :

> Cette collaboration de la communauté scientifique avec l'appareil militaire (souvent au moment même où celui-ci planifie et exécute les guerres les plus sauvages) est la plus grande honte de la communauté scientifique d'aujourd'hui. C'est aussi le signe plus évident de la démission des savants devant leurs responsabilités dans la société humaine[7].

Mais hormis la vive altercation qui l'oppose à son plus proche collaborateur, Jean Dieudonné, l'organisateur du congrès, et l'enthousiasme de quelques jeunes mathématiciens qui rejoignent alors Survivre (Michel Mendès-France, Jérôme Manuceau, Claude Paul Bruter, etc.), la communauté mathématicienne réplique par l'indifférence et la placidité. Grothendieck s'en retourne avec « un sentiment de honte et de nausée, ayant reconnu, comme dans un miroir déformant, [sa] propre image et celle de ceux de [ses] collègues [qu'il] estimait le plus par le passé »[8].

L'implantation en France de Survivre, fondé un mois auparavant à l'université de Montréal au Canada, en marge du Séminaire de Mathématique Supérieure, ne s'annonçait pas chose aisée. Le mouvement ne pourrait prétendre être la réplique des groupes de scientifiques engagés nord-américains dont il s'inspirait. Néanmoins, en pleine guerre du Vietnam, Grothendieck (1928-2014) n'est pas le seul à être interpellé par « ces universitaires (nord-américains) cherchant à restaurer un peu de "décence" »[9]. Roger Godement (1921-2016), de retour d'une année aux États-Unis, partage pleinement son indignation. Pierre Samuel (1921-2005) est sur le point de rentrer d'Harvard, où il a découvert les écrits des biologistes engagé.es (Rachel Carson, Paul Ehrlich, Barry Commoner, etc.)[10]. Quant à Claude Chevalley (1909-1984), Mai 68 vient de raviver son engagement non conformiste de jeunesse[11]. Malgré son « aversion particulière pour le discours moralisateur »[12] de Survivre, il en est déjà le directeur de publication. Les voici donc en scène, les premiers protagonistes de Survivre. Fort éloignés du profil type du jeune rebelle soixante-huitard, ce sont d'éminents mathématiciens, au faîte de leur carrière et de leur renommée internationale. Tous quatre furent des membres du célèbre groupe Bourbaki (de la seconde génération, ou fondateur pour C. Chevalley) dont ils achèvent alors de se distancier[13].

La Mathématique aux mathématiciens : le purisme du groupe Bourbaki

Fondé en 1935 par des normaliens en réaction à l'émiettement des mathématiques, le groupe Bourbaki se donne comme objectif de refonder tout un pan des mathématiques pures sur des bases axiomatiques et structurales. S'attachant à dissocier

6. M. Denuzière, « Strangers in the maths », *Le Monde*, 9 septembre 1970, p. 12.
7. G. Edwards, A. Grothendieck, « Les savants et l'appareil militaire », *op. cit.*, p. 23.
8. A. Grothendieck, « Compte-rendu d'un congrès scientifique », *Survivre*, n°2-3, sept-oct 1970, p. 18.
9. R. Godement, « M. Guichard et les mathématiciens », *Le Monde*, 9 sept 1970, p. 12.
10. Entretien avec Pierre Samuel, 4 avril 2008.
11. J.-L. Loubet del Bayle, *Les Non conformistes des années 1930. Une tentative de renouvellement de la pensée politique française*, Paris, Seuil, 1969.
12. A. Grothendieck, *Récoltes et semailles, II : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Gallimard, 2022, p. 227.
13. Chevalley s'en est éloigné au milieu des années 1960 et Samuel quittera le groupe Bourbaki à ses 50 ans en 1971. « Nicholas Bourbaki, Collective Mathematician. An Interview with Claude Chevalley (by Denis Guedj) », *The Mathematical Intelligencer*, Vol 7, n°2, 1985, p. 18-22, p. 21.

les mathématiques de techniques de calcul, à fonder des concepts qui débordent l'opératoire, les bourbakistes accentuent considérablement les aspects algébriques et formels des mathématiques. Leur entreprise d'unification de « la » mathématique les conduit à isoler et classer des structures dans des domaines aussi divers que l'algèbre, la topologie ou l'étude des espaces vectoriels topologiques, comme en atteste leur œuvre collective (*Éléments de mathématique*) dont le premier fascicule est sous presse en 1939 [14].

Dès l'après Seconde Guerre mondiale, les membres de Bourbaki entendent accéder à une position dominante dans le champ mathématique et ils cherchent à remodeler en profondeur l'enseignement mathématique de niveau universitaire, y imposant le recours systématique à une approche structurale. De l'immédiat après-guerre à la fin des années 1960, leur poids se renforce considérablement dans les universités [15], et leur rayonnement s'étend jusque dans les contenus des programmes du primaire et du secondaire, comme en atteste la réforme dite des « maths modernes » [16]. Ils sont ainsi parvenus à imposer une stricte hiérarchisation des mathématiques selon leur degré de pureté et d'abstraction. La géométrie classique est reléguée au second rang et l'analyse numérique, comme l'ensemble des mathématiques appliquées, est traitée avec mépris. Le privilège accordé par les membres de Bourbaki aux mathématiques pures semble être le gage d'une protection contre l'utilitarisme des physiciens et les intrusions du monde industriel et militaire [17]. Ce repli sur soi des mathématiciens n'est pourtant pas sans provoquer de tensions, comme en témoigne l'histoire tumultueuse de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (ihés), financé par des industriels [18]. Créé sur mesure pour Grothendieck par un mécène privé en 1958, l'ihés se veut la réplique du célèbre Institute for Advanced Study de Princeton. Ses financeurs sont convaincus qu'en regroupant physiciens et mathématiciens au sein de l'Institut, tout en laissant à ces derniers une grande liberté de recherche, leurs travaux déboucheront à terme sur des applications pratiques [19]. Mais Grothendieck – qui, avant de devenir une autorité incontestable en géométrie algébrique, avait déjà délibérément laissé de côté les portes qu'il avait ouvertes en analyse fonctionnelle et qui féconderont la physique mathématique –, s'est montré rétif à toute collaboration avec les physiciens [20]. « Bâtisseur » solitaire, il considère son activité mathématique comme une œuvre supérieure d'élucidation de la nature du monde, de l'ordre de l'Art ou de l'artisanat, résolument dégagée des contingences matérielles [21]. Il partage pleinement la conception malthusienne et élitiste de la recherche du groupe Bourbaki qui le forma.

Masqué derrière un nom collectif, respectant de strictes règles de fonctionnement, et pratiquant une sélection drastique de ses membres par la méthode dite « des cobayes », le groupe Bourbaki se présente en effet comme une communauté aristocratique extrêmement fermée – notamment aux femmes [22]. Dans l'ontologie bourbakiste, le milieu mathématique se structure selon une hiérarchie naturelle du savoir : de géniales idées viennent à un nombre restreint de « grands savants », une seconde strate joue le rôle de « caisse de résonance », et au dernier échelon, les « tâcherons de la science » [23] croupissent dans « cette contrée sans

14. Parmi les nombreux travaux portant sur le groupe Bourbaki et sa mathématique, on pourra se reporter à L. Beaulieu, *Bourbaki, une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944)*, Université de Montréal, Montréal, 1989 ; C. Houzel, « Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle », *La Gazette des mathématiciens*, n°100, avril 2004, p. 53-63.

15. Pour relativiser, au-delà du récit mémoriel, l'hégémonie du groupe Bourbaki au sein du champ mathématique de cette période, voir P. Verschueren, « Éléments de sociohistoire des mathématiques. À partir du doctorat ès sciences (1944 1968) », in P.-M. Menger, P. Verschueren (dir.), *Le Monde des mathématiques*, Le Seuil, Paris, 2023.

16. R. d'Enfert, H. Gispert, « Une réforme à l'épreuve des réalités. Le cas des "mathématiques modernes" en France, au tournant des années 1960-1970 », *Histoire de l'éducation*, vol. 131, n° 3, 2011, p. 27-49.

17. D. Aubin, A. Dahan, M.-J. Durand-Richard (dir.), *Les mathématiques dans la cité*. Presses universitaires de Vincennes, 2006 ; A. Dahan Dalmedico, « Pur versus appliqué ? », *op. cit.*

18. D. Aubin, « Un pacte singulier entre mathématiques et industrie. L'enfance chaotique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques », *La Recherche* n°113, oct. 1998, p. 98-103.

19. *Ibid.* ; D. Aubin, « L'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, la théorie des catastrophes et le chaos déterministe : mathématiques, industrie et politique », dans *Les mathématiques dans la cité, op. cit.*, p. 129-154.

20. P. Cartier, *La Folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich. Évolution des notions d'espace et de symétrie*, Publications Mathématiques de l'ihés, S88, 1998, p. 23-42.

21. *Récoltes et semailles, op. cit.*, p. 195 et *al*

22. M. Vergne, « La femme et la Science. Témoignage d'une mathématicienne » *Impascience* n°2, printemps-été 1975, p. 3-7.

23. Tirées d'un article officieux de Jean Dieudonné, ces expressions sont rapportées dans P. Samuel, « Buts d'un mathématicien », *La Gazette des mathématiciens*, n°5, juin 1970, p. 39-46, p. 40.

24. A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles, op. cit.*, p. 154.

nom et sans contours » que Grothendieck nomme « le marais » [24].

Bastion de l'idéologie de la science pure, le bourbakisme représente ainsi le repli élitiste des mathématiciens face au modèle américain de recherche qui gagne les universités françaises dans les années 1960. Face à la massification et à l'industrialisation de la recherche, les mathématiques apparaissent comme le refuge d'un travail individuel et créatif, nécessitant peu de crédits et d'équipements [25].

Des militaires aux poètes : la mathématisation du social

Pourtant, se dresse, immense et sous haute protection, l'ordinateur de la Faculté des Sciences de Paris. En mai 68, certains rêvent de saboter ses cartes perforées, de détraquer la machine, « symbole de l'université toute puissante » [26]. Mais face aux simulacres d'attaque, policiers et techniciens s'interposent. Ces derniers défendent leur outil de travail et font rempart de leur corps : « un ordinateur, c'est sacré, ça coûte 10 milliards de francs » [27]. La plupart des mathématiciens, pour leur part imprégnés de l'idéologie bourbakiste, répugnent à utiliser un ordinateur : la « belle démonstration » se fait au tableau noir et par la validation des pairs, elle se passe de machines [28]. Certains physiciens s'y opposent aussi, considérant, comme Jean-Paul Malrieu (qui rejoint Survivre en 1971), que l'ordinateur représenterait « un échelon de plus dans la hiérarchie » et « une désintellectualisation de la pratique scientifique » [29], laquelle s'orienterait davantage vers la simulation et reléguerait la compréhension au second plan.

Si ces transformations des pratiques de recherche suscitent de si vives résistances, c'est aussi que l'ordinateur apparaît à ces scientifiques comme le cheval de Troie des militaires, des grandes firmes capitalistes et de l'État centralisateur. Issu de la guerre, financé massivement par l'armée américaine, il forme indéniablement le soubassement technique et cognitif de la guerre froide : de la défense aérienne à la surveillance par satellites, l'analyse de systèmes permet à la puissance américaine de circonscrire l'espace terrestre, sous-marin et spatial, alimentant le fantasme d'un contrôle planétaire centralisé [30].

En France, contournant l'hostilité des bourbakistes, l'informatique se développe sous la pression des grandes entreprises de construction d'ordinateurs, à la marge des facultés, dans les écoles d'ingénieurs qui leur sont rattachées, comme à Grenoble autour du spécialiste de calcul numérique Jean Kuntzmann, ou au Conservatoire National des Arts et Métiers [31]. Certains mathématiciens, tels Jacques-Louis Lions, tentent de dupliquer le modèle américain et physicien du « scientifique entrepreneur », travaillant, autour de la notion de système, en étroite relation avec les industriels et les ingénieurs des disciplines voisines et recourant à un ensemble diversifié de financeurs, tels le Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) et Électricité de France (EDF) [32]. La production des gros appareillages techniques que sont les calculateurs s'appuie en effet sur une industrialisation de la recherche qui, à l'instar de la fabrication des piles atomiques, des accélérateurs de particules ou des chambres à bulle des physiciens, brouille les frontières traditionnelles entre disciplines, entre ingénieurs et chercheurs, comme entre recherche appliquée et recherche fondamentale.

Lancé en 1966 à l'instigation des entreprises électroniques et des militaires, le Plan Calcul entreprend de rattraper « le retard » de l'industrie française de calculateurs électroniques en incitant au développement de collaborations entre chercheurs publics, privés et Armée. L'informatique devient alors, à l'instar de la biologie moléculaire, un des grands programmes techno-industriels promus par l'État gaullien et pilotés par la Délégation Générale

25. Sur la persistance, au-delà de Bourbaki, d'un tel ethos mathématicien alliant esthétique et élitisme, voir B. Zarca, *L'univers des mathématiciens. L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques*, Presses universitaires de Rennes, Rennes, 2012 et P.-M. Menger, P. Verschueren (dir.), *Le Monde des mathématiques*, Le Seuil, Paris, 2023.

26. Entretien avec Denis Guedj, Paris, 14 mai 2008.

27. Discussion suite à l'exposé de Philippe Louiset, « Les dangers de l'Informatique », *Les Cahiers du Boucau Séminaire de réflexion critique sur l'écologie. Camp de juillet 1973*, dactyl., p. 70-84, p. 77.

28. Entretien avec Pierre Samuel, 4 avril 2008.

29. J.-P. Malrieu, « Les dangers de l'Informatique (discussion) », *op. cit.*, p. 80.

30. P. N. Edwards, « Construire le monde clos : l'ordinateur, la bombe et le discours politique de la guerre froide », dans *Les sciences pour la guerre, 1940-1960, op. cit.*, p. 223-249.

31. P.-É. Mounier-Kuhn, *L'Informatique en France de la Seconde Guerre mondiale au Plan Calcul. L'émergence d'une science*, PUPS, 2010.

32. A. Dahan Dalmédico, *Jacques-Louis Lions, un mathématicien d'exception*, La Découverte, Paris, 2005.

à la Recherche Scientifique et Technique (dgrst). Lions prend la direction du nouvel Institut de Recherche en Informatique et en Automatique (iria), et ceux qui font « des maths qui servent » accèdent à un espace de collaboration rapprochée avec les politiques, les administrateurs, les industriels et les militaires.

Entrant véritablement dans la guerre froide, la France entreprend de se doter d'une industrie d'armements indépendante *via* l'essor de puissants groupes industriels et un investissement considérable dans la recherche stratégique [33]. Formalisation et simulation mathématiques sont requises tant pour la construction de réseaux radar que d'avions à réaction, de missiles ou autres armes nucléaires. Il n'est alors guère surprenant que le Plan Calcul soit abondamment financé, outre par la dgrst, par la Direction des Recherches et Moyens d'Essais (drme), l'organisme de recherches scientifiques du ministère des Armées [34].

Créée en 1961, et concentrant dès 1965 36% du financement public de recherche, la drme est « chargée de déceler et d'intensifier les travaux dits de pointe, susceptibles d'orienter à long terme la politique d'armement de la nation » [35]. En finançant des recherches fondamentales aussi bien qu'appliquées, elle draine les idées qui peuvent surgir dans un champ beaucoup plus étendu que celui des stricts laboratoires militaires. Comme l'explique Jean-Paul Malrieu, par les 700 (modestes) contrats qu'elle passe chaque année avec des organismes divers, elle enrôle subtilement étudiant.es et chercheur.es dans la recherche militaire, souvent à leur insu [36].

Quelles ne furent pas ainsi la surprise et l'indignation de Grothendieck lorsqu'il apprit fortuitement en novembre 1969 que son institut de recherche, l'ihés, était financé à hauteur de quelques pourcents par l'otan *via* le ministère de la Défense nationale français ! Durant des mois, il fit son possible pour obtenir la suppression de ces financements. En vain. À la rentrée 1970, de retour désabusé du congrès de Nice, il en démissionne avec fracas [37].

Au-delà des militaires, les mathématiques appliquées deviennent également indispensables à la gestion des macro-systèmes technico-sociaux que sont les villes, la circulation automobile et les grands programmes de développement industriel, comme les barrages ou les centrales électriques d'edf. La prévisibilité, le traitement d'importants flux d'informations et la modélisation économique qu'elles autorisent soutiennent aussi la mutation des « humanités » en « sciences de gestion » : les enquêtes sociales sont marginalisées par les nouveaux outils économétriques ; l'histoire se lie aux institutions d'orientation et de prévision économiques et prend un tournant quantitatif, etc.

La mathématique (structurale cette fois) offre également un modèle de scientificité aux jeunes sciences humaines et sociales (shs), qui embrassent le structuralisme. Le sociologue Henri Lefebvre décrit ce dernier comme l'idéologie des temps gestionnaires et de la technocratie [38]. En mettant l'accent sur des invariants et les relations entre les éléments, le formalisme des mathématiques structurales permet en effet aux sciences humaines de s'affranchir tant de la contingence historique que du vécu ou de la finalité de l'agir humain [39]. Le recours à la modélisation mathématique se développe particulièrement en linguistique, puis en anthropologie, à la suite de la collaboration entre Claude Lévi-Strauss et le bourbakiste André Weil. La notion de « structure » devient ainsi le gage d'unification et de scientificité des jeunes shs [40]. Ces dernières postulent volontiers une adéquation entre structures sociales, linguistiques, psychologiques ou mentales et structures mathématiques. Ainsi des travaux de Jean Piaget ou de la psychanalyse lacanienne qui connaît dans l'après 68 ses heures de gloire au Centre Universitaire Expérimental de Vincennes [41]. Dans un enthousiasme

33. D. Pestre, « La création de la dma et de la drme en 1961 : projet politique stratégique ou construction conjoncturelle », dans A. Chatriot, V. Duclert (dir.), dans *Le Gouvernement de la recherche*, La Découverte, Paris, 2006, p. 163-173.

34. P.-E. Mounier-Kuhn, *L'informatique en France, op. cit.*

35. Vincent Duclert, « L'invention d'une haute institution gouvernementale. La délégation générale à la recherche scientifique et technique », *Le Gouvernement de la recherche, op. cit.*, p. 132 -149.

36. J.P. Malrieu, « La militarisation de la recherche », *op. cit.*

37. A. Grothendieck, « Comment je suis devenu militant », *Survivre* n°6, janvier 1971, p. 9-10.

38. H. Lefebvre, *L'Idéologie structuraliste*, Le Seuil, Paris, 1975.

39. F. Dosse, *Histoire du structuralisme, Tome 1 : Le champ du signe*, La Découverte, Paris, 1991.

40. M. Armatte, « Mathématiques "modernes" et sciences humaines », dans B. Belhoste, H. Gispert, N. Hulin (dir.), *Les sciences au lycée, un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, inrp, Vuibert, 1996, p. 77-88.

41. Assisté de Mireille Tabare, le mathématicien Daniel Sibony y tient par exemple un séminaire consacré aux « mathématiques de l'inconscient ». Entretien avec Daniel Sibony, 7 octobre 2009.

qui gagne jusqu'aux cercles poétiques, tels l'Oulipo, les mathématiques structurales sont ainsi érigées en langage universel et en fondement de la culture moderne [42].

L'onde de choc de Mai 68

Quand elles séduisent militaires et poètes, il paraît décidément illusoire de croire que « les mathématiques soient objectivement indépendantes de la société », constate Pierre Samuel en 1970 dans *La Gazette des mathématiciens* [43]. Les anciens bourbakistes qui fondent Survivre se retrouvent ainsi autour du rejet de l'idéologie de la science pure qui constituait jusqu'ici le fondement de leur ethos professionnel. Soudainement, ce « purisme » ne leur semble plus être qu'un illusoire refuge conservateur, au regard (pour Grothendieck et Godement tout particulièrement) des financements militaires de la recherche, ou (pour Samuel) des « nouveaux usagers » des mathématiques, ou encore (pour Chevalley), de leur rôle de « chiens de garde du pouvoir » [44].

A. Grothendieck et R. Godement, à l'instar des bourbakistes [45], sont restés relativement distants des évènements de Mai 68. Mais, pour P. Samuel et plus encore pour C. Chevalley, ce fut un choc d'une extrême brutalité.

Dans les années 1960, P. Samuel fréquente les mathématiciens qui militent pour la modernisation de l'enseignement. Il est l'un des rares universitaires membres de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public de la maternelle à l'université (APMEP) [46], et l'un des deux Bourbaki à participer à la Commission Lichnerowicz créée en 1967 pour mener la réforme des programmes mathématiques du primaire et du secondaire. Mai 68 et ses revendications « d'un pouvoir étudiant » paraissent le prendre de court. Il en embrasse pourtant rapidement les revendications démocratiques et antihiérarchiques, n'hésitant pas à critiquer l'élitisme de ses collègues.

Quant à Claude Chevalley, ce digne professeur de 59 ans, on le vit plonger de sa chaire magistrale dans la foule révoltée et participer aux occupations de la Faculté des Sciences de Paris [47]. Tranchant avec les questions de réforme de l'université, les débats qu'il y anime portent sur les finalités de la recherche. Il faut dire que la neutralité de la science, il y a longtemps qu'il n'y croyait plus, lui qui fut ami de lycée de Bernard Charbonneau et Jacques Ellul [48], lui qui, militant personnaliste dans les années 1930, considérait déjà la science comme un acte d'exclusion des aspects les plus hétérogènes d'un phénomène donné, permettant d'avoir prise sur lui [49], lui qui, enfin, en 1945 se demandait encore et déjà : « La science sera-t-elle la religion de demain ? » [50].

Mai 68 vient le tirer de la léthargie politique dans laquelle il s'était installé dans l'après-guerre. Alors qu'il assénait encore l'année précédente sa « Bible » [51] à des étudiant.es terrorisé.es, la dénonciation de l'élitisme et de l'ésotérisme des mathématiques bourbakistes par les étudiant.es le touche de plein fouet. Il s'ouvre à un questionnement pédagogique et rejoint en 1970 le Centre universitaire expérimental de Vincennes [52]. Avec Denis Guedj, Daniel Vagelsi [53] et une dizaine d'autres mathématicien·ne·s, rencontré·e·s pour la plupart au sein du comité de grève de la fa-

42. D. Aubin, « The withering immortality of Nicolas Bourbaki : a cultural connector at the confluence of mathematics, structuralism, and the Oulipo in France », *Science in Context*, n°10 (2), 1997, p. 297-342.

43. P. Samuel, « Buts d'un mathématicien », *op. cit.*, p. 41.

44. C. Chevalley, « Des adhérents se présentent », *Survivre* n°2, sept-oct. 1970, p. 35.

45. Les Bourbakistes adoptent une attitude franchement hostile ou, pour ses membres les plus progressistes comme Henri Cartan et Laurent Schwartz, réservée. Ce dernier, favorable à une sélection à l'entrée de l'université, déçoit alors toute une jeunesse. Bernard Brillant, *Les clercs de 68*, Presses Universitaires de France, Paris, 2003, p. 148.

46. `https://www.apmep.fr/Pierre-Samuel`

47. Entretien avec Denis Guedj, 14 mai 2008.

48. Penseurs personnalistes, critiques du progrès technique et pionniers de l'écologie politique.

49. C. Chevalley, A. Dandieu « Réflexion sur la mesure considérée comme acte », *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, n°116, 1933, p. 66-77.

50. C. Chevalley, « Will science be the religion of tomorrow ? », *Free World*, février 1945.

51. Son œuvre mathématique était ainsi surnommée en raison de son dogmatisme. C. Chevalley fut un membre actif du mouvement personnaliste Ordre Nouveau.

52. Sur l'université de Vincennes, ses principes pédagogiques et son rôle de laboratoire politico-intellectuel dans les années 1970, voir J.-M. Dijan (dir.), *Vincennes, une aventure de la pensée critique*, Flammarion, Paris, 2009 ; G. Berger, M. Courtois, C. Perrigault, *Folies et raisons d'une université : Paris 8. De Vincennes à Saint-Denis*, Pétra, Paris, 2015.

53. Venu de l'Institut de statistiques, Daniel Valgési s'occupe de la partie statistiques, tout en se montrant très critique vis-à-vis de ces dernières. *Ibid*, p. 425-426.

54. Entretien avec Denis Guedj, 14 mai 2008.

culté des sciences de Paris, il fonde à Vincennes le département de « mathématiques-politique » [54]. Ce dernier recrute des mathématiciens de sensibilité libertaire ou maoïste, et exclut, par principe, les membres d'un parti politique. Ouvert à des travailleur·euses non bachelier·es et aux « nouveaux usager·es » des mathématiques (des institutrices confrontées à la réforme des « maths modernes » [55] aux psychologues et spécialistes des sciences humaines et sociales – à l'exclusion néanmoins des informaticien·nes [56]), le département de mathématiques de Vincennes devient rapidement un pôle de réflexion critique sur l'enseignement des mathématiques, leurs rapports aux autres disciplines, et leurs dimensions sociales et politiques, d'hier à aujourd'hui. L'enseignement du département vise ainsi, outre la maîtrise du langage scientifique, à

> l'étude critique des applications et des usages des mathématiques dans certains modèles rencontrés dans les sciences sociales (économétrie, sociométrie, linguistique, psychologie sociale, etc.); à questionner « l'approfondissement du rôle des mathématiques, et plus généralement du discours rationnel, dans le champ social » [57].

Bien qu'affecté par des problèmes de santé, C. Chevalley sera moteur dans la critique du scientisme à Survivre, où il entraîne dans son sillage de plus jeunes mathématicien·nes, tel.les Denis Guedj, Mireille Tabare ou Daniel Sibony.

R. Godement, pour sa part, ne s'engagera pas réellement dans Survivre, mais restera néanmoins un farouche opposant à « l'extraordinaire concentration de pouvoir » formée par « l'alliance organique des dirigeants de l'industrie, des chefs politiques et militaires, de la bureaucratie et de la caste scientifique » dont il débutait par ses termes la contestation avec Grothendieck, dans un article paru dans *La Recherche* en janvier 1971 [58]. Cette année-là, il se propose, en relation avec le mouvement, de lancer un groupe d'étude critique « Science et Société » à la Faculté des Sciences de Paris (Paris VI) [59].

L'université de Vincennes constitue ainsi le premier terreau d'implantation de Survivre. Celle d'Orsay, où enseigne Pierre Samuel à partir de 1970, en sera le second. Dans la vallée de Chevreuse et sur le plateau de Saclay, les départements de sciences de la vieille Sorbonne se réorganisent autour des grandes installations physiciennes (du Commissariat à l'énergie atomique (cea), de l'onera, de Polytechnique, etc.). Nouveau pôle techno-industriel au sud de Paris, marquée par la figure de Frédéric Joliot-Curie (premier directeur du cea), la Faculté des sciences d'Orsay devient vite un bastion communiste [60].

Enseignant auparavant à l'École normale supérieure de jeunes filles, Samuel demande à être nommé à Orsay à son retour des États-Unis en 1970. Il y suit les efforts d'Henri Cartan pour faire cohabiter recherche et enseignement [61]. D'une grande ouverture et d'une grande douceur, Samuel est aussi un des rares hommes à s'engager dans les mouvements féministes.

Dans les séminaires critiques qu'ils et elles animent à Vincennes et à Orsay, les mathématicien·nes proches de Survivre se livrent à une dénonciation de l'idéologie de la science pure, fondement de l'irresponsabilité sociale des scientifiques, et invitent les chercheur·euses à réfléchir aux enjeux sociaux de leur profession [62]. Politisant leur champ de compétence, ils dénoncent le réductionnisme selon lequel « toute la réalité, comprenant l'expérience et les relations humaines, les événements et les forces sociales et politiques, est exprimable en langage mathématique » [63]. Cette prédominance du formalisme constitue selon eux un des fondements de la conception « mécaniste »

55. D. Guedj, « Les petites dames du bois de Vincennes », dans *Vincennes, une aventure, op.cit.*, p. 72-75.
56. Il était initialement envisagé qu'un même département accueille mathématique et informatique mais C. Chevalley s'y oppose résolument et le département de mathématique se rattachera finalement à l'uer de sciences sociales. *Folies et raisons d'une université. op. cit.*, p. 430.
57. *Département de mathématiques. uer de Sciences Sociales*, 1974, reproduit dans D. Guedj, « Les petites dames », *op. cit.*, p. 73.
58. A. Grothendieck, R. Godement, « Survivre à la recherche militaire », *La Recherche*, n°8, janv. 1971, p. 64.
59. « Science et société », *Survivre* n°6, janv. 1971, p. 11-12. Reproduit, sous le titre « Pourquoi faisons-nous des sciences ? », dans A. Jaubert, J.-M. Lévy-Leblond (dir.), *(Auto)critique de la science*, Le Seuil, Paris, 1975 p. 75-77.
60. Selon le mathématicien Jean-François Méla, « il y avait une alliance entre le pc et les mandarins ». Entretien avec Jean-François Méla, 2 mai 2009.
61. P. Samuel, « Souvenirs personnels sur Henri Cartan », *La Gazette des mathématiciens*, n°100, avril 2004, p. 12-15.
62. P. Samuel (dir.), *Séminaire Mathématiques, mathématiciens et société*, université de Paris-Sud, département de mathématiques, 1979 (nouveau tirage).
63. « La Nouvelle Église Universelle », *Survivre... et Vivre*, n°9, août-sept. 1971, p. 3-7, p. 5.

ou « analytique » de la nature – à l'origine notamment d'une gestion techniciste de la crise écologique. – Selon Denis Guedj, lecteur du philosophe Jean Baudrillard, l'attention exclusive accordée par les mathématiques modernes aux relations, aux dépens de la signification, soutiendrait aussi la généralisation de systèmes d'équivalences formelles, détruisant la valeur d'usage et supportant un « processus d'universalisation qui transforme les objets en marchandises et les hommes en prolétaires et citoyens »[64].

Dans le séminaire qu'il anime à Orsay, Pierre Samuel interroge également le développement de la modélisation, et pointe le rôle de la formalisation dans le transfert des modèles d'un champ à un autre, autorisant une gestion à une échelle inédite[65]. Il questionne également le nouveau statut de « la mathématique » dans l'enseignement. Alors érigée en « espéranto de la société industrielle » et en « culture du monde moderne », la mathématique est appelée, avec la réforme des « maths modernes », à supplanter le latin et à devenir un fondement de la démocratisation de l'enseignement[66]. Selon Samuel, l'enseignement des mathématiques légitimerait surtout le pouvoir technocratique en place et à venir, véhiculant une hiérarchisation implicite des compétences et privilégiant un certain type d'exercices. La valorisation de l'abstraction, par exemple, dévaloriserait le travail proche de la matière. De même, le primat accordé aux démonstrations sur la formulation des problèmes (donnés comme des déjà-là décontextualisés) acclimaterait les étudiants à l'existence d'un ordre objectif que la technocratie n'aurait qu'à « démontrer et gérer »[67]. Ces « mathématiques du ciel »[68], comme les appellera Stella Baruck, seraient typiques de la représentation de la science comme « vérité révélée »[69] véhiculée par l'enseignement et la vulgarisation scientifiques.

Né au cœur de la forteresse bourbakiste, Survivre en viendra ainsi rapidement à combattre son ciment idéologique, à savoir sa conception de la science comme « pure », que défendaient peu de temps avant encore ses membres fondateurs. Mais c'est sous l'influence de la guerre du Vietnam – où Grothendieck s'est rendu en novembre 1967[70] – et du militantisme des scientifiques critiques nord-américain.es que le mouvement va se structurer en France au-delà du monde mathématicien.

Planète en danger, « big science » contestée : l'écologie comme technocritique

> Que la recherche scientifique soit nécessairement « utile » est extrêmement discutable, et doit être sérieusement reconsidéré. [...] Trop souvent elle a servi à l'avilissement de l'homme, depuis le début de la révolution industrielle jusqu'à aujourd'hui, où elle risque de devenir l'outil pour sa destruction finale[71].

Les débuts du mouvement Survivre, inséparable de la figure de Grothendieck, s'organisent autour de la contestation des liens entre armée et recherche scientifique et de la dénonciation du rôle de cette dernière dans la mise à sac de la planète. Cette posture d'intransigeance morale, vilipendant toute forme de « collaboration » avec les militaires, démarque Grothendieck de Laurent Schwartz – son ancien directeur de thèse – qui, bien que très engagé contre la guerre du Vietnam[72], enseigne à l'École polytechnique. Résolument non violent, demeuré apatride, Grothendieck ancre le mouvement dans les réseaux d'objecteurs de conscience, sur lesquels se calque sa conception de l'action politique. S'inspirant des mouvements de scientifiques enga-

64. D. Guedj, J.-P. Dollé, « Science et bourgeoisie », *Après-demain* n°145 (La science en question), juin 1972, p. 26-28.
65. P. Samuel, « Réflexions en guise d'introduction », *Séminaire Mathématiques, op. cit.*, p. 1-2.
66. M.-A. Schiltz, « Analyse des épisodes d'une controverse : la réforme des mathématiques des années soixante » dans M. Armatte et al., (dir.), *Le Sujet et l'Objet : confrontations*, CNRS Éditions, 1984 p. 117-147 ; R. d'Enfert, H. Gispert, « Une réforme à l'épreuve des réalités », *op. cit.*
67. P. Samuel, « Mathématiques, latin et sélection des élites », dans *Séminaire Mathématiques, op. cit.*, p. 10-30.
68. S. Baruk, *Échec et maths*, Le Seuil, Paris, 1973.
69. « La Nouvelle Église Universelle », *op. cit.*
70. À Hanoï (Vietnam du Nord), Grothendieck a découvert les raffinements d'une guerre hautement technologisée, mobilisant une grande diversité de disciplines scientifiques. À l'embauche directe d'ingénieurs et de physiciens, à la « contribution » majeure de la chimie (gaz et défoliants), il faut ajouter celles de la géographie, de l'anthropologie, etc., et plus encore de la micro-électronique qui y trouve un terrain d'expérimentation grandeur nature, donnant à la guerre l'allure d'un champ de bataille informatisé. A. Grothendieck, *La vie démocratique en République du Vietnam*, Exposé fait le 20 décembre 1967 à la Faculté des Sciences de Paris.
71. A. Grothendieck, *Responsabilité du savant dans le monde d'aujourd'hui. Le savant et l'appareil militaire*, dactyl., juin 1970.
72. Il est l'un des fondateurs du Comité Vietnam National.
73. K. Moore, *Disrupting science. Social movements, American scientists, and the politics of the military, 1945-1975*, Princeton

gés anglo-américains, tels Science for the People [73], Survivre (devenu Survivre et Vivre en 1971) se propose de délier les sciences de leurs attachements militaires et de les réorienter vers le peuple, la Vie et l'écologie.

Le jeune mouvement se trouve vite au cœur de l'émergence de l'écologie politique française. Selon Pierre Fournier, journaliste à *Charlie-Hebdo* puis à *La Gueule Ouverte*, il en devient même le « laboratoire idéologique » [74]. Son écologie s'inscrit au croisement de quatre fronts montant de politisation des technologies : le premier concerne le monde du travail, le deuxième le monde du développement, le troisième celui de la guerre, et le dernier celui de l'environnement global. Cette dernière forme de contestation de la « big science », au nom des menaces planétaires, retiendra tout d'abord notre attention. Puis, nous esquisserons les modes de critiques et d'engagement promus par Survivre et Vivre afin de construire un mouvement écologique technocritique.

Auprès des biologistes engagés nord-américains

À Survivre et Vivre, les sciences et les techniques sont accusées d'être vectrices d'aliénation, d'organiser la division et la hiérarchisation du travail si vertement contestées en Mai 68. On y partage également les désillusions d'un Ivan Illich et d'un René Dumont après une décennie d'indépendances politiques et de « développement » du Tiers-Monde (qu'attendre des transferts technologiques aux Suds et de la fameuse Révolution verte, si ce n'est un accroissement des inégalités et un renouveau de l'impérialisme Nord/Sud ?).

Outre la guerre, le travail et le développement, c'est l'émergence de l'environnement comme problème global qui constitue, sous l'influence des biologistes engagé.es nord-américain.es, le quatrième front de politisation des technosciences qui se donne à voir à Survivre et Vivre. Durant la seconde moitié des années 1960, la notion de « survie » vient restructurer le puissant mouvement environnementaliste nord-américain dont Survivre se fait un vecteur de transmission en France. En portant l'accent sur la faculté de destruction de la planète par les technosciences issues de la Seconde Guerre mondiale, la « survie » émancipe en effet durablement l'environnement des mouvements tutélaires de protection de la nature.

Figure de proue du Committee for Environmental Information (CEI), Barry Commoner illustre (après Rachel Carson) la radicalisation d'une influente fraction de biologistes américain.es. En 1966, il publie *Science and Survival* qui peut être considéré comme le coup d'envoi du mouvement de science critique [75]. Commoner ancre en effet l'environnementalisme dans une réflexion critique sur le type de savoirs, de recherches et de technologies générées par la Seconde Guerre mondiale. Outre le procès du complexe scientifico-militaro-industriel, il dresse celui de l'industrie pétrochimique dont les produits (fibres synthétiques, détergents, intrants agricoles, etc.) viennent rompre le cycle des équilibres naturels. Selon lui, la fragmentation et le réductionnisme des sciences naturelles autorisent aveuglément la mise en circulation de polluants dont les effets cumulatifs et les répercussions lointaines sont pourtant tout aussi inévitables qu'imprévisibles. La crise environnementale ne saurait dès lors recevoir de solution scientifique ou technologique satisfaisante... proclame-t-il à l'heure où les premières bactéries OGM promettent de capter le pétrole des marées noires et de dépolluer les océans ! *A contrario*, comme l'écrira Pierre Samuel, qui s'attache à faire connaître en France la pensée du biologiste : « Le remplacement "technique" d'un déséquilibre par un autre est un cycle sans fin » [76].

Surtout, en replaçant le mode d'innovation technologique au cœur de la crise environnementale, Commoner contribue à émanciper l'écologie d'un néomalthusianisme attribuant à la croissance démographique (la « Bombe P ») la responsabilité principale. Dès 1968, il engage la polémique : « Pollution begins not in the family bedroom, but in the corporate board-room » [77]. En 1971, dans leur préface et postface à l'édition française de la *Bombe P* d'Ehrlich, Samuel et Grothendieck reprennent les

University Press, Princeton, 2008 ; S. Bridger, « Anti-Militarism and the Critique of Professional Neutrality in the Origins of Science for the People », *Science as Culture*, 2016, 25 (3), p. 373-378 ; H. Nowotny, H. Rose (eds.), *Counter-movements in the Sciences, the sociology of the alternatives to Big Science*, D. Reidel, Dordrecht, 1979.

74. P. Fournier, *Charlie Hebdo*, 10 juillet 1972, n°86, p. 10.

75. B. Commoner, *Science and Survival*, Viking Press, New York, 1966 ; *Quelle terre laisserons-nous à nos enfants ?*, Le Seuil, Paris, 1969.

76. P. Samuel, « Pollution et antipollution », *Survivre ... et Vivre* n°12, juin 1972, p. 31-33.

77. Cité par M. Egan, *Barry Commoner and the Science of Survival. The Remaking of American Environmentalism*, MIT, Cambridge, 2007, p. 130.

arguments de Commoner, en portant l'accent sur le poids de la « civilisation clinquante » du Nord [78]. Survivre et Vivre milite alors pour dégager le contrôle des naissances et le corps des femmes des biopolitiques autoritaires des pays blancs et industrialisés du Nord vis-à-vis des pays dits « sous-développés », et de la France métropolitaine envers les DOM-TOM [79].

De Rachel Carson à Barry Commoner, le scepticisme de ces biologistes engagé.es à l'égard de la technologie « moderne » imprègne et transforme durablement le mouvement environnementaliste américain. Ils et elles contribuent à porter la critique des technosciences au cœur de l'agitation politique qui saisit le pays durant la seconde moitié des années 1960 dans le sillage du mouvement pour les Droits civiques. Par leur lecture résolument anticapitaliste de la crise environnementale, ils jouent un rôle important dans l'écologisation des penseur·euses de la contre-culture, tels Murray Bookchin, et plus largement de la *New Left* [80]. Grothendieck et Samuel en seront d'importants passeurs en France, à Survivre, puis, pour Samuel (père, mais aussi fils [81]), aux Amis de la terre.

Construire un mouvement écologique émancipé de l'autorité scientifique

Comme l'affirmait Serge Moscovici, l'un des premiers penseurs de l'écologie politique française, la critique des sciences et des techniques, incarnée par Survivre et Vivre dont il fut proche, représente l'un des principaux courants à l'origine du mouvement d'écologie politique [82]. À Survivre et Vivre, cette technocritique se retrouve tant dans l'analyse politique que dans les pratiques sociales et militantes mises en œuvre par le mouvement. Au sein du mouvement écologiste naissant, Survivre et Vivre refuse ainsi que les scientifiques tiennent un rôle convenu d'experts ou de contre-experts. Le mouvement se démarque également de l'essor d'une écologie technocratique, posture critique que développera peu après André Gorz [83] et qui marquera durablement l'écologie des années 1970.

Aux côtés de Fournier, Survivre et Vivre participe activement à l'essor du mouvement antinucléaire français – lui-même central dans la structuration de l'écologie politique et prolongement direct des mouvements de critique radicale des sciences [84] –. Le mouvement attaque cette technologie par ses points aveugles : ses experts et ses déchets. Il s'emploie à montrer l'étendue des doutes, l'absence de neutralité et toutes les limites des connaissances ultra-spécialisées des experts nucléaires. Mais il refuse de s'engager dans un débat technique inaccessible à la majorité des gens quand il en va, selon lui, de choix politiques et sociaux. Il s'oppose à une telle technicisation et captation du débat par les experts, fussent-ils contre-experts. En 1972, Grotilendieck et Malrieu prennent excuse d'une conférence au CEA de Saclay pour lever un lièvre : des centaines de fûts radioactifs, entreposés là « temporairement » depuis la création du site, sont fissurés... les experts doivent en convenir, et les fûts sont (temporairement) transférés à la Hague.

Transcendant les clivages droite/gauche, capitalisme/communisme, le scientisme, foi irrationnelle et inconditionnelle placée dans la science, constituerait, selon Survivre et Vivre, le soubassement idéologique du « progrès », cette « religion de la production et de la croissance pour elles-mêmes » [85]. Justifiant un recours systématique à la science pour résoudre tous les problèmes, qu'ils soient humains ou sociaux, le scientisme serait la principale source de notre dépossession, individuelle et collective. Selon Survivre et Vivre, la science fabriquerait une « connaissance objective » dans l'écart, d'une part, du scientifique à lui-même, par l'exclusion de ses dimensions subjectives, et d'autre part, par la mise à distance, dans l'univers confiné du laboratoire, des préoccupations populaires et quotidiennes. Le savoir ainsi produit serait

78. A. Grothendieck, P. Samuel, « Préface », in Paul R. Ehrlich, *La Bombe P*, Fayard, Paris, 1972 (1968). p XIV.
79. « Nous sommes toutes des Martiniquaises de 15 ans », *Survivre... et Vivre*, n°15, janv.-fév. 1973, p. 25-26. À la difficulté pour une jeune femme française de métropole d'avoir accès à la contraception répondaient alors, dans les départements d'Outre-Mer, des politiques autoritaires de contrôle des naissances, voire des avortements et stérilisations forcés. F. Vergès, *Le ventre des femmes. Capitalisme, racialisation, féminisme*, Albin Michel, Paris, 2017.
80. R. Gottlieb, *Forcing the Spring : The Transformation American Environmental Movement*, Island Press, Washington D.C., 1993, p. 81-114.
81. Laurent Samuel, fils de Pierre Samuel, fut engagé à Survivre puis aux Amis de la Terre et à l'Association des Journalistes-écrivains pour la Nature et l'écologie.
82. S. Moscovici, « La polymérisation de l'écologie », *De la nature. Pour penser l'écologie*, Métailié, Paris, 2002, p. 9-26, p. 12.
83. A. Gorz, « Introduction. Leur écologie et la nôtre », dans *Écologie et politique*, Le Seuil, Paris, 1978 (1975), p. 9-16.
84. P. Petitjean, « La critique des sciences en France », *Alliage*, n° 35-36, 1998, p. 118-133.
85. « La Nouvelle Église Universelle », *op. cit.*, p. 7.

ensuite donné comme vérité naturelle, apte à ordonner l'existence humaine et à guider l'évolution sociale. Les techniques et les justifications objectives qui en découlent viendraient enfin naturaliser et perpétuer « l'ordre social et politique qui les ont vu naître » [86]. Au-delà du monopole du savoir/pouvoir par une classe d'experts, le mode de production aliéné de ce savoir induirait enfin une fragmentation du réel en une série de problèmes techniques.

Survivre développe également une critique originale de la science comme phénomène d'« annexion impérialiste », venant coloniser le vécu personnel et occidentaliser le monde. En érigeant la science, forme de connaissance parmi d'autres, comme la vérité universelle, notre société industrielle dévaloriserait et dénierait toute existence véridique aux autres formes d'appréhension et de relation au monde. Des cultures entières et « les sensations et expériences, comme l'amour » de tout un.e chacun.e seraient ainsi disqualifiées, voire anéanties [87].

Cette réflexion sur l'impérialisme scientifique, l'exclusion du sujet et l'occidentalisation du monde, Survivre et Vivre la partage avec Serge Moscovici et Robert Jaulin, deux compères ayant initié une critique des approches structuralistes en sciences humaines. Selon l'anthropologue R. Jaulin, le recours croissant à la modélisation mathématique en anthropologie participerait de la prétention à l'universalité de la Science, et *in fine* de l'Homme blanc. Chevalley présente ainsi sa pensée :

> C'est en dernière analyse l'homme blanc moderne qui devient le modèle valable de l'humanité, et les traits différentiels des autres cultures sont neutralisés en les qualifiant de pensée sauvage ou de primitivisme [88].

Au nom du progrès et de la science, des peuples se trouveraient ainsi folklorisés et détruits, rejetés dans le passé et assimilés à la nature. Cette critique du rejet dans le passé et de la naturalisation des « primitifs » (étrangers, femmes, animaux...) amène Jaulin, Moscovici et les membres de Survivre et Vivre à dresser un parallèle entre l'ethnocide des paysan·nes français.es victimes de la modernisation agricole et celui des peuples Indiens, victimes de la « civilisation blanche ». Ensemble, ils réalisent une exposition itinérante, animent des séminaires « pirates », et éditent l'ouvrage *Pourquoi la mathématique ?* [89].

L'activisme de Survivre et Vivre se déploie ainsi dans le monde académique et à l'extérieur de celui-ci. Au sein des institutions scientifiques, ses membres en appellent à une décroissance de la recherche afin de la réduire à la satisfaction des besoins élémentaires des hommes et des femmes. Après une tournée dans une vingtaine d'universités nord-américaines, Grothendieck scandalise en détournant sa charge d'enseignement au Collège de France au profit de discussions sur le rôle des sciences et des technologies dans la « crise évolutionniste » [90]. Des universités de province aux plus prestigieuses institutions scientifiques (CERN, CEA, École des Mines, Observatoire de Meudon, Faculté d'Orsay, etc.), les membres de Survivre et Vivre questionnent sans relâche les scientifiques venu-e-s par centaines les écouter : la recherche n'est-elle pas socialement nuisible, la source d'une aliénation de masse, et pour les chercheur·euse·s une « mutilation » quotidienne ? N'est-elle pas devenue une fin en soi : un moyen de sélection sociale et « une arme dans la lutte pour sa place au soleil » ? [91] Ces interventions rencontrent un écho certain auprès de chercheur·euse·s qui ont le sentiment de pratiquer une science obtuse et incompréhensible au plus grand nombre. Elles sont parfois le point de départ de bifurcations professionnelles, particulièrement pour des physicien·nes, mais aussi pour de jeunes chercheur·euses précaires et des ingénieur·es en formation dont la fièvre contestataire s'est emparée.

Quittant l'espace académique, Survivre et Vivre s'attelle également à la « déscientisation » des divers courants de la gauche. De vives polémiques l'opposent ainsi au Parti communiste français, mais aussi à François Cavanna, tandis qu'il rencontre davantage de sympathie dans certains courants libertaires et maoïstes.

Pour contrer la dépossession engendrée par les

86. J.-P. Aboulker, « Science for the People ? » *Survivre et ... Vivre*, n°9, août-sept. 1971, p. 19-21, p. 21.
87. D. Guedj, A. Grothendieck, « Allons-nous continuer la recherche scientifique ? », *Survivre... et Vivre*, n°10, oct.-déc. 1971, p. 17-19, p. 17.
88. C. Chevalley, « La paix blanche, introduction à l'ethnocide, R. Jaulin », *Survivre*, n° 8, juin 1971, p. 22.
89. A. Grothendieck et *al.*, *Pourquoi la mathématique ?*, Union Générale d'Éditions, Paris, 1974.
90. En 1970/71, Grothendieck désigne ainsi le franchissement de seuils irréversibles par la civilisation industrielle, rompant avec les processus évolutifs millénaires. A. Grothendieck, *La Grande Crise Evolutionniste*, dactyl., hiver 1970-1971.
91. D. Guedj, A. Grothendieck, « Allons-nous continuer la recherche scientifique ? », *op. cit.*, p. 18.

technosciences, ses membres tentent de faire émerger des lieux de parole collective et de mettre en place des dispositifs de réappropriation d'une autonomie quotidienne. Ils invitent à multiplier les actions de « subversion culturelle » et les expérimentations de technologies douces, décentralisées, déhiérarchisées (ancêtres des low tech).

Sa critique du scientisme et des experts amène Survivre et Vivre à se lier à des individus et des mouvements contestant la civilisation industrielle. Ses membres sympathisent avec des naturalistes (à commencer par Pierre Lieutaghi) et de jeunes membres d'associations de défense de l'environnement qui s'accommodent mal du rôle prépondérant qu'y tiennent des scientifiques et notables locaux, plus soucieux de compromis et de concertation que de contestation active des lobbies industriels et de l'État aménageur. Survivre et Vivre s'ouvre aussi aux milieux naturistes et hygiénistes, d'agriculture et de santé naturelles, à l'origine de la création des premières associations d'agriculture biologique, telles Nature et Progrès, et dont les idées gagnent alors en audience.

En 1972, le mouvement Survivre et Vivre se trouve au cœur d'une fourmilière d'initiatives, de petits groupes et revues écologistes. Lui-même essaime en une vingtaine de groupes locaux, liés aux premiers comités antinucléaires, engagés dans des luttes contre des complexes industriels ou militaires, ou menant des expérimentations pratiques (réseaux d'alimentation, agriculture biologique, centre de technologies douces, etc.). De 1971 à 1973, la revue qu'il édite, *Survivre... et vivre*, constitue le journal écologique le plus important, atteignant un tirage de 12 500 exemplaires [92], avant le lancement de *La Gueule Ouverte* et du *Sauvage* (par *Le Nouvel Observateur*). Antérieur à cette première institutionnalisation de la presse écologiste, *Survivre... et Vivre*, avec ses comités de rédaction tournants et sa réalisation artisanale, constitue une voix autonome du mouvement.

Bien éloignés de leur tour d'ivoire, d'éminents bourbakistes jouèrent ainsi un rôle majeur dans l'émergence de l'écologie politique française. La réflexion de Survivre et Vivre s'enrichit tant de sa proximité avec les premiers penseurs de l'écologie politique (Robert Jaulin, Serge Moscovici, mais aussi Bernard Charbonneau) que de l'immersion de ses membres dans une diversité de réseaux alternatifs.

En 1975, Survivre et Vivre s'arrêtait, se sabordant face à l'essor de courants écologistes plus politiciens, experts et normatifs, et surtout industriels (autour des marchés de la « dépollution » (de l'eau, des déchets, etc.)). Pour autant, sa critique de la science imprégna durablement le mouvement écologiste et antinucléaire des années 1970, au sein duquel la plupart de ses membres restèrent actif·ves. Dans les mondes scientifiques, qui, tels *La Gazette des mathématiciens* ou *La Recherche*, accueillirent ces réflexions critiques, elle est à l'origine de nombreuses prises de conscience, bifurcations professionnelles, et expérimentations d'autres façons de faire et d'enseigner les sciences.

Cette (auto)critique des sciences fait l'objet, tout comme la figure de Grothendieck, de redécouvertes périodiques, particulièrement bienvenues à l'heure de l'expansion du technosolutionnisme et de l'industrie verte [93].

Céline Pessis

AgroParisTech
celine.pessis@neuf.fr

Céline Pessis est historienne et sociologue de l'environnement, maitresse de conférences à AgroParisTech.

Cet article est issu d'un travail de Master sur le mouvement Survivre et Vivre. Pour davantage de précisions et un accès direct aux textes de la revue, on se reportera à C. Pessis (dir.), *Survivre et Vivre. Critique de la science, naissance de l'écologie*, L'Échappée, 2014. Je remercie Charlotte Hardouin pour son intérêt pour ces travaux, Christophe Eckes, Pierre Verschueren et Hélène Gispert pour leur relecture attentive.

92. *Survivre... et Vivre*, n°12, juin 1972, p. 1.
93. Oblomoff, *Un futur sans avenir. Pourquoi il ne faut pas sauver la recherche scientifique*, L'Echappée, 2009; *Manifeste de l'atelier d'écologie politique toulousain* : `https://atecopol.hypotheses.org/manifeste-de-latelier-decologie-politique-toulousain`; Groupe Grothendieck, *L'Université désintégrée. La recherche grenobloise au service du complexe militaro-industriel*, Le Monde à l'envers, Grenoble 2021.

Septièmes Journées Parité en mathématiques

• O. Paris-Romaskevich

Un mot d'introduction

La Journée Parité de la communauté mathématique a été lancée par l'Association *femmes et mathématiques* en 2011. Cette Journée s'adresse à celles et ceux intéressé·es à se former et agir pour une communauté mathématique inclusive, apaisée et ouverte. En 2023, un effort de décentralisation de ces rencontres a été fait avec une première édition non parisienne à Lyon. Cette année, l'initiative a été reprise par l'équipe de l'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M) à Aix-Marseille Université (AMU). L'équipe organisatrice était constituée de Peter Haissïnsky, Évelyne Henri, Claire Lacour, Magalie Ochs, Anne Pichon et moi-même. La rencontre s'est déroulée sur deux jours, les 1$^{\text{er}}$ et 2 juillet 2024, le lendemain de l'inquiétant premier tour des élections législatives, avec l'arrivée en tête du Rassemblement National. L'importance de ces journées a été d'autant plus claire, notamment avec une ouverture de la réflexion sur l'action contre les discriminations homophobes et transphobes.

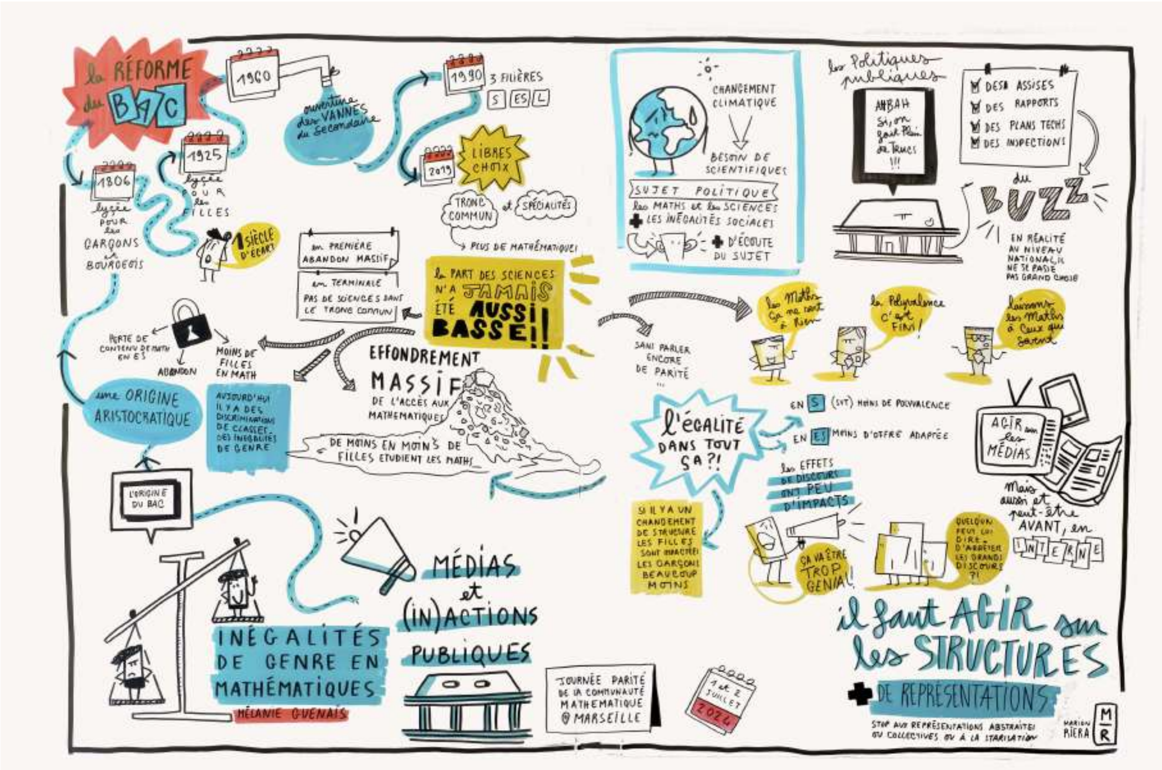
Bien des choses se sont passées depuis juillet... Au moment de la rédaction de ce texte, le président français a nommé un premier ministre qui a eu des prises de position homophobes [1]. Nous rédigeons ce texte aussi en parallèle du procès de Mazan dans lequel 51 hommes de tous les profils sociaux (dont des directeurs de recherche) sont accusés d'avoir violé la même femme, Gisèle Pélicot, droguée à son insu par son mari (lui-même ingénieur). C'est un procès que Gisèle Pélicot a choisi de rendre public. Nos rencontres et ce compte rendu s'inscrivent dans ces moments historiques.

Dans la suite de ce compte rendu, je raconte d'abord le déroulé de la journée et je reviens en détail sur le contenu de quelques exposés. Marion Riera, designer et facilitatrice graphique marseillaise, a accompagné plusieurs exposés avec ses fresques créées *en temps réel* qui illustrent cet article. Vous pouvez les télécharger en format web sur le site des Journées [2]. N'hésitez pas à les imprimer en couleur (format A3 suggéré) et les mettre sur les murs de vos laboratoires !

Une remarque pour la suite : j'ai fait le choix d'expliciter toutes les abréviations qui apparaissent dans cet article. Je me souviens encore de ma première année en France en tant que jeune doctorante, perdue dans l'abondance des abréviations et impressionnée par l'aisance avec laquelle les chercheurs et chercheuses « confirmées » les maniaient... Depuis, je suis persuadée du pouvoir excluant du langage, en particulier du langage abréviatif !

1. En 1981, l'Assemblée Nationale débattait la proposition d'abroger le deuxième alinéa de l'article 331 du code pénal qui réprimait les « actes impudiques ou contre nature avec un mineur du même sexe âgé de plus de 15 ans ». Concrètement, il s'agissait de dépénaliser les relations gays et lesbiennes, notamment entre adolescent·es de plus de 15 ans. Notre nouveau premier ministre Michel Barnier a voté contre cette proposition. Plusieurs années plus tard, il s'est opposé au PACS. A-t-il changé en 45 ans ?
2. Lien web : `http://postes.smai.emath.fr/apres/parite/journee2024/`.

Fresque de Marion Riera retraçant l'exposé de Mélanie Guenais



Déroulé de la journée

La première journée de la rencontre a commencé avec un survol et une réflexion autour des actions de médiation inclusive au sein de la communauté mathématique que j'ai proposés en tant que co-organisatrice (entre 2020 et 2023) de l'école d'initiation à la recherche en mathématiques et informatique pour les lycéennes *Cigales*, qui se déroule au CIRM (Centre International des Rencontres Mathématiques à Marseille) depuis 2019, et comme co-autrice, avec Clémence Perronnet et Claire Marc, du livre *Matheuses : les filles, avenir des mathématiques*.

Après une pause, Anne Siegel, directrice de recherche au CNRS, et directrice adjointe scientifique du CNRS Sciences Informatiques, a présenté un survol des actions de la politique d'égalité femmes-hommes de son Institut. Dans ses activités de recherche, Anne Siegel a d'abord travaillé sur les interfaces mathématiques-informatique via l'étude de systèmes dynamiques symboliques, puis elle s'est intéressée aux interfaces entre la biologie et l'informatique en analysant des réseaux biologiques à grande échelle. Dans sa mission de pilotage de la recherche, elle est en charge de la politique interdisciplinaire de CNRS Sciences informatiques, du suivi des GDR de l'institut, et de sa politique parité.

Ensuite, Magalie Ochs, maîtresse de conférences en informatique au LIS (Laboratoire Informatique Systèmes, AMU), spécialiste d'intelligence artificielle socio-émotionelle, et chargée de mission d'Aix Marseille Université *Égalité femmes-hommes et lutte contre les discriminations*, a présenté une enquête sur les freins de carrière au Laboratoire d'Informatique et Systèmes. Elle a été menée par Lorenn Contini, stagiaire en sociologie, avec le soutien du comité parité de son laboratoire dont Magalie Ochs est coordinatrice. Ce comité est un des plus actifs dans l'INS2I ; constitué de 10 personnes, leur site[3] est une mine d'informations.

Après le déjeuner, Mélanie Guenais, maîtresse de conférences à l'université Paris Saclay, membre du laboratoire de mathématiques d'Orsay, spécialiste de la théorie ergodique, également vice-présidente de la Société Mathématique de France,

3. Lien web : `https://parite.lis-lab.fr`.

a présenté son parcours d'actions publiques et ses interventions dans les médias durant les deux dernières années suite à la réforme « Blanquer » de l'organisation du lycée qui a provoqué des ruptures majeures dans la répartition des élèves selon les parcours, avec une diminution inédite des effectifs d'élèves étudiant des mathématiques, particulièrement importante pour les filles. Son exposé était une adaptation de son exposé au séminaire Sedimath le 13 mai 2024, accessible en ligne. De nombreuses informations se retrouvent aussi sur le site du collectif Maths&Sciences lancé par Mélanie Guenais.

En fin de journée, un des temps forts du programme fut la représentation de Théâtre-forum de la compagnie *Entrées de jeu*, avec leur spectacle *Entre les lignes*. Ce format théâtral, interactif et participatif, visait à sensibiliser les participant·es aux inégalités de genre et discriminations dans le milieu de la recherche scientifique. Le public était tout d'abord invité à choisir quatre thèmes de saynètes parmi les treize proposés. Le choix s'est porté sur « Le prix est décerné à... » (où une femme, co-autrice d'un article, reçoit un prix et subit des remarques sous-entendant que ses co-auteurs masculins sont mécontents de ne pas être récompensés), « Commentaires visibles par tou·tes » (sur les retours professionnels publiques biaisés en fonction du genre), « Correction d'un mail » (illustrant les différences de traitement entre collègues dans la communication professionnelle) et « Ne te prends pas la tête » (où un enseignant-chercheur non francophone subit des moqueries homophobes de la part de ses élèves de fac).

Chaque scène exposait une situation problématique, toujours dans le cadre académique. À l'issue de chaque saynète, les spectateurs et spectatrices étaient invité·es à intervenir et à rejouer les situations en proposant des actions alternatives pour rectifier les injustices représentées. Ce processus interactif était suivi d'une réflexion collective sur les moyens de réagir face à ces comportements dans la vie réelle où les participant·es ont pu partager leurs impressions et pistes d'action concrètes. Le public, enthousiaste, a pu apprécier l'efficacité du Théâtre-Forum pour aborder des enjeux collectifs complexes. Les retours sur cette expérience, singulière pour beaucoup, ont été très positifs.

La deuxième journée de la rencontre a commencé avec un exposé d'Isabelle Régner, professeure de psychologie sociale, directrice adjointe du Centre de Recherche en Psychologie et Neurosciences et vice-présidente égalité Femmes-Hommes et lutte contre les discriminations de l'Université Aix-Marseille. Son exposé portait sur les biais de genre du point de vue des sciences cognitives. Je relaterai cet exposé plus en détails dans l'une des prochaines éditions de la *Gazette*.

Après une pause, a eu lieu la table ronde *Être membre de communauté LGBT+ et faire de la recherche universitaire : enjeux identitaires, phobies et haines, contraintes et libertés*. Elle a été magistralement animée par Flora Bolter, politiste qui travaille dans le champ de l'observation des politiques publiques. Flora Bolter a été quatre ans coprésidente puis présidente du Centre LGBT de Paris et d'Île-de-France et, à ce titre, a mené et accompagné de nombreuses actions de lutte contre les discriminations et de soutien aux droits des personnes LGBT+. Des personnes LGBT+ dans la communauté mathématique ont raconté leurs expériences de vie académique, les difficultés, les discriminations, mais aussi les joies. La discussion a été menée en présence de Thierry Lamour, membre du Pôle Formation de l'*Autre Cercle*. C'est une association qui œuvre pour l'inclusion des personnes LGBT+ dans le milieu professionnel. Elle accompagne les acteurs de l'inclusion du monde professionnel, et observe la situation des personnes LGBT+ dans le monde du travail, en menant des enquêtes approfondies. Sur leur site [4] vous pouvez trouver des nombreuses ressources utiles comme le Guide des Allié·es LGBT+ ou encore les baromètres d'indicateurs pour mesurer l'inclusion sur votre lieu de travail.

De plus, deux moments de partage de lectures féministes ont eu lieu. D'abord, la librairie Pantagruel a tenu un stand littéraire mettant à l'honneur des ouvrages en lien avec les enjeux de parité en mathématiques. Puis, nous avons partagé collectivement nos lectures féministes - toutes les personnes volontaires ont présenté les livres lus récemment. Le survol détaillé des livres présentés m'a paru propice pour cet article, vous le trouverez ci-dessous.

Le déjeuner a clôturé la rencontre.

Ces Journées ont été un moment fort de partage et de discussion commune. Laurence Broze, statisticienne et professeure à l'université de Lille, qui n'avait jamais raté aucune Journée Parité jusque-là nous a manqué ; nous attendrons ses données renouvelées sur les carrières des mathématiciennes avec impatience l'année prochaine. Même si nous

4. Lien web : `https://autrecercle.org`.

constatons que les chiffres n'évoluent (presque) pas, nous sommes persuadées que l'action contre les discriminations et pour le bien-être de tou·tes dans les laboratoires peut être bien plus rapide que le changement de pourcentage F/H dans notre métier. L'objectif prioritaire n'est pas tant la parité (au sens quantitatif du terme) que l'égalité réelle qui se construit dans un environnement respectueux et sécurisant, l'égalité réelle aussi dans l'accès aux postes de pouvoir décisionnel, récompenses scientifiques, ainsi que le développement d'une culture de discussion et d'écoute sur les sujets de société, et un NON ferme à la culture du viol.

Nous, organisatrices et organisateurs des Journées 2024, proposons de les renommer en Journées Égalités. Le message implicite (par le choix du programme) et explicite (par cette proposition de changement de nom) de l'équipe organisatrice de ces journées est le suivant : nous trouvons important de développer une réflexion plus globale contre toutes les discriminations, au-delà du nécessaire combat contre le sexisme, dans la communauté mathématique. Cette dernière doit être exigeante avec elle-même et prendre conscience de l'homophobie, de la transphobie, du racisme et du validisme omniprésents dans nos laboratoires, en écoutant d'abord les personnes concernées et leurs histoires, et en mettant en place des actions systémiques pour prévenir les discriminations et s'y opposer quand elles ont lieu. La lutte contre le sexisme n'en sera que plus efficace.

La flamme des Journées a été passée à Frank Loray, directeur de recherche CNRS en géométrie, membre du laboratoire IRMAR, qui fera partie de l'équipe organisatrice en 2025, à Rennes !

Médiation féministe

Le livre *Matheuses*, sorti en janvier 2024, est le fruit d'une collaboration entre une sociologue, une graphiste médiatrice et une mathématicienne, et raconte les résultats d'une enquête sociologique menée par Clémence Perronnet et Alice Pavie pendant deux éditions du stage *Cigales* en 2021/22. Un chapitre du livre est consacré à la question de l'intérêt des stages non mixtes pour lutter contre les inégalités en mathématiques. Il apporte des réponses aux questions qu'on pourrait se poser sur de telles initiatives. Est-ce que de tels stages sont utiles pour accompagner les filles dans leur intérêt pour les mathématiques ? Créent-ils des vocations ? Comment éviter la pédagogie sexiste ?

Plusieurs initiatives amies ont émergé sur un modèle similaire aux *Cigales* depuis 2023 : une semaine de stage d'initiation à la recherche, en *non-mixité*, avec des moments partagés informels entre participantes et chercheuses (dans la suite, entre parenthèses, les laboratoires à l'initiative de l'action, la date du premier stage et l'équipe organisatrice) :

– *Les Cigales* (Université Aix-Marseille ; 2019 ; Nicolas Bedaride, Julien Cassaigne, Pascal Hubert, Étienne Moutot, Kevin Perrot, Carlos Ramisch) ;
– *Les Marmottes* (Université de Genève ; avril 2023 ; Sandie Moody et Elise Raphael) ;
– *Les Cigognes* (Université de Lorraine et université de Strasbourg ; octobre 2023 ; Clémentine Courtès, Marie Duflot-Kremer, Anne de Roton, Pierre Py et Samuel Tapie) ;
– *Les Fourmis* (Université de Lille ; avril 2024 ; professeur de lycée Mohamed Nassiri)
– *Les Mouettes Savantes* (Université de Rennes ; juin 2024 ; Anna Bonnet, Sophie Donnet et Marie-Pierre Étienne) pour lycéennes ;
– puis *Maths C pour L* (SMF ; février 2023 ; coordonné par Fabien Durand) pour les étudiantes en licence ;
– et *Lectures Sophie Kowalevski* (Université d'Angers et bientôt université d'Orléans ; 2021 ; Nicolas Raymond et Susanna Zimmermann, et bientôt Sandrine Grellier) pour les étudiantes en master. La différence des *Lectures* est qu'elles se passent en mixité, les étudiants sont aussi bienvenus, à la limite de 50 %.

Le but de l'exposé était d'abord de présenter ces initiatives et de transmettre les messages clés des équipes organisatrices.

En voici quelques messages, avec des courts commentaires :

– « *On ne se rend pas bien compte des bienfaits de la non-mixité féminine avant d'avoir essayé. C'est très surprenant et agréable...* » (Élise Raphael, *Marmottes*) Les filles apprécient la non-mixité des stages parce qu'elles se sentent soutenues par le stage qui reconnaît explicitement les injustices faites aux femmes ; puis, elles ne se sentent plus seules dans leur envie de faire les maths (ayant choisi la spécialité maths, elles se retrouvent en minorité écrasante) ; enfin, elles se sentent plus en sécurité sans la présence des garçons. Pourtant, vigilance ! Clémence Perronnet, dans « Matheuses », pointe deux écueils à l'organisation de tels stages : *« supposer que les filles ont naturellement un rapport spécifique aux mathématiques ou à l'informatique (intuition, dégoût de la technique, refus de la compétition, goût pour l'art...) car cela renforce les inégalités ou encore avoir l'illusion que la non-mixité suspend tous les rapports de domination. »*

– *« Nous voulions toucher les filles qui ne sont pas spontanément attirées par les maths pour les inciter à poursuivre les mathématiques en spécialité jusqu'au bac à minima, quel que soit le domaine de sciences qu'elles veuillent aborder. L'écologie et l'environnement sont des domaines plus investis par les filles que les mathématiques et l'informatique (et c'est aussi les domaines des organisatrices du stage) donc il nous semble que nous pouvons les convaincre de faire des maths comme un outil au service d'autres questions qui les intéressent. Il était important pour nous de casser l'aspect monodisciplinaire. Nous avons adopté une posture de chercheuse en écologie pour identifier une question (quel est le bilan carbone de notre alimentation par exemple) et mobilisé des outils maths-info pour y répondre. Il nous semble que c'est une approche qui est nouvelle pour des lycéennes. »* (Marie-Pierre Étienne) Chaque stage est différent et est au goût et à l'image de ses organisateurs et organisatrices. Restons conscientes du fait que la manière de répondre des organisatrices à la question : « Dans quel but faire des maths ? » joue beaucoup sur le fait d'y adhérer ou pas par les participantes. Le leitmotiv « les maths pour les maths (ou pour leur beauté intrinsèque) » ne sera accepté que par une poignée de participantes.

– L'exclusion sociale et raciale continue à s'opérer dans les groupes féminins. *« Les jeunes filles racisées, minoritaires, restent à l'écart du groupe. »* (Marie-Pierre Étienne, *Mouettes*) Il est important de ne pas oublier que la mixité dans le sens de la rencontre et du mélange social ne va pas forcément de soi même, surtout si le groupe est hétérogène. Il est important que les encadrant·es de tels stages soient sensibilisé·es (et, au mieux, formé·es) aux inégalités de genre mais aussi de classe et de race. Mohamed Nassiri (*Fourmis*), partage : *« L'action contre les inégalités de genre ET sociales est le cœur des Fourmis. La sélection se passe sur des critères sociaux : boursières, quartiers politique de la ville, zones rurales, etc. L'impact est plus fort car elles se sentent considérées et pour une fois (ou bien de rares fois), on fait attention à elles, à leur situation. »* Le même choix a été fait pour les stages Maths C pour L : *« Cela touche non seulement les filles mais également les classes sociales éloignées des sciences. C'est à mon avis d'égale importance par rapport au problème de parité. J'aime bien rappeler qu'il n y a eu que 6 femmes présidentes de la SMF mais que 3 présidentes ou présidents qui n'étaient ni d'une ÉNS ni de Polytechnique. »* (Fabien Durand, *Maths C pour L*)

L'importance de la formation pour les équipes organisatrices est inestimable. De nombreuses associations proposent des actions de sensibilisation aux discriminations. Nombreuses aussi sont les chercheuses (dont Marianne Blanchard, Christine Fontanini, Nicky Le Feuvre, Chantal Morley, Sophie Orange, Isabelle Régner, Clémence Perronnet,...) ainsi que des formatrices indépendantes (Institut ÉgaliGone, Groupe Egae) qui pourraient intervenir sur ces sujets dans le cadre d'une formation ou d'une conférence. Pourtant, il me semble que nous ne pouvons pas compter sur les autres (même spécialistes !) pour nous donner une feuille de route qu'on pourrait appliquer – il est nécessaire de commencer par écouter les personnes discriminées au sein de la communauté, ce sont elles qui peuvent nous apprendre le plus sur ce qui est à changer. Nos actions de médiation suivront et changeront avec nous.

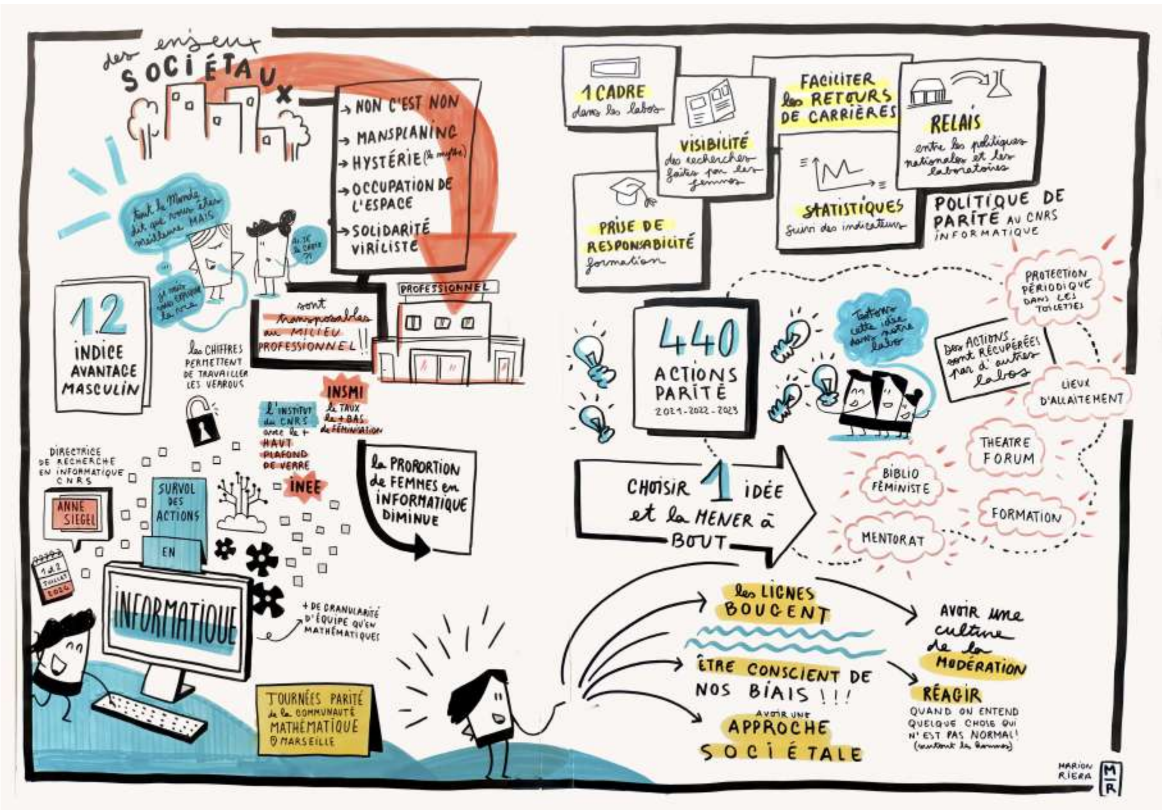
Survol des actions de la politique d'Égalité F/H de CNRS Sciences Informatiques

Anne Siegel a d'abord insisté sur la complexité du sujet des inégalités (les raisons étant multifactorielles – institutionnelles, sociétales et individuelles) et sur le fait que l'analyse de terrain a montré que dans les différents laboratoires de CNRS Sciences Informatiques, les problématiques étaient *très différentes*. La manière de structurer l'action au CNRS Sciences Informatiques a été de partir de la réalité des laboratoires et de soutenir une politique volontaire au niveau local (ou se situe le cœur de l'action), coordonnée par la Cellule Parité-Égalité du CNRS Sciences Informatiques. Cette cellule anime le réseau de référentes et référents (avec notamment une rencontre annuelle de toutes et tous), soutient les actions financièrement à la hauteur de 75K€ par an mais surtout est une présence constante auprès de référent·es pour les soutenir et les informer. Concrètement, les référent·es appellent un·e des membres de la cellule pour poser leurs questions et/ou raconter leurs peines, et trouvent toujours du soutien, de la présence et du conseil (juridique, administratif, humain). Les actions locales sont présentées dans le *Livret des actions parité* qui contient une myriade d'idées concrètes (si vous souhaitez agir contre les inégalités dans votre laboratoire mais ne savez pas par où commencer... ce livret peut être une source d'inspiration !). Le livret est accessible sur la page web de la Cellule Parité-Égalité de CNRS Sciences Informatiques [5], avec de nombreuses autres informations comme le document sur l'accompagnement des interruptions d'activité, le tableau des bonnes pratiques issues de la communauté, et de nombreux indicateurs et outils au niveau national. L'exposé d'Anne Siegel fourmillait de bonnes idées, reflétant un travail approfondi sur plusieurs années.

En voici quelques unes.

– Il y a quatre échelles de compréhension et de possible action contre les discriminations : un volet histoire et politique ; celui des relations entre individus ; celui des dynamiques de groupe ; et, enfin, la pression individuelle. Il est intéressant de travailler sur chacun de ces volets.
– Concernant les dynamiques de groupe sexistes dans les laboratoires, l'enjeu n'est pas de changer l'attitude de quelques hommes (minoritaires) qui sont explicitement et violemment sexistes mais plutôt les autres, ceux qui ne font rien. Pour les listes de diffusion, l'importance de modérateur·ices est cruciale pour éviter les pugilats. Si une liste de diffusion pour discuter de parité est ouverte, alors une « grande gueule » va l'emporter sur tout le monde. Un·e modérateur·ice va pouvoir filtrer et répondre.

Fresque de Marion Riera retraçant l'exposé d'Anne Siegel



5. Le lien : `https://www.ins2i.cnrs.fr/fr/parite-egalite-femmes-hommes`.

– Anne Siegel a présenté les chiffres : il y a 22% de femmes parmi les personnels enseignants-chercheurs et chercheurs en informatique, le principal verrou de la carrière d'une jeune chercheuse étant le recrutement en cr (chargée de recherche), et d'une enseignante-chercheuse, le passage en professeure. En effet, ce n'est pas parce qu'on règle le problème du flux entrant (femmes qui commencent la recherche) qu'on règle les problèmes de flux interne (progression de carrière).
  Pour encourager le changement, il a été proposé de suivre l'indice d'avantage masculin *par laboratoire*. L'indice d'avantage masculin est défini comme le ratio entre la proportion de rang A hommes parmi les chercheurs/enseignants-chercheurs hommes et la proportion de rang A femmes parmi les chercheuses/enseignantes-chercheuses. En avril 2023, cet indice pour cnrs Sciences Informatiques est à 1,2 (et à 0,93 pour les personnels cnrs). J'ai calculé cet indice pour les sections 25 et 26 de cnu (Conseil National des Universités) ainsi que le cnrs en me basant sur les données de 2021 présentées par Laurence Broze dans son exposé à la Journée Parité en 2023. On obtient un indice d'avantage masculin à 2 en cnu25 (Mathématiques) et à 1,7 en cnu26 (Mathématiques appliquées et applications des mathématiques). Pour les deux sections cumulées, cet indice est à 1,8. Bien sûr, le sexisme au travail ne se mesure pas avec un chiffre mais si on voulait le faire... ça aurait pu être celui-là ! Au cnrs, cet indice est à 0,4, avec 10% de femmes dr et 4% d'hommes dr. La cellule Parité-Égalité du cnrs Sciences Informatiques renouvelle régulièrement la *grille des laboratoires en fonction de l'indice d'avantage masculin* (tous les deux ans). Il y a des difficultés techniques à mettre cette grille en place mais rien d'insurmontable ! Au cnrs Sciences Informatiques, un atelier a été mis en place pour réussir à extraire ces données. Un des points abordés pendant l'atelier a été la question du contexte règlementaire permettant de réaliser des analyses de données sur des enjeux de parité et d'égalité à l'échelle d'un laboratoire. La conclusion de l'atelier est que, dans le cadre du respect du règlement général sur la protection des données (rgpd), les analyses doivent être réalisées après avoir préalablement envoyé un mail à l'ensemble du personnel du laboratoire pour les informer de la démarche en cours et leur permettre de demander à retirer les informations les concernant des analyses. Anne Siegel a précisé la pression qu'une telle grille permet d'exercer sur la direction d'unité qui fait avancer la situation réelle des chercheuses – aucun directeur ni directrice ne veut se retrouver à diriger le laboratoire le plus sexiste de l'Institut...
– En ce qui concerne les freins au niveau individuel, la formation « penser sa carrière » est proposée aux chercheuses et enseignantes-chercheuses pour, notamment, questionner la proportion des responsabilités en matière d'organisation par rapport aux responsabilités scientifiques et activités de recherche dans les carrières, et équilibrer cela (Apprendre le fameux « Savoir dire non »). La maternité représente un réel frein à la carrière des chercheuses, un dispositif mis en place est l'accompagnement individuel d'une chercheuse après le retour de congé maternité : certaines demandent une enveloppe pour un voyage scientifique, certaines de l'aide à l'accompagnement de leurs doctorant·es pendant leur absence... un soutien sur mesure et sur demande, avec 1 à 2 chercheuses par an accompagnées. Enfin, 13 laboratoires de cnrs Sciences Informatiques ont une salle d'allaitement. Je ne connais aucun laboratoire de l'insmi (Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions) qui en a une... dites-moi si je me trompe ?

Enfin, Anne Siegel a fini son exposé en parlant de l'importance de la mise en valeur des travaux et parcours de femmes dans nos laboratoires. Elle a raconté l'aventure des *Décodeuses du Numérique*, une bande dessinée[6] racontant 12 portraits de chercheuses, enseignantes-chercheuses et ingénieures dans les sciences du numérique, croquées par le crayon de Léa Castor. Une des héroïnes de cette bd est Emmanuelle Kristensen, ingénieure de recherche grenobloise. Elle partage, grâce à un programme d'assistance vocale, dans une vidéo interview pour *les Décodeuses*, qu'avant même de penser au sexisme, elle avait une autre discrimination à combattre en premier – le validisme. Cela permet de relativiser nos peines et nos colères, et de se rendre compte à quel point les combats communs, contre toutes les discriminations, sont importants (encore et encore).

6. La bd est disponible en consultation libre : `https://www.ins2i.cnrs.fr/fr/les-decodeuses-du-numerique`.

Enquête sur les freins de carrière au LIS

Cette étude présentée par Magalie Ochs était quantitative, menée par questionnaire, portant principalement sur les conditions de travail et la satisfaction des membres du LIS vis-à-vis de celles-ci. Les questions ayant pour but de rendre compte des inégalités de genre sont très importantes dans l'enquête mais elle n'a pas été présentée comme cela aux membres du laboratoire (ce qui a permis un bon taux de réponses de la part des chercheurs hommes). Le rapport très fourni de l'enquête est accessible en ligne sur le site du comité parité du LIS.

Le questionnaire, diffusé sur les adresses mail professionnelles, était composé de sept thématiques : rôles et activités professionnelles, satisfaction des conditions de travail, conciliation vie professionnelle et vie privée, relations interpersonnelles sur le lieu de travail, représentations et opinions sur l'égalité professionnelle, situation de harcèlement au travail et profil sociodémographique. La thématique sur le harcèlement a été rendue volontairement optionnelle, afin de ne pas décourager les individus ne souhaitant pas y répondre de poursuivre le questionnaire.

Le taux de réponse a été de 29% grâce aux nombreuses relances de la direction. Le message principal de Magalie Ochs est le suivant : si vous voulez faire une telle enquête au sein de votre laboratoire, vous pouvez adapter l'enquête du LIS qui est en accès libre sur Internet [7]. N'hésitez pas à découvrir aussi les slides de l'exposé de Magalie Ochs sur le site des Journées Parités qui présentent bien en détail la démarche à suivre. Ces slides sont si bien fournis que le compte rendu serait une simple répétition... N'hésitez pas à adapter cette enquête qualitative à votre laboratoire ! Pourtant, il reste important que ça soit fait par une personne formée en sociologie, psychologie sociale, DataScience ou en sciences cognitives. Une manière de le faire est de proposer une offre de stage de M1 ou de M2 pour mener une telle enquête, l'approfondir, et – surtout – agir ensuite en fonction des résultats obtenus, en ciblant les mesures les plus urgentes à adapter pour votre laboratoire.

Lectures féministes

Située entre Notre-Dame de la Garde, le Vieux Port et la Corniche, Pantagruel est une librairie de quartier indépendante et généraliste qui se distingue par son engagement dans les débats actuels, accordant une attention particulière aux thématiques sociales et féministes. Voici comment les libraires se présentent elles-mêmes : *La librairie indépendante marseillaise Pantagruel a soufflé la semaine dernière ses huit bougies avec fierté ! Huit ans pendant lesquels l'équipe des 5 Pantagruelles s'est attelée à devenir un lieu d'échange et d'animation culturelle du 7^e^ arrondissement de Marseille avant un simple commerce de vente de livres. Nous sommes animées par l'idée d'offrir une diversité de livres et de donner à chacun·e la possibilité de s'aventurer hors de ses sentiers battus littéraires, d'avoir l'opportunité d'entendre des auteurices et des éditeurices parler de leur travail et d'être accueilli·e dans un lieu vivant et chaleureux. Nous nous voulons féministes, inclusives, antiracistes mais surtout indépendantes et ouvertes, et ce dans tous nos rayons.* Pour nos Journées, Émilie Berto, libraire, a présenté une sélection d'ouvrages soigneusement choisis. La sélection se voulait un choix non exhaustif à la fois autour de la place des femmes dans le monde scientifique, avec notamment des ouvrages sur des femmes scientifiques invisibilisées mais également autour du féminisme. Voici quelques livres présentés :

– *Vivre une vie féministe* de Sara Ahmed (Hors d'Atteinte, 2024) : Que veut dire vivre une vie féministe ? Quelles en sont les implications, les difficultés, les conséquences ? Pour y répondre, Sara Ahmed, chercheuse britannique, figure majeure de la phénoménologie queer, explore les sensations et les déclics qui amènent à devenir féministe, la difficulté d'imposer une « volonté à soi » déviant d'une conception normée du bonheur, les liens qu'entretient la théorie féministe avec l'ordinaire de la vie quotidienne... Convoquant notamment Audre Lorde et bell hooks, elle nous livre une trousse de survie féministe et nous propose de devenir des rabat-joies épanouies ;

– *Comment devenir moins con en dix étapes* de Quentin Delval (Hors d'Atteinte, 2023) : Loin d'un traité sur la masculinité ou la nécessité de ne pas être viril, d'une leçon de

7. Voir `https://www.ins2i.cnrs.fr/fr/indicateurs-et-mesures-relatifs-aux-enjeux-de-parite-et-degalite`, dans l'onglet Ressource *Exemple de questionnaire à importer dans Limesurvey ou Google Forms*.

morale culpabilisante ou d'une nouvelle théorie promettant de révolutionner les relations femmes-hommes, ce livre parle de situations concrètes et quotidiennes que nous traversons tous et propose des solutions ambitieuses et réalistes. Quentin Delval a notamment travaillé comme formateur en milieu carcéral, chercheur universitaire et au sein de divers organismes promouvant la diversité et l'inclusion. Depuis plusieurs années, il tente en toute humilité de devenir moins con ;

– *Les grandes oubliées : pourquoi l'Histoire a effacé les femmes ?* de Titou Lecoq (L'Iconoclaste, 2021) : De tout temps, les femmes ont agi. Elles ont régné, écrit, milité, créé, combattu, crié. Et pourtant elles sont pour la plupart absentes des manuels d'Histoire. Pourquoi ce grand oubli ? De l'âge des cavernes jusqu'à nos jours, Titiou Lecoq s'appuie sur les découvertes les plus récentes pour analyser les mécanismes de cette vision biaisée de l'Histoire. Elle redonne vie à des visages effacés, raconte ces invisibles, si nombreuses, qui ont modifié le monde ;
– *Manifeste d'une femme trans et autres textes* de Julia Serrano (Cambourakis, 2020) : Dans ce recueil d'essais, Julia Serano, femme trans et activiste, analyse les différents mécanismes du privilège cissexuel, ainsi que le sexisme, la misogynie et la transphobie qui imprègnent les représentations des femmes trans dans les médias, les arts et l'université. Ses analyses offrent des perspectives nouvelles pour interpréter les problématiques vécues par les femmes trans en continuité avec les théories, les désaccords et les solidarités développées au sein du mouvement féministe, et donnent des clés pour construire un féminisme par, pour et avec toutes les femmes, quelles que soient leurs histoires et leurs parcours.

Il y a eu aussi *Sofia Kovalevskaïa* d'Alice Milani (Cambourakis, 2023) en BD, *Ada ou la beauté des nombres* de Catherine Dufour (Fayard, 2019), *Patriartech, les nouvelles technologies au service du vieux monde* de Marion Olhagan Lagan (Hors d'Atteinte, 2024), *Sorcières, sages-femmes et infirmières : une histoire des femmes soignantes* de Barbara Ehrenreich et Deirdre English (Cambourakis, 2023), *Ça commence avec la boule au ventre* d'Élise Fabing (Les Arènes, 2024),...

Voilà déjà une belle liste de lectures que je voudrais continuer en partageant une aussi intéressante sélection proposée par les participant·es de la rencontre via leurs lectures personnelles :

– *La politique du voile* de Joan Scott : un livre d'une historienne spécialiste du mouvement ouvrier français et de l'histoire des femmes dans une perspective de genre, professeure à l'Institute for Advanced Study de Princeton. Elle a publié en 1986 un article fondateur « Gender : a useful category of historical analysis » qui définit le genre comme une boîte à outils d'analyse historique. Cet article a beaucoup contribué à l'émergence du domaine de l'histoire des femmes et du genre. Comme le dit son autrice à propos de son ouvrage publié en 2007 (et traduit en français seulement 10 ans plus tard!) , « *Ce livre ne traite pas des musulmans de France : il porte sur la perception dominante des musulmans dans le paysage français. Je m'intéresse à la manière dont le voile est devenu un écran sur lequel sont projetés des images d'étrangeté et des fantasmes de dangerosité – dangerosité pour le tissu social français et pour l'avenir de la nation républicaine.* » Une œuvre passionnante et éclairante sur le débat autour de la notion de laïcité et des politiques qui lui sont associées ;
– *Les luttes fécondes : Libérer le désir en amour et en politique* de Catherine Dorion : en amour comme en politique, le désir initial qui nous pousse à nous unir finit toujours par être contenu dans un cadre qui souvent l'éteint. Le couple. Nos institutions politiques. Les élections. Dans ce livre enthousiasmant sorti cette année, Catherine Dorion dessine la possibilité d'un engagement joyeux et fécond, qu'il soit collectif ou intime ;
– les bandes dessinées qui traitent de l'amour, l'émancipation et la sororité *Clémence en colère* et *Adieu triste amour* de Mirion Malle ;
– puis un classique *Institutions de physique* d'Émilie du Châtelet, une traduction majeure des *Principia* de Newton ;
– *Je suis une fille sans histoire* d'Alice Zeniter : « Une bonne histoire, aujourd'hui encore, c'est souvent l'histoire d'un mec qui fait des trucs. Et si ça peut être un peu violent, si ça peut inclure de la viande, une carabine et des lances, c'est mieux... » Mais quelle place accorde-t-on dans ces histoires aux personnages féminins et à la représentation de leurs corps ? Dans son ouvrage publié en 2021, Alice Zeniter déconstruit le modèle du héros et révèle la manière dont on façonne les grands récits

depuis l'Antiquité. De la littérature au discours politique, elle nous raconte avec humour et lucidité les rouages de la fabrique des histoires et le pouvoir de la fiction. ;

– *Hilaria : récits intimes pour un féminisme révolutionnaire* d'Irene : Croisant histoires familiales, théories politiques et faits historiques, Irene tire ici de la vie d'Hilaria, son aïeule, des armes pour outiller les mouvements féministes contemporains. Hilaria est une femme du prolétariat basque, veuve, qui élève seule ses enfants dans les années 30. Comme le présentent les magnifiques éditions Divergences, *Puisque la démocratisation d'un féminisme réformiste et libéral ne nous sera d'aucun secours, c'est au féminisme d'Hilaria qu'il importe de revenir, un féminisme populaire qui se dit tout à la fois anarchiste, antifasciste, anticapitaliste et anticarcéral.* Un récit intime et théorique qui fait converger les luttes ;
– et, enfin, *La Déesse des petites victoires* de Yannick Grannec : paru en 2012 aux éditions Anne Carrière, ce livre raconte la vie et l'œuvre de Kurt Gödel, du point de vue de sa femme. Mathématiquement solide et passionnant.

Si vous avez déjà tout lu dans cette liste, venez aux prochaines Journées, pour donner des conseils (que de livres) ou écouter ceux des autres !

Table ronde sur les enjeux LGBT+ (texte collectif)

Dans le compte-rendu de cette partie, nous avons décidé de transmettre les messages et les témoignages principaux dégagés au cours de la discussion sans pour autant les associer aux personnes qui les ont présentées. Nous avons abouti à ce texte collectif.

Les discriminations peuvent être directes (insultes, agressions, etc.) ou apparaître dans des attitudes ou propos implicites et insidieux, le but étant toujours d'exclure les personnes LGBT+ d'un champ (en l'occurrence professionnel). Les LGBT-phobies se reconnaissent par leurs effets sur les personnes concernées. Voici donc le premier ingrédient d'une potion magique anti-LGBT-phobies (même si on sait bien que la potion magique n'existe pas ! Par contre, ce qui existe, ce sont les efforts, l'intention constante de faire attention aux autres) : écouter les personnes LGBT+, sans chercher à minimiser d'une façon ou d'une autre les violences ou micro-agressions de toutes formes qu'elles peuvent subir. Les membres permanents des laboratoires peuvent notamment avoir un rôle particulièrement important pour défendre les plus précaires. Il y a par ailleurs un réel besoin de soutien des universités et de leurs représentant·es sous la forme d'une condamnation explicite et officielle des propos ou comportements LGBT-phobes. Les commissions parité/égalité pourraient d'ailleurs considérer, de façon concertée avec leurs universités, l'organisation de formations visant à sensibiliser les collègues aux problèmes de discrimination et les aider à les percevoir.

Ensuite, il ne faut jamais oublier que les discriminations dans le milieu professionnel font écho à l'ambiance politique et sociale. Cette ambiance a aussi des effets dans les couples et les cercles de proches : combien de soirées passées à parler d'une insulte reçue dans la rue ? Des expressions classiques du déni sont : « Tout va bien » ou « Ça pourrait être pire » ou « Moi, homophobe/transphobe/-raciste, sûrement pas ! Mais... [Le lectorat est ici invité à imaginer des propos insultants ou violents.] ». La récente vague transphobe est un rappel brutal à la réalité. Elle s'inscrit dans l'histoire des LGBT-phobies (qu'on se souvienne des oppositions épouvantables au PACS ou au mariage pour tous) ; aujourd'hui, les *mêmes* rhétoriques haineuses sont recyclées sans vergogne pour violenter les personnes trans. De nombreux·ses collègues LGBT+ ont été exposé·es et sont encore exposé·es à ces discours destructeurs : dans leur enfance, leur adolescence ou à l'âge adulte. Voici un deuxième ingrédient pour la potion magique : soutenir les personnes LGBT+ dans les laboratoires, particulièrement quand elles abordent directement ces questions (notamment, mais pas seulement, par leur engagement militant), s'interroger sur les attitudes et comportements les visant, car l'université n'est pas imperméable aux haines qui traversent la société [8].

Dans le cadre d'une éducation trans-inclusive, et particulièrement dans la situation actuelle, il s'agit également de se renseigner activement et de comprendre en quoi les éléments transphobes dénoncés dans les discours des médias le sont effectivement, et ne pas acquérir cette posture seulement en surface. À ce titre, nous recommandons la lecture de l'article de la Fondation Jean Jaurès

8. N'hésitez pas à feuilleter les rapports annuels de SOS Homophobie : https://www.sos-homophobie.org/informer/rapport-annuel-lgbtiphobies.

La fabrique des peurs : comment protéger l'enfance d'une vague transphobe ? co-signé en mai 2024 par Flora Bolter et Denis Quinqueton, de l'Observatoire LGBTI+ de la Fondation, ainsi que par Mika Alison, Nathanaël Bignon et M. A. Mahoudeau. Le lecteur ou la lectrice souhaitant commencer à s'intéresser aux questions trans peut également consulter les bases de l'excellent Wikitrans [9]. Des éléments plus détaillés démontant les rhétoriques et argumentaires transphobes peuvent notamment être trouvés sur le site de l'association féministe Toutes des Femmes [10].

Concrètement, il s'agit de prendre conscience du mécanisme de genrage appris depuis l'enfance, celui d'assigner un genre et des pronoms aux individus autour de nous en les voyant – un processus qui s'opère chez tout le monde, et la source de beaucoup de violences. C'est une étape nécessaire avant de chercher activement à le diminuer, que ce soit en portant un badge avec ses pronoms choisis, en mettant à disposition et en expliquant l'importance de tels badges dans des réunions publiques, en attendant de voir comment une personne se genre avant de la genrer nous-mêmes, et plus largement en étant conscient·e qu'on ne peut pas présumer du genre de quelqu'un. Il est particulièrement important de faire attention à tout cela avec nos étudiant·es. Cela peut passer par

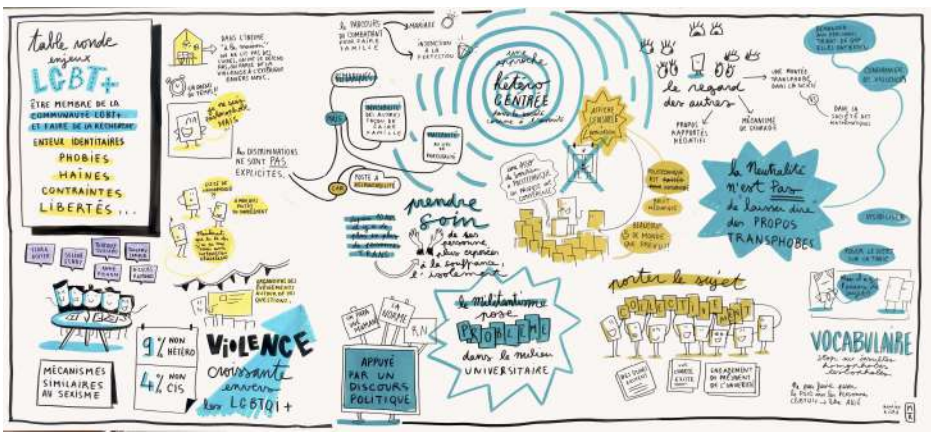
1. une déclaration en début d'année condamnant sans ambiguïté tout acte sexiste, LGBT-phobe, raciste, etc.,
2. se poser en oreille attentive à l'écoute de leurs besoins (tout en respectant leur vie privée et sans chercher à les singulariser ou à les exposer),
3. porter des badges-pronoms ou des badges queer pour signaler son écoute sur ces sujets (et activement agir en allié·e derrière !),
4. se poser en figure bienveillante, tout en respectant les limites des étudiant·es.

Il est important de toujours se remettre en question, car on ne finit jamais complètement d'avoir des postures sexistes/racistes/homophobes/transphobes/etc. quand on vit dans une société qui nous y immerge, voire nous y incite, de façon structurelle. Comme tout·e chercheur·e le sait, on gagne à apprendre de ses erreurs et à assimiler pourquoi elles en sont ; et cet apprentissage ne doit pas seulement se faire en sollicitant les personnes concernées par ces violences (souvent déjà épuisées d'être responsables de cet apprentissage autour d'elles au quotidien), même si avoir leurs retours dans une situation adéquate peut aussi s'avérer précieux.

Enfin, on peut croire que la joie est l'unique force vraiment motrice dans une existence humaine. Sans joie, on ne peut arriver à rien. Alors, incorporons aussi la joie dans la potion magique : à l'instar de certains de nos voisins européens, organisons en France une grande conférence LGBT+ en maths – la première – célébrant la diversité des maths et des personnes qui en font.

Écoute, soutien et joie : tout le monde y gagnera. Et certaines soirées ou heures de travail ne seront plus occupées à gérer les conséquences d'une insondable bêtise. Elles seront occupées à la lecture, à l'écriture, à la musique, au repos... ou aux maths !

Fresque de Marion Riera retraçant la table ronde



9. Lien web : https://wikitrans.co/intro/.
10. Lien web : https://toutesdesfemmes.fr/ressources/.

Olga Paris-Romaskevich

cnrs, Institut Camille Jordan
olga.romaskevich@math.cnrs.fr

Olga Paris-Romaskevich est chargée de recherche au cnrs, membre du conseil scientifique de l'insmi. Ses recherches portent sur les systèmes dynamiques en lien avec la physique, d'abord chaotiques et depuis quelques années, d'entropie nulle, notamment les billards dans les pavages.

L'essentiel du travail de l'organisation de ces Journées a été fait par Évelyne Henri et Anne Pichon sur place à Marseille. Le succès de ces Journées leur doit tout. Magalie Ochs a contribué par son regard expérimenté pour équilibrer le programme des Journées en amont. Peter Haïssinsky a été d'une grande aide pour le suivi budgétaire des journées. Claire Lacour et Alain Prignet ont beaucoup aidé par leur travail sans faille sur le site web de ces Journées. Je les remercie beaucoup toutes et tous. Je remercie Anne Pichon d'avoir rédigé la partie concernant le Théâtre-Forum, et Emilie Berto d'avoir présenté par écrit la sélection de livres de sa librairie, ainsi que le collectif des auteurs et autrices (Solène Esnay, Thibault Juillard et Nicolas Raymond) pour la rédaction collective de la dernière section de cet article, et pour leurs relectures et retours.

L'équipe d'organisation des Journées voudrait remercier toutes les oratrices et orateurs pour leurs exposés remarquables et les participant·es de la journée pour leurs interventions constructives. Nous remercions l'insmi, l'I2M et la frumam (Fédération de Recherche des Unités de Mathématiques de Marseille) pour le soutien financier des Journées. Merci à *femmes et mathématiques* pour leur soutien en communication et nos combats communs.

… les Algorithmes du Rubik's cube

• Y. Monbru

1. Premiers pas

1.1 – Avertissement

Ce casse-tête qui traîne dans la plupart des greniers est l'objet de bien des fantasmes. Je ne compte plus le nombre de gens avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger quelques mots parce qu'ils voulaient une démonstration de sa résolution après m'avoir vu jouer avec dans la rue.

Ainsi afin de ne pas vous induire en erreur, je vous le dis tout de suite, si vous voulez apprendre à le résoudre vous n'êtes pas au bon endroit. En général les gens qui savent le résoudre connaissent par cœur divers algorithmes avec des effets intéressants (par exemple échanger deux coins, les retourner) et ensuite on peut résoudre le Rubik's Cube en les mettant bout à bout.

Pour pouvoir les apprendre par cœur, il faut donc qu'ils soient relativement courts et performants. Je dirais, d'expérience, que le temps que l'on met à résoudre le Rubik's Cube dépend surtout de la qualité des algorithmes que l'on connait. Personnellement j'ai appris avec le livre [3] qui propose différents niveaux de qualité et j'en profite pour remercier son auteur, mais n'importe quel site internet contient une liste raisonnable à apprendre par cœur.

D'ailleurs une des (la ?) premières résolutions mathématiques [2] donnée par Morwen B. Thistlethwaite (nous y reviendrons) n'est pas utilisable en pratique. Le travail qui consiste à optimiser la méthode de résolution pour la rendre utilisable par un humain (avec juste sa mémoire) est donc distinct de celui qui consiste à donner un cadre pour résoudre le cube.

Mon objectif ici est de comprendre comment on aborde le problème d'un point de vue mathématique et ensuite il restera du travail d'ingénieurie fine afin d'optimiser tout cela. Si vous êtes toujours là, allons-y !

1.2 – Simplification

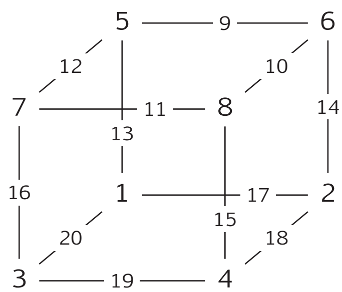
La première chose à faire est de se débarrasser de l'information inutile, cela veut dire trouver une formulation du problème dans laquelle toutes les données de l'énoncé sont utiles à sa résolution, mais surtout dans laquelle on n'est pas induit en erreur par certaines autres. En particulier dans le cas qui nous occupe la plus grosse distraction est le fait que le casse-tête soit un objet en $3D$.

La question qui se pose est donc : que cherche-t-on à faire si on ne parle pas d'objet $3D$? La réponse que je propose d'explorer est de dire qu'on parle de permutations. Je m'explique : nous avons dans les mains des objets (les coins, les arêtes et la pièce centrale qui connecte les six faces) mobiles les uns par rapport aux autres ; on peut faire des actions (tourner des faces) pour échanger certains objets de place avec d'autres et dans ce cadre on cherche à savoir quels sont les effets globaux que l'on peut faire.

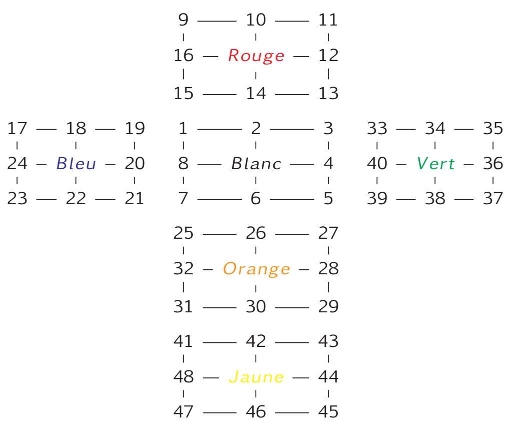
Ce qu'il y a de bien avec les permutations, c'est qu'on peut les composer (en faire une puis en faire une autre), on peut les défaire et on peut aussi ne rien faire. On dit alors que les permutations forment un *groupe*. Une fois que l'on adopte ce point de vue, il n'est plus nécessaire de se rappeler la nature exacte des morceaux du cube, mais simplement qu'il y a n objets et la façon dont on peut les permuter. Et pour ce qui est d'avoir n objets, il y a en mathématiques un choix que l'on privilégie : les n premiers nombres entiers $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. On fait ensuite correspondre nos objets aux entiers et le problème sera formulé en termes du groupe des permutations de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

1.3 – Modélisation

Avant de se lancer dans l'étude de ce groupe, nous devons parler du nombre n. Notre première idée était de donner un numéro à chaque morceau du cube (en supposant la pièce centrale fixe), peu importe la numérotation mais on peut faire comme suit :



Par exemple, sur le dessin ci-dessus, l'action de tourner la face du haut (dans le sens horaire) envoie l'entier 5 sur l'entier 6, l'entier 6 sur l'entier 8, l'entier 8 sur l'entier 7, l'entier 7 sur l'entier 5, l'entier 9 sur l'entier 10, l'entier 10 sur l'entier 11, l'entier 11 sur l'entier 12, et l'entier 12 sur l'entier 9 (et ne touche pas aux autres). L'idée de cette numérotation (qui est en réalité plus profonde qu'elle n'en a l'air, mais nous y reviendrons) ne suffit pourtant pas car elle ne tient pas compte de l'orientation des pièces. En effet, il ne suffit pas pour résoudre le casse-tête que le bord Bleu-Rouge soit à sa place, il faut aussi que chaque couleur soit orientée selon sa face. Une solution qui marche est de considérer comme « objets mobiles » non pas les pièces mais les étiquettes de couleurs, on peut alors numéroter comme suit le patron du cube. On rappelle que les faces centrales sont fixes.



On peut ensuite, pour chaque tour de face, détailler l'effet sur les numéros et se ramener ainsi à l'étude du groupe des permutations de 48 objets. Le problème c'est que ce groupe est gros (très très gros) et donc il est compliqué de l'étudier. Cela est rendu d'autant plus difficile (et intéressant) par le fait que toutes les permutations ne sont pas possibles en pratique sur un Rubik's cube. Par exemple on ne peut pas, sans tricher, tourner une seule arête ou un seul coin.

2. Casser le problème

Une façon de s'en sortir est alors de ne pas chercher à tout résoudre directement. On commence par résoudre une partie du casse-tête et ensuite on résout d'autres parties mais uniquement avec des mouvements qui, une fois finis, ne cassent pas ce qui a déjà été fait (pendant que l'on fait un mouvement il est inévitable de casser des choses déjà faites). Pour le faire tranquillement on va être obligé d'introduire du vocabulaire et des notations.

2.1 – Vocabulaire

Lorsqu'on étudie un groupe, on rencontre naturellement des parties de ce groupe qui sont elles-mêmes des groupes. Une partie qui contient aussi l'opération « ne rien faire » les compositions de deux opérations de cette partie tout comme l'opération « défaire », est appelée un sous-groupe (sous-entendu du groupe que l'on manipule).

- On notera $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de n éléments.
- Si τ et σ sont deux permutations, on notera $\tau.\sigma$ la permutation qui effectue d'abord τ puis ensuite σ. Attention, si on identifie les permutations à des fonctions cette notation ne correspond pas à la composition de fonctions. Mais traditionnellement les algorithmes pour le cube sont notés de façon à effectuer en premier ce qui est à gauche.
- Si σ est une permutation σ^{-1} sera la permutation qui « défait » ce que fait σ (on parle de l'inverse de σ) et σ^n la répétition de n fois σ.
- Et enfin si $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ et σ_k sont des permutations, on note $<\sigma_1, \ldots, \sigma_k>$ le sous-groupe des opérations que l'on peut faire avec des répétitions des σ_i et de leurs inverses (c'est un bon exercice de vérifier que c'en est un). On parlera du sous-groupe engendré par les σ_i.

On va donc être amené à étudier $\mathfrak{S}_{48}$. D'une part il faudra une façon de représenter les permutations qui soit efficace pour effectuer des calculs et ensuite il faudra étant donnée une permutation quelconque (la position de départ) trouver son inverse. Enfin il faudra décomposer cet inverse comme une suite des mouvements de bases qui sont donnés par les quarts de tour des faces. Trouver l'inverse sera relativement facile avec un bon système de calcul, mais la seconde étape est plus difficile à automatiser. On l'abordera donc de façon plus superficielle.

2.2 – Suite de groupes

Pour formaliser la résolution étape par étape, on va considérer une suite $G_1, \dots, G_k$ finie de groupes telle que : G_1 soit le groupe de toutes les permutations que l'on peut faire avec le cube, pour tout i, le groupe G_{i+1} est un sous-groupe de G_i et G_k est le groupe qui contient uniquement l'identité (*i.e.* on a résolu le cube). Une méthode de résolution consiste à expliquer comment se ramener à partir d'un élément de G_i à un élément de G_{i+1} en appliquant des permutations qui sont dans G_i.

Pour avoir une bonne méthode, il faut trouver un compromis entre la longueur de la suite et la complexité des étapes (plus k est grand plus les passages de G_i à G_{i+1} sont simples et inversement) selon que nos objectifs soient de minimiser le nombre de mouvements ou de minimiser le nombre de cas à traiter.

À titre d'exemple on va regarder la suite de Morwen B. Thistlethwaite (donnée dans [2]). On va noter A (respectivement H,B,D,G et R) la permutation qui tourne la face avant d'un quart de tour horaire (respectivement les faces haute, basse, droite, gauche et arrière). Donc par exemple A^{-1} est le quart de tour anti-horaire de la face avant.

La suite de groupes est alors définie par :
$G_1 :=< G, D, A, R, H, B >$,
$G_2 :=< G, D, A, R, H^2, B^2 >$,
$G_3 :=< G, D, A^2, R^2, H^2, B^2 >$,
$G_4 :=< G^2, D^2, A^2, R^2, H^2, B^2 >$

et $G_5 := \{1\}$. On peut donc remarquer que G_1 est le groupe de toutes les permutations valides du cube. Donc, pour passer de G_1 à G_2, on peut utiliser toutes les faces et on veut se ramener à une configuration où il ne faudra utiliser que des demi-tours pour les faces haute et basse. De même, pour passer de G_4 à G_5, on doit résoudre ce qui reste du casse-tête en utilisant uniquement des demi-tours.

Expliquer les étapes de réduction en détail est largement hors de portée de la place que nous avons ici, d'ailleurs l'objectif de cette suite était de fournir une solution, et pas forcément une qui soit agréable à manipuler ; ainsi la solution contient plusieurs pages de disjonctions de cas. Mais on va pouvoir regarder une étape d'une autre suite de groupes qui est plus simple à comprendre, pour se faire une idée.

2.3 – Exemple des coins

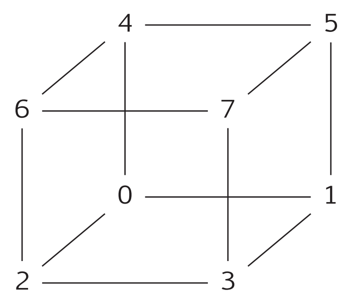
Dans une résolution proposée dans [3] on commence par positionner les coins puis les bords de deux faces opposées et enfin on termine avec la couronne centrale. La suite de groupes qui correspond à cette méthode est donc définie par $G_1 :=< G, D, A, R, H, B >$ (le groupe de toutes les permutations valides), G_2 le groupe des permutations qui ne changent pas les coins de places, G_3 le groupe des permutations qui n'échangent que les pièces de la couronne centrale et enfin G_4 le groupe qui ne contient que la permutation « ne rien faire » (quand on a terminé).

D'expérience la partie la plus difficile est de bien positionner les 8 coins les uns par rapport aux autres, ce qui reste à faire est hautement non trivial mais déjà plus facile (je trouve en tout cas). Je vais donc expliquer comment aborder l'étape des coins (bien que ce ne soit pas la façon optimale de faire, en particulier pas celle du livre) où l'on passe de G_1 à G_2.

On a donc le droit d'utiliser toutes les permutations et on cherche à atteindre une position dans laquelle tous les coins sont bien placés. Comme mentionné dans la partie 1.3 il faut tenir compte de l'orientation des coins, mais pour simplifier on se restreindra à placer les coins aux bonnes places.

Il est intéressant de remarquer que si on ne s'intéresse qu'aux coins (c'est-à-dire qu'on ne se préoccupe pas de ce que font les mouvements sur les autres pièces) il est équivalent de savoir résoudre un cube de taille $2 \times 2 \times 2$. Pour la suite on se restreindra à la résolution du cube $2 \times 2 \times 2$.

Pour simplifier encore, on peut remarquer que puisque tourner les faces induit un mouvement en $3D$ on peut choisir un bon référentiel pour réduire le nombre de mouvements possibles. Un bon choix est de se placer dans le référentiel d'un coin (auquel on donnera le numéro 0). Cela revient à considérer que ce coin est bien placé et à placer les autres par rapport à lui. On numérote donc les pièces mobiles comme suit :



Les faces que l'on peut tourner, sont donc la face haute (H), la face de droite (D) et la face avant (A). On souhaite trouver une suite de H, D et de A qui permet de commencer avec un mélange quelconque des coins et de retrouver l'ordre initial. On peut en effet montrer qu'ici tous les mélanges sont possibles, ce qui n'est pas le cas du Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$. Nous sommes maintenant prêts pour nous lancer dans l'étude du groupe des permutations.

3. Des Algorithmes

3.1 – Le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations

Définition 1. Si $a_1, \dots, a_k$ sont k entiers distincts, le k-cycle associé (que l'on note $(a_1, \dots, a_k)$) est la permutation qui envoie a_1 sur a_2, a_2 sur a_3 et ainsi de suite jusqu'à a_k qui est envoyé sur a_1.

Par exemple les transformations A, H et D sont (avec la numérotation qui précède sur les coins non orientés), $A := (6,7,3,2), H := (4,5,7,6)$ et $D := (7,5,1,3)$.

On définit le support d'une permutation comme l'ensemble des éléments qu'elle modifie, et alors, de façon remarquable, on a le théorème de décomposition suivant, qui nous permettra d'effectuer des calculs avec l'ordinateur.

Théorème 1. *Toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints.*

Une preuve rigoureuse et élégante se fait avec les actions de groupes mais on peut facilement expliquer comment construire cette décomposition en pratique. On prend une permutation σ et on regarde comment elle agit sur 1 lorsqu'on l'applique plusieurs fois : 1 est d'abord envoyé sur un entier a_2, qui est lui-même envoyé sur un autre entier a_3 et ainsi de suite. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans $\{1, \dots, n\}$, nous allons finir par trouver un k tel que $a_k = 1$. Le cycle $(1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1})$ est alors un des cycles de σ. On continue alors avec le plus petit entier qui n'est pas encore dans ce cycle. Il faut remarquer qu'il est possible que $\sigma(1) = 1$ mais ça ne change rien, on a alors un 1-cycle et on continue avec 2.

Ce qui est remarquable, c'est que les cycles à supports disjoints (*i.e.* qui ne font pas bouger les mêmes éléments) commutent deux à deux (c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on fait les deux actions ne change pas le résultat). Donc, pour savoir comment agit une permutation sur un entier, il suffit de regarder le cycle dans lequel il est écrit (à noter que souvent on ne mentionne pas les 1-cycles).

Et donc en calculant la décomposition en cycles à supports disjoints d'un produit de permutations, on peut facilement automatiser le calcul du produit. À titre d'exemple, calculons $A.H$. L'entier 1 n'est pas bougé par A ni H. L'entier 2 est envoyé sur l'entier 6 par A qui est envoyé sur l'entier 4 par H. L'entier 4 n'est pas touché par A puis est envoyé sur l'entier 5 par H. L'entier 5 n'est pas touché par A puis est envoyé sur l'entier 7 par H. L'entier 7 est envoyé sur l'entier 3 par A qui n'est pas touché par H. L'entier 3 est envoyé sur l'entier 2 par A qui n'est pas touché par H. On a exploré tous les entiers et donc on a montré que $A.H$ se décompose en $(1).(2,4,5,7,6,3)$.

De plus, je vous laisse vous convaincre que l'inverse de $(a_1, \dots, a_k)$ est $(a_1, a_k, a_{k-1}, \dots, a_3, a_2)$ et que l'inverse d'un produit $\sigma.\tau$ est $\tau^{-1}.\sigma^{-1}$ (on défait les actions dans l'ordre inverse duquel on les a faites). Ceci fait que la décomposition en cycles à support disjoints permet également de calculer facilement les inverses.

3.2 – Les commutateurs

On peut alors programmer tout ça (personnellement je l'ai fait en SAGE) et se lancer à la recherche de produits d'une suite de mouvements qui donneraient une permutation utile à la résolution du casse-tête. Intuitivement, si on veut arriver à décomposer à la main une permutation quelconque en certaines permutations remarquables (que l'on cherche à déterminer), il faut que cette permutation remarquable bouge le moin de cubes possible (pas pendant l'exécution, mais une fois effectuée). En particulier, on va vouloir obtenir des cycles avec un petit nombre d'éléments. On peut remarquer que si on fait chercher à l'ordinateur des produits naïfs, et bien, soit les calculs sont trop longs à faire, soit la suite n'est pas assez longue pour donner une permutation intéressante.

Une solution est d'explorer non pas des suites quelconques, mais de faire des suites de commutateurs. Les commutateurs sont les permutations de la forme $\sigma.\tau.\sigma^{-1}.\tau^{-1}$. On les note alors $[\sigma, \tau]$ et, dans le cas qui nous occupe ces permutations sont intéressantes parce qu'en général elles ont beaucoup de points fixes. Cela vient du fait que cette quantité mesure dans le groupe ce qui « manque » pour que τ et σ commutent, et, qu'en général, on n'en est pas très loin. À noter cependant qu'il n'y a pas vraiment de sens formel à cette affirmation. L'ordinateur trouve alors rapidement, avec des éléments de la forme $[[\sigma, \tau], \lambda]$, des 3-cycles, par exemple $[[A, D], H] = (5,7,6)$.

3.3 – Une transposition

Ce qui est remarquable c'est qu'alors en utilisant le principe du parapluie (que nous discuterons ensuite) il est possible de résoudre les coins du casse-tête. On pourrait donc passer à la section sur le principe du parapluie maintenant sauf que l'on pourrait rencontrer un problème et sa résolution nous donnerait une permutation entre deux éléments. Comme mentionné, un 2-cycle rend la résolution plus simple qu'un 3-cycle donc on va directement regarder ce cas de figure.

Si l'on commence à résoudre avec le cycle $(5,7,6)$ et le principe du parapluie, il est possible de se retrouver dans une situation où il reste deux coins à échanger, et ça on ne peut pas le faire à partir de ce 3-cycle (pour des histoires de signature). Par exemple, s'il faut échanger le 4 et le 5, ce que l'on peut remarquer, c'est que si on place le 4 à la bonne place en tournant la face du haut, dans cette situation il reste à déplacer le 5, le 7 et le 6 et on peut donc s'en sortir avec le 3-cycle que l'on a déjà. En d'autres termes, on a fabriqué la permutation $(4,5)$ en faisant $H^{-1}.[[A,D],H]$.

3.4 – Le principe du parapluie

Un 2-cycle c'est bien mais tous les 2-cycles c'est mieux. Il faut donc voir comment tous les obtenir à partir d'un seul et des mouvements A,H et D. Cette technique s'applique d'ailleurs à toute permutation (comme les 3-cycles) mais elle est plus difficile à mettre en œuvre dans le cas général. Le nom de ce principe provient du fait que, pour traverser la route sous la pluie, on se protège avec un parapluie puis, une fois que c'est fait, on retire le parapluie. Comme en parle si bien Michaël Launay dans [1] c'est un principe courant en mathématiques, et en particulier ici.

Pour comprendre comment le principe du parapluie se matérialise ici, traitons par exemple le cas de la permutation $(4,7)$. Pour ouvrir le parapluie, on place le 7 à la place du 5 avec un mouvement de la face droite (peu importe ce que ça fait au reste du cube puisque on le défera en « fermant le parapluie ») ensuite on est en position d'effectuer la permutation $(4,5)$ (« traverser la route »). Et enfin, on referme le parapluie en faisant un mouvement de la face droite dans le sens anti-horaire. De façon plus calculatoire, on a : $(4,7) = D.(4,5).D^{-1}$.

Et d'ailleurs cette formule est générale : pour σ une permutation, on a la formule

$$\sigma^{-1}.(a_1,\dots,a_k).\sigma = (\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_k))$$

qui permet (via le parapluie qu'est σ) de transformer un k−cycle en un autre k−cycle. Je vous laisse vous convaincre alors qu'on est en mesure de faire n'importe quel échange de deux coins avec cette technique, même si le σ utilisé peut être plus compliqué qu'un simple tour de face. On peut alors bien placer tous les coins. De façon artisanale on commence par bien placer le numéro 1 (on fait la permutation qui échange le cube en position 1 et l'endroit où est placé le cube qui doit aller à cette place). On fait de même avec le numéro 2 puis le numéro 3 et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les pièces soient en place. De façon plus algorithmique, on peut remarquer qu'on a la relation $(a_1,\dots,a_k) = (a_k,a_1).(a_{k-1}a_k).\dots.(a_2a_3)$ et donc si on décompose la permutation du casse-tête que l'on cherche à résoudre en cycles à supports disjoints, on obtient directement une suite de transpositions à effectuer en décomposant chaque cycle selon cette formule.

4. Conclusion

4.1 – Terminer la résolution

Une fois que les coins sont bien placés les uns par rapport aux autres, il faut régler le problème de l'orientation des coins. Pour cela, on peut chercher un algorithme qui permet de modifier l'orientation de deux coins et ensuite utiliser le principe du parapluie pour obtenir les bonnes orientations. S'il reste à la fin un coin qui n'est pas bien orienté, c'est que la position de départ n'était pas résoluble. Enfin, on peut procéder de même pour ce qui concerne le placement des bords. On numérote, on cherche un 3-cycle (il n'y a pas de transposition pour les bords) et enfin on termine avec le principe du parapluie. Simplement il ne faut s'autoriser que des algorithmes qui n'auront pas d'effet sur les positions des coins. Mais encore faut-il les trouver.

4.2 – Les cas plus compliqués

De la même façon que pour commencer la résolution du $3\times3\times3$, on peut commencer par identifier un modèle du $2\times2\times2$ puis ensuite résoudre ce qui manque, on peut dans le cas d'un $n\times n\times n$ tout résoudre en identifiant des modèles de $3 \times 3 \times 3$ ou de $4 \times 4 \times 4$. La dernière étape, qui consiste à placer les différents centres, peut se faire par une application (quand on y a réfléchi longtemps) du principe du parapluie. Cela rend la résolution des autres cubes aussi simple, quoique plus longue, que ces cas de base. D'ailleurs on peut encore pousser un peu cette approche pour la résolution des casse-têtes en forme de dodécaèdre (douze faces qui sont des pentagones) puisqu'en chaque sommet trois faces s'intersectent, on peut appliquer tous les algorithmes des cubes pourvu que ces derniers n'utilisent pas plus de quatre faces. Il est cependant difficile de s'en convaincre sans cet objet entre les mains. Ce n'est pas forcément le cas de tous les algorithmes de résolution du cube mais il en existe qui permettent d'aller au bout dans tous les cas. Et pour les casse-têtes qui ont des formes bizarres, on peut toujours se ramener à des calculs dans un certain groupe de permutations.

Références

[1] M. Launay. *Le théorème du parapluie ou l'art d'observer le monde dans le bon sens.*

[2] *Morwen Thistlethwaite.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Morwen_Thistlethwaite`.

[3] L. Van Laethem. *Le guide marabout du cube et de ses dérivés.* Marabout.

Yannis Monbru
yannis.monbru@ens-paris-saclay.fr

Après une classe préparatoire à Toulouse et des études à l'Éns Paris-Saclay, Yannis Monbru-Carcelero commence des études doctorales. Toujours ramené dans ses vagabondages mathématiques à la frontière entre mathématique et informatique théorique, il travaille dans le domaine de la formalisation des mathématiques à l'aide d'assistants de preuve.

Hommage à Eugenio Calabi 1923-2023

• J.-P. Bourguignon

À Giuliana, avec affection

Eugenio Calabi nous a quittés le 25 septembre 2023 après avoir pu fêter son centième anniversaire. Il laisse une œuvre mathématique d'une très grande originalité. Géomètre, il a contribué au développement de son domaine de prédilection de beaucoup de façons différentes et souvent en précurseur absolu, initiant nombre de sous-domaines de la géométrie différentielle.

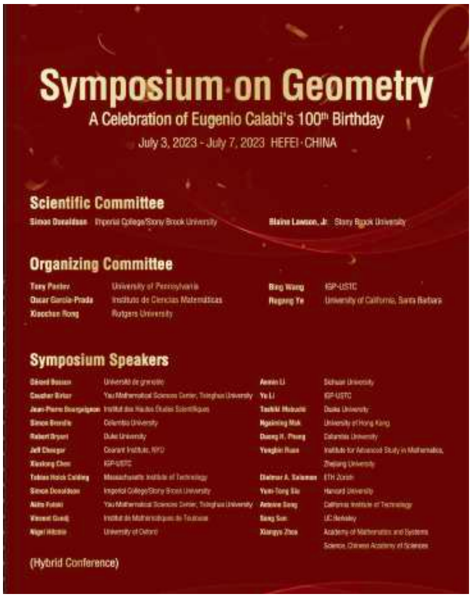
Pour une description de la carrière de Calabi, je renvoie à la contribution d'Herman Gluck, son collègue pendant de longues années à l'université de Pennsylvanie à Philadelphie qui ouvre cet hommage. Il y retrace notamment l'itinéraire de la famille Calabi quittant l'Italie à l'arrivée du gouvernement fasciste pour s'installer aux États-Unis après un court passage en France.

La consultation de ses Œuvres complètes (cf. [1]) permet de se confronter à la variété des sujets géométriques et analytiques auxquels il a contribué, et à l'originalité à répétition de son approche. La conférence organisée en juillet 2023 à l'université des Sciences et Technologies de Chine (USTC) à Hefei a permis à une vingtaine d'intervenants d'évoquer ses apports et surtout leur actualité, certains retrouvant le devant de la scène 40 ou 50 ans après leur introduction.

Les travaux de Calabi ont toujours été hors des modes. Comme toute personne vraiment créative, il a développé ses propres approches pour une grande variété de sujets.

La résolution en 1977 [1] par Yau Shing Tung de sa conjecture (optimiste) affirmant que, *sur toute variété complexe compacte, toute 2-forme fermée du bon type vérifiant la bonne condition cohomologique peut être la courbure de Ricci d'une métrique kählérienne dans une classe de Kähler fixée* a eu des conséquences majeures en mathématiques et, de façon plus surprenante, en physique théorique. Le cas de la forme nulle a donné naissance aux *variétés de Calabi-Yau*, qui ont pris une place considérable dans certains modèles conduisant à des percées majeures comme l'introduction de la notion très originale de *symétrie miroir*.

Poster du Symposium on Geometry, conférence pour le 100^{e} anniversaire de Calabi



Tous les étés, Calabi venait en Europe où il visitait diverses institutions. Il était notamment un fidèle des sessions « Differentialgeometrie im Großen » organisées longtemps par Wilhelm Klingenberg et Chern Shiing Shen à Oberwolfach.

1. Yau Shing Tung, *On the Ricci Curvature of a Compact Kähler Manifold and the Complex Monge-Ampère Equation I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (3) (1978), 339-411.

Il a fait de nombreux séjours en France. Son article [10] paru en 1979 en français aux *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* mentionne qu'il s'agit de la rédaction d'un exposé à l'École polytechnique alors qu'il était en visite à l'IHÉS. Comme son titre *Fibrés holomorphes et métriques kählériennes* le suggère, il contient une très originale construction de métriques kählériennes sur l'espace total de fibrés holomorphes. En laissant de côté une condition naturelle trop rigide, Calabi obtient des exemples complètement nouveaux de métriques kählériennes à courbure de Ricci nulle, notamment les premiers exemples de métriques à holonomie Sp_q. Calabi les appelle *hyperkählériennes*, dénomination qui est devenue standard. Il était un des conférenciers du séminaire Bourbaki (cf. [6]) qui s'est tenu en juin à Marseille à l'occasion de l'inauguration du CIRM [2]. Il y a parlé de géométrie différentielle affine, un de ses domaines chéris qu'Andrea Seppi présente dans son témoignage.

Sur le plan personnel, j'ai profité de nombreux échanges avec Calabi, tant à l'École polytechnique qu'à l'IHÉS ou à Oberwolfach ou encore dans des conférences en Italie. Il a été un des acteurs majeurs de l'année spéciale d'analyse globale à l'Institute for Advanced Study en 1979-1980, où j'ai passé un semestre mémorable avec une concentration exceptionnelle de personnes ayant grandement contribué à l'explosion du sujet : Yau, Karen Uhlenbeck, Richard Schoen, Robert Bryant, Clifford Taubes et beaucoup d'autres. C'est le moment où Calabi a développé le concept de *métrique kählérienne extrémale* (cf. [4]), qui a joué un rôle majeur dans le développement ultérieur du sujet (voir l'évocation par Xiuxiong Chen dans cet hommage).

On ne peut évoquer Calabi sans mentionner son immense culture, sa parfaite maîtrise de nombreuses langues et sa remarquable facilité pour interpréter au violon des œuvres qu'il découvrait. Il a donné des concerts régulièrement, et même au-delà de son 90e anniversaire.

Herman Gluck (Université de Pennsylvanie)

Eugenio Calabi, one of the giants of mathematics for over half a century, died peacefully at home on Monday September 25, 2023, four months past his 100th birthday, surrounded by his wife Giuliana, daughter Nora and her husband Lou, their sons Alex and Eli, Alex's wife Autumn and their son Meyer.

Gene, as we all knew him with great affection, has had a permanent and deep influence on mathematics, particularly on differential, affine and complex geometry (especially the study of Kähler manifolds and spaces of Kähler metrics... leading to the Calabi-Yau manifolds of super-string theory), almost-complex manifolds, symplectic geometry, minimal immersions, geometry of geodesics, ... and more.

In the world of geometry during the past century, Chern Shiing-Shen, Eugenio Calabi, Yau Shing Tung and Simon Donaldson have towered over the field, while in our local world at Penn, Gene was the gentle leader of and inspiring guide to the Geometry-Topology group for the many decades he was with us.

Gene was born in Milan, Italy on May 11, 1923, the youngest of four children. The magic light entered his eyes as a young boy.

Eugenio Calabi en 1925 à Milan

© crédit photo : famille Calabi

Gene's mathematical ability was already evident to his parents and teachers at a very early age, and as a teenager he came to the attention of the world-famous Italian mathematician Guido Fubini while Gene and his family were waiting in France for a visa to come to the United States.

Giuliana was born in Italy on December 22, 1930. When she was 9 years old, her family crossed the Atlantic on the last ship from Spain. Men, women

2. En présence de deux ministres, Gaston Deferre et Laurent Fabius.

and children were separated from one another during the voyage, and they all ended up in Cuba. A German spy on the ship was found, arrested in Cuba, and executed there.

In Cuba, Giuliana attended a Catholic school taught by nuns, while her brother Giorgio went to a Catholic school for boys. Giuliana recalled that her tuition was $ 6.50 per month.

From France, Gene applied to MIT without having finished high school, and was conditionally accepted there. The extended Calabi family arrived in New York City in June 1939 when Gene was 16, and he went up to Cambridge to take summer courses at MIT.

Then, as a regular student there, he first majored in Chemical Engineering, but didn't finish until after his army service in World War II (1943-46). Gene took the Putnam contest at MIT in 1941, 1942 and again in 1946, winning the Putnam Fellowship at that time, even though he had had no math courses for the last few years.

Gene then applied for graduate work in mathematics to both Harvard and Princeton, using one letter of reference from the head of the math department at MIT, and the other a resurrected letter from Fubini, which he had written earlier to help Gene get a summer job.

At Princeton, Gene studied complex manifolds with Salomon Bochner, this field becoming his dominant area of interest, and he got his PhD there in 1950. He stayed on at Princeton for one more year, with Donald Spencer as his mentor.

In 1951, Gene and Giuliana were introduced to one another by Giuliana's uncle, who was living in New York City at the time, and married the next year.

Eugenio et Giuliana Calabi en 2007 à Orsay

© crédit photo : Jean-François Dars

They went to Louisiana State University for Gene's first job, and then to the University of Minnesota, before being attracted to Penn in 1964 by our new chairman at that time, Oscar Goldman.

At Penn, Gene joined forces with Albert Nijenhuis, who had come here the year before. Together they brought our department to world eminence in differential geometry, and acted as magnetic attractors to bring many researchers in the field here, some to stay and some for repeated visits.

Gene and Albert, together with Richard Kadison in Functional Analysis, Murray Gerstenhaber and Dock Sang Rim in Algebra, Chung Tao Yang in Topology and Herb Wilf in Combinatorics, helped to lead Penn's mathematics department into its distinguished future, and at the same time to create the atmosphere that we all cherish here.

At Penn, as Gene guided our Geometry-Topology group throughout the years, he taught us all the secret of leading from behind. He was a kind of Peter Pan who never quite grew up, but knew full well how to impersonate an adult. And he left us with infinitely many stories, which we love to tell...

When Gene coached our Putnam Math Team, he took pleasure during the lunch hour of writing up the solutions to all of the morning contest problems and posting them on his office door, dazzling and intimidating those who passed his way. And then he repeated this for the afternoon session.

One day, when Gene walked in to the Geometry-Topology seminar room, he sat down and asked who was scheduled to speak. "Why? ... you are," Wolfgang Ziller said to him. "What am I talking about?" Gene asked. Wolfgang told him, and then Gene went to the blackboard and proceeded to give a stunning lecture, completely off the cuff, no notes, no hesitation.

And when we had the first Geometry Festival at Penn on an unusually warm February weekend in 1985, Gene and Giuliana volunteered to hold the banquet at their home in Wynnewood, partly catered and partly cooked by Giuliana and my wife Doris. Excitement was provided by a giant cauldron of rice which boiled over and coated the kitchen floor with a seething, bubbling mess, as in science fiction movies. Gene, however, was totally oblivious to this, much too busy entertaining our wonderful speakers: Marcel Berger, Pat Eberlein, Jost Eschenburg, Friedrich Hirzebruch, Blaine Lawson, Leon Simon, Scott Wolpert, and Deane Yang.

For Gene, there have been many conferences celebrating his work, from a 60^{th} birthday conference at the Institute for Advanced Study in Princeton, up to the most recent conference at the University of Science and Technology of China in Hefei this past July, celebrating Gene's 100^{th} birthday, with Gene able to attend the opening talks there by Zoom. This spring 2024, a combined Geometry Festival and Tribute to Gene was held at the University of Pennsylvania.

And the magic light in Gene's eyes stayed there throughout his life.

Diverses rencontres avec Calabi

Claudio Arezzo (ICTP, Trieste, et Université de Parme)

It is really with a mixture of sweet and sour feelings that I write this homage to Eugenio Calabi.

Right from the beginning of my graduate studies, my desk was filled with his papers. The topic I was given to study was the relationship between minimal surfaces and holomorphic curves in hyperkähler manifolds, and Calabi had given many fundamental contributions to all aspects of these problems. His papers on what would become known as "Calabi's Ansatz" and on minimal surfaces in spheres have been a continuous source of study and inspiration throughout all of my studies, while many colleagues in other fields were studying with the same intensity his work on holomorphic isometric immersions, a topic that became also central in my later research.

I hence had developed a huge admiration for him as a mathematician (also for his beautiful style of writing), and it was with great emotion that I finally met him as a postdoc at MIT a few years later, when he came for a few days to visit Tian Gang and to give a lecture. It was definitely one of those rare encounters that, as a young researcher, I have put in the box of my most precious memories.

He talked quietly to all of us "young" complex geometers, answering technical questions, offering us also many anecdotes about the birth of the subject, and his vision for the future. Whether he was explaining a technical construction or an intriguing story about Solomon Lefschetz and Salomon Bochner (but always connected to some mathematical question), the most striking emotion I remember of this encounter was to be in front of a real "gentiluomo", with a beautiful mixture of intellectual distinction, empathy and a radiant piercing glance.

I then had the luck to meet Eugenio many other times, both in Italy and in the US, and always got struck by this blend of depth and serenity, which has deeply touched me, especially thinking of the tragedy he and his family had to live through in the fascist period in Italy, and its consequent escape to Switzerland, France and the US.

Calabi's mathematical vision has certainly deeply affected my own work, but his example has been equally important to consolidate inside me the thought that scientific curiosity can indeed be a crucial tool to create solid, peaceful, respectful human connections that can go way beyond the personal inherited background of each of us, a principle I eventually have devoted much of my energies to.

Oscar Garcia-Prada (ICMAT, Madrid)

Ma première rencontre avec Eugenio Calabi a eu lieu en septembre 2000. C'était à une conférence de géométrie différentielle qui s'est tenue à Bilbao en Espagne pour honorer la mémoire d'Alfred Gray. À cette occasion, j'ai pu parler de mathématiques sérieusement avec Calabi. J'ai alors pu apprécier sa grande générosité pour partager ses idées mais aussi son charme personnel.

Au cours de cette conférence, je me suis retrouvé être impliqué dans une table ronde intitulée *Where Does Geometry Go? A Research and Education Perspective*[3] pour discuter du futur de la recherche en géométrie. C'était un grand honneur, mais aussi une sérieuse responsabilité pour moi, vu que en particulier les autres membres du panel étaient, en plus de Calabi, Misha Gromov, Jim Eells et Jean-Pierre Bourguignon, qui modérait la table ronde.

Les premiers mots que Calabi a prononcés lors de la discussion dans le panel reflètent très bien, je crois, son point du vue original sur le sujet : « Over the years, I came to the conclusion that one can only speak very subjectively about what constitutes Geometry. I see it as a field in which the primary source of intuition is ultimately tied with our sensory perceptions of the world. Of course, as we reach more abstract areas, one has to interpret what sensory experience means. And I've tried to

3. Dans *Global Differential Geometry : The Mathematical Legacy of Alfred Gray*, ed. by Marisa Fernández and Joseph A. Wolf, Bilbao, Spain, September 18-23, 2000, Contemp. Math. **288**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001), 442-457. L'article a été republié dans [1].

make that as visible as possible and to communicate this view. »

Depuis ma période de thèse, j'ai été fasciné, comme beaucoup d'autres mathématiciens, par la géométrie des métriques de Kähler-Einstein, et aussi de certaines métriques extrémales plus générales sur les variétés complexes obtenues comme points critiques de diverses fonctionnelles de Calabi, comme les métriques à courbure scalaire constante. Mes intérêts de recherche personnels étaient, cependant, plus reliés à la géométrie des théories de Yang-Mills sur les fibrés vectoriels sur des variétés kählériennes, ainsi que leurs réductions dimensionnelles, conduisant à des équations associant champs de Higgs et diverses notions de stabilité dans le cadre de la géométrie algébrique.

Pendant des années, je me suis demandé si, étant donné un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe compacte, on pouvait trouver des métriques sur la variété et sur le fibré qui soient couplées de façon naturelle. Cela a conduit aux équations de Kähler-Yang-Mills.

L'inspiration pour approcher ce problème vient de deux sources. La première est la géométrie symplectique et l'interprétation comme application moment de la condition de courbure scalaire constante des équations de Yang-Mills hermitiennes. Une seconde source d'inspiration est reliée à l'étude des fonctionnelles de Calabi. Dans l'article [4] on définit une *fonctionnelle de Calabi-Yang-Mills*. C'est une fonctionnelle purement riemannienne qui entrelace la fonctionnelle de Yang-Mills pour les connexions avec la norme L^2 de la courbure scalaire des métriques sur l'espace total du fibré principal correspondant au fibré vectoriel. Les solutions des équations de Kähler-Yang-Mills sont les minima absolus de cette fonctionnelle. Cela généralise à la fois le fait que les métriques kählériennes à courbure scalaire constante sont les minima absolus de la fonctionnelle de Calabi définie par la norme L^2 de la courbure scalaire dans une classe de Kähler, et que les connexions de Yang-Mills hermitiennes sont les minima absolus de la fonctionnelle de Yang-Mills.

J'ai eu l'immense privilège d'être membre du comité d'organisation du symposium organisé à l'USTC pour célébrer le 100e anniversaire de Calabi. Pour nous tous, c'était une occasion unique de montrer tout le respect, l'admiration et l'affection que nous avons pour lui. Nous avons aussi eu le grand plaisir de le voir grâce à la diligence d'Herman Gluck et à une liaison internet pendant la cérémonie d'ouverture du symposium – seulement quelques mois avant qu'il nous quitte.

Ce sont des expériences dont je vais garder un souvenir précieux pour les années à venir.

Yau Shing Tung (Université Tsinghua, Beijing)

I have known Eugenio Calabi since 1969.

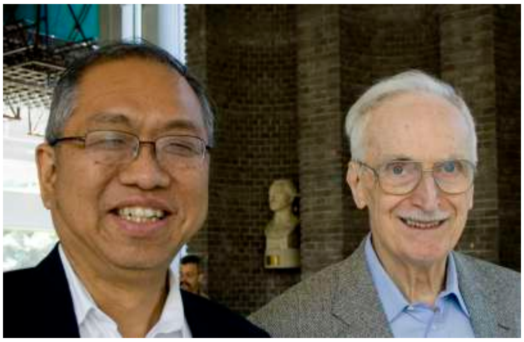
I learned the theory of minimal surfaces, affine geometry and Kähler geometry from him when he visited Berkeley.

It is because of his famous 1954 International Congress speech (cf. [14]) that I started to be interested in Kähler and algebraic geometry. The *Calabi conjecture* established an elegant way to solve Einstein equations in this setting, which links several important fields in mathematics and theoretical physics.

Its solution can be viewed as the starting point of the era of modern geometric analysis. I am glad to have contributed to this important development of mathematics. And it all started the day I read Calabi's 1954 address to the ICM.

I am very grateful to him for his life-long friendship.

Yau Shing Tung et Eugenio Calabi en 2007 à Palaiseau



© crédit photo : Jean-François Dars

Gérard Besson (émérite CNRS, Institut Fourier, Grenoble)

J'ai rencontré Eugenio Calabi en personne en 1985. Cette année-là j'ai déposé ma candidature à un poste de professeur visiteur au département de mathématiques de l'université de Pennsylvanie à Philadelphie. Calabi m'a appelé personnellement

4. Luis Álvarez-Cónsul, Mario García-Fernández and Oscar García-Prada, *Coupled Equations for Kähler Metrics and Yang-Mills Connections*, Geom. Topology **17** (2013), 2731-2812.

au mois de mars pour m'annoncer la décision positive concernant ce poste et me demander une réponse rapide, et ceci dans un français parfait. J'ai donc rencontré en personne ce mathématicien exceptionnel pour la première fois à Philadelphie. Il venait assez souvent à mon bureau. À ce moment-là c'était pour lui essentiellement le seul moyen de pratiquer son français. Gene, comme on l'appelait aux États-Unis, m'a fait découvrir des sujets dont je n'avais aucune idée et notamment la géométrie affine et les travaux de Wilhelm Blaschke.

Nous avons eu plusieurs de ces séances de discussion à propos des inégalités systoliques sur les surfaces riemanniennes fermées de genre plus grand que deux. Sur une surface, la systole est la longueur du plus court lacet non contractible. Le terme *systole* est dû à Marcel Berger, mon directeur de thèse, qui a contribué à ce sujet. Sur une surface fermée, on cherche la métrique riemannienne, si elle existe, qui maximise le rapport entre le carré de la systole et le volume. Pour les surfaces fermées de genre plus grand ou égal à 2 ce maximum n'est, en général, pas connu et il n'est pas clair qu'il existe une métrique riemannienne le réalisant. Mais, comme me l'a appris Gene, on peut vérifier que la surface maximale doit (devrait) être recouverte par des réunions de géodésiques périodiques parallèles de même longueur, peut-être avec des singularités. Gene les appelait des surfaces *momifiées*!

À l'époque j'étais intrigué par une autre question concernant les surfaces fermées qui est celle de leurs points de Weierstrass. Sur une surface il existe en effet un nombre fini de points marqués associés au choix d'une structure complexe. Une telle structure porte une métrique particulière qui est hyperbolique, c'est-à-dire de courbure constante strictement négative ; c'est une conséquence du théorème d'uniformisation. Mais le passage à la métrique hyperbolique, qui requiert de l'analyse assez fine, fait disparaître les points de Weierstrass, sauf dans certains cas exceptionnels (en présence d'une involution, par exemple). Or nous ne savions pas répondre à la question « où sont-ils ? » Aucune description métrique n'existe pour eux. Pour répondre à cette question Calabi m'a proposé plusieurs approches possibles. Aucune n'a fonctionné et je crois que le problème est encore ouvert mais ces longues conversations, sur ce thème peu à la mode, m'ont montré que Gene avait une connaissance intime de la théorie des surfaces.

J'ai souvent été invité au domicile des Calabi dans la banlieue de Philadelphie et ai eu le plaisir de rencontrer son épouse Giuliana.

En juillet 2023, j'ai participé à la conférence à l'USTC organisée par Xiuxiong Chen, un ancien élève de Calabi. Ce fut très émouvant de le voir en vidéoconférence participer à la cérémonie d'ouverture et suivre quelques exposés. Il nous a malheureusement quittés deux mois plus tard. Calabi était un amoureux des mathématiques.

Sylvestre Gallot (émérite Université Grenoble-Alpes)

Mes premiers contacts avec les travaux d'Eugenio Calabi concernaient les variétés kählériennes Ricci-plates et, plus tard, la démonstration par Yau Shing Tung de la célèbre conjecture de Calabi. À ce propos, je me souviens de séances de travail où je me sentais dépassé par l'originalité des idées et la finesse des techniques d'équations aux dérivées partielles utilisées.

Pour cela, mais aussi pour tant d'autres travaux et idées séminales qu'il nous exposait lors de congrès, en particulier pendant les rencontres du groupe italien de géométrie (et aussi pour les mini-concerts de violon dont il nous régalait), j'ai appris à apprécier la légende qu'était Eugenio Calabi.

Par ailleurs, pendant les exposés, j'étais impressionné par sa capacité à offrir tous les signes d'un sommeil profond (jusqu'à dodeliner de la tête) et à poser au bon moment LA question cruciale, toujours juste, souvent créative.

Cependant c'est sa personnalité que je voudrais évoquer maintenant. Pour un jeune chercheur peu sûr de sa légitimité dans un congrès réunissant des mathématiciens chevronnés, rencontrer Eugenio Calabi et parler avec lui était libérateur. Son attention aux jeunes chercheurs, son respect pour leurs idées (même peu dégrossies) et sa générosité nous mettaient immédiatement à l'aise. Avec la distance, je crois qu'il se sentait responsable de notre bien-être.

Je me souviens d'un après-midi à UCLA où il m'extirpa de mes maths pour m'entraîner à la plage de Little Venice. Le lendemain, nous étions tous autour de la même table et l'épouse d'un collègue, entendant dire que « l'inconnu » assis en face d'elle était né à Milan dans la rue où elle-même avait habité, s'exclama : « dans cette même rue est né un génie, une légende des mathématiques, il se nomme Calabi, le connaissez-vous ? », à quoi Eugenio répondit sobrement d'une voix très douce, destinée à dissiper le malaise qui allait suivre : « c'est moi ». Car Eugenio était un vrai modeste, d'une modestie aristocratique, dans le sens où il pouvait minimiser ses mérites sans que cela atteigne son prestige. Les leçons (et parfois les critiques) venant d'un tel maître, formulées avec une gentillesse et une politesse exquises, étaient acceptées avec reconnaissance.

Pour toutes ces raisons, tant humaines que mathématiques, Eugenio nous manque.

H. Blaine Lawson (Université Stony Brook)

L'été dernier, on m'a demandé de faire l'ouverture de la conférence célébrant Eugenio Calabi à l'occasion de son 100e anniversaire. C'était une responsabilité sérieuse, et j'ai dû bien réfléchir en préparant mes commentaires que je vais partager avec vous.

Calabi n'était pas un mathématicien qui fermait des sujets, mais au contraire quelqu'un qui *ouvrait de nouveaux champs*. Presque tous ses travaux étaient d'une certaine façon hors des courants principaux de la recherche. Cependant ses articles ont attiré l'attention de nombreux mathématiciens et, le temps passant, de nouveaux sujets en sont nés.

Gene, comme nous l'appelions, était un mathématicien généreux. Il était toujours ouvert et prêt à partager ses idées. Quand ses résultats étaient aussi obtenus par d'autres, il se mettait simplement en retrait. Un exemple, quand Detlef Gromoll a démontré son grand théorème de pincement différentiable dans sa thèse, Calabi avait aussi ce résultat, mais il ne l'a jamais publié,

Quelque chose met Calabi à part de presque tous les géomètres du XXe siècle. Une pièce de Broadway a porté son nom! En réalité c'était « off-Broadway » et le titre était *Calabi Yau*. Gene a été voir la pièce et a rencontré les acteurs après le spectacle. Ils étaient très excités à l'idée de le rencontrer mais en fait ils croyaient que *Calabi Yau* était une seule personne!

Quand je préparais ma thèse, Calabi a visité Stanford pour donner un exposé de colloquium sur les sphères de dimension 2 plongées minimalement dans la sphère euclidienne $\mathbb{S}^n$. C'était un peu à côté des grandes questions considérées alors à propos des variétés minimales, mais ses résultats étaient absolument superbes! C'était de loin le meilleur exposé de colloquium que j'ai jamais écouté, et mes intérêts de recherche s'en sont subitement trouvés changés. Ce résultat a initié plus d'une dizaine d'années de travaux par les meilleurs géomètres inspirés par la vision de Calabi.

Dans sa thèse (cf. [9]), Gene a introduit la *fonction diastatique* et a produit une belle théorie des immersions isométriques en géométrie kählérienne. C'était un tout nouveau sujet à l'époque.

Un autre exemple est fourni par son travail avec Edoardo Vesentini sur la rigidité des quotients compacts D/Γ des domaines irréductibles de Cartan D par des groupes discrets Γ, pour toute dimension > 2. Combiné aux travaux d'Atle Selberg, cela implique un résultat d'algébricité pour Γ. Ce résultat a eu une profonde influence sur André Weil, qui deux ans plus tard a obtenu un meilleur résultat possible concernant la rigidité sous déformation. Cela, ensuite, a engendré certains des résultats majeurs de l'époque, avec des contributions d'Armand Borel, Jacques Tits, Jean-Pierre Serre, Harish-Chandra, Howard Garland, Madabusi S. Ragunathan, parmi d'autres. Ce domaine, qui s'intéresse aux réseaux dans les groupes de Lie, a connu son apogée avec les travaux de George D. Mostow et Gregory Margulis.

Les travaux de Calabi avec Beno Eckmann sur les structures complexes non kählériennes sur les produits de sphères de dimension impaire (et, comme cela a été noté ensuite par Sid Webster, certaines de ces sphères peuvent être exotiques) ont complètement changé notre point de vue sur la question, et de nombreux articles étendant la construction de Calabi-Eckmann ont été publiés.

Un fait intéressant à propos de son article sur le principe du maximum d'Eberhard Hopf est qu'il a anticipé la théorie des solutions de viscosité de plus de vingt ans.

Je ne discute pas les travaux de Calabi et ses conjectures sur les variétés de Kähler et de Kähler-Einstein, qui ont eu un impact énorme tant en mathématiques qu'en physique théorique. (Beaucoup d'autres personnes sont plus qualifiées que moi pour le faire.) Cependant, cela certainement apporte encore plus de poids à mon thème principal : « Ce que Calabi fait aujourd'hui, tous les géomètres le feront demain. »

Ngaiming Mok (Université de Hong Kong)

Lorsque j'ai entendu parler d'Eugenio Calabi pour la première fois en 1979-1980, j'étais un étudiant de Yum-Tong Siu à Stanford. Quand j'ai découvert ses travaux à propos de la conjecture de Calabi, comme toute personne qui lisait ses articles, j'ai eu une grande admiration pour les estimées du troisième ordre en géométrie différentielle affine en relation avec la conjecture. Pendant toutes mes années avec Yum-Tong, qui avait étudié avec Calabi à l'université du Minnesota, j'ai entendu beaucoup d'histoires sur les prouesses mathématiques de Calabi, et j'ai finalement eu la chance de pouvoir utiliser certains de ses travaux peu après le début de ce siècle, quand, motivé par les travaux de Laurent Clozel et Emmanuel Ullmo à Orsay traitant de dynamique holomorphe où ils utilisaient la diastase créée par Calabi, j'ai été conduit à comprendre le rôle joué par ce concept dans des questions d'extension d'isométries holomorphes au-delà des bords des domaines bornés symétriques. Calabi avait prédit que la diastase serait le début d'un nouveau chapitre de la géométrie différentielle complexe. Je pense que ce beau concept n'a pas perdu son charme encore aujourd'hui.

J'ai eu la grande chance de rencontrer Eugenio Calabi de nombreuses fois, le plus souvent lors de conférences, et je me souviens de la très plaisante expérience qu'était une discussion avec lui, tant à Göttingen qu'à Bures-sur-Yvette. Tout particulièrement, c'est en 2007, à l'occasion d'une conférence à l'IHÉS pour le soixantième anniversaire de Jean-Pierre Bourguignon pour laquelle Eugenio était un des invités d'honneur, que je lui ai posé une question mathématique lors d'une pause-café. Il a commencé à répondre énergiquement (il avait alors 83 ans). Et il s'est mis à écrire plein de choses sur le tableau, et la conversation n'était pas finie lorsque le conférencier suivant commençait à préparer son exposé. Eugenio était un professeur brillant, et chaque conversation mathématique que j'ai eue avec lui m'a laissé le sentiment que j'avais une grande chance de pouvoir apprendre d'un grand mathématicien avec des visions pénétrantes et qui ne s'épargnait aucun effort pour éduquer avec enthousiasme les chercheurs des plus jeunes générations. Eugenio était un exemple pour les mathématiciens, et, bien qu'il soit difficile à imiter, il restera un modèle à travers la dissémination de ses trésors qui font date dans la littérature mathématique.

La science de Calabi

Sir Simon Donaldson (Imperial College)

I did not know Eugenio Calabi well personally – I only had the opportunity to meet him on a few occasions – but his work had a profound influence on me.

I first encountered Calabi's name as a beginning graduate student in 1980, when Nigel Hitchin gave me the *Astérisque* volume *Preuve de la conjecture de Calabi* to study. This gave a complete account of Yau's proof of Calabi's conjecture from 1954 on the existence of Kähler metrics with prescribed volume forms, and in particular the existence of metrics with zero Ricci curvature on manifolds with vanishing first Chern class. The style of mathematics in the heart of the proof: *a priori* estimates based on formidable and extraordinarily ingenious differential-geometric calculations, was completely new to me at that time, and not initially congenial. But I soon came to appreciate both the fascination of such general existence theorems in complex geometry and the techniques, in both of which Calabi was an outstanding pioneer.

A few years later, in 1982, the volume *Seminar on Differential Geometry*, edited by Yau, was another important part of my education and in particular Calabi's article *Extremal Kähler metrics*. This introduced the idea of seeking an optimal metric – an extremal metric – in each Kähler class by minimising the L^2 norm of the curvature. In fact Calabi had mentioned this idea in one of his short visionary 1954 articles; the analogy with Yang-Mills theory, which entered mathematics much later, may have been one of the motivations for him to write up the idea in more detail in 1982. The scope of this idea, extending far beyond the realm of Ricci curvature and Einstein metrics, was striking, but it seemed optimistic to expect general existence results (just as, in the 1950's Calabi's conjectures on Kähler-Einstein metrics must have seemed optimistic). The rich formal structure around the extremal equations and the powerful *a priori* estimates of Chen-Cheng emerged much later, confirming again the depth of Calabi's insight.

The impact of Calabi's conjecture on Kähler-Einstein metrics extends over many branches of mathematics, far beyond differential geometry, and is surely what he is best known for in the general mathematical community. But he made contributions of similar quality and seminal nature in a host of other branches of differential geometry. For years to come, differential geometers will be able to learn a lot from a study of his *Collected works* (cf. [1]).

Mikhail Gromov (Institut des Hautes Études Scientifiques)

Eugenio Calabi a été le créateur de ce qu'on peut appeler la *géométrie différentielle analytique globale*, dans laquelle l'analyse se combine avec les propriétés géométriques infinitésimales et globales des structures géométriques sur les variétés.

Suivent quelques mots à propos de trois articles de Calabi qui ont considérablement influencé les mathématiques proches de mes intérêts.

Dans l'article [11] Calabi initie l'étude de la cohomologie des variétés riemanniennes à coefficients dans le faisceau des champs de vecteurs de Killing en se concentrant sur les variétés riemanniennes compactes à courbure constante négative, où il prouve[5] la rigidité locale de telles variétés de dimension n pour $n \geqslant 3$.

Cela est apparu juste après le théorème de rigidité d'Atle Selberg pour $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$, et cela a été peu après généralisé par André Weil à tous les espaces localement symétriques.

En 1979, la méthode analytique de Calabi (qui s'appuie sur une inégalité de Bochner) a été globalisée par Siu Yum-Tong au cas kälhérien ; ensuite, en 1999, Jürgen Jost et Yau Shing-Tung ont prouvé un théorème général pour les applications harmoniques à valeurs dans des espaces localement symétriques. Cependant, ces résultats ne sont pas applicables aux espaces à courbure sectionnelle constante considérés par Calabi.

Par ailleurs la rigidité globale pour ces espaces a été prouvée en 1968 par George D. Mostow utilisant la géométrie quasi-conforme sur le bord du revêtement universal de la variété. Cependant, il n'existe toujours pas de preuve directe du genre de celle que Calabi a tentée du théorème suivant (qui est une conséquence d'une forme raffinée du théorème de Mostow) : *soit $f : X \to Y$ une application harmonique de degré d entre des variétés riemanniennes compactes de dimension n, $n \geqslant 3$ de même courbure constante. Si $vol(X) \leqslant d\, vol(Y)$, alors en fait $vol(X) = d\, vol(Y)$ et f est un revêtement localement isométrique*.

Dans l'article [13] Calabi étudie la composante de l'identité $\mathscr{S}_0$ du groupe $\mathscr{S}$ des symplectomorphismes à support compact d'une variété symplectique X et construit, en particulier, un homomorphisme du revêtement universal $\tilde{\mathscr{S}}_0$ de ce groupe vers le groupe de cohomologie $H^1(X;\mathbb{R})$.

Avec tout le progrès fait depuis 1970 sur ce sujet, l'étude de l'invariant de Calabi reste une direction de recherche active en géométrie symplectique (voir par exemple[6]).

Dans l'article [3] Calabi étudie les métriques riemanniennes et finslériennes g sur une surface fermée X, telles que chaque déformation g_t qui *décroît l'aire* de $(X, g = g_0)$ *décroît aussi la longueur* de (certaines) géodésiques minimisantes γ dans X (on peut spécifier la classe d'homotopie de ces géodésiques γ).

En général ces métriques ne sont pas lisses ; Calabi montre que les endroits où elles ne sont pas lisses forment des motifs combinatoires remarquables. Cela suggère une perspective intéressante sur la géométrie des systoles en dimension 2 et, peut-être aussi, en dimension plus grande (cf. M. Katz, *Systolic Geometry and Topology*, Math. Surveys and Monographs **137**, Amer. Math. Soc. (2007)).

Je pense qu'il y a encore beaucoup de choses à tirer des idées qui se trouvent dans ces articles de Calabi.

Eugenio Calabi et Misha Gromov en 2007 à Bures-sur-Yvette

© crédit photo : Jean-François Dars

Andrea Seppi (Université Grenoble-Alpes)

La géométrie différentielle affine est une branche de la géométrie différentielle qui étudie les propriétés des courbes et des (hyper)surfaces dans l'espace affine invariantes par le groupe des transformations affines, ou par l'un de ses sous-groupes. Les plus largement étudiés ont été les invariants par le groupe équi-affine, à savoir le sous-groupe des transformations affines qui préservent le volume. Il s'agit d'une théorie différente de la géométrie différentielle classique des courbes et

5. Jean-Pierre Bourguignon m'a montré que cet article contenait une erreur qui est corrigée dans l'article : Lionel Bérard Bergery, Jean-Pierre Bourguignon, Jacques Lafontaine, *Déformations localement triviales des métriques riemanniennes*, Proc. Symp. Amer. Math. Soc. **27** (1973), 3-32.

6. Cristofaro-Gardiner & all, *Quantitative Heegaard Floer Cohomology and the Calabi Invariant*, arXiv :2105.11026 [math.SG] 2021.

des (hyper)surfaces : par exemple, certaines notions, comme la première forme fondamentale, la distance induite, le vecteur normal, qui s'appuient sur la géométrie euclidienne de l'espace ambiant, ne sont pas bien définies en géométrie différentielle affine. Dans ce contexte, les hypersurfaces convexes ont représenté une classe largement étudiée, pour lesquelles le point de départ de la théorie est l'existence d'un champ de vecteurs transverse à l'hypersurface, dit *normale affine* ou *normale de Blaschke*, qui est uniquement déterminé et construit à partir de seulement la structure d'espace affine et la forme volume. Par conséquent, il est possible de définir des invariants équi-affines comme l'opérateur de Weingarten (la dérivée de la normale affine), la seconde forme fondamentale, etc.

Ce sujet trouve ses racines dans le programme d'Erlangen de Felix Klein de 1872. Il a ensuite été premièrement développé par Titeica au début du xx^e^ siècle, et ensuite, à partir de 1916, par Wilhelm Blaschke et son école. Les grands mérites de Calabi dans ce contexte ont été d'avoir redonné de l'intérêt, vers la fin des années 1950, à cette théorie, et d'avoir identifié ses relations avec les équations de Monge-Ampère réelles. Comme déclaré par Calabi dans un entretien vidéo intitulé *Quintessentially Science Fiction* avec Claude LeBrun [7] en 2019, il était non seulement intéressé par la géométrie différentielle affine de manière indépendante, fasciné par le livre de Blaschke, publié en 1923, mais aussi motivé par les équations de Monge-Ampère complexes, qui jouaient un rôle clé dans son programme en géométrie kählérienne. Le travail de Calabi a donné une impulsion fondamentale à la classification des hypersphères affines, c'est-à-dire les hypersurfaces convexes telles que les droites normales affines se rencontrent toutes en un point, comme pour les sphères en géométrie euclidienne. Elles peuvent être de type hyperbolique, elliptique ou parabolique, si les droites normales se rencontrent du côté concave de l'hypersurface, du côté convexe, ou à l'infini (i.e. lorsqu'elles sont toutes parallèles) respectivement.

Dans son article [8], Calabi a remarqué que les hypersphères affines paraboliques dans $\mathbb{R}^{n+1}$ sont gouvernées par l'équation de Monge-Ampère $\det(D^2 f) = 1$ sur $\mathbb{R}^n$, ce qui lui a permis de démontrer que, pour $n \leqslant 5$, toute hypersphère affine parabolique complète est un paraboloïde elliptique (i.e. f est un polynôme quadratique). Ce résultat, qui est maintenant connu comme le théorème de Jörgens-Calabi-Pogorelov, était déjà connu pour $n = 2$ grâce à Jörgens, et a été prouvé par Pogorelov en toute dimension dans les années 1970. En explorant plus en profondeur les relations avec les équations de Monge-Ampère, Calabi a aussi obtenu dans [2] une classification des hypersphères affines elliptiques complètes (il n'y a que les ellipsoïdes) et a conjecturé le résultat de classification suivant dans le cas hyperbolique : *les hypersphères affines hyperboliques complètes sont en correspondance biunivoque avec les cônes convexes saillants dans l'espace affine* – la correspondance étant celle qui associe à une hypersurface le cône auquel elle est asymptotique. Cette conjecture de classification a été démontrée, à travers la résolution d'une équation de Monge-Ampère avec une condition de Dirichlet au bord, par Cheng Shiu Yuen et Yau Shing Tung, et aussi dans un travail indépendant, et non publié, de Calabi et Louis Nirenberg.

Les recherches de Calabi ont apporté plusieurs autres contributions fondamentales en géométrie différentielle affine. D'abord, il y a deux possibles notions de complétude dans ce cadre, et la relation entre les deux a été une question ouverte pendant longtemps : la complétude de la première forme fondamentale induite par la métrique euclidienne – malgré le fait que cette métrique ne soit pas un invariant équi-affine – et la complétude de la seconde forme fondamentale. Ces deux notions sont différentes, et Calabi a conjecturé leur équivalence dans le cas des hypersphères affines. Ce résultat a été établi par Cheng et Yau. Il avait aussi observé que la théorie locale des hypersphères affines hyperboliques, sans aucune hypothèse de complétude, est beaucoup plus compliquée : notamment, une construction qui est maintenant appelée *produit de Calabi* permet de construire une nouvelle hypersphère affine hyperbolique à partir de deux autres. Enfin, Calabi a considéré la classe des hypersurfaces dont la trace de l'opérateur de Weingarten est identiquement nulle, qui généralisent les hypersphères affines paraboliques. Initialement appelées *hypersurfaces affines minimales*, elles sont en fait, sous certaines hypothèses, des maxima locaux du volume – et donc elles sont maintenant appelées *maximales* – comme Calabi a observé dans l'article [7], qui a aussi donné une contribution importante vers leur classification, maintenant terminée, sous l'hypothèse de complétude au sens affine.

L'impact de toutes ces contributions est très important encore aujourd'hui, et ce dans plusieurs

7. Accessible à `https://scgp.stonybrook.edu/archives/31629`.

directions. Les hypersphères affines paraboliques sont reliées aux variétés affines et à la conjecture de Strominger-Yau-Zaslow en symétrie miroir, dans le contexte des variétés de Calabi-Yau. En topologie géométrique, les sphères affines hyperboliques ont été utilisées récemment pour obtenir des paramétrisations holomorphes de la composante de Hitchin pour le groupe SL(3,ℝ), qui est l'un des premiers exemples d'espace de Teichmüller de rang supérieur.

Joel Fine (Université libre de Bruxelles)

Eugenio Calabi leaves behind him a long-lasting legacy. His vision and imagination helped shape several areas of differential geometry, but perhaps nowhere has his influence been more significant than in Kähler geometry. As far back as the 1950s Calabi made a conjecture, concerning the Ricci curvature of Kähler manifolds, which has inspired thousands of researchers since. Whilst the original conjecture was proved by Yau Shing-Tung in 1977 (for which he was awarded the Fields medal), Calabi himself developed the ideas behind the conjecture into an entire programme of research, devoted to finding canonical metrics on Kähler manifolds (cf. [4] and [5]). Calabi named these special metrics *extremal* as they are extrema of a functional, named the *Calabi functional* in his honour. Exploring extremal metrics remains right at the forefront of research today; indeed the area has never been more active. This is truly astonishing when one considers that 70 years have passed since Calabi's original conjecture!

The main question about the Calabi extremal metrics is still open: *exactly when does a Kähler manifold carry an extremal metric?* This is still an open question despite the efforts of many very talented mathematicians. Their investigation has revealed, however, that extremal metrics are intimately related to the concept of *stability* in algebraic geometry: conjecturally at least, *an extremal metric should exist if and only if the underlying variety is stable*. (In various guises, this conjecture is due to Simon Donaldson, Gábor Székelyhidi, Tian Gang, and Yau Shing-Tung.) This is an extraordinary development: to find an extremal metric amounts to solving a complicated non-linear PDE, whilst stability of an algebraic variety can be phrased purely in terms of algebra. That these two very disparate topics should be linked is as exciting as it is surprising. It opens the way to a transfer of ideas from one field to the other, allowing us to use techniques from algebraic geometry to decide whether a certain PDE does or doesn't have a solution; conversely it allows us to use methods from PDE theory and Riemannian geometry to study moduli spaces of algebraic varieties. It is an excellent example of Calabi's exquisite mathematical taste and aptitude for asking the right question.

Excitingly, the whole subject is intricately linked to the latest advances in Theoretical Physics. Following Yau's proof of Calabi's seminal conjecture, the Kähler manifolds involved became known as *Calabi-Yau manifolds*. They are at the heart of String Theory. Calabi-Yau manifolds and their generalisations are the subject of a huge amount of research both in the mathematical and physical communities. The entire story is founded on Calabi's original conjecture, and current research remains guided to a large extent by his original vision for Kähler geometry. Having provided the focal point of Kähler geometry for the last 70 years, it seems probable that Calabi's vision will continue to inspire researchers for the next 70 years as well!

Xiuxiong Chen (University of Science and Technology of China and Stony Brook University)

In his lecture at the 1954 International Congress of Mathematicians (cf. [14]), Eugenio Calabi laid out a vision that would be commanding the research in Kähler geometry for the next 70 years, and counting. The lecture addressed the question whether any Kähler class on a compact complex manifold can be uniquely represented by a Kähler metric of constant scalar curvature when the complex automorphism group is discrete. In the case of Kähler-Einstein metrics, efforts devoted to his question have led to stunning developments, beginning with the celebrated proof by Yau Shing Tung of the Calabi Conjecture, and culminating in the resolution [8] of the stability conjecture for Kähler-Einstein metrics by Simon Donaldson, Sun Song and me.

The 1954 lecture also introduced a variational problem in connection with constant scalar curva-

8. Chen Xiuxiong, Donaldson Simon, sun Song, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities*, J. Amer. Math. Soc. **28** (1) (2015), 183-197); II: *Limits with Cone Angle less than 2π*, idem, ibidem, 199–234; III: *Limits as Cone Angle approaches 2π and Completion of the Main Proof*, idem, ibidem, 235-278.

ture metrics which was further elaborated in the article [5] by Calabi. The consideration has led to his notion of *extremal Kähler metrics* which has received increasing attention in recent years. Fundamental advances on the problem about extremal Kähler metrics has been made through the works of many mathematicians, in particular, the recent a priori estimates by Cheng Jingrui and me [9], built upon the work of Calabi and Yau on Kähler-Einstein metrics.

Though many fundamental questions remain open, the work guided by his vision has changed the landscape of many fields including differential geometry, partial differential equations, algebraic geometry, and theoretical physics. It also offered a remarkable opportunity to witness the unity of these branches as well as the unity of mathematics and physics.

Eugenio Calabi et Xiuxiong Chen en 2007 à Bures-sur-Yvette

© crédit photo : Jean-François Dars

Professor Calabi was one of the greatest differential geometers in the past century. He has touched the lives of several generations of mathematicians through his mathematics and his grace. A gentleman in the truest sense, he embodies purity and verity.

The world of mathematics has lost a giant, and I have lost a cherished teacher, colleague and dear friend. He is profoundly missed.

Arnaud Beauville (émérite, Université Nice-Côte d'Azur)

Au Congrès international des mathématiciens d'Amsterdam (1954), dans un résumé d'une page [14], Eugenio Calabi a annoncé – comme un théorème – sa fameuse conjecture sur la réalisation des formes de type (1,1) vérifiant une condition cohomologique comme forme de Ricci d'une métrique kählérienne. En particulier, si $c_1(M) = 0$, on peut considérer la forme nulle et on a donc, dans la classe de Kähler donnée, une unique forme de Kähler à courbure de Ricci nulle.

Trois ans plus tard, dans [12], Calabi présente le résultat comme une conjecture, qu'il justifie par un argument heuristique. Le reste de l'article est consacré à montrer que, dans le cas $c_1 = 0$, la conjecture implique une première version du théorème de décomposition : *il existe un revêtement fini étale $\tilde{M}$ de la variété complexe M qui est le produit d'un tore complexe et d'une variété complexe N avec $c_1(N) = 0$ et $b_1(N) = 0$.* Ce résultat a été obtenu sans condition pour les variétés projectives par Yozo Matsushima [10] par une approche différente. Le cas kählérien général est considéré par Fiodor Bogomolov [11].

En 1977 Yau Shing Tung a prouvé la conjecture de Calabi. De la classification des groupes d'holonomie riemanniens de Marcel Berger et de résultats basiques de géométrie différentielle, il n'est pas difficile [12] de déduire le théorème de décomposition suivant, suggéré en premier lieu par Fiodor Bogomolov : *une variété kählérienne compacte avec $c_1 = 0$ admet un revêtement étale fini de la forme suivante, $T \times \Pi_i X_i \times \Pi_j Y_j$, où,*

1. *T est un tore complexe ;*
2. *chaque X_i est une variété projective simplement connexe pour laquelle nous avons $H^0(\Omega^*) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[\omega]$, où ω est une forme de degré maximum qui ne s'annule nulle part ;*
3. *chaque Y_j est une variété kählérienne simplement connexe pour laquelle $H^0(\Omega^*) = \mathbb{C}[\Phi]$, où Φ est une 2-forme qui est partout non dégénérée.*

Parmi les nombreuses applications de la conjecture de Calabi en géométrie algébrique, le théorème

9. Chen Xiuxiong, Cheng Jingrui, *On the Constant Scalar Curvature Kähler Metrics, II: Existence results*, J. Amer.Math. Soc. **34** (4) (2021), 937-1009.
10. Yozo Matsushima, *Holomorphic Vector Fields and the first Chern class of a Hodge Manifold*, J. Differential Geom. **3** (1969), 477-480.
11. Fiodor Bogomolov, *On the Decomposition of Kähler Manifolds with Trivial Canonical Class*, Math. USSR Sborn. **22** (1974), 580-583.
12. Arnaud Beauville, *Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), 755-782.

de décomposition a peut-être été celle qui a eu le plus d'impact. Les variétés hyperkählériennes, qui apparaissent en 3, ont été très étudiées dans les dernières décennies. Dans les années récentes il y a eu des efforts continus pour étendre le théorème de décomposition au cas avec singularités, avec un article [13] par Benjamin Bakker, Henri Guenancia, Christian Lehn comme point culminant. Il étend le résultat aux variétés ayant des singularités *log terminales* (bien entendu les énoncés, en particulier 2. et 3., doivent être modifiés de façon adéquate).

Costas Bachas et Michael R. Douglas (émérite cnrs au lpens et Université Harvard cmsa)

Pour toute personne qui a travaillé en théorie des cordes Eugenio Calabi est un nom de référence. Les compactifications de la théorie hétérotique sur des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 ont joué un rôle central dans le sujet car c'est seulement l'holonomie SU_3 qui préserve le nombre maximum, $N = 1$, de supersymétries compatibles avec la structure chirale des interactions électrofaibles [14]. La conjecture célèbre de Calabi, prouvée par Yau Shing Tung, affirme que les variétés de Calabi-Yau admettent des métriques kählériennes à courbure de Ricci nulle. C'est nécessaire pour que de telles compactifications puissent être des états du vide en théorie des cordes.

Il y a aussi d'autres façons dont les variétés de Calabi-Yau ont influencé le développement de la théorie des cordes, par exemple dans l'étude des dualités de cordes.

Mais ici nous voudrions mentionner un autre article séminal de Calabi qui a eu un impact sur notre propre travail, son article sur les plongements isométriques (cf. [9]). C'est là qu'il introduit la *diastase*, une fonction bilocale qui porte son nom et a de très belles propriétés : elle est invariante sous les transformations de Kähler-Weyl ; à proximité elle coïncide avec la distance géodésique, et elle est préservée par restriction à une sous-variété. Dans un article [15] avec deux autres auteurs, Ilka Brunner et Leonardo Rastelli, nous avons montré que la fonction diastase de Calabi apparaît naturellement comme entropie d'interfaces entre deux σ-modèles $N = (2,2)$ superconformes en des points différents de l'espace des modules. Ce résultat a été étendu [16] à des théories de dimension 4. Récemment les interfaces et des observables non locales, auxquels on se réfère comme défauts, ont considérablement approfondi notre compréhension de la théorie quantique des champs, mettant en lumière pléthore de nouveaux phénomènes.

Ce qui précède n'est qu'un petit exemple de la façon dont des idées mathématiques élégantes trouvent leur chemin en physique théorique.

Références

[1] J.-P. Bourguignon, X. Chen et S. Donaldson, éd. *Eugenio Calabi Collected Works*. With contributions by Shing-Tung Yau, H. Blaine Lawson, Marcel Berger, and Claude LeBrun. Berlin : Springer, 2020.

[2] E. Calabi. « Complete affine hyperspheres. I ». *Symposia Mathematica* **10** (1972), p. 19-38.

[3] E. Calabi. « Extremal Isosystolic Metrics for Compact Surfaces ». In : *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle.* Vol. 1. Séminaires et Congrès. Société Mathématique de France, 1996, p. 146-166.

[4] E. Calabi. « Extremal Kähler metrics ». In : *Seminar on Differential Geometry*. Sous la dir. de S.-T. Yau. Vol. 102. Annals of Mathematics Studies. Princeton : Princeton University Press, 1982, p. 259-290.

[5] E. Calabi. « Extremal Kähler metrics II ». In : *Differential geometry and complex analysis*. Springer, 1985, p. 95-114.

[6] E. Calabi. « Géométrie différentielle affine des hypersurfaces ». In : *Séminaire Bourbaki, Vol. 1980/81*. Vol. 901. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-New York : Springer, 1981, p. 189-204.

[7] E. Calabi. « Hypersurfaces with maximal affinely invariant area ». *American Journal of Mathematics* **104** (1982), p. 91-126.

13. Benjamin Bakker, Henri Guenancia, Christian Lehn, *Algebraic Approximation and the Decomposition Theorem for Kähler Calabi-Yau Varieties*, Inventiones math. **228** (2022), 1255-1308.

14. P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Vacuum configurations for superstrings,* Nucl. Phys. B **258** (1985), 46-74.

15. C.P. Bachas, I. Brunner, M.R. Douglas and L. Rastelli, *Calabi's diastasis as interface entropy,* Phys. Rev. D **90** (4) (2014), 045004.

16. K. Goto and T. Okuda, *Interface entropy in four dimensions as Calabi's diastasis on the conformal manifold,* J. High Energy Phys **11** (2018), 122.

[8] E. Calabi. « Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens ». *Michigan Mathematical Journal* **5** (1958), p. 105-126.

[9] E. Calabi. « Isometric imbedding of complex manifolds ». *Annals of Mathematics, Second Series* **58**, nº 1 (1953), p. 1-23.

[10] E. Calabi. « Métriques kählériennes et fibrés holomorphes ». *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure, 4e série* **12**, nº 2 (1979), p. 269-294.

[11] E. Calabi. « On Compact Riemannian Manifolds with Constant Curvature I ». In : *Differential Geometry, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics*. Vol. III. Providence, RI : American Mathematical Society, 1961, p. 155-180.

[12] E. Calabi. « On Kähler Manifolds with Vanishing Canonical Class ». In : *Algebraic Geometry and Topology (in honor of Solomon Lefschetz)*. Princeton : Princeton University Press, 1957, p. 78-87.

[13] E. Calabi. « On the Group of Automorphisms of a Symplectic Manifold ». In : *Problems in Analysis, Lectures at the 1979 Symposium in honor of Salomon Bochner*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1970, p. 1-26.

[14] E. Calabi. « The space of Kähler metrics ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Sous la dir. de J. C. H. Gerretsen et J. D. Groot. Vol. II. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1954, p. 206-207.

Jean-Pierre Bourguignon

Institut des Hautes Études Scientifiques

Matheuses - Les filles, avenir des mathématiques
Clémence Perronnet, Claire Marc et Olga Paris-Romaskevich
CNRS éditions, 2024. 240 p. ISBN : 978-2271149664

En janvier 2024, CNRS Éditions éditait le livre « Matheuses - Les filles, avenir des mathématiques ». [a]
Co-écrit par la sociologue Clémence Perronnet, la médiatrice scientifique et facilitatrice graphique Claire Marc et la mathématicienne Olga Paris-Romaskevich, ce livre est un livre de sociologie sur les inégalités en mathématiques, un livre de mathématiques proposant des problèmes de recherche abordables et un livre féministe et engagé contre les discriminations.
Les illustrations de Claire Marc permettent une présentation abordable et vivante du travail de sociologie de Clémence Perronnet. Ce travail restitue les résultats d'une enquête de terrain auprès de 45 lycéennes ayant participé au stage « Les cigales » [b] et les situe dans le contexte plus large de la recherche en sociologie sur les questions d'inégalités de genres, sociales et ethniques en lien avec les mathématiques. Chaque affirmation, donnée et citation d'un chapitre est précisément référencée à la fin du chapitre. Le problème de départ et la méthodologie employée dans l'enquête sont clairement exposés. On retrouve donc dans cet ouvrage la rigueur, la précision et la vérifiabilité chères aux mathématiciennes et mathématiciens ou plus largement à tout scientifique.
Le livre est aussi émaillé de problèmes mathématiques exploratoires passionnants dont les énoncés sont accessibles au niveau lycée (même avant pour une grande partie) et pour lesquels des pistes de recherche, des solutions partielles et des références sont données.
Plusieurs niveaux et modalités de lecture sont donc permis. On peut commencer par une lecture rapide d'un chapitre sur un thème sociologique choisi ou d'un problème que l'on trouve particulièrement inspirant. On peut aussi étudier chaque chapitre en profondeur, consulter les références aux ouvrages de sociologie données, ou se plonger dans l'étude des problèmes mathématiques.
Le livre « Matheuses » est une lecture agréable, instructive et stimulante que l'on ne saurait trop conseiller aux jeunes, surtout aux jeunes filles, mais aussi aux parents et aux mathématiciennes et mathématiciens qui enseignent ou pratiquent la recherche.
Cette lecture invite ces derniers à questionner leurs représentations des mathématiques, leur histoire, leur fonctionnement, leur sens et leur essence même.
On savait déjà que les personnes étudiant et exerçant les mathématiques étaient principalement des hommes, blancs, issus de catégories sociales favorisées, ayant des modèles scientifiques dans leur environnement familial. On prend à la lecture de « Matheuses » pleinement conscience de l'ampleur du phénomène, qui s'accentue au cours du parcours scolaire et professionnel, et pose un problème en termes de justice sociale et de diversité des profils mathématiques.
On prend aussi la mesure des phénomènes d'éviction, d'empêchement et d'exclusion, parfois violents, à l'œuvre dans la société. L'orientation des jeunes femmes, des jeunes issus de classes sociales défavorisées ou de minorités, leur confiance en leurs capacités, leurs performances et leurs représentations des sciences, des mathématiques en particulier, et du rôle qu'ils et elles peuvent y jouer en sont grandement altérées...
Surtout, le livre nous ouvre les yeux sur ce que nos pratiques éducatives, notre enseignement ou la vision que nous avons des mathématiques peut avoir d'excluant, à l'opposé de l'ambition universelle des mathématiques.

La lecture de « Matheuses » nous invite à interroger nos usages professionnels. Comment parle-t-on des mathématiques (figures historiques, qualités nécessaires à leur pratique) ? Quelle image en donne-t-on à nos élèves, nos étudiantes et étudiants (rapport désintéressé ou utilitariste, dimensions esthétique et ludique) ? Comment interagit-on avec ces élèves et avec nos collègues (nos biais et préjugés sont-ils à l'œuvre) ? Plus généralement, dans nos pratiques professionnelles, éducatives et sociales (en tant que parent ou proche), notre conception des mathématiques n'est-elle pas excluante ?

Le constat que pose le livre « Matheuses » est amer. Nous, mathématiciennes et mathématiciens qui nous réclamons de l'universalisme de notre matière, avons contribué à construire ou laissé construire un monde dont les femmes, les minorités raciales et les classes sociales défavorisées sont très largement exclues [c]. Notre croyance en la neutralité de notre domaine, notre certitude de récompenser l'intelligence et la compétence en toute impartialité et notre illusion de rationalité [d], même en dehors de notre domaine de compétence, nous aveuglent et nous empêchent de mener une réflexion profonde et des actions en faveur d'une meilleure inclusivité de notre milieu.

Le livre « Matheuses » nous appelle à ouvrir les yeux et à mener une révolution joyeuse des mathématiques pour une transformation profonde de nos pratiques valorisant le collectif plutôt que l'individuel, rejetant les approches naturalisantes des femmes et des hommes et questionnant les notions de goût, de talent, d'intelligence ou de mérite.

Nous vous invitons toutes et tous à le lire, à le faire lire, à vous interroger et à transformer notre monde mathématique pour le rendre plus inclusif, plus ouvert, plus divers et donc plus riche !

Anne de Roton
Institut Élie Cartan de Lorraine

a. https://www.insmi.cnrs.fr/fr/matheuses

b. Stage de maths en plein air et en non-mixité organisé au CIRM depuis 2019.

c. Le monde des mathématiques dites pures ou fondamentales est plus excluant encore que celui des mathématiques dites appliquées.

d. À cet égard et pour beaucoup d'autres raisons, l'entretien que Clémence Perronnet a donné dans la *Gazette de la Société Mathématique de France* du mois d'avril 2024 est un complément instructif et incisif du livre.

Instructions aux autrices et auteurs

Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Dupliprint – 733 rue Saint Léonard – 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.