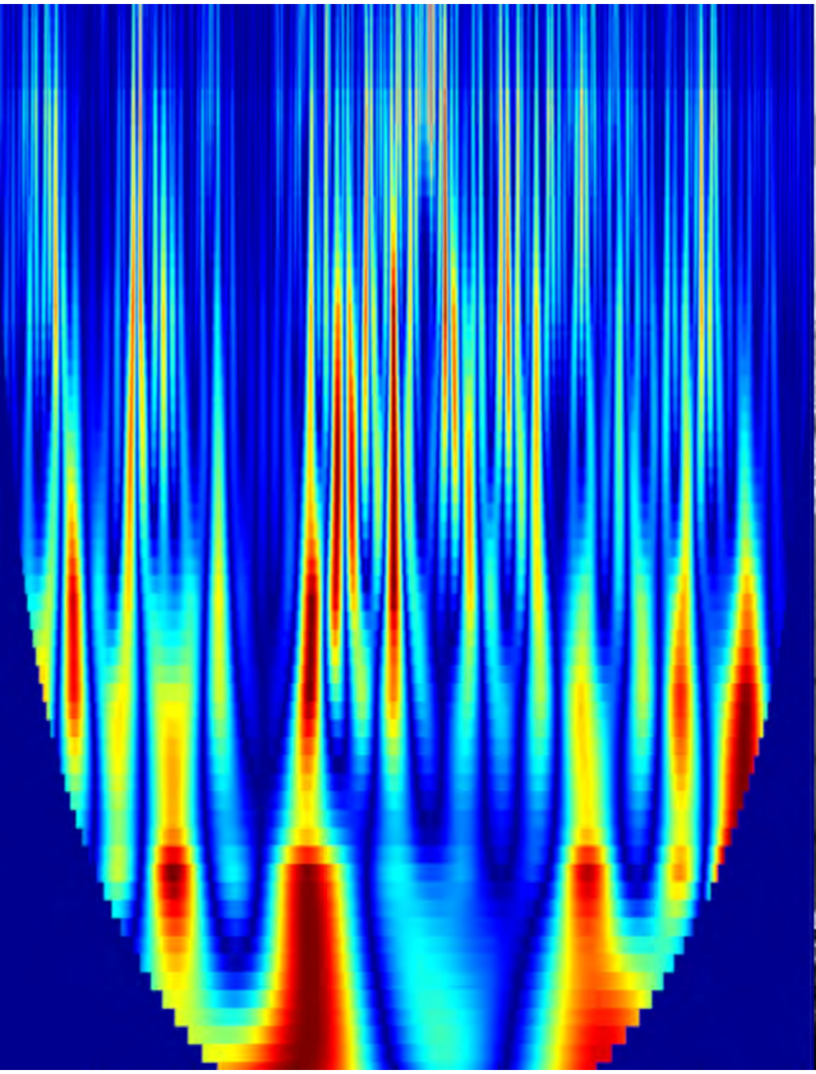
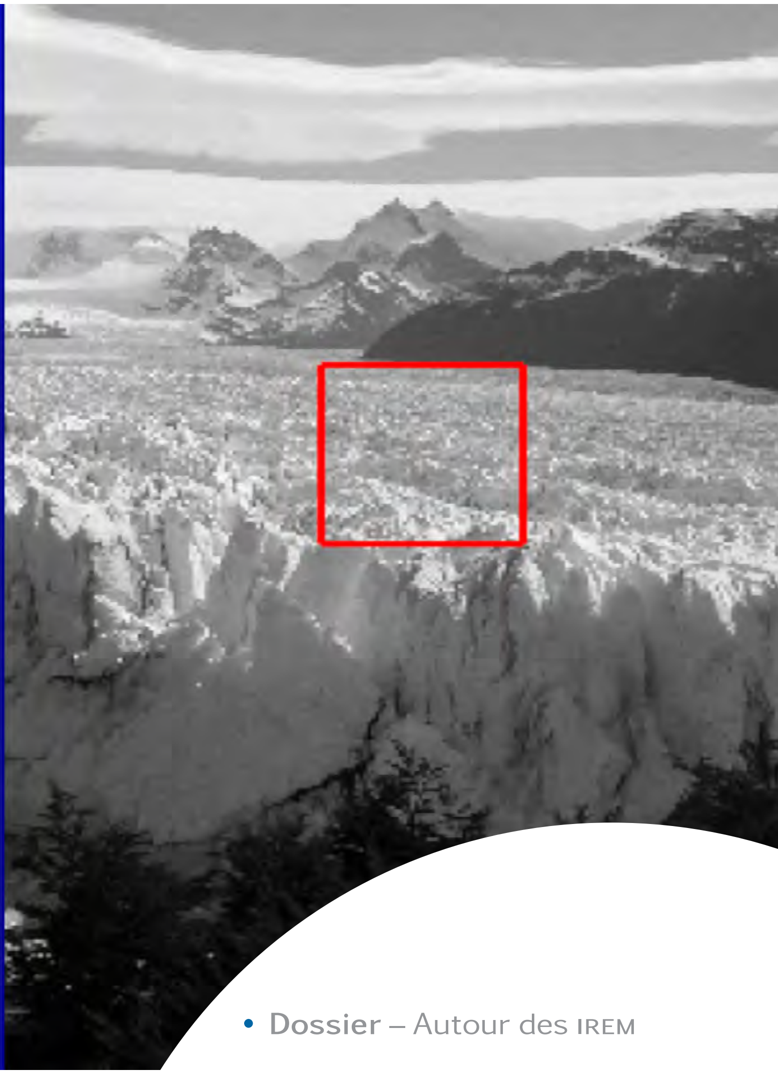
OCTOBRE 2023 – Nº 178

la Gazette de la Société Mathématique de France





- **Dossier** – Autour des IREM
- **Mathématiques** – Motifs : un tour d'horizon
- **Entretien** – avec Ingrid Daubechies

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Fabien Durand

ISSN : 2825-8231

À propos de la couverture. Transformée continue en ondelette (ondelette Chapeau-Mexicain, Boîte-à-outil « Matlab » laboratoire de Physique Éns de Lyon) d'une coupe 1D d'une portion de l'Image du Perito Moreno, Province de Santa Cruz, Argentina (crédit : Patrice Abry).

Nº 178

Éditorial

À vous qui lisez La *Gazette*,

Le rôle qu'elle entend tenir est de nourrir votre amour des mathématiques par des articles, écrits sur mesure au sujet de conjectures qui ont cédé un peu de leur mystère récemment, ou sur des avancées remarquables, ou encore pour vous permettre de vous familiariser avec des domaines au travers des « Raconte-moi… ». Mais un autre de ses objectifs est de vous informer de la vie de la communauté mathématique, que ce soit au travers des actions de la SMF, ou des turpitudes engendrées par les réformes incessantes, entre autres.

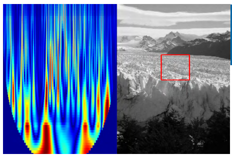
Mais comment ce numéro est-il arrivé entre vos mains ? Au travers de votre adhésion à la SMF ? De celui de quelqu'un de votre famille ? On vient de vous le donner en disant « Tu as vu que… » ? Parce qu'il est posé négligemment sur une table de la salle café, laissé là par une âme charitable qui veut que le contenu en soit partagé par le plus grand nombre ? Ce dernier scenario, si confortant sur la diffusion qu'il le soit pour le comité de rédaction, ne doit pas faire oublier l'importance du premier. La distribution de la *Gazette* au format papier est une fonction du nombre d'adhérents… qui sont 1600 actuellement. C'est un piètre nombre en regard des débats souvent enflammés provoqués par les préoccupations croissantes sur la place des mathématiques dans notre société, que ce soit au sujet de la formation ou de la recherche.

Il est rare de commencer sa lecture par l'éditorial. Il y a fort à parier que, si vous avez pris ce numéro de vous-même, vous l'avez ouvert au hasard. Or, une *Gazette* au format exclusivement numérique ne serait plus feuilletable : qui ouvre aléatoirement un ficher pdf sur une page ? Elle perdrait une grande partie de son charme et de son pouvoir de susciter des discussions…

Si vous pensez que la *Gazette* a un rôle à jouer dans la communication des mathématiques et de leur communauté, et si vous voulez continuer à pouvoir la partager, il faut, malgré le paradoxe apparent, adhérer à la SMF pour qu'elle puisse continuer à en assurer la distribution chez vous et sur vos lieux de travail. Il est important, comme en écologie, de « penser globalement, agir localement ». Plus vous convaincrez autour de vous qu'il faut soutenir la SMF, et plus longtemps vous pourrez profiter de sa *Gazette* !

Pauline Lafitte

la Gazette
de la Société Mathématique de France



Nº 178

Sommaire

Société Mathématique de France

Nº 178

Mot du président

Chères lectrices et lecteurs de la *Gazette*,

Nous avons toutes et tous été touchés par le séisme dramatique qui s'est produit au Maroc début septembre. Nous sommes très nombreux à y avoir des collaborateurs, des amis, pour certains de la famille. J'ai donc une pensée pour nos amis marocains. Je leur souhaite tout le courage nécessaire pour faire face à cette épreuve.

Je dois évoquer également le calvaire sordide et abject infligé à Azat Miftakhov par les perfides autorités russes. Cela a été relayé par la SMF et par de nombreux médias. Azat Miftakhov devait sortir de prison le 4 septembre 2023 après y avoir passé quatre ans à la suite d'un procès indigne. Les services de sécurité russes l'ont à nouveau arrêté à sa sortie de prison pour de nouveaux motifs créés de toutes pièces. A. Miftakhov se serait livré à une « justification délibérée d'actes terroristes devant deux condamnés ». Espérons que son calvaire prendra fin rapidement.

La rentrée est donc loin d'être réjouissante. Aussi j'espère que vous l'abordez après avoir pleinement et sereinement profité de vos congés estivaux.

Dans ce mot du président de rentrée je fais habituellement un bref compte-rendu des soutiens apportés aux doctorants agrégés dont les demandes de détachements ou disponibilités ont été refusées. Cette année étrangement je n'ai eu aucun dossier à traiter. La raison la plus probable à cela est le tarissement du volume horaire de mathématiques au lycée suite à la réforme récente. Le collectif Maths&Sciences, dans lequel la SMF est très impliquée, rend régulièrement compte de ces incidences délétères de la réforme du lycée. Une tribune, écrite par ce collectif, du journal *Le Monde* du 10 septembre en témoigne. Elle est à lire sur notre site web.

Grâce à l'enthousiasme et le bénévolat de nombreux collègues, il existe en France une grande diversité d'initiatives visant à faire découvrir les mathématiques aux élèves de tous horizons, tels les stages Maths·C·pour·L. Cette initiative prend de l'ampleur avec un programme qui s'élargit à de nouvelles universités. Il apparaît qu'une importance particulière est à apporter aux modalités de sélection. Celles-ci doivent permettre de s'affranchir de la reproduction sociale qui est trop souvent observée. Comme le comité de rédaction m'y a encouragé, je consacrerai un article à ce sujet prochainement.

Quoi qu'il en soit je remercie toutes celles et ceux qui œuvrent pour offrir aux enfants de toutes origines la possibilité de découvrir les multiples attraits et facettes des mathématiques.

Bien à vous

Le 1er octobre 2023

Fabien Durand, président de la SMF

La formation mathématique à la Une L'Épopée des mathématiques et des sciences : sujet de société ?

• M. GUENAIS

L'épopée de la *Gazette* d'avril 2022 décrivait l'ampleur soudaine prise dans les médias par la question des mathématiques au lycée et comment le sujet était devenu un élément visible dans le débat politique. Je poursuis [1] ce récit qui montre comment l'action du Collectif emmené par la SMF a interféré avec la campagne présidentielle et entraîné des infléchissements notables des politiques éducatives et de leur planification. La demande d'une réorganisation significative du lycée, point de départ de cette action, actuellement non prise en compte par les politiques continue à faire l'objet d'une mobilisation massive des communautés en lien avec les sciences.

Introduction – janvier à mars 2022 : l'incendie médiatique – maths et filles

Dans la *Gazette* d'avril 2022 était soulevée la situation inquiétante d'une formation en mathématiques et en sciences inadaptée pour répondre aux besoins grandissants de compétences scientifiques nécessaires pour relever les défis sociétaux. Déclenchée par l'alerte de Jean-Pierre Bourguignon sur le plateau de France Inter le 21 janvier 2022 au sujet de la baisse brutale de la part des filles dans les classes de mathématiques en Terminale, on assistait à la montée soudaine de l'intérêt des médias pour la place des mathématiques au lycée suite à la réforme du lycée. Ce buzz inattendu avait visiblement perturbé l'organisation prévue du ministère de l'Éducation nationale, le conduisant à réunir en urgence un comité [2] de pure forme pour répondre aux questions devenues gênantes pour l'entrée dans la campagne électorale. De son côté, la communauté mathématique mobilisée et engagée dans un dialogue avec les médias s'était élargie à un collectif de 24 structures associatives scientifiques des mondes éducatif et académique rassemblant également les associations de promotions des femmes dans les métiers scientifiques et techniques [3]. La plupart des sciences y sont représentées, dont l'ingénierie et l'histoire des sciences.

21 mars 2022 : rapport Mathiot – Retour des maths, assises des maths ? la fumée s'épaissit

Le rapport du comité Mathiot, de « consultation sur la place des maths au lycée général » est publié le lundi 21 mars 2022. Les aménagements présentés varient peu au regard de ce qui était prévisible et que le Collectif a dénoncé dans la tribune du *Monde* du 15 mars 2023. Le rapport propose 1h30 à 2h de maths par semaine en plus dans l'enseignement scientifique général (ESG), et suggère une alternative qui restreindrait aux seuls élèves ne suivant pas la spécialité maths cet enseignement supplémentaire. La date marquant le début du décompte de parole pour la campagne présidentielle, le ministre reste en retrait de ces annonces et se contente de saisir le Conseil Supérieur des Programmes [4]

1. Un récapitulatif de l'action jusqu'en mars 2023 se trouve sur dans le *Bulletin de la CFEM* n°51, mars 2023.
2. Comité de « consultation sur la place des mathématiques au lycée général », présidé par P. Mathiot.
3. Au 21 mars, le collectif rassemble : ADIREM, AEIF, APMEP, ARDM, CFEM, CLEA, EPI, F&M, FI, FS, GEM, SF2A, SFB, SFB, SFBD, SFDS, SFE2, SFHST, SFP, SIF, SMAI, SMF, UDPPC, UPA, UPS.
4. Envoi d'une lettre de saisine du 22 mars 2022, CSP présidé par Mark Sherringam.

pour construire un nouveau programme « maths pour tous ». Les journalistes à l'affut de ces conclusions nous assaillent dès le lundi midi, nous prenant de court, sans avoir le temps de la réflexion pour mettre à plat nos arguments : la communication du ministère est redoutablement efficace. Nous publions une première analyse du rapport sur nos sites dès le 22 mars, mais nos explications précipitées et tardives ne suffisent pas à convaincre les journalistes qui relaient mollement notre avis [5] sans reprendre l'argumentaire, complexe : comment expliquer en peu de mots simples que « remettre des maths » n'est pas satisfaisant ?

Un point dans l'annexe de ce rapport nous interpelle : la mention d'Assises sur l'enseignement des mathématiques à l'automne. En effet, l'INSMI a prévu en novembre 2022 des Assises des mathématiques portant sur des questions larges concernant l'ensemble de notre discipline... quel étrange mélange ? Serait-il question d'utiliser l'événement prochain de la recherche mathématique au service de la communication de l'Éducation nationale ? Nous signalons cette confusion des genres qui nous inquiète, puis réfléchissons aux élections qui approchent : nous devons interpeller les candidats à la présidentielle et rédiger notre lettre ouverte. Le temps presse.

1er avril 2022 : des maths partout dans les médias – de la guerre en Ukraine aux poissons d'avril

Le 30 mars 2022 paraît dans *Challenge* l'appel de 30 grands patrons pour « sauver les maths ». Même si le lien entre l'ajout annoncé de l'heure et demie de maths et la solution du problème ne semble pas très clair, cette prise de position sur le sujet montre l'importance qu'il prend dans la campagne. La publication du 1er avril de la SMF obtient un succès qui dépasse la capacité d'accueil du site : le prix spécial d'Alembert de la popularisation des maths décerné à Jean-Michel Blanquer pour avoir eu l'idée géniale de supprimer les maths afin d'augmenter leur visibilité médiatique fait fureur dans la communauté scientifique ce jour-là. Bizarrement, il ne viendra pas le réclamer.

Les articles en lien avec les maths se joignent à ceux liés au problème de la féminisation des métiers scientifiques et techniques et s'enchaînent : de la guerre en Ukraine et ses enfants ukrainiens si forts en maths [6], des inquiétudes sur l'avenir [7] et sur l'état du niveau des élèves français dans les études internationales, mais aussi des conseils [8] et des initiatives locales des établissements scolaires [9] ; des tribunes des polytechniciennes [10] pour encourager les filles à faire des maths au lycée ; des poissons (d'avril ?) qui font des maths ; des youtubeuses prof de maths ou du plafond de verre et de la nécessité de profs « bad ass » [11], et même une question posée sur le sujet au jeu télévisé des 12 coups de midi sur la chute de la proportion de filles en classes de maths au lycée, et les impacts sur les portes ainsi fermées pour les choix d'études supérieures. L'explication de cet intérêt nouveau n'est pas de la « mathophilie », mais le constat que sur la période, les articles ayant le plus d'impact sont ceux qui parlent de maths : quelle étonnante victoire, cet engouement collectif soudain !

Dans le même temps, le Collectif rédige sa lettre aux candidats à la présidentielle : ce sont les journalistes du *Figaro-Vox* qui nous sollicitent pour la publier sur leur site, le 4 avril. Dans notre lettre, nous rappelons les impacts du lycée sur les formations scientifiques, et ses conséquences. Nous en extrayons 12 recommandations générales, sur 4 volets, dont je reprends les grandes lignes.

- **Réforme du lycée**
  1. Renforcement de la place des sciences et diversification des maths.
  2. Maintien de la polyvalence en Terminale, en particulier scientifique.
  3. Remédiation aux déséquilibres de genre et sociaux provoqués par la réforme.

5. La dépêche AFP du 21 mars 2022 mentionne notre échange sur le sujet par une phrase en fin de texte après la présentation par le comité du ministère. Cette phrase sera souvent coupée dans les reprises par les journaux régionaux.
6. Dépêche AFP du 29 mars.
7. Journal *Le Monde Campus* du 26 avril 2023.
8. Plusieurs interviews dans le journal l'Étudiant pour aider à l'orientation ; tribune de Florent Ménégaux, PDG de Michelin dans le JDD.
9. Exemples : *Ouest-France*, *Midi Libre*, *Dauphiné libéré*.
10. Journal *Le Monde* du 31 mars 2023.
11. Sur RMC le 31 mars 2023, « Le choix d'Angèle ».

– **Attractivité du métier d'enseignant**

4. Amélioration des conditions de travail.
5. Amélioration de la formation initiale et pré-recrutements.
6. Renforcement de la formation continue dans le premier degré.

– **L'enseignement supérieur et la recherche**

7. Engagement en faveur des financements récurrents, amélioration des conditions de travail.
8. Augmentation du nombre de postes fixes d'enseignants-chercheurs, en particulier pour répondre aux besoins en formation scientifique.
9. Actions fortes en faveur de la féminisation, particulièrement en sciences.

– **Plan sciences et société**

10. Action sur le discours à l'orientation pour valoriser les parcours scientifiques.
11. Action sur l'image des sciences et la place des femmes en sciences.
12. Engagement des politiques à promouvoir les sciences par des actions concrètes.

22 avril : le président reconduit et le temps suspendu – maths pour tous, oui, mais comment ?

La remise de maths au lycée dans le tronc commun est annoncée dans le discours du Président juste réélu [12]. Elle fait réagir les journalistes qui sollicitent le soir même l'APMEP [13]. Cette annonce présidentielle fournit de nouvelles occasions d'entretenir le sujet, et les voix pour défendre l'importance de la discipline sont nombreuses [14]. Nos analyses reparaissent régulièrement dans les articles pour lesquels les membres du Collectif sont régulièrement sollicités. Notre nouveau communiqué paru juste après l'élection est relayé par l'AEF [15] et divers médias. Nous y expliquons pourquoi les mesures proposées ne résolvent rien [16] en reprenant méthodiquement l'argumentation qui se clarifie. J'en reprends ici les éléments clés.

Voilà les problèmes provoqués par la réforme.

– En Terminale, baisse d'effectif du vivier scientifique, de sa polyvalence et du volume de sa formation : -25% en parcours scientifique, -50% en ajoutant la spécialité maths, seulement 2 disciplines scientifiques possibles et 12h de sciences hors options.
– En Première et Terminale, aggravation des inégalités filles/garçons dans les classes de maths : retour en arrière d'au moins 25 ans dans la proportion de filles en maths.
– En Première et Terminale : fort déséquilibre des sciences dans le tronc commun : 2h sur 14h
– En Première et Terminale, absence de diversité de l'offre de formation en maths, avec une seule spécialité proposée, non adaptée aux sciences économiques et sociales.

Et les mesures annoncées.

– En Première, ajout de 1h30 de maths dans le tronc commun pour les élèves ne choisissant pas la spécialité maths en 2022.
– En Terminale, accès à l'option maths complémentaires de 3h pour tous.

Notre analyse des effets sur les problématiques évoquées.

– Pas d'effet sur le vivier scientifique, ni sur leur polyvalence, l'ajout ne s'adressant pas à ces élèves.
– Pas d'effet sur les inégalités de genre dans les classes de spécialité maths.
– Pas de rééquilibre significatif des enseignements scientifiques dans le tronc commun.
– Pas d'amélioration de la diversité des contenus proposés en Terminale.

Nos inquiétudes.

– Sur le discours accompagnant l'orientation : sera-t-il clair qu'un parcours de sciences ne peut se limiter à 1h30 de mathématiques en Première ?
– Sur l'option maths complémentaires : son accès élargi risque de pénaliser les élèves (surtout des filles) souhaitant s'orienter en santé ou biologie ou dans des parcours sélectifs.

12. *Le Figaro* du 22 avril 2022 : « Les maths reviennent en grâce au lycée ».
13. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.
14. *L'Express* du 29 avril 2022 : « Les français nuls en maths : la bombe à retardement », le 4 mai « Conséquences d'une France sans maths ».
15. Dépêche AEF du 29 avril : « Mathématiques au lycée : un collectif d'enseignants refuse toute mesure prise en urgence pour la rentrée 2022 ».
16. 1h30 pour « sauver les maths » ? L'illusion d'un remède. Publié le 26 avril 2023 sur le site de la SMF.

De nouveau, nous demandons la mise en place d'une réflexion commune avec les pouvoirs publics et une remise à plat du système actuel, et de ne pas bouleverser dans l'urgence des établissements épuisés par l'enchaînement des réformes aggravé par la crise sanitaire. Nous nous adressons directement au président réélu. Nous n'aurons pas de réponse à cette sollicitation.

Du côté politique, les incertitudes des élections entretiennent le sentiment de flottement : l'alliance des gauches laisse planer le doute sur une majorité présidentielle aux législatives, retardant la nomination du nouveau gouvernement, et donc la confirmation de la mise en place des déclarations du président. Par ailleurs, il semble que Jean-Michel Blanquer ne soit plus en odeur de sainteté auprès d'Emmanuel Macron [17]... L'affaire des maths, après Ibiza, aura-t-elle précipité sa disgrâce ?

11 mai, nouvelle donnée au problème : n'y aurait-il plus de profs de maths ?

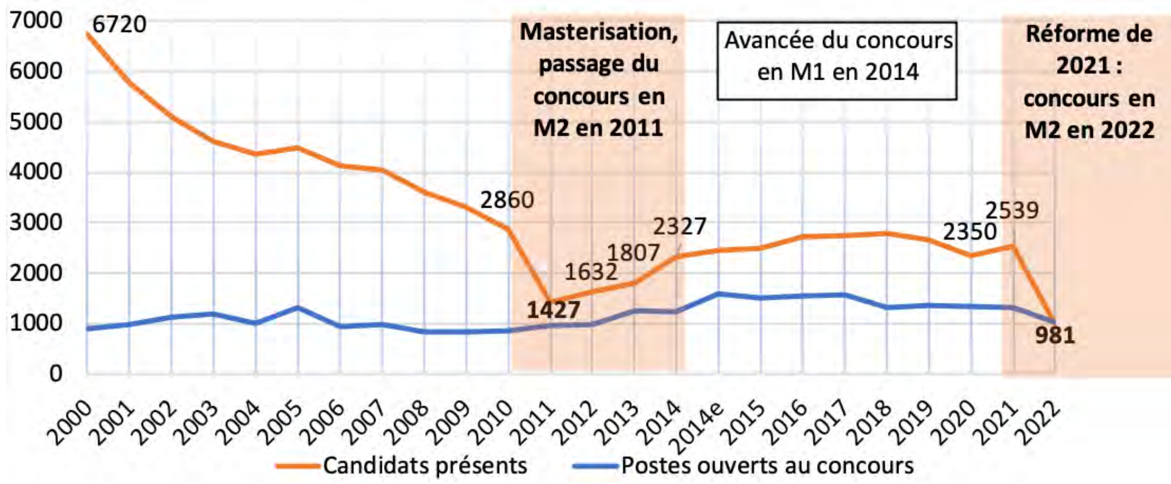
À l'approche des derniers conseils de classe, sort le 12 mai le projet de nouveau programme de « maths pour tous ». Fait en urgence avec un cadrage flou, son contenu reste superficiel et sans cohérence globale. Le sujet du genre est traité sans connaissance des enjeux ni des problématiques [18]. Quoi qu'il en soit, sans annonce officielle, pas de mise en œuvre possible sur le terrain. Par ailleurs, un nouveau rebondissement surgit dans l'actualité de l'éducation : les résultats d'admissibilité au CAPES viennent de tomber. Ils montrent un effondrement du nombre de candidats admissibles, souvent inférieur au nombre de postes à pourvoir. De quoi relancer le débat. Toujours dans l'attente d'un nouveau ministre, on interroge celui qui semble en sursis... Jean-Michel Blanquer se montre évasif sur le sujet, assurant que le Président ayant décidé de l'ajout de maths dès l'an prochain, ce serait mis en œuvre et qu'on trouverait bien des profs pour la rentrée [19]. Devant l'absence de cadrage et de moyens humains, même les proviseurs signalent leur désaccord sur des aménagements pour la rentrée. Notre communiqué est repris dans les journaux pour appuyer le mouvement général d'opposition à une quelconque modification à quelques semaines des vacances.

Revenons sur la question des postes d'enseignants de maths qui prend temporairement de l'envergure dans le débat public : la réforme du lycée et du bac a masqué la mise en place d'une nouvelle réforme du CAPES menée au pas de charge et pourtant vivement critiquée par la communauté des formateurs [20], visant à reculer l'année du concours en fin de Master 2, au lieu du Master 1 jusque-là. Les conséquences sur les effectifs de candidats sont connues, puisque ce recul du concours avait déjà été imposé en 2011 lors de la mastérisation des formations d'enseignants : le concours étant peu sélectif, le recul d'une année pour le concours revient à se priver des étudiants du M2 l'année de la nouvelle mise en place. En effet, la plupart des étudiants de M2 en 2011 ont été reçus en 2010, à la fin de leur M1. Le vivier des étudiants de M2 est donc pratiquement inexistant, et il ne reste comme candidats que les extérieurs. En mathématiques, cela représente environ 50% des effectifs. Le scenario de 2022 est tout à fait analogue à celui qu'on observe en 2011.

Les problèmes de recrutement et de sélectivité au concours sont anciens : le rapport Kahane alerte dès 2003 [21] sur l'augmentation des besoins en termes de recrutements, particulièrement pour les mathématiques (les raisons sont surtout démographiques) et la nécessité d'une planification à moyen terme. Sans mesure prise au niveau politique sur ce sujet, le nombre des candidats était donc en diminution constante depuis 20 ans, avec une rupture de moitié en 2011, puis une très légère stabilisation depuis la remise en place d'un concours en M1 avec un M2 en alternance en 2014. Reprenant les nombreux travaux de Pierre Arnoux sur le sujet, je représente ci-dessous le graphique correspondant aux effectifs des candidats présents et nombres de postes offerts au concours. On y lit la tendance générale, et la chute prévisible des effectifs de candidats les 2 années de mise en place du concours en M2 :

17. Dans sa déclaration du 5 avril, Emmanuel Macron déclare qu'« il n'y a pas eu l'école de la confiance » fer de lance de Jean-Michel Blanquer durant son mandat au MEN.
18. Voir la réponse à la DGESCO de la SMF et la SFdS le 23 mai 2023 sur le site de la SMF.
19. Journal *Le Monde* du 13 mai 2022.
20. Analyse des sociétés savantes publiée en 2019 sur le site de la SMF.
21. `http://www-old.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Formation-des-maitres%20-%20Perrin.pdf` P.40.

FIGURE 1 – Évolution du nombre de candidats et du nombre de postes offerts au CAPES de mathématiques entre 2000 et 2022



Sans surprise donc, pour cette nouvelle mouture du concours 2022, les effectifs de candidats ont diminué de moitié, passant cette fois ci sous le seuil du nombre de postes à pourvoir : la chute est vertigineuse ! Seulement 816 admissibles pour 1035 postes. De quoi émouvoir les médias lors des résultats d'admissibilité au concours du CAPES [22] : finalement, s'il n'y a plus de maths, c'est qu'il n'y a plus de profs [23] ? La résignation transparaît dans le débat ambiant et au travers des questions des journalistes qui nous sollicitent.

Comment expliquer simplement que oui, il y a un problème de recrutement, mais que non, il n'est pas nouveau, et que oui, cette année est particulière en raison de la mise en place d'une réforme qui fait chuter mécaniquement les effectifs de moitié. Comment dire que non, on ne doit pas se résigner à l'abandon des maths, parce que oui, on avait suffisamment de postes avant la réforme en incluant les contractuels, largement licenciés depuis la réforme en raison de l'économie d'heures de maths réalisée [24] ? Mais que non, nous ne voulons rien mettre en place pour l'an prochain en urgence parce qu'il est nécessaire d'avoir une vision globale sur le système ? Nous avons encore bien des chantiers à travailler pour communiquer efficacement sur tous les sujets ayant trait à l'enseignement et aux impacts des politiques publiques…

17 mai, nouveau gouvernement : nouvelles mesures pour les maths… où en est-on ?

Le nouveau gouvernement est finalement nommé le 17 mai, presque 2 mois après le début de la campagne. Le jour de la nomination de la première ministre, l'émission « le Quotidien » sollicite la présence d'un ou une matheuse. C'est finalement Étienne Ghys qui sera présent ce jour-là. Les médias n'ont pas abandonné le sujet, mais le message est à présent moins clair : 1h30, solution ou non ? Pas facile de s'y retrouver dans cet imbroglio…

Pap Ndiaye, nouveau ministre de l'Éducation nationale, est immédiatement sollicité par le Collectif pour renouveler sa demande d'audience du mois de février. Nous signalons les perturbations inutiles créées par l'imposition d'une mesure d'urgence non adaptée au problème du lycée et demandons le report de la mise en œuvre prévue.

Le temps a passé pour permettre une quelconque mise en place d'un enseignement nouveau pour la rentrée 2022, les vœux des lycéens sont définitifs, les conseils de classe en cours : ce qui était encore possible fin janvier ne l'est plus en juin. Mais le Président s'est engagé dans son discours, il sera donc suivi, « quoi qu'il en coûte » : le 2 juin, lors de sa visite dans les écoles des quartiers

22. *Le Monde* du 8 juillet « Enseignants, un système de recrutement à la peine », ou *Télérama* du 28 août « Mais où sont passés les profs de maths ? ».
23. `https://www.vousnousils.fr/2022/05/19/profs-de-maths-lincroyable-soustraction-660888`
24. Le calcul établi à l'aide des données de la DEPP dans la note du 7/2/23 du collectif montre une diminution du volume d'heures enseignées au cycle terminal d'environ 700 000 h/sem, soit plus de 3000 postes.

nord de Marseille, il annonce la création d'un cours d'1h30 de maths dès la rentrée prochaine pour les élèves qui le souhaitent seulement. Le ministre de l'Éducation nationale l'accompagne, muet. Cette demi-mesure d'un enseignement optionnel est provisoire, et laisse une ouverture vers une évolution possible. Encore une fois, grâce à la vigilance de ses membres, le Collectif a anticipé ces annonces. Il publie au même moment une nouvelle alerte et lettre ouverte au ministre, permettant à l'AFP [25] et l'AEF de nous relayer avec l'annonce présidentielle. Les critiques dépassent bien entendu celles du collectif [26] qui s'est élargi à la Conférence des Directeurs d'UFR Sciences et à l'Association des professeurs de SES.

Cette fois-ci, le ministère a pris contact avec certains d'entre nous. Le conseiller aux affaires pédagogiques nous assure une rencontre prochaine. Celle-ci aura bien lieu le 16 juin, répondant à la demande du collectif restreint aux maths avec ce dernier et une conseillère nouvellement nommée, Julie Benetti. La question d'une entrevue avec d'autres membres du Collectif est posée, mais la priorité semble réduite pour l'instant aux mathématiques. Cette rencontre organisée avec une conseillère auparavant rectrice interroge … conseillère à quoi ? Pourquoi passer de rectrice à simple conseillère ? Ne nous y trompons pas, il s'agit sans doute là d'un entretien de pure forme destiné à servir la communication du ministère. Nous commençons à explorer les arcanes du pouvoir. L'échange avec les représentants du collectif ne permet pas d'envisager d'ouverture du dialogue ni du dossier du lycée [27]. Au-delà d'un discours constitué d'idées préconçues et d'arguments de vérité générale, la question d'une quelconque démarche scientifique ou même raisonnée ne semble pas du tout à l'ordre du jour. La partie semble momentanément verrouillée, mais le statut provisoire de la mesure annoncée laisse encore une place à l'optimisme. Réfléchissons aux sujets sensibles pour la rentrée prochaine… les filles et les sciences : cœur d'un réacteur médiatique, politique ?

Quelles peuvent être les pistes pour reconstruire ? Le collectif se réunit pour la première fois en présentiel à Paris le 1er juillet. Il rassemble plus de 30 associations ou structures scientifiques, et devient le Collectif Maths&Sciences. Lors de cette journée de travail réunissant environ 25 personnes, 16 des associations seront représentées, la plupart par leurs présidentes et présidents. Elle donnera lieu à une synthèse interne envoyée aux conseillers rencontrés. Elle est destinée à faire un premier bilan des effets observés de la réforme du lycée sur les conditions d'enseignement et la formation scientifique et à réunir les premiers points de convergence pouvant servir d'appui à des solutions possibles… Autant l'unanimité sur les constats est aisée, autant la construction est difficile : le travail ne fait que commencer !

Une rencontre au ministère de l'Enseignement supérieur le 11 juillet nous permet de faire le point sur l'ensemble des impacts potentiels de la réforme du lycée : sur les effectifs scientifiques dans le supérieur, et surtout la baisse de la part des filles, sur le changement radical des profils des futurs professeurs des écoles, sur l'épuisement du vivier des élèves à profil polyvalent, en raison de l'abandon massif des maths qui les touchent de plein fouet. Nous demandons de l'aide pour poursuivre nos analyses d'impacts dans le supérieur, en nous appuyant sur les données publiques du SIES et de parcoursup. Malgré le peu de marge de manœuvre dont il semble disposer, le conseiller semble à l'écoute et intéressé par le sujet. Il nous suggère de nous rapprocher des entreprises et de leurs fédérations, nous assure un accompagnement pour l'accès aux données. Dommage, il quittera son poste 2 mois plus tard… Encore un travail à reprendre.

Année 2022, quel bilan ?

L'action de la SMF et de ses partenaires associatifs scientifiques dans le paysage médiatique au cours du 1er semestre 2022 est loin d'être négligeable : au-delà d'une prise de conscience générale sur l'importance des maths et des sciences à laquelle nous aurons contribué, l'infléchissement de la politique publique aura été visible, en retar-

25. Objet d'une dépêche AFP, relayée dans toute la presse, par exemple : `https://www.parismatch.com/Actu/Politique/A-Marseille-Emmanuel-Macron-annonce-le-retour-des-maths-en-option-en-Premiere-1809588`. *La dépêche* mentionne les réactions des syndicats, et notre demande récurrente : « Selon Sophie Vénétitay, secrétaire générale du SNES-FSU, premier syndicat du second degré "il s'agit d'un affichage politique", qui ne va "malheureusement pas amener plus d'élèves, ni plus de filles à choisir les maths, alors que c'était le but". Dans un communiqué, un collectif de sociétés savantes et associations de professeurs et universitaires scientifiques demande au ministre de l'Education nationale, Pap Ndiaye, "la mise en place d'un groupe de travail regroupant les différents acteurs compétents pour proposer des solutions pérennes pour la rentrée 2023" ».

26. `https://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2022/06/21062022Article637913904202232316.aspx.html`

27. Compte rendu de la rencontre : à retrouver sur le site de la SMF dans le dossier « Communiqués sur la réforme du lycée ».

dant d'une année scolaire l'imposition d'un nouvel ajustement au lycée déconnecté de la réalité des besoins. Elle laisse l'espoir d'une réflexion plus structurée sur les impacts d'une décision décriée de toutes parts.

Elle aura aussi permis un rapprochement large entre les mondes académiques, éducatifs et professionnels. À cette date, le collectif Maths&Sciences nouvellement formé rassemble une trentaine de structures et associations incluant des fédérations mixtes d'entreprises et de grandes écoles du numérique qui ont des partenariats avec la SIF. La plupart des sciences sont représentées : informatique, physique, astrophysique, biologie, écologie, histoire des sciences, et aussi les sciences économiques et sociales. Il fédère aussi des réseaux de formations et des associations pour la promotion des femmes dans les carrières scientifiques.

L'ajustement mis en place de manière optionnelle au lycée ne rencontrera que peu de public [28], en raison de l'annonce si tardive. Les heures ne seront pas prises sur l'enseignement actuel d'ESG mais restent dépendantes de cet enseignement fourre-tout peu lisible et dont la mise en œuvre pose déjà de nombreuses difficultés. Il ne résout aucun des problèmes que nous avons relevés sur la baisse des effectifs des élèves en spécialité mathématiques, et des filles en particulier. Il pourrait même s'avérer contre-productif s'il était proposé comme alternative possible à la spécialité maths comme prérequis suffisant pour l'option maths complémentaires de 3h en Terminale pour accéder aux filières de biologie ou santé. La question des maths intéresse toujours les médias, comme en témoignent les dossiers spéciaux de *l'Express* début juillet 2023 et de *Télérama*, début septembre. Même *Charlie Hebdo* s'y est mis.

Enfin, les mathématiques auraient-elles pris durablement une véritable place dans les sujets de société ? Elles seules ne peuvent cependant suffire au débat qu'elles ont engendré... si la discipline propre est essentielle à son développement, ce sont ses liens avec ses disciplines sœurs qui lui donnent sa puissance et représentent les enjeux sociétaux. Ainsi, l'informatique, la physique, l'ingénierie, la biologie, la médecine, la géophysique sont également menacées par les bouleversements du lycée : moins de vivier technologique, moins de filles en informatique, des cursus hétérogènes handicapants dans les filières santé/biologie dans lesquelles, de plus en plus, les maths sont indispensables. N'oublions pas non plus l'économie qui risque de payer le prix fort de l'économie de maths au lycée. Enfin, la question du genre apparaît comme question clé dans le débat. Il est fort à craindre que les dégâts en termes d'égalité femme/homme soient bien plus sérieux que la légèreté avec laquelle ils semblent avoir été traités pour l'instant.

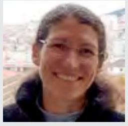
Le bilan d'activité de ces 6 mois intensifs dans la vie publique se traduit par la publication de 15 textes à destination du grand public [29], notes de synthèses chiffrées, tribunes, lettres aux ministres ou au président, plusieurs dizaines d'interviews, téléphoniques, radiophoniques, filmées ou télévisées, des centaines de relais dans les différents médias de nos textes et interviews. On imagine difficilement la force politique donnée à la SMF et au Collectif par cette écoute exceptionnelle.

Où en est-on en septembre 2023 ?

Le nouveau quinquennat sans changement de président n'a pas permis de réflexion réelle sur une remise à plat de l'organisation du lycée ainsi que nous l'avions demandé. La mise en place d'une politique publique est un problème complexe, ses freins et ses leviers possibles demandent une analyse poussée. En revanche, la visibilité médiatique, politique et économique du Collectif Maths&Sciences et sa pérennité semblent bien en place aujourd'hui, malgré des tensions apparues en fin d'année 2022. En témoignent mon invitation à *Télématin* sur *France 2* le 27 août à la suite de la conférence de rentrée du nouveau ministre de l'Éducation nationale, Gabriel Attal, ainsi que la tribune du Collectif Maths&Sciences et ses partenaires des fédérations d'entreprises [30] parue dans le journal *Le Monde* du dimanche 10 et du lundi 11 septembre 2023 [31]. La mise en avant du thème des maths et des filles dans les médias a permis d'arriver à la constitution et la stabilisation du Collectif et à sa visibilité actuelle. À ce jour, le Collectif Maths&Sciences que je coordonne rassemble 34 associations et structures des

28. *Le Parisien* du 25 juin : pourquoi le retour des maths en Première fait un flop.
29. À retrouver sur le site de la SMF dans les dossiers communiqués sur la réforme du lycée.
30. Près de 40 associations, fédérations et structures signataires, dont les partenaires professionnels CIGREF, Conseil National du Logiciel Libre, Fédération Bancaire Française, Fédération Syntec, Institut des Actuaires, Numeum, Syntec Conseil, Syntec Ingenierie. Union Française des Métiers de l'Evénement.
31. Le texte intégral et ses signataires est accessible en ligne sur le site du Collectif Maths&Sciences.

mondes éducatif, académique et professionnel, liés à la biologie, la chimie, l'écologie, l'économie et les sciences sociales, l'histoire et la philosophie des sciences, l'informatique, l'ingénierie, les mathématiques, les lettres, la physique, et bien entendu, à la promotion de la place des femmes dans les carrières scientifiques [32]. À nous à présent d'utiliser ces appuis pour peser dans le débat public, dans l'intérêt de tous.



Mélanie Guenais

Université Paris Saclay

melanie.guenais@universite-paris-saclay.fr

Maîtresse de Conférences au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay à l'Université Paris-Saclay, Mélanie Guenais est Vice-Présidente de la SMF en charge de l'enseignement depuis 2020. Son domaine de recherche porte sur la théorie ergodique et les propriétés spectrales des systèmes dynamiques.

Soutien à Azat Miftakhov

Le 2 septembre se tenait à Paris une manifestation de soutien à Azat Miftakhov emprisonné depuis 2019 en Russie et dont la libération était prévue le 4 septembre. À cette occasion Michel Broué, pour le comité Azat Miftakhov, et Adrien Deloro, chargé de mission Droits humains pour la SMF, ont relaté, dans leurs discours présentés ci-dessous, des événements marquants qui ont jalonné son incarcération. Ces textes réitèrent le soutien déterminé de la communauté mathématique française au jeune mathématicien. Malheureusement, Azat Miftakhov a été réincarcéré dès sa libération le 4 septembre.

Azat Miftakhov appartient à la communauté mathématique

[la] « prison, séjour que l'on a tort de considérer comme un lieu de recueillement »

Ces mots sont du mathématicien Évariste Galois, emprisonné sous Louis-Philippe. Et encore : le jeune républicain français parlait de l'ancienne prison Sainte-Pélagie, et non des bagnes russes actuels dont les conditions font frémir. Je ne pousserai pas plus loin la comparaison entre Miftakhov et l'illustre Galois, notamment car leurs mathématiques sont bien différentes. Mais même apeuré, un régime qui emprisonne un jeune talent pour ses idées, fait toujours un mauvais calcul.

Miftakhov travaille en théorie des probabilités, un domaine fortement marqué par les scientifiques russes du XXe siècle. Intéressé par les mathématiques dès l'enfance, Miftakhov entre en 2009 à la prestigieuse université d'État de Moscou, qu'on appelle parfois « la Lomonossov ». Comme toute université, elle est lieu d'exercice de l'esprit critique. Et comme toute université, elle est surveillée de près par le pouvoir. L'examen des travaux de Miftakhov est donc indissociable d'un rappel de l'acharnement qu'il subit.

À ce jour, donc avant même soutenance de son doctorat, Miftakhov a déjà publié quatre articles.

- Un premier en 2016, lors de sa première année de thèse et cosigné avec son directeur, dans une revue d'ailleurs basée en Ukraine. C'est un brillant début de carrière scientifique.
- Un deuxième article suit en 2019, également cosigné, et qui paraît dans une publication de l'Académie des Sciences russe. Mais 2019

32. ADIREM, AEIF, APHEC, APMEP, APPLS, APSES, ARDM, CDUS, CFEM, CNFHPST, EPI, FBP, F@N, F&M, FI, FS, GEM, Institut des Actuaires, Numeum, Réseau Figure, SCF, SD France, SFB (Biophysique), SFB (Biométrie), SFBD, SFDS, SFE2, SFHST, SIF, SMAI, SMF, Talents du Numérique, UPA, UPS.

est l'année où tout bascule : arrêté en février, Miftakhov devient rapidement l'une des cibles favorites du régime. La police le torture ; quelques courageux collègues écrivent une lettre de soutien, mais Miftakhov n'a guère connu la liberté depuis.
– Malgré cela son troisième article est au prestigieux *Bulletin de l'Académie des sciences polonaise* ; il a été soumis fin 2019, alors que Miftakhov est déjà en détention. Détention alors dite « provisoire », mais l'entrée d'un long tunnel.
– Son quatrième article, signé seul, montre sa maturité scientifique ; il est publié par la revue de l'université de Parme. Écrit en 2020, il paraît en 2021. 2020 est l'année de l'inculpation formelle, et du début du « procès » ; début 2021, c'est la condamnation à une peine de six ans.

Ce quatrième article est le dernier en date ; car la prison n'est pas un lieu de recueillement. Mais Miftakhov a déjà montré qu'il est reconnu par la communauté mathématique ; reconnu, mais aussi soutenu sans équivoque comme l'ont montré les actions en faveur de sa libération. Car la communauté mathématique est par définition internationale et non partisane ; elle n'a pas d'autre idéal que la vérité, mais la vérité ne va pas sans la justice.

À l'international, le dossier Azat Miftakhov est suivi notamment par nos homologues d'Allemagne, du Brésil, des États-Unis d'Amérique, d'Italie, du Royaume-Uni, de Tunisie... En France, les deux principales sociétés savantes de mathématiques sont la SMF, Société Mathématique de France, et la SMAI [1]. Dès la fin 2020, alors que Miftakhov était encore en détention provisoire, la SMF a soutenu le Comité Azat Miftakhov des mathématiciens et relayé une première pétition demandant sa remise en liberté. Nous avons suivi avec inquiétude ce qui a servi de procès et déploré sa condamnation. En lien avec la SMAI, nous avons écrit à Jean-Yves Le Drian alors Ministre de l'Europe et des Affaires Étrangères, demandant une représentation de l'ambassade de France au procès en appel, pour veiller au bon respect du droit. Toujours avec la SMAI, nous avons même, en février 2021, écrit au Président de la Fédération de Russie pour faire part de notre préoccupation. Enfin, le mois dernier, alarmés par les nouvelles de conditions indignes de détention, nous avons écrit au directeur de la colonie pénitentiaire 17 où est encore enfermé Miftakhov. Toutes ces initiatives ont été menées par lettres publiques disponibles sur notre site web.

La SMF soutient la communauté mathématique et sa parole. Elle ne se soucie pas des opinions politiques, mais elle est rigoureusement attachée à la défense des Droits humains telle qu'énoncée dans la charte internationale des droits de l'Homme. Azat Miftakhov doit sortir de prison et pouvoir revenir aux mathématiques.

Adrien Deloro

Liberté pour Azat Miftakhov

Il y a quatre jours, des agents du FSB sont allés à la Colonie pénitentiaire d'Omutninsk, pour interroger Azat Miftakhov au sujet d'une nouvelle accusation : celle d'« incitation au terrorisme ». Azat a refusé de répondre sans la présence de son avocat. L'accusation reposerait sur des commentaires qu'Azat aurait faits auprès d'autres détenus en regardant la télévision en mai dernier. Or Azat doit être libéré sur parole après-demain. Faut-il craindre une tentative de le maintenir en prison ?

Il est derrière les barreaux depuis février 2019, arrêté, torturé, puis condamné pour houliganisme, accusé d'avoir brisé une vitre. Cette accusation repose sur des témoignages hautement suspects, grotesquement trafiqués.

Anatoly Vershik, mathématicien russe bien connu, a déclaré : « nous autres mathématiciens sommes des gens méticuleux, nous avons besoin de preuves. Or même les plus sceptiques d'entre nous sont conscients de l'absurdité de la situation imposée à Azat Miftakhov. »

Les mathématiciens se sont donc mobilisés pour la défense d'Azat.

Des journées internationales ont été organisées par deux fois (juin 2021, juin 2022), avec la participation de mathématiciens de tout premier plan et de nombreux pays. Les sociétés savantes se sont exprimées de par le monde. L'université de Harvard et celle de Paris-Saclay ont offert à Azat de l'accueillir et de le soutenir financièrement.

Que les autorités russes fassent bien attention. La communauté mathématique est étonnamment forte et tenace. Elle survivra aux régimes et à leurs dirigeants, et nulle société ne peut vivre aujourd'hui sans les mathématiques.

1. Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles

On peut évoquer des cas individuels de mathématiciens célèbres intervenant pour la liberté de parole et de pensée. Dans l'affaire Dreyfus, le témoignage précis et pointilleux du grand Henri Poincaré joua un rôle de premier plan. Pendant la première guerre mondiale, le grand mathématicien allemand David Hilbert avait été insulté pour avoir écrit en 1917 les louanges d'un collègue français : il obtint des excuses. Et puis, il y a de nombreux exemples de mobilisations collectives victorieuses. En 1950, la mobilisation des mathématiciens fit céder le Département d'État américain qui refusait un visa à l'ancien trotskyste Laurent Schwartz. Ce sont avant tout les mathématiciens qui ont obtenu, après soixante ans de combat tenace, que soit reconnue la responsabilité de l'armée française dans l'assassinat de l'un des leurs, Maurice Audin. C'est une mobilisation internationale stupéfiante qui a fait céder Léonid Brejnev en personne en obtenant la libération du mathématicien ukrainien Léonid Pliouchtch en 1976. Je me souviens de Laurent Schwartz disant au kgbiste de l'ambassade d'URSS qu'un jour le nom de Pliouchtch serait connu dans le monde entier, et je me souviens de l'odieuse réponse de l'agent, suggérant que Schwartz était (sic) aussi fou que Pliouchtch. Qui donc a eu raison ? C'est la mobilisation des mathématiciens qui a obtenu de la Turquie le retour en France, en 2021, de notre collègue Tuna Altınel, arrêté là-bas deux ans auparavant. Je le répète : que ceux qui s'acharnent sur Azat Miftakhov en prennent bien conscience. Les mathématiciens du monde entier continueront à se battre jusqu'à ce qu'ils gagnent. Car la liberté de pensée est le premier ingrédient de leur vie.

Liberté pour Miftakhov.

Michel Broué

Les IREM/IREMI/IRES [1] sont des structures universitaires uniques, lieux d'échange et de réflexion ouverts à tous les enseignants.

Le contexte actuel fait qu'ils sont très sollicités (liaison bac -3/ bac +3, formation initiale et continue des enseignants du primaire et du secondaire, actions de diffusion vers les scolaires, réflexions et ressources pour l'enseignement de l'informatique au lycée...), mais en même temps financièrement et administrativement fragiles. Créés il y a plus de cinquante ans par la communauté mathématique, ils ont besoin de son soutien pour exister.

Ils sont précieux et leur travail mérite d'être mieux connu et soutenu. Une première partie vous présentera les IREM, leurs missions et leur fonctionnement ; leur richesse vient de ce que ce sont des lieux d'échange et de rencontre. Nous avons souhaité dans une deuxième partie donner la parole à des collègues. Ils ont des parcours et des métiers différents, mais tous se retrouvent dans les IREM, pour partager et faire aimer les mathématiques et les sciences. Enfin, la dernière partie revient sur leur histoire ; en effet leur création a été l'occasion de débats animés dans les années 1970, dont le récit apporte un éclairage très intéressant sur la situation actuelle

Les IREM expliqués à mes collègues

• M.-L. Chabanol

Maîtresse de conférences à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, directrice de l'IREM d'Aquitaine depuis 2019, je préside l'Assemblée des directeurs d'IREM depuis 2021. Certains de mes collègues connaissent bien l'IREM, où ils (souvent elles, en fait !) sont très investis, mais pour d'autres cela reste un acronyme bien mystérieux, qui suscite beaucoup d'interrogations. Voici donc quelques réponses à ces questions pour présenter ces structures originales et très précieuses.

Les enseignants du primaire ou du secondaire sont à peu près tous passés par une université pour faire leurs études. Un lien entre eux et la recherche devrait rester possible. Existe-t-il des structures qui le permettent ?

En mathématiques, de telles structures existent depuis 1968, ce sont les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Ce sont des structures universitaires, qui selon les cas dépendent de l'UFR de mathématiques, ou de l'INSPÉ, ou directement de l'administration centrale de l'université...

Et les autres disciplines ?

Beaucoup d'IREM se sont ouverts aux autres sciences. On trouve ainsi maintenant des IREMI (I pour informatique), c'est le cas à la Réunion, des IRES (S pour science) à Toulouse, Montpellier... L'appellation IREM dans cet article recouvre toutes ces structures.

Les IREM sont-ils présents dans toutes les universités ?

Non, mais ils sont présents dans presque chaque académie (deux dans l'académie de Rennes, et il n'y en a actuellement pas dans les académies de Nice, de Corse et de Versailles). On compte actuellement vingt-huit IREM, ils sont en particulier

1. Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques/Informatique/Sciences.

présents hors métropole : on trouve un IREM à La Réunion, à Mayotte et en Nouvelle Calédonie.

Que fait-on dans un IREM ?

Le travail dans les IREM se fait dans des groupes, sous forme de *recherche-action*. Certains groupes travaillent sur un thème ou une notion (par exemple, *arts et mathématiques* ou *les fractions* ou encore *l'algorithmique en lycée professionnel*), conçoivent des activités à faire en classe sur ce thème en se basant sur des travaux de recherche et sur leur propre expérience, puis les testent et les améliorent. D'autres groupes organisent des rallyes mathématiques, écrivent des articles pour le site *culture-math* [1], etc.

Qui sont les membres des groupes IREM ?

Des enseignants, qui peuvent être du secondaire, du supérieur ou des professeurs des écoles ; il peut aussi y avoir des chercheurs en didactique, en mathématiques ou dans une autre discipline (informatique, physique...) ; on y trouve aussi parfois un inspecteur, des doctorants... On les appelle des *animateurs IREM*. Dans un groupe, tout le monde travaille sur un pied d'égalité : chercheurs et enseignants s'apportent mutuellement des connaissances.

Qui peut venir dans un IREM ?

Tous les enseignants et chercheurs qui souhaitent réfléchir et expérimenter sur l'enseignement de leur discipline ! Pas la peine d'être « choisi » ou « parrainé ».

Combien y a-t-il d'animateurs dans un IREM ?

C'est très variable. En 2022, il y avait en tout 1800 animateurs IREM. L'IREM d'Aquitaine compte par exemple 11 groupes, chacun comportant entre 5 et 15 animateurs.

C'est peu par rapport au nombre des enseignants. Ils ne touchent finalement que peu de monde ?

Il y a peu d'animateurs en proportion du nombre d'enseignants, mais leur but est de transmettre au maximum leurs recherches. Pour cela, les IREM proposent des **formations** (151 en 2022) auprès des rectorats, en général dans le cadre des plans académiques de formation (ou maintenant via les nouvelles EAFC [2]). Après le plan Villani-Torossian (2018), les IREM se sont également impliqués dans la formation des Référents Mathématiques de Circonscription (pour le premier degré), et proposent aussi des formations dans les « LaboMaths » (équipes enseignantes dans certains collèges et lycées) à la demande de ces équipes. Enfin, suite à l'Année des Mathématiques (2020), certaines formations « Maths vivantes » sont proposées aux rectorats conjointement par les laboratoires CNRS et les IREM. Les IREM s'occupent également souvent des formations aux concours internes (CAPES et agrégation).

Mais toutes ces formations sont ponctuelles, et ne peuvent concerner que les personnels de l'académie ?

Effectivement, et pour pouvoir diffuser de façon plus large et pérenne, les groupes IREM exposent leurs recherches dans des colloques, publient des brochures ou des ressources en ligne, écrivent des articles, ...

Dans quelles revues ?

Les IREM éditent quatre revues (bientôt cinq) : la revue *Annales de didactique et de sciences cognitives* éditée par l'IREM de Strasbourg, les revues du réseau *Repères-IREM*, *Petit x* et *Grand N*, publiées par l'IREM de Grenoble, et bientôt la revue *Radix* sur l'enseignement de l'informatique. Ce sont des revues à comité de lecture, reconnues par l'HCÉRES.

Brochures, articles, actes de colloque... Cela fait finalement beaucoup de ressources. Comment s'y retrouver ?

Avec l'APMEP [3], les IREM maintiennent la base de ressources bibliographiques Publimath [4], qui recense actuellement 40000 notices et permet l'accès direct en ligne à 14000 ressources.

Comment se coordonnent les IREM ? Si plusieurs groupes travaillent sur le même thème, il faut qu'ils puissent échanger entre eux ?

Les IREM sont structurés nationalement et forment un GIS [5]. Les directeurs d'IREM se réunissent dans une Assemblée des Directeurs d'IREM (ADIREM) ; de plus il existe des Commissions nationales INTER-IREM (CII), actuellement au nombre de quatorze, qui

1. `https://culturemath.ens.fr`
2. École Académique de la Formation Continue.
3. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.
4. `https://publimath.univ-irem.fr`
5. Groupement d'Intérêt Scientifique.

fédèrent des membres des groupes travaillant sur des thèmes proches. Ainsi la C3I (CII *Informatique*) regroupe vingt-et-un membres, représentant quatorze IREM différents. Ces CII publient également des brochures et des ouvrages : par exemple, le livre « *Passerelles* », coordonné par Marc Moyon et Dominique Tournès de la CII *Épistémologie et Histoire des Mathématiques* (CIIEHM), a reçu en 2019 le prix du livre d'enseignement scientifique délivré par l'Académie des Sciences. Autre exemple, le site de la CII TICE [6] est une mine de ressources numériques (applications pour des tablettes, ressources Geogebra...). Les CII CORFEM [7] et COPIRELEM [8] s'intéressent de près aux concours de recrutement ; la COPIRELEM en particulier publie chaque année des annales du concours pour les professeurs des écoles.

Enfin, chaque année le réseau des IREM organise plusieurs colloques nationaux : les colloques annuels de la CORFEM et de la COPIRELEM sont des événements importants pour tous les formateurs intervenant dans les masters MEEF second degré et premier degré et également pour les enseignants. La CIIEHM organise un colloque tous les deux ans. Enfin d'autres CII proposent également des colloques : en 2023, cela a été le cas des CII *Collège* et *Lycée* (*Raisonner en arithmétique. Est-ce incongru ?*) et des CII *Didactique* et *Lycée* (*Rencontres autour de la compétence Modéliser*).

Tout ceci concerne les enseignants ; les IREM proposent-ils également des actions vers les élèves ?

La plupart des IREM organisent chaque année des concours mathématiques (*rallyes mathématiques*) ; ils concernent souvent les élèves de collège ou de lycée (général ou professionnel) de l'académie, mais certains sont à destination des élèves de primaire. De nombreux IREM organisent également des stages d'immersion dans les laboratoires (stages MathC2+, stages Hippocampe), des actions de promotion des études scientifiques pour les jeunes filles (Journées Filles et Maths). Enfin, certains IREM conçoivent des expositions (exposition *Math et Mesures* à Poitiers), des jeux... Les actions ne manquent pas. Les IREM sont également souvent présents dans les manifestations comme la Fête de la Science ou la Semaine des Mathématiques, et sont partenaires d'actions organisées par des associations telles que *MATh.en.JEANS* ou *Math en Scène*.

Toutes ces actions demandent certainement du temps, des moyens... Comment sont financés les IREM ?

C'est une excellente question, et ce n'est pas simple, les IREM étant des structures un peu hybrides, à cheval entre le secondaire et le supérieur, qui concernent aussi bien l'enseignement que la recherche. De plus, la situation peut énormément varier d'un IREM à l'autre. De façon assez synthétique :

Moyens universitaires

- Un IREM reçoit des moyens de l'université dont il dépend (soit directement, soit par l'intermédiaire de l'UFR). Il y a en général des moyens humains (secrétariat), des locaux (bureau(x), salles pour les réunions des groupes, bibliothèque,...), mais également des financements pour des missions des animateurs (colloques, réunions des CII...) ou du matériel. Le directeur (enseignant-chercheur ou personnel enseignant de l'université) a en général une prime ou une décharge.
- Les enseignants du supérieur peuvent aussi voir le temps qu'ils consacrent à un groupe pris en compte dans leur service d'enseignement.

Moyens au niveau des rectorats

- Les rectorats aident parfois au financement des missions des animateurs.
- Les rectorats rétribuent également les animateurs du secondaire (ou du primaire) pour le temps qu'ils passent dans les groupes ou les formations (sous forme d'heures ou d'indemnité).

Moyens ministériels

L'ADIREM signe des conventions pluriannuelles avec les ministères de l'Éducation nationale et de la Recherche.

- La DGESIP (Ministère de la Recherche) accorde une subvention annuelle à l'ADIREM, ce qui permet de financer des missions, de cofinancer les colloques du réseau, d'acheter du matériel...
- La DGESCO (Ministère de l'Éducation nationale) donne des heures que les IREM se répartissent pour inciter les groupes à travailler sur des thématiques définies nationalement.

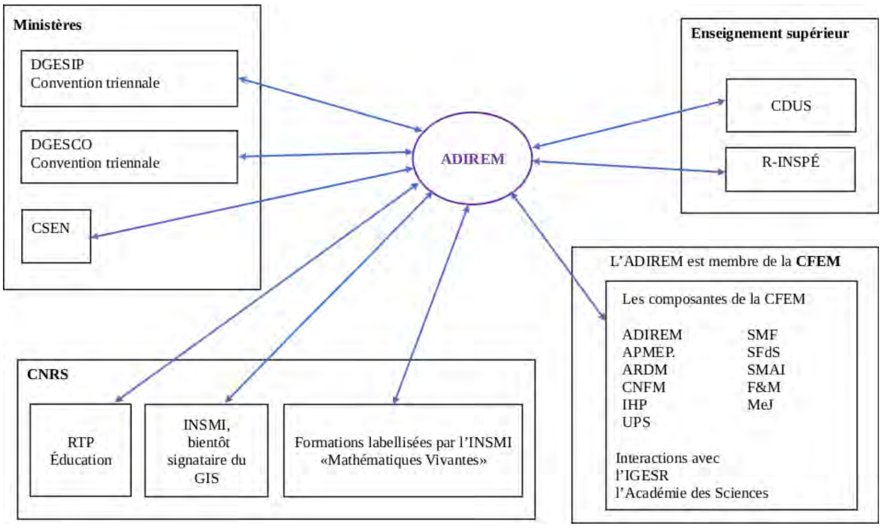
6. https://tice-c2i.apps.math.cnrs.fr
7. COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques du second degré.
8. Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire.

Comme on le voit, c'est assez compliqué. Les schémas ci-dessous peuvent donner une idée des différents interlocuteurs d'un IREM local, et de l'Adirem.

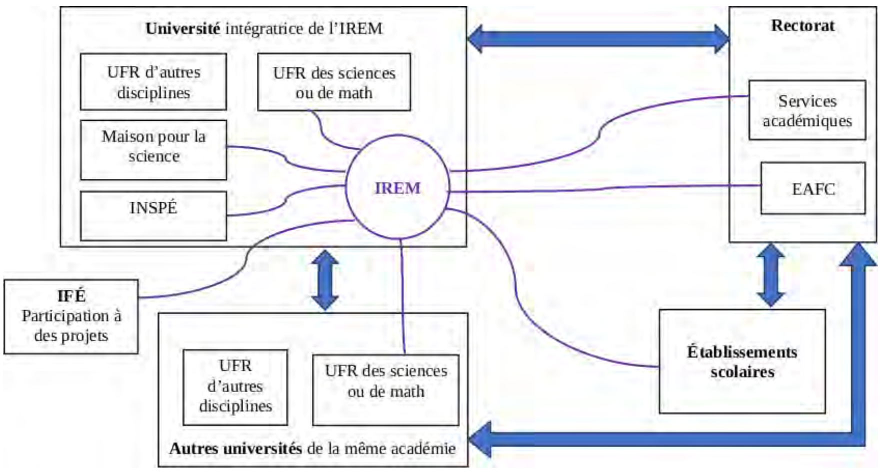
Concrètement, ces moyens sont-ils récurrents ? Garantis ?

Les moyens donnés par les universités dépendent de leur bon vouloir. Lors des restructurations des universités, certains IREM ont pu avoir du mal à trouver leur place, entre recherche et enseignement. Surtout, en période de disette budgétaire, des IREM se retrouvent en grande difficulté. L'IREM de Grenoble, qui édite nos revues, a vu ses postes de secrétariat menacés. L'IREM de Lille, qui gère les finances du réseau, dû déménager en cours d'année (avec perte conséquente de locaux), et l'implication des enseignants-chercheurs n'y est actuellement plus reconnue dans leur service. On peut souligner toutefois le soutien de la communauté mathématique (notamment de la SMF, que je remercie) dont ces IREM en particulier, mais les autres aussi, ont pu bénéficier. Cela ne règle pas tous les problèmes, mais c'est une grande aide. Du côté des rectorats, les heures dont disposent les enseignants du second degré arrivaient jusqu'à présent de façon assez pérenne. Si on regrettait une situation un peu trop figée, ne tenant pas compte de l'évolution du nombre d'animateurs, et surtout pas de la création de nouveaux IREM, cela donnait une certaine stabilité.

Les interlocuteurs d'un IREM à l'échelon local



Les interlocuteurs de l'ADIREM au niveau national



Malheureusement, cette situation se détériore, peut-être en lien avec la création des Eafc, et les directeurs d'irem se voient encouragés à rentrer dans une démarche de projets et à négocier chaque année ces heures, alourdissant de manière conséquente leur travail et fragilisant la stabilité des moyens.

Enfin, les colloques du réseau ne sont plus inscrits au plan national de formation de l'Éducation nationale, et parfois pas non plus dans le plan académique, ce qui rend très difficile pour les enseignants du secondaire de s'y rendre : s'ils le font, c'est à leurs frais, souvent sur leur temps libre.

Et en ce qui concerne les moyens informatiques ?

Le portail de l'Adirem [9] est hébergé par le réseau *mathrice* de l'insmi, mais l'Adirem ne dispose d'aucun personnel dédié. Ce sont donc des collègues qui s'occupent du suivi et de la maintenance du site de façon bénévole.

Y a t-il un pilotage scientifique des irem ? Des procédures d'évaluation ?

L'Adirem s'est dotée en 1992 d'un Comité Scientifique. Actuellement présidé par Thierry Horsin (qui n'est pas membre d'un irem), ce comité suit les travaux des irem et des Cii, organise des débats, donne des pistes de réflexion.

En ce qui concerne l'évaluation, bien que l'hcéres n'évalue pas les irem en tant que tels, sa *Synthèse nationale et de prospective sur les mathématiques* de 2022 souligne leur rôle majeur, en particulier pour la formation continue des enseignants.

L'enseignement des mathématiques peut être un sujet politique ; ainsi la réforme du lycée et son impact sur la formation en mathématiques et en sciences et notamment sur le nombre de filles étudiant les sciences a suscité récemment beaucoup de réactions. Comment se situent les irem par rapport à ce sujet ?

Les irem prennent régulièrement publiquement position sur des sujets d'actualité liés à l'enseignement des mathématiques. Beaucoup de ces prises de position se font au sein de la Cfem [10] dont l'Adirem est membre. L'Adirem fait également partie du collectif Maths&Sciences qui s'est créé pour alerter sur les conséquences de la réforme du lycée de 2019.

Un mot de conclusion ? Comment envisagez-vous l'avenir ?

Depuis que je suis directrice d'irem, je ne cesse d'être impressionnée par la richesse des travaux du réseau et la qualité de ses actions. Loin d'être un réseau vieillot et fermé sur lui-même, les irem se sont tournés vers les nouvelles technologies, ils sont bien souvent des lieux de rencontre également précieux pour d'autres disciplines. Et ils le font avec très peu de moyens, car les animateurs sont souvent tellement attachés à leur irem qu'ils ne comptent pas le temps qu'ils lui consacrent. Néanmoins je ne peux m'empêcher d'être inquiète. Du côté des universités, elles sont dans un tel état de disette budgétaire que les irem leur semblent être un luxe dispensable. La situation de Lille à ce propos est emblématique, et très préoccupante. Sans moyen, les collègues universitaires arrêteront de s'investir et les laboratoires perdront un relais précieux vers le secondaire. Du côté du rectorat et des ministères, on reconnaît que les irem font des choses intéressantes, mais le modèle assez peu hiérarchique des irem n'est plus vraiment à la mode... et je dirais que ce n'est pas tant la diminution des moyens qui m'inquiète (même si j'aimerais que les moyens augmentent), que leur non-pérennité. En rendant de plus en plus difficile l'obtention de moyens récurrents, en nous demandant de répondre à des appels à projets sur des thématiques définies par ailleurs, on change profondément l'esprit de notre travail. Si les collègues s'investissent dans les irem, c'est par choix, parce qu'ils pensent que ce qui s'y fait est important, mais aussi parce qu'ils y trouvent un espace de liberté, de respiration. Et sans les animateurs, il n'y a plus d'irem.

En résumé, les irem sont des structures précieuses, qui reposent sur le travail d'animateurs très investis. Leur meilleur atout pour continuer à exister, c'est de se faire encore plus connaître. Si vous voulez nous aider : n'hésitez pas à allez voir ce qui se fait dans votre irem !

Marie-Line Chabanol

Présidente de l'Assemblée des directeurs d'irem.
Marie-Line.Chabanol@math.u-bordeaux.fr

9. https://www.univ-irem.fr
10. Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques.

Quelques témoignages

Nous avons sollicité quelques collègues pour qu'ils présentent ce que les IREM leur ont apporté. Vous verrez ainsi comment des enseignants ont été amenés à se tourner vers la recherche, comment l'IREM permet à des communautés variées d'échanger, transformant les pratiques des enseignants à tous niveaux, et enfin comment ces IREM sont des acteurs fondamentaux pour l'animation scientifique dans les académies.
Nous commençons par la présentation de la situation particulièrement alarmante de l'IREM de Lille. Vous pourrez lire ensuite, entre autres, comment les IREM ont pu transformer les pratiques pédagogiques d'une professeure des écoles, mais aussi de collègues du supérieur, suscitent des collaborations de recherche entre des personnes qui ne se seraient jamais croisées ailleurs, enrichissent la vie d'un laboratoire de mathématiques...

François Recher et Valerio Vassallo, maîtres de conférences, directeur et animateur à l'IREM de Lille

En 53 ans, l'IREM de Lille a formé des milliers d'enseignant.e.s à la transmission des connaissances en mathématiques [1]. Mais les liens qui ont été tissés avec des structures locales, nationales ou internationales risquent d'être fragilisés ou de disparaître par les mauvaises conditions de travail imposées dernièrement par l'université de Lille (voir la pétition en ligne [2]).

En réponse au besoin d'une formation de qualité en mathématiques du primaire au lycée, indispensable pour que les étudiant.e.s puissent s'engager sereinement dans les disciplines scientifiques à l'université, les structures telles que les IREM doivent être mieux connues, reconnues et accompagnées par les institutions dont elles dépendent.

Ces mêmes institutions savent qu'une grande partie des étudiants bacheliers n'est plus en mesure d'affronter sereinement la première année d'études supérieures. À Lille et probablement ailleurs, les cours de remédiation/mise à niveau sont en place et une première année de licence a même été créée pour les étudiants en difficulté.

Les IREM ne sont certainement pas là pour donner le goût de l'effort aux élèves, valeur fortement en baisse, mais peuvent permettre aux enseignants du primaire et du secondaire d'aller toujours plus loin dans la réflexion sur les mathématiques afin de mieux stimuler la curiosité et l'envie d'apprendre de leurs élèves.

Ceci étant, l'université de Lille refuse depuis trop longtemps de comprendre le rôle indispensable des universitaires dans cette réflexion et cet accompagnement de la recherche [3]. L'ignorance déguisée en tolérance pendant de nombreuses années a fini par se transformer en intolérance et mépris menant progressivement l'IREM de Lille dans l'état où il se trouve aujourd'hui. En particulier, depuis trois ans, la situation s'est aggravée : les heures attribuées par l'université aux universitaires investis dans les groupes de recherche ne figurent plus dans leurs services d'enseignement. Cette dernière année, ce sont les locaux qui ont été repris pour y aménager des salles d'enseignement et le budget qui a été divisé par deux. Tous ces moyens sont pourtant indispensables aux missions de l'IREM et à l'ancrage de l'institut au sein de l'université.

Sans un effort intellectuel de la communauté universitaire d'approfondissement des contenus enseignés dans le primaire et le secondaire, ne pourront advenir ni liens solides, ni continuité, ni harmo-

1. Voir `irem.univ-lille.fr` pour des exemples et des informations supplémentaires.
2. `www.change.org`
3. Voir la note Valerio Vassallo `https://www.univ-irem.fr/temoignages-dans-la-gazette-de-la-smf`

nie dans l'enseignement des mathématiques de la maternelle à l'université. Et pourtant, de célèbres mathématiciens ont largement montré la voie (voir par exemple l'article de W. P. Thurston dans Repères-irem *Preuves et progrès en mathématiques* accessible sur `publimath.univ-irem.fr/` ou les nombreux articles de Daniel Perrin [4] et Aziz El Kacimi [5]).

Si nous voulons assurer à nos universités un avenir scientifique solide et rassurant, celles-ci doivent maintenir leur investissement dans la formation des enseignant.e.s et écouter l'invitation de l'hcéres lorsqu'il écrit : *Tous ces acteurs ont aujourd'hui besoin d'être mieux reconnus et accompagnés* (hcéres, volume 1, pp.67-69, novembre 2022 [6]).

Laurence Mossuz, professeure des écoles, animatrice à l'irem de Grenoble

Professeure des écoles depuis 2016, j'ai rejoint l'irem de Grenoble en 2018. Dans mon groupe, nous travaillons sur la preuve en mathématiques et la mise en place du débat scientifique, avec des retombées dépassant le cadre des mathématiques. Cette recherche-action-formation a été initiée en 2018 dans le cadre d'un partenariat scientifique entre la dsden 74 [7] et l'irem de Grenoble, en réponse à un besoin d'enseignants. Elle se prolonge aujourd'hui dans le cadre d'un LéA [8] de l'ifé [9]. Dans ce cadre, j'ai été amenée à analyser ma propre pratique et celles d'autres enseignants mais aussi à mettre en oeuvre des résultats de la recherche en didactique des mathématiques, accompagnée par des chercheurs. Ainsi j'ai réalisé des problèmes de recherche avec mes élèves de grande section de maternelle. Cela m'a passionnée car j'ai vu que de jeunes enfants pouvaient progresser et petit à petit justifier leurs propos, essayer de prouver, développer des postures réflexives.

Cette aventure au long court est passionnante et très constructive sur le plan du développement professionnel et personnel. Elle favorise en effet le travail d'équipe pluridisciplinaire et permet de renforcer la communication entre la recherche et les acteurs de terrain, vecteur essentiel de la réussite de notre enseignement. Cela m'a aussi amenée à suivre et valider le master « Pratique de l'Ingénierie de Formation » à Grenoble, avec un mémoire sur l'enseignement de la preuve à l'école primaire. J'ai maintenant pour projet de faire une thèse en didactique des mathématiques.

Jean-Claude Rauscher, animateur à l'irem de Strasbourg

J'ai vécu l'irem comme une école de mise en confiance qui permet d'une part de développer des idées nouvelles et d'innover à partir de références théoriques solides et d'autre part de motiver et de préparer ses « animateurs » à rédiger et à présenter leurs travaux et leur métier dans les commissions, les colloques, les stages de formation initiale ou continue et pour ma part aussi à m'engager dans une recherche doctorale qui m'a amené par la suite à être maître de conférences. Une école possible parce que l'irem est une institution où l'on peut travailler et partager le désir d'avancer, localement et dans le cadre des commissions inter-irem, avec des pairs et avec des enseignants-chercheurs. Soutenus par les directeurs d'irem successifs, en accord avec ministère et rectorat, les projets peuvent se dérouler dans la continuité, indépendamment de modifications institutionnelles ou politiques ponctuelles. Pour ma part, professeur débutant en 1971, les contacts avec l'irem de Strasbourg qui venait d'être créé, m'ont immédiatement conforté dans l'idée de partager les mathématiques avec l'ensemble des élèves non pas comme une discipline morte mais comme un terrain de découvertes et d'étonnements dans lequel tous devaient être à l'aise et réussir. Indépendamment de mes fonctions successives dans ma carrière, cette perspective ambitieuse ne m'a jamais quitté. Elle m'a ouvert un parcours de recherche avec le solide et indispensable appui de l'irem. Dans un premier temps, réflexions autour de ma pratique à propos de l'articulation entre la dimension heuristique et les automatismes à intégrer par les élèves. Dans un deuxième temps, dans le cadre des groupes de recherche à l'irem, accompagnés par des maîtres exceptionnels (François Pluvinage et Raymond Duval) nous avons procédé aux

4. `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/fr/perso/daniel-perrin/`
5. `http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/`
6. `https://www.hceres.fr/sites/default/files/media/downloads/volume-1_synthese-nationale-et-de-prospective-\des-mathematiques-hceres.pdf`
7. Direction des Services Départementaux de l'Éducation nationale.
8. Lieu d'Éducation Associé.
9. Institut Français de l'Éducation.

repérages fins des apprentissages en jeu dans différents domaines (géométrie, nombres, algèbre), afin d'élaborer et de proposer aux élèves des supports qui les impliquent dans de véritables activités mathématiques. Et actuellement encore, retraité actif, j'ai repris la question de l'algèbre comme outil de résolution de problèmes au collège avec une équipe d'enseignants. Les expérimentations en cours sont très encourageantes. Mon histoire avec l'IREM n'est pas finie !

Vincent Blanloeil, maître de conférences en mathématiques, ancien directeur de l'UFR de Mathématique et Informatique de l'université de Strasbourg

L'IREM de Strasbourg est singulier à plus d'un titre. Un des trois premiers IREM de France, le dynamisme de ses directrices et de ses directeurs successifs a contribué à le rendre incontournable dans le paysage français de la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Totalement intégré à l'UFR Mathématique et Informatique de l'université de Strasbourg, il est la clef de voûte des interactions entre l'enseignement des mathématiques dans le secondaire et celui à l'université en Alsace. L'IREM de Strasbourg se structure en groupes de travail. Certains s'organisent autour de thématiques récentes comme le jeu de go, d'autres abordent des thèmes plus classiques comme la didactique ou la liaison lycée-université. Son premier atout est de mobiliser un nombre suffisant d'enseignants universitaires ou affectés dans le secondaire ; le second réside dans la stabilité de son budget. La reconnaissance de la plus-value apportée par l'IREM à la communauté universitaire a permis de l'identifier comme composante de l'UFR ; il bénéficie d'un budget pérenne attribué par l'université de Strasbourg dans la dotation annuelle de l'UFR. La stabilité financière qui en découle lui permet d'entretenir son fonds documentaire, de maintenir la publication d'une revue de didactique et de financer des projets proposés par ses membres. Non seulement partenaire de nombreuses activités telles que Math C2+, *MATh.en.JEANS*, le Rallye mathématique d'Alsace, le Cercle Mathématique de Strasbourg, la Maison pour la science en Alsace, les Laboratoires de mathématiques dans les lycées, l'IREM facilite la rencontre de tous les enseignants de mathématiques en Alsace. Les enseignants du secondaire actifs au sein de l'IREM interviennent souvent dans les enseignements à l'UFR et intègrent les équipes pédagogiques de l'UFR. Enfin, à Strasbourg, l'IREM est un des acteurs incontournables de la réflexion sur les contenus pédagogiques en licence de mathématiques. Sans l'expertise des collègues enseignants de mathématiques au lycée, la licence de mathématiques de l'université de Strasbourg ne serait pas en mesure d'adapter ses contenus aux profils variés des nouveaux lycéens.

Hamid Chaachoua, professeur des universités en didactique des mathématiques à l'UGA, directeur de l'INSPÉ de l'académie de Grenoble

La tradition de recherche collaborative au sein des IREM trouve une expression concrète à travers le projet Pégase [10], auquel l'IREM de Grenoble est associé en tant que partenaire pour la conception d'une progression d'enseignement dans le domaine du nombre.

Fondée sur une étroite coopération entre le milieu universitaire et la pratique professionnelle, cette démarche engage chercheurs, formateurs et enseignants. S'appuyant sur un modèle efficace, l'IREM répond aux objectifs clés du projet, mettant en avant une politique de recherche et développement collaborative, matérialisée par une approche axée sur la pratique.

Le cœur de la dynamique des groupes au sein de l'IREM est alimenté par un apport continu de connaissances issues de la recherche, conjugué à l'expertise terrain. Cette synergie a permis de bâtir une culture commune fondée sur l'approche evidence-based, où la collaboration s'opère dans un mouvement à double sens. Les échanges ascendants et descendants nourrissent une réflexion collective qui sous-tend le développement du curriculum. Ainsi, à travers le projet Pégase, l'IREM de Grenoble démontre sa capacité à instaurer une collaboration fructueuse entre les acteurs de la recherche et de la pédagogie. En amalgamant savoirs scientifiques et expérience de terrain, cette démarche érige un modèle de recherche collaborative, apte à façonner une éducation fondée sur les preuves et propice à l'épanouissement éducatif.

10. https://www.polepilote-pegase.fr

Chantal Menini et Pascale Sénéchaud, animatrices à l'irem d'Aquitaine et à l'irem de Limoges, maîtresses de conférences en mathématiques, co-responsables de la Commission Inter irem Université

Les groupes irem de liaison lycée-université sont des lieux privilégiés de rencontre entre universitaires et enseignants de lycée ainsi que de classes préparatoires où nous travaillons conjointement un thème mathématique.

En tant qu'enseignants post-bac, nous bénéficions de ce fait d'une bonne connaissance de ce que les néo-bacheliers ont appris tant en terme de contenu que de méthodes. Nos collègues de lycée quant à eux mesurent nos attentes et peuvent ainsi, dans la limite fixée par les programmes, mettre l'accent sur certains points en vue de mieux préparer leurs élèves aux études supérieures scientifiques.

Cette connaissance mutuelle a toujours été importante mais l'est encore plus avec les spécialités et options en mathématiques qui sont possibles depuis la dernière réforme du lycée. On pourrait penser que quelques rencontres ponctuelles suffisent pour cela, c'est peut-être le cas en terme de connaissance réciproque mais nous ne pensons pas que ce le soit pour faire évoluer les pratiques.

En revanche au sein d'un groupe irem nous profitons de la formation par les pairs. Le temps long dont bénéficie un groupe permet que s'instaure entre les différents membres un climat de confiance propre au partage de réussites mais aussi de doutes ou échecs sur des points d'enseignement. L'intelligence collective et les regards variés d'un groupe de liaison nous permettent de réfléchir à des évolutions sur des points précis d'enseignement qui seront testées et si besoin à nouveau remaniés.

Certains groupes de liaisons lycée-université sont pluridisciplinaires (comme à Limoges avec l'informatique) et permettent aussi des rencontres entre universitaires de disciplines différentes et favorisent les échanges de pratiques.

Nous osons penser qu'outre l'apport personnel des groupes irem de liaison lycée-université, l'apport est beaucoup plus large au sein de nos collègues universitaires qui s'adressent souvent à nous lorsqu'ils ont des questions d'enseignement concernant les étudiants post-bac.

Au niveau national, le lien est fait entre ces groupes académiques par la Commission Inter irem Université. Il est bien clair que les discussions au sein même de la commission et les liens forts qu'elle entretient avec la Commission Inter irem Lycée nous permettent d'avoir des éléments de réponses pour ces collègues, mais cela nous permet également de positionner nos propres enseignements universitaires par rapport à ceux d'autres universités.

Robin Bosdeveix, inspecteur général de sciences et technologies du vivant, de la santé et de la Terre (stvst) et directeur de l'inspé de l'académie de Créteil

J'ai rejoint l'irem de Paris en 2012 alors que j'étais prag de svt à l'ufr sciences du vivant de l'université Paris Diderot et en thèse de didactique de la biologie au laboratoire de Didactique André Revuz. J'ai participé durant cinq ans au groupe « Modélisation » de l'irem, réunissant des enseignants-chercheurs et des professeurs de lycée de trois disciplines : mathématiques, physique-chimie et svt. L'irem offre cette opportunité exceptionnelle de réunir des personnes très engagées de différentes communautés – scolaire et universitaire – et de différentes disciplines. L'irem propose également l'occasion, devenue si rare, de prendre le temps du travail collectif et de la recherche au service de la production de ressources pour l'enseignement et la formation. Après avoir travaillé la modélisation dans le cadre des travaux personnels encadrés (tpe) puis des enseignements optionnels de Seconde générale et technologique « Méthodes et pratiques scientifiques » (mps), le groupe a conçu un stage proposé aux plans académiques de formation des trois académies franciliennes et dont l'organisation a été possible grâce à l'appui organisationnel de l'irem en relation avec les trois rectorats. Ces stages de formation continue ont donné lieu à un article dans la revue *Petit x* (2014, n°96). L'irem permet donc un travail collaboratif croisant les expertises de terrain et de recherche au service de la formation des enseignants. Ces réflexions sont ensuite discutées collectivement dans les commissions inter-irem (CII) et valorisées par des publications dans les revues du réseau des irem (*Repères irem*, *Petit x* et *Grand N*). Cette expérience incroyable m'a donné envie de poursuivre dans d'autres groupes irem à Paris : le groupe Histoire et enseignement des sciences (HistES) et le groupe svt. Là encore, j'y trouve des dynamiques comparables : de véritables aventures humaines et scientifiques et surtout des rencontres qui marquent à jamais... Que le modèle singulier des IREM s'élargisse à toutes les disciplines scolaires !

Michèle Grillot, maîtresse de conférences en mathématiques, ancienne directrice de l'IREM d'Orléans

Maître de conférences à l'université d'Orléans, je me suis toujours intéressée aux questions d'enseignement. Dans notre académie, la « Journée des maths » est une institution, journée d'échange entre supérieur, secondaire et primaire, mise en place et organisée initialement par l'IREM dans les années 90. C'est cet événement phare qui m'a donné envie de contribuer. Curieusement, je n'ai jamais fait partie d'un groupe IREM, on repousse souvent l'engagement pour lequel on se demande si on va vraiment apporter quelque chose ou pour lequel on craint qu'il ne soit chronophage, mais j'ai toujours discuté avec des membres, échangé, lu, jusqu'en juin 2010 où j'ai été sollicitée pour être directrice de l'IREM d'Orléans. J'ai saisi cette occasion pour avoir un rôle plus actif dans la formation continue des enseignants et dans la vulgarisation des mathématiques.

Ce mandat a d'abord été pour moi une belle aventure humaine, ponctuée de rencontres insoupçonnées d'une grande richesse. Il m'a également permis de faire plus ample connaissance avec des structures partenaires incontournables dans les actions, comme la DAFOP [11] au rectorat, l'APMEP [12], Centre-Sciences ou encore l'INSPÉ (anciennement IUFM où j'ai fait un passage), je m'en suis d'ailleurs grandement servi lorsque j'ai coordonné la mise en place de la Maison pour la Science Centre-Val de Loire ; les structures ne naissent bien que lorsque les chevilles ouvrières ont des affinités entre elles.

Ma plus grande satisfaction est d'avoir (ré)ouvert l'IREM à d'autres disciplines. En particulier, lorsque l'ISN (informatique et sciences du numérique) est apparu dans les enseignements du lycée, il a fallu former des professeurs en allant solliciter les collègues universitaires d'informatique, en organisant des rencontres avec les inspecteurs. C'était une belle réussite de collaboration.

Je terminerai par mes meilleurs souvenirs : les organisations des « Journées des maths » de l'académie, beaucoup de travail et de stress mais aussi beaucoup de bonne humeur et de rigolades partagées avec les secrétaires de l'IREM qui se sont succédé.

Les IREM : un exemple pour la formation continue des enseignants

• A. Ernoult

1. Introduction

La formation continue des enseignants est l'un des sujets au cœur des annonces de l'été 2023 concernant l'Éducation nationale. Les médias se sont surtout faits le relais de la question des « absences » pendant les stages, comme si la formation des enseignants était une entrave à l'exercice de leur profession et non un moyen de progresser dans leur métier. Le sujet mérite pourtant une attention plus profonde comme plusieurs institutions l'ont souligné dans des rapports récents : l'Inspection générale de l'éducation nationale et l'Inspection générale de l'administration de l'Éducation nationale et de la recherche en 2018 [6], le Centre national d'étude des systèmes scolaires (CNESCO) en 2021 [11], le Sénat en 2023 [10]. Quand il s'agit plus spécifiquement des enseignants de mathématiques, les IREM sont systématiquement cités, comme par exemple dans le rapport « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques » remis en février 2018 au Ministre de l'Éducation nationale [12].

11. Délégation Académique à la Formation des Personnels
12. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Les premiers irem (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques) sont créés dans les facultés des sciences en octobre 1968, entre les événements du printemps 1968 et la loi d'orientation de l'enseignement supérieur du 12 novembre 1968. Leur organisation et leurs missions sont les fruits d'un processus de long terme, qui s'inscrit dans un contexte de démocratisation de l'accès des élèves au second degré, entraînant des besoins grandissants de professeurs, notamment en mathématiques. Par ailleurs, les mathématiciens expriment à cette époque la volonté de moderniser l'enseignement mathématique, tant du point de vue des contenus que des méthodes. Au moment de leur création, les irem sont étroitement liés à la réforme dite des mathématiques modernes.

Si ces instituts sont créés par décision ministérielle, dans un cadre donné au niveau national, dans chaque académie, chaque faculté des sciences, le fonctionnement d'un irem s'adapte au contexte local. Les premières activités des irem se concentrent sur le « recyclage »[1] des maîtres et les expérimentations en classe en lien avec les programmes de mathématiques modernes. Mais, dès les premières années, la recherche, l'élaboration et la diffusion de ressources, concernent d'autres sujets, comme l'histoire des mathématiques par exemple.

Dès les années 1970, les irem sont installés dans le paysage professionnel des enseignants de mathématiques. S'ils ont fait l'objet de critiques et de remises en cause dès leur création, ils ont aussi très vite été cités en modèle, en France comme dans d'autres pays, pour la formation continue des enseignants.

2. Genèse d'une organisation pour la formation continue des enseignants... de mathématiques

2.1 – Années 1950-1960 : des demandes pour la formation des enseignants

Dans l'après-seconde guerre mondiale, les mutations du système éducatif, la réorganisation de la scolarité en trois niveaux successifs (premier degré, premier cycle puis second cycle du second degré) et non plus en trois ordres séparés (primaire, secondaire et technique), la volonté de moderniser l'enseignement de certaines disciplines, notamment des mathématiques, afin de satisfaire aux besoins scientifiques et techniques et dans un esprit de démocratisation, nécessitent que les enseignants actualisent ou complètent leurs connaissances. Au-delà d'une simple « information » magistrale ou d'un « recyclage » plus ou moins ponctuel, les demandes exprimées dans les décennies 1950 et 1960, évoquent des formations liées à la recherche, tant pour les contenus enseignés que pour les méthodes d'enseignement.

En mathématiques, ces demandes sont plus particulièrement portées par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (apmep)[2]. Il est aussi question de la formation des enseignants dans des cadres qui semblent, a priori, éloignés du scolaire à proprement parler. Les colloques de Caen organisés par l'Association d'études pour l'expansion de la recherche scientifique (aeers) en 1956 et 1966, puis celui d'Amiens en 1968 en sont de bons exemples. La diversité des participants et l'écho de ces colloques dans la presse montrent que les contenus d'enseignement, les méthodes et la formation des enseignants sont de véritables questions de société. André Lichnerowicz, mathématicien, professeur au Collège de France et membre de l'Académie des sciences, tient une position centrale dans ces colloques. Or, à partir de 1966, il préside également une commission ministérielle qui met au point de nouveaux programmes scolaires fondés sur les mathématiques modernes et dont le compte-rendu de la première réunion le 5 février 1967 mentionne les irem comme s'il était certain qu'ils seraient créés.

2.2 – En quête d'un équilibre entre recherche pédagogique et contenus à enseigner

Comme le montrent les débats qui se tiennent au colloque d'Amiens en 1968 [5], l'équilibre entre les questions générales sur l'enseignement et les questions plus spécifiques à chaque discipline sont un enjeu important. Plus encore, il s'agit de savoir à quel organisme il conviendrait de confier la formation des enseignants et la recherche sur l'enseignement. Des travaux de recherches pédagogiques s'effectuent en appui sur des expérimentations dans des classes, notamment au sein de l'Institut pédagogique national (ipn) et dans les Centres régionaux de documentation pédagogique (crdp) qui dépendent du ministère de l'Éducation nationale. Pour

1. Ce terme qui peut surprendre aujourd'hui, désigne, à la fin des années 1960, certaines formations pour les enseignants.
2. Voir par exemple la Charte de Chambéry (1968) : `https://www.apmep.fr/CHARTE-DE-CHAMBERY-1968`

les mathématiques, les discussions concernent plus précisément les contenus, en lien avec les évolutions de la discipline au niveau universitaire. Bien qu'une nécessaire réflexion sur les méthodes d'enseignement soit toujours mentionnée, elle vient dans un second temps, au service des contenus.

La commission Lichnerowicz, mentionnée plus haut, est en grande partie constituée d'universitaires. On y trouve notamment André Revuz, premier président de l'APMEP issu de l'université. Il donne des conférences, organisées conjointement avec la Société mathématique de France (SMF), et reconnues comme la première formation aux mathématiques modernes de grande ampleur pour les enseignants. Gustave Choquet est aussi membre de la commission. Il est considéré comme l'initiateur de la modernisation des enseignements à l'université à partir de 1954. La discussion entre lui et Pierre Chilotti, directeur de l'IPN lors de la réunion de la commission du 27 février 1967 montre des tensions. P. Chilotti reconnaît que les moyens des structures actuelles (IPN, CRDP, mais aussi écoles normales) sont insuffisants, il défend la création des centres pluridisciplinaires dont la coordination serait assurée par des psychologues. G. Choquet insiste quant à lui sur le rôle que devrait tenir l'enseignement supérieur dans une structure chargée de la recherche sur l'enseignement des mathématiques : « il semble rationnel que ceux qui forment les professeurs et sont capables de les recycler puissent prendre les initiatives »[3] dit-il. Le débat est vif, A. Revuz tente de l'apaiser en soulignant l'ampleur de la tâche (« il faut multiplier par vingt le travail actuellement fait par l'IPN »)... mais sa position est nette : « Le plus difficile c'est d'acquérir des mathématiques, c'est pourquoi il faut que ce soit les mathématiciens qui se penchent sur les problèmes psychologiques et pédagogiques ». A. Lichnerowicz prend finalement la parole « en son nom personnel », il rappelle que leurs actions doivent être au service des enfants, il reconnaît l'importance des expérimentations menées à l'IPN, mais en soulignant qu'elles ne concernent que le premier degré puis donne des perspectives pour les IREM. En particulier, il « désire la création de cellules charnelles auprès des universités, c'est-à-dire sur un terrain où chacun puisse se sentir chez lui. Si, pour ne pas heurter certaines sensibilités, le mot pédagogie n'a pas été employé, c'est bien de cela dont il s'agit dans les IREM ». Plus concrètement, il évoque la collaboration avec les institutions déjà impliquées dans l'élaboration des programmes, l'expérimentation, la conception de documents,... et « espère que les IREM amèneront à sortir de la conception des programmes pensés par des personnes différentes suivant les tranches d'âge ». Autrement dit, il compte sur les IREM pour que des programmes soient pensés de manière cohérente, du premier degré à l'enseignement supérieur (on notera que c'est aussi une demande de l'APMEP qui a pour slogan « de la maternelle aux facultés »).

3. 1968-1974 : création d'un IREM par académie

3.1 – Le CREM à Bordeaux : un exemple d'IREM ?

Dans les années 1960, la formation aux « mathématiques modernes » des enseignants du second degré de l'académie de Bordeaux est en bonne partie assurée sous forme de cours, notamment par Jean Colmez et Jean Riss (faculté des sciences de Bordeaux). Même s'ils n'ont pas le même écho au niveau national que les conférences d'André Revuz, ces cours bénéficient eux aussi du soutien de l'APMEP. Dans le même temps, trois professeurs de classes préparatoires, dont M. Signoret, président de la Régionale de Bordeaux de l'APMEP, présentent des éléments d'algèbre aux professeurs de CEG (collège d'enseignement général) et aux instituteurs. Par ailleurs, en 1966, Guy Brousseau, instituteur de formation[4], crée un « Centre de recherche pour l'enseignement des mathématiques » (CREM) au sein du CRDP de Gironde auprès duquel il est détaché. Il y défend l'importance d'articuler recherche appliquée et recherche fondamentale. La première est tout à fait dans l'esprit des expérimentations pédagogiques menées au sein de l'IPN et dans les CRDP. La seconde a pour but de « faire avancer les connaissances des phénomènes didactiques » et relève d'un questionnement épistémologique sur la discipline enseignée. Au colloque d'Amiens en mars 1968, le fonctionnement du CREM est présenté comme un exemple possible d'IREM.

3. Cette citation et les suivantes sont extraites du compte-rendu de la réunion de la commission Lichnerowicz du 27 février 1967.

4. De 1963 à 1967, Guy Brousseau suit des études sous la direction d'A. Lichnerowicz et de J. Colmez à l'université de Bordeaux. Au début des années 1970 il initie la théorie des situations didactiques, considérée comme l'un des trois grands cadres de la didactique des mathématiques française.

3.2 – Paris-Lyon-Strasbourg : les trois premiers irem

Le 5 septembre 1968 le groupe de travail sur les irem de la Commission Lichnerowicz se réunit pour « arrêter les conditions dans lesquelles trois Instituts de recherches pour l'enseignement des mathématiques (irem) pourraient fonctionner durant la prochaine année scolaire ». Une lettre est adressée au rectorat de Lyon le 25 octobre 1968 conjointement par la Direction des enseignements supérieurs et par la Direction de la pédagogie, des enseignements scolaires et de l'orientation. Cette lettre, certainement aussi adressée aux rectorats de Paris et de Strasbourg, reprend, pour l'essentiel, le contenu du compte-rendu de cette réunion du 5 septembre.

Les missions attribuées aux irem pour l'année 1968-1969 sont avant tout dirigées vers la formation initiale des agrégés et admissibles de la session 1968. En fonction de leur statut, des décharges de trois heures de service par semaine ainsi que des remboursements de frais de déplacement sont préconisés. Un deuxième aspect des missions des irem concerne l' « information » du personnel en fonction (dans les lycées et les collèges) et volontaire, dans le cadre d'une décharge de service de trois heures par semaine. Le compte-rendu de la réunion du 5 septembre mentionne qu'à Lyon, un instituteur serait partiellement déchargé de son service et pourrait être mis à la disposition de l'irem pour étudier « les problèmes qui se posent à l'école primaire ».

Les directeurs choisis par la Commission Lichnerowicz et proposés aux recteurs sont : André Revuz, professeur à la faculté des sciences de Paris, Maurice Glaymann, maître-assistant à la faculté des sciences de Lyon, et Jean Frenkel, professeur à la faculté des sciences de Strasbourg. En outre, la lettre du 25 octobre mentionne la mise en place de services à mi-temps pour six maîtres-assistants ou assistants à Paris, quatre à Lyon et quatre à Strasbourg. Il est aussi demandé de mettre à disposition de chaque irem, un psychologue spécialisé et du personnel de secrétariat (quatre personnes au total). Le nombre d'enseignants de mathématiques des écoles normales, de lycées et de collège qui doivent intervenir pour l'encadrement des stagiaires n'est pas indiqué, mais il est précisé que ce sont les directeurs d'irem qui les désigneront, et qu'ils effectueront un mi-temps dans leur établissement et le reste de leur service à l'irem. Les locaux sont aussi mentionnés, tant à l'université (bureaux et salles) que dans les lycées dont les « locaux [. . .] libres le jeudi pourraient accueillir les participants des stages organisés durant l'année scolaire ».

3.3 – Des créations progressives

Entre 1968 et 1974, des irem sont créés dans les différentes académies. Des postes universitaires leur sont spécifiquement dédiés. Par exemple, d'après le boen du 12 mars 1970, sur les trente-quatre postes de maîtres-assistants publiés pour la section « mathématiques appliquées », dix-sept sont des postes attribués à des irem. Le choix du directeur (ou de la directrice) d'un irem se fait localement, en accord avec le « directoire des irem » au sein duquel les directeurs examinent les questions de fonctionnement et le développement des irem un peu partout en France. Il est parfois difficile de trouver une personne pour en assurer la direction. La création effective de l'irem de Limoges est par exemple reportée d'un an faute d'avoir un directeur. Christiane Zehren, présidente de l'apmep de 1978 à 1980, relate dans un article écrit pour le centenaire de l'apmep [14], des difficultés pour le choix du directeur de l'irem de Toulouse. D'après elle, il faut proposer un directeur qui soit « suffisamment "bourbakiste" » pour convenir à la Commission Lichnerowicz. Dans l'académie de Caen en revanche, plusieurs projets concurrents sont présentés. Dans un article de 2013 [2], Pierre Ageron relate l'élaboration des projets d'Huguette Delaveau d'une part et d'Éric Lehman d'autre part pour l'irem de Caen. H. Delaveau est mathématicienne, impliquée dans la formation initiale des enseignants du second degré, elle a aussi travaillé à l'ipn. É. Lehman quant à lui est mathématicien et n'est, en 1971, pas directement impliqué dans le domaine de l'enseignement pour le premier et le second degrés. Ils dirigent tous les deux des groupes de travail de l'apmep qui préfigurent ce que sera l'irem : « irem », « recherche pédagogique », « mathématiques et physique » pour H. Delaveau, « les mathématiques et les autres disciplines », « Comité de lecture » pour É. Lehman. D'après P. Ageron, le projet présenté par H. Delaveau fait la part belle aux savoirs disciplinaires et se place dans la continuité des structures existantes, alors que celui d'É. Lehman, celui qui sera retenu, se place davantage en rupture, « tendant à l'affranchissement de l'individu face au système ». On notera que, jusqu'à présent, nous n'avons évoqué que des hommes pour la direction des irem. D'après la liste des directeurs d'irem placée en annexe d'une note de la Direction chargée des personnels enseignants du 16 février 1972, au 1er octobre 1971 une seule femme dirige un IREM, il s'agit de Melle Car à Aix-Marseille. Quelques autres femmes dirigent un IREM dans les années 1970, parmi elles, Brigitte Sénéchal (Caen); elle est aussi à la tête du collectif de défense des IREM au moment de l'affaire des 20% avec le ministre René Haby en 1977.

Il n'est pas toujours facile de dater très précisément la création de chacun des IREM. À Reims par exemple, il a fallu quelques mois entre la date de création officielle et le début des travaux qui n'ont commencé qu'à la rentrée 1975. Inversement, certains IREM fonctionnent avant leur création officielle : ce fut le cas des trois premiers qui ont démarré leurs activités dès la rentrée 1968 alors que les financements n'ont été actés qu'en 1969, de l'IREM de Paris-Nord qui a fonctionné dès le début de l'année universitaire 1973-1974, d'abord comme une antenne de l'IREM de Paris, ou encore de celui de Caen comme nous l'avons déjà vu. On peut aussi lire dans la *La Gazette des mathématiciens* de janvier 1971 que l'université de Chambéry (qui dépend de l'académie de Grenoble) participe à des activités de « recyclage » à destination des enseignants de mathématiques (notamment de Sixième et de Seconde), en collaboration avec l'APMEP. La description de ces activités en rappelle d'autres, comme les conférences d'André Revuz, ou encore le travail sur les fiches Galion, créées par des membres de l'IREM de Lyon [5] pour un travail plus individualisé en classe et qui font aussi l'objet d'expérimentations critiques à l'IREM de Strasbourg par exemple.

Dans le même temps des IREM sont créés dans certains pays d'Afrique (notamment sous l'influence d'Huguette Delaveau) et une antenne de l'IREM de Bordeaux est créée dès 1971 au Centre universitaire des Antilles (l'IREM d'Antille-Guyane ne sera créé de manière autonome qu'en 1991).

En cinquante-cinq ans, des IREM ont disparu, certains ont été recréés (comme celui de Picardie en 2017-2018 après 18 ans d'inactivité) ou créés plus tard (comme celui de la Réunion en 2000 ou de Mayotte en 2021). Les moyens qui leur sont alloués ne sont plus du tout du même ordre que ceux des premières années, mais ils relèvent toujours de l'Enseignement supérieur et de la Recherche d'une part et de l'Éducation nationale d'autre part. La complémentarité de la recherche universitaire et de l'expertise pratique des enseignants du primaire et du secondaire est au cœur des activités des IREM.

Dates de création des IREM (de métropole)

1968-1969 : Paris, Lyon et Strasbourg ;
1969-1970 : Aix-Marseille, Besançon, Bordeaux et Rennes ;
1970-1971 : Clermont-Ferrand, Lille et Montpellier ;
1971-1972 : Grenoble, Nancy et Toulouse ;
1972-1973 : Poitiers, Rouen et Nice ; Brest se sépare de l'IREM de Rennes ;
1973-1974 : Orléans, Caen, Paris-Nord (1er janvier 1974) ;
1974-1975 : Reims, Amiens, Dijon, Limoges, Nantes/Angers.

3.4 – Bien plus que l'accompagnement d'une réforme

Dans un exposé du 21 octobre 1970, André Magnier, inspecteur général, membre de la commission Lichnerowicz, déclare : « la tâche essentielle des IREM a été, en fait, le "recyclage" des maîtres ». Cependant, les missions des IREM sont plus vastes : les quatre axes mentionnés par A. Magnier sont : la formation initiale, l'expérimentation pédagogique, la recherche et la conception d'une documentation et la formation permanente. Mais les moyens horaires alloués pour les enseignants du second degré sont présentés dans ce même exposé comme des heures de décharge à inclure dans le service des « recycleurs » et des « recyclés ». D'un autre côté, le 22 décembre 1977, André Lichnerowicz fait une déclaration à la Commission nationale des IREM suite à la réduction drastique des moyens accordés aux IREM à la rentrée 1977 sur un « simple coup de téléphone donné à la ronde aux Recteurs » [6]. La description qu'il fait de la mission des IREM dans ce discours diffère légèrement de celle d'A. Magnier, mais ni l'un ni l'autre ne limitent les IREM à un « recyclage » à court terme des enseignants. A. Lichnerowicz rejette même fermement ce terme : « un mot que je souhaiterais voir banni du vocabulaire de tout Français et particulièrement de celui du Ministre de l'Éducation. On recycle des déchets, des matières premières, non des hommes. »

À la fin des années 1970, les publications des IREM, au niveau local comme au niveau national, donnent une idée des travaux menés et des résultats obtenus. La plupart des groupes IREM publient

5. Pour en savoir plus sur Galion : `https://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?article321`
6. Déclaration du président Lichnerowicz à la Commission nationale du 22 décembre 1977.

des brochures relatant leurs recherches et pouvant servir de support de formation. D'autres brochures sont produites par des groupes nationaux, appelés commissions Inter-irem. Les deux plus anciennes de ces commissions sont la copirelem (en 1973) qui traite de la formation des enseignants du premier degré [7] et la commission inter-irem épistémologie et histoire des mathématiques (en 1975) [4]. Par ailleurs, la plupart des irem ont un « bulletin », on peut par exemple citer *Feuilles de vigne* à Dijon, *L'Ouvert* à Strabourg ou encore *Le Miroir des maths* à Caen. On y trouve des articles très divers, sur des pratiques de classe, des travaux de recherche en didactique, des éléments de culture mathématique, etc. Au niveau national, dès 1973 la revue *Grand N* est créée pour publier des travaux en lien avec la didactique des mathématiques pour l'enseignement dans le premier degré. Depuis 1990 elle est aussi consacrée aux autres disciplines scientifiques (physique, science de la vie et de la terre et technologie). Deux autres revues de portée nationale et en lien avec la recherche en didactique sont créées en 1983 (*Petit x*) et en 1990 (*Repères irem*). Ces trois revues sont aujourd'hui classées revues d'interface par le hceres. Une grande partie des publications des irem sont numérisées et librement accessibles grâce au travail de la commission inter-irem Publimath [8].

Enfin, en parallèle d'un fonctionnement décentralisé des irem, avec une autonomie des enseignants en leur sein [1], le réseau s'organise au niveau national. En particulier, en 1972 les directeurs d'irem se regroupent dans l'Assemblée des directeurs d'irem (adirem) pour traiter ensemble des questions d'organisation et de moyens. Vingt ans plus tard, en 1992, à la demande de l'adirem, un comité scientifique est créé [8].

4. Les irem au-delà des mathématiques modernes

Les missions des irem ont officiellement été définies par une commission ministérielle, les activités des irem dans leurs premières années d'existence ont été essentiellement consacrées à la formation des enseignants en lien avec les nouveaux programmes dits de « mathématiques modernes ». Cela leur confère un rôle qui semble très « institutionnel ». D'un autre côté, leur implantation dans les facultés et la volonté de faire travailler ensemble des enseignants de différents degrés font des irem un lieu de liberté et d'autonomie des enseignants pour leur formation continue. D'après le collectif créé suite aux décisions de R. Haby en 1977, ce sont ces deux caractéristiques qui sont attaquées [1]. Pourtant, les irem sont régulièrement cités en exemple par l' « institution » elle-même. Ainsi, lors de la création des Missions académiques pour la formation des personnels de l'Éducation nationale (mafpen) en 1982, les irem font partie des modèles qui inspirent un fonctionnement moins hiérarchique et plus collectif [9].

Le modèle des irem a aussi été envié par d'autres disciplines [9]. L'apmep demande d'ailleurs, dans la Charte de Caen (1972), la création d'irex où le x serait remplacé par l'initiale d'une discipline. Les iref pour le Français sont mentionnés dans la thèse de Clémence Cardon-Quint [7] sur les professeurs de français. Pour la physique, André Lagarrigue, physicien, professeur à l'université d'Orsay et président d'une commission ministérielle sur l'enseignement de la physique au tout début des années 1970, exprime la demande de création d'irep [13]. Depuis une dizaine d'année, des irem se transforment en ires, iremi ou encore iremis (où le s signifie « sciences » et le i l'informatique), par exemple à Toulouse, Poitiers, La Réunion, etc. Cela se traduit notamment par l'implication d'enseignants-chercheurs d'autres disciplines que les mathématiques.

Par leur implantation dans les facultés de sciences, par la constitution des groupes qui incluent des chercheuses et des chercheurs, les irem permettent et facilitent le travail entre les différents degrés d'enseignement, jusqu'à l'enseignement supérieur. Par ailleurs, on assiste aussi au début des années 1970 à la constitution d'un champ de recherche spécifique sur l'enseignement des mathématiques : la didactique. Comme Michèle Artigue et Régine Douady l'indiquent dans une note de synthèse dans la Revue française de pédagogie [3], les irem donnent une « base institutionnelle » à la recherche en didactique des mathématiques et permettent que les travaux de ce champ se fassent en lien étroit avec la pratique. C'est de nouveau la possibilité de réunir des enseignants de différents degrés qui est ici mise en avant. Les recherches en didactique des mathématiques françaises sont lar-

7. Une exposition relate les 50 années d'activité de la copirelem : `https://www.arpeme.fr/wordpress/copirelem/50-ans-dactivites-de-la-copirelem-lexposition/`
8. `https://publimath.univ-irem.fr/`

gement reconnues au niveau international comme l'attestent les récompenses décernées à Guy Brousseau, Michèle Artigue et Yves Chevallard par ICMI [9] (International Commission on Mathematical Instruction, sous-commission de l'IMU en charge des questions d'éducation).

5. Conclusion

Dès leur création, les IREM sont incontournables pour les professeurs de mathématiques. Ils répondent à un besoin de formation très important au début des années 1970 en lien avec le contexte scolaire (massification de l'accès au second degré et réforme des mathématiques modernes). Les missions qui leur sont attribuées sont en continuité avec ce qui était auparavant organisé par des associations (comme les conférences de l'APMEP et de la SMF) ou des institutions liées à l'Éducation nationale (IPN, CRDP, écoles normales,...). Mais leur originalité est de se trouver au sein des facultés des sciences ; cela facilite la participation de chercheuses et de chercheurs et la collaboration d'enseignantes et d'enseignants de différents degrés. Les moyens accordés aux IREM sont régulièrement remis en cause, leurs travaux et plus encore leur organisation sont pourtant tout aussi régulièrement cités et jugés dignes d'intérêt comme exemple pour la formation continue d'enseignants.

Références

[1] *Actes du forum national sur la formation continue des enseignants*. Rapp. tech. Paris, fév. 1978.

[2] P. Ageron. « Rétrospective sur quarante ans de l'IREM de Basse-Normandie ». *Le Miroir des Maths*, nº 12 (déc. 2013), p. 5-15.

[3] M. Artigue et R. Douady. « La didactique des mathématiques en France. Émergence d'un champ scientifique. Note de synthèse ». *Revue française de pédagogie* **76**, nº 1 (1986). Persée - Portail des revues scientifiques en SHS, p. 69-88.

[4] E. Barbin-Le Rest. « Dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM ». *Bulletin de l'APMEP*, nº 358 (1987), p. 175-184.

[5] J. Cahon et B. Poucet. *Réformer le système éducatif : pour une école nouvelle, mars 1968*. Histoire. Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2021.

[6] A. Canvel, R.-F. Gauthier et V. Maestracci. *La formation continue des enseignants du second degré. De la formation continue au développement professionnel et personnel des enseignants du second degré ?* Rapp. tech. 2018-068. IGEN/IGAENR, 2018.

[7] C. Cardon-Quint. « Lettres pures et lettres impures ? : les professeurs de français dans le tumulte des réformes : histoire d'un corps illégitime (1946-1981) ». fr. Thèse de doct. Université Rennes 2 ; Université Européenne de Bretagne, déc. 2010.

[8] R. Cori. *Les IREM à travers les siècles*. URL : `https://irem.univ-lille.fr/~site/IMG/pdf/presentation_rene_cori.pdf`.

[9] F. Dugast-Portes. « MAFPEN... Rétrospective ». *Recherche & formation* **32**, nº 1 (1999). Persée - Portail des revues scientifiques en SHS, p. 25-43.

[10] *La formation continue des enseignants*. Rapp. tech. 869. Sénat, 2023.

[11] N. Mons, J.-F. Chesné et L. Piedfer-Quêney. *Comment améliorer les politiques de formation continue et de développement professionnel des personnes d'éducation ? Dossier de synthèse*. 2021.

[12] C. Torossian et C. Villani. *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Rapp. tech. Ministère de l'éducation nationale, 2018.

[13] G. Walusinski. « Finalités de l'enseignement mathématique - Table ronde de Caen (11 mai 1972) ». *Bulletin de l'APMEP*, nº 286 (déc. 1972), p. 1043-1050.

[14] C. Zehren. « Les IREM et moi, on s'est rencontrés souvent. » *Bulletin de l'APMEP*, nº 490 (2010), p. 554-562.

Alice Ernoult

Lycée François Ier, Le Havre et université de Picardie Jules Verne

alice.ernoult@etud.u-picardie.fr

9. https://www.mathunion.org/icmi/awards/recipients-icmi-awards

Motifs : un tour d'horizon

• C. Dupont

Ce texte constitue une introduction (partielle et partiale) à la théorie des motifs, un programme initié par Grothendieck et qui structure aujourd'hui la géométrie et l'arithmétique des variétés algébriques.

1. Aux sources des motifs

Nous décrivons ici une partie de la généalogie, multiple et diverse, de la notion de motif, en mettant l'accent sur le rôle important des conjectures de Weil. Ces conjectures concernent les fonctions zêta des variétés algébriques définies sur un corps fini et trouvent elles-mêmes leur source dans les travaux de Riemann sur la répartition des nombres premiers. La théorie des motifs telle que pensée par Grothendieck est un prolongement de travaux classiques sur la cohomologie des variétés algébriques et la géométrie énumérative, que nous introduisons.

1.1 – Fonction zêta, fonctions L

Riemann introduit en 1859 la *fonction zêta*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1),$$

qu'il prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, et pour laquelle il démontre une équation fonctionnelle reliant $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$. Euler avait déjà calculé en 1735 :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\,,\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\,,\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\,,\ \ldots,$$

et en général $\zeta(2k) \in \mathbb{Q}\pi^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

La factorisation en produit de nombres premiers donne une écriture de la fonction zêta, déjà remarquée par Euler et appelée *produit eulérien* :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}\,.$$

Riemann en déduit que les zéros complexes de la fonction zêta contrôlent la répartition des nombres premiers, et formule au passage une conjecture toujours ouverte, l'*hypothèse de Riemann* : ces zéros (hormis les zéros « triviaux » $s = -2, -4, -6, \ldots$) devraient être situés sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Vingt ans avant Riemann, son mentor Dirichlet avait déjà usé des méthodes de l'analyse (réelle) pour prouver le *théorème de la progression arithmétique* : pour des entiers $a, d \geqslant 1$ premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo d. Sa preuve repose sur les *fonctions* L,

$$L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

associées à des *caractères de Dirichlet* $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$.

À partir de la fin du XIXe siècle apparaissent de nombreuses « fonctions L » (ou fonctions ζ) dans l'esprit de celles de Dirichlet, associées à divers objets de nature arithmétique : corps de nombres (Dedekind), représentations galoisiennes (E. Artin), formes modulaires (Hecke), etc. Ces fonctions ont des caractéristiques (souvent conjecturales !) communes : produit eulérien, prolongement analytique, équation fonctionnelle, valeurs intéressantes aux entiers, hypothèse de Riemann.

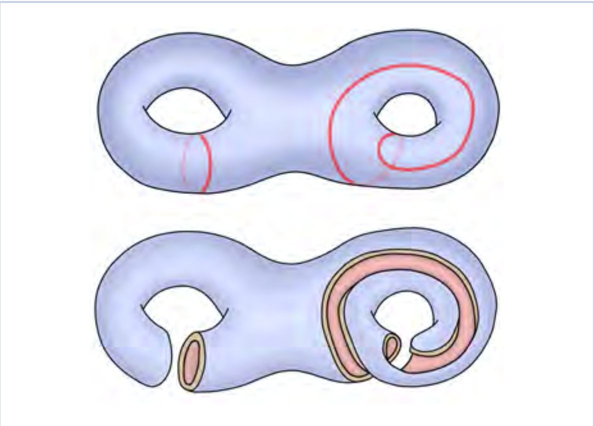
Une des sources de la théorie des motifs est la recherche d'un cadre pour structurer les propriétés des fonctions L issues de l'arithmétique, qui sont toutes des cas particuliers de fonctions L associées aux motifs.

1.2 – Coïncidences ?

Le terme de *motif*, inventé par Grothendieck, évoque une phrase musicale qu'on retrouve, sous différentes incarnations, à plusieurs endroits d'une œuvre. En peinture, le motif est le sujet d'une toile, qui en est une représentation du point de vue d'un artiste. Un motif au sens mathématique est un objet associé à une variété algébrique et qui s'incarne en des invariants de natures différentes, expliquant certaines « coïncidences » entre ces invariants. C'est donc aussi le motif, au sens de raison d'être, de ces incarnations différentes d'un phénomène commun.

Une de ces coïncidences a trait à la notion de genre. Pour une surface de Riemann compacte X, on a l'égalité entre les deux quantités suivantes, appelées *genre* de X (voir [36, 41] pour des analyses historiques de la notion de genre).

(a) Un invariant *topologique* : le « nombre de trous » de X, c'est-à-dire le nombre de tores (« donuts ») qu'on doit recoller entre eux pour former X. C'est aussi le nombre maximal de coupures (données par des courbes continues, fermées simples deux à deux disjointes) qu'on peut effectuer sur X sans la déconnecter. La figure suivante[1] montre une surface de Riemann compacte de genre 2 avec un système maximal de coupures, et une représentation de la surface découpée.



(b) Un invariant *analytique* : la dimension de l'espace vectoriel complexe des 1-formes différentielles holomorphes sur X (données dans une coordonnée locale z par une formule $f(z)\,dz$ avec f holomorphe), classiquement appelées « différentielles de première espèce ».

On verra au §1.7 une troisième incarnation du genre qui a, via les conjectures de Weil, influencé les développements de la théorie des motifs.

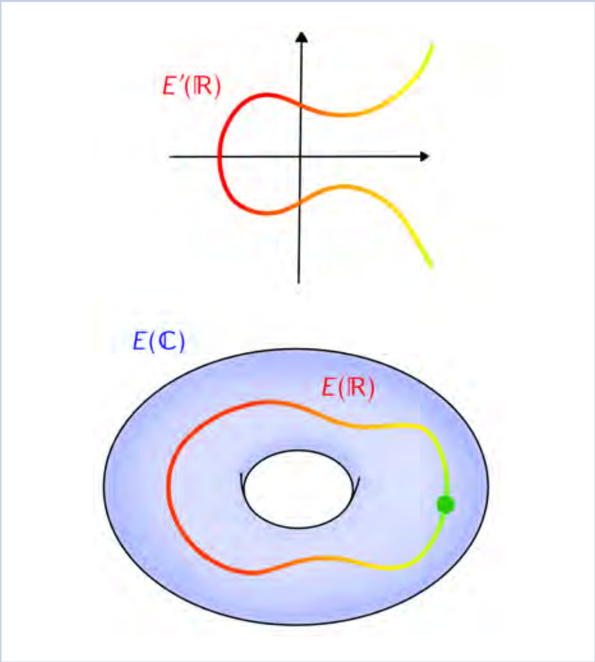
(c) Un invariant *arithmétique*, lié au nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales correspondant à une courbe algébrique définie sur un corps fini.

1. Les figures de cet article ont été réalisées par Anthony Genevois.

Les « coïncidences » dont la notion de motif est censée rendre compte se formalisent via la cohomologie des variétés algébriques.

Variétés algébriques

On s'intéresse aux variétés algébriques définies sur un corps k, comme les variétés affines (resp. projectives), définies dans l'espace affine $\mathbb{A}^n$ (resp. projectif $\mathbb{P}^n$) par un système d'équations données par des polynômes en n variables (resp. des polynômes homogènes en $n+1$ variables) à coefficients dans k. Pour une variété algébrique X et un corps K contenant k, on a l'ensemble $X(K)$ de ses K-points rationnels, qui est l'ensemble des solutions dans K du système d'équations.



Exemple A. Considérons $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, la droite affine privée du point 0, définie sur $k = \mathbb{Q}$. C'est une variété algébrique affine qui peut être décrite par l'équation $xy = 1$ dans le plan affine $\mathbb{A}^2$. On a $X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Exemple B. Considérons la variété algébrique définie sur $k = \mathbb{Q}$ par une équation de la forme

$$E:\ y^2z = x^3 + uxz^2 + vz^3$$

dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2$ avec coordonnées homogènes $[x : y : z]$. Dans l'espace affine $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ où $z \neq 0$, cela correspond à l'équation (obtenue en posant $z = 1$ dans l'équation de E) :

$$E' : \; y^2 = x^3 + ux + v.$$

Le seul point de $E \setminus E'$ (« à l'infini ») est $[0:1:0]$. Si les paramètres $u, v \in \mathbb{Q}$ sont tels que $x^3 + ux + v$ est à racines simples on dit que E est une *courbe elliptique*. La figure précédente montre $E(\mathbb{R})$ (le point à l'infini correspond à la direction verticale), et $E(\mathbb{C})$, une surface de Riemann compacte de genre 1.

1.3 – Cohomologie des variétés algébriques

Un outil a pris une importance considérable au XXe siècle dans l'étude (entre autres) des variétés algébriques : les *groupes de cohomologie*, qui sont des espaces vectoriels de dimension finie

$$\mathrm{H}^0(X), \mathrm{H}^1(X), \mathrm{H}^2(X), \ldots$$

associés à une variété algébrique X, et qui encodent de manière concise certaines « obstructions » liées à la géométrie de X. À la base de la théorie des motifs figure le fait étonnant qu'il y a plusieurs façons de mettre en place un tel outil, dont les deux suivantes (voir plus bas pour des exemples de calculs).

(a) La *cohomologie de Betti*, ou *singulière*, disponible si k est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mise en place par Betti, Poincaré, E. Noether, et d'autres. Le groupe de cohomologie de Betti $\mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, dual de l'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de l'espace topologique $X(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X) = \mathrm{H}_n(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})^\vee.$$

Rappelons que l'homologie singulière est définie comme le quotient de l'espace des n-cycles topologiques par celui des n-bords.

(b) La *cohomologie de de Rham (algébrique)*, définie par Grothendieck [21] et qui est disponible si k est de caractéristique zéro. Le groupe de cohomologie de de Rham $\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(X)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, analogue purement algébrique de la cohomologie de de Rham en géométrie différentielle (quotient de l'espace des n-formes différentielles fermées par celui des formes exactes), les formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ étant remplacées par les formes différentielles algébriques.

Si k est un sous-corps de $\mathbb{C}$, un théorème de Grothendieck, combiné au théorème de de Rham classique, donne un isomorphisme canonique entre ces deux théories cohomologiques, une fois les coefficients étendus aux nombres complexes :

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}. \tag{1}$$

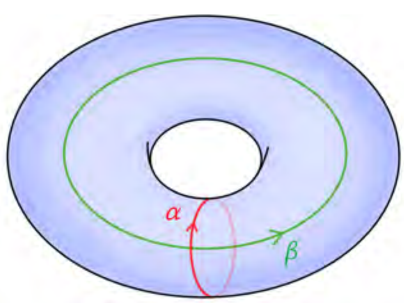
Cet isomorphisme est issu de l'intégration des formes différentielles (représentants de classes de cohomologie de de Rham) le long de cycles sur $X(\mathbb{C})$ (représentants de classes d'homologie singulière).

Notamment, les groupes de cohomologie de Betti et de de Rham ont la même dimension... ce qui est une « coïncidence » étonnante puisqu'ils mesurent des obstructions de natures très différentes !

Exemple A. Le groupe $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B/dR}}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$ est de dimension 1. Du côté Betti, il y a en effet une unique obstruction à pouvoir contracter un lacet γ dans $\mathbb{C}^*$, mesurée par l'*indice* $\mathrm{Ind}(\gamma)$, le nombre de fois que γ tourne autour de 0. Du côté de Rham, il y a une unique obstruction à l'existence d'une primitive d'une fonction méromorphe avec un seul pôle en 0, mesurée par le *résidu* $\mathrm{Res}(f)$. Ces obstructions, topologique et analytique, sont reliées par la formule des résidus, qui est un précurseur de l'isomorphisme de comparaison (1) :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \,\mathrm{Ind}(\gamma)\,\mathrm{Res}(f).$$

Exemple B. La courbe elliptique E et la courbe elliptique épointée E' ont les mêmes groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B/dR}}(E) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{B/dR}}(E')$, de dimension 2. Une base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(E)^\vee = \mathrm{H}_1(E(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ est donnée par les classes de deux lacets α et β comme dans la figure suivante. Une base de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E')$ est donnée [2] par les classes des formes différentielles $\mathrm{d}x/y$ (qui s'étend en une forme différentielle sur E) et $x\,\mathrm{d}x/y$ (qui a un pôle d'ordre 2 au point à l'infini).



2. La cohomologie de de Rham algébrique de E' est plus facile à décrire que celle de E grâce au fait que E' est affine : toutes les classes de cohomologie peuvent être représentées par des formes algébriques globales.

Plus généralement, pour une surface de Riemann compacte X de genre g, le $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B/dR}}(X)$ est de dimension $2g$. Du côté Betti, un système maximal de coupures de X ne remplit que la *moitié* de ce groupe de cohomologie – de même du côté de Rham avec une base des différentielles de première espèce. Ce phénomène est un cas particulier de la théorie de Hodge, dont il sera question au §1.5.

Les théories de Betti et de de Rham partagent des caractéristiques formelles importantes, compatibles à l'isomorphisme de comparaison (1) :

– la fonctorialité (contravariante) : un morphisme de variétés algébriques $f : X \to Y$ induit une application linéaire dans l'autre sens

$$f^* : \mathrm{H}^n(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X)\,; \qquad (2)$$

– une structure d'algèbre graduée commutative sur $\mathrm{H}^\bullet(X)$ induite par le *cup-produit*

$$\mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^j(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(X)\,;$$

– la *formule de Künneth* :

$$\mathrm{H}^n(X \times Y) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^j(Y)\,;$$

– la *dualité de Poincaré* : si X est une variété algébrique projective lisse [3] et connexe de dimension d alors $\mathrm{H}^{2d}(X)$ est de dimension 1 et l'accouplement

$$\mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{2d-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2d}(X)$$

donné par le cup-produit est non dégénéré pour tout entier naturel $i \in \{0, \dots, 2d\}$.

Mentionnons enfin, en anticipant le §1.6 où les définitions correspondantes seront données, une caractéristique essentielle de la cohomologie, qui la relie aux cycles algébriques :

– des applications *classe de cycle* issues des groupes de Chow, pour X lisse :

$$\mathrm{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{H}^{2r}(X) \quad , \quad Z \mapsto [Z]. \qquad (3)$$

1.4 – Périodes

L'isomorphisme de comparaison (1) peut être représenté par une matrice, quitte à choisir une k-base de la cohomologie de de Rham et une $\mathbb{Q}$-base de la cohomologie de Betti. Dans le cas où k est un corps de nombres (extension finie de $\mathbb{Q}$) une telle matrice s'appelle *matrice des périodes* et ses coefficients sont appelés *périodes*. Concrètement, ce sont des intégrales de formes différentielles algébriques le long de cycles tracés sur $X(\mathbb{C})$.

Exemple A. Dans le cas de $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$, il y a essentiellement une seule période, associée à la classe de la forme différentielle $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ et à la classe du lacet $\{|z| = 1\}$ parcouru dans le sens trigonométrique :

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi.$$

Exemple B. Une matrice des périodes de $\mathrm{H}^1(E)$ est de taille 2×2. Ses quatre coefficients sont des « intégrales elliptiques », par exemple

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + ux + v}}$$

où a est la plus grande racine réelle de x^3+ux+v. Ce sont des périodes, au sens usuel, des fonctions elliptiques, variantes des fonctions trigonométriques où l'ellipse remplace le cercle. Des intégrales similaires donnent aussi la formule exacte pour la période du pendule pesant en mécanique newtonienne.

Les intégrales vues jusqu'à présent se calculent sur des domaines sans bord. Il est naturel de considérer des intégrales plus générales en incluant les groupes de *cohomologie relative* $\mathrm{H}^n(X, Y)$ où Y est une sous-variété de X (où vit le bord du domaine d'intégration). Par exemple, le groupe de cohomologie relative $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, \{1, a\})$, pour un $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$, contient dans sa matrice des périodes l'intégrale

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(a).$$

On obtient alors une notion plus générale de période, qui est équivalente à la notion élémentaire suivante définie par Kontsevich et Zagier [35].

Définition. Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire s'écrivent sous la forme d'intégrales absolument convergentes

$$\int_\sigma f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

où $f \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ et $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine semi-algébrique défini sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire défini par un nombre fini d'inégalités $g \geqslant 0$ avec $g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$.

Les périodes forment un sous-anneau de $\mathbb{C}$ qui contient le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques et qui est dénombrable. On ne connaît pourtant aucun nombre complexe « intéressant » qui ne soit pas une période, même s'il est conjecturé que la base e du

3. Une variété algébrique projective est dite lisse si elle vérifie le critère jacobien usuel de la géométrie différentielle.

logarithme népérien n'est pas une période. En plus de π, des intégrales elliptiques, et des logarithmes, notons que la valeur de la fonction zêta en un entier $n \geqslant 2$ est une période, grâce à la formule

$$\zeta(n) = \int_{[0,1]^n} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{1 - x_1 \cdots x_n}.$$

Elle apparaît dans la matrice des périodes d'un groupe de cohomologie relative associé à un arrangement de sous-variétés de $\mathbb{A}^n$.

Par ailleurs, les périodes apparaissent naturellement en physique : les *intégrales de Feynman*, qui calculent les probabilités des interactions entre particules élémentaires, s'expriment en fonction de périodes.

L'étude de l'arithmétique des périodes est une des raisons d'être de la théorie des motifs.

1.5 – Théorie de Hodge

Focalisons-nous un instant sur la cohomologie de Betti, c'est-à-dire sur les invariants topologiques des variétés algébriques complexes (définies sur $k = \mathbb{C}$). Une question centrale est : comment la structure de variété algébrique contraint-elle la topologie ? La théorie de Hodge est un ensemble d'outils pour répondre à cette question. Elle remonte au résultat fondateur suivant de Hodge [26], dont il est important de préciser qu'il repose sur des méthodes analytiques (géométrie kählérienne).

Théorème (Décomposition de Hodge). *Soit X une variété algébrique complexe projective et lisse, soit n un entier naturel. On a une décomposition*

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\substack{p,q \geqslant 0 \\ p+q=n}} \mathrm{H}^{p,q}(X)$$

qui vérifie la « symétrie de Hodge »

$$\overline{\mathrm{H}^{p,q}(X)} = \mathrm{H}^{q,p}(X).$$

Concrètement, l'espace $\mathrm{H}^{p,q}(X)$ est l'espace des classes de cohomologie qui peuvent être représentées par une forme différentielle $\mathscr{C}^\infty$ complexe de type (p,q), c'est-à-dire écrite en coordonnées holomorphes locales z_i avec p occurrences de $\mathrm{d}z_i$ et q occurrences de $\mathrm{d}\overline{z}_i$. La décomposition de Hodge est une structure supplémentaire contraignante sur la cohomologie de Betti ; par exemple, la symétrie de Hodge implique que $\mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X)$ est de dimension paire si n est impair.

Comme $\mathrm{H}^{1,0}(X)$ est l'espace des 1-formes holomorphes sur X, cela explique, dans le cas des surfaces de Riemann (variétés algébriques complexes projectives lisses de dimension 1), que la dimension de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X)$ est le double du genre de X.

1.6 – Cycles algébriques

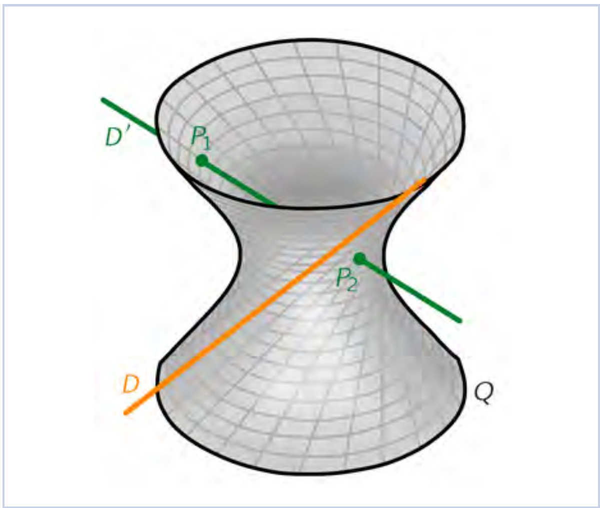
La géométrie algébrique regorge de problèmes énumératifs comme : combien de droites de l'espace projectif de dimension 3 sont contenues dans une surface cubique lisse donnée ? (Réponse : 27)

Une approche moderne à ce genre de question est la théorie de l'intersection, qui est l'étude des cycles algébriques. Un cycle algébrique (ici, à coefficients dans $\mathbb{Q}$) de codimension r dans une variété algébrique X est une combinaison linéaire formelle

$$a_1 Z_1 + \cdots + a_n Z_n$$

où les $a_i \in \mathbb{Q}$ et les Z_i sont des sous-variétés de codimension r de X. On définit le r-ième *groupe de Chow* $\mathrm{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}}$ comme le quotient de l'espace des cycles algébriques de codimension r par la relation d'équivalence rationnelle. Cette relation identifie deux cycles algébriques qui sont reliés par une famille de cycles algébriques paramétrés par $\mathbb{P}^1$. L'intersection des cycles algébriques donne une structure d'anneau gradué à $\mathrm{CH}^\bullet(X)_{\mathbb{Q}}$, notée $(Z, Z') \mapsto Z \cdot Z'$. En effet, le quotient par l'équivalence rationnelle permet de « déplacer » deux cycles algébriques jusqu'à ce qu'ils s'intersectent dans la codimension attendue. Par exemple, la figure suivante représente une surface quadrique lisse Q de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ et une droite D contenue dans Q. Comme D est rationnellement équivalente à une droite D' qui intersecte Q en deux points distincts P_1 et P_2, on a

$$Q \cdot D = Q \cdot D' = P_1 + P_2.$$



Le lien entre cycles algébriques et cohomologie de Betti est donné par l'application *classe de cycle*, annoncée au §1.3, pour k un sous-corps de $\mathbb{C}$ et X une variété lisse :

$$\mathrm{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{H}^{2r}_{\mathrm{B}}(X)\,,\ Z \mapsto [Z]. \tag{4}$$

Si X est en plus projective de dimension d on a la dualité de Poincaré $\mathrm{H}^{2r}_{\mathrm{B}}(X) \simeq \mathrm{H}_{2(d-r)}(X(\mathbb{C});\mathbb{Q})$, et $[Z]$ est représenté par un cycle topologique de dimension $2(d-r) = \dim_{\mathbb{R}}(Z(\mathbb{C}))$ défini par une triangulation quelconque de $Z(\mathbb{C})$.

Dans le cas où X est projective et lisse, on voit facilement que l'image de l'application (4) est contenue dans la partie de type (r,r) de la décomposition de Hodge. La conjecture de Hodge [26] est l'affirmation réciproque. À l'instar de l'hypothèse de Riemann, il s'agit de l'un des sept *Millenium Prize Problems* du Clay Mathematics Institute.

Conjecture (Conjecture de Hodge). *Soit X une variété algébrique complexe projective et lisse, soit r un entier naturel. Tout élément de $\mathrm{H}^{2r}_{\mathrm{B}}(X) \cap \mathrm{H}^{r,r}(X)$ est la classe d'un cycle algébrique de codimension r dans X.*

1.7 – Les conjectures de Weil

Les conjectures de Weil ont été une source incroyable de développements en géométrie arithmétique. Elles ont trait à un problème très ancien : compter le nombre de solutions entières d'équations polynomiales à coefficients entiers (appelées *équations diophantiennes*). Une stratégie classique est de les réduire modulo un nombre premier p pour se ramener à des équations dans le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à p éléments. Rappelons que $\mathbb{F}_p$ a une unique extension de degré n pour chaque entier $n \geqslant 1$, qu'on note $\mathbb{F}_{p^n}$ et qui est l'unique corps à p^n éléments.

Adoptons un point de vue géométrique et considérons une variété algébrique X définie sur $k = \mathbb{F}_q$, pour q une puissance d'un nombre premier p. Dans la lignée des travaux de Riemann, et en suivant notamment E. Artin, Hasse, et Weil, on associe à X sa *fonction zêta*, qui est la série formelle

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{n\geqslant 1} \#(X(\mathbb{F}_{q^n}))\frac{t^n}{n}\right).$$

On considérera également la variante

$$\zeta_X(s) = Z(X, q^{-s})$$

dont les propriétés sont plus semblables à celles de la fonction zêta de Riemann.

Si X est une courbe projective lisse, F. K. Schmidt [43] démontre en 1931 la rationalité de $Z(X,t)$:

$$Z(X,t) = \frac{P_X(t)}{(1-t)(1-qt)}\,,$$

où $P_X(t)$ est un polynôme. De plus, le degré de $P_X(t)$ est $2g$ où g est le genre de X, défini comme la dimension de l'espace des 1-formes algébriques sans pôle sur X. Comme on le verra, l'apparition de ce nombre $2g$, qui est la dimension du $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}/\mathrm{dR}}$ d'une courbe projective lisse, n'est pas un hasard et a bien une explication cohomologique. Schmidt démontre aussi que si l'on écrit

$$P_X(t) = \prod_{i=1}^{2g}(1-\alpha_i t)$$

alors $\alpha \mapsto q/\alpha$ permute les α_i. Ce résultat est un analogue de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann puisqu'il implique une relation entre $\zeta_X(s)$ et $\zeta_X(1-s)$.

Dans le cas du genre 1, Hasse [25] démontre en 1933 que si l'on écrit $P_X(t) = (1-\alpha t)(1-\beta t)$, alors

$$|\alpha| = |\beta| = \sqrt{q}.$$

Ce résultat est un analogue de l'hypothèse de Riemann : les racines de ζ_X sont sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Au cours des années 1940, Weil [50] généralise le théorème de Hasse au cas du genre quelconque et en déduit la *borne de Hasse-Weil* sur le nombre de points d'une courbe projective lisse définie sur un corps fini :

$$|\#(X(\mathbb{F}_q)) - (q+1)| \leqslant 2g\sqrt{q}.$$

Les conjectures de Weil [49], énoncées en 1949, visent à généraliser ces résultats à toutes les variétés projectives et lisses définies sur un corps fini. Elles ont été démontrées l'une après l'autre, par Dwork [19] (rationalité de $Z(X,t)$, 1959), Grothendieck et ses collaborateurs [45] (équation fonctionnelle, lien avec la cohomologie de Betti, 1964), et enfin Deligne [17] (analogue de l'hypothèse de Riemann, 1974).

Avant de donner une idée de la preuve des conjectures de Weil, mentionnons la *fonction zêta globale* d'une variété algébrique X définie sur $\mathbb{Q}$, donnée par le produit eulérien

$$\zeta_X(s) = \prod_{p \text{ premier}} Z(X_p, p^{-s}),$$

où X_p est la réduction de X modulo p. La définition de $Z(X_p,t)$ doit être adaptée pour un nombre fini de nombres premiers p, pour lesquels la réduction de X modulo p n'est pas lisse. Si X est un point, on retrouve la fonction zêta de Riemann. Dans le cas d'une courbe elliptique E on s'attend à ce que les propriétés analytiques de la fonction ζ_E reflètent des propriétés arithmétiques de E. Notamment, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer – un autre *Millenium Prize Problem* – relie le développement de Taylor de $\zeta_E(s)$ en $s = 1$ à la structure du groupe des points rationnels $E(\mathbb{Q})$.

1.8 – Encore plus de cohomologie

Weil [48] avait remarqué que ses conjectures avaient un goût cohomologique, par analogie avec le *théorème du point fixe de Lefschetz*. Ce théorème compte, sous certaines hypothèses, le nombre de points fixes d'un endomorphisme F d'un espace topologique X comme somme alternée des traces de l'endomorphisme F_* induit par F sur les différents groupes d'homologie singulière de X :

$$\#(X^F) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \operatorname{Tr}(F_* : \mathrm{H}_n(X;\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_n(X;\mathbb{Q})).$$

Quel rapport avec les conjectures de Weil ? Une variété algébrique X définie sur $\mathbb{F}_q$ a un endomorphisme canonique F, l'*endomorphisme de Frobenius*, qui élève les coordonnées à la puissance q, et $X(\mathbb{F}_{q^n})$ est l'ensemble des points fixes de F^n dans l'ensemble $X(\overline{\mathbb{F}}_q)$, où $\overline{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Weil remarque que si l'on disposait d'une théorie cohomologique pour les variétés sur $\mathbb{F}_q$ avec des propriétés formelles analogues à celles de la cohomologie singulière, on pourrait en déduire une preuve de ses conjectures – à l'exception notable de l'analogue de l'hypothèse de Riemann. Notamment, le polynôme $P_X(t)$ dont il a été question dans le §1.7 s'interpréterait, via un théorème du point fixe à la Lefschetz, comme le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par le Frobenius sur $\mathrm{H}^1(X)$, et l'équation fonctionnelle de la fonction ζ_X serait une conséquence de la dualité de Poincaré.

Une telle théorie de cohomologie a été développée par Grothendieck et ses collaborateurs, notamment M. Artin, dans les années 1960 [45], et continue la liste des théories de cohomologie commencée au §1.3 :

(c) La *cohomologie étale ℓ-adique*, disponible pour tout corps k, qui produit des espaces vectoriels $\mathrm{H}^n_{\text{ét},\ell}(X)$ sur le corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques, où ℓ est un nombre premier différent de la caractéristique de k.

De manière analogue à la comparaison entre cohomologie de de Rham et de Betti (1), on a un isomorphisme de comparaison, dû à M. Artin, pour k un sous-corps de $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{H}^n_{\text{ét},\ell}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Par ailleurs, les groupes de cohomologie étale ℓ-adique ont une structure supplémentaire très riche : ils sont naturellement des représentations continues du groupe de Galois absolu du corps de définition k. Cela ouvre la voie à une étude géométrique des groupes de Galois.

1.9 – Vers les motifs

Betti, de Rham, étale ℓ-adique : trois théories de cohomologie [4] pour les variétés algébriques qui « donnent les mêmes résultats [5] ». Notamment, les groupes de cohomologie ont la même dimension et les mêmes propriétés formelles comme la dualité de Poincaré. Cependant, chaque théorie a ses spécificités et ses structures supplémentaires, comme la décomposition de Hodge en cohomologie de Betti et l'action galoisienne en cohomologie étale ℓ-adique. De plus, les isomorphismes de comparaison entre théories de cohomologie font apparaître une richesse arithmétique, comme les périodes pour la comparaison entre Betti et de Rham (1).

Cette profusion de théories de cohomologie est un luxe : on peut transférer intuition et techniques d'une théorie à l'autre. Ce type de transfert est au cœur de la stratégie énoncée par Weil, et complétée par Serre [44] et Grothendieck, pour attaquer ses conjectures. On verra aussi plus bas la notion de poids et la théorie de Hodge mixte, développée par Deligne [18] à partir de l'analogie entre cohomologie de Betti et cohomologie étale ℓ-adique.

Il y a aussi des aspects plus frustrants de l'abondance des théories de cohomologie. Notamment, on a du mal à comparer les représentations galoisiennes données par la théorie étale ℓ-adique pour différents nombres premiers ℓ.

4. Mais aussi la *cohomologie cristalline*, qui remplace la cohomologie de de Rham sur un corps parfait de caractéristique positive.
5. Un slogan à nuancer, les isomorphismes de comparaison cachant des phénomène subtils : Charles construit par exemple [12] une variété algébrique X définie sur un corps de nombres k et deux plongements $k \subset \mathbb{C}$ tels que les deux algèbres de cohomologie de Betti $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{B}}(X)$ correspondant aux deux plongements ne sont pas isomorphes.

Ces considérations ont amené Grothendieck à dégager la notion de motif comme théorie de cohomologie « universelle ». Une intuition importante de Grothendieck est que la structure de cette théorie devrait être contrôlée par les cycles algébriques. Les motifs forment donc un cadre pour aborder des questions sur l'interaction entre cycles algébriques et cohomologie(s).

2. La théorie des motifs

Nous introduisons maintenant la théorie des motifs à proprement parler. Le lecteur impatient pourra parcourir le §2.1 avant de passer aux aspects galoisiens et aux applications aux périodes du §3.

2.1 – Motifs... et morphismes entre motifs

Le *motif* d'une variété algébrique X est pensé par Grothendieck comme une version « universelle » de sa cohomologie, c'est-à-dire un objet $\mathrm{M}(X)$ qui contrôle les propriétés des groupes $\mathrm{H}^n(X)$ dans les différentes théories de cohomologie.

Pourquoi désirer une telle notion alors qu'on pourrait se contenter de la cohomologie ? Une des raisons est qu'il arrive souvent que la cohomologie de deux variétés algébriques différentes X et Y contienne un « morceau commun » qui est « le même » dans chaque théorie : même dimension, mais aussi mêmes périodes, même décomposition de Hodge, même action du groupe de Galois absolu, etc. Cela se traduit notamment par un facteur commun dans les fonctions L associées à X et Y. On a alors envie d'exprimer, et si possible d'expliquer, cette « coïncidence » à un niveau conceptuel : le morceau commun est un objet en lui-même, un motif au sens mathématique, qui est un sous-objet commun aux objets $\mathrm{M}(X)$ et $\mathrm{M}(Y)$.

L'exemple le plus simple de ce phénomène est que le H^0 d'une variété algébrique connexe est toujours « le même ». L'explication est ici élémentaire : le morphisme de X vers un point induit par fonctorialité une application linéaire $\mathrm{H}^0(\text{point}) \to \mathrm{H}^0(X)$ qui est un isomorphisme dans chaque théorie de cohomologie. En général, trouver des explications à de telles « coïncidences » est beaucoup plus compliqué. C'est un des buts de la théorie des motifs.

On est donc amené à donner un sens à la notion de « morceau commun » via une notion d'*isomorphisme entre motifs*, et plus généralement à relier des motifs différents via une notion de *morphisme entre motifs*. La question

« Qu'est-ce qu'un motif ? »

n'est donc pas pertinente sans la question

« Qu'est-ce qu'un morphisme entre motifs ? ».

Dit autrement, on cherche une *catégorie de motifs*. Rappelons qu'une *catégorie* C est la donnée

- d'une classe d'objets (par exemple les ensembles, les espaces vectoriels, les groupes)
- et d'une notion de morphisme (par exemple les applications, les applications linéaires, les morphismes de groupes), c'est-à-dire, d'ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(M, N)$ entre deux objets M et N, et d'une notion de composition des morphismes.

Il existe plusieurs approches des motifs, qui ne sont pas encore toutes unifiées, et sont plus ou moins utiles en fonction du contexte. Listons quelques-unes des caractéristiques attendues de « la » théorie des motifs.

(M1) Les motifs sont les objets d'une catégorie $\mathrm{Mot}(k)$, la *catégorie des motifs* sur k, qui est $\mathbb{Q}$-linéaire : les ensembles de morphismes sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels et la composition des morphismes est bilinéaire.[6] Cet axiome est raisonnable puisque les motifs sont des abstractions des groupes de cohomologie, et donc des objets « linéaires ».

(M2) Pour chaque théorie de cohomologie (Betti, de Rham, étale ℓ-adique) à coefficients dans un corps F on a un *foncteur de réalisation*[7]

$$\mathrm{Mot}(k) \longrightarrow \mathrm{Vect}_F$$

vers la catégorie des espaces vectoriels sur F de dimension finie.

(M3) Pour toute variété algébrique X définie sur k et tout entier naturel n, on a un objet $\mathrm{M}^n(X)$ de $\mathrm{Mot}(k)$, le *motif* de X en degré n, dont les réalisations (images par un des foncteurs de réalisation) sont les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n(X)$ dans les différentes théories. (Plus généralement on veut aussi avoir à disposition des objets $\mathrm{M}^n(X, Y)$ jouant le rôle de groupes de cohomologie relative, même si on n'insistera pas sur cet aspect.) Plus formellement,

6. Pour des motifs plus généraux, l'anneau des coefficients n'est pas nécessairement $\mathbb{Q}$. On peut aussi vouloir remplacer le corps de définition k par un anneau commutatif général, voire une variété algébrique de paramètres.

7. Un foncteur F d'une catégorie C vers une catégorie D associe à tout objet M de C un objet $F(M)$ de D, et à tout morphisme $M \to N$ dans C un morphisme $F(M) \to F(N)$ dans D, de manière compatible à la composition des morphismes.

on a des foncteurs contravariants [8]

$$\mathrm{Var}(k) \longrightarrow \mathrm{Mot}(k)\ ,\ \ X \mapsto \mathrm{M}^n(X) \qquad (5)$$

qui factorisent les foncteurs de cohomologie. On peut être plus ambitieux et demander que la catégorie $\mathrm{Mot}(k)$ soit la catégorie *universelle* qui factorise tous les foncteurs de cohomologie d'une classe donnée.

(M4) La catégorie $\mathrm{Mot}(k)$ a une structure de catégorie monoïdale symétrique (c'est-à-dire une notion de produit tensoriel) et les motifs $\mathrm{M}^n(X)$ satisfont à une formule de Künneth, et à la dualité de Poincaré si X est projective et lisse.

Enfin, ajoutons une condition qui n'est pas imposée dans certaines approches de la théorie des motifs, et que nous développerons au §3 avec des applications aux périodes.

(M5) La catégorie $\mathrm{Mot}(k)$ est tannakienne, avec les foncteurs de réalisation pour foncteurs fibre.

Contentons-nous de noter qu'une catégorie tannakienne est notamment abélienne (existence de noyaux et images avec les propriétés attendues).

2.2 – Motifs et cycles algébriques

La caractéristique cruciale des motifs est l'axiome suivant.

(M6) Les morphismes dans la catégorie $\mathrm{Mot}(k)$ sont reliés aux cycles algébriques.

Précisons ce desideratum. Les applications linéaires (2) ne sont pas les seules disponibles dans toutes les théories cohomologiques. En effet, les applications classe de cycle (3) permettent de définir des applications linéaires entre groupes de cohomologie grâce à la notion de correspondance. Une *correspondance* entre deux variétés algébriques X et Y est un cycle algébrique dans le produit $X \times Y$. Notons $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ et $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ les deux projections. Si Z est une correspondance de codimension r entre X et Y projectives lisses, on peut considérer la composition :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^n(Y) &\xrightarrow{(\mathrm{pr}_Y)^*} \mathrm{H}^n(X\times Y) \\ &\xrightarrow{[Z]\cdot(-)} \mathrm{H}^{n+2r}(X\times Y) \\ &\xrightarrow{(\mathrm{pr}_X)_*} \mathrm{H}^{n+2r-2\dim(Y)}(X) \end{aligned} \qquad (6)$$

où $(\mathrm{pr}_X)_*$ est l'« intégration le long des fibres », issue de la dualité de Poincaré. Le graphe d'un morphisme $f : X \to Y$ est un cas particulier de correspondance de codimension $r = \dim(Y)$ entre X et Y, pour lequel (6) est l'application linéaire (2) induite par f.

Une intuition importante de Grothendieck est que, dans le cadre des variétés projectives lisses, les applications linéaires (6) sont *les seules* qui doivent être considérés comme communes à toutes les théories cohomologiques, et sont donc la *définition* des morphismes entre motifs de variétés projectives lisses. (Nous verrons que le cas des variétés générales est plus subtil.)

2.3 – Motifs purs à la Grothendieck

La première définition d'une catégorie des motifs est due à Grothendieck. Il s'agit d'une théorie partielle puisqu'elle ne concerne que les variétés algébriques projectives et lisses. Les motifs correspondants sont appelés *purs* pour les distinguer des motifs généraux qu'on appelle parfois *mixtes*. On doit à Manin [38] le premier texte sur les idées de Grothendieck au sujet des motifs purs.

Nous présentons maintenant la construction (en trois étapes) d'une des versions de la catégorie des motifs purs de Grothendieck. Il s'agit de la catégorie des *motifs numériques*, basée sur l'équivalence numérique entre cycles algébriques. Pour une variété algébrique projective lisse X de dimension d et deux éléments $Z, Z' \in \mathrm{CH}^r(X)_{\mathbb{Q}}$, on dit que Z et Z' sont *numériquement équivalents*, et on écrit $Z \sim_{\mathrm{num}} Z'$, si pour tout $W \in \mathrm{CH}^{d-r}(X)_{\mathbb{Q}}$ de codimension complémentaire, les nombres d'intersection $\#(Z\cdot W)$ et $\#(Z'\cdot W)$ coïncident.

Étape 1

On considère la catégorie C dont les objets sont les variétés algébriques projectives lisses, où l'on note $\mathrm{M}(X)$ l'objet correspondant à une variété X ; les morphismes sont donnés par les correspondances modulo équivalence numérique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathrm{M}(Y), \mathrm{M}(X)) = \mathrm{CH}^{\dim(Y)}(X\times Y)_{\mathbb{Q}}/\sim_{\mathrm{num}}.$$

La composition de correspondances Z_{12} entre X_1 et X_2 et Z_{23} entre X_2 et X_3 se fait par la formule

$$Z_{12} \circ Z_{23} = (\mathrm{pr}_{13})_*((\mathrm{pr}_{12})^*(Z_{12}) \cdot (\mathrm{pr}_{23})^*(Z_{23})),$$

où les $\mathrm{pr}_{ij} : X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_i \times X_j$ sont les projections. La catégorie C est $\mathbb{Q}$-linéaire et monoïdale symétrique, le produit tensoriel étant donné par

8. Un foncteur contravariant renverse le sens des flèches : à un morphisme $M \to N$ il associe un morphisme $F(N) \to F(M)$ « dans l'autre sens », de manière compatible à la composition des morphismes.

le produit des variétés. L'objet correspondant à un point est noté $\mathbb{Q}$, c'est l'unité du produit tensoriel.

On a un foncteur contravariant $\mathrm{Var}(k) \to \mathrm{C}$ qui envoie X sur $\mathrm{M}(X)$ et un morphisme $f : X \to Y$ vers la classe du graphe de f.

Étape 2

L'objet $\mathrm{M}(X)$ de C joue le rôle de la somme directe des $\mathrm{H}^n(X)$ pour tous les degrés n. On souhaiterait « découper » cet objet en une somme directe d'objets $\mathrm{M}^n(X)$. Plus généralement, on souhaiterait aussi « découper » chaque $\mathrm{M}^n(X)$ en somme directe d'objets plus petits (« particules élémentaires » ?) quand une telle décomposition existe dans chaque théorie de cohomologie.

On définit donc la catégorie D comme étant la *complétion pseudo-abélienne* de C. Cela revient à rajouter formellement des objets qui jouent le rôle de noyaux ou images des projecteurs : pour tout objet M de C et tout morphisme $e : M \to M$ qui vérifie $e \circ e = e$, on a des objets $\ker(e)$ et $\mathrm{Im}(e)$ dans D et une décomposition $M = \ker(e) \oplus \mathrm{Im}(e)$.

On obtient alors une décomposition $\mathrm{M}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{M}^0(\mathbb{P}^1) \oplus \mathrm{M}^2(\mathbb{P}^1)$ dans D, grâce au projecteur donné par le cycle algébrique $\mathbb{P}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On montre facilement que $\mathrm{M}^0(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Q}$ est le motif trivial. Même si $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1)$ est de dimension 1, le motif $\mathrm{M}^2(\mathbb{P}^1)$ n'est pas isomorphe au motif trivial. Une manière de le voir est que parmi les périodes de $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1)$ figure $2i\pi$, alors que les périodes du H^0 du point sont des nombres rationnels. Ou encore, en théorie de Hodge, $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^1)$ est de type $(1,1)$ alors que le H^0 du point est de type $(0,0)$. On note

$$\mathrm{M}^2(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Q}(-1),$$

qu'on appelle le *motif de Lefschetz*.

Étape 3

La catégorie des motifs numériques, notée $\mathrm{NumMot}(k)$, est définie à partir de D en rajoutant formellement un inverse tensoriel à $\mathbb{Q}(-1)$, c'est-à-dire un objet $\mathbb{Q}(1)$, appelé *motif de Tate*, qui vérifie

$$\mathbb{Q}(-1) \otimes \mathbb{Q}(1) \simeq \mathbb{Q}.$$

Cette étape a pour but d'induire sur $\mathrm{NumMot}(k)$ une notion de dualité compatible à la dualité de Poincaré en cohomologie : pour une variété projective lisse X de dimension d, on a

$$\mathrm{M}(X)^\vee = \mathrm{M}(X) \otimes \mathbb{Q}(1)^{\otimes d}.$$

Le théorème suivant, conjecturé par Grothendieck et démontré par Jannsen [30] en 1992, justifie la construction.

Théorème. *La catégorie* $\mathrm{NumMot}(k)$ *est abélienne semi-simple* [9].

La catégorie des motifs numériques est donc une bonne candidate pour « la » catégorie des motifs purs. Comme on le verra plus bas, on ne sait cependant pas démontrer qu'elle satisfait à tous les axiomes (M1)-(M6).

Motifs de Chow, motifs homologiques

On peut répéter la construction ci-dessus avec les variantes suivantes :

- travailler avec les groupes de Chow non quotientés, ce qui produit la catégorie des *motifs de Chow* $\mathrm{CHMot}(k)$;
- remplacer l'équivalence numérique par l'équivalence homologique $\sim_{\mathrm{hom}}$ (deux cycles algébriques sont homologiquement équivalents si leurs classes dans une théorie cohomologique donnée coïncident), ce qui produit la catégorie des *motifs homologiques* $\mathrm{HomMot}(k)$.

Des cycles algébriques homologiquement équivalents sont numériquement équivalents, d'où des foncteurs

$$\mathrm{CHMot}(k) \longrightarrow \mathrm{HomMot}(k) \longrightarrow \mathrm{NumMot}(\mathrm{k}).$$

2.4 – Les conjectures standard

On souhaiterait définir, pour une théorie de cohomologie donnée à coefficients dans un corps F, un foncteur de réalisation $\mathrm{NumMot}(k) \to \mathrm{Vect}_F$ par la formule

$$\mathrm{M}(X) \ \mapsto \ \mathrm{H}^\bullet(X) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{H}^n(X),$$

et par (6) pour les morphismes. Mais après avoir quotienté les groupes de Chow par l'équivalence numérique, cela n'a de sens que si deux cycles algébriques numériquement équivalents sont homologiquement équivalents, c'est-à-dire si la conjecture suivante est vérifiée.

9. Un objet M d'une catégorie abélienne C est dit simple si ses seuls sous-objets sont 0 et M. On dit que C est semi-simple si tout objet de C est somme directe d'objets simples.

Conjecture. *Les relations d'équivalence homologique et numérique coïncident :* $\sim_{\text{hom}} = \sim_{\text{num}}$.

On s'attend donc à une équivalence de catégories : $\mathrm{HomMot}(k) \overset{?}{\simeq} \mathrm{NumMot}(k)$. Notons que la catégorie $\mathrm{CHMot}(k)$ n'est pas abélienne en général (mais on conjecture qu'elle l'est dans le cas d'un corps fini k). Son rôle dans la théorie est clarifié par la notion de motif mixte, qu'on développera au §2.6.

Si l'on travaille avec les motifs homologiques pour assurer l'existence de foncteurs de réalisation, un autre problème se pose (en plus du fait qu'on ne sait pas prouver que la catégorie $\mathrm{HomMot}(k)$ est abélienne). En effet, on ne sait pas en général « découper » l'objet $\mathrm{M}(X)$ de $\mathrm{HomMot}(k)$ en une somme directe d'objets $\mathrm{M}^n(X)$ qui se réaliseraient en les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n(X)$. Cela revient à la conjecture suivante, dont on peut montrer qu'elle est en fait une conséquence de la précédente.

Conjecture. *Soit X une variété algébrique projective et lisse de dimension d, soit un entier $i \in \{0,\dots,2d\}$. Le « projecteur de Künneth »*

$$\mathrm{H}^\bullet(X) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^i(X) \hookrightarrow \mathrm{H}^\bullet(X)$$

est induit par une correspondance, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{CH}^d(X \times X)_{\mathbb{Q}}$*, via la construction* (6).

Dans le cas où k est un corps fini, cette conjecture a été démontrée par Katz et Messing [33].

Les deux conjectures précédentes font partie d'un ensemble cohérent de « conjectures standard sur les cycles algébriques » énoncées par Grothendieck [22, 34] en 1969. Grothendieck voyait un double intérêt à ces conjectures : elles permettaient de fonder la théorie des motifs, et avaient comme conséquence formelle la plus difficile des conjectures de Weil, l'analogue de l'hypothèse de Riemann. Celle-ci découlerait en effet de résultats de positivité de formes quadratiques sur les cycles algébriques (modulo équivalence), analogues du théorème de l'indice de Hodge en géométrie complexe.

Malheureusement, très peu de progrès ont été faits sur les conjectures standard depuis lors : prouver ces conjectures, ou encore la conjecture de Hodge, nécessite de produire des cycles algébriques, tâche pour laquelle on ne dispose pas de techniques générales. De plus, Deligne [17] a conclu la preuve des conjectures de Weil sans recourir à la stratégie suggérée par Grothendieck. Ironiquement, les travaux de Deligne sur les conjectures de Weil ont permis de faire des progrès sur les conjectures standard, dont le théorème de Katz-Messing évoqué ci-dessus.

Dans le dernier demi-siècle, la théorie des motifs s'est développée dans une direction qui n'était pas celle initialement envisagée par Grothendieck, contournant les conjectures standard. Celles-ci restent cependant un guide précieux et une source importante de questions sur les cycles algébriques, et les catégories de motifs purs à la Grothendieck sont un outil central pour y répondre.

Mentionnons au passage la théorie des *cycles motivés* d'André [2], faisant suite à la notion de *cycle de Hodge absolu* de Deligne [15], et qui permet de mettre au point une théorie inconditionnelle des motifs purs ayant les caractéristiques attendues (M1)-(M6). L'idée est de remplacer les cycles algébriques par certaines classes de cohomologie qui viennent conjecturalement des cycles algébriques.

2.5 – Extensions entre motifs

Un précurseur de la notion de motif mixte est la notion de *poids*, développée par Deligne [18] d'après des idées de Grothendieck. L'idée est que la cohomologie des variétés algébriques (dans toutes les théories) est munie d'une filtration canonique, la *filtration par le poids*

$$\cdots \subset W_{i-1}\,\mathrm{H}^n(X) \subset W_i\,\mathrm{H}^n(X) \subset \cdots \subset \mathrm{H}^n(X)$$

telle que le quotient W_i/W_{i-1} est « pur de poids i », c'est-à-dire s'exprime en fonction de H^i de variétés algébriques projectives lisses. Les groupes de cohomologie des variétés algébriques projectives lisses sont donc les « briques élémentaires » permettant de construire les groupes de cohomologie de toutes les variétés algébriques. En cohomologie étale ℓ-adique la filtration par le poids est induite par les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius, alors qu'en cohomologie de Betti elle est au cœur de la théorie de Hodge mixte.

À titre d'exemple, considérons une courbe algébrique projective lisse X et deux points rationnels $a \neq b$ de X. On a alors une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(X) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X \setminus \{a,b\}) \longrightarrow \mathbb{Q}(-1) \longrightarrow 0 \quad (7)$$

qui exprime $\mathrm{H}^1(X \setminus \{a,b\})$ comme extension des groupes de cohomologie « purs » $\mathrm{H}^1(X)$ et $\mathbb{Q}(-1)$, de poids respectifs 1 et 2.

Un point important est que l'extension (7) est rarement scindée, c'est-à-dire que $\mathrm{H}^1(X \setminus \{a,b\})$ n'est pas la somme directe $\mathrm{H}^1(X) \oplus \mathbb{Q}(-1)$ – en tout cas, pas de manière qui soit compatible aux isomorphismes de comparaison entre différentes théories cohomologiques, ni à la théorie de Hodge ou à l'action du groupe de Galois absolu. Au niveau des périodes, l'obstruction à un tel scindage est mesurée par des intégrales de formes différentielles « de troisième espèce », c'est-à-dire avec des pôles d'ordre 1 en a et b. Il est clair, cependant, que l'extension (7) est scindée si le diviseur $(a)-(b)$ de degré 0 est trivial dans le groupe de Picard $\mathrm{Pic}^0(X)$, c'est-à-dire s'il existe une fonction rationnelle sur X avec seulement un zéro d'ordre 1 en a et un pôle d'ordre 1 en b. Cela suggère une relation entre la structure des extensions telles que (7) et les cycles algébriques.

Cette idée est développée par Beilinson (influencé par des idées de Deligne), qui dans un article important [6] postule en 1984 l'existence d'une catégorie abélienne de motifs (mixtes) $\mathrm{Mot}(k)$ qui contiendrait la catégorie $\mathrm{NumMot}(k)$ et où les groupes d'extensions seraient reliés aux cycles algébriques. Par exemple, dans le cas d'une courbe algébrique projective lisse X on aurait :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Mot}(k)}(\mathbb{Q}(-1), \mathrm{M}^1(X)) \simeq \mathrm{Pic}^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

et l'extension (7) correspondrait à la différence $(a)-(b) \in \mathrm{Pic}^0(X)$.

Beilinson va plus loin et énonce une conjecture qui prévoit que les valeurs spéciales des fonctions L de motifs purs (et donc de toutes les fonctions L classiques issues de l'arithmétique) sont contrôlées de manière précise par les extensions entre motifs purs. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer en est un cas particulier. Conclusion : même si l'on ne s'intéresse qu'aux variétés algébriques projectives et lisses, on ne peut se passer des motifs mixtes !

2.6 – Motifs mixtes à la Voevodsky

Il semble difficile d'étendre la définition des motifs purs à la Grothendieck, qui ne concernent que les variétés algébriques projectives lisses, aux motifs mixtes, qui sont censés être une théorie cohomologique universelle pour toutes les variétés algébriques. Un premier point de blocage est que (6) n'est pas défini si Y n'est pas projective lisse.

Dans la vision de Grothendieck, la catégorie des motifs est *abélienne*, avec des propriétés formelles proches de la catégorie des espaces vectoriels où vivent les groupes de cohomologie. Beaucoup de progrès de la théorie des motifs à partir des années 1980 vont reposer sur la suggestion, due à Deligne, de baser la théorie des motifs non pas sur les groupes de cohomologie, mais sur les *complexes* qui les calculent. Plutôt que de chercher à définir directement une catégorie abélienne des motifs, on cherche donc à

– d'abord définir une catégorie *triangulée* des motifs, qui aurait les propriétés attendues de la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des motifs [10] ;
– puis en extraire la catégorie abélienne des motifs grâce à un formalisme (« t-structures ») mis en place par Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber [7].

Il y a de bonnes raisons de privilégier le cadre triangulé au cadre abélien. D'abord, les catégories dérivées sont le réceptacle naturel des foncteurs dérivés, qui sont le langage de la cohomologie. En outre, on sait depuis les travaux de Grothendieck et de ses collaborateurs sur la cohomologie étale ℓ-adique que dans le cadre des familles de variétés algébriques les propriétés de la cohomologie s'expriment plus aisément dans la catégorie dérivée d'une catégorie de faisceaux (formalisme des « six opérations »). Par ailleurs, les groupes d'extensions entre motifs, centraux dans les visions de Beilinson et de Deligne, s'incarnent simplement dans le cadre triangulé comme des groupes de morphismes, ce qui rend très cohérent le slogan (M6) « les morphismes entre motifs sont reliés aux cycles algébriques ».

La construction d'une catégorie triangulée de motifs $\mathrm{DMot}(k)$ a été effectuée par Voevodsky [47] et indépendamment par Hanamura [23] et Levine [37]. Les morphismes dans $\mathrm{DMot}(k)$ sont reliés aux cycles algébriques via les groupes de Chow supérieurs de Bloch [8] :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DMot}(k)}(\mathbb{Q}(-n), \mathrm{M}(X)[i]) \simeq \mathrm{CH}^n(X, 2n-i).$$

Les motifs de Chow $\mathrm{CHMot}(k)$ forment une sous-catégorie pleine de $\mathrm{DMot}(k)$. Contrairement à la catégorie des motifs purs, la catégorie $\mathrm{DMot}(k)$ n'est cependant pas basée sur les groupes de Chow et leurs quotients mais sur le formalisme des *correspondances finies* (ou « morphismes multivalués ») qui permettent de s'affranchir de subtilités liées à la théorie de l'intersection et notamment des « lemmes de déplacement » des cycles algébriques.

Il existe plusieurs définitions de $\mathrm{DMot}(k)$, plus ou moins pratiques en fonction des points de vue. Un ingrédient central dans toutes les constructions est la « $\mathbb{A}^1$-localisation » : on force, pour toute variété algébrique X, la projection $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ à induire

10. La catégorie dérivée D(A) d'une catégorie abélienne A s'obtient à partir de la catégorie des complexes dans A en inversant formellement les quasi-isomorphismes. Elle vérifie les axiomes d'une catégorie triangulée, définis par Verdier d'après Grothendieck.

un isomorphisme au niveau des motifs. Un tel isomorphisme existe en effet dans toute théorie de cohomologie – par exemple, en cohomologie de Betti, cela résulte du fait que $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ est contractile.

Il semble donc que la première moitié du programme soit accomplie, et il reste à extraire une catégorie abélienne de la catégorie $\mathrm{DMot}(k)$. Malheureusement, ce problème d'existence d'une « t-structure motivique » est toujours ouvert, et est probablement difficile puisqu'il implique les conjectures standard de Grothendieck !

Alors, la théorie des motifs est-elle condamnée à être un grand édifice inutile tant qu'on n'a pas démontré des conjectures difficiles sur les cycles algébriques ? La réponse est un grand non : le formalisme triangulé des motifs a amené des résultats nouveaux, comme la conjecture de Bloch-Kato démontrée par Voevodsky [46] en utilisant sa catégorie $\mathrm{DMot}(k)$. La fin de ce texte est consacrée aux applications des motifs à l'étude des périodes, qui reposent sur les aspects galoisiens des motifs.

3. Aspects galoisiens et applications aux périodes

3.1 – Groupes de Galois motiviques

On cherche à construire une catégorie $\mathrm{Mot}(k)$ qui soit *tannakienne* ; notamment elle doit être abélienne, monoïdale symétrique rigide (existence de duaux), et tout foncteur de réalisation $\mathrm{Mot}(k) \to \mathrm{Vect}_F$ est exact et fidèle (*foncteur fibre*). Contentons-nous ici du cas *neutre*, c'est-à-dire tel qu'il existe un foncteur fibre à valeurs dans les espaces vectoriels sur $F = \mathbb{Q}$ (par exemple le foncteur de réalisation de Betti pour k un sous-corps de $\mathbb{C}$).

Le formalisme tannakien, développé par Saavedra [42] et Deligne [16] d'après des idées de Grothendieck, est une « machine qui produit des groupes de Galois ». Pour un foncteur de réalisation $\mathrm{Mot}(k) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$, on a un schéma en groupes [11] G défini sur $\mathbb{Q}$, appelé *groupe de Galois motivique*, qui agit linéairement sur la réalisation de tout objet de $\mathrm{Mot}(k)$, et donc sur tous les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n(X)$ et plus généralement $\mathrm{H}^n(X,Y)$, de manière compatible à tous les morphismes dans $\mathrm{Mot}(k)$. Cette action est si riche qu'elle connaît toute la structure des motifs : le foncteur naturel

$$\mathrm{Mot}(k) \longrightarrow \mathrm{Rep}(G)$$

induit par le foncteur de réalisation est une équivalence de catégories. On peut donc étudier la structure des motifs via la théorie des représentations des groupes algébriques.

Notons au passage que le formalisme tannakien suggère de *définir* la catégorie des motifs comme la catégorie des représentations d'un certain schéma en groupes (ou dualement comme la catégorie des comodules sur une algèbre de Hopf). C'est l'approche suivie par Nori [40, 28] et par Ayoub [4] qui définissent deux candidats pour le groupe de Galois motivique. Bien que leurs approches soient fondamentalement différentes (celle de Nori est relativement élémentaire alors que celle d'Ayoub repose sur le formalisme triangulé des motifs à la Voevodsky), on sait maintenant grâce aux travaux de Choudhury-Gallauer [13] qu'elles produisent les mêmes groupes de Galois motiviques. Dans le cas des motifs purs, ces groupes de Galois motiviques coïncident avec ceux produits par la théorie des cycles motivés d'André [2].

3.2 – Vers une théorie de Galois des périodes

Intéressons-nous au cas $k = \mathbb{Q}$, et appliquons le formalisme tannakien à une catégorie tannakienne de motifs $\mathrm{Mot}(k)$ et au foncteur de réalisation de Betti. Le groupe de Galois motivique G agit linéairement sur tous les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X)$ et plus généralement $\mathrm{H}^n_{\mathrm{B}}(X,Y)$. En se rappelant que les périodes apparaissent comme les coefficients de l'isomorphisme de comparaison (1) entre Betti et de Rham, cela suggère que G agit sur l'algèbre des périodes via la formule :

$$g \cdot \int_{\sigma} \omega = \int_{g\cdot\sigma} \omega.$$

Problème : il se pourrait *a priori* que deux écritures d'une même période comme coefficient matriciel de (1) donnent deux actions différentes de G. La conjecture des périodes de Grothendieck prévoit que ce phénomène ne se produit jamais. Pour l'énoncer, notons T le torseur, produit par la « machine tannakienne », des isomorphismes entre les foncteurs de réalisation de de Rham et de Betti, et soit $\mathrm{comp} \in T(\mathbb{C})$ son point complexe induit par (1).

Conjecture (Conjecture des périodes). *Le point complexe* comp *est un point générique de T.*

Plus simplement, cette conjecture affirme que les périodes ne vérifient pas de relations algébriques qui ne soient pas « explicables » par des

11. Un schéma en groupes défini sur $\mathbb{Q}$ est la limite projective de groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire de sous-groupes de GL_N définis par des conditions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$ en les N^2 coefficients des matrices.

morphismes entre motifs. Elle se spécialise en des conjectures de transcendance très concrètes sur certaines familles de périodes, rarement démontrées [1] mais qui peuvent être confirmées expérimentalement. Notons tout de même les résultats généraux de Wüstholz [51] et Huber-Wüstholz [29] au sujet des relations entre périodes de groupes de cohomologie de degré 1.

La conjecture des périodes pour les motifs de Nori est équivalente [28] à l'énoncé élémentaire suivant [35].

Conjecture (Conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier). *Toutes les relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre périodes sont des conséquences de trois familles de relations :*

- *la bilinéarité de l'intégration ;*
- *la formule de changement de variable ;*
- *la formule de Stokes.*

Si l'on croit à la conjecture des périodes on obtient, en suivant André [1], une théorie de Galois des périodes, qui contient la théorie de Galois classique des nombres algébriques, et où les groupes de Galois sont en général des groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}$. Mais même sans savoir démontrer la conjecture des périodes, le formalisme tannakien peut être utilisé pour démontrer des résultats impressionnants sur les périodes, dont on donne maintenant deux exemples.

3.3 – Applications des motifs aux périodes

Valeurs zêta multiples, et le théorème de Brown

Les *valeurs zêta multiples* sont des sommes de séries multiples qui généralisent les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers :

$$\zeta(n_1,\ldots,n_r)=\sum_{0<k_1<\cdots<k_r}\frac{1}{k_1^{n_1}\cdots k_r^{n_r}},$$

où les paramètres n_i sont des entiers $\geqslant 1$ avec $n_r \geqslant 2$. Elles apparaissent naturellement dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique, notamment via le calcul d'intégrales de Feynman. Ce sont des périodes d'objets d'une catégorie tannakienne de motifs, les motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$ – un des cadres pour lesquels on sait produire une catégorie tannakienne à partir du formalisme triangulé de Voevodsky –, qui devrait former une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Mot}(\mathbb{Q})$. Le qualificatif « de Tate mixte » désigne les extensions itérées des motifs $\mathbb{Q}(-n)=\mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$ pour $n\in\mathbb{Z}$.

Le théorème de Brown [9] est un résultat de structure sur la catégorie des motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$, qui a comme conséquence concrète l'énoncé suivant, conjecturé par Hoffman [27].

Théorème. *Toute valeur zêta multiple peut s'écrire comme combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire des valeurs zêta multiples $\zeta(n_1,\ldots,n_r)$ avec $n_i\in\{2,3\}$ pour tout i.*

L'ingrédient central de la preuve est la théorie de Galois (motivique) des valeurs zêta multiples, initiée par Goncharov [20]. Aussi surprenant que cela puisse paraître, on ne connaît pas à ce jour de preuve « non motivique » du théorème précédent. On renvoit le lecteur au livre de Burgos Gil et Fresán [10] pour plus de détails sur sa preuve.

Le théorème de Brown a des conséquences hors des motifs et des valeurs zêta multiples, grâce aux liens entre les motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$ et les groupes de tresses ou encore les espaces de modules de courbes. À titre d'exemple, il est un des ingrédients de la preuve d'un théorème récent de Chan-Galatius-Payne [11] sur la taille de la cohomologie de l'espace de modules $\mathcal{M}_g$ qui paramètre les courbes projectives et lisses de genre g.

Séries de périodes, et le théorème d'Ayoub

Le théorème d'Ayoub [5], dont nous ne donnerons pas l'énoncé ici, est un analogue « fonctionnel » de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier où les périodes sont remplacées par des « séries de périodes », qui sont certaines séries de Laurent en une variable

$$\sum_{i\gg-\infty}\left(\int_{[0,1]^n}f_i\right)t^i.$$

La preuve repose sur l'analyse de la structure des motifs sur $k=\mathbb{C}(t)$ et du groupe de Galois motivique (de Nori ou d'Ayoub) correspondant.

Ce qui est frappant dans le théorème d'Ayoub est qu'il s'agit d'un énoncé général de transcendance qui s'applique à toutes les périodes au sens fonctionnel, en une variable. Son pendant arithmétique (les conjectures des périodes du §3.2) semble beaucoup plus difficile. Par exemple, la conjecture des périodes implique que $\zeta(3)$ n'est pas un multiple rationnel de π^3, ce qu'on ne sait pas démontrer. La théorie des motifs reste cependant un guide précieux pour structurer les relations (ainsi que l'absence de relation) entre périodes.

Pour aller plus loin

Le lecteur intéressé trouvera plus d'informations dans le livre de référence d'André [3]. Le livre de Kahn [31] est une introduction aux idées motiviques reposant sur les fonctions zêta et *L*. L'article introductif de Kahn [32] et le livre de Murre, Nagel et Peters [39] contiennent des détails sur les catégories de motifs purs. Le livre de Cisinski et Déglise [14] étudie les catégories triangulées de motifs mixtes. Pour l'approche de Nori aux motifs et les liens avec les périodes, on pourra se référer au livre de Huber et Müller-Stach [28]. Le volume collectif [24], avec des contributions de Fresán, Rivoal, et l'auteur, constitue une introduction à l'étude de l'arithmétique des périodes via les motifs.

Références

[1] Y. André. « Galois theory, motives and transcendental numbers ». In : *Renormalization and Galois theories*. Vol. 15. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009, p. 165-177.

[2] Y. André. « Pour une théorie inconditionnelle des motifs ». *Publications Mathématiques de l'IHÉS* **83** (1996), p. 5-49.

[3] Y. André. *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*. **17**. Panoramas et Synthèses. Société Mathématique de France, Paris, 2004, p. xii+261.

[4] J. Ayoub. « L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I ». *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)* **693** (2014), p. 1-149.

[5] J. Ayoub. « Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier ». *Ann. of Math. (2)* **181**, nº 3 (2015), p. 905-992.

[6] A. A. Beilinson. « Height pairing between algebraic cycles ». In : *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*. Lecture Notes in Math. 1289. Springer, Berlin, 1987, p. 1-25.

[7] A. A. Beilinson et al. « Faisceaux pervers ». In : *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*. Vol. 100. Astérisque. Soc. Math. France, Paris, 2018, p. 5-171.

[8] S. Bloch. « Algebraic cycles and higher *K*-theory ». *Adv. in Math.* **61**, nº 3 (1986), p. 267-304.

[9] F. Brown. « Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$ ». *Ann. of Math. (2)* **175**, nº 2 (2012), p. 949-976.

[10] J. I. Burgos Gil et J. Fresán. *Multiple zeta values : from numbers to motives*. Clay Mathematics Proceedings, à paraître.

[11] M. Chan, S. Galatius et S. Payne. « Tropical curves, graph complexes, and top weight cohomology of $\mathcal{M}_g$ ». *Journal of the American Mathematical Society* **34**, nº 2 (2021), p. 565-594.

[12] F. Charles. « Conjugate varieties with distinct real cohomology algebras ». *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)* **630** (2009), p. 125-139.

[13] U. Choudhury et M. Gallauer Alves de Souza. « An isomorphism of motivic Galois groups ». *Adv. Math.* **313** (2017), p. 470-536.

[14] D.-C. Cisinski et F. Déglise. *Triangulated categories of mixed motives*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2019, p. xlii+406.

[15] P. Deligne. « Hodge cycles on abelian varieties ». In : *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1982, p. 9-100.

[16] P. Deligne. « Catégories tannakiennes ». In : *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*. Vol. 87. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 111-195.

[17] P. Deligne. « La conjecture de Weil. I ». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, nº 43 (1974), p. 273-307.

[18] P. Deligne. « Théorie de Hodge. I ». In : *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 425-430.

[19] B. Dwork. « On the rationality of the zeta function of an algebraic variety ». *Amer. J. Math.* **82** (1960), p. 631-648.

[20] A. B. Goncharov. « Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry ». *Duke Math. J.* **128**, nº 2 (2005), p. 209-284.

[21] A. Grothendieck. « On the de Rham cohomology of algebraic varieties ». *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, nº 29 (1966), p. 95-103.

[22] A. Grothendieck. « Standard conjectures on algebraic cycles ». In : *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*. Oxford Univ. Press, London, 1969, p. 193-199.

[23] M. Hanamura. « Mixed motives and algebraic cycles. I ». *Math. Res. Lett.* **2**, nº 6 (1995), p. 811-821.

[24] P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah, éd. *Périodes et transcendance, Journées mathématiques X-UPS 2019*. Éditions de l'École polytechnique, à paraître.

[25] H. Hasse. « Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III ». *J. reine angew. Math. (Crelle's Journal)* **175** (1936).

[26] W. V. D. Hodge. « The topological invariants of algebraic varieties ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952, p. 182-192.

[27] M. E. Hoffman. « The algebra of multiple harmonic series ». *J. Algebra* **194**, nº 2 (1997), p. 477-495.

[28] A. Huber et S. Müller-Stach. *Periods and Nori motives*. **65**. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics. With contributions by Benjamin Friedrich and Jonas von Wangenheim. Springer, Cham, 2017.

[29] A. Huber et G. Wüstholz. *Transcendence and linear relations of* 1*-periods*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2022. doi : 10.1017/9781009019729.

[30] U. Jannsen. « Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity ». *Invent. Math.* **107**, nº 3 (1992), p. 447-452.

[31] B. Kahn. *Fonctions zêta et L de variétés et de motifs*. Nano. Calvage et Mounet, Paris, 2018, p. xiii+207.

[32] B. Kahn. « Motifs ». In : *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui (Vol. 3)*. Cassini, 2007.

[33] N. M. Katz et W. Messing. « Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields ». *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73-77.

[34] S. L. Kleiman. « The standard conjectures ». In : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. Vol. 55. Proc. Sympos. Pure Math. 1994, p. 3-20.

[35] M. Kontsevich et D. Zagier. « Periods ». In : *Mathematics unlimited—2001 and beyond*. Springer, Berlin, 2001, p. 771-808.

[36] F. Lê. « "Are the *genre* and the *Geschlecht* one and the same number?" An inquiry into Alfred Clebsch's *Geschlecht* ». *Historia Mathematica* **53** (2020), p. 71-107.

[37] M. Levine. *Mixed motives*. **57**. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, p. x+515.

[38] Y. I. Manin. « Correspondences, motifs and monoidal transformations ». *Mat. Sb. (N.S.)* **77 (119)** (1968), p. 475-507.

[39] J. P. Murre, J. Nagel et C. A. M. Peters. *Lectures on the theory of pure motives*. **61**. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, p. x+149.

[40] M. Nori. *Lectures at TIFR*. 2000.

[41] P. Popescu-Pampu. *What is the genus?* Lecture Notes in Mathematics 2162. Springer, Cham, 2016.

[42] N. Saavedra Rivano. « Catégories tannakiennes ». *Bull. Soc. Math. France* **100** (1972), p. 417-430.

[43] F. K. Schmidt. « Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p ». *Math. Z.* **33**, nº 1 (1931), p. 1-32.

[44] J.-P. Serre. « Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil ». *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 392-394.

[45] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tomes 1, 2, 3*. Lecture Notes in Mathematics 269. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, 1973.

[46] V. Voevodsky. « On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$-coefficients ». *Ann. of Math. (2)* **174**, nº 1 (2011), p. 401-438.

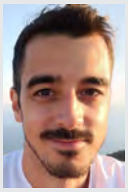
[47] V. Voevodsky. « Triangulated categories of motives over a field ». In : *Cycles, transfers, and motivic homology theories*. Vol. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188-238.

[48] A. Weil. « Abstract versus classical algebraic geometry ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III*. Erven P. Noordhoff N. V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956, p. 550-558.

[49] A. Weil. « Numbers of solutions of equations in finite fields ». *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 497-508.

[50] A. Weil. « Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini ». *C. R. Acad. Sci. Paris* **210** (1940), p. 592-594.

[51] G. Wüstholz. « Algebraic groups, Hodge theory and transcendence ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, California, 1986)*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 476-483.



Clément Dupont

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Université de Montpellier, cnrs, Montpellier, France

clement.dupont@umontpellier.fr

https://imag.umontpellier.fr/~dupont/

Clément Dupont est maître de conférences. Ses travaux portent sur les motifs et les périodes.

Merci à Giuseppe Ancona, Yves André, Damien Calaque, Ricardo Campos, Javier Fresán, Charlotte Hardouin, François Lê, et un relecteur anonyme pour leurs commentaires sur une version préliminaire de cet article. Merci à Anthony Genevois pour avoir réalisé les figures de l'article.

Quels groupes ont-ils (T) ?

• L. Bartholdi

J'explique dans ce texte plusieurs progrès récents autour de la propriété (T) de Kazhdan, et ses conséquences algorithmiques. Cette propriété a été démontrée pour quelques exemples remarquables de groupes, en particulier le groupe d'automorphismes d'un groupe libre de rang au moins quatre (avec l'assistance d'un ordinateur), et le groupe engendré par les matrices élémentaires de taille au moins trois sur un anneau quelconque de type fini. J'esquisserai les outils nouveaux : une interprétation de (T) en termes de programmation conique, et une notion d'« angle » entre sous-groupes.

1. Introduction

La propriété (T) des groupes a été introduite par Kazhdan [21] dans un bref article, en termes de ses représentations unitaires : *un groupe G a la propriété (T) si tout vecteur presque invariant est presque un vecteur invariant*. Dès ses débuts, cette propriété remarquable a permis de répondre à de nombreuses questions, qui n'ont a priori rien à voir avec la théorie des représentations. Ce texte a pour but de décrire quelques progrès récents, la preuve de (T) pour certains exemples précis, les conséquences qu'on peut en tirer. Pour un traitement approfondi de (T), voir par exemple l'excellente référence [3].

Rappelons quelques notions, pour expliquer la définition un peu cryptique ci-dessus. Une représentation unitaire d'un groupe G est la donnée d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et d'une action $G\times\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ telle que $\langle g\cdot v, g\cdot w\rangle = \langle v,w\rangle$. La représentation triviale ($\mathscr{H}=\mathbb{C}, g\cdot v = v$) est un exemple ; et tout vecteur G-invariant ($v\neq 0\in\mathscr{H}$ avec $g\cdot v = v$ pour tout $g\in G$) correspond à une copie de la représentation triviale. La propriété (T) exige que toute représentation $\mathscr{H}$ contenant des vecteurs suffisamment S-invariants contient des vecteurs G-invariants :

Définition. Un groupe G a (T) s'il existe une partie finie $S\subseteq G$ et $\epsilon>0$ tels que, si $\mathscr{H}$ est une représentation unitaire, $v\in\mathscr{H}$ et $\|s\cdot v - v\|<\epsilon\|v\|$ pour tout $s\in S$, alors $\mathscr{H}$ a un vecteur invariant [1].

En particulier, G admet une partie génératrice finie telle que n'importe quel S comme ci-dessus ; on le dit *de type fini* [2]. J'ai à dessein donné la définition pour un groupe sans topologie ; mais s'il en avait une, on demanderait à la représentation d'être continue, et à S d'être compact ; on en déduirait que G est compactement engendré. C'était d'ailleurs la motivation originale de Kazhdan : il montre géométriquement que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ a (T), qu'elle est héritée par passage à un réseau [3], et ainsi que tout réseau de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est de type fini [4]. Il montre aussi que l'abélianisé d'un groupe (T) est compact (donc fini, dans le cas discret). Excepté ce paragraphe, on ne considère ici que des groupes G dépourvus de topologie.

Plusieurs reformulations de la propriété (T) sont utiles. Premièrement, Delorme [9] montre qu'elle implique la *propriété (FH)* : toute action de G par isométries affines sur un espace de Hilbert a un point fixe, et Guichardet [13] montre la réciproque pour G dénombrable.

Deuxièmement, considérons l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$; c'est l'espace vectoriel de base G, avec multiplication étendue linéairement à partir de la multiplication de G, et avec une anti-involution $(\sum_{g\in G}\alpha_g g)^* = \sum_{g\in G}\overline{\alpha_g}g^{-1}$. (On parle alors de $*$-algèbre).

1. En fait, v sera proche de sa projection orthogonale sur l'espace des vecteurs G-invariants de $\mathscr{H}$.
2. Si le S ci-dessus n'engendrait pas G, on pourrait construire une représentation sans points G-invariants mais avec points S-invariants comme ceci : on prend les fonctions de carré sommable sur les classes à gauche dans G du sous-groupe engendré par S ; si cet espace est de dimension finie, on se restreint à l'orthogonal des constantes. L'action de G est par translation sur les classes à gauche.
3. Un sous-groupe discret Γ tel que $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est de volume fini ; par exemple, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$.
4. Et c'est encore vrai si l'on remplace $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ par un groupe de Lie de rang au moins 2.

Choisissons une mesure de probabilité ν de support exactement S, et posons

$$\Delta_\nu = \frac{1}{2}\sum_{s\in S}\nu(s)(1-s)^*(1-s). \qquad (1)$$

Toute représentation de G sur $\mathscr{H}$ s'étend à une action de $\mathbb{C}[G]$ sur $\mathscr{H}$, et Δ_ν fournit ainsi un opérateur sur $\mathscr{H}$, évidemment auto-adjoint. Alors G a (T) si et seulement si Δ_ν a un « trou spectral » dans toute représentation unitaire de G : son spectre est contenu dans $\{0\}\cup[\epsilon,2]$ pour un $\epsilon>0$; de façon équivalente, le spectre de $\Delta_\nu^2-\epsilon\Delta_\nu$ doit être positif. Comme cela doit être vrai pour tout $\mathscr{H}$, on peut l'écrire sous la forme équivalente mais plus compacte : *G a (T) si et seulement si $\Delta_\nu^2-\epsilon\Delta_\nu$ est positif dans la C^*-algèbre maximale de G*. On verra au §4 comment ce critère peut être renforcé.

Si G était fini, on pourrait prendre $S=G$ et ν équidistribuée ; Δ_ν serait alors la projection P orthogonale aux vecteurs invariants. Pour G infini, on pense à Δ_ν comme une approximation grossière de P, à image orthogonale aux vecteurs invariants mais avec valeurs propres dans $\{0\}\cup[\epsilon,2]$ plutôt que $\{0,1\}$; et en contrepartie à support fini.

1.1 – Graphes expanseurs

Une famille de graphes finis (disons pour simplifier de degré constant : chaque sommet a d voisins) est une *famille d'expanseurs* si les graphes sont difficiles à déconnecter en enlevant des arêtes. On conçoit l'utilité pratique de tels graphes pour la conception de réseaux de communication robustes. Ils ont surtout de nombreuses applications théoriques, par exemple dans la dérandomisation d'algorithmes, ou la construction de codes correcteurs d'erreur [5].

Définition. La *constante de Cheeger* d'un graphe fini est le plus grand $h\in[0,d]$ tel que, pour tout ensemble A contenant au plus la moitié des sommets, il y a au moins $h\#A$ arêtes entre A et son complément. Une *famille d'expanseurs* est une famille de graphes de cardinalité non bornée et de constante de Cheeger bornée loin de 0.

On peut reformuler la condition d'être expanseur au moyen de la matrice d'adjacence M d'un graphe : A a beaucoup de voisins dans son complémentaire si et seulement si la fonction caractéristique de A (ou plus précisément sa projection orthogonale aux constantes) est loin d'un vecteur propre pour M, si et seulement si M a un trou spectral : un graphe d-régulier est dit *ϵ-expanseur* si toutes les valeurs propres de M (excepté la valeur propre d correspondant à la fonction constante sur les sommets) ont valeur absolue au plus $(1-\epsilon)d$. On a les bornes $\epsilon/2\leqslant h/d\leqslant\sqrt{2\epsilon}$, qui proviennent essentiellement des inégalités entre les métriques ℓ^1 et ℓ^2.

Une méthode très générale produit des graphes à partir de groupes munis d'une partie génératrice : ce sont les *graphes de Cayley* [6] Si G est un groupe engendré par la partie génératrice S, on lui associe le graphe avec ensemble de sommets G, et pour tout $g\in G, s\in S$ une arête de g à gs. Le groupe d'automorphismes du graphe de Cayley agit transitivement sur ses sommets, car il contient G agissant par multiplication à droite.

On sait que la plupart des graphes sont ϵ-expanseurs, mais on n'a longtemps pas su comment en construire des familles explicites. C'est un problème important d'un point de vue théorique : un algorithme non déterministe peut parfois être transformé en algorithme déterministe si son « générateur de nombres aléatoires » est produit par un graphe expanseur. La situation a été radicalement changée par un court article de Margulis [23] : les graphes de Cayley des quotients finis d'un groupe (T) tel que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ forme une famille d'expanseurs. En effet, les quotients d'un groupe (T) sont évidemment (T) avec les mêmes S,ϵ, et le Δ_ν pour ν la probabilité uniforme sur S est, à normalisation près, la matrice d'adjacence du graphe de Cayley de G engendré par S.

Les graphes expanseurs ont de nombreuses propriétés remarquables : leur diamètre croît logarithmiquement avec le nombre de sommets ; tout sous-ensemble de sommets de densité supérieure à $1-\epsilon$ contient une arête ; et la marche aléatoire simple converge rapidement vers la distribution constante : en norme ℓ^2, elle sera à distance $\approx\exp(-\epsilon t)$ de la distribution constante après t pas.

5. On rappelle qu'un *code linéaire* est un sous-espace de $\mathbb{F}_2^n$ de dimension m ; il permet d'encoder m 'bits' d'information en n 'bits', avec de la redondance pour permettre de corriger des erreurs. Partant d'un code $C\leqslant\mathbb{F}_2^d$ et d'un graphe expanseur (V,E), un bon code consiste en les vecteurs de $\mathbb{F}_2^E$ dont les étiquetages au voisinage de chaque sommet appartiennent à C. La propriété d'expansion du graphe garantit la robustesse du code.

6. « Gruppenbild » en allemand – un joli nom indiquant une visualisation de l'objet algébrique.

1.2 – Théorie algorithmique des groupes

Il existe plusieurs logiciels permettant des calculs poussés avec des groupes finis ; par exemple, Gap et Magma. Étant donnée une dizaine de permutations sur 1000 points, ou une dizaine de matrices 1000×1000 sur un corps fini, ils arrivent presque instantanément à déterminer l'ordre du groupe engendré, une suite de Jordan-Hölder, etc.

Les algorithmes sont souvent implémentés dans un modèle dit à « boîte noire » : un groupe G est donné par une partie génératrice et une « boîte » recevant en entrée deux représentations d'éléments de G et produisant en sortie leur produit, leurs inverses, et déterminant s'ils sont égaux dans G.

Un des composants de base de nombreux algorithmes demande à produire efficacement un élément aléatoire de G, idéalement suivant une distribution proche d'uniforme. Par exemple, pour calculer l'ordre d'un groupe de permutations G il est pratique de calculer une suite maximale de sous-groupes $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$ et de multiplier les indices $[G_i : G_{i-1}]$ pour $i = 1 \dots n$. Une méthode déterministe (l'algorithme de Sims) produit des G_i avec potentiellement un grand nombre de générateurs. On sait toutefois qu'en choisissant peu d'éléments de G_i au hasard on a de bonnes chances d'avoir une partie génératrice (et on peut vérifier après coup qu'on a eu assez de chance) ; les gains en vitesse sont spectaculaires. Voici un autre exemple, plus poussé : soit G un groupe de matrices $d \times d$ sur un corps fini $\mathbb{F}_p$, agissant naturellement sur $M := \mathbb{F}_p^d$. Pour montrer que ce G-module M est irréductible, il « suffit » de trouver $\xi \in \mathbb{F}_p[G]$ tel que tout vecteur non nul de $\ker(\xi \restriction M)$ engendre M et au moins un vecteur de $\ker((\xi \restriction M)^\top)$ engendre $M^\top$ (où $\top$ désigne la matrice transposée). Le défi est de trouver un ξ suffisamment aléatoire pour que son noyau soit petit mais non nul.

Une idée naïve pour produire un élément aléatoire est de multiplier quelques générateurs au hasard. C'est probablement une mauvaise idée : Sym(1000) contient un groupe cyclique d'ordre $\approx 3.5 \cdot 10^{34}$, et si G était un tel groupe, un produit relativement court de générateurs ne l'explorera jamais en entier.

Un algorithme est constamment utilisé en pratique, bien qu'on n'ait longtemps pas su justifier son étonnante performance. Nommé le « Product Replacement Algorithm », il procède comme suit. Si G est engendré par $\{s_1, \dots, s_k\}$, ce que l'on note $G = \langle s_1, \dots, s_k \rangle$, l'algorithme commence avec le $(k+2)$-uplet $(s_1, \dots, s_k, 1, 1)$. Ensuite, il effectue un grand nombre de fois l'opération suivante : choisir $1 \leqslant i \neq j \leqslant k+2$ uniformément au hasard, et remplacer s_i par $(s_i^{\pm 1} s_j^{\pm 1})^{\pm 1}$ pour un choix uniforme de signes. On constate empiriquement que s_1 converge rapidement vers un élément uniformément choisi de G, essentiellement en $\ln \# G$ itérations de l'opération de base (et on peut souvent borner $\# G$ même si on ne connaît pas G).

Lubotzky et Pak ont proposé une justification théorique conjecturale de la performance de cet algorithme [22], en termes du groupe d'automorphismes du groupe libre de rang $k+2$. Soit F_n le groupe libre sur la partie génératrice $\{x_1, \dots, x_n\}$; ses éléments sont les mots réduits (sans $x_i x_i^{-1}$) sur l'alphabet $\{x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}\}$. Un automorphisme de F_n est un « changement de base » :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (w_1, \dots, w_n)$$

où $\{w_1, \dots, w_n\}$ est une autre partie génératrice de F_n ; il est donc déterminé par un n-uplet de mots. Nielsen a montré il y a longtemps que $\mathrm{Aut}(F_n)$ est engendré par les transformations élémentaires (dites maintenant « de Nielsen ») $x_i \mapsto (x_i^{\pm 1} x_j^{\pm 1})^{\pm 1}$ pour tous choix de $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ et tous choix de signes, les générateurs x_k restant inchangés si $k \neq i$.

Lubotzky et Pak montrent que si $\mathrm{Aut}(F_{k+2})$ a la propriété (T), alors l'algorithme produit un élément aléatoire en temps $\propto \ln \# G$, la constante de proportionnalité ne dépendant que du ϵ de la définition de la propriété (T) pour $\mathrm{Aut}(F_{k+2})$. En effet, les transformations de Nielsen correspondent naturellement aux opérations élémentaires de l'algorithme. Considérons le graphe avec ensemble de sommets G^{k+2} et une arête entre deux $(k+2)$-uplets pour chaque opération élémentaire ; ou plus précisément la composante connexe de $(s_1, \dots, s_k, 1, 1)$ dans ce graphe. Alors d'une part c'est le graphe de Cayley d'un quotient de $\mathrm{Aut}(F_{k+2})$; et d'autre part le « Product Replacement Algorithm » est une marche aléatoire simple sur ce graphe.

La propriété (T) n'était alors pas connue pour $\mathrm{Aut}(F_{k+2})$, et le travail de Lubotzky et Pak a attiré de nombreux mathématiciens à cette question concrète. On peut assez facilement voir que $\mathrm{Aut}(F_2)$ et $\mathrm{Aut}(F_3)$ n'ont pas (T), car ils ont des sous-groupes d'indice fini avec abélianisation infinie. Le monde s'est alors divisé en deux camps, ceux qui cherchaient un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Aut}(F_4)$ avec abélianisé infini, et ceux qui cherchaient à prouver (T) – mais comment ? On le verra dans la suite du texte.

1.3 – Exemples, bornes explicites

Au vu de la section précédente, il est souvent utile de pouvoir prouver la propriété (T) pour un groupe donné, et d'obtenir une valeur explicite d'ϵ pour un S donné. Il semble que le premier résultat de cette forme est dû à Burger [5] pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$: pour S l'ensemble des matrices élémentaires (matrice unité + un unique ± 1 en-dehors de la diagonale), il obtient $\epsilon \approx 1/1000$.

Une approche récente, reposant sur la programmation conique, est détaillée au §4. Elle a conduit à des résultats spectaculaires, en particulier une preuve assistée par ordinateur du

Théorème 1 (Kaluba, Nowak, Ozawa, Nitsche [25, 15, 16]). *Le groupe* $\mathrm{Aut}(F_n)$ *a (T) pour tout* $n \geqslant 4$.

Elle a aussi permis d'améliorer grandement les constantes, par exemple $\epsilon \approx 0.3$ pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et l'ensemble S ci-dessus. L'ordinateur fournit un « certificat » sous la forme d'une expression de $\Delta_\nu^2 - \epsilon\Delta_\nu$ comme somme de carrés.

La preuve du Théorème 1 consiste en plusieurs étapes. Pour $n = 4$ on peut le montrer en exhibant un certificat. Une approche générale, nécessitant diverses adaptations dans chaque cas concret, permet de traiter une famille infinie d'exemples ; elle sera décrite en détail dans le §5.

Dans les grandes lignes, on considère un groupe G engendré par une famille $G_1, \dots, G_m$ de sous-groupes. On peut définir une notion d'« angle » $\sphericalangle(G_i, G_j)$ entre ces sous-groupes (essentiellement calculés dans le groupe $\langle G_i, G_j\rangle$), correspondant à l'angle entre les sous-espaces G_i- et G_j-invariants d'une représentation. Par exemple, si G_i et G_j commutent, l'angle entre eux sera $\sphericalangle(G_i, G_j) = \pi/2$. En contrôlant suffisamment bien les représentations des G_i et les angles $\sphericalangle(G_i, G_j)$, on peut parfois en déduire que G a (T).

Si par exemple les G_i sont des p-groupes abéliens finis et les $\langle G_i, G_j\rangle$ sont des groupes nilpotents de classe au plus 2, alors les angles satisfont à $\cos\sphericalangle(G_i, G_j) \leqslant 1/\sqrt{p}$. On obtient ainsi :

Théorème 2 (Ershov, Jaikin-Zapirain [10]). *Soit* R *un anneau de type fini. Alors le groupe* $E_n(R)$ *engendré par les matrices élémentaires*[7] *a (T) pour tout* $n \geqslant 3$.

Pour prouver que $\mathrm{Aut}(F_n)$ a (T) quand $n \geqslant 4$, on considère comme sous-groupes les $\binom{n}{4}$ copies naturelles de $\mathrm{Aut}(F_4)$, agissant sur les copies de F_4 dans F_n engendrées par des sous-ensembles de $\{x_1, \dots, x_n\}$, et on contrôle les angles entre ces sous-groupes en termes de spectres d'opérateurs ; de nouveau, les détails sont au §5.

1.4 – Questions ouvertes

Il reste nombre de questions ouvertes dans ce domaine. D'une part, peut-on utiliser la stratégie de programmation conique (voir le §4) pour d'autres exemples ? Par exemple, le groupe modulaire $\mathrm{Aut}(\Sigma_g)$ d'une surface de genre g a-t-il (T), au moins pour g suffisamment grand ? D'un côté, les représentations TQFT [28] montrent que l'espace des représentations de $\mathrm{Aut}(\Sigma_g)$ contient des richesses inattendues, peut-être avec des vecteurs presque invariants ; d'un autre côté, il se pourrait bien qu'un programme conique prouve (T) pour ce groupe.

Un autre exemple qui mérite d'être examiné est le groupe de Burnside d'exposant 5. C'est par définition le groupe de présentation

$$B_{2,5} = \langle x_1, x_2 \mid w^5 \ \forall w \in F_2\rangle.$$

On croit que $B_{2,5}$ est fini, et montrer qu'il a (T) serait un pas dans cette direction.

2. Propriété (T) relative

Une relativisation de (T) s'est montrée utile dans la pratique : pour un sous-groupe $H \leqslant G$, on dit que (G, H) a (T) s'il existe $S \subset G$ fini tel que toute représentation de G ayant des vecteurs suffisamment S-invariants a des vecteurs H-invariants ; et (G, H) a (FH) si toute action affine de G admet un point H-invariant [8].

Repartons à zéro. Soit $\mathscr{H}$ une représentation unitaire de G. Pour $S \subseteq G$ et $\epsilon > 0$, on dit de $v \in \mathscr{H}$ qu'il est (S, ϵ)*-invariant* si $\|v - sv\| \leqslant \epsilon\|v\|$ pour tout $s \in S$.

Pour $B \subseteq G$, on dit que la paire (G, B) a (T) si pour tout $\delta > 0$ il existe $S \subseteq G$ fini et $\epsilon > 0$ tel que, dans toute G-représentation, tout vecteur (S, ϵ)-invariant est aussi (B, δ)-invariant ; et on dit que B est un *ensemble de Kazhdan* s'il existe $\epsilon > 0$ tel que toute G-représentation ayant un vecteur (B, ϵ)-invariant a aussi un vecteur G-invariant.

Selon ces définitions, G a (T) quand il admet un ensemble de Kazhdan fini, et on peut montrer que G est toujours Kazhdan dans lui-même. On a aussi par exemple que $G_1 \cup G_2$ est Kazhdan dans $G_1 \times G_2$.

7. Comme avant, la matrice $n \times n$ unité + un unique générateur de R en-dehors de la diagonale.

Ce n'est pas très difficile de voir que (G,G) a (T) si et seulement si G a (T). L'intérêt de la notion relative est que si l'on peut trouver $B \subseteq G$ tel que (G,B) a (T) et B est Kazhdan, alors G a (T). L'art est de trouver un B ni trop gros ni trop petit, inspiré par la géométrie de G.

Un exemple fondamental, essentiellement déjà présent dans l'article original de Kazhdan, est que $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$ a (T). Kassabov [20] l'a étendu en montrant que $(E_2(R) \ltimes R^2, R^2)$ a (T) pour tout anneau R de type fini.

3. Programmation conique

Il s'agit d'une généralisation simple de la « programmation linéaire » (trouver un point dans un polyèdre donné par les inégalités de ses faces). La programmation linéaire est apparue au moins dès 1823 dans les travaux de Fourier, mais a réellement pris de l'importance avec la découverte par Dantzig de bons algorithmes [7], et d'une propriété de dualité par von Neumann (non publiée, en 1948). Elle est couramment utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation, du genre « maximiser le bénéfice d'une entreprise vendant des tables et des chaises, connaissant leurs prix de vente, et sous la contrainte d'une quantité de bois et de vis à ne pas dépasser ». En programmation conique, les contraintes ne sont pas linéaires, mais données par un cône; cette généralisation est importante en pratique (par exemple, pour garantir la solidité de la tour Eiffel on doit imposer des contraintes de norme ℓ^2 sur les tensions dans les poutrelles, ce qui peut se formuler comme une contrainte conique), mais est aussi maniable algorithmiquement que la programmation linéaire.

Dans sa formulation abstraite, on a deux espaces vectoriels réels V, W, une application linéaire $\Phi\colon V \to W$, une forme linéaire $\xi \in V^*$, un vecteur $w \in W$, et un « cône » $\mathscr{K} \subseteq V$: on a $\mathscr{K} + \mathscr{K} = \mathscr{K}$ et $\lambda\mathscr{K} = \mathscr{K}$ pour tout $\lambda > 0$ et $\mathscr{K} \cap (-\mathscr{K}) = \{0\}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xleftarrow[\xi]{} & V & \xrightarrow{\Phi} & W \ni w \\ & & \cup\!\!\mid & & \\ & & \mathscr{K} & & \end{array} \tag{2}$$

Le problème « primal » est de trouver $v \in \mathscr{K}$ maximisant $\xi(v)$ sous la contrainte $\Phi(v) = w$. Un grand nombre de problèmes peuvent se formuler sous cette forme [8], et de nombreux logiciels résolvent efficacement de tels problèmes, pour des V, W de dimension gigantesque. Une solution, ou preuve d'impossibilité, peut être trouvée en temps polynomial [14, 18] en la dimension du problème et le nombre de « bits » nécessaires pour encoder les données du problème. On en tire de nombreuses conséquences théoriques : c'est une bonne manière de montrer qu'un problème est résoluble en temps polynomial. C'est le cas par exemple du problème de trouver dans un graphe parfait (nombre chromatique = taille maximale d'une clique) un ensemble de sommets indépendants de taille maximale.

Une bonne manière de trouver une solution approchée, et en même temps de déterminer la qualité de l'approximation, est de résoudre le *problème dual* : trouver $\eta \in W^*$ minimisant $\eta(w)$ sous la contrainte $\Phi^*(\eta) \in \xi + \mathscr{K}^*$ (où par définition $\mathscr{K}^* = \{\zeta \in V^* \mid \zeta(\mathscr{K}) \geqslant 0\}$) :

$$\begin{array}{ccc} W^* & \xrightarrow{\Phi^*} & V^* \ni \xi \\ & & \cup\!\!\mid \\ & & \mathscr{K}^* \end{array} \tag{3}$$

Tout polyèdre dans W^* peut facilement être décrit sous cette forme duale : s'il est l'intersection de demi-espaces $\{\phi_i(\eta) \geqslant \xi_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$, on prend $\mathscr{K}^* = (\mathbb{R}_+)^m \subset \mathbb{R}^m$ et $\Phi^* = (\phi_i)$ et $\xi = (\xi_i)$. Il est remarquable que, bien que le polyèdre puisse avoir un nombre exponentiel de sommets, il est possible d'en trouver un en temps polynomial.

Même si ce n'est pas évident, le problème dual peut se réécrire sous la forme (2), et si V, W sont réflexifs et $\mathscr{K}$ est fermé alors son dual est équivalent au problème original. Un calcul d'une ligne montre que les solutions primales sont toutes bornées par les solutions duales :

$$\eta(w) = \eta(\Phi(v)) = \Phi^*(\eta)(v) \in \xi(v) + \mathscr{K}^*(v) \geqslant \xi(v).$$

Un résultat fondamental (voir par exemple [4, Théorème 2.4.1]) est :

Théorème 3. *Si $\mathscr{K}$ est fermé et le problème primal est borné et résoluble, alors le problème dual est aussi résoluble et les objectifs optimaux* $\sup_v \xi(v)$ *et* $\inf_\eta \eta(w)$ *sont réalisés et coïncident.*

(Ce résultat est en général énoncé pour V, W de dimension finie. Il est aisé de voir que la démonstration s'étend à V, W des espaces vectoriels topologiques localement convexes, avec Φ, ξ continues :

8. Par exemple : étant donné des points $p_1, \dots, p_n$ dans le plan et des poids $w_1, \dots, w_n \geqslant 0$, trouver un point p minimisant $\sum w_i \|p - p_i\|_2$. Étant donnée une matrice de corrélations Q entre des investissements et un vecteur de profits espérés p, trouver une stratégie d'investissements garantissant une espérance de profit tout en minimisant son risque; ...

en effet, le seul ingrédient essentiel est le théorème de séparation de Hahn-Banach, selon lequel deux convexes disjoints sont séparés par un hyperplan.)

4. Problème (T) et (T)-dual

Comme on l'a vu dans l'introduction, un groupe G a (T) si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ et une mesure ν à support fini sur G tels que, pour l'opérateur $\Delta_\nu \in C^*_{\max}(G)$ défini en (1), on ait $\Delta_\nu^2 - \epsilon\Delta_\nu \geqslant 0$.

Un résultat fondamental d'Ozawa montre qu'on peut remplacer $C^*_{\max}(G)$ ci-dessus par l'algèbre de groupe $\mathbb{R}[G]$; encore mieux, si $\epsilon \in \mathbb{Q}$ et ν prend ses valeurs dans $\mathbb{Q}$, on peut la remplacer par $\mathbb{Q}[G]$:

Théorème 4 (Ozawa [26]). *Le groupe G a la propriété (T) si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$, une mesure ν à support fini sur G, et des vecteurs $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Q}[G]$ avec*

$$\Delta_\nu^2 - \epsilon\Delta_\nu = \sum_{i=1}^n v_i^* v_i. \qquad (4)$$

Il suit que la propriété (T) est *semi-décidable* : si G a (T), alors on peut le certifier par une quantité finie d'information, à savoir ν, ϵ et les $v_1, \dots, v_n$. On retrouve aussi ainsi un résultat de Shalom [29, Theorem 6.7] : *tout groupe ayant (T) est quotient d'un groupe de présentation finie ayant (T).*

Le théorème 4 indique surtout une stratégie pour prouver qu'un groupe a (T) : chercher, par ordinateur, un certificat donnant (4). À vrai dire, cet apport est surtout psychologique : pour un groupe G donné, rien ni personne ne saurait nous empêcher de chercher des ν, ϵ, v_i donnant (4), avec l'espoir d'arriver un jour à certifier (T). Le théorème nous apporte le confort que, si G a en effet (T), alors cette stratégie réussira tôt ou tard ; voir le §4.2.

L'équation (4) est en fait un problème conique au sens du § précédent. En effet, prenons $V = \mathbb{R}[G] \otimes \mathbb{R}[G]$, et décomposons $\mathbb{R}[G] = W \oplus \mathbb{R}\Delta_\nu$. Le cône $\mathscr{K} \subset V$ est l'enveloppe convexe des $v \otimes v$; ce sont les opérateurs positifs. La « division à gauche » $(g,h) \mapsto g^{-1}h$ induit une application naturelle $\widehat{\Phi}\colon V \to \mathbb{R}[G]$, donnée par $\widehat{\Phi}(\sum v_i' \otimes v_i'') = \sum (v_i')^* v_i''$. On la décompose en $\Phi\colon V \to W$ et $\xi\colon V \to \mathbb{R}$ en écrivant $\Phi(v) - \xi(v)\Delta_\nu := \widehat{\Phi}(v)$. En choisissant bien le supplémentaire W à $\mathbb{R}\Delta_\nu$ dans $\mathbb{R}[G]$, on peut décomposer $\Delta_\nu^2 = w + \Delta_\nu$ avec $w \in W$. Le problème conique est de trouver $v \in \mathscr{K}$ maximisant $\xi(v)$ sous la contrainte $\Phi(v) = w$. Si on peut obtenir une solution avec $\xi(v) > -1$, on a obtenu un certificat que G a (T), avec $\epsilon = \xi(v) + 1$.

Dans la pratique, on commence par deviner un support fini E pour les v_i' et v_i'', puis on restreint V à $\mathbb{R}E \otimes \mathbb{R}E$ et W à $\mathbb{R}E^2$, voir le §4.2.

Plusieurs améliorations sont possibles. En premier lieu, on peut remplacer $\mathbb{R}[G]$ par ϖ, l'*idéal d'augmentation* de $\mathbb{R}[G]$. C'est le noyau de l'application naturelle $\mathbb{R}[G] \to \mathbb{R}$ envoyant G sur $\{1\}$, et aussi le sous-espace engendré par $\{g - 1 \mid g \in G\}$. Comme $\Delta_\nu \in \varpi$, et par conséquent Δ_ν^2 aussi, on peut remplacer W par $\varpi/\mathbb{R}\Delta_\nu$ et V par $\varpi \otimes \varpi$. C'est sous cette forme que les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites.

4.1 – Le programme dual

Le dual du programme conique ci-dessus demande de trouver $\eta \in W^*$ minimisant $\eta(w)$ sous la contrainte $\Phi^*(\eta) \in \xi + \mathscr{K}^*$. Cette contrainte peut s'exprimer dans un vocabulaire classique de théorie des groupes, en termes de *fonctions conditionnellement de type négatif* et d'actions affines sur des espaces de Hilbert. Une *fonction conditionnellement de type négatif* est une fonction $\psi\colon G \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ avec $c_1 + \dots + c_n = 0$ et tous $g_1, \dots, g_n \in G$ on a $\sum_{i,j} c_i c_j \psi(g_i^{-1} g_j) \leqslant 0$. Si G agit par isométries sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et $v_0 \in \mathscr{H}$, alors la fonction $\psi(g) := \|g \cdot v_0 - v_0\|^2$ est conditionnellement de type négatif car un rapide calcul donne

$$\sum_{i,j} c_i c_j \psi(g_i^{-1} g_j) = -2\|\sum_i c_i g_i v_0\|^2 \leqslant 0.$$

On considère naturellement de telles fonctions ψ modulo addition d'une constante. On peut à loisir imposer $\psi(1) = 0$ et $\psi(g) = \psi(g^{-1})$ pour tout $g \in G$. On a alors réciproquement que toute fonction conditionnellement de type négatif est de la forme $\|g \cdot v_0 - v_0\|^2$ pour une action affine, c'est essentiellement le théorème de Gelfand-Naimark.

Soient H un sous-groupe de G, et ν une mesure de probabilité sur H. Considérons une action affine de G sur $\mathscr{H}$, et une fonction $\psi(g) = \|g \cdot v_0 - v_0\|^2$ comme ci-dessus, normalisée par $\psi(\Delta_\nu) = 1$. Il est facile de voir que l'action de G admet un point H-invariant si et seulement s'il existe une H-orbite bornée si et seulement si ψ est bornée sur H : le centre de circonférence d'une H-orbite bornée est un point H-invariant. Au contraire, on appelle l'action *ν-plate* si

$$\Delta_\nu(v_0) := \sum_h \nu(h)(h \cdot v_0 - v_0) = 0.$$

Si le support de ν engendre H, une action ν-plate ne peut pas avoir de H-orbite bornée : en effet, si $H\cdot v_0$ est bornée, en appelant 0 son centre de circonférence on se ramène au cas d'une action linéaire de H telle que $\sum_h \nu(h)h\cdot v_0 = v_0$; la convexité de $\mathscr{H}$ impose alors que support$(\nu)\cdot v_0$ est sur la droite $\mathbb{R}v_0$, donc $H\cdot v_0 \subset \mathbb{R}v_0$, donc $v_0 = 0$ d'où $\psi(\Delta_\nu) = 0$, ce qui contredit la normalisation de ψ.

Nitsche montre dans [25] que (à signe près) le programme dual cherche une fonction conditionnellement de type négatif. Plus précisément, $\varpi^* = \mathbb{R}^G/(\text{constantes})$, et W^* est le sous-espace $\{\eta \in \varpi^* \mid \eta(\Delta_\nu) = 0\}$. Une fonction ψ est conditionnellement de type négatif si et seulement si $\widehat{\Phi}^*(\psi) \in -\mathscr{K}^*$. Soit $x = \frac{1}{2}\sum_g \nu(g)(1-g)\otimes(1-g)$, une $\widehat{\Phi}$-préimage de Δ_ν ; comme on a $\xi(x) = -1$, on a correspondance entre $\eta(\Delta_\nu) = 1, \widehat{\Phi}^*(\eta) \in -\mathscr{K}^*$ et $\psi(\Delta_\nu) = 0, \Phi^*(\psi) \in \xi + \mathscr{K}^*$. Ainsi les solutions du problème dual correspondent aux actions affines de G. L'objectif $\eta(w)$ de la solution peut se calculer ainsi :

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\nu(v_0)\|^2 &= \langle \Delta_\nu(v_0), \Delta_\nu(v_0)\rangle \\
&= \sum_{g,h} \nu(g)\nu(h)\langle g\cdot v_0 - v_0, h\cdot v_0 - v_0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{g,h} \nu(g)\nu(h)\Big(\psi(g)+\psi(h)-\psi(g^{-1}h)\Big) \\
&\text{via } 2\langle v,w\rangle = \|v\|^2+\|w\|^2-\|v-w\|^2 \\
&= \frac{-1}{2}\psi(\Delta_\nu^2) = \frac{-1}{2}\psi(w) = \frac{1}{2}(1+\eta(w));
\end{aligned}$$

donc $\eta(w) = 2\|\Delta_\nu(v_0)\|^2 - 1$, et en particulier atteint -1 s'il existe une action affine ν-plate.

On en déduit immédiatement une preuve du théorème 4 d'Ozawa : G n'a pas (T) si et seulement si G n'a pas (FH) si et seulement s'il existe une action affine ν-plate si et seulement si l'objectif -1 est atteint si et seulement s'il n'existe aucune solution au problème primal avec $\epsilon > 0$.

On en déduit aussi ce nouveau résultat :

Théorème 5. *La paire (G,H) a (T) si et seulement si le problème dual n'a aucune solution ν-plate, pour un ν dont le support engendre H.*

Il semble que la formulation duale de la propriété (T) relative est beaucoup plus simple que sa formulation primale.

4.2 – Choix du support

En cherchant des preuves par ordinateur, on se limite bien sûr à des calculs dans des parties finies de G. On a en fait deux sous-ensembles, S donné et E sur lequel les expressions v_i donnant $\sum v_i^* v_i = \Delta_\nu^2 - \epsilon\Delta_\nu$ sont supportées.

Historiquement, un tel critère avait été considéré avant les travaux d'Ozawa, par Żuk [31, 32], reposant sur des idées de Garland, Mok et Pansu [12, 24, 27] ; dans notre terminologie, il correspond à prendre $E = S$, et prend la forme suivante : *soit un groupe G engendré par une partie symétrique finie S dépourvue de l'identité. On considère le graphe avec ensemble de sommets S et une arête de s à s' chaque fois que $s^{-1}s' \in S$. Si le laplacien de ce graphe a un trou spectral $> \frac{1}{2}$, alors G a (T).*

Ce critère teste une propriété bien plus forte que (T) : s'il est satisfait, alors toute action de G sur une variété de Hadamard[9] admet un point fixe [30]. Par exemple, il ne peut pas prouver que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T), car ce groupe agit sans point fixe sur l'espace symétrique $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n$. Il permet par contre de re-prouver (T) pour des groupes de type $\widetilde{A}_2$ tels que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_p[t])$, réseau dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_p((t^{-1})))$. Crucialement, il n'a aucune chance de prouver (T) pour $\mathrm{Aut}(F_n)$, car ce groupe admet $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ comme quotient. Dans la pratique, on essaie typiquement $E = S^2$ ou S^3 pour prouver la propriété (T) ; les calculs deviennent vite prohibitifs. Notons que pour la propriété (T) relative, voir le théorème 5, on n'a même pas $E \subseteq \langle S\rangle$.

4.3 – Réduction des programmes

Il se peut que G admette un sous-groupe P commutant avec Δ_ν. C'est le cas, par exemple, si $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ et Δ_ν est supporté sur 1 et les matrices élémentaires : on peut prendre pour P les matrices de permutation paires, qui fixent Δ_ν par conjugaison. On peut alors se limiter aux actions affines de G pour lesquelles P agit trivialement. On divise ainsi essentiellement la dimension de V par $\#P$.

Une autre réduction est possible si un groupe fini A agit par automorphismes sur G, préservant Δ_ν. Il peut être incorporé dans le premier cas, si on étend G à $A \ltimes G$, mais il est intéressant de le considérer séparément. En effet, on peut alors voir le problème conique comme un A-module, et le décomposer selon les représentations irréductibles de A, arrivant de cette façon à un nombre bien plus

9. À savoir : variété riemannienne complète, à courbure sectionnelle négative ou nulle.

petit de variables dans W, ainsi qu'à des cônes plus petits.

Ces réductions suffisent pour prouver le théorème 1 pour $n = 4$ et $n = 5$ en relativement peu de temps. On prend comme partie génératrice de $\mathrm{Aut}(F_n)$ les transformations élémentaires de Nielsen, et pour ν la mesure uniforme sur ces générateurs. Le groupe A peut être choisi comme $(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \mathrm{Sym}(n)$, où $\mathrm{Sym}(n)$ agit par permutation des générateurs de F_n et $(\mathbb{Z}/2)^n$ par leur inversion. On prend pour E respectivement la boule de rayon 3 (si $n = 4$) ou la boule de rayon 2 (si $n = 5$) dans les transformations de Nielsen.

Les calculs prennent quelques heures sur un ordinateur portable. D'un côté, c'est peu, surtout quand les « certificats » obtenus (écriture de $\Delta_\nu^2 - \epsilon\Delta_\nu$ comme somme de carrés) sont petits (quelques mégaoctets) et numériquement robustes ; d'un autre côté, il n'existe aucune preuve compréhensible par un être humain sans recours à un ordinateur.

5. Angles

Une stratégie pour prouver (T) a été développée par Ershov, Jaikin-Zapirain et Kassabov dans une série d'articles [10, 11, 19]. Supposons qu'on ait un groupe G engendré par une famille de sous-groupes $G_1, \dots, G_n$, et considérons une représentation unitaire $\mathscr{H}$ de G. Pour deux sous-espaces $V, W \leqslant \mathscr{H}$, on note $\sphericalangle(V, W)$ l'angle minimal entre deux vecteurs respectivement de V, W et orthogonaux à $V \cap W$. Soit $\mathscr{H}^{G_i}$ le sous-espace des vecteurs G_i-invariants de $\mathscr{H}$; l'idée est que si les angles $\sphericalangle(\mathscr{H}^{G_i}, \mathscr{H}^{G_j})$ sont suffisamment grands, alors on peut contrôler les vecteurs G-invariants et en déduire que G a (T). Plus précisément :

Théorème 6 (Kassabov [19]). *Soit $G = \langle G_1, \dots, G_n\rangle$, et supposons que $(G, \bigcup_i G_i)$ a (T). Supposons que pour tous $i \neq j$ il existe une borne $\varepsilon_{i,j}$ telle que, dans toute représentation unitaire $\mathscr{H}$ de G, on ait $\cos\sphericalangle(\mathscr{H}^{G_i}, \mathscr{H}^{G_j}) \geqslant \varepsilon_{i,j}$, et supposons enfin que la matrice*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{1,2} & \cdots & -\varepsilon_{1,n} \\ -\varepsilon_{2,1} & 1 & \cdots & -\varepsilon_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon_{n,1} & -\varepsilon_{n,2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

soit positive définie. Alors G a (T).

On peut le prouver ainsi : soit P_i la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathscr{H}^{G_i}$. Il existe d'autre part un vecteur de Perron-Frobenius (μ_i) de A, c'est-à-dire une valeur propre $\lambda > 0$ et un vecteur à coefficients positifs pour lequel $\lambda_i\mu_i - \sum_{j\neq i}\varepsilon_{i,j}\mu_j \geqslant \lambda$ pour tout i. On considère alors l'opérateur suivant pour G :

$$P = \sum_i \mu_i P_i.$$

L'hypothèse sur les angles entre $\mathscr{H}^{G_i}$ et $\mathscr{H}^{G_j}$ implique qu'on a

$$P_iP_j + P_jP_i + \varepsilon_{i,j}(P_i + P_j) =: \square_{i,j} \geqslant 0$$

pour tous $i \neq j$, et un calcul simple montre alors

$$\begin{aligned} P^2 - \lambda P &= \sum_{i,j}\mu_i\mu_jP_iP_j - \lambda\sum_i \mu_iP_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\mu_i\mu_j(P_iP_j + P_jP_i) + \sum_i \mu_i(-\lambda P_i + \mu_iP_i^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\mu_i\mu_j(\square_{i,j} - \varepsilon_{i,j}(P_i+P_j)) + \sum_i \mu_i(\mu_i - \lambda)P_i \\ &\geqslant \sum_i \mu_i\Big(\mu_i - \lambda - \sum_{j\neq i}\mu_j\varepsilon_{i,j}\Big)P_i \geqslant 0. \end{aligned}$$

Finalement, comme $(G, \bigcup_i G_i)$ a (T), on peut approcher les P_i, et donc P, arbitrairement bien par des opérateurs à support fini.

On a en fait même un peu mieux : si on a des laplaciens Δ_i sur G_i ayant un trou spectral d'au moins λ_i dans toute G-représentation (ce qui suit de la propriété (T) relative), alors on peut remplacer P_i ci-dessus par $\widetilde{P_i} := \Delta_i/\lambda_i$ qui satisfait $\widetilde{P_i}^2 - \widetilde{P_i} =: \square_i \geqslant 0$, et le calcul ci-dessus donne toujours $P^2 - \lambda P \geqslant 0$. Si de surcroît on connaît le support des $\square_i$ et $\square_{i,j}$ exprimant la positivité de Δ_i et des estimations d'angles, alors en prenant leur union on obtient un sous-ensemble E sur lequel le trou spectral de P peut être certifié au moyen de (4).

Dans le cas particulier où les G_i sont des groupes finis, on n'a aucun souci, car les P_i sont à support fini. C'est d'ailleurs sous cette forme que Kassabov a énoncé son résultat. Dans tous les cas, on en déduit :

Théorème 2 ([10]). *Soit R un anneau associatif de type fini (pas nécessairement commutatif !). Soit $E_n(R)$ le groupe engendré par les matrices $n \times n$ élémentaires à coefficients dans R. Alors $E_n(R)$ a (T) si $n \geqslant 3$.*

On prend comme sous-groupes G_i les sous-groupes de racine (une copie de R à une position donnée) ; le sous-groupe engendré par deux sous-groupes de racine est nilpotent de classe au plus 2, et on connaît suffisamment de choses sur ses représentations unitaires pour en déduire une borne sur les angles $\sphericalangle(\mathscr{H}^{G_i}, \mathscr{H}^{G_j})$ pour pouvoir appliquer le théorème 6 [10].

Même si le critère ne s'applique pas directement, on peut aussi directement chercher des estimations de la forme $\Delta_i\Delta_j + \Delta_j\Delta_i \gg 0 - \varepsilon_{i,j}(\Delta_i + \Delta_j)$ pour essayer de déduire (T), même sans interprétation de $\varepsilon_{i,j}$ comme angle. On prouve ainsi :

Théorème 1 ([16, 25]). *Le groupe* $\mathrm{Aut}(F_n)$ *a (T) pour tout* $n \geqslant 4$.

On se rappelle que $\mathrm{Aut}(F_n)$ est engendré par les transformations de Nielsen $x_i \mapsto (x_i^{\pm} x_j^{\pm})^{\pm}$. Pour $S \subseteq \{1,\dots,n\}$, on note Δ_S le laplacien de la copie de $\mathrm{Aut}(F_{\#S})$ agissant seulement sur les générateurs x_s avec $s \in S$, et $\Delta_n := \Delta_{\{1,\dots,n\}}$. On cherche, encouragé par le théorème 4, une estimation de la forme $\Delta_n^2 - \epsilon_n\Delta_n \geqslant 0$. Profitant de la symétrie, on a $\Delta_n = \sum_{\{i,j\}\subset\{1,\dots,n\}} \Delta_{\{i,j\}}/\binom{n}{2}$, et on développe $\Delta_n^2 = (A_n+B_n+C_n)/\binom{n}{2}^2$, séparant les termes respectivement de la forme $\Delta_{\{i,j\}}^2$, $\Delta_{\{i,j\}}\Delta_{\{i,k\}}$ et $\Delta_{\{i,j\}}\Delta_{\{k,\ell\}}$. On a $A_n \geqslant 0$ car somme de carrés, et $C_n \geqslant 0$ car $\Delta_{\{i,j\}}$ et $\Delta_{\{k,\ell\}}$ commutent. Profitant de la symétrie, on a pour tous $n \geqslant m \geqslant 4$,

$$A_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{m}{2}n!} \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \sigma(A_m),$$

$$B_n = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{m}{3}n!} \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \sigma(B_m),$$

$$C_n = \frac{\binom{n}{4}}{\binom{m}{4}n!} \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \sigma(C_m),$$

et donc

$$\binom{n}{2}^2 \Delta_n^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)} \sigma\left(\frac{\binom{n}{2}}{\binom{m}{2}} A_m + \frac{\binom{n}{3}}{\binom{m}{3}} B_m + \frac{\binom{n}{4}}{\binom{m}{4}} C_m\right).$$

Prenons $m = 4$ dans cette formule ; il suffit de montrer $A_4 + B_4 + C_4 \geqslant \alpha\Delta_4$ et $B_4 + 2C_4 \geqslant \beta\Delta_4$ pour certains $\alpha, \beta > 0$, en plus des inégalités $A_4 \geqslant 0$ et $C_4 \geqslant 0$, pour en déduire pour tout $n \geqslant 4$ l'existence de $\epsilon_n > 0$ avec $\Delta_n^2 - \epsilon_n\Delta_n \geqslant 0$.

Une autre application récente du théorème 6 est à la construction de familles de graphes de Cayley expanseurs [6, 2]. On sait choisir des parties génératrices de taille bornée pour les groupes alternés $\mathrm{Alt}(n)$ afin que les graphes de Cayley correspondants forment une famille d'expanseurs ; c'est par exemple une conséquence du fait que les groupes alternés sont tous des quotients de $\mathrm{Aut}(F_4)$ qui a (T) par le théorème 1.

On peut faire mieux, et plus explicite : des puissances élevées des groupes alternés peuvent encore être engendrées par peu de générateurs ; par exemple, $\mathrm{Alt}(5)^{19}$ est engendré par 2 éléments, et plus généralement $\mathrm{Alt}(n)^{f(n)}$ le peut aussi pour une fonction exponentielle f. Ces puissances de groupes alternés peuvent-elles former une famille de graphes expanseurs de degré borné ?

Considérons F l'algèbre libre (même pas associative !) à n générateurs $x_1,\dots,x_n$ et au moins deux opérations $*_1,\dots,*_s$ sur un anneau R. Une R-base de F est donnée par des arbres enracinés, avec à chaque sommet intérieur un indice $\in \{*_1,\cdots *_s\}$ et deux descendants, et à chaque feuille un générateur $\in \{x_1,\dots,x_n\}$; par exemple, $(x_1 *_2 x_3) *_1 (x_2 *_1 x_1)$, avec la multiplication évidente (on peut même autoriser des opérations d'arité supérieure à 2). On considère le groupe G d'automorphismes de R engendré par les transvections de la forme

$$x_1 \mapsto x_i + \alpha x_j *_t x_k$$

pour $\alpha \in R$, $i \neq j, k$ et $t \in \{1,\dots,s\}$. En calculant les angles entre différents sous-groupes, on montre que G a (T) pour $R = \mathbb{Z}[1/N]$, dès que n et N sont assez grands.

En particulier, pour tout quotient fini Q de l'algèbre F, on a une action de G sur l'espace des homomorphismes $F \to Q$, naturellement identifié à Q^n. On montre que, pour la plupart des Q, cette action est hautement transitive sur $Q^n \setminus \{0\}$, donnant un quotient de G isomorphe à un groupe alterné. Des Q non isomorphes donnent lieu à des actions non conjuguées ; en variant les Q, on obtient :

Théorème 7. *Le groupe G admet pour tout p premier assez grand et tout $k \geqslant 1$ le groupe* $\mathrm{Alt}(p^{4k}-1)^{p^{3k}}$ *comme quotient.*

Ces puissances de groupes alternés peuvent donc former une famille de graphes expanseurs.

10. Je triche : on peut l'appliquer si 2 est inversible dans R. Sinon, le critère ne s'applique juste pas (la matrice A est seulement positive semi-définie), et on doit travailler plus dur.

Voici très concrètement comment produire des parties génératrices de groupes alternés formant des expanseurs : pour p un nombre premier impair, considérons les permutations σ, α, β de $\mathbb{F}_p^3 \setminus \{0\}$ données par

$$\sigma(x, y, z) = (y, z, x),$$
$$\alpha(x, y, z) = (x + y, y, z),$$
$$\beta(x, y, z) = (x + y^2, y, z).$$

Alors $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cong \mathrm{Alt}(p^3 - 1)$; et les graphes de Cayley associés forment un expanseur.

Références

[1] Andersen, Jørgen Ellegaard. « Mapping Class Groups do not have Kazhdan's Property (T) » (2007). available at arXiv :0706.2184.

[2] Bartholdi, Laurent et Kassabov, Martin. « Property (T) and many quotients » (2023). available at arXiv :2308.14529.

[3] Bekka, M. E. Bachir, Harpe, Pierre de la et Valette, Alain. *Kazhdan's property (T)*. **11**. New Mathematical Monographs. Cambridge : Cambridge University Press, 2008, p. xiv+472.

[4] Ben-Tal, Aharon et Nemirovski, Arkadi. *Lectures on modern convex optimization*. MPS/SIAM Series on Optimization. Analysis, algorithms, and engineering applications. Society for Industrial et Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Programming Society (MPS), Philadelphia, PA, 2001, p. xvi+488.

[5] Burger, Marc. « Kazhdan constants for $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ ». *J. Reine Angew. Math.* **413** (1991), p. 36-67.

[6] Caprace, Pierre-Emmanuel et Kassabov, Martin. « Tame automorphism groups of polynomial rings with property (T) and infinitely many alternating group quotients » (2022). available at arXiv :2210.00730.

[7] Dantzig, George B. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963, p. xvi+625.

[8] de Cornulier, Yves. « Relative Kazhdan property ». English, with English et French summaries. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39**, nº 2 (2006), p. 301-333.

[9] Delorme, Patrick. « 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations ». *Bull. Soc. Math. France* **105**, nº 3 (1977), p. 281-336. issn : 0037-9484.

[10] Ershov, Mikhail et Jaikin-Zapirain, Andrei. « Property (T) for noncommutative universal lattices ». *Invent. Math.* **179**, nº 2 (2010), p. 303-347. issn : 0020-9910.

[11] Ershov, Mikhail, Jaikin-Zapirain, Andrei et Kassabov, Martin. « Property (T) for groups graded by root systems ». *Mem. Amer. Math. Soc.* **249**, nº 1186 (2017), p. v+135.

[12] Garland, Howard. « p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups ». *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 375-423.

[13] Guichardet, Alain. « Étude de la l-cohomologie et de la topologie du dual pour les groupes de Lie à radical abélien ». *Math. Ann.* **228**, nº 3 (1977), p. 215-232.

[14] Hačijan, Leonid G. « A polynomial algorithm in linear programming ». Russian. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **244**, nº 5 (1979), p. 1093-1096.

[15] Kaluba, Marek, Nowak, Piotr W. et Ozawa, Narutaka. « $\mathrm{Aut}(F_5)$ has property (T) ». *Math. Ann.* **375**, nº 3-4 (2019). available at arXiv :1712.07167, p. 1169-1191.

[16] Kaluba, Marek, Nowak, Piotr W. et Ozawa, Narutaka. « On property (T) for $\mathrm{Aut}(F_n)$ and $\mathrm{SL}_n(Z)$ » (2018). available at arXiv :1812.03456.

[17] Kantorovich, Leonid V. « Mathematical methods of organizing and planning production ». *Management Sci.* **6** (1959/60), p. 366-422.

[18] Karmarkar, Narendra. « A new polynomial-time algorithm for linear programming ». *Combinatorica* **4**, nº 4 (1984), p. 373-395.

[19] Kassabov, Martin. « Subspace arrangements and property T ». *Groups Geom. Dyn.* **5**, nº 2 (2011), p. 445-477.

[20] Kassabov, Martin. « Universal lattices and unbounded rank expanders ». *Invent. Math.* **170**, nº 2 (2007), p. 297-326.

[21] Každan, David A. « On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups ». Russian. *Funkcional. Anal. i Priložen.* **1** (1967), p. 71-74. issn : 0374-1990.

[22] Lubotzky, Alexander et Pak, Igor. « The product replacement algorithm and Kazhdan's property (T) ». *J. Amer. Math. Soc.* **14**, nº 2 (2001), p. 347-363.

[23] Margulis, Grigori A. « Explicit constructions of expanders ». Russian. *Problemy Peredači Informacii* **9**, nº 4 (1973), p. 71-80.

[24] Mok, Ngaiming. « Harmonic forms with values in locally constant Hilbert bundles ». In : *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*. Vol. Special Issue. 1995, p. 433-453.

[25] Nitsche, Martin. « Computer proofs for Property (T), and SDP duality » (2020). available at arXiv :2009.05134.

[26] Ozawa, Narutaka. « Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan's property (T) ». *J. Inst. Math. Jussieu* **15**, nº 1 (2016), p. 85-90. issn : 1474-7480.

[27] Pansu, Pierre. « Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité ». French, with French summary. *Astérisque* **227** (1995). Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94, Exp. No. 778, 3, 69-105.

[28] Roberts, Justin. « Skeins and mapping class groups ». *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **115**, nº 1 (1994), p. 53-77.

[29] Shalom, Yehuda. « Rigidity of commensurators and irreducible lattices ». *Invent. Math.* **141**, nº 1 (2000), p. 1-54.

[30] Wang, Mu-Tao. « A fixed point theorem of discrete group actions on Riemannian manifolds ». *J. Differential Geom.* **50**, nº 2 (1998), p. 249-267.

[31] Żuk, Andrzej. « La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres ». French, with English et French summaries. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323**, nº 5 (1996), p. 453-458.

[32] Żuk, Andrzej. « Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups ». *Geom. Funct. Anal.* **13**, nº 3 (2003), p. 643-670.

Laurent Bartholdi

Université de la Sarre

laurent.bartholdi@gmail.com

Après des études de mathématiques et d'informatique à Genève, Laurent Bartholdi a enseigné à Berkeley, Lausanne, Gottingue puis actuellement Sarrebrucke. Ses intérêts portent sur les liens entre l'algèbre et d'autres domaines tels que la théorie des graphes, les probabilités, l'informatique théorique et les systèmes dynamiques. Il est en particulier passionné par les « fractals » en théorie des groupes, basés sur une notion d'auto-similarité. Il participe aussi activement au développement de logiciels mathématiques.

Mes plus chaleureux remerciements vont à Mikael de la Salle, qui m'a encouragé et soutenu pour la rédaction de ce texte, et à Martin Kassabov qui a répondu avec bienveillance à mes nombreuses questions. Je suis également reconnaissant à Raphael Ducatez et un relecteur anonyme pour leurs remarques (im)pertinentes qui m'ont grandement aidé à améliorer le texte. Ce travail a bénéficié du soutien de la National Science Foundation américaine, subside Nº 1440140, alors que l'auteur était en résidence au Mathematical Sciences Research Institute à Berkeley, Californie, durant le semestre du printemps 2022 ; puis du soutien de l'European Research Council, subside AdG 101097307.

Un entretien avec Ingrid Daubechies
(partie 2)

Propos recueillis par Jean-Michel Morel.
L'interview d'Ingrid Daubechies est publiée en trois parties : la première parle de sa formation, la deuxième de l'aventure des ondelettes et la troisième du temps de la reconnaissance et des distinctions. La fin de l'interview sera publiée dans le prochain numéro de la *Gazette*. Suite de l'interview parue dans la *Gazette* de juillet 2023. Nous en étions à l'époque où Ingrid Daubechies était à l'université, pour faire des études de physique.

[. . .] on discutait beaucoup de maths et c'est à ce moment-là que je me suis rendu compte qu'il y avait moyen de faire une thèse et de rester à l'université après la licence.

Des professeurs t'ont incitée dans cette voie ?

Oui primo il y avait à ce moment-là une jeune femme qui était assistante, qui était en train de faire sa thèse en physique et qui était très ouverte (Irina Patva Veretennicoff). Elle était physicienne, et alors... j'avais un exemple ! Si on a un exemple ça suffit. Si on a un exemple on sait que c'est possible. Et il y avait aussi quelques profs féminins, pas beaucoup, très peu...

Et puis comme j'étais bonne étudiante, il y a un prof en physique théorique qui m'a demandé, parce qu'il avait des places d'assistant si je voulais faire une thèse avec lui, alors j'ai dit oui. En fait, il avait plus de places qu'il n'avait de temps, donc il avait trouvé des collaborateurs ailleurs pour m'encadrer et je suis allée à Marseille. C'est pour ça que je suis allée à Marseille, parce qu'il connaissait Raymond Stora à Marseille, qui était un physicien des particules. Je voulais apprendre la théorie des champs. Et je suis arrivée au CPT, le Centre de Physique Théorique, qui était encore chemin Joseph Aiguier, donc pas encore à Luminy.

Je suis arrivée à ce moment – je ne l'ai pas su à ce moment-là parce je ne savais rien – où il y avait la guerre civile dans ce CPT. Il y avait CPT1 et CPT2, ils venaient de se scinder, et Raymond Stora qui était directeur du CPT était en train d'essayer de gérer tout ça, donc il n'avait pas le temps pour cette petite belge qui était tombée des nues. Plus tard, j'ai réalisé dans quelle mare j'étais arrivée et j'ai commencé à parler avec Percy Deift avec qui je partageais un bureau. Il était au Courant Institute et était alors en train de terminer sa thèse. Il était venu pour parler avec Jean-Michel Combes.

Il m'a présenté Alex Grossmann. J'apprenais des tas de maths en plus, donc je lisais des livres mais tous les livres du soir c'étaient des livres de maths, et en fait j'étais en train de lire de la théorie des groupes de Lie. Percy me dit « tu devrais faire de la physique mathématique » et c'est lui qui m'a trouvé Alex. Comme personne ne parlait à personne et qu'Alex était dans le CPT2, personne parmi les jeunes ne parlait aux gens dans le CPT2. Le CPT1 c'était les jeunes et lui était au CPT2 parce qu'il avait été amené par Kastler. Kastler était un grand ponte, donc. . . Alex, il s'en foutait pas mal de ces histoires ! Mais comme c'était Kastler qui l'avait amené, il était du coup dans ce groupe-là. Personne ne me parlait, puisque j'étais associée aux vieux. J'ai connu Alex, c'était intéressant, mais j'ai quand même passé une période de trois mois tellement misérable parce que personne ne me parlait, à part Alex, et Percy Deift. De sorte que quand l'année d'après on a organisé des vacances en voiture en France, j'ai dit « voilà Marseille, voilà un cercle de 30 kilomètres autour de Marseille, et on n'entrera pas dans ce cercle-là ».

Parce que, bon, j'avais été ostracisée. Plus tard je me suis rendu compte que cela n'avait rien à voir avec moi. C'était une situation politique et générationnelle. Et j'y suis retournée parce que j'ai commencé à travailler avec Alex.

Mais c'était après ? Tu as rencontré Alex, mais ce n'est pas à ce moment-là que vous avez commencé à travailler ?

Oui, plus tard, je voulais, mais bon je rentre en Belgique et c'était toute une distance entre Bruxelles et Marseille. C'était un train de nuit. Et j'avais une relation et mon copain... J'ai donc essayé de trouver des collaborateurs en Belgique. J'ai travaillé pendant un temps, j'ai appris les algèbres C* avec des gens à Louvain et j'ai voulu travailler avec eux, mais finalement Louvain et Bruxelles sont des universités très rivales et donc ça n'allait pas vraiment. J'ai recommencé à travailler avec Alex, je suis retournée à Marseille.

En quelle année ?

1978, et j'ai passé ma thèse en 1980. Donc j'ai commencé à travailler sur ces aspects de la quantification de Weyl sur laquelle Alex travaillait. Et je me souviens encore : Alex réfléchissait beaucoup et il écrivait des notes sur de jolies feuilles, et moi j'en prenais des photocopies pour y travailler. Et alors il les perdait. Le nombre de fois où j'ai fait des copies à Bruxelles de copies que moi j'avais faites à Marseille, pour les renvoyer à Alex ! Donc j'étais aussi l'archiviste d'Alex. J'ai passé ma thèse en 80.

Quel était le sujet ?

La quantification de Weyl. J'utilisais des états cohérents, donc une formulation de la mécanique quantique où on caractérisait les opérateurs par leurs éléments de matrice pour états cohérents et il y avait une très belle transformation intégrale entre la fonction classique et la représentation intégrale. C'étaient des espaces de Hilbert à noyau reproduisant qui contenaient toute la formulation et la non-commutativité des opérateurs dans l'espace de Hilbert. J'ai travaillé sur ça et finalement fait une thèse. J'ai tiré trois ou quatre articles de cette thèse plus tard, car à ce moment on écrivait la thèse et puis on publiait ensuite.

La thèse a été défendue à Bruxelles et Alex était dans le jury, mais il n'était pas mon directeur de thèse officiel, c'était le professeur à Bruxelles qui l'était. C'était Jean Reignier, qui était un étudiant lui-même de Jules Géhéniau, un monsieur important en théorie de la relativité. Géhéniau lui-même élève de De Donder, et je crois que De Donder avait été élève de De Broglie. Donc une généalogie respectable.

Tu étais donc tout ce temps officiellement assistante à Bruxelles, tu avais des cours à faire ?

On donnait des exercices pratiques. En Belgique, je ne sais pas si c'était le cas en France aussi, ce n'était que quand on devenait professeur ordinaire qu'on avait la responsabilité de cours. Jusqu'à ce moment-là, on avait peut-être même un poste permanent, mais on donnait des exercices pratiques, on n'était pas censé être une personne assez importante pour enseigner. En 1981, John Klauder était dans mon jury de thèse, proposé par Alex. Je l'avais rencontré avant, mais il est venu au jury. En fait, il y a une anecdote à ce propos. En Belgique quand il y avait une défense de thèse, il y en avait deux : une défense privée, seulement le candidat avec le jury. L'idée était que, puisque la défense publique était une grande fête où tout le monde venait, la famille, les amis, pour éviter qu'il y ait un problème, on faisait d'abord la défense privée. S'il y avait un problème à ce moment-là, le candidat pouvait être persuadé de retirer la thèse. (Grâce à ce système) il s'est passé très rarement qu'il y ait un embarras, cela s'est produit seulement quand les gens insistaient pour qu'il y ait (seulement) une défense publique. Je ne sais pas si ce système était très intelligent. Dans la défense privée, John Klauder avait pour principe de poser des questions jusqu'au moment où l'étudiant ne savait plus. Il m'a posé des tas de questions et à un certain moment je ne pouvais plus répondre, et donc j'étais effondrée après. Mais lui était plutôt impressionné que cela soit allé aussi loin. Donc, cela s'est bien passé, on a eu la fête, et je suis allée presque aussitôt à une école d'été. Le lendemain je suis partie à Erice à une école d'été de physique-maths. C'est là que j'ai rencontré plusieurs gens importants en physique-maths, Elliot Lieb par exemple. Je savais que je pouvais avoir une bourse de six mois pour voyager, une bourse de l'OTAN à l'époque, je savais que j'avais de bonnes chances d'en avoir une. Et lui a dit qu'il voulait bien m'accueillir, car il était intéressé par les états cohérents. Et je suis partie pour six mois, et je suis restée deux ans, en post-doc en physique à Princeton. Au bout de 6 mois, il m'avait donné un problème sur lequel je n'avais pas fait de progrès mais on m'avait dit que six mois c'est très peu et qu'il fallait lui demander plus de temps. Alors Elliot m'avait trouvé un poste d'enseignant visiteur dans le département de maths. En plus de la bourse de six mois, je suis restée encore 2 ans et j'ai commencé à travailler sur des problèmes de stabilité de la matière sur lesquels Elliot Lieb travaillait. Il en est sorti plusieurs articles.

Tu enseignais les mathématiques à Princeton : est-ce que le fait d'enseigner les mathématiques t'a appris des choses ?

Pas vraiment, parce que les gens qui visitaient comme ça, on leur donnait des cours de calculus pas très avancés. Mais j'ai appris beaucoup de choses parce qu'ils avaient un *brown bag seminar* de midi à 1h30. Je croyais que c'était toujours comme ça, mais en fait ça a été pendant quelques années seulement. L'idée c'était que ça ne coûte rien au département, et que tout le monde venait. Il n'y avait pas d'agenda. On venait tous, et il y avait beaucoup de visiteurs à ce moment-là. Un visiteur avait un problème ouvert, il en parlait. Il y avait beaucoup de discussions, il y avait des interruptions tout le temps, ce n'était pas comme un séminaire. C'était vraiment beaucoup plus vivace et j'ai appris énormément. J'ai appris en assistant aux discussions entre les gens. Les Chayes, Jennifer Chayes et Lincoln Chayes, étaient étudiants en thèse à ce moment-là à Princeton et j'ai appris à les connaître. Donc ça a été une période formative très importante pour moi. C'est là que j'ai appris à développer ou à cultiver l'idée qu'il faut trouver la bonne question.

Jusqu'à ce moment-là j'apprenais énormément de choses. Les gens me posaient les questions et si j'avais des choses que je pouvais dire, j'essayais de trouver. Donc je répondais à la question, mais on peut poser beaucoup de questions qui n'intéressent personne. Et je ne m'étais jamais demandé « pourquoi est-ce que je fais ça ? » Je le faisais parce que quelqu'un me l'avait demandé, parce que quelqu'un m'avait dit, il faut le faire, ce serait intéressant si tu faisais cela. Je ne m'étais jamais demandé pourquoi ce serait intéressant : tout ça c'étaient des questions. Et en fait c'est Valentine Bargmann qui le premier m'a posé ces questions. Alex m'avait dit il faut que tu lui parles, c'est un homme très très gentil. J'étais impressionnée comme tout parce que Bargmann, c'était un géant, et alors ce géant m'a dit : « dis-moi ce qui est la chose la plus intéressante dans ta thèse ». Je ne savais pas répondre. Je pouvais lui dire ce qu'il y avait dans ma thèse, mais je ne savais pas prendre ce point de vue-là. En fait ça a germé, et j'ai vu aussi ces discussions où les gens se demandaient « et pourquoi est-ce que tu veux faire ça ? », « Ah, parce que, etc ». Donc ça a été une période très importante, je crois, dans mon développement.

On prend du recul par rapport aux mathématiques et leur développement quand on fait de la recherche, je le dis toujours à mes étudiants. La première chose quand quelqu'un voulait travailler avec moi je lui disais « écoute, je viens de te dire ma philosophie sur une thèse ; ce n'est pas la même philosophie que pas mal d'autres professeurs, et si cette philosophie ne te va pas, il vaut mieux trouver un autre directeur de thèse. » Moi je crois que faire une thèse c'est une période pour apprendre beaucoup, mais pour aussi apprendre à voir dans ce qu'on apprend, le paysage mathématique, le paysage intellectuel, voir comment les choses se tiennent, voir où sont les trous et voir les chemins qui intéresseront d'autres gens aussi. Donc de voir tout ce paysage et de le tricoter ensemble. Dans ce paysage alors il y a des choses intéressantes à faire. La plupart de mes étudiants, je les vois souvent. Une fois par semaine ils viennent, ils discutent et même s'ils n'ont pas de résultats nouveaux je veux les voir et je veux qu'ils me disent ce qu'ils ont lu, ce qu'ils ont pensé, et donc je les accompagne dans le chemin. C'est l'étudiant en général qui choisit le chemin, et j'ai des étudiants qui sont allés dans des directions très différentes. C'est leur développement et je les accompagne et du coup, ils sont soutenus, mais ce qui arrive en général c'est qu'un étudiant chez moi a déjà deux ans-deux ans et demi avant qu'il n'ait son premier papier. Il y a des directeurs de thèse qui disent : lisez ça et ça et allez voir ce séminaire-là et alors résolvez-moi cette question-là et ça donne le premier article au bout d'un an. Je leur dis : « si c'est ce que vous préférez, il faut choisir quelqu'un d'autre. » Mais, c'est vrai aussi que je n'ai jamais eu d'étudiant qui après sa thèse ait eu la dépression post-natale.

Parfois, il y a des post-docs pour qui ça ne va pas du tout une fois qu'ils sont indépendants. Eux (mes étudiants), leur crise existentielle, ils l'ont eue avant, mais j'étais là pour leur tenir la main. Ce n'est peut-être pas la façon la plus traditionnelle, mais je trouve que c'est le mieux pour un jeune.

On se rapproche de l'époque ondelettes...

Oui, alors je suis rentrée en Belgique, et j'ai repris contact avec Alex parce qu'il avait commencé à travailler sur les ondelettes et ça m'intéressait beaucoup. En même temps aussi, j'étais un peu désillusionnée par le monde de la math-physique parce que je trouvais qu'ils étaient très étroits. Il y avait des revues comme *Communications in Mathematical Physics*, qui était la revue la plus estimée, et ils publiaient sur la mécanique quantique rigoureuse, la théorie des champs constructive, la mécanique statistique, et au moment où Ruelle et Lanford ont commencé à s'intéresser aux systèmes dynamiques, les systèmes dynamiques ont été pris dans la sphère. Les conférences étaient aussi sur ces sujets. Je leur avais dit : « Mais pourquoi on ne parle jamais par exemple de problèmes inverses en optique ? C'est très mathématique, c'est lié à la physique, c'est très intéressant, il y a des méthodes similaires ! » « Ah non, ils ont déjà leurs conférences et leurs journaux à eux, c'est un monde différent. » Je trouvais que c'était un peu artificiel tout ça. Cela me surprenait, mais ils trouvaient que, bon, c'étaient des applications différentes, c'était pas de la physique math. Je n'ai jamais très bien compris les gens qui disent « ça, ce n'est pas ... » Quand on essaie de définir ce qu'on fait par ce que ce n'est pas, je trouve en général qu'on est mal parti.

Je trouvais qu'il y avait des problèmes en traitement du signal qui sont très intéressants et où les outils qu'on développe en mécanique quantique pouvaient être utiles. Donc j'ai commencé à travailler sur les ondelettes, et du coup j'étais considérée comme une mathématicienne appliquée. En fait, Elliot Lieb m'a dit à ce moment : « mais tu ne fais plus de physique maths ! » Mais je faisais les mêmes choses ! Mais je discutais avec des ingénieurs, ce n'était plus de la physique maths, c'étaient des maths appliquées.

Ces années ondelettes ont commencé par une interaction avec Alex ?

Oui, avec Alex. Parce que je voyais qu'il faisait des applications des choses que nous avions faites mais dans un autre domaine et je trouvais ça tout à fait naturel et je savais que dans ce cercle physique-maths, on ne faisait pas ça, mais ça m'intéressait et donc je voulais apprendre. C'était juste au moment où ils avaient fait tous les articles avec Thierry Paul et Jean Morlet sur les représentations continues (en ondelettes), et ils étaient en train de les discrétiser. Donc je suis arrivée à ce moment-là, on a regardé les *frames* [1], et on a rédigé l'article *Painless nonorthogonal expansion* [2]. Cet article est un article joint avec Yves (Meyer), mais je ne l'avais jamais rencontré avant ou au moment où je rédigeais. J'allais voir Alex à Marseille pour une semaine puis je retournais à Bruxelles. C'était d'ailleurs une manière fantastique de travailler avec Alex parce qu'il avait tout le temps des visiteurs, mais quand il avait un visiteur pour une semaine, ce visiteur avait priorité, évidemment. Pauvre Thierry (Paul) qui était là tout le temps, il venait des gens, et du coup pas de temps pour travailler avec Thierry. Thierry, qui était en thèse avec Alex, était très ouvert. Pour travailler avec Alex il valait bien mieux y aller une fois une semaine tous les deux mois, et puis retourner chez soi pour digérer tout, que d'être là tout le temps.

Alex, dans une de ces périodes où je n'étais pas là, était monté à Paris, a rencontré Yves Meyer, a beaucoup discuté avec lui. Avec tout son bagage d'analyse harmonique, Yves lui a dit des tas de choses, et il avait discuté de notre article. Yves lui avait ajouté des idées, alors Alex a dit, je ne peux plus écrire cet article sans mettre Yves comme coauteur, parce que toute ma pensée a été infusée de ce j'ai appris de lui. Donc j'écris à Yves – je ne savais qu'Yves était un grand monsieur – est-ce qu'on peut vous ajouter comme coauteur, car Alex veut qu'on vous rajoute. Il m'a avoué plus tard qu'il avait trouvé que c'était une lettre un peu saugrenue. Il a répondu « bien oui, si ça peut vous servir » (rires). Donc je l'ai mis comme coauteur, mais on s'est rencontré plus tard, après qu'on avait déjà eu un article ensemble. À Marseille d'ailleurs, une fois qu'Yves était à Marseille.

Yves m'a dit que c'est la lecture de cet article qui l'a inspiré pour construire ses premières bases (orthogonales) à lui.

Je me souviens, j'étais là et on l'entendait se demander : pourquoi, après tout, ces bases ne pourraient pas être orthogonales ? Il essayait de démontrer que ce n'était pas possible.

Pour nous c'était évident que ce n'était pas possible pour la transformée à fenêtres (la *short time Fourier transform*), à cause du principe d'Heisenberg.

Le terme ondelettes vient bien de Morlet ?

Le terme vient en fait de la géophysique parce qu'il y a longtemps qu'eux utilisaient le nom ondelette. En fait le terme était au départ anglais, pas français, *wavelet*, et désignait la transformée de Fourier à fenêtre *short time Fourier transform*, *STFT*. Donc *short time* ; eux aimaient bien toujours montrer les fonctions par rapport auxquelles on transformait, et c'était des ondes mais localisées, donc des ondelettes, *wavelets*. Et alors ils parlaient de la *wavelet* de Klauder ou de la *wavelet* du nom de la personne qui avait proposé la fonction de l'enveloppe (de la

1. Voir glossaire.

2. I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. « Painless nonorthogonal expansions. » *Journal of Mathematical Physics* 27.5 (1986) : 1271-1283.

STFT). Ce n'étaient pas des ondelettes, ce n'était pas ce que nous appelons ondelettes.

C'étaient des fonctions de Gabor ?

Les fonctions de Gabor ont une enveloppe gaussienne, tandis qu'il y avait d'autres enveloppes. D'ailleurs, dans les premiers articles de Morlet, il les appelle, pour faire contraste avec toutes ces fonctions-là, « *wavelets of fixed shape* ». Parce que la forme n'était pas la même. L'enveloppe était la même, avant, mais pas la forme.

L'idée qu'il y a la même forme à toutes les échelles, c'est bien cela qui a été associé aux ondelettes, du moins dans notre communauté.

Oui, ondelette à forme fixe. Une fois qu'on sortait de ce cadre où les ondelettes avaient des noms dépendant de l'enveloppe, il n'y avait pas de raison de garder l'appendice *of fixed shape*, puisqu'il n'y en avait pas d'autre.

C'était donc la pensée de Morlet cette idée d'ondelette à forme fixe à toutes les échelles ?

Tout-à-fait, c'était son idée fixe, et il la voulait parce qu'il voulait la précision beaucoup plus étroite à haute fréquence qu'à basse fréquence et donc c'était pour lui évident qu'il avait une nouvelle famille à deux paramètres pour faire des calculs. Il est venu voir Alex. Morlet n'était pas très *articulate* comme on dit en anglais. Quelqu'un lui a dit d'aller voir Alex, et Alex a vraiment compris dans les « rimes de calcul » que Morlet lui montrait qu'en fait il y avait un groupe différent et donc, lui avait les outils pour la transformée continue associée et donc il pouvait faire des états cohérents avec cet autre groupe, et c'est comme ça qu'il y a eu la transformée continue.

Et en fait ce qui s'est passé quand Alex a vu Yves, c'est qu'il a compris qu'on peut tout voir comme une opération de carré intégrable dans notre groupe. Mais ce n'est pas le groupe qui est vraiment important dans les ondelettes, parce que déjà quand on discrétise on n'a pas un sous-groupe, ce qui est différent de la STFT. C'est le fait qu'on a cette espèce de zoom local. Ce n'est pas vraiment la même façon d'utiliser le groupe, disons. Donc c'est encore de l'analyse harmonique, mais différente. Les géophysiciens ont été très frustrés que ce terme qui chez eux était bien défini ait maintenant une signification toute différente.

Et puis la base d'Yves est arrivée, et elle était miraculeuse. Je ne sais pas si tu te souviens mais au début il voulait démontrer que ça n'existait pas, puisque ça n'existait pas en Fourier, et puis il a dérivé des conditions et il est arrivé à quelque chose qui satisfaisait à ces conditions. En fait il s'était inspiré de « *painless* » – voir article ci-dessus – pour ça. Parce que dans « *painless* », ce qui était important c'était d'avoir des choses qui avaient des cosinus et des sinus, donc on utilisait le fait que cosinus carré plus sinus carré était égal à 1. Il a utilisé un peu ce même profil et ça a marché. Mais il y avait des conditions de *cancellation* incroyables, mais évidemment pour lui, en analyse harmonique, on disposait de telles conditions de *cancellation*. Mais c'était un miracle ! Et c'est après avoir rencontré Stéphane Mallat, qu'il voit le tout dans l'idée d'une analyse multi-résolution. Toute cette construction avec des facteurs de phase devenait naturelle, et la base était bien comprise.

Donc l'idée de faire une axiomatique multi-résolution, cela vient de l'interaction avec Stéphane Mallat.

Exactement parce que Stéphane Mallat a rencontré Stéphane Jaffard, qui était étudiant de Yves, Ils avaient été à l'École polytechnique ensemble. Mallat était aux États-Unis et Jaffard en France, mais ils se sont rencontrés pendant les vacances et Jaffard lui a raconté les ondelettes. Mallat a reconnu qu'il y avait des approximations à des échelles différentes. Yves était venu aux États-Unis quelques mois après pour donner les Zygmund lectures à Chicago. Yves m'a raconté qu'ils se sont cloîtrés pendant plusieurs jours dans l'ancien bureau de Calderon, et ils ont vu ensemble qu'ils pouvaient construire cette analyse multi-résolution et que ça cadrait. C'était merveilleux parce qu'il y avait des idées qui venaient d'un peu de partout.

Stéphane connaissait les *Quadrature mirror filters* ?[3]

Non non non non, c'est après, il ne savait pas, mais il connaissait la théorie de la vision. Il y a eu toute cette construction avec les différents espaces d'approximation. Il y a eu une conférence quelque part dans le Périgord, je ne me souviens plus de l'endroit. J'ai vu Yves, et il m'a raconté sur le dos d'une enveloppe l'analyse multi-résolution. Et alors j'étais ébahie évidemment. Il m'a aussi raconté la construction

3. D. Esteban, and C. Galand. « Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes. » ICASSP'77. IEEE *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Vol. 2. IEEE, 1977.

de Battle-Lemarié, et comme quoi elle cadrait aussi dans (l'analyse multi-résolution) mais toutes ces bases, une fois qu'on mettait Haar de côté, avaient un support infini. Il y avait les filtres associés qu'on n'appelait pas encore des filtres parce qu'on ne connaissait pas les *quadrature mirror filters*, on n'avait pas encore fait le rapprochement. C'étaient des filtres infinis : on m'a dit : « en pratique il faudra laisser tomber les queues, alors on perd toutes les propriétés mathématiques : mais c'est comme ça quand on fait les applications. »

Et ça, ça, c'était le déclic pour moi parce que je n'ai jamais cru au fait que pour faire des applications on doit perdre toute la beauté mathématique. Pour les mathématiciens purs, c'était presque une donne.

Il y avait déjà la transformée de Haar ?

Oui mais Haar n'était pas très pratique car il fallait approcher avec des fonctions discontinues. Mais quand la base était continue son support était infini. Là, je suis rentrée et je me suis demandé, si on impose tout le reste, qu'on ait des filtres finis, qu'est-ce qui arrive ? Du coup, parce que toutes les autres constructions étaient faites via des espaces d'approximation des espaces de fonctions, alors les filtres en découlaient.

Mais là je me dis : je veux un filtre. Qu'est ce qui se passe si je me donne un filtre : est-ce que je peux remonter en arrière ? C'est comme cela que ces ondelettes à support compact ont été conçues. On n'a pas de formules analytiques pour elles, au contraire des autres. On ne pouvait pas partir de l'espace de fonctions parce que l'espace de fonctions on ne le construisait jamais. Mais on peut partir des filtres, et dire je veux ça, ça et ça : qu'est-ce qu'il me faut pour avoir les *cancellations* ? Une fois qu'on a les *cancellations*, est-ce qu'on aura une fonction continue ? La régularité des fonctions est liée aux *cancellations*, je l'ai compris plus tard. Donc je remontais en arrière ; et chaque fois ça marchait ![4] Et là ce qui est intéressant c'est que j'étais à Courant à l'époque. J'avais rencontré Robert (Calderbank) et je voulais être aux États-Unis pour voir si ça durait, bon on est mariés depuis presque quarante ans. Donc, j'étais à New York pour cette raison-là, Nous parlons maintenant du milieu des années 80.

À ce moment-là en Belgique, après mon post-doc, si je voulais faire un calcul numérique, il fallait aller dans la salle des terminaux. Et dans la salle des terminaux, il fallait voir s'il y avait une place de libre, et le plus souvent il n'y en avait pas. Alors il fallait remonter avec ses papiers dans son bureau pour revenir une heure plus tard pour essayer encore. À Courant, j'avais un terminal sur mon bureau. C'était bien avant la période des laptops, mais j'avais ce terminal et si je voulais soumettre un job je pouvais le faire de mon clavier. On ne pense pas toujours à l'influence de ces facteurs-là. Mais je n'aurais sans doute pas fait ces travaux si je n'avais pas vu, chaque fois que j'avais un exemple (de filtre), à quoi ressemblait la fonction correspondante. Je pouvais la voir et je pouvais voir qu'elle était continue. Je savais qu'il y avait des choses à démontrer. Le fait de pouvoir les voir, les tracer, etc. a eu une influence. J'ai travaillé sur ça, j'ai travaillé à démontrer qu'elle était continue, puis qu'il y en avait une famille infinie qui avait une croissance plus rapide que linéaire. J'avais écrit à Yves que j'avais une famille infinie. Il m'a écrit que le support devait être en rapport linéaire avec la régularité. J'ai trouvé un exemple, mais c'était, tu vois, l'époque avant les emails. Avec Robert, je pouvais échanger des emails parce que lui était aux Bell Labs et les machines Unix pouvaient correspondre à ce moment-là. Mais seulement les machines Unix. Il y avait aussi Arpanet, mais ça c'était seulement pour les gens qui avaient une *clearance* que je n'avais pas. Pour correspondre avec Yves je lui envoyais de longues lettres et il m'en renvoyait.

Il a gardé tes lettres et il les a publiées.

Oui je sais, avec mon autorisation d'ailleurs. Alors, je les ai construites (les bases d'ondelettes orthogonales à support compact), mais en même temps j'étais en train de projeter notre mariage. On s'est marié ce printemps-là. Je suis rentrée au mois de mars à Yale en visitant Raphy (Coifman) puis je suis rentrée. Il fallait trouver un endroit où se marier, on s'est marié en mai. Les gens venaient me voir et disaient vous voulez vous marier en mai, cette année-ci, c'est maintenant ? J'ai trouvé une maison Art Nouveau, un peu délabrée, mais très belle. C'était une période pleine d'effervescence. C'est à cause du fait que je voulais que l'application marche sans faire des arrondis, sans perdre toutes les propriétés mathématiques. Et ce n'est qu'au moment où j'écrivais cet article-là que quelqu'un m'a parlé des filtres à miroir (*Quadrature mirror filters*, QMF). Et donc on a ajouté qu'il y avait une connexion avec les filtres à miroir, mais on ne le savait pas avant.

4. I. Daubechies. « Orthonormal bases of compactly supported wavelets. » Communications on pure and applied mathematics 41.7 (1988) : 909-996.

Qui te l'a communiqué ?

Je crois que je l'ai appris par deux canaux presque en même temps. Quelqu'un à Bell Labs. J'ai commencé un job à Bell Labs cette année-là et je l'ai appris en mars ou en avril, et Stéphane (Mallat) aussi l'avait. On a pris les filtres de Barnwell. Mais ce qui était important ce n'était pas seulement la quadrature, mais c'était le fait d'avoir de la régularité et de pouvoir le faire à support compact avec de la régularité. Et comme l'article était sur les fonctions : il n'y avait pas de fonctions pour les filtres à miroir, parce qu'eux ne voulaient que les filtres et ne pensaient pas à itérer, c'étaient des filtres discrets.

Il y avait aussi les théories issues de la vision, le *scale space*, dont est dérivée la *Laplacian pyramid* (Burt, Adelson). En fait dans l'article, j'étais partie de Burt et Adelson, car eux ils faisaient des itérations. Ils avaient cette formule, ils voyaient que c'était continu, Burt m'a dit « j'ai demandé à des mathématiciens, et personne ne peut me dire pourquoi cette fonction est belle ! » Et cette fonction était belle parce qu'elle avait la forme spéciale qu'il fallait pour avoir de la continuité. Dans mon article d'ailleurs je commence avec cette fonction. Ici on voit pourquoi elle est belle parce qu'on a ce produit infini en Fourier. On voit qu'il y a de la décroissance en Fourier et donc c'est pour ça qu'elle a de la régularité. Là j'avais le début, le noyau qui a été utilisé (pour ma construction). C'est parce que j'avais compris pourquoi eux avaient de la continuité que j'ai pu le réutiliser.

À ce moment-là la théorie explose, toutes les possibilités de constructions sont explorées, et les ondelettes qui se sont avérées vraiment commodes ce sont les ondelettes bi-orthogonales ? [5]

C'est parce que nous sommes plus tolérants d'artefacts symétriques que non symétriques. On peut se permettre un peu plus d'imprécision quand on a des ondelettes symétriques.

C'est bien toi qui as montré que l'on n'a pas de bases orthogonales symétriques à support compact.

Oui, sauf Haar. Et à support infini, Yves Meyer les avait. On oublie l'orthogonalité, et c'est ce qu'a obtenu Albert (Cohen) avec son étudiant Feauveau. C'était une période très intéressante et les conférences étaient aussi très intéressantes parce qu'il y avait des gens qui venaient de directions très différentes. On rencontrait des gens qu'on n'aurait jamais rencontrés sans cette synthèse. Pendant une dizaine d'années des gens de directions très différentes se voyaient très régulièrement.

La découverte des ondelettes avait des intervalles d'excitation et de désillusion : quand tu trouves quelque chose tu découvres toujours que des gens l'ont trouvé avant.

Sous une forme différente, Yves avait une phrase « on le sait depuis la plus haute antiquité » et je lui disais « mais non, Yves, on savait un aspect ». C'est formidable de relier à l'histoire, mais on comprend les choses d'une façon différente.

Il y avait déjà des constructions de bases d'ondelettes orthogonales...

Oui, il y avait Stromberg. Mais Stromberg lui-même a dit qu'il ne s'était par rendu compte que l'important c'était qu'une seule fonction générait toute la famille. Cela ne l'avait pas frappé comme quelque chose d'important. En fait ses ondelettes à lui, on pouvait les construire comme des filtres IR qui étaient implémentables, alors que celles de Yves ne l'étaient pas.

Cela vous a fait réfléchir à une segmentation excessive de la science ?

Pour moi , cela a toujours été le cas. Quand j'étais en physique maths, j'étais toujours un peu déçue qu'on voie les choses de façon si étroite. Mais c'est toujours le cas. Quand on voit ce qui excite vraiment les gens dans les médailles Fields : il y en a qui sont pour des choses techniques d'une force incroyable. Mais celles qui excitent les gens c'est en général des résultats où quelqu'un a pris un outil d'un domaine et l'a utilisé ailleurs pour faire quelque chose de surprenant. C'est toujours le cas !

Suite et fin au prochain numéro !

5. A. Cohen, I. Daubechies, and J-C. Feauveau. « Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. » *Communications on pure and applied mathematics* 45.5 (1992) : 485-560.

Glossaire

rédigé par Stéphane Seuret

• **Transformée de Gabor.** C'est une transformation de Fourier à fenêtre, l'idée étant d'obtenir sur une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ des informations spectrales qui seraient locales en temps. On commence par localiser la fonction au voisinage de l'instant τ en la multipliant par une gaussienne centrée en τ, puis on effectue une transformée de Fourier de cette fonction localisée. Sa définition formelle est

$$G_f(\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\xi} e^{-\pi^2(t-\tau)^2} dt.$$

Elle a été beaucoup utilisée en traitement du signal, grâce à sa description à 2 paramètres (temps, fréquence) et à l'existence d'une transformée inverse $f(t) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} G_f(\tau,\xi)e^{2i\pi\xi}\, d\tau d\xi$. Il est possible de choisir des noyaux de convolution non gaussiens pour obtenir d'autres transformées de Fourier locales.

• **Frame.** Les frames modélisent un système de représentation redondant, c'est-à-dire qu'elles contiennent plus de fonctions que nécessaire pour représenter tout élément de l'espace. Plus précisément, une famille $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ est une *frame* lorsqu'il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que pour toute $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$A\|g\|_{L^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle g, g_n\rangle|^2 \leqslant B\,\|g\|_{L^2}.$$

Les frames permettent d'introduire un peu de souplesse par rapport aux bases orthonormales.

• **Base de Haar.** Haar cherchait une base hilbertienne de $L^2([0,1])$ telle que, contrairement aux séries de Fourier, les sommes partielles dans cette base d'une fonction f continue convergent uniformément vers f. La réponse est fournie par la base construite à partir de l'ondelette dite de Haar $\psi(t) = \mathbf{1}_{[0,1/2]}(t) - \mathbf{1}_{[1/2,1]}(t)$, et ses versions translatées $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Alors la famille de fonctions $(\psi_{j,k})_{j\,k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$, i.e. toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ se décompose en

$$f(t) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}(f)\cdot\psi_{j,k}(t), \tag{1}$$

où $d_{j,k}(f) = \langle f, \psi_{j,k}\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi_{j,k}(t)dt$ est appelé *coefficient d'ondelettes* de f.

• **Analyse multi-résolution.** Une *analyse multi-résolution* est la donnée d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ et d'une *fonction d'échelle* $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ tels que :

1. $\{\Phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de V_0
2. $f \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}$
3. $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$
4. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Ce concept, dû à S. Mallat et Y. Meyer, est fondamental pour la construction d'ondelettes : en effet, dès que l'on est capable d'en construire une satisfaisant en outre que $\hat{\Phi}$ est continue en 0 et $\hat{\Phi}(0) = 1$, il existe une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (d'intégrale nulle si $\psi \in L^1(\mathbb{R})$) telle que la décomposition (1) est valable avec cette nouvelle fonction ψ.

Les analyses multi-résolution sont utiles en analyse et en traitement du signal, notamment car la projection orthogonale de f sur l'espace V_j fournit une approximation de f à l'échelle 2^{-j} ; dans le cas de la base de Haar, elle est simplement obtenue en remplaçant f sur l'intervalle $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ par sa moyenne sur cet intervalle.

Parfois, là encore pour apporter un peu de flexibilité, on utilise des familles d'ondelettes *bi-orthogonales*, c'est-à-dire qu'au lieu d'une seule ondelette ψ, on utilise un couple $(\psi, \tilde{\psi})$ tel que la première est utilisée pour calculer le coefficient d'ondelettes $d_{j,k}(f)$ et la seconde est utilisée pour la reconstruction (1).

• **Ondelette de Meyer, filtres.** L'ondelette de Meyer est définie grâce à une transformée de Fourier. Soit $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 paire telle que $0 \leqslant \Theta(\xi) \leqslant 1$, $\Theta(\xi) + \Theta(1-\xi) = 1$ pour $\xi \in [0,1]$, décroissante sur $[0,1]$, et $\Theta(\xi) = 1$ pour $\xi \in [0,1/3]$ (donc $\Theta(\xi) = 0$ pour $\xi \in [2/3,1]$), nulle sur $[1,+\infty)$. Posons alors

$$\Phi(t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\Theta(\xi)}\, e^{2i\pi t\xi}\, d\xi.$$

Cette fonction Φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, à dérivées bornées, et vérifie une *équation d'échelle*

$$\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \Phi(2t-n), \text{ où } (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Comme $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Phi}(\xi+m)|^2 = 1$ partout (presque partout est suffisant), un argument classique assure que les translatées $\{\Phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormale, et avec un peu plus de travail, on démontre que Φ engendre une analyse multi-résolution. L'ondelette de Meyer est celle associée à cette fonction d'échelle, et peut par exemple être explicitement définie à partir de (2) par

$$\psi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n+1} a_{1-n} \Phi(2t-n).$$

Les preuves sont fondées notamment sur l'étude des deux séries de Fourier $m_0(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2i\pi n\xi}$ et $m_1(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n+1} a_{1-n} e^{-2i\pi n\xi}$, appelées *filtres miroirs quadratiques*.
Remarquons qu'on peut construire des frames en prenant une union finie de bases orthonormées d'ondelettes.

• **Ondelettes de Daubechies.** Deux propriétés des ondelettes sont fondamentales : la compacité de leur support, et leur nombre de moments nuls. L'importance de la compacité est immédiate lorsque l'on souhaite traiter des données réelles et impose par exemple qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non nuls dans (2). Pour la seconde, ψ possède N moments nuls lorsque $\int_{\mathbb{R}} t^n \psi(t)dt = 0$ pour $n = 0,\ldots N-1$. Cette propriété (facile à voir dans le domaine de Fourier) permet d'annuler les polynômes de degré $\leqslant N-1$, et ainsi le calcul des coefficients d'ondelettes $d_{j,k}(f)$ est insensible aux corrections polynomiales. L'impressionnant résultat d'Ingrid Daubechies est la preuve de l'existence de telles ondelettes, dont le support est compact et qui peuvent avoir un nombre de moments nuls arbitrairement grand (la taille du support est essentiellement proportionnelle avec un facteur 2 au nombre de moments nuls). L'autre point spectaculaire est le calcul explicite des coefficients du *filtre* $(a_n)_n$, qui en rend possible (même facile et rapide) l'implémentation numérique. Le fait que les filtres soient de longueur finie implique que le calcul des coefficients d'ondelettes d'un signal de longueur N s'effectue en $O(N)$ opérations ainsi que sa reconstruction à partir de ces coefficients. Cette amélioration par rapport à la transformée de Fourier rapide est l'une des raisons du succès des ondelettes en traitement du signal et d'image.

Sixième Journée parité en mathématiques : compte rendu

- J.-R. Chazottes
- D. Gayet
- O. Paris-Romaskevich

1. Déroulement et résumé de la journée

La Journée parité de la communauté mathématique a été lancée par l'Association *Femmes et Mathématiques* en 2011. Elle a eu lieu régulièrement à Paris : à l'Institut Henri Poincaré en 2011, 2013, 2016 et 2019, puis à Jussieu en 2022. L'équipe d'organisation de cette année a proposé de faire voyager ces *journées* d'un laboratoire de mathématiques à l'autre afin de faire entendre les réflexions locales et les connecter. C'est l'Unité des Mathématiques Pures et Appliquées de l'Éns Lyon qui l'a accueillie le 29 juin dernier.

Tout au long de la journée que Marie Lhuissier, conteuse-mathématicienne, a animée, la dessinatrice Lison Bernet a fait du live-sketching en contrepoint des exposés tandis que le photographe Bertrand Paris-Romaskevich en a saisi de nombreux instants. Leurs créations illustrent cet article. [1]

Violaine Dutrop, oratrice et Lison Bernet, graphiste en live-sketching

La matinée a été ponctuée par deux exposés importants. Le premier exposé, comme lors des cinq journées précédentes, était celui de Laurence Broze, professeure à l'université de Lille, vice-présidente de *Femmes et Mathématiques*, sur les statistiques de recrutements et d'évolutions de carrière en mathématiques. Nous en faisons une synthèse ci-dessous. A suivi l'exposé de Violaine Dutrop, fondatrice de l'Institut *EgaliGone* à Lyon, autrice de l'essai *Maternité, Paternité, Parité*, paru en 2021, sur la mixité au travail, ses enjeux, ses limites. Elle a posé le cadre de la réflexion sur les inégalités de genre au travail dans le cadre de l'économie capitaliste. Violaine Dutrop a préparé un verbatim de son exposé auquel nous avons ajouté des dessins et des photographies de la journée. C'est un document riche de 21 pages que nous vous invitons à lire en allant sur le site de la Journée. [2]

Après une pause-déjeuner riche en discussions, trois exposés ont décrit des actions de la communauté. Indira Chatterji, professeure à l'université Côte d'Azur, a d'abord présenté le *Forum Parité*,

1. Toutes les photographies sont disponibles : `https://nuage.mathematiquesvagabondes.fr/s/MnZ34L99TznQDZL`
2. Les planches de tous les exposés ainsi que le verbatim de l'exposé de Violaine Dutrop sont là : `http://postes.smai.emath.fr/apres/parite/journee2023/`

fondé en 2011 par Peggy Cénac, Magali Ribot et Barbara Schapira, notamment pour y partager des informations sur les congés maternité. Aujourd'hui on y discute des enjeux genrés dans les carrières des mathématicien·ne·s. Le forum compte environ 300 membres. Un sondage récent (avec un taux de réponse de 37%) a montré une répartition F/H de 64%/36%. Enfin, le forum est suivi et actif : 91% des répondant·e·s lisent les messages de la liste au fur et à mesure qu'ils arrivent.

Les messages contiennent des informations riches et variées (annonces d'actions et de rencontres, de sorties de films/podcasts/livres en lien avec les mathématiciennes, documents historiques, études sociologiques sur le thème genre/sciences) et des discussions ouvertes (comités parité et leur rôle, les comités de sélection qui discriminent, maternité et recherche, etc.). Ce forum reste un lieu d'échanges non anonymes et certaines personnes ne se sentent pas en sécurité pour s'y exprimer. Du reste, le forum n'échappe pas au sexisme bienveillant. Il reste pourtant un lieu de dialogue qui est à notre avis crucial pour faire évoluer nos pratiques et nos mentalités. Les commentaires libres du sondage montrent à quel point cet aspect du forum est apprécié. [3]

Fabien Durand, professeur à l'université de Picardie Jules Vernes et président de la SMF, a ensuite présenté le premier stage *Math C pour L* qui a eu lieu en février 2023 au CIRM, à Marseille, et qu'il a organisé avec Guillemette Chapuisat (professeure à Aix-Marseille Université), Élise Janvresse (professeure à l'université de Picardie Jules Verne) et Gwladys Toulemonde (maître de conférences à l'université de Montpellier). C'est un stage de découverte de la recherche pour les étudiantes en licence de mathématiques. [4] Les activités alternent entre recherche en petits groupes, sport et discussions informelles avec des chercheuses et des chercheurs. La conscience des inégalités sociales dans l'accès aux métiers liés aux mathématiques est présente au moment de la sélection. « Nous avons fait le choix de privilégier les jeunes femmes provenant de milieux dont l'environnement socio-culturel n'est a priori pas propice à la mise en valeur des études et carrières scientifiques.

Autrement dit, les étudiantes dont les parents appartiennent à des classes sociales favorisées ne sont pas prioritaires. Nous choisissons principalement les étudiantes boursières ».

Les témoignages des étudiantes sont éloquents : « J'ai eu le sentiment pendant cette semaine d'appartenir à une communauté mathématique inclusive qui ne demandait pas qui j'étais ni d'où je venais », « Le public 100% féminin du stage m'aura agréablement changé des bancs très masculins que je fréquente habituellement ».

Le besoin pour ce genre de stages est réel : avec 3 fois plus de candidatures que de places (28 places dont 25 pour les boursières), les organisatrices n'ont pas les moyens d'accueillir tout le monde. De plus, ces stages ont un coût entre 9 et 15 mille euros qui est couvert par des appels à projets chronophages. Les financements pérennes manquent et l'organisation repose sur le bénévolat. Mais ces stages se multiplient malgré les difficultés : il y a en à venir à Amiens, Valenciennes, Paris, Rennes et à nouveau à Marseille.

Lors des échanges qui ont suivi l'exposé, quelques questions ont été soulevées par les collègues impliqué·e·s dans ce genre de stages. L'un d'eux a rappelé combien les étudiantes vivent mal de ne pas être recrutées. Une collègue a rapporté le témoignage d'une participante à propos du rythme très intense de ces stages (elle dormait très peu) qui lui a fait perdre pied dans ses études. Comment adapter ces stages pour ne pas exercer une pression excessive sur les filles (déjà omniprésente dans le parcours scolaire) ? Enfin, une collègue rappelle qu'il faut veiller à ne pas reproduire les mécanismes

3. Pour vous abonner : `https://listes.math.cnrs.fr/wws/info/forum-parite`

4. Pour une réflexion sur l'intérêt de la non-mixité de ces stages, voir l'article de Olga Paris-Romaskevich dans la *Gazette* n° 174 (2022), ainsi que sa reprise sur Images des Maths : `https://images.math.cnrs.fr/Vers-une-mediation-en-phase-avec-la-societe-reflexion-autour-des-Cigales.html`

patriarcaux dans l'équipe d'organisation et trouver un équilibre entre deux extrêmes : la charge d'organisation étant portée uniquement par des chercheuses d'un côté ; une équipe d'organisation avec des dynamiques de « boys club » où les chercheuses organisatrices sont privées du pouvoir décisionnel de l'autre.

Enfin, Nina Gasking, chargée de médiation à la *Maison des Maths et Info* (MMI), a présenté les activités de ce lieu de partage des sciences. La MMI accueille chaque année environ 8000 élèves (soit 300 classes), en plus des milliers de personnes venant voir les expositions, participer à la ludothèque ou à des stages. La MMI veille particulièrement à l'inclusion, notamment des filles, tant dans la conception des activités que dans leur animation. Par exemple, une vigilance constante est nécessaire pour éviter que ce soit les garçons qui prennent systématiquement la parole. [5]

D'après les questionnaires remplis à l'issue des visites, le fait qu'il y ait par exemple des femmes qui parlent de mathématiques a un impact certain sur la perception de cette matière par les élèves. Nina Gasking a voulu partager avec l'auditoire ses doutes : faut-il organiser des activités non mixtes à la MMI ? La réponse nous a semblé être largement oui, avec notamment plusieurs expériences relatées par nos collègues qui montrent que les filles sont nettement plus à l'aise sans la présence des garçons. [6] D'ailleurs, depuis, Nina Gasking s'est décidée : la MMI organisera son premier stage réservé aux filles en 2024 !

Sonia Velasco, doctorante à l'université Paris Cité, lors d'un échange

Alice Guillonnet, directrice de recherche au CNRS à l'ÉNS de Lyon et Sylvie Benzoni, professeure à l'université Lyon 1 et directrice de l'IHP, pendant une pause café

Anne Pichon, professeure à l'Institut de Mathématiques de Marseille, une des organisatrices de la Journée parité 2024

5. Pareil pour les grands garçons hein ! Mais la MMI n'est plus là pour surveiller…

6. L'idée n'est bien sûr pas de supprimer la mixité filles / garçons en général, mais de veiller à ce que certaines activités soient non mixtes. L'enquête sociologique de Clémence Perronnet menée lors des stages *Cigales* pour les lycéennes au CIRM dont les résultats seront publiés en février 2024 dans le livre *Matheuses : les filles sont le futur des mathématiques*, confirme encore une fois le besoin des stages non mixtes mais aussi la nécessité de travailler en parallèle sur l'inclusion dans les environnements mixtes.

Une discussion ouverte et riche a clos la journée, puis le flambeau (symbolique) de la Journée parité 2024 a été repris par Marseille, avec ses laboratoires l'Institut de Mathématiques de Marseille et le Laboratoire d'Informatique et Systèmes.

Le soir, une projection du film *Certaines femmes*[7] de Kelly Reichardt était proposée au cinéma Comœdia, en partenariat avec la MMI, dans le cadre de la cinémathèque *Bobines des Sciences* où intervient régulièrement l'une d'entre nous (O. P.-R.) depuis 2018. Le public était composé, à parts égales, de participant·e·s de la journée et spectatrices et spectateurs du cinéma.

La séance était précédée d'une présentation de la journée parité et une introduction aux inégalités de genre, sociales et ethno-raciales dans l'accès aux études en mathématiques. Plus on avance dans le niveau d'études en mathématiques, plus le pourcentage des filles est faible : les lycéennes ont beau représenter 54% des élèves en France, il n'y a pourtant que 40% de filles faisant des Maths en Terminale, 30% de filles en classes préparatoires scientifiques, et 18% de filles dans les grandes écoles scientifiques. Le même phénomène de « tuyau percé » se produit pour les élèves d'origine défavorisée (30% des élèves, 17% en Maths en Terminale, 11% en prépa scientifique, et moins de 10% dans les grandes écoles). Le même phénomène a lieu pour les personnes racisées mais nous n'avons pas de chiffres officiels en France puisque des enquêtes prenant en compte ces aspects sont proscrites. On peut se faire une idée en prenant les statistiques des États-Unis pour comparaison. Les effets des récentes réformes du lycée sur l'accentuation rapide de toutes ces inégalités ont également été montrés.

2. Chiffres et constats de Laurence Broze

La part des femmes en mathématiques à l'université (MCF + PR[8]) en France n'a pas progressé en 25 ans (21% en 1996, 22% en 2021)[9] depuis que Laurence Broze, statisticienne, recueille et analyse ces données avec difficulté, la tâche étant devenue ardue par manque de données nationales depuis la loi relative aux libertés et responsabilités des universités de 2007. Dans son exposé, elle a montré que la situation pour les mathématiciennes va même empirer dans les prochaines années si rien n'est fait.

2.1 – Mathématiciennes dans les universités et au CNRS

Le tableau 1 résume la situation dans les universités françaises en 2021 (les chiffres entre parenthèses indiquant le différentiel par rapport à 2020). On aimerait croire à un lent rééquilibrage amorcé en faveur des femmes PR. On constate une évolution défavorable en ce qui concerne les femmes MCF.

Figure 1 – Les mathématicien·ne·s à l'université (source : DGRH-MESR, 2021)

Section	Hommes	Femmes	Total	% femmes
CNU 25				
MCF	644 (+7)	139 (-10)	783 (-3)	18%
PR	438 (-5)	34 (+3)	472 (-2)	7%
Total	1082 (+2)	173 (-7)	1255 (-5)	14%
CNU 26				
MCF	767 (+8)	395 (+2)	1162 (+10)	34%
PR	513 (-7)	115 (+6)	628 (-1)	18%
Total	1280 (+1)	510 (+8)	1790 (+9)	28%

On entend souvent l'argument qu'il est difficile de recruter les femmes quand les postes manquent. Grâce aux chiffres dont on dispose pour la période 1996 – 2021, cet argument est battu en brèche car il ressort qu'en section 25, la période faste, durant laquelle le nombre de postes allait croissant (1996-2006), n'a profité qu'aux hommes, tant au niveau MCF que PR. Globalement le nombre de femmes recrutées comme MCF ne fait que baisser depuis 1996. En extrapolant selon la pente moyenne entre 1996 et 2021, on arrive à une conclusion frappante : on ne recrutera aucune femme MCF en 2064 en section 25 !

En section 26, la situation est différente pour les MCF : même si la période glorieuse en question a plus bénéficié aux hommes qu'aux femmes, il y a depuis 2006 un très lent rapprochement de pourcentages de femmes et d'hommes, avec la parité atteinte en... 2099 (encore une fois, répète Laurence Broze, si on ne change rien). Pour les PR, la période de croissance en question n'a, comme en section 25, bénéficié qu'aux hommes.

7. Ce film ne traite pas les questions de sciences. Il dresse le portrait de quatre femmes dans l'Amérique profonde avec un positionnement humaniste affirmé.
8. MCF = maître de conférences, PR = professeur·e.
9. Ces chiffres sont à comparer aux 40% de femmes en poste dans l'ensemble des disciplines.

Laurence Broze a également présenté les chiffres officiels du CNRS : entre 1996 et 2021, le pourcentage de femmes en mathématiques (section 41) a fluctué entre 15 et 19,6%, voir le tableau 2.

Figure 2 – Mathématicien·nes au CNRS (source : bilan social de 2021 du CNRS

Section 41	Hommes	Femmes	Total	% femmes
CR et DR	307	75	382	19,6%

2.2 – Du côté des doctorantes

Le rapport du Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche (MESR)[10] montre l'évolution entre 2011/12 et 2021/22 de la proportion des doctorantes dans les disciplines scientifiques[11]. D'abord, il y a moins de femmes que d'hommes parmi les doctorants sauf en biologie, médecine et santé. La part des femmes en première inscription en thèse baisse de 1 point (de 46 % en 2011 à 45% à 2021) mais la part des femmes dans les soutenances progresse de 2 points (de 42 à 44%) dans l'ensemble des disciplines.

Le fait marquant est que notre discipline reste la seule (parmi les disciplines scientifiques) où la part des femmes diminue, que ce soit en terme de première inscription (de 29 à 21 %) ou de soutenance (de 25 à 21%). En physique, par exemple, la situation reste stable – 27% de soutenances de thèse par des femmes en 2011 et 2021.

2.3 – La communauté partagée sur la mobilité mais unie pour que les choses changent

En amont des *Assises de Mathématiques*[12] de novembre 2022, un questionnaire autour des sujets de parité a été diffusé par voie électronique. Les 800 répondant·e·s représentent une partie non négligeable de la communauté (27 % environ).

L'absence de mixité en mathématiques dans les universités et les organismes de recherche leur pose réellement problème : en particulier, 69% des répondant·e·s se disent prêt·e·s à soutenir des actions favorisant le recrutement des femmes (71% des femmes et 63% des hommes). Une analyse plus fine des réponses multiples montre que 48% des répondant·e·s sont favorables à l'existence de postes, supplémentaires ou pas, réservés aux femmes (56% des femmes et 41% des hommes).

Une autre partie du questionnaire montre des réponses significativement différentes entre les femmes et les hommes (voir figure 3).

Figure 3 – Estimez-vous qu'en raison de votre sexe…

10. `https://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/fr/vers-egalite-femmes-hommes-chiffres-cles-2023`
11. Hors sciences humaines et sociales, dans la nomenclature du MESR.
12. Le document contenant les travaux préparatoires des groupes de travail des Assises et les informations de cette section du compte-rendu est disponible : `https://www.assises-des-mathematiques.fr/infos-pratiques/actualites/travaux-preparatoires-des-assises`. Il mériterait d'être mieux connu, diffusé et discuté.

En ce qui concerne la mobilité pour le recrutement, les réponses ne diffèrent pas significativement entre les femmes et les hommes, *sauf* en ce qui concerne la règle de mobilité actuellement appliquée. Parmi celles et ceux qui ont un avis, 39% des hommes sont favorables à la mobilité imposée pour tous les recrutements (PR et MCF). Cette opinion n'est partagée que par 25% des femmes. Et 30% des hommes sont favorables à la mise en place de mesures permettant de pallier les effets négatifs de la mobilité imposée, comme des « repyramidages » réservés prioritairement aux femmes – mesure qui est soutenue par 50% d'entre elles. – Les moyennes sur la communauté sont sur la figure 4.

FIGURE 4 – À propos de la mobilité pour les recrutements MCF et PR

	% des répondant-es
J'y suis favorable, dans toutes les situations (MCF et PR)	24%
J'y suis favorable uniquement pour le le niveau MCF	33%
J'y suis défavorable, dans toutes les situations	12%
Je suis favorable à la mise en place de mesures permettant de pallier les effets négatifs de cette pratique, comme des repyramidages réservés prioritairement aux femmes	37%
Je n'ai pas d'avis à ce sujet, ou je suis d'avis partagé	24%
Pas de réponse	4%

Un autre indicateur de l'état de la communauté mathématique est l'habilitation à diriger des recherches (HDR). Seuls 27% des MCF/CR [13] en sont titulaires. Au moment du questionnaire, 18% des répondant·e·s déclaraient préparer leur HDR, 70% étant des hommes. Parmi celles et ceux qui ont renoncé à préparer une HDR, 70% sont des femmes.

Les derniers chiffres présentés par Laurence Broze concernaient ceux relatifs aux « repyramidages » (cf. le compte-rendu de la cinquième journée parité dans la *Gazette* nº 174 (2022) pour le contexte). Selon les chiffres de 2021, si on note R le ratio #PR/(#MCF + #PR), alors que la cible globale du MESR est R = 40%, on a R = 38% en section 25 mais R = 20% pour les femmes et R = 40% pour les hommes, tandis qu'en section 26, on a R = 35% mais R = 23% pour les femmes et R = 40% pour les hommes. Il n'y a malheureusement aucune pression de la part du MESR pour réserver les postes en repyramidage aux femmes, notamment en mathématiques.

13. CR=chargé·e·s de recherche au CNRS.

Depuis 30 ans, Laurence Broze observe et quantifie l'absence de changement pour les mathématiciennes

2.4 – Que faire ?

Laurence Broze rappelle la nécessité impérieuse de réfléchir à la création de postes spécifiques (sans employer le mot « quota »), ce qui suscite, en France, des réactions très contrastées, tant chez les femmes que chez les hommes, mais qui ne débouche pas sur des discussions pragmatiques. Pendant son exposé, elle s'est adressée aux femmes de la salle en leur demandant de cocher l'une des réponses suivantes :

- je préfère ne pas devenir PR parce que je suis une femme ;
- je préfère devenir PR parce que je suis une femme.

Si nous revenons aux chiffres pour les universités, une manière de lire le tableau de la figure 1 est la suivante. Supposons que le stock de postes soit constant. Pour atteindre la parité femme/homme en section 25, il faudrait donc redéployer 252 postes de MCF et 202 postes de PR. En section 26, ce serait 186 postes de MCF et 199 postes de PR. Si on se contentait de vouloir atteindre les chiffres de l'ensemble des disciplines (c.-à-d. 45% de femmes MCF et 29% de femmes PR), il faudrait alors redéployer 213 postes de MCF en 25 (128 en 26) et 103 postes de PR en 25 (67 en 26).

Et Laurence Broze de conclure : « La situation actuelle semble extrêmement stable (avec quelques nuances), c'est une sorte de point d'équilibre d'un système qui résulte de rapports sociaux de sexe. »

Mais nous sommes persuadé·e·s que le changement doit d'abord venir de nous-mêmes. Cessons tout comportement et remarque sexistes et paternalistes, même s'il paraît bienveillant. Il est crucial de soutenir (en y adhérant !) l'association *Femmes et Mathématiques* qui œuvre quotidiennement, depuis 1978, pour les droits des mathématiciennes – une espèce manifestement en danger.

Cela étant dit, les actions individuelles resteront insuffisantes face à une situation aussi critique. Nous pensons que des mesures drastiques et structurelles, – certaines pouvant n'être que transitoires –, sont aujourd'hui indispensables. Nous rêvons d'une communauté mathématique où la photo de groupe de toute conférence ressemblerait à celle la figure 5.[14] Rendre cela possible dépend avant tout de notre volonté et nos efforts collectifs.

Figure 5 – Photo de groupe de la Journée Parité 2023 sur la place de l'Éns Lyon

Jean-René Chazottes

Centre de Physique Théorique de l'École polytechnique
jeanrene@cpht.polytechnique.fr

Jean-René Chazottes est directeur de recherche au CNRS, directeur de son laboratoire, membre du conseil d'administration de la SMF depuis 2017. Ses recherches portent sur les propriétés stochastiques des systèmes dynamiques hyperboliques/chaotiques, l'écologie mathématique et la physique statistique rigoureuse.

Damien Gayet

Institut Fourier, université Grenoble Alpes
damien.gayet@univ-grenoble-alpes.fr

Damien Gayet est professeur à l'Institut Fourier à Grenoble. Ses travaux concernent la géométrie aléatoire, en particulier la topologie des lieux d'annulation de fonctions lisses aléatoires.

Olga Paris-Romaskevich

Institut de Mathématiques de Marseille
olga.romaskevich@math.cnrs.fr

Olga Paris-Romaskevich est chargée de recherche au CNRS, membre élue du conseil scientifique de l'INSMI et co-fondatrice de l'association Mathématiques Vagabondes. Ses recherches portent sur les systèmes dynamiques en lien avec la physique, d'abord chaotiques et depuis quelques années, d'entropie nulle, notamment les billards dans les pavages.

L'équipe d'organisation de la journée menée par Olga Paris-Romaskevich voudrait particulièrement remercier les gestionnaires de l'UMPA qui ont fait un travail remarquable pour l'aider à mettre en place cette journée. Un immense merci à toutes les oratrices pour leurs exposés remarquables et aux participant·e·s de la journée pour leurs interventions constructives. Olga Paris-Romaskevich remercie Clémence Perronet, sociologue, pour ses données sur les inégalités d'accès aux mathématiques. Nous remercions l'Insmi et l'Institut Camille Jordan pour le soutien financier, et l'UMPA pour le soutien logistique. Merci à *Femmes et Mathématiques* pour son soutien et nos combats communs. Merci à *Mathématiques Vagabondes* pour son soutien en matière de pages web.

14. Parité atteinte (dépassée, en fait) : 28 femmes et 22 hommes inscrit·e·s à cette journée.

Nouvelles de la section 41 du CNRS : 2021-2023

• S. Sabourau
• N. Tholozan

La section 41 du Comité national de la recherche scientifique, intitulée *Mathématiques et interactions des mathématiques*, est chargée principalement de l'évaluation scientifique concernant les mathématiques au CNRS, et en particulier de l'étape d'admissibilité des concours de recrutement de chercheurs et chercheuses. Elle travaille de manière indépendante en étroite collaboration avec l'INSMI qui anime la politique scientifique. Plus précisément, la section 41 donne des avis (consultatifs) sur les points suivants :

– recrutements CR/DR : jury d'admissibilité (différent du jury d'admission)
– avancements de grade
– évaluation des chercheurs et chercheuses
– RIPEC C3 (première fois cette année)
– médailles du CNRS
– accueils en délégation CNRS
– écoles thématiques
– chercheurs/chercheuses invitées (postes rouges - invitations de 3 mois)
– évaluations de structures : UMR (HCERES), IRL, RT (GDR), etc.

La section se réunit lors de deux sessions – au printemps et à l'automne – et avant la session de printemps en ce qui concerne le jury d'admissibilité pour les concours CR et DR.

Composée de 21 membres, la section a été renouvelée en 2021 pour un mandat de 5 ans. En juin 2023, elle était composée de : Jean-François Aujol, Pierre Barthélemy, Isabelle Bellier, Oriane Blondel (membre du bureau), Antoine Chambaz, Elena Di Bernardino, Stéphane Druel, Grégory Ginot, Yves Guiraud (membre du bureau), Stella Krell, David Lannes (membre du bureau), Isabelle Liousse, Anne Pichon, Éric Ricard, Simon Riche, Tanguy Rivoal, Stéphane Sabourau (président) Jean-Marc Sac-Épee, Jérémie Szeftel, Nicolas Tholozan (secrétaire scientifique), Ariane Trescases (en remplacement de Maya de Buhan depuis 2023).

1. Critères de la section

La section adopte pour l'ensemble de son mandat ses critères pour l'évaluation des chercheurs et chercheuses, l'avancement de grade et les concours CR et DR. Ces critères sont publiés sur le site du CNRS et sur celui de la section [1].

2. Concours

Le jury d'admissibilité pour les concours CR et DR du CNRS en mathématiques est constitué des membres rangs A et B de la section 41. Il procède à des auditions pour les concours CR (pas d'auditions pour le concours DR) devant des sous-jurys non thématiques représentant plusieurs domaines des mathématiques. Ces auditions ont eu lieu à Sorbonne Université (campus de Jussieu) en 2022 et à l'IHP en 2023 (la section tient à remercier ces deux établissements pour leur hospitalité). À l'issue de ces auditions, une liste d'admissibilité est établie pour chaque concours. La section souhaite souligner que les listes des candidats et candidates auditionnés ou déclarés admissibles sont établies en fonction de critères et de profils spécifiques. Par conséquent, elles ne peuvent être utilisées comme référence dans un contexte différent ni pour d'autres concours. Un jury d'admission distinct et indépendant du jury d'admissibilité établit un classement final à partir de la liste d'admissibilité pour chaque concours. Il est rappelé que le jury d'admission peut

1. https://cn.math.cnrs.fr/

modifier le classement du jury d'admissibilité. L'affectation des lauréates et lauréats est gérée par l'INSMI.

Cette année, l'INSMI a ouvert des concours CR et DR coloriés géographiquement pour une affectation prioritaire dans des unités comprenant peu de chercheurs et chercheuses CNRS. L'institut envisage de poursuivre le fléchage géographique de certains postes de CR et DR pour l'an prochain.

Pour le recrutement DR, la politique du CNRS est de privilégier les candidatures des chercheurs et chercheuses ayant déjà soutenu leur HDR.

Depuis quelques années, le CNRS permet de recruter des chercheuses et chercheurs de renommée internationale au grade de DR en réservant des postes à cet effet en plus des postes affichés sur les concours généraux. Les candidatures se font sur le concours général de DR de la section, mais les candidates et candidats classés par la section sont ensuite comparés à ceux proposés par les autres instituts du CNRS. Il n'est donc pas garanti que les candidates et candidats classés par la section soient finalement retenus. Un élément dans les arbitrages au niveau du CNRS est le soutien en termes de moyens (création de postes de PR/MCF, financements de post-doc ou de thèse, etc.) de l'université d'accueil.

Les lettres de recommandations éventuelles – ces dernières n'étant en aucun cas obligatoires – doivent être déposées sur le site du CNRS du concours avant la clôture des inscriptions au concours. Aucune lettre parvenue en retard, ou envoyée directement au président ou au secrétaire scientifique de la section, ne pourra être acceptée.

En fonction des décrets d'application qui doivent être publiés d'ici septembre, il est possible que la réforme des retraites, qui modifie à la fois l'âge minimum et l'âge maximum de départ à la retraite, ait pour conséquence une réduction du nombre de départs à la retraite dans les prochaines années, ce qui pourrait entraîner une diminution du nombre de postes ouverts au concours.

Bilan du concours 2022. En 2022, 19 postes étaient ouverts au concours, dont 6 DR et 13 CR :

– DR 41/01 : 6 postes de directeurs ou directrices de recherche de deuxième classe ;
– CR 41/02 : 11 postes de chargé·e de recherche de classe normale ;
– CR 41/03 : 2 postes de chargé·e·s de recherche de classe normale sur des projets d'interaction des mathématiques avec d'autres disciplines.

Les données relatives à l'ensemble des concours CR et DR sont présentées dans le tableau 1.

Dans ce tableau, le nombre de femmes candidates ou sur liste principale d'admissibilité est indiqué entre parenthèses. L'expérience (sous forme de fourchette minimum-maximum) des personnes sur liste principale d'admissibilité est indiquée en nombre d'années par rapport à la thèse.

Liste des personnes recrutées :

– DR 41/01 (6 postes + 1 poste supplémentaire*) : Karim Adiprasito*, Gérard Freixas i Montplet, Paolo Ghiggini, Daniel Han-Kwan, Danela Oana Ivanovici, Matthew Morrow, Jean-Christophe Mourrat ;
– CR 41/02 (11 postes) : Paul Dario, Arthur Forey, Louise Gassot, Fabio Gironella, Giada Grossi, Rémi Jaoui, Thomas Lanard, Cyril Letrouit, Jialun Li, Baptiste Louf, Maria Yakerson ;
– CR 41/03 (2 postes) : Badr-Eddine Cherief-Abdellatif, Alexandre Poulain.

Sur les 13 personnes recrutées CR, deux sont de nationalité étrangère avec une thèse étrangère et dix ont soutenu leur thèse dans un laboratoire de la région parisienne (ce nombre particulièrement élevé cette année interroge). On observe également que la très grande majorité des personnes ayant effectué leur études en France est passée par une ÉNS ou l'École polytechnique. Les personnes recrutées DR (hors poste supplémentaire) sont issues des laboratoires CMLS, IMJ (2), LJLL, LMJL, UMPA.

Tableau 1 – Données relatives à l'ensemble des concours CR et DR 2022

Concours CR/DR 2022	CR 41/02-03	CR 41/02	CR 41/03	DR 41/01
Candidatures examinées	225 (32F, 14%)	210 (27F, 13%)	96 (12F, 13%)	62 (7F, 11%)
Candidatures de CR				39 (3F, 8%)
Admissibles en liste principale	13 (3F, 23%)	11 (3F, 27%)	2 (0F, 0%)	6 (1F, 17%)
Expérience	1-5	1-5	1-2	11-18

Deux CR dont le projet de recherche s'inscrit dans des unités rattachées à l'INSMI à titre principal et un chercheur rattaché à la section 41 ont été recrutés par la commission interdisciplinaire 51 :

- DR 51/01 : Benjamin Mauroy ;
- CR 51/02 : Renaud Bastien, Félix Cheysson.

Bilan du concours 2023. En 2023, 28 postes étaient ouverts au concours, dont 11 DR et 17 CR :

- DR 41/01 : 6 postes de directeurs ou directrices de recherche de deuxième classe ;
- DR 41/02 : 5 postes de directeurs ou directrices de recherche de 2e classe « coloriés ». En priorité :
  - 4 directeurs ou directrices de recherche de 2e classe dont le projet de recherche s'inscrit dans l'une des unités suivantes : laboratoire de mathématiques Blaise Pascal à Clermont-Ferrand, Institut Denis Poisson à Orléans-Tours, laboratoire de mathématiques de Bretagne Atlantique à Brest-Vannes, laboratoire de Mathématiques et Applications à Poitiers, laboratoire de mathématiques et de leurs applications à Pau ;
  - 1 directeur ou directrice de recherche de 2e classe dont le projet de recherche s'inscrit dans l'une des unités suivantes : Institut de mathématiques de Bourgogne à Dijon, laboratoire Amiénois de mathématique fondamentale et appliquée à Amiens, laboratoire de mathématiques Raphaël Salem à Rouen.
- CR 41/03 : 9 postes de chargé·e·s de recherche de classe normale ;
- CR 41/04 : 6 postes chargé·e·s de recherche de classe normale « coloriés ». En priorité :
  - 1 chargé·e de recherche de classe normale dont le projet de recherche s'inscrit dans l'une des unités suivantes : laboratoire de mathématiques de Versailles, analyse, géométrie et modélisation à Cergy, laboratoire de mathématiques et modélisation d'Évry ;
  - 3 chargé·e·s de recherche de classe normale dont le projet de recherche s'inscrit dans l'une des unités suivantes : laboratoire angevin de recherche en mathématiques à Angers, laboratoire de mathématiques et applications à Poitiers, Institut Denis Poisson à Orléans-Tours, laboratoire de mathématiques de Reims, laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme à Caen, laboratoire de mathématiques et de leurs applications à Pau ;
  - 2 chargé·e·s de recherche de classe normale dont le projet de recherche s'inscrit dans l'une des unités suivantes : laboratoire de mathématiques de Bretagne Atlantique à Brest-Vannes, laboratoire de mathématiques Blaise Pascal à Clermont-Ferrand, laboratoire Amiénois de mathématique fondamentale et appliquée à Amiens, laboratoire de mathématiques de Besançon à Besançon.
- CR 41/05 : 1 poste de chargé·e de recherche de classe normale sur le thème « cryptographie », dont le projet de recherche s'inscrit dans une unité rattachée à l'INS2I à titre principal ;
- CR 41/06 : 1 poste de chargé·e de recherche de classe normale dont le projet de recherche s'inscrit dans une unité rattachée à l'INP à titre principal.

Les données relatives à l'ensemble des concours CR et aux concours CR non fléchés thématiquement sont présentées dans le tableau 2 :

Tableau 2 – Données relatives à l'ensemble des concours 2023 CR et aux concours CR non fléchés thématiquement

concours CR 2023	CR 41/03-06	CR 41/03-04
Candidatures examinées	243 (41F, 17%)	235 (40F, 17%)
Admissibles en liste principale	17 (3F, 18%)	15 (3F, 20%)
Expérience	2-6	2-5

Tableau 3 – Données concernant chacun des concours CR 2023

concours CR 2023	CR 41/03	CR 41/04	CR 41/05	CR 41/06
Candidatures examinées	229 (40F, 17%)	160 (23F, 14%)	7 (2F, 29%)	21 (5, 24%)
Admissibles en liste principale	9 (3F, 33%)	6 (0F, 0%)	1 (0F, 0%)	1 (0F, 0%)
Expérience	2-5	2-5	2	6

Tableau 4 – Données concernant les concours dr 2023

concours dr 2023	dr 41/01-02	dr 41/01	dr 41/02
Candidatures examinées	70 (7F, 10%)	67 (7F, 10%)	27 (2F, 7%)
Candidatures de cr	42 (4F, 10%)	42 (4F, 10%)	13 (0F, 0%)
Admissibles en liste principale	11 (2F, 18%)	6 (2F, 33%)	5 (0F, 0%)
Expérience	10-23	11-23	10-19

Celles concernant chacun des concours cr sont présentées dans le tableau 3. Enfin, celles concernant les concours dr sont présentées dans le tableau 4.

Dans chacun de ces tableaux, le nombre de femmes candidates ou sur liste principale d'admissibilité est indiqué entre parenthèses. L'expérience (sous forme de fourchette minimum-maximum) des personnes sur liste principale d'admissibilité est indiquée en nombre d'années par rapport à la thèse.

La section observe un nombre de candidatures significativement moins élevé sur le concours dr colorié géographiquement que sur le concours dr général.

Les listes principales d'admission diffèrent de celles d'admissibilité suite au recrutement d'une candidate sur un concours de la section 07 et au désistement d'un candidat pour un poste à l'étranger. Listes des personnes admises :

- dr 41/01 (6 postes + 1 poste supplémentaire*) : Jérôme Droniou*, Mireille Capitaine, Olivier Dudas, Valentin Feray, Aline Lefebvre-Lepot, Sobhan Seyfaddini, Pierre Weiss ;
- dr 41/02 : Rémi Coulon, Gabriel Dospinescu, Thomas Dreyfus, Adrien Dubouloz, Grégoire Nadin ;
- concours cr 41/03 (9 postes) : Gregorio Baldi, Timothée Bénard, Barbara Dembin, Guillaume Dubach, Marina Ferreira, Antoine Julia, Tudor Padurariu, Guillaume Remy, Federico Scavia ;
- cr 41/04 (6 postes) : Martin Averseng, Malo Jezequel, Eliot Pacherie, Massimo Pippi, Arthur Soulié, Changzhen Sun ;
- cr 41/05 (1 poste) : Jean Kieffer ;
- cr 41/06 (1 poste) : Luca Lionni.

Sur les 17 personnes admises cr, quatre sont de nationalité étrangère avec une thèse étrangère et huit ont soutenu leur thèse dans un laboratoire de la région parisienne. On observe également que la très grande majorité des personnes ayant effectué leur études en France est passée par une Éns ou l'École polytechnique. Les personnes admises dr (hors poste supplémentaire) sont issues des laboratoires cmap, i2m, iecl, imb (Bourgogne), imj, imt (2), irma, irmar, ljll, umpa.

Les listes principales d'admission pour les postes des sections 02 et 07 pour des cr dont le projet s'inscrit dans une unité rattachée à l'insmi à titre principal sont :

- cr 02/03 : Blagoje Oblak ;
- cr 07/05 : Eugenio Pozzoli.

Deux personnes dont le projet de recherche s'inscrit dans une unité rattachée à l'insmi à titre principal et un chercheur rattaché à la section 41 sont sur les listes principales d'admission de la commission interdisciplinaire 51 :

- dr 51/01 : Laurent Jacob ;
- cr 51/02 : François Bienvenu, Michèle Romanos.

Recrutement de cr en situation de handicap. Chaque année, le cnrs ouvre des postes réservés au recrutement de chercheurs et chercheuses en situation de handicap par voie contractuelle [2]. Les personnes intéressées par cette voie d'accès sont invitées à prendre contact avec le directeur ou la directrice du laboratoire où elles souhaiteraient être affectées afin d'effectuer une demande d'ouverture de poste auprès de l'insmi. En pratique, il est conseillé d'entreprendre les démarches en début d'année universitaire. Le dossier à monter comprend habituellement un cv, une description des travaux et du projet scientifique, les rapports de thèse et de soutenance, les exemplaires de la thèse et des travaux, et des lettres de recommandation éventuelles.

En 2022, une personne (une femme) a été recrutée par voie contractuelle de cette manière.

Chaires de professeur junior. La section a voté à l'unanimité la motion suivante le 8 juin 2022 :

2. https://carrieres.cnrs.fr/actualites/recrutement-de-chercheurs-et-chercheuses-par-la-voie-contractuelle/

« La section 41 du CoNRS réaffirme son attachement au recrutement sur concours national des chercheurs et chercheuses, et refuse de participer aux jurys de recrutement sur CDD des “chaires de professeur junior” du CNRS. Ces chaires de professeur junior conduisent à la possibilité de titularisation directe en tant que directeur ou directrice de recherche en dehors de la voie nationale par concours et introduisent des différences de traitement dans la voie d'accès au corps des directeurs de recherche. La section 41 réclame que les moyens destinés à ce dispositif de chaires junior servent plutôt à créer des postes pérennes de chercheurs et chercheuses qui suivent les voies nationales de recrutement défendues par le CoNRS, offrant les garanties les plus sûres de qualité et d'équité. »

3. Avancements de grade

Deux nouveautés ont eu lieu en 2022. D'une part, la création d'un échelon contingenté HEB pour les CRHC (comme c'est le cas pour les MCF-HC). D'autre part, la fin du contingentement pour les avancements DRCE (comme c'est le cas pour le corps des PR).

La section est attentive à l'équilibre des dossiers entre les différentes missions des CR. Pour le passage CRHC, les candidatures des CR aux échelons 9 ou 10 sont actuellement privilégiées. La section encourage les CR ayant atteint ces échelons à postuler.

Au niveau DR, le passage DR1 est difficile et celui DRCE1 est très difficile du fait du faible nombre de promotions possibles. Même si la fin du contingentement devrait conduire à une légère augmentation du nombre de promotions DRCE accordées, la pression devrait rester forte pendant encore longtemps. Au niveau DR, parmi les dossiers présentant des résultats scientifiques marquants, la priorité est accordée à ceux avec un fort investissement en termes de responsabilités collectives et d'encadrement doctoral.

Les délibérations ont eu lieu lors de la session d'automne. Pour les promotions, plutôt qu'une description exhaustive des résultats obtenus, il est demandé de faire une présentation générale des travaux et de mettre en avant 5 à 10 productions scientifiques, notamment depuis la dernière promotion, en expliquant ce choix et en décrivant plus précisément leur contenu et leur portée scientifique. La section favorise la qualité des travaux plutôt que leur quantité.

Les données relatives aux avancements de grade sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Pour chaque grade, le nombre de femmes candidates ou promues est indiqué entre parenthèses.

L'ancienneté (sous forme de fourchette minimum-maximum) est indiquée en nombre d'années par rapport à la dernière promotion, ou par rapport à la thèse pour le passage CRHC.

Promotions CRHC

- 2021 : Serguei Barannikov, Isabelle Catto, Marc-Antoine Coppo, Bertrand Lemaire, Vuk Milisic ;
- 2022 : Stéphane Guillermou, Jeremy Lovejoy, François Ollivier.

Promotions CRHC-HEB

- 2022 : Corinne Blondel, Gilles Cassier, Carl Graham, Michel Gros, Pierre Lochak.

Promotions DR1

- 2021 : Thomas Alazard, Gaëtan Chenevier, Sébastien Gouëzel, Sophie Grivaux, Colin Guillarmou, Patricia Reynaud-Bouret ;
- 2022 : Frédéric Chapoton, Yves De Cornulier, Luis Manuel Lopes Neves de Almeida, Franck Picard, Olivier Saut.

2021	CRHC	DR1	DRCE1	DRCE2
Candidatures	9 (1F, 11%)	24 (2F, 8%)	23 (4F, 17%)	4 (1F, 25%)
Promotions	5 (1F, 20%)	6 (2F, 33%)	3 (1F, 33%)	2 (1F, 50%)
Ancienneté	20-32	5-7	7-10	2-6

2022	CRHC	CRHC-HEB	DR1	DRCE1	DRCE2
Candidatures	7 (0F, 0%)	13 (2F, 15%)	16 (0F, 0%)	22 (4F, 18%)	4 (1F, 25%)
Promotions	3 (0F, 0%)	5 (1F, 20%)	5 (0F, 0%)	5 (1F, 20%)	4 (1F, 25%)
Ancienneté	23-33	5-6	5-10	7-13	1-3

Promotions drce1

- 2021 : Anne Marie Aubert, Thierry Bodineau, Didier Bresch ;
- 2022 : Ofer Gabber, Philippe Le Floch, Frank Loray, Laurent Manivel, Ellen Saada.

Promotions drce2

- 2021 : Christian Bonatti, Alice Guionnet ;
- 2022 : Yves Benoist, Antonin Chambole, Damien Gaboriau, Catherine Goldstein.

4. Évaluations des chercheurs et chercheuses

Suivant la vague d'évaluation hceres de leur laboratoire, les chercheuses et chercheurs doivent remettre :

- un compte-rendu annuel d'activité (crac) ;
- un rapport à mi-vague (sans projet de recherche) portant sur les 5 derniers semestres ;
- un rapport à vague (avec projet de recherche) portant sur les 10 derniers semestres.

La section émet un avis (favorable, différé, réservé, alerte, insuffisance professionnelle) et écrit un rapport sur l'activité de chaque chercheuse ou chercheur. Il est également possible d'être évalué par deux sections. Les rapports de section peuvent contenir des recommandations. Il convient donc de les lire.

Dans le cas d'un avis réservé ou d'alerte, un suivi post-évaluation est mis en place impliquant la délégation régionale du cnrs et l'insmi pour trouver, dans le cadre d'un dialogue constructif avec les chercheurs ou chercheuses en difficulté, des solutions adaptées à la situation. Dans le cas d'un avis d'insuffisance professionnelle, une procédure auprès de la commission administrative paritaire du cnrs est mise en place pouvant conduire à un licenciement. Il faut recueillir deux avis favorables consécutifs pour que le suivi post-évaluation soit levé.

Afin de résorber le décalage des évaluations des cr/dr et des laboratoires suite à la Covid-19, il n'y a pas d'évaluations des chercheurs et chercheuses en 2023.

5. ripec-c3

La composante 3 du ripec est une prime individuelle d'un montant de 3 500€/an attribuée au mérite pour 3 ans qui remplace la pedr. L'objectif du cnrs est qu'en 2027, 55% des corps des chercheurs en bénéficie. Cette année, environ 24 primes devraient être attribuées aux cr et dr de l'insmi (en hausse depuis l'année précédente). Il faut ajouter à cela les primes attribuées automatiquement aux cr recrutés en 2022.

En 2023, la section a décidé de participer à l'évaluation des dossiers de candidatures. Les délibérations ont eu lieu lors de la session de printemps. Il y avait 69 candidatures réparties de la façon suivante :

- 39 cr, soit 57% (dont 8 femmes, soit 21%) ;
- 30 dr, soit 43% (dont 6 femmes, soit 20%).

La section a classé 31 dossiers (une liste non ordonnée de 20, suivie d'une liste ordonnée de 11) répartis de la façon suivante :

- 19 cr, soit 61% (dont 4 femmes, soit 21%) ;
- 12 dr, soit 39% (dont 3 femmes, soit 25%).

Si les perspectives annoncées par le cnrs permettent d'espérer un système de prime plus en phase avec la qualité des dossiers, à l'heure actuelle, ce dernier reste très compétitif et de nombreux dossiers méritants n'ont pas pu être classés par la section.

Parmi les dossiers présentant une recherche de grande qualité, la section a pris le parti de classer en priorité cette année :

- les candidates et candidats pouvant obtenir la prime au titre de l'ensemble des missions d'un chercheur au sens au sens de l'article L411-1 du code de la recherche (développement des connaissances ; transfert et leur application dans les entreprises, et dans tous les domaines contribuant au progrès de la société ; information des citoyens dans le cadre de la politique nationale de science ouverte et la diffusion de la culture scientifique et technique dans toute la population, notamment parmi les jeunes ; participation à la formation initiale et à la formation continue ; construction de l'espace européen de la recherche et participation aux coopérations européennes et internationales en matière de recherche et d'innovation ; administration de la recherche ; expertise scientifique). L'implication est mesurée au regard du corps d'appartenance et de l'ancienneté ;
- les candidates et candidats dont les fonctions et responsabilités ne donnent pas lieu au versement de la composante fonctionnelle c2 du ripec, comme celles de du, responsable d'erc, etc. ;

– les candidates et candidats dont les activités ne donnent pas lieu par ailleurs à un complément de revenus conséquent, comme celles de chargé.e.s de cours à l'École polytechnique, professeur.e.s attaché.e.s dans une ÉNS, etc. ;
– les candidates et candidats n'ayant pas été proposé·es pour une promotion cette année.

Nous espérons que la communauté mathématique sera compréhensive vis-à-vis de ces critères qui, s'ils peuvent prêter à débat, nous semblent aller dans le sens d'améliorer les conditions salariales d'un maximum de chercheuses et chercheurs. Ces critères pourraient évoluer dans les années à venir si le nombre de primes RIPEC-C3 à répartir augmente comme annoncé. Les décisions finales sont prises par le CNRS sur proposition de l'INSMI.

Les dossiers de candidature devraient inclure une brève description de l'activité de recherche (2-3 pages) dans le CV et se limiter à la période de référence (soit les quatre dernières années en ajoutant 18 mois par congé de maternité).

6. Médailles du CNRS

En réponse à la commande de l'INSMI, la section 41 propose chaque année quatre noms pour la médaille de bronze et deux noms pour la médaille d'argent (à parité). La sélection finale est effectuée en comité de direction du CNRS.

Les lauréates et lauréats des deux dernières années sont :

– Bronze 2022 : Penka Georgieva, Sepideh Mirrahimi ;
– Argent 2022 : Bertrand Maury ;
– Bronze 2023 : Javier Fresán, Élise Goujard ;
– Argent 2023 : Bertrand Toën.

En 2022, la liste des personnes médaillées ne correspond que partiellement aux propositions de la section.

7. Délégations CNRS

La section 41 est consultée sur les demandes d'accueil en délégation au CNRS des enseignantes-chercheuses et enseignants-chercheurs demandant une affectation dans une unité de l'INSMI. Les décisions sont prises par le CNRS après proposition des instituts, en s'appuyant sur les avis des sections, de l'unité d'accueil et des établissements des candidats et candidates.

Outre la qualité scientifique du dossier, le projet de recherche est un élément déterminant du processus d'évaluation de la section. Ce projet doit donc être clairement décrit. La section prend également en compte sur les cinq dernières années :

– le nombre d'heures d'enseignement effectuées ;
– le nombre de délégations/CRCT obtenues ;
– l'implication dans les tâches d'intérêt collectif (selon l'ancienneté).

Une attention particulière est portée aux situations suivantes :

– projet de séjour long ou mobilité géographique ;
– finalisation d'HDR ;
– retour de congé maternité, parental ou maladie longue ;
– mobilité thématique, par exemple l'interdisciplinarité ;
– développement de collaborations avec des entreprises ;
– activités importantes de diffusion des mathématiques ;
– tâche collective où aucune décharge n'est prévue ;
– préparation d'un projet ERC.

Les délégations peuvent également être un moyen d'aider les collègues EC à redynamiser leur recherche.

Le nombre de demandes en mathématiques est au plus bas (198 en 2022, 221 en 2023) alors que le nombre de délégations accordées à l'INSMI est fonction de la pression et que le nombre de demandes augmente dans les autres instituts. La section encourage vivement les enseignants-chercheurs et enseignantes-chercheuses à soumettre régulièrement leurs candidatures afin de préserver le nombre significatif de délégations dont bénéficie traditionnellement notre communauté. Les collègues dont la demande d'accueil en délégation n'a pas été retenue sont invités à ne pas se décourager et à postuler à nouveau.

8. Chercheuses et chercheurs invités (postes rouges)

Lors de leur demande de moyens au CNRS, les unités ont la possibilité de demander des financements pour l'invitation de chercheurs et chercheuses en poste à l'étranger, pour une durée de trois mois. Les principaux critères d'évaluation reposent sur la qualité du dossier scientifique des personnes invitées et sur le projet de recherche qu'elles présentent. Le projet de recherche doit impliquer au moins un membre de l'unité d'accueil. Bien qu'une demande puisse se limiter à une collaboration entre l'invité et son hôte, les projets présentant une dimension collective sont particulièrement appréciés. Il est important de souligner que les invitations de chercheuses et chercheurs invités ne sont pas destinées à remplir le rôle d'un post-doctorat.

9. Écoles thématiques

Les écoles thématiques sont des rencontres scientifiques comportant des cours de niveau recherche destinés aux chercheuses et chercheurs, enseignantes-chercheuses et enseignants-chercheurs organisées dans le cadre de la formation continue des personnels CNRS. Le format colloque est par conséquent exclu. La contribution du CNRS a vocation à financer la participation des personnels CNRS. Ainsi, même si les écoles thématiques sont ouvertes aux doctorants et doctorantes, la participation du CNRS n'a pas vocation à les financer directement. Les dossiers d'écoles thématiques sont soumis à l'avis de la section lors de la session d'automne, après présélection par l'INSMI, et parfois plusieurs échanges pour cadrer le dossier. La section se prononce sur les aspects scientifiques et pas sur le montant attribué. Son avis est attendu sur la pertinence de la thématique par rapport au périmètre de l'INSMI, la cohérence des contenus proposés, le choix des intervenants, le programme proposé et le vivier du public visé, notamment parmi le personnel CNRS.

En hommage à André Haefliger 1929-2023

pour Minouche

André Haefliger a vécu et travaillé presque toute sa vie non loin de Nyon, sa ville natale. C'est sans doute cet enracinement profond qui lui a permis, véritable citoyen du monde, de voyager et de rayonner presque partout pour le plus grand bénéfice de l'université de Genève, où il était devenu professeur dès 1962. Les cinq textes qui suivent [1] donnent une idée de sa personnalité, de son influence et de ses liens privilégiés avec la France.

M. Chaperon et F. Laudenbach

François Laudenbach, université de Nantes

Ils étaient trois, Alain, Michel, François [2], que Laurent Schwartz avait soudés dans les mathématiques et avait placés comme doctorants dans l'équipe de topologie dirigée par Jean Cerf à Orsay. Ils y avaient découvert les fibrés et leurs classifiants avec Larry Siebenmann, les feuilletages et leurs dynamiques avec Harold Rosenberg. C'est lui qui les entraîna vers leur première *rencontre mathématique* dans un lieu isolé et perché du Massif Central, au centre de conférences de l'observatoire du Mont Aigoual. Le 1er juin 1969 [3], après quelque sept cents kilomètres de route depuis Paris, ils tombent sur André Haefliger expliquant à Harold, tous les deux debout devant un tableau noir, son classifiant des feuilletages singuliers qui allait nous occuper une semaine.

André Haefliger nous accueille les bras ouverts, comme de vieilles connaissances, « Sur quoi travaillez-vous ? » nous demande-t-il pour mieux nous connaître. Mais nous sommes intimidés, et répondons comme des gamins. En fait, André faisait tout pour ne pas être intimidant, il s'effaçait sauf absolue nécéssité mathématique. Au cours de cette rencontre, ce sont surtout ses élèves Jean-Philippe Buffet et Jean-Claude Lor qu'il met en avant. Cette semaine cévenole va marquer un tournant dans les relations d'André et du trio sus-nommé.

L'année suivante, André fait l'honneur au Centre de Mathématiques créé par Schwartz en 1965 de venir y présenter, en primeur à l'Ouest, ce qui deviendra peu après le *h*-principe de Gromov. André a pu lire cette toute première version russe grâce à la traduction de sa femme Hermina (appelée Minouche). J'ai un beau souvenir des exposés d'André donnés dans des baraquements de chantier à la place même de l'actuelle caserne de pompiers rue du Cardinal Lemoine (Paris Ve). Bel exemple de ce qu'Étienne Ghys a exprimé avec le titre « André Haefliger, grand passeur de mathématiques » de son papier paru dans *Le Monde* du 22 mars 2023.

Je saute les années, René Thom (1923-2002), grand ami d'André depuis leurs années strasbourgeoises, nous a quittés, le CD-ROM des œuvres complètes de Thom est paru. André ne s'en satisfait pas, il découvre des inédits dans les archives de Thom à l'IHÉS et tient à une édition classique des *œuvres mathématiques* de Thom. Dans ce but, André réunit un comité éditorial auquel j'ai la chance d'être adjoint à partir de l'automne 2011.

Je revois le bistrot de la rue des Fossés Saint-Bernard où nous sommes entassés. La conversation tourne autour des inédits. J'accepte de tenter la saisie de ces manuscrits de l'écriture de Thom ; je ne connaissais que ses « pattes de mouches » à la craie au tableau noir de l'IHÉS. La première version dactylographiée remonte au 23 novembre 2011, *dixit* mon ordinateur.

De nouveau, je saute beaucoup de choses dont l'invitation merveilleuse d'André et Minouche à ve-

1. Dans l'ordre chronologique des premières rencontres avec André Haefliger.
2. Alain Chenciner, Michel Herman, François Laudenbach.
3. Jour du premier tour des élections présidentielles françaises après la démission du Général De Gaulle de son mandat de Président de la République.

nir passer un week-end dans leur maison à la vue inoubliable sur le Lac Léman et le Mont Blanc. Je mets surtout en avant le travail passionnant que fut cette édition commentée des articles de Thom (trois volumes), tout juste achevée pour les 90 ans d'André. J'avoue avoir vécu dans la crainte qu'André n'en voie pas le bout.

Outre les inédits, il m'est revenu de commenter la toute première Note aux Comptes Rendus [4] de Thom et d'esquisser un historique de la théorie de Morse et de ses prolongements par Andreas Floer. Nous discutions nos contributions en réunion du comité éditorial. André et Minouche y assistaient. Je me rappelle comment André m'avait gentiment corrigé sur ma première version puis, la fois suivante, avait exprimé sa satisfaction sur la seconde version.

Parce qu'avec l'âge la passion me prend de revenir sur des classiques, y compris lorsqu'ils sont mathématiques, je voudrais souligner deux textes d'André qui me fascinent littéralement. Le premier est son exposé 339 du Séminaire Bourbaki, *Travaux de Novikov sur les feuilletages*, dont toute une partie repose sur l'étude qu'André avait menée sur les *cycles évanescents*. Le second est son chapitre *Homotopy and Integrability* dans le volume 197, *Manifolds-Amsterdam 1970*, de la fameuse série Lecture Notes in Mathematics de Springer-Verlag.

C'est un grand ami, presqu'un père, que j'ai perdu ce 7 mars 2023.

Marc Chaperon, université Paris Cité

Bien que j'aie entrevu André au séminaire Thom à partir de 1974, mon premier vrai souvenir de lui est l'école d'été du cime que j'ai suivie en 1976 à Varenna sur le lac de Côme. Intitulée *Differential Topology*, elle portait avant tout sur les feuilletages et André y était roi : il a donné un très beau cours, *Differential Cohomology*, où il était beaucoup question de son fameux classifiant $B\Gamma$, l'homologie de celui-ci a fait l'objet d'un cours plus que parfait de John Mather et nous avons eu droit à un stupéfiant numéro de funambule – malheureusement non rédigé – de William Thurston, qui dansait au-dessus d'abîmes sans jamais y tomber. Cette prestation

A. Haefliger avec Minouche et J.-P. Serre à Zürich en 2007

4. Académie des Sciences, Paris 1949.

extraterrestre nous a pour la plupart dissuadés de feuilleter mais André nous a fortement influencés par sa conception ludique quoique sérieuse de la vie, donc des mathématiques : outre que nous nous sommes bien amusés [5], nous n'avions pas peur de lui poser des questions stupides, son écoute étant aussi bienveillante qu'attentive.

C'est en 1986 au Mexique que nous sommes vraiment devenus amis, parce que Hermina (Minouche) Haefliger, Suzanne Thom et Élisabeth s'activaient ensemble pendant que leurs maris faisaient les congressistes, mais aussi parce que je préparais le grand colloque de 1988 en l'honneur de René Thom [6] dont, en l'absence de Charles Ehresmann, André avait été en quelque sorte le premier élève à Strasbourg pour sa thèse.

En septembre 2011, il nous a lancés dans une grande aventure : l'édition *Urtext* commentée des œuvres mathématiques complètes de Thom. Le bureau de celui-ci à l'IHÉS venait en effet d'être vidé, révélant de très nombreux documents qu'Aurélie Brest s'employait à classer dans le sous-sol de l'institut. André y avait découvert « de véritables trésors » et m'a demandé de coordonner le comité de rédaction que nous avons constitué ensemble [7].

L'entreprise a demandé beaucoup plus de temps – dix ans – et d'énergie que prévu, la publication des trois volumes par la Société Mathématique de France dans la collection *Documents mathématiques* s'échelonnant de 2017 à 2022. Les inédits recèlent effectivement bien des trésors et nos commentaires éclairent, je crois, cette œuvre visionnaire, parfois controversée.

J'ai souvent accompagné au piano Minouche, qui joue de l'alto, et André. Merveilleux violoniste, ancien élève d'Arthur Grumiaux, il avait une passion pour la musique comme Hassler Whitney, dont il avait été l'assistant et, à l'alto, le partenaire de quatuor à Princeton de 1959 à 1961. Nous avons joué pour la dernière fois ensemble il y a cinq ans [8] : des sonates de jeunesse de Mozart, miracle musical où André restait miraculeusement juste.

Ce grand mathématicien demeurera pour nous un modèle insurpassable d'attention aux autres, de droiture, de modestie et de joie de vivre. C'était un juste et nous l'aimions.

Christian Bonatti, Institut de mathématiques de Bourgogne

1983 ou 1984, je ne suis pas sûr. Je venais d'avoir le premier résultat de ma thèse sur les feuilletages. Harold Rosenberg, mon directeur de thèse, me dit qu'André Haefliger est à l'IHÉS pendant quelques jours. Je devrais aller le voir.

Haefliger, pour moi, c'était l'auteur de « *Variétés feuilletées,* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1962) » mais aussi du redoutable « *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes,* Commentarii Mathamatici Helvetici (1958) ». Haefliger, c'était une référence, un savant comme dans l'imaginaire populaire, pour moi qui ne savais pas encore que j'appartenais à ce même monde.

Bref, j'ai pris mon courage à deux mains et lui ai téléphoné. Il m'a tout de suite mis à l'aise, m'a donné rendez-vous, et je ne me souviens pas des mots mais je sais qu'au bout de ce coup de fil, j'étais surpris de constater que nous nous tutoyions déjà. Je suis donc allé le voir à l'IHÉS et il m'a demandé de lui raconter mon résultat. Bien sûr, je craignais son « jugement » mais (je vais arrêter de dire « Haefliger ») André me dit ... arrête un peu, pas si vite, c'est compliqué ce que tu fais là. Je dus lui ré-expliquer, et quand j'arrivai à l'argument principal il me dit : « mais c'est très joli ça ! ». Comme je parlais de mes difficultés à comprendre les structures abstraites des articles sur le sujet, il insista : « Non, non ce n'est pas important, ce ne sont que des structures vides de sens ... c'est bien plus important ce que tu fais ! ».

Comme pratiquement tous les chercheurs, j'avais (et j'ai toujours) un complexe d'imposteur. Recevoir ces encouragements de la part d'André m'a soutenu, m'a permis de passer outre mes doutes.

5. Élisabeth, ma femme, et moi logions dans un ancien palace dont les chambres immenses mais glaciales offraient une vue sublime sur le lac. Le réceptionniste-bagagiste-liftier-patron de l'établissement parlait toutes les langues et, en tant que maître d'hôtel, décrivait invariablement le plat de pâtes au nom ronflant figurant au menu en ces termes : « Ce sont – comment dire ? – des spaghetti à la tomate. »

6. « L'homme le plus intelligent que j'aie connu », disait André.

7. André Haefliger, Marc Chaperon, Alain Chenciner, François Laudenbach, Jean Petitot, Bernard Teissier, David Trotman, plus Jean Lannes et Pierre Vogel dans le volume I. L'ouvrage a aussi bénéficié des contributions souvent très substantielles de Norbert A'Campo, Sara Franceschelli, Ilia Itenberg, Krzysztof Kurdyka, Gwénaël Massuyeau, Valentin Poénaru, Robert Roussarie, David Spring, Tadashi Tokieda et Takashi Tsuboi. Sans compter les suggestions très précieuses de Patrick Popescu-Pampu comme directeur de collection.

8. Dans leur belle maison de Prangins sur le lac Léman.

C'est toujours avec ce souvenir en tête que je parle aux jeunes chercheurs, tentant de rendre maladroitement cette bienveillance qui m'a été si précieuse.

Quelques mois plus tard, j'avais soutenu ma thèse et ... j'étais en « congé sans solde pour convenance personnelle » : il n'y avait aucun poste à l'université, j'avais échoué au concours CNRS où il y avait alors cinq places et je ne voulais pas être affecté dans un lycée. Je suis donc chez mes parents, plus précisément chez une amie, Bernadette, qui deux ans plus tard sera ma femme, quand le téléphone sonne. Les parents polonais de cette amie parlent mal le français, mais après quelques instants ils me disent que c'est pour moi. André me proposait un « demi-poste d'assistant à l'université de Genève », à partir de ... tout de suite.

Le temps de faire les bagages et André m'attendait à la gare de Genève avec sa voiture. André vit ma réaction de surprise et, quelques temps plus tard, lors d'une soirée chez lui, il se moqua de mon hésitation devant le joyeux fouillis de son auto alors qu'au contraire, moi qui étais plein de préjugés sur la propreté d'usage en Suisse, l'état de sa voiture venait de me rassurer et de me mettre à l'aise.

Les huit mois passés à Genève ont été une expérience lumineuse, éclairée en particulier par ces invitations à Prangins où André et Minouche nous accueillaient Éliane, Ana Maria, ses étudiantes, et moi. Instants de pur bonheur où l'on pouvait parler de tout, souvent de musique, avant de prendre quelques temps à parler de mathématiques.

Je termine par une anecdote que je ne connais que parce que lui-même et Minouche, et aussi d'autres personnes au Brésil, me l'ont racontée. Cette histoire fait partie de mon imaginaire personnel sur André. Lui et Minouche étaient allés au Brésil, à la PUC de Rio, invités par Paul Schweitzer (Padre Paul) et Fredi Palmeira, je crois. Paul Schweitzer organisait des randonnées dans la « floresta da Tijuca » , en particulier une grimpette au Pico do Papagaio (ne m'en veuillez pas si c'était la Pedra da Gavea). En bon Suisse, André, les grimpettes (mille mètres de montée) il connaissait bien mieux que la troupe de mathématiciens qui formait le groupe hétérogène en randonnée. Le voilà qui grimpe en tête et, dans la descente, il prend les devants et arrive avec pas mal d'avance. Attendant donc tranquillement que le groupe arrive, il demande un rafraîchissement local typique du Brésil. Maintenant, la Caïpirinha est connue dans le monde entier mais, à l'époque, personne ne connaissait. Donc il boit cette boisson au fort goût de citron vert, il fait chaud, il est en sueur, c'est glacé et très rafraîchissant. Et pas cher. Donc il en commande une autre. Le détail qui passe inaperçu, c'est que la Caïpirinha est très forte en alcool, caché par le citron vert et dont le sucre amplifie l'effet. Combien en aura-t-il bues en attendant le groupe ? L'histoire ne le dit pas, mais Minouche m'a dit que ce fut l'unique fois de sa vie où elle aura vu André pompette, pour ne pas dire pire.

Le 28 janvier de cette année 2023, André et Minouche répondaient, toujours avec la même gentillesse, à ma lettre où je leur envoyais une photo de ma dernière peinture, en vœux de nouvelle année.

Le 27 février, un jeune chercheur, Mehdi Yazdi, m'envoyait son travail, me signalant qu'il utilisait de façon essentielle mon unique papier avec André, « *Déformations de feuilletages,* Topology (1990) » . Je lui répondis de l'envoyer aussi à André, que cela lui ferait plaisir. Il le fit presqu'aussitôt mais je ne crois pas qu'André l'aura reçu.

Éliane Salem, Sorbonne Université

Je mesure la chance que j'ai eue d'étudier, dans les années 80, à la Section de Mathématiques de Genève. Mon premier contact avec André a été lorsque j'ai suivi son cours de licence. L'assistant était Vaughan Jones [9] qui terminait alors sa thèse avec André. La clarté du cours d'André, sa personnalité chaleureuse combinée au charisme de Vaughan ont décidé de mon avenir. L'ambiance à la Section de Mathématiques était effervescente : les tout jeunes étudiants que nous étions furent conviés à la soutenance de thèse de Vaughan et ce fut un grand moment de fête. J'ai été attirée par cette atmosphère familiale, internationale, du plus haut niveau mathématique.

La Section de Mathématiques, fondée par André avec (je le cite) « l'aide de de Rham et de Claude Weber », était petite par sa taille mais André et Michel Kervaire attiraient les visiteurs de renom, qui faisaient un détour par Genève pour discuter avec eux. Nous les retrouvions au Colloquium du jeudi, où les interventions d'André (assis toujours en retrait) telles des flèches, permettaient souvent au conférencier de penser un peu différemment et d'éclaircir un point obscur pour nous étudiants. Nous apprenions souvent autant des questions concises et pénétrantes d'André que de l'exposé lui-même.

9. Médaille Fields 1990.

André s'intéressait à beaucoup de domaines des mathématiques. Sa perspicacité attirait les jeunes mathématiciens, avec qui il était très généreux de ses idées. À l'époque où j'ai commencé à travailler avec André, nous étions sept étudiants en thèse sur des sujets variés et éloignés les uns des autres : Pierre-Yves Gaillard sur la transformée de Poisson de formes différentielles, Marc Troyanov sur les surfaces riemanniennes à singularités coniques, Lucy Moser sur les plongements normaux de SL_2/Γ, Quach Ngoc Du sur les immersions d'orbifolds, Ana Maria Porto sur les pseudogroupes localement (G,Γ) principaux et Daniel Mall sur les feuilletages holomorphes des variétés de Hopf.

Lorsque j'ai commencé ma thèse sur les feuilletages riemanniens j'ignorais qu'André était considéré comme un des pères de la théorie des feuilletages. Je ne connaissais les feuilletages qu'au travers du passage d'invités ou des post-docs : Takashi Tsuboi et les feuilleteurs japonais, Étienne Ghys, Vlad Sergiescu et Yves Carrière du groupe de Gilbert Hector, Grant Cairns et Vincent Cavalier anciens étudiants de Pierre Molino, Marcel Nicolau, Xavier Gomez-Mont et bien d'autres.

Le papier fondateur sur les feuilletages riemanniens avait été celui de Bruce Reinhart paru en 1959 [10]. Plus tard, Pierre Molino avait obtenu un théorème de structure des feuilletages riemanniens sur les variétés complètes [11].

André pensait que le faisceau structural en algèbres de Lie de Molino pouvait être directement associé au pseudogroupe d'holonomie du feuilletage. Comme le pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage riemannien est un pseudogroupe d'isométries locales, agissant sur une transversale au feuilletage, j'ai commencé par démontrer un théorème qui généralisait au cas des pseudogroupes le théorème de Myers-Steenrod sur les groupes d'isométries (tout groupe d'isométries d'une variété compacte est un groupe de Lie). J'ai montré que tout pseudogroupe d'isométries locales complet (dans un sens à définir) est un pseudogroupe de Lie [12]. P. Molino avait montré que par passage à un fibré des repères, on pouvait se ramener à une fibration de Lie. Un résultat de « dévissage » sur le pseudogroupe d'holonomie analogue à celui de P. Molino, permettait de retrouver le faisceau structural d'algèbres de Lie. Pour un feuilletage riemannien sur une variété compacte, nous avons décrit avec André la restriction du pseudogroupe d'holonomie à l'adhérence d'une feuille. Nous avons donné une classification complète des pseudogroupes d'holonomie de feuilletages riemanniens dans le cas d'une variété compacte simplement connexe en petite codimension, et avons montré que les restrictions des pseudogroupes d'holonomie aux adhérences de feuilles sont données par des actions de sous-groupes denses de tores sur des orbifolds.

Par la suite, les travaux d'Ana Maria Porto ont permis, dans le cas particulier des feuilletages riemanniens sur des variétés complètes, de décrire l'espace classifiant du groupoïde d'holonomie introduit dans le célèbre papier d'André de 1984 [13].

André était très souriant et son rire était vraiment communicatif. Il a fait des années de travail ensemble, dans son bureau de la rue du Lièvre, une expérience lumineuse. Il allait au cœur du problème. Les calculs étaient peu nombreux, toujours très précis et rigoureux, en appoint d'une grande conceptualisation, avec une idée de départ toujours géométrique.

Dans toutes les activités de la Section, les visiteurs et professeurs invités, les séminaires des Plans-sur-Bex, les cours du 3e cycle romand à Lausanne et à Berne, André coordonnait, s'investissait et servait de phare. Son aura donnait l'impulsion, la direction. Il avait la hauteur de vue et la compréhension profonde des divers sujets de mathématiques qui en font au-delà de ses publications un très grand mathématicien pour la vie mathématique en Suisse et au-delà. Son épouse Minouche a beaucoup contribué par son intérêt chaleureux, son hospitalité et sa générosité à tisser des liens durables avec les collègues mathématiciens.

La personnalité d'André, son enthousiasme, sa cordialité, son investissement envers les jeunes chercheurs, son ouverture d'esprit, ont permis, avant les réseaux européens, d'établir des liens avec des chercheurs du monde entier, ravivés encore par son goût des voyages et de la musique qu'il partageait avec Minouche. C'est aussi ce côté universaliste dans les mathématiques et dans la vie qui m'ont énormément marquée. Je remercie Jean-François Mattei et Ana Maria Porto qui ont partagé avec moi leurs souvenirs d'André et ont participé à l'élaboration de ce texte.

10. *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. Math. (2) 69, 119-132 (1959).
11. *Études de feuilletages transversalement complets et applications*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 10, 289-307 (1977).
12. *Une généralisation du Théorème de Myers-Steenrod aux pseudogroupes d'isométries*, Annales de l'institut Fourier, tome 38, (2), 185-200 (1988).
13. *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Structure transverse des feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque 116, 70-97 (1984).

Athanase Papadopoulos, CNRS Strasbourg

Ma première rencontre avec André fut sans doute à Toulouse, en février 1982, lors d'un colloque sur le thème *Structure transverse des feuilletages*. J'étais étudiant en thèse à Orsay avec François Laudenbach. J'ai gardé le souvenir de deux rencontres à ce colloque : André Haefliger et David Epstein. J'étais timide mais j'ai pu leur parler. Je travaillais sur la théorie de Thurston des surfaces, et l'espace des feuilletages mesurés était au centre de mes préoccupations. Les feuilletages avec structure transverse étaient dans l'air du temps, Haefliger s'y intéressait de près, et Epstein était plongé dans la théorie de Thurston. Haefliger m'a demandé de lui envoyer une copie de ma thèse quand elle serait rédigée. Je l'ai fait et, en décembre 1983 quelques semaines après la soutenance, il m'a invité pour un mois à Genève.

La Section de mathématiques est un endroit inoubliable ; c'était la première fois que j'étais invité comme mathématicien. J'y ai connu Kervaire, Hausmann, Ronga, Weber et d'autres mathématiciens, dont un certain nombre de jeunes ; je me souviens d'Antonio Costa, Ana Maria Porto, Xavier Gomez-Mont, Michel Boileau, Shalom Eliahou, Eliane Salem et Marc Troyanov. J'ai revu plusieurs d'entre eux plus tard, certains au Mexique, où Xavier m'avait invité l'année suivante. Marc est devenu un ami et un collaborateur.

À Genève, André m'invitait parfois dans son bureau, ou bien nous allions au café. Nous bavardions de mathématiques, mais aussi de musique, de ce qu'il jouait et de ses enfants – l'un est violoncelliste. J'étais comblé par son ouverture et sa gentillesse. Au long des années, il m'a invité au moins deux fois chez lui à Prangins près de Nyon. Son épouse et lui recevaient merveilleusement bien. C'est chez eux que j'ai rencontré pour la première fois Takashi Tsuboi, revu ensuite à Strasbourg, et, longtemps après, au Japon ; il se rappelle toujours ce dîner. Je me souviens d'une discussion pendant laquelle André disait qu'il travaillait en écoutant de la musique.

J'ai revu André à Orsay en 1989, il faisait partie du jury de ma thèse d'État. Entre temps, je m'étais impliqué pleinement dans la théorie de Thurston, la géométrie et topologie des surfaces et des variétés de dimension trois. C'est l'occasion pour moi de rappeler que Thurston a beaucoup reçu d'André. D'abord en théorie des feuilletages, sur laquelle Thurston a travaillé au début des années 1970 ; l'un de ses résultats fondamentaux concerne l'intégrabilité des *structures de Haefliger*, et le résultat principal de son premier article publié concerne l'espace classifiant pour les feuilletages singuliers, construit par Haefliger. Mais aussi, et surtout, je crois que c'est avec son travail sur les feuilletages que Thurston a commencé à réfléchir aux structures géométriques, une notion qui doit tant à ses lectures des travaux de Haefliger et qui trouve son origine chez Ehresmann.

Je suis repassé plusieurs fois par Genève, où j'ai parlé au séminaire. Ensuite, André m'emmenait au café, et on discutait là-bas. La dernière fois, je me souviens de conversations sur la géométrie métrique, un domaine sur lequel nous travaillions tous les deux.

À Strasbourg, en 2016, j'ai organisé une rencontre consacrée aux travaux de Thom et j'avais invité André. Il avait proposé de faire un exposé sur la correspondance (échanges épistolaires) de Thom. Il est tombé malade quelques jours avant la conférence et n'a pas pu venir. À la place, il a envoyé un de ses amis-collègues, Daniel Amiguet, qui s'est parfaitement fondu dans la conférence qu'André aurait faite. Mais André me manquait.

J'avais parfois de ses nouvelles par François Laudenbach, qui le rencontrait régulièrement à Paris pour le projet, initié par André, d'éditer les œuvres mathématiques de Thom, et par Norbert A'Campo qui voyait le couple Haefliger de temps en temps à Bâle lorsqu'ils venaient rendre visite à leurs enfants et petits-enfants.

Un dernier souvenir : j'étais en Suisse, sur le quai d'une gare, un train était à l'arrêt, j'ai aperçu André à l'intérieur, j'ai voulu monter dans le train pour lui serrer la main, j'ai hésité, et je n'ai pas osé monter, le train repartait dans la minute qui suivait et j'avais peur d'être bloqué à l'intérieur. Maintenant, je regrette de ne pas être monté dans ce train.

Sa disparition fut un choc pour moi comme pour d'autres mathématiciens. Je conserve surtout l'image d'une personne lumineuse, pleine de savoir-vivre et extrêmement gentille.

Instructions aux autrices et auteurs

Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Dupliprint – 733 rue Saint Léonard – 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.