SOMMAIRE DU N^{o} 103

Éditorial

Vous recevez aujourd'hui avec la *Gazette* le numéro spécial en hommage à René Thom, un grand mathématicien et un grand visionnaire qu'il ne faudrait pas oublier trop vite. Saluons le travail éditorial remarquable d'Alain Chenciner et Marc Chaperon, merci à eux. Nous remercions les personnes qui ont bien voulu collaborer à cet hommage.

Félicitations à notre présidente Marie-Françoise Roy qui vient de recevoir le prix Irène Joliot Curie !

Nous vous souhaitons à toutes et tous une bonne et heureuse année 2005.

— *Colette Anné*

Mot de la Présidente

Je souhaite adresser mes vœux les plus chaleureux à tous et à toutes en 2005. Qu'elle vous apporte bonheur sur le plan personnel et réussite sur le plan professionnel.

Ayant assisté avant hier à la remise de la Médaille d'Or du CNRS à Alain Connes, il m'a semblé utile de diffuser par la *Gazette* le discours que François d'Aubert ministre délégué à la Recherche. Qu'on y trouve un hommage aussi appuyé et bien documenté aux mathématiques françaises m'a paru de bon augure pour l'année qui s'annonce.

Marie-Françoise Roy

Discours de François d'Aubert
Ministre délégué à la Recherche
à l'occasion de la cérémonie de remise de la Médaille d'Or du CNRS à Alain Connes, le mercredi 15 décembre 2004

Messieurs les Présidents,
Monsieur le Directeur Général,
Mesdames et Messieurs les Directeurs,
Mesdames et Messieurs les Professeurs,
Mesdames et Messieurs,

Je suis très heureux d'être associé, et avec moi le Ministère en charge de la recherche, à cette cérémonie visant à vous honorer, cher Alain Connes, parce que nous vous sommes tous redevables de ce que vous avez fait pour la science et pour la France.

La médaille d'Or du CNRS récompense, chaque année, une personnalité exceptionnelle de renommée internationale qui a participé activement au rayonnement de la recherche.

Elle récompense aujourd'hui en vous, cher Alain Connes un mathématicien qui est — il faudra bien que vous mettiez aujourd'hui en sommeil votre modestie naturelle — l'un des plus grands de notre temps. Permettez-moi de vous féliciter très chaleureusement.

Votre carrière est jalonnée des récompenses les plus prestigieuses

Cette médaille d'or, qui avant vous a distingué Jean-Pierre Serre en 1987, et Henri Cartan en 1976, s'ajoute à la longue liste des récompenses que vous avez accumulées au cours de votre exceptionnelle carrière. Élève de l'École normale supérieure de Paris de 1966 à 1970, chercheur au CNRS de 1970 à 1974 puis de 1981 à 1984 — entre temps vous avez enseigné à l'université Paris 6 —, vous occupez depuis 1984 la chaire d'Analyse et Géométrie du Collège de France et vous êtes également Professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques depuis 1979. Vous avez été élu membre de l'Académie des sciences en 1983, et membre étranger de nombreuses académies des sciences : Danemark, Norvège, Canada, États-Unis, Russie. En fait, vous avez collectionné les prix, les médailles et les titres honorifiques au sein des organismes et des universités les plus renommés. C'est pourquoi parmi les prix qui ont récompensé vos travaux, je ne citerai que les plus prestigieux, la médaille Fields en 1982, et le Prix Crafoord en 2001.

Vous présentez, Alain Connes, une qualité essentielle, qui est de posséder une vision d'ensemble des mathématiques et des différents domaines scientifiques qu'elles irriguent

Mon propos n'est pas de parler en détail du contenu de vos recherches, — j'en serais bien incapable — mais je voudrais souligner que vous faites partie des grands esprits dont la vision unificatrice transcende les clivages entre les différentes branches des mathématiques, et aussi entre disciplines, puisqu'on retrouve le plus souvent dans les problèmes posés par la physique la source de votre inspiration. Les mathématiques sont, il est vrai, depuis toujours au centre d'un réseau d'interactions avec les autres disciplines. Galilée a dit que « le livre de la nature est écrit en langage mathématique », et le physicien d'origine hongroise Eugène Wigner parlait de la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature », idée qui est confirmée par le développement de la physique moderne. Les deux grandes théories physiques nées au début du XX^{e} siècle, la théorie de la relativité d'Einstein et la mécanique quantique, ont inspiré et nourri vos réflexions et vos travaux, et vous ont amené à fonder, en créant une nouvelle interface entre l'algèbre et la géométrie, une nouvelle branche des mathématiques, la géométrie non-commutative. Vous aviez auparavant, de l'avis général, révolutionné la théorie des opérateurs de Von Neumann, théorie dont l'origine est également à chercher du côté de la mécanique quantique.

L'un des problèmes majeurs de la physique actuelle est de réconcilier la mécanique quantique et la gravitation, autrement dit, l'infiniment petit et l'infiniment grand. Dans ces questions la frontière entre les mathématiques et la physique est floue. C'est dans ce cadre que vous avez donné récemment, avec le physicien Dirck Kreimer, un éclairage inattendu sur le problème dit de renormalisation, c'est-à-dire le « tour de passe-passe » — je vous cite — utilisé par les physiciens pour éliminer de leurs calculs, en théorie des champs, les quantités infinies. En le reliant à un problème mathématique connu, vous avez ouvert la voie à une meilleure compréhension.

Vous avez publié plus de 150 articles scientifiques, évidemment destinés à une communauté de spécialistes, mais je sais — et je souhaite vous en féliciter — que vous n'hésitez pas à participer activement à la diffusion des connaissances auprès d'un public plus large, pour essayer de lui faire découvrir les beautés et les atouts du monde des mathématiques et de ses applications, par des conférences de vulgarisation, ainsi que des émissions de radio, ou encore par des livres d'entretiens et de réflexion sur la pensée mathématique.

Parallèlement, vous poursuivez une réflexion d'ordre philosophique sur l'activité mathématique, enrichie par des échanges avec d'autres scientifiques comme le neurobiologiste Jean-Pierre Changeux. Plutôt que d'activité il faudrait parler de pensée mathématique, comme nous en rendent compte deux de vos ouvrages *Matière à pensée* et *Triangle de pensées*. Votre vision est d'inspiration platonicienne, dites-vous, et vous vous décrivez comme un explorateur parti à la découverte d'une réalité mathématique préexistante. On comprend mieux alors la passion qui vous habite.

Je dois souligner aussi, que les mathématiciens français ont su donner à leurs travaux une vigueur et une qualité exceptionnelles, d'une extraordinaire fertilité pour les autres domaines de la recherche, et que le Ministère de la Recherche y est particulièrement attentif

Je suis heureux de rappeler à ce propos que, si les mathématiques sont aujourd'hui une discipline en pleine vigueur en France, le Ministère délégué à la Recherche que je dirige lui apporte son soutien constant, en collaboration étroite et exemplaire avec le CNRS. Ce soutien passe par le financement récurrent des laboratoires, et par l'attribution des allocations de recherche aux doctorants. Mais il concerne également les « grands instruments des mathématiciens », tels que le Centre International de Rencontres mathématiques de Luminy, ou les prestigieux instituts que sont l'Institut des Hautes Études Scientifiques, où vous êtes professeur, — et où j'ai eu l'occasion de vous rencontrer la semaine dernière en compagnie d'un grand nombre de vos collègues, — et l'Institut Henri Poincaré. Ces instruments français sont à la fois d'extraordinaires lieux d'échanges et de savoirs, qui contribuent au rayonnement de notre pays et de sa recherche. Ils sont aussi des instruments d'excellence au service de l'ensemble de la communauté mathématique internationale.

En tant que ministre chargé de la recherche, je ne peux que me réjouir et me féliciter des succès de l'école mathématique française, succès dus avant tout à la qualité exceptionnelle de nos chercheurs. Cette école est une des meilleures au monde, en première ou en deuxième place mondiale devant ou juste derrière les États-Unis, comme en témoigne le nombre de médailles Fields obtenues par des mathématiciens français, et les mathématiques sont la discipline dans laquelle la position de la recherche française est la meilleure au niveau international, même s'il y a quelque vanité, j'en ai conscience, à se prévaloir d'une appartenance nationale dans un domaine par essence universel.

Ce qui compte néanmoins tient au fait que les succès des mathématiciens français et de l'école mathématique française sont bien entendu pour moi des encouragements à poursuivre, voire à amplifier, les divers soutiens que la Nation apporte à cette communauté.

Ce soutien doit en effet se poursuivre car lorsqu'on analyse le rôle qu'ont joué, dans le passé, les mathématiques dans le développement de la plupart des sciences (et souvent de manière imprévue), on ne peut qu'aboutir à la conclusion qu'elles joueront vraisemblablement aussi un rôle primordial dans le développement des sciences du futur. L'importance grandissante de la modélisation dans la plupart des disciplines en est un signe incontestable.

Les mathématiques sont une discipline qui se nourrit de ses liens avec les autres sciences et le monde réel, mais qui, également, s'enrichit elle-même, dans un équilibre subtil entre des facteurs de développement internes et externes. Aujourd'hui, les interactions des mathématiques avec les autres disciplines scientifiques, physique et informatique, mais aussi chimie, biologie, économie, écologie, sont en extension rapide. Elles sont à l'origine de recherches riches et souvent, aussi, fondamentales.

S'il est moins connu, l'impact des mathématiques dans le monde industriel et des services, tout particulièrement celui des hautes technologies, est de plus en plus fort. Les mathématiques suivent, accompagnent et bien souvent aussi précèdent les développements scientifiques et technologiques actuels, et le couplage entre la recherche académique et la recherche finalisée a fait, dans notre pays, des progrès remarqués dans les dernières années.

En biologie, par exemple, des méthodes statistiques récentes sont employées pour décoder le génome humain et des outils géométriques sont nécessaires pour comprendre la structure de l'ADN. De même l'imagerie médicale, la robotique, les techniques de conception assistée par ordinateur, la transmission et la protection de l'information comportent toutes une part importante de mathématiques. Si ces faits commencent à être bien connus, on sait moins que ces utilisations des mathématiques sont souvent le fruit de progrès récents et parfois très pointus. Régulièrement, des recherches internes à cette discipline et sans connexions immédiates avec des domaines d'applications, menées au départ sous la seule impulsion de la curiosité intellectuelle des mathématiciens, ont trouvé des applications pratiques inattendues. Cette méthode se révèle extrêmement efficace pour permettre l'ouverture aux autres disciplines, garantir l'innovation et assurer la qualité et la diversité des applications.

Cher Alain Connes, vous soulignez, à juste titre, la fonction essentielle de l'intuition dans la création de savoir

La curiosité et la grande liberté intellectuelle, à l'origine de toutes les grandes découvertes mathématiques, vous les avez déployées, en particulier au CNRS, où une grande confiance est accordée aux chercheurs, confiance qui n'exclut évidemment pas un accompagnement ou un encouragement sur des opérations particulières, ni bien sûr une évaluation *a posteriori*, mais confiance dont la médaille d'or qui vous est attribuée aujourd'hui est la meilleure justification.

Ce contexte, condition nécessaire à la créativité, doit cependant s'enrichir encore de l'intuition pour que soit optimisée la capacité créatrice du chercheur.

Dans l'exercice de votre passion pour les mathématiques, vous avez vous-même souligné *l'importance de l'intuition* en rappelant un épisode que vous avez vécu en classe de sixième, énonçant par intuition la réponse à un problème complexe, puis recherchant le raisonnement logique permettant d'en confirmer la pertinence. Ce message sur l'importance de l'intuition s'adresse à l'ensemble des acteurs de la recherche et je veux rappeler ici qu'Einstein avait déjà voulu valoriser l'intuition en disant qu'elle est « *l'intelligence en excès de vitesse* ».

Comme je l'ai dit tout à l'heure, l'école mathématique française est une des meilleures au monde. Depuis longtemps ouverte à l'accueil de collègues du monde entier, elle s'est équipée, grâce en particulier à l'action du CNRS, de structures efficaces et modernes. Je voudrais aussi souligner quelques-unes de ses spécificités. Elle est très majoritairement universitaire puisque la communauté mathématique a fait le choix d'un équilibre original entre sa représentation dans les organismes de recherche et dans le monde universitaire. À ce jour les mathématiciens du CNRS ne représentent qu'un peu plus de 15% de l'ensemble de la communauté mathématique académique, les quelque 85% restants se trouvant dans les universités, avec de plus une bonne circulation entre ces positions statutaires. Je me souviens à ce propos d'une observation d'un de vos éminents collègues la semaine dernière, le professeur Lafforgue (médaillé Fields) qui tenait à rendre hommage à la qualité de l'équipe universitaire d'Orsay où il avait travaillé avant d'entrer à l'IHÉS. Les mathématiques sont ainsi une des rares disciplines qui a réussi à faire fonctionner une mobilité réelle entre les organismes et l'université, une nécessité que tout le monde semble s'accorder aujourd'hui à reconnaître pour garantir le dynamisme de la recherche et un couplage efficace entre la recherche et l'enseignement.

C'est sur ce constat particulièrement positif que je suis heureux de vous renouveler aujourd'hui, cher Alain Connes, mes félicitations personnelles pour cette médaille d'or et de vous remercier tout particulièrement de contribuer par vos succès au rayonnement de la France, et en particulier de ses chercheurs, à travers le monde.

New Textbooks from Springer

D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea — **2nd edition**

Using Algebraic Geometry

This book illustrates the many uses of algebraic geometry, highlighting some of the more recent applications of Gröbner bases and resultants. The book is written for nonspecialists and for readers with a diverse range of backgrounds. For this new edition, the authors added two new sections, a new chapter and updated the references.

2nd ed. 2005. Approx. 565 p. 24 illus. Softcover € 49,95; £ 38,50 ISBN 0-387-20733-3

Also availabe in hardcover
€ 89,95; £ 69,00 ISBN 0-387-20706-6

A. Chambert-Loir

A Field Guide to Algebra

This unique textbook focuses on the structure of fields and is intended for a second course in abstract algebra. Besides providing proofs of the transcendance of pi and e, the book includes material on differential Galois groups and a proof of Hilbert's irreducibility theorem.

2005. X, 195 p. 12 illus. (Undergraduate Texts in Mathematics) Hardcover € 49,95; £ 38,50 ISBN 0-387-21428-3

S. Elaydi

An Introduction to Difference Equations

From the reviews: "The presentation is clear. The book provides numerous interesting applications in various domains (life science, neural networks, feedback control, trade models, heat transfers, etc.) and well-selected exercises with solutions."
American Mathematical Society

3rd ed. 2005. Approx. 560 p. 119 illus. (Undergraduate Texts in Mathematics) Hardcover € 59,95; £ 46,00 ISBN 0-387-23059-9

J. R. Ruiz-Tolosa, E. Castillo

From Vectors to Tensors

This textbook, deals with tensors that are treated as vectors, and has a practical orientation. In addition to dealing with the classical topics of tensor books, new tensor concepts are introduced, such as the rotation of tensors, the transposer tensor, the eigentensors, the permutation tensor structure, etc.

2005. XVI, 670 p. (Universitext) Softcover € 49,95; £ 38,50 ISBN 3-540-22887-X

D. Jungnickel — **2nd edition**

Graphs, Networks and Algorithms

From the reviews of the first edition:
"…The book is a first class textbook and seems to be indispensable for everybody who has to teach combinatorial optimization. It is very helpful for students, teachers, and researchers in this area. …"
Mathematical Reviews 2002

2nd ed. 2005. XVI, 611 p. 195 illus. (Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 5) Hardcover € 59,95; £ 46,00 ISBN 3-540-21905-6

D. W. Stroock

An Introduction to Markov Processes

This book provides a rigorous but elementary introduction to the theory of Markov Processes on a countable state space. It should be accessible to students with a solid undergraduate background in mathematics, including students from engineering, economics, physics, and biology.

2005. XIV, 171 p. (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 230) Hardcover € 69,95; £ 54,00 ISBN 3-540-23499-3

A. Tveito, R. Winther

Introduction to Partial Differential Equations

A Computational Approach

1998. Corr. 2nd printing 2005. XVI, 392 p. Hardcover € 49,95; £ 38,50 ISBN 3-540-22551-X

Please order from
Springer · Customer Service
Haberstr. 7 · 69126 Heidelberg, Germany
Tel.: +49 (0) 6221 - 345 - 0
Fax: +49 (0) 6221 - 345 - 4229
e-mail: SDC-bookorder@springer-sbm.com
or through your bookseller

springeronline.com

Springer

All Euro and GBP prices are net-prices subject to local VAT, e.g. in Germany 7% VAT for books and 16% VAT for electronic products. Prices and other details are subject to change without notice. d&p · 011509x

MATHÉMATIQUES

Compression des images fixes

Yves Meyer

Ce texte a été rédigé par Yves Meyer à la suite de son intervention à la journée de conférences « La face cachée des mathématiques ». Vous trouverez en addendum un compte rendu de cette journée par une participante, Geneviève Courtade-Coulomb. Nous espérons pouvoir publier par la suite d'autres interventions à cette journée.

L'analyse par ondelettes est née d'une étonnante découverte faite par un ingénieur, Jean Morlet, à la fin des années soixante-dix. Comme nous le verrons, cette découverte fut aussitôt comprise et interprétée par Alexandre Grossmann, un physicien déjà célèbre pour ses travaux en *mécanique quantique*. Grossmann sut relier les idées de Jean Morlet à la théorie des *états cohérents* utilisée en mécanique quantique. Vingt ans après, l'analyse par ondelettes débouchait sur le nouveau standard, nommé JPEG2000, de compression des images fixes. Mais aujourd'hui, JPEG2000 est déjà dépassé : ce standard vient d'être battu par une jeune équipe de brillants chercheurs réunis autour de Stéphane Mallat. Ce groupe arrive à comprimer les photos d'identités en n'utilisant pas plus de 500 octets ! Mais pour décrire cet exploit il faut revenir aux débuts de l'épopée des ondelettes. Nous parlerons ensuite des problèmes de compression de l'image et cela nous amènera tout naturellement aux travaux de l'équipe de Mallat.

Tout débuta avec Jean Morlet

Ancien élève de l'École polytechnique, Morlet était ingénieur de recherche chez Elf-Aquitaine. Quand il découvrit les ondelettes, Morlet travaillait depuis déjà une vingtaine d'années dans le secteur de la vibrosismique. Morlet créa l'analyse par ondelettes pour surmonter certaines difficultés rencontrées dans l'analyse des signaux acquis lors des campagnes pétrolières.

Autrefois, pour chercher du pétrole, on faisait exploser des charges et les échos recueillis permettaient d'estimer la position, la profondeur et la forme de la cavité contenant l'or noir. Les experts engagés par les compagnies pétrolières, les sourciers, étaient alors des physiciens. Analyser les bruits répercutés par le sous-sol, c'était imiter le savoir-faire du médecin qui, à l'aide du stéthoscope, ausculte le malade en écoutant sa respiration ou les battements de son cœur.

Pierre Goupillaud, collègue et ami de Jean Morlet, a contribué à l'amélioration de la recherche pétrolière. Pierre Goupillaud travailla pour la compagnie pétrolière Conoco, (aujourd'hui ConocoPhillips) dans le secteur de la géophysique. Goupillaud suggéra d'envoyer dans le sous-sol une vibration, courte et modulée en fréquence, au lieu de faire exploser des charges. L'énergie dépensée et les dégâts occasionnés sont alors réduits. Ce même principe est utilisé par le sonar de la chauve-souris. La vibrosismique était née. Mais les échos recueillis sont bien plus complexes à analyser que dans le cas des explosions de charges. Les physiciens durent céder la place à des spécialistes du traitement du signal. Ces derniers élaborèrent des logiciels informatiques qui, en un sens, imitent le fonctionnement du cerveau de la chauve-souris. Grâce à la vibrosismique, Elf-Aquitaine a pu mener une campagne de prospection pétrolière à Paris même. Les camions-vibrateurs ont sillonné les artères parisiennes pendant une quinzaine de jours, au milieu des nuits d'hiver de février 1986. L'exploitation des résultats a demandé une année entière. Cela donne une idée des difficultés rencontrées dans la vibrosismique.

Jean Morlet analysait donc les signaux provenant de la vibrosismique. Ces signaux sont des courbes graphiques assez irrégulières qui présentent, en outre, de fortes parties transitoires (ce terme sera défini plus tard). Jean Morlet étudiait ces courbes à l'aide d'une technique éprouvée, l'analyse de Fourier à fenêtre (en fait à l'aide des ondelettes de Gabor, nous y reviendrons). Mais un jour, Morlet, lassé des artefacts (erreurs systématiques) entraînés par cette technique, découvrit une nouvelle façon de représenter ce type de signaux. Le nouvel algorithme fournit un meilleur rendu des zones transitoires.

C'est ainsi que Morlet créa l'analyse par ondelettes.

Une définition mathématique de l'analyse par ondelettes est présentée dans l'appendice.

Rappelons qu'analyser signifie décomposer un tout en ses éléments constituants. La qualité et la précision de l'analyse dépendent du choix des éléments constituants ou *atomes*. Un choix qui convient à une collection de signaux peut être déplorable dans un autre cas. En 1807, Joseph Fourier crée l'analyse harmonique où les éléments constituants d'une fonction, d'un signal ou d'une image sont les ondes $\exp(i\omega \cdot x)$. On reconstruit le signal en combinant toutes ces *ondes* après les avoir multipliées par des coefficients $\gamma(\omega)$ qui sont, au facteur $(2\pi)^{-n}$ près, donnés par la correlation $\int f(x) \exp(-i\omega \cdot x)\, dx$ entre la fonction $f(x)$ que l'on analyse et l'onde utilisée. Pour Dennis Gabor, les éléments constituants seront les *ondelettes*, c'est-à-dire des petits morceaux d'ondes. L'analyse et la synthèse s'opèrent alors comme dans l'analyse de Fourier. Les ondelettes de Gabor ont une durée (ou un diamètre) fixe, mais une fréquence arbitraire ; leur expression analytique est $w(x - x_0) \exp(i\omega \cdot x)$ où la fenêtre w est le plus souvent une gaussienne. Dans le cas d'une image, x est un point du plan ; alors ω est un vecteur et $\omega \cdot x$ désigne un produit scalaire. Dans le cas d'un signal, c'est-à-dire d'une fonction d'une variable réelle, la variable est le temps, noté t. On analyse un signal ou une image $f(x)$ à l'aide de ces ondelettes en calculant les corrélations $W(x, \omega) = \int f(y) w(y - x) \exp(-i\omega \cdot y)\, dy$. Cela revient à déployer le signal dans le *plan temps-fréquence*. Cela revient aussi à faire une *analyse de Fourier à fenêtre* : on segmente d'abord le signal ou l'image en les délimitant à l'aide de la *fenêtre glissante* $w(y-x)$; on effectue ensuite une analyse de Fourier ordinaire sur chaque morceau $f(\cdot)w(\cdot - x)$ du signal ou de l'image. L'analyse de Fourier convient aux signaux stationnaires, tandis que les ondelettes de Gabor sont l'un des outils que l'on utilise pour analyser les signaux quasi-stationnaires (comme le signal de parole). C'est pourquoi, Dennis Gabor appelait *logons* ce que nous appelons les ondelettes de Gabor.

Les ondelettes de Morlet diffèrent des précédentes en ce que leur durée est arbitrairement petite, ce qui permet de mieux cerner les phénomènes transitoires. On pense à l'attaque (qui dure quelques millisecondes) d'une note à la clarinette. L'analyse de Fourier est adaptée à l'étude de la note, une fois formée, mais pas à celle de son attaque. Les ondelettes de Morlet sont aussi localisées en fréquence autour d'une fréquence moyenne qui est l'inverse de leur durée. Tout naturellement les fréquences utilisées dans les algorithmes dérivés des ondelettes de Gabor forment une progression arithmétique (comme c'est le cas dans les séries de Fourier) tandis que celles intervenant dans les algorithmes utilisant les ondelettes de Morlet sont en progression géométrique (comme dans l'analyse de Littlewood-Paley). Cette dernière joue, pour l'analyse mathématique, le même rôle que les ondelettes de Morlet en traitement du signal.

Parlons encore un peu de mathématique ! L'illustration la plus simple de la supériorité des ondelettes de Morlet sur l'analyse de Fourier est fournie par la théorie de l'approximation non-linéaire. Comme il est bien connu, si $f(x)$ est une fonction continue et 2π-périodique de la variable réelle x, et si α est un exposant positif non entier, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} \text{(a) pour une certaine constante } C \text{ et tout entier } N, \text{ on peut approcher } f(x) \\ \text{par une somme trigonométriques } P_N(x) = \sum_{-N}^{N} a_{k,N} \exp(ikx) \text{ avec une préci-} \\ \text{sion } O(N^{-\alpha}) \text{ (la qualité de l'approximation est mesurée en norme uniforme),} \\ \text{(b) } f(x) \text{ est uniformément hölderienne d'exposant } \alpha. \end{cases}$$

Mais supposons, en outre, que $f(x)$ soit indéfiniment dérivable en dehors d'un ensemble fini de singularités de type cusp ; c'est-à-dire qu'au voisinage de x_j on ait $f(x) = c_j|x - x_j|^{\alpha_j} + g(x)$ où $1 \leqslant j \leqslant N$ et $\alpha_j \geqslant \alpha$ et où $g(x)$ est indéfiniment dérivable. Utilisons alors, pour approcher $f(x)$, des fractions rationnelles $R_N(z) = \frac{P_N(z)}{Q_N(z)}$ en la variable $z = \exp(ix)$, en exigeant que les pôles de R_N n'appartiennent pas au cercle $|z| = 1$ et que les degrés de P_N et de Q_N ne dépassent pas N. Alors on passe d'une vitesse d'approximation lente en $O(N^{-\alpha})$ à une vitesse rapide, en $O(N^{-q})$ pour tout entier q. Les fractions rationnelles en question $\frac{P_N}{Q_N}$ sont des combinaisons linéaires de N éléments simples qui, en un sens, ressemblent à des ondelettes (si les pôles sont suffisamment proches du cercle unité). Ces singularités isolées (cusps) de $f(x)$ sont un exemple de transitoires et cet exemple mathématique nous explique pourquoi l'analyse par ondelettes convient aux signaux présentant de fortes transitoires. Les détails se trouvent dans les travaux de Ronald De Vore cités en référence.

J'ai souvent discuté avec Jean Morlet. Il ressemble beaucoup à Benoît Mandelbrot. Tout comme Mandelbrot, Morlet a une extraordinaire intuition et une réelle vision scientifique. Il a tout de suite compris la portée de sa découverte et a essayé d'alerter Elf-Aquitaine. Mais Elf-Aquitaine venait d'être la victime consentante d'une énorme escroquerie ; un malfaiteur belge qui aujourd'hui coule des jours heureux au Brésil, était arrivé à persuader les têtes pensantes de l'entreprise que l'on pouvait « flairer le pétrole » à l'aide des trop célèbres « avions renifleurs ». Pour bluffer les « têtes pensantes » et autres « décideurs » d'ELF, l'escroc présentait, dans un certain ordre, des objets dans une pièce. Ces objets étaient « reniflés » par un miraculeux « gadget », situé dans une autre pièce. Ce gadget reconstruisait, en temps réel, les images des objets sur un écran d'ordinateur. Les décideurs d'ELF étaient médusés. L'escroquerie fut révélée par un physicien, Jules Horowitz, qui était à l'époque directeur de la physique au CEA. Jules Horowitz fut invité comme expert pour assister à une démonstration. Quand le « grand patron » et sa suite sont arrivés, pendant les salutations et les politesses entre « inventeurs » et « grand patron », Jules Horowitz s'est glissé dans la chambre de mesure et a tordu complètement, en équerre, la règle que le gadget pouvait voir à distance. Puis, la démonstration a eu lieu. Une image de la règle, bien droite est apparue. Jules Horowitz a conduit le grand patron et les inventeurs à la chambre où était placée la règle. Il a montré qu'elle était pliée. Cela a suffi et tout ELF a été convaincu. Jules Horowitz n'a fait aucun commentaire et est revenu à son travail quotidien.

Passant de l'extrême crédulité à une extrême méfiance, Elf-Aquitaine répondit à la découverte de Jean Morlet en lui octroyant une retraite anticipée. Plus de dix ans après cette mise à la retraite, Morlet obtint le prix Reginald Fessenden de la Société Américaine de Géophysique. Lors de la cérémonie, Pierre Goupillaud présenta l'œuvre de Morlet et dit : « *A product of the renowned École polytechnique, Morlet performed the exceptional feat of discovering a novel mathematical tool which has made the Fourier transform obsolete after 200 years of uses and abuses, particularly in its fast version... Until now, his only reward for years of perseverance and creativity in producing this extraordinary tool was an early retirement from ELF.* »

Jean Morlet est, comme Goupillaud nous le dit, un ancien élève de l'École polytechnique. Roger Balian y enseignait la physique. Morlet lui demanda son avis, car il voulait que son travail sur les ondelettes soit expertisé. Balian l'orienta vers Alexandre Grossmann. Alex Grossmann, directeur de recherches au CNRS, travaillait à Marseille-Luminy, au centre de physique théorique. Grossmann fut patient, subtil et comprit ce que Morlet avait dans l'esprit. Grâce à la clairvoyance de Grossmann, les résultats empiriques de Morlet purent être démontrés et furent publiés en 1984. Écouter Morlet n'était certainement pas une tâche aisée, tant ses idées étaient originales, allusives, approximatives et souvent exagérément optimistes. J'en parle d'expérience. Morlet pensait, par exemple, que l'analyse par ondelettes allait tout de suite révolutionner la vibrosismique et la prospection pétrolière. Quelque chose d'autre s'est produit : les ondelettes ne servent qu'à *comprimer et transmettre* les données recueillies dans les campagnes pétrolières. Ces données sont des signaux 1-D (représentant les variations ou fluctuations d'une fonction du temps). L'analyse de l'information contenue dans ces données est une tout autre histoire. En outre les ondelettes servent à *comprimer et transmettre* les images qui sont bi-dimensionnelles (ou 2-D).

À l'École polytechnique, la photocopieuse que mathématiciens et physiciens partageaient était située dans une petite pièce. Jean Lascoux, directeur du centre de physique mathématique de l'École polytechnique, scientifique érudit et généreux, photocopiait tout ce qui pouvait l'intéresser ou être utile à l'un de ses amis. Quand j'avais aussi des photocopies à faire, j'attendais qu'il termine les siennes et j'en profitais pour discuter avec lui. C'est ainsi qu'il me montra, à l'automne 1984, un preprint de Grossmann et Morlet ouvrant la voie à ce qui allait devenir l'analyse par ondelettes. C'est ainsi que débutèrent mes recherches sur les ondelettes. Je pris alors le train pour Marseille et rejoignis ainsi le « club des ondelettistes ». Ce « club » se composait alors de Grossmann, de Morlet et de quelques jeunes qui deviendront célèbres. Parmi ces jeunes, citons Ingrid Daubechies qui travaillait avec Grossmann sur certains problèmes de la mécanique quantique et qui est aujourd'hui professeur à Princeton.

En arrivant à Marseille, je compris que Grossmann et Morlet avaient redécouvert un théorème qu'un mathématicien argentin, travaillant à l'université de Chicago, Alberto Calderón, avait établi vingt ans avant. La preuve qu'en donnait Grossmann utilisait la théorie des représentations des groupes, théorie qui fonde la mécanique quantique. Mais cette preuve utilisait l'irréductibilité de l'action du groupe affine sur l'espace de Hardy (composé des fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur et de carré intégrable sur la droite réelle). Cette approche limitait l'application de l'analyse de Morlet à la dimension 1, c'est-à-dire aux signaux en excluant les images. En outre le signal analysé devait être analytique, ce qui n'est pas un obstacle. Calderón ne savait pas et n'a jamais cru que son résultat puisse jouer un rôle important dans le traitement du signal. Ceci est d'autant plus surprenant que Calderón avait au départ une formation d'ingénieur. Morlet relia ainsi le théorème de Calderón (qu'il ne connaissait pas) au traitement du signal et la découverte de cette relation est révolutionnaire.

Mais les ondelettes devront muter avant d'envahir la science et la technologie contemporaines. Cette mutation peut être comparée à la découverte de la FFT, ou *fast Fourier transform*. La FFT est un algorithme exact. Il a été découvert, en 1965, aux États-Unis, par James W. Cooley et John W. Tukey. Sans la *FFT* le calcul d'une transformation de Fourier serait prohibitif. Il faudrait N^2 opérations pour un signal de longueur N. Avec la *FFT* ceci se réduit à $2N \log_2 N$. Plus concrètement cela revient à comparer un temps de calcul qui ne prend qu'une seconde à un temps de calcul qui prendrait plusieurs semaines. Sans la possibilité qu'offre la *FFT* de calculer en temps réel, l'imagerie médicale ou l'analyse des images de diffraction des molécules de la biologie n'auraient pas vu le jour.

La révolution numérique dont la FFT est un exemple repose sur l'utilisation d'algorithmes rapides et efficaces. Grossmann et Morlet avaient bien proposé un algorithme pour calculer la transformée en ondelettes. Cet algorithme consistait à remplacer les intégrales doubles (voir l'appendice) qui figurent dans le théorème de Calderón et dont le coût de calcul est élevé par des approximations. Mais ces approximations sont imprécises et engendrent des erreurs incontrôlables.

Un long chemin restait à parcourir avant que l'analyse par ondelettes bénéficie d'un algorithme ayant la précision et la rapidité de la FFT. C'est grâce aux travaux d'Ingrid Daubechies et de Stéphane Mallat que la Fast Wavelet Transform a finalement pu se hisser au niveau atteint par la *FFT*. Le calcul de la *FWT* d'un signal de longueur N est exact et ne nécessite que CN opérations (C est une constante que nous retrouverons dans ce qui suit).

La mise en œuvre d'algorithmes exacts débuta par ma construction, pendant l'été 1985, d'une base orthonormée d'ondelettes appartenant à la classe de Schwartz. Les intégrales doubles de l'identité de Calderón devinrent alors de simples séries. La théorie des distributions de Laurent Schwartz put enfin s'écrire à l'aide d'algorithmes numériques performants. Plus précisément mes ondelettes sont une suite ψ_λ, $\lambda \in \Lambda$ de fonctions de la classe de Schwartz $S(\mathbf{R}^n)$ et les coefficients d'ondelettes d'une distribution tempérée f sont les produits scalaires $c_\lambda = < f, \psi_\lambda >$. L'espace des distributions tempérées devient un espace de suites et l'appartenance de f aux espaces fonctionnels utilisés en analyse est déterminée par des conditions simples portant sur les modules des c_λ, $\lambda \in \Lambda$. En d'autres termes, les ondelettes constituent une base inconditionnelle universelle.

Du même coup, les calculs approchés de Grossmann et Morlet furent enfin remplacés par des formules exactes. Mais mon algorithme reposait sur des *filtres de longueur infinie*, ce qui n'est pas acceptable en traitement du signal.

C'est alors que Stéphane Mallat, alors qu'il était encore étudiant en thèse à Philadelphie, construisit, en 1986, la *FWT*, c'est-à-dire la *Fast Wavelet Transform.* Mallat travaillait sur l'analyse et la *compression* des images. Comprimer un signal ou une image, c'est « dire la même chose de façon plus concise ». Pour comprimer, il convient de comprendre. Nous y reviendrons.

La construction de la *FWT* bénéficiait de deux découvertes antérieures : les *algorithmes pyramidaux* et le *codage en sous-bandes.* Nous devons à Mallat d'avoir compris que les algorithmes pyramidaux, les ondelettes et le codage en sous-bandes sont apparentés. Les *algorithmes pyramidaux* furent découverts par P. Burt et E. H. Adelson (1983), dans le cadre du traitement de l'image. Un algorithme pyramidal est un algorithme rapide fournissant des vues de plus en plus synthétiques d'une image ; les mêmes que celles que l'on obtiendrait en s'éloignant d'une scène tout en continuant à l'examiner. Les échelles successives utilisées dans un algorithme pyramidal sont 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. Ces algorithmes pyramidaux sont rapides et importants. Ils sont rapides, car ils utilisent un schéma itératif qui fournit directement l'image simplifiée I_{n+1} à l'aide de I_n, sans que l'on ait besoin de revenir à l'image de départ. Ils sont importants, car ils permettent de mieux percevoir et comprendre une image. On rejoint ici la sagesse populaire qui enjoint de *prendre du recul* pour accéder à l'essentiel. L'analyse par ondelettes d'une image devient, dans les travaux de Mallat, un cas particulier des *algorithmes pyramidaux.* Chez Mallat, comme chez Burt et Adelson, analyser une image par ondelettes revient à étudier cette image en prenant du recul. Ce recul permet de comparer mentalement différentes vues à différentes échelles. Mais l'algorithme de Mallat va plus loin, car il fournit la différence entre les vues à deux échelles consécutives. Cette différence est fournie par l'analyse par ondelettes. La seconde découverte utilisée par Mallat dans la FWT est le *codage en sous-bandes* ou *subband coding.* Ce codage avait été inventé en 1977, au centre d'IBM, à La Gaude par D. Esteban et C. Galand.

La motivation était le téléphone digital. L'importance de la découverte du codage en sous-bande n'a pas été perçue par IBM. Ni Grossmann, ni Morlet, ni moi-même n'étions au courant de cette découverte importante qui précédait nos travaux. C'est Mallat qui a compris que les bases orthonormées d'ondelettes et le *subband coding* pouvaient, dans la plupart des cas, être identifiés. Les spécialistes du traitement du signal ou de l'image qui rejetaient les ondelettes de Grossmann-Morlet furent obligés de se rendre à l'évidence : sous un léger déguisement, les ondelettes existaient bel et bien en traitement du signal. Mallat a ainsi provoqué un appel d'air. Il a ouvert portes et fenêtres et a créé une discipline scientifique nouvelle où la physique théorique, les mathématiques, l'algorithmique, le traitement du signal et le traitement de l'image se sont rejoints.

La thèse de Mallat fut le point de départ du standard JPEG2000 de compression des images fixes.

Puis vint la construction, par Ingrid Daubechies (1987), des bases orthonormées d'ondelettes à support compact, de régularité r donnée. Cette régularité peut être aussi élevée que l'on veut, mais la base choisie dépend alors de r. Avant cette découverte, le seul cas connu était celui du système de Haar (1909) qui n'a pas de régularité. La longueur du support de l'ondelette est la constante C intervenant dans le nombre CN d'opérations. Les ondelettes à support compact conduisent à des algorithmes qui fonctionnent en temps réel, alors même que le signal défile. Le calcul se fait sur une *fenêtre mobile*, ne mettant en jeu qu'un nombre fixe, limité de valeurs du signal. Dans le cas du système de Haar, l'algorithme calcule la demi-somme et la demi-différence entre deux valeurs consécutives. Mais le manque de régularité ($r = 0$) du système de Haar excluait toute application à la compression des images fixes. L'année suivante, en collaboration avec Albert Cohen et Jean-Christophe Feauveau, I. Daubechies construisit les ondelettes bi-orthogonales. Ce sont elles qui seront utilisées dans JPEG2000.

Ondelettes, JPEG et JPEG2000

Aujourd'hui le « web », la toile, envahit notre vie et modifie même l'économie. Le téléchargement du réseau vers l'utilisateur d'une image est beaucoup plus lent que celui d'un texte. Transmettre les images à travers la toile, en utilisant les capacités limitées des câbles de transmission (parfois des lignes téléphoniques ordinaires) reste un défi. En effet numériser une image coûte un prix qui est souvent prohibitif. Rappelons qu'une seule image 1024×1024 en noir et blanc, dont le niveau de gris est codé sur huit bits, coûterait, si elle n'était pas comprimée, 1.048.576 octets, c'est-à-dire autant que l'intégralité des Essais de Montaigne. L'encombrement des autoroutes de l'information interdit de telles dépenses. Cet encombrement avait été prévu et calculé par Claude Shannon, il y a plus de cinquante ans. Shannon a évalué le nombre maximum de bits que l'on peut transmettre par seconde à l'aide d'un câble ayant une fréquence de coupure donnée. La fréquence de coupure est dictée par la technologie de transmission et l'usage des fibres optiques accroîtra la bande passante : l'autoroute de l'information acquiert alors une voie supplémentaire, ce qui accélère le débit.

Pour transmettre des images de la façon la plus efficace à travers un canal de transmission donné, il nous faut donc gérer au mieux le budget en bits qui nous est alloué pour représenter une image. Comprimer un signal ou une image, c'est 'dire la même chose' (dans la compression sans perte ou *lossless*) ou 'dire quelque chose d'équivalent' (compression avec perte ou *lossy*) en moins de mots. La compression sans perte s'apparente à la sténographie, une technique pour prendre des notes que les secrétaires d'autrefois maîtrisaient. Nous nous concentrerons sur la compression avec perte. On rejoint ici le problème de la traduction d'une langue dans une autre. Les logiciels de traduction automatique fournissent encore des résultats décevants, car on ne peut traduire un texte sans l'avoir compris. Les logiciels n'ont pas accès au sens. De même, pour savoir ce que l'on peut perdre et sacrifier dans une image, il faut la comprendre, c'est-à-dire accéder à son contenu sémantique. C'est pourquoi les radiologues se méfient des algorithmes de compression, car ils les soupçonnent de faire disparaître des détails essentiels à leurs yeux. On ne peut comprimer que si l'on a une certaine idée de ce que l'image contient ; en termes plus techniques, si l'on dispose d'un *modèle.* Il n'y a pas de modèle universel et il faudrait, en bonne logique, élaborer un modèle approprié à chaque collection d'images. Nous rejoignons alors un secteur très vivant des statistiques contemporaines : la théorie de l'apprentissage.

Les enjeux scientifiques et industriels de la compression des images fixes sont énormes. Comme Jacques Blamont le rappelait à l'Académie des sciences (séance du 25 septembre 2000), l'exploration de l'Espace passe par la compression des images, car ces images, grandes dévoreuses de bits, il faut les retransmettre à la Terre, tout en réduisant au maximum l'énergie nécessaire à cette transmission. Cette énergie est fournie par des équipements embarqués et il importe de réduire le plus possible la masse du satellite .

Il faut donc comprimer les images pour les transmettre et c'est là que les ondelettes entrent dans la danse. En fait les ondelettes ne sont efficaces que si les images dont on s'occupe peuvent être représentées ou modélisées par ce que j'appellerais le croquis d'un dessinateur. Plus précisément, le modèle utilisé suppose que les images se composent d'un certain nombre de lignes délimitant des objets. Les lignes peuvent être assez irrégulières mais la longueur totale de l'ensemble de ces lignes est l'une des contraintes du modèle. L'autre est le fait que l'image est régulière à l'intérieur des domaines (ou objets) délimités par les lignes. Ces lignes définissent un croquis ou sketch noté u. Les croquis que nous venons de définir appartiennent à l'espace BV des fonctions à variation bornée. Le modèle est complété par une seconde composante de l'image, notée v, qui représente la texture et le bruit. L'image complète est alors la somme $f = u + v$. Les ondelettes ne sont pertinentes que si elles sont appliquées à ce type d'images.

Naturellement on n'avait pas attendu les ondelettes pour comprimer les images et l'algorithme JPEG2000 doit être comparé à JPEG, algorithme utilisé jusqu'alors. JPEG ne repose pas sur un modèle préalable. C'est un algorithme robuste, 'tout-terrain' dont les réglages ont été fixés une fois pour toutes et ont été testés sur un stock standardisé d'images. L'algorithme JPEG peut être regardé comme une variante de l'analyse de Fourier à fenêtre. Il opère

(1) un découpage de l'image en blocs 8×8,
(2) une transformation de Fourier rapide (FFT) sur chaque bloc et

(3) une quantification adaptée des coefficients de Fourier ainsi calculés. La quantification est l'opération consistant à remplacer les nombres réels par des valeurs digitales approchées ; elle peut être uniforme ou peut dépendre de la fréquence analysée. En fait on utilise la *DCT*, proche parente de la *FFT*.

Comme le disait avec force Martin Vetterli, il fallait être totalement inconscient pour essayer de vaincre JPEG qui reposait sur la *FFT* et avait ensuite bénéficié de 25 ans de perfectionnements. Mais la raison était de notre côté. Voici pourquoi.

Une image fournit des informations intéressantes à toutes les échelles. La notion d'échelle semble donc plus pertinente que celle de fréquence pour décrire les images. L'idéal serait de relier échelle et fréquence. C'est exactement ce que permet de faire l'analyse par ondelettes qui fournit l'équation $\omega = 1/a$ où a désigne l'échelle et ω la fréquence. Un cas particulier de cette équation nous dit que la fréquence est l'inverse de la longeur d'onde. Retournant à l'analyse par ondelettes, elle permet de décomposer une image en utilisant des canaux fréquenciels indépendants couvrant à peu près une octave : les fréquences (spatiales) y vont de 2^j à 2^{j+1}. À l'intérieur de chacun de ces canaux, on peut, à l'aide du théorème de Shannon, échantillonner en variable d'espace avec un pas d'échantillonnage égal à 2^{-j}; la grille d'échantillonnage est alors $2^{-j}\mathbf{Z}^2$. Les ondelettes fournissent cette double localisation : la première en fréquence et la seconde en variable d'espace.

Un second atout en faveur des ondelettes est le suivant : l'utilisateur de l'image peut *zoomer* sur une partie de l'image qui l'intéresse et dépenser son allocation en bits en optimisant ce zoom, un peu comme un peintre qui, faisant un portrait, accorderait plus d'importance aux yeux qu'à des détails de l'habillement. Cette capacité de zoomer provient de la construction même des ondelettes et est totalement absente dans l'analyse de Fourier ou dans l'ancien JPEG. Les zooms sont déjà apparus dans notre discussion lorsque nous avons évoqué les algorithmes pyramidaux, lointains ancètres des ondelettes.

Par ailleurs certaines cellules du cortex visuel primaire fournissent une information qui ressemble à celle que l'on retire des coefficients d'ondelettes de l'image observée. Ces *coefficients d'ondelettes* ne sont pas ceux que nous avons utilisés précedemment, mais doivent être pris en un sens qui annonce les travaux de David Donoho et de la start-up *Let It Wave*. Citons d'abord David Hubel, prix Nobel de médecine :« *Cells in the primary visual cortex, to which the optic nerve projects (with one intermediate nucleus interposed) are far more exacting in their stimulus requirements. The commonest type of cells fire most vigorously not to a circular spot, but to a short line segment, to a dark line, a bright line, or to an edge boundary between dark and light. Furthermore each cell is influenced in its firing only by a restricted range of line orientations : a line more than about 15 to 30 degrees from the optimum generally evokes no response. Different cells prefer different orientations, and no one orientation, vertical, horizontal or oblique, is represented more than any other...Evidently cells in this part of the cortex are determining whether there are contours (light-dark or color) in the visual scene, and collectively registering their orientations.* »

Les travaux, en collaboration avec Torsten Wiesel et Margaret Livingstone décrits ici par David Hubel portent sur les chats et les singes. Cependant ils s'appliquent au système visuel humain. On dispose aujourd'hui de preuves indirectes de ce fait. La première leçon que l'on tire de ces découvertes est que le système visuel humain *ne calcule pas une transformée de Fourier*. David Marr était arrivé à la même conclusion. La seconde est que l'image n'est pas perçue comme un tout par le sytème visuel, mais bien décomposée en entités élémentaires qui sont acquises de façon indépendante. La dernière leçon est le rôle essentiel joué par la géométrie.

Émuler le système visuel humain pourrait alors être la stratégie idéale pour résoudre le problème de la compression, car les erreurs impliquées par cette compression seraient alors les mêmes que celles que l'œil aurait commises, elles seraient « masquées » et perceptuellement tolérables.

C'est pour toutes ces raisons que l'analyse par ondelettes a gagné. Il a cependant fallu transformer une argumentation scientifique en une réalité technologique. Ce ne fut pas une mince affaire et l'on se doit d'admirer le remarquable travail effectué par les chercheurs qui ont œuvré au programme JPEG2000. Mais certains de ces arguments militent encore plus fortement en faveur de travaux plus récents (Donoho et Mallat).

500 octets suffisent, car les ondelettes ne sont pas optimales

Pendant les années où JPEG2000 a été élaboré, la « quête du graal » a continué. Il s'agissait de faire mieux que les ondelettes dans la course à la compression. Plusieurs groupes ont ainsi cherché à mieux tirer parti des particularités géométriques des images. Un des modèles utilisés consiste à décrire les images en imitant le peintre Ingres. Une image est alors un ensemble de lignes assez régulières délimitant des zones où l'éclairement varie peu. Ces lignes seront appelées des bords. Si l'on utilise l'analyse par ondelettes pour décrire une telle image et si l'on désire localiser les bords d'un objet avec une précision de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, il faudra utiliser au moins N ondelettes distinctes, ce qui revient à coder les positions d'au moins N points appartenant à un voisinage du bord. L'erreur est ici mesurée en valeur quadratique moyenne. Il est clair que ce codage conduit à un gaspillage et que la même précision peut être obtenue en utilisant seulement $\sqrt{N}$ données. Il suffit pour le voir de fournir les positions de $\sqrt{N}$ points des bords et des $\sqrt{N}$ tangentes à ces points. En utilisant l'approximation des bords par les cercles osculateurs, on fait encore mieux et tout dépend ici de la régularité supposée des bords. Les ondelettes, quant à elles, sont bien sensibles à la présence de bords, mais n'arrivent pas à suivre la direction de ce bord, car elles sont 'isotropes'. Elles ne comportent pas un paramètre indiquant une direction. Seules la position et l'échelle sont prises en compte.

La première percée dans la direction de l'anisotropie a été réalisée par Emmanuel Candès et David Donoho dans un travail retentissant. Ces deux chercheurs ont créé les *ridgelets* qui sont des *ondelettes de seconde génération*. Les *ridgelets* et leurs 'cousines' les *curvelets* forment une base de l'espace de référence (en fait, un *frame* dans les cas des curvelets). En outre, cette base est adaptative, ce qui semble une contradiction dans les termes. Lorsqu'on analyse une image géométrique dans cette nouvelle base, les *curvelets* semblent s'orienter et s'allonger en épousant automatiquement la géométrie d'un bord éventuel. La construction des *ridgelets* repose sur celle des ondelettes.

Stimulé par les travaux de Candès et Donoho, Stéphane Mallat a fourni une solution plus réaliste en inventant les *bandelettes*. Elles aussi épousent le plus longtemps possible le tracé des bords des images. La nouvelle technologie proposée par Mallat est développée par la sart-up *Let It Wave* et s'appelle *Let It Wave Codec*. *Let It Wave* a obtenu le premier prix de l'innovation technologique 2002, décerné par le Ministre de la Recherche et de la Technologie.

Quelques mots sur ce dernier algorithme. Le point de départ théorique est la thèse d'Erwann Le Pennec. Dans ce travail, une image est modélisée comme il vient d'être indiqué. Rappelons que les objets contenus dans l'image sont délimités par des bords nets, que l'on peut dessiner comme le ferait Ingres. L'éclairement de l'objet est supposé très régulier. À cette image brute, assez schématique est ajouté un bruit aléatoire. Le problème posé est la description la plus concise, la plus économique, de ce type d'images. L'algorithme utilisé par Le Pennec est hybride, car il mêle les *level sets* de Jean-Michel Morel et Stanley Osher aux ondelettes. Le point de départ est la recherche des bords (supposés doux et réguliers) des objets. En fait, on cherche seulement une information directionnelle décrivant les lignes parallèles aux bords. Ces lignes parallèles ressemblent alors aux lignes de niveau d'une carte d'état major. C'est ici qu'apparaissent les 'level sets'. On tire ensuite parti de la régularité de l'éclairement pour l'analyser à l'aide d'ondelettes anisotropes dont les paramètres sont réglés à l'aide de l'information directionnelle déjà obtenue. Les *bandelettes* de Mallat et Le Pennec ne sont pas fixées une fois pour toutes, comme le sont les ridgelets, mais leur construction s'adapte (automatiquement) à l'image analysée. Le passage d'un travail de recherche à l'application industrielle développée par *Let It Wave* n'était pas une mince affaire et le résultat final obtenu par l'équipe de Stéphane Mallat est une prouesse.

Appendice : mais que sont les ondelettes ?

Les ondelettes sont l'un des outils utilisés en traitement du signal. Les signaux en question proviennent de mesures ou d'enregistrements. Voici des exemples : électrocardiogrammes, fluctuations des valeurs boursières ou signaux audio (parole, musique). Le traitement du signal a plusieurs buts : la compression, la transmission, l'archivage, l'analyse et le diagnostic. Un exemple est décrit dans *Le premier cercle* de Soljénitsyne. Dans ce magnifique roman, l'auteur nous raconte que la police secrète veut identifier une personne qui a téléphoné d'une cabine publique en determinant ses 'empreintes vocales'. Cet exemple nous amène à nous pencher sur le signal fourni par la parole. Rappelons que l'enregistrement de la parole est donné par les variations, les fluctuations de la pression de l'air au cours du temps.

Les recherches sur les ondelettes (ici ce mot a un sens très général) ont d'abord porté sur le signal de parole. C'est pourquoi certaines ondelettes étaient appelées des *logons.* Ces recherches répondaient aux besoins de l'industrie téléphonique. Nous y reviendrons. Les linguistes nous enseignent que le signal de parole peut être fragmenté en une suite de phonèmes. Un phonème est 'insécable'. C'est un atome. Il ne peut être fragmenté en unités acoustiques plus brèves. Les phonèmes sont-ils des ondelettes ? Peut-on généraliser à d'autres signaux cette décomposition du signal de parole en 'atomes' ou 'briques élémentaires' ? Ce problème fondamental a reçu des réponses différentes au cours des siècles. Fourier suggérait en 1807 que les 'atomes' soient les fonctions $f_{(\omega,\varphi)}(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, c'est-à-dire des ondes pures. Il énonçait le résultat paradoxal suivant : toute fonction, tout signal, aussi compliqués soient-ils, n'est pas autre chose qu'une combinaison judicieusement pondérée d'ondes $f_{(\omega,\varphi)}$. Mais une telle représentation soulève de nombreux problèmes quand elle est appliquée aux signaux transitoires (la définition de ce mot sera précisée dans quelques lignes). Voici l'un d'eux : alors même que le signal que l'on veut représenter a cessé d'exister, (par exemple, la source a cessé d'émettre) les ondes qui servent à le composer continueront à vibrer. Leur combinaison est alors exactement nulle, par interférence destructive. C'est comme un orchestre qui continuerait à jouer, mais qui produirait le silence. Comme l'écrivait Jean Ville, c'est mathématiquement exact, mais cela n'a aucun rapport avec la réalité. Si le son n'est pas entendu, c'est qu'il n'est pas émis.

L'explication de ces paradoxes vient de ce que l'analyse de Fourier est adaptée aux *signaux stationnaires*. Un signal est stationnaire si rien d'imprévu ne peut advenir. En particulier un signal stationnaire ne peut s'arrêter, s'éteindre. Il est immortel, comme le sont les ondes de Fourier. Un signal stationnaire laisse une part au hasard, mais ces aléas sont aussi prévisibles. Le signal de parole n'est évidemment pas stationnaire. On ne sait pas à l'avance ce que je vais dire. Le signal de parole reste stationnaire pendant de très courts intervalles de temps (une voyelle vibre un peu comme une onde et le chant en tire profit). On dit que le signal de parole est quasi-stationnaire. Ceci ne concerne que les parties tonales et exclut les 'plosives', comme le 't'. C'est pourquoi une analyse plus réaliste que celle de Fourier a été introduite par Dennis Gabor (physicien anglais, né à Budapest, comme von Neumann). Gabor se proposait de trouver une représentation efficace des signaux quasi-stationnaires. Pour cela, il découpa les « ondes » en petits morceaux (comme on découpe un saucisson). Ces morceaux sont donc des « ondelettes de Gabor ». Les ondelettes de Gabor sont les fonctions $\exp(-(t-t_0)^2)\cos(\omega t + \varphi)$ et Gabor découpait les signaux à un certain rythme fourni par :

$$t_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \qquad \omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$$

L'analyse de Gabor telle qu'elle vient d'être définie est incorrecte : les ondelettes de Gabor ne constituent pas un 'frame'. Une suite de vecteurs $e_j \in H$ est un frame de l'espace de Hilbert H si l'application $J : l^2 \mapsto H$ définie par $\alpha_j \mapsto \sum \alpha_j e_j$ est continue et surjective. L'analyse proposée par Gabor a été perfectionnée par Kenneth Wilson, Henrique Malvar, Ronald Coifman et moi-même et donne de très bons résultats dans le traitement des signaux quasi-stationnaires, comme la composante tonale de certains signaux audios. Cette analyse est utilisée dans le son numérique Dolby.

Pour traiter des phénomènes imprévisibles, violents, transitoires, (par exemple les 'plosives' du signal de parole) Morlet eut l'idée de raccourcir arbitrairement la fenêtre gaussienne $\exp(-(t-t_0)^2)$ utilisée par Gabor. Il partit de la fonction $\psi(t) = \exp(-t^2)\cos(5t)$, puis la déplaça (par des décalages temporels) et enfin changea d'échelle. Il obtint alors les fonctions $\psi(\frac{t-t_0}{a})$ où a est arbitrairement petit (l'agrandissement sera $1/a$). L'analyse par ondelettes s'apparente donc à des flashs instantanés, comme ceux produits par le laser femtoseconde.

Morlet comprit que cette analyse convenait aux signaux non-stationnaires et établit l'existence d'un aller-retour 'analyse-synthèse'. L'analyse s'opère en calculant les *coefficients d'ondelette*

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{(a,b)}(x)\,dx$$

où $\psi_{(a,b)}(x) = a^{-1/2}\psi((x-b)/a)$. Ici $a > 0$ définit l'échelle ($1/a$ est le grossissement). Pour reconstruire $f(x)$ il suffit de combiner les ondelettes $\psi_{(a,b)}$ en utilisant la pondération donnée par les coefficients $W(a,b)$. En d'autres termes,

$$f(x) = \int_0^{\infty} \int_{\mathbf{R}} W(a,b)\psi_{(a,b)}(x)db\,da/a^2$$

ce qui est précisément l'identité découverte par Alberto Calderón. On doit ici supposer que ψ est une fonction localisée ($\psi \in \mathrm{L}^2$ et $x\psi(x) \in \mathrm{L}^2$ suffisent), à valeurs réelles et d'intégrale nulle. En outre, on doit normaliser ψ de façon appropriée. Comme nous l'avons signalé, le calcul de cette intégrale double est numériquement prohibitif et c'est pour cela que la FWT s'est substituée à l'identité de Calderón.

La découverte des bases orthonormées d'ondelettes permet de remplacer ces intégrales par des séries en restant exact. Il vient, pour toute fonction f,

$$f(x) = \sum_j \sum_k c(j,k) 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad \text{où } c(j,k) = \int f(x)\psi_{(j,k)}(x)dx.$$

L'ondelette 'mère' ψ peut être choisie dans la classe de Schwartz et l'identité précédente fournit une analyse multiéchelle de n'importe qu'elle distribution tempérée. En outre tout ceci se généralise en dimension arbitraire et permet de résoudre de façon très efficace les principaux problèmes posés par la théorie de l'approximation non-linéaire (maillages adaptatifs, etc.). On consultera à ce propos les travaux de Ron De Vore (le site est indiqué ci-dessous).

Références

Voici des sites d'où vous pouvez télécharger des informations complémentaires.

En ce qui concerne le standard JPEG2000, le meilleur site est :
`http://jj2000.epfl.ch` (l'absence de www n'est pas une erreur) mais on pourra aussi consulter `http://www.jpg.com` (qui est le site de la firme Pegasus) ou `http://www.jpeg.org` (qui est le site officiel du comité JPEG2000)

Les travaux de David Donoho se trouvent à l'adresse suivante :
`http://www-stat.stanford.edu/~donoho`

On consultera aussi le site d'Emmanuel Candès :
`http://www.acm.caltech.edu/~emmanuel`

On apprend tout sur les ondelettes en consultant le site :
`http://www.cmapx.polytechnique.fr/~mallat`

Si l'on s'intéresse aux liens entre la théorie des ondelettes et l'approximation non-linéaire, on consultera :
`http:www.math.sc.edu/~devore`

Les travaux de Mallat sur la compression des photos d'identité se trouvent sur le site : `http://www.letitwave.fr/`

Enfin les mordus d'images astronomiques se régaleront en consultant le site :
`http://oposite.stsci.edu`
qui fournit, en direct, les images du télescope spatial Hubble, ainsi qu'une plongée vertigineuse vers les confins de l'Univers ! Là encore, pas de www.

Bon web ! !

Addendum
Compte rendu de la journée « La face cachée des mathématiques »

La manifestation « La face cachée des mathématiques » se déroula le 18 mars 2004, entre 11h30 et 19h, au Centre Georges Pompidou à Paris. Elle était organisée par la Société Mathématique de France, la Société de Mathématiques Appliquées, l'Institut des Hautes Études Scientifiques et la revue *Pour La Science*.

Le programme, qui a été respecté, comportait huit exposés de trente minutes. Chaque exposé était suivi de quinze minutes de débat avec le public.

Les thèmes abordés

Cinq exposés eurent pour point de départ des problèmes actuels :

1. *La compression d'images* : c'était le titre de la conférence d'Y. Meyer.

2. *Le contrôle* : « Contrôle d'oscillateurs classiques et quantiques » par P. Rouchon.

3. *Chaos et contrôle* : « l'exemple du pendule forcé » par J. Hubbard (ceux qui trouvent le terme « pendule forcé » trop technique penseront aux bras des robots).

3. *Cryptage et décryptage* : « Comment concevoir un algorithme de chiffrement rapide et solide ? » par A. Canteaut.

4. *Recherche d'une stratégie optimale dans le cadre de la concurrence* : « Dilemme du prisonnier, théorie des jeux et négociations » par E. Jouini. Il est à noter que la « concurrence » envisagée dans l'exposé pouvait être aussi bien économique (concurrence entre producteurs ou distributeurs ; vente aux enchères) que stratégique (guerre) ou politique (élections).

Deux exposés traitaient de la vie interne des mathématiques et de l'histoire des mathématiques.

– *Théorie des nœuds* par A.Quéguiner.
– *Autour du théorème du point fixe* par J. Mawhin.

Un exposé présentait un exemple d'interaction entre les mathématiques et l'art : *Escher et les vaches qui rient*[1] par P. Stevenhagen

[1] M.C. Escher a écrit, en introduction à son œuvre graphique : « *En exposant mes sens aux énigmes de l'univers, en réfléchissant à ces sensations et en les analysant, je m'approche du domaine des mathématiques. Bien que manquant totalement de connaissances et de formation dans le domaine des sciences exactes, je me sens plus proche des mathématiciens que de mes collègues artistes*».

Les conférences

Par manque de temps, les exposés de « La face cachée des mathématiques » n'ont pas comporté de démonstration. Tous les conférenciers ont tenté de faire découvrir les idées principales, et de donner un coup de projecteur sur des théories mathématiques sous-jacentes : l'analyse de Fourier pour la compression d'images ; les équations différentielles et systèmes différentiellement plats pour le contrôle ; la théorie des nombres et les courbes elliptiques pour le cryptage. C'était une occasion de découvrir ou de redécouvrir la grande variété de théories mathématiques, et la multiplicité de leurs interactions : lorsque l'on a, par exemple, demandé à E. Jouini quelles mathématiques se trouvaient derrière la théorie des jeux, il a répondu : « *le théorème du point fixe, les probabilités, la géométrie différentielle, etc.* »

À la suite de cette journée, on comprenait mieux la difficulté de planifier les recherches mathématiques, et la nécessaire liberté de choix des sujets de recherche pour les mathématiciens. C'est, par exemple, dans les années 1870 que Tait a entrepris le travail de classification des nœuds. Beaucoup de progrès ont été faits depuis, qui ont donné naissance à la théorie des nœuds. Cette théorie a trouvé récemment des applications en biologie (étude de l'activité biologique de la molécule d'ADN) mais on ne dispose toujours pas d'une table de classification de nœuds complète et sans répétition.

Les conférenciers étaient très différents, tant par l'âge, que par le tempérament qui pouvait se deviner à travers leur exposé et leurs réponses aux questions posées. Ils donnaient, à mon avis, une bonne idée de la diversité des mathématiciens. Un esprit chagrin ajouterait qu'ils n'étaient peut-être pas représentatifs de l'ensemble de la communauté puisqu'il manquait le mathématicien dans la lune qu'on aime à caricaturer dans le grand public.

Le public et les débats

Le grand amphi de Beaubourg était au trois quart plein (environ deux cent cinquante participants), la moitié des auditeurs semblant être des jeunes, accompagnés par un professeur.

Après les exposés, les questions posées furent nombreuses et variées : précisions d'ordre mathématique ; questions sur les applications aujourd'hui de telle ou telle théorie ; interrogations sur le métier de chercheur.

Pour donner une idée de la qualité des débats, je citerai la réponse d'Y. Meyer à la question :

« *Quelle a été votre réaction lorsque l'algorithme de compression d'image JPEG 2000 (issu de la théorie des ondelettes dont il était un des fondateurs et de ses propres travaux sur la compression d'images) a été supplanté par l'algorithme des bandelettes ?* »

Il répondit que la recherche mathématique s'apparente au combat de Jacob avec l'ange : « *On sait que l'on sera battu, mais on aime se battre*[2] ».

[2] Ce combat est décrit dans la *Bible*, au livre de *La Genèse*, ch. 31, versets 23 à 32.

Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci[1]

Michael T. Anderson[2]

Introduction

La classification des surfaces fermées a été une étape importante du développement de la topologie, tellement importante qu'elle est maintenant enseignée au cours des premières années d'université en guise d'introduction à la topologie. Depuis la résolution du problème de l'uniformisation des surfaces par Poincaré et Koebe, cette classification topologique est mieux comprise en termes de géométrisation des surfaces : toute surface fermée Σ admet une métrique à courbure de Gauss constante qui vaut soit $+1$, soit 0, soit -1, et ainsi elle est « uniformisée » par l'une des surfaces modèle $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{H}^2$. Ainsi toute surface Σ est le quotient soit de $\mathbb{S}^2$, soit de $\mathbb{R}^2$, soit de $\mathbb{H}^2$ par un groupe discret Γ agissant librement et isométriquement.

La classification des variétés de dimension plus grande est, bien sûr, beaucoup plus difficile. En effet, à cause de la complexité du groupe fondamental, une classification complète comme dans le cas des surfaces n'est pas possible en dimension supérieure ou égale à 4. En dimension 3 cet argument ne s'applique pas et la classification complète des variétés de dimension 3 est depuis longtemps le rêve des topologues. Un cas particulier est d'ailleurs la conjecture de Poincaré.

Dans cet article nous évoquerons le remarquable travail récent de Grisha Prelman [15]-[17], qui pourrait bien avoir résolu le problème de la classification des variétés de dimension 3 (dans un sens très naturel). Le travail de Perelman est en ce moment l'objet d'intenses investigations et vérifications par plusieurs groupes de chercheurs à travers le monde. À l'heure qu'il est, l'essentiel de ce travail a été validé par les experts de ce domaine. Même s'il est trop tôt pour annoncer une solution définitive à ce problème, on peut affirmer que les idées de Perelman sont hautement originales et très profondes. De plus, ses résultats sont déjà utilisés par d'autres chercheurs dans d'autres domaines. Tout ceci justifie, même à ce stade, l'écriture d'un article, ce qui pourrait paraitre prématuré autrement.

Le travail de Perelman est bati sur des travaux antérieurs de Thurston et Hamilton. Dans les deux sections suivantes nous présenterons les points de vue de Thurston sur les variétés de dimension 3 et du flot de Ricci introduit et étudié par Hamilton. Pour des informations complémentaires, en particulier sur la conjecture de Poincaré on renvoie à l'article de Milnor [14] (et qui a été traduit par la Gazette des Mathématiciens dans le numéro 99) ainsi qu'aux références contenues dans cet

[1] Ce texte a été publié par les *Notices* de l'AMS volume 51, numéro 2, sous le titre "Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow". Il a été traduit pour la *Gazette* par Zindine Djadli (Université de Cergy-Pontoise).
[2] E-mail : `anderson@math.sunysb.edu`

article. Pour plus d'informations et de détails sur le travail de Perelman on renvoie à [13].

La conjecture de géométrisation

Alors que la conjecture de Poincaré date d'environ un siècle, les remarquables idées de Thurston à la fin des années 70 ont amené à une possible et réaliste classification des variétés fermées de dimension 3 de manière analogue à la classification des surfaces via le théorème d'uniformisation.

Pour expliquer cela, nous avons besoin de préciser ce que sont les « géométries » correspondantes en dimension 3. En terme de géométrie riemannienne, une structure « géométrique » sur une variété M est la donnée d'une métrique riemannienne g complète et localement homogène. Ainsi M peut être décrite comme un quotient $\Gamma \setminus G/H$, où G est le groupe d'isométries du revêtement universel $(\tilde{M}, g)$ et Γ et H sont des sous-groupes du groupe de Lie G, Γ étant discret et H étant compact. Thurston a montré qu'il n'y a que 8 quotients de ce type (G/H) qui soient simplement connexes et qui admettent des quotients compacts[3].

Comme en dimension 2, les géométries les plus importantes sont celles qui sont à courbure constante : géométrie hyperbolique $\mathbb{H}^3$ de courbure -1, géométrie euclidienne $\mathbb{R}^3$ de courbure 0 et géométrie sphérique $\mathbb{S}^3$ de courbure $+1$. Les cinq autres géométries modèles sont des produits ou des produits tordus de surfaces. Les fibrés $\mathbb{S}^1$ triviaux sur une une surface de genre $g > 1$ ont une géométrie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tandis que les fibrés non triviaux ont une géométrie $\tilde{S}L(2, \mathbb{R})$; les fibrés $\mathbb{S}^1$ non triviaux sur $\mathbb{T}^2$ ont une *Nil*-géométrie, tandis que les fibrés $\mathbb{T}^2$ sur $\mathbb{S}^1$ ont une *Sol*-géométrie (ou une *Nil*-géométrie ou une géométrie de type $\mathbb{R}^3$) ; finalement, les fibrés $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^2$ ont une géométrie du type $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{S}^3$). Par exemple, toute variété de dimension 3 Seifert fibrée (une variété qui admet une action de $\mathbb{S}^1$ localement libre), a une structure géométrique.

Les variétés « géométriques » de dimension 3, c'est-à-dire les variétés de dimension 3 admettant une structure géométrique, sont les briques élémentaires pour construire des variétés de dimension 3 plus compliquées. Pour simplifier on supposera dans cet article que toutes les variétés considérées sont orientables. Les briques élémentaires sont donc « assemblées » le long de sphères de dimension 2, en utilisant l'opération de somme connexe, et le long de tores de dimension 2. Comme exemple d'un tel assemblage, soit $\{M_i\}$ une famille finie de variétés Seifert fibrées de dimension 3 sur des surfaces Σ_i à bord non vide, de tel façon que ∂M_i soit un tore pour tout i. Ces tores peuvent être « collés » les uns aux autres par paire en utilisant des difféomorphismes pour obtenir une variété fermée de dimension 3 ou une variété de dimension 3 à bord torique. Une variété de dimension 3 assemblée de cette façon est appelée une variété graphe (on associe un sommet à chaque espace Seifert fibré et une arête à chaque tore qui relie deux espaces Seifert fibrés). Un fibré en tore au-dessus de $\mathbb{S}^1$ est une variété graphe puisqu'union de deux espaces Seifert fibrés au-dessus de $\mathbb{S}^1 \times I$. Les variétés graphes ont été introduites, et complètement analysées par Waldhausen.

[3] La classification de Thurston est essentiellement un cas particulier de la classification plus ancienne de Bianchi des métriques homogènes apparaissant en relativité générale ; voir [3] pour des remarques supplémentaires sur la correspondance entre ces classifications

Réciproquement soit M une variété fermée de dimension 3 quelconque (mais orientable comme on l'a dit précedemment). On peut alors décomposer ou éclater la variété en pièces élémentaires, à savoir des sphères ou des tores. Topologiquement ceci peut se faire grâce au résultat suivant de topologie des variétés de dimension 3.

Décomposition en sphère (ou prime decomposition) (d'après Kneser, Milnor)

Soit M une variété fermée de dimension 3. Alors M peut être décomposée comme somme connexe

$$M = (K_1 \sharp \ldots \sharp K_p) \sharp (L_1 \sharp \ldots \sharp L_q) \sharp (\sharp_1^r \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)). \tag{1}$$

Les facteurs K et L sont des variétés fermées de dimension 3 et qui sont irréductibles, c'est-à-dire que toute sphère de dimension 2 qui y est plongée borde une boule de dimension 3. Les facteurs K ont un groupe fondamental infini et sont asphériques, tandis que les facteurs L ont un groupe fondamental fini et leur revêtement universel est une sphère d'homotopie. Puisque $M \sharp \mathbb{S}^3 = M$ on suppose qu'aucun facteur L n'est une sphère sauf si M est elle-même une sphère. Les facteurs dans cette écriture sont ainsi uniques à une permutation près et sont obtenus à partir de M par chirurgie sur une famille de sphères de dimension 2 essentielles (i.e. topologiquement non triviales) qui sont incluses dans M (en remplaçant les régions du type $\mathbb{S}^2 \times I$ par deux copies de B^3). Voir la figure 1 pour une représentation schématique de cela.

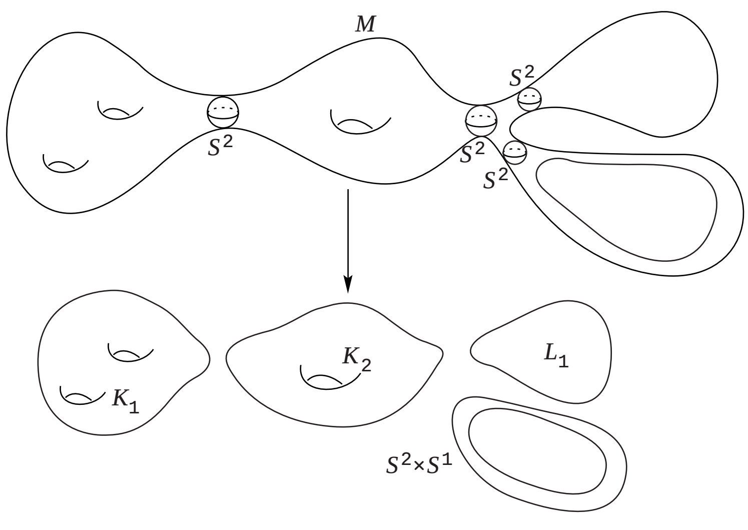


FIG. 1. Décomposition en sphères

Les facteurs K peuvent aussi contenir des tores topologiquement essentiels. Un tore $\mathbb{T}^2$ plongé dans M est dit incompressible si l'inclusion canonique induit une injection sur Π_1. Une variété de dimension 3 N est dite toriquement irréductible si tout tore plongé incompressible peut être déformé en un tore dans ∂N. Ainsi si $\partial N = \varnothing$ alors N ne possède aucun tore incompressible.

Décomposition en tore (Jaco-Shalen, Johannsen)

Soit M une variété de dimension 3, fermée, irréductible. Alors il existe une famille finie, eventuellement vide, de tores disjoints incompressibles dans M qui séparent M en une collection finie de variétés de dimension 3 compactes (à bord torique), et qui sont chacun soit toriquement irreductible soit Seifert fibré).

Une décomposition plus complexe, mais essentiellement équivalente, est donnée par des tores séparant M en des composantes toriquement irréductible ou des variétés graphes. Voir la figure 2.

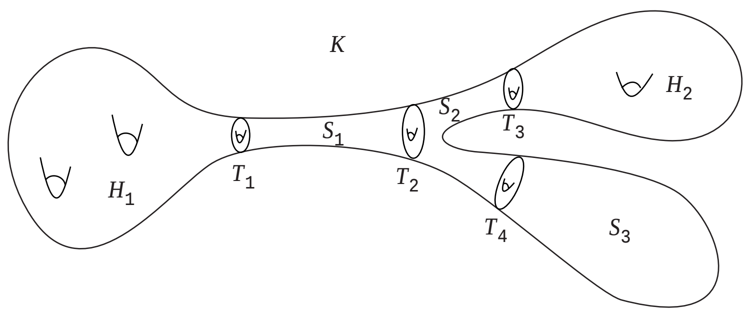


FIG. 2. Décomposition en tores

À l'exception de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ et son quotient $\mathbb{R}P^3 \sharp \mathbb{R}P^3$, les sphères de dimension 2 essentielles sont des obstructions à l'existence de structure géométriques sur une variété de dimension 3. La même chose est vraie pour les tores essentiels, sauf si M est Seifert fibrée ou une Sol variété de dimension 3.

Donc les décompositions en sphères et tores divisent M topologiquement en composantes où ces obstructions connues sont éliminées.

Conjecture d'hyperbolisation (Thurston). — *Soit M une variété de dimension 3, fermée et orientée. Alors chaque composante de la décomposition en sphères et tores admet une structure géométrique.*

La conjecture de géométrisation donne une classification complète et effective de toutes les variétés fermées, ressemblant de très près sur plusieurs aspects à la classification des surfaces. Plus précisément, elle réduit la classification à celle des variétés géométriques de dimension 3. La classification des variétés géométriques de dimension 3 est assez simple et complètement comprise, sauf dans le cas des variétés hyperboliques, qui reste un champ de recherche actif.

Pour illustrer la puissance de la conjecture de Thurston, voyons maintenant pourquoi elle implique la conjecture de Poincaré. Soit M une variété de dimension 3, simplement connexe ; alors la décomposition (1) implique que M doit être de type L. La conjecture de géométrisation dit alors que L est géométrique, et donc $L = \mathbb{S}^3/\Gamma$. Et donc $M = L = \mathbb{S}^3$.

La formulation de la conjecture de géométrisation et le travail de Thurston sur celle-ci ont véritablement revolutionné la topologie des variétés de dimension 3. Voir à ce propos [18] et [19] et les références contenues dans ces articles. Il a ainsi mis le doigt sur le fait que dans la classe de toutes les variétés de dimension 3 irréductibles, les variétés hyperboliques sont celles qui prévalent le plus, comme dans le cas des surfaces, et il a développé un vaste champ d'idées nouvelles et de méthodes neuves pour comprendre la géométrie des variétés de dimension 3. Thurston et de nombreux autres auteurs ont prouvé la conjecture de géométrisation dans des cas particuliers importants, le plus important d'entre eux étant le cas des variétés Haken : si M est une variété de dimension 3 Haken et irréductible (i.e. M contient une surface incompressible de genre supérieur ou égal à 1), alors la conjecture de géométrisation est vraie pour M.

Un ingrédient important dans l'approche de Thurston est la déformation et la dégénérescence des structures hyperboliques sur les variétés non compactes (ou la déformation des variétés hyperboliques singulières sur les variétés compactes). Les huit structures géométriques sont rigides au sens où il n'y a pas de géométrie qui les « interpole » continûment. Ainsi, sur un assemblage de telles structures, chaque composante doit dégénérer en passant d'une composante à l'autre ; il n'y a pas de structure unique ou de métrique donnant la géométrie totale de la variété M. Par exemple, sur la figure 2 les composantes H peuvent être des variétés hyperboliques séparées par des tores, des variétés Seifert fibrées S. Même si cet éclatement est bien défini, les géométries ne s'accordent pas bien dans la région du recollement, et métriquement il n'y a pas de région naturelle où faire ce recollement.

Indépendamment et à peu près simultanément, Gromov [6], [7] a aussi étudié la déformation et la dégénérescence de métriques riemanniennes plus générales ayant une courbure bornée plutot que constante. L'idée est que l'on peut contrôler le comportement d'une métrique, ou d'une famille de métriques en se donnant une borne uniforme sur le tenseur riemannien *Riem* de la métrique[4]. Cela conduit à l'important théorème de compacité de Gromov, le théorème de structure des variétés presque plates et la théorie du « collapsing » qui fut développée en détails par Cheeger et Fukaya.

Une version de ces résultats est particulièrement utile pour notre propos. Soit (M, g) une variété riemannienne fermée, avec volume normalisé et supposons que

$$|Riem| \leq \Lambda, \tag{2}$$

pour un certain Λ fini. La métrique g fournit alors une décomposition naturelle de M en parties fine et épaisse, $M = M^{\nu} \cup M_{\nu}$, où

$$\begin{aligned} M^{\nu} &= \{x \in M, Vol B_x(1) \geq \nu\}, \\ M_{\nu} &= \{x \in M, Vol B_x(1) \leq \nu\}; \end{aligned} \tag{3}$$

ici $B_x(1)$ est la boule géodésique de centre x et de rayon 1 et $\nu > 0$ est un réel arbitraire mais que l'on fixe petit. Maintenant considérons la classe de toutes les variétés de dimension n de volume 1 et qui vérifient (2), et considérons la décomposition correspondantes (3). Alors la géométrie et la topologie de M sont controlées a priori. Pour tout $\nu > 0$ donné, il existe un nombre fini (nombre ne dépendant que de λ et de ν) de type topologique possible pour M^{ν}. De plus, l'espace des métriques sur M^{ν} est compact dans un sens très naturel ; toute suite

[4] Le tenseur de courbure est une tenseur de type $(3, 1)$ compliqué qui s'exprime à l'aide des dérivées secondes de la métrique ; dans un système de coordonnées locales en un point il est donné par $R^{l}_{ijk} = -\frac{1}{2}(\partial_i\partial_k g_{jl} + \partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk})$.

de métriques sur M^ν possède une sous-suite qui converge au sens $C^{1,\alpha}$, $\alpha < 1$ (modulo les difféomorphismes). Pour ν assez petit, la partie fine M_ν admet une F-structure au sens de Cheeger et Gromov ; en dimension 3 cela signifie simplement que M_ν est une variété graphe à bord torique ou vide. En particulier la topologie de M_ν est fortement restreinte. Une métrique sur M_ν s'effondre très fortement au sens où les cercles dans les composantes Seifert fibrées et les tores recollant ces composantes ont un diamètre très petit, dépendant de ν ; voir la figure 3 pour une illustration schématique. De surcroit, pour tout $\nu > 0$ fixé, la distance entre M^ν et la partie fine arbitraire $M_{\nu'}$ devient arbitrairement grande lorsque $\nu'/\nu \to 0$.

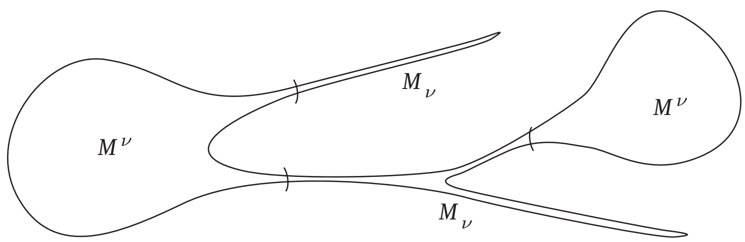


FIG. 3. Décomposition en partie fine et partie épaisse

Nous insistons sur le fait que des résultats similaires sont vrais localement et pour des variétés non compactes ; il en découle que l'hypothèse de volume normalisé faite plus haut n'est pas essentielle.

L'approche de Thurston du problème de géométrisation a fait faire d'énormes progrès sur la partie « hyperbolique » de la conjecture. En comparaison avec cela, très peu de progrès ont été faits sur la partie « à courbure positive » de la conjecture, par exemple la conjecture de Poincaré. Il est important de noter que parmi les huit géométries possibles, $\mathbb{H}^3$ et $\mathbb{S}^3$ sont les plus importantes à comprendre (dans le sens de la caractérisation des variétés géométriques). Les autres géométries (mixtes) sont en comparaison plus simples.

Du point de vue de la géométrie riemannienne, la conjecture de Thurston affirme l'existence d'une « meilleure » métrique sur une variété fermée de dimension 3 arbitraire. Dans le cas où M n'est pas elle-même géométrique, on peut autoriser cette métrique optimale à avoir des régions de dégénérescence. La discussion que nous avons eue précedemment ainsi que les figures qui l'illustrent suggèrent que ces dégénérescences doivent se produire via le pincement de sphères de dimension 2 (décomposition en sphère) et l'effondrement de variétés graphes le long de cercles ou de tores (décomposition en tore).

Le flot de Ricci

Une méthode pour trouver une métrique optimale sur une variété consiste à trouver une équation d'évolution naturelle, décrite par un champ de vecteurs dans l'espace des métriques, et essayer de prouver que le flot admet des solutions en tout temps et converge vers une limite (géométrique). Si le flot ne converge pas, les métriques correspondantes dégénèrent et on doit relier la dégénérescence à la topologie de M.

Il y a essentiellement un seul champ de vecteurs qui soit simple et naturel (ou plus précisement une famille de champs de vecteurs) dans l'espace des métriques. Il est donné par

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)} + \lambda(t)g(t). \tag{4}$$

Ici Ric est le tenseur de Ricci, donné en coordonnées locales par $R_{ij} = \sum_k R^k_{ijk}$, de telle façon que Ric est la trace du tenseur riemannien. La constante 2 est seulement placée là pour des raisons de confort et pourrait être changée en faisant un changement homotétique sur le temps ; $\lambda(t)$ est une constante dépendant du temps. Le flot de Ricci, introduit par Hamilton [11], est obtenu en prenant $\lambda = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)}. \tag{5}$$

La raison pour laquelle (4) est le seul flot naturel est essentiellement la même que celle qui conduit aux équations du champ d'Einstein en relativité générale. Le tenseur de Ricci est une forme bilinéaire symétrique, tout comme la métrique. À part les multiples de la métrique, c'est la seule forme bilinéaire symétrique qui dépende au plus des dérivées secondes de la métrique et invariante par changement de coordonnées. En faisant un changement homotétique sur la métrique et sur le temps, on peut transformer (5) en (4). Par exemple, en faisant un changement homothétique sur la métrique de telle façon que le volume de $(M, g(t))$ soit constant on récupére (4) avec $\lambda(t) = \frac{2}{Vol(M,g(t))}\int_M R_{g(t)}$ où R est la courbure scalaire.

Dans un système de coordonnées adéquat, l'équation (5) a une forme très naturelle. En effet, au temps t, choisissons des coordonnées harmoniques locales de telle façon que les fonctions coordonnées soient localement des fonctions harmoniques pour $g(t)$. (5) prend alors la forme

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g), \tag{6}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les fonctions pour la métrique $g = g(t)$, et Q est un terme quadratique en g et les dérivées d'ordre inférieur de g. C'est une équation de la chaleur non linéaire pour g_{ij}. À partir de l'analyse de cette équation aux dérivées partielles, on obtient l'existence et l'unicité (pour une donnée initiale arbitraire) d'une solution de cette équation sur un intervalle de temps. C'est la raison de la présence du signe $-$ dans (5) ; un signe $+$ donne une équation de la chaleur « rétroactive » (c'est-à-dire dans les temps antérieurs), qui n'a pas de solution en général.

Donnons quelques exemples de solutions explicites pour le flot de Ricci. Si la métrique initiale est à courbure de Ricci constante, $Ric = a.g$, alors $g(t) = (1 - 2at)g(0)$. Notons que si $a > 0$ le flot contracte la métrique, tandis que si $a < 0$ le flot dilate la métrique, et cela uniformément dans toutes les directions. Ainsi si on fait un changement homothétique pour avoir un volume constant la solution est constante. Les points stationnaires du flot de Ricci avec volume normalisé sont exactement les métriques d'Einstein, c'est-à-dire les métriques à courbure de Ricci constante. En dimension 3 les métriques d'Einstein sont à courbure constante et donnent donc les modèles $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, si $Ric(x,t) > 0$ alors le flot contracte la métrique $g(t)$ au voisinage de x, dans le futur, tandis que si $Ric(x,t) < 0$, alors le flot dilate $g(t)$ au voisinage de x. D'une façon générale, il y aura des directions à courbure de Ricci positives et des directions à courbure de Ricci négatives le long desquelles la métrique se contracte ou se dilate localement.

Supposons que $g(0)$ est une métrique produit sur $\mathbb{S}^1 \times \Sigma$, où Σ est une surface à courbure constante. Alors $g(t)$ reste une métrique produit, la longueur restant constante sur le facteur $\mathbb{S}^1$ et se contractant ou se dilatant sur la surface selon le signe de la courbure de Σ.

Finalement, le flot de Ricci commute avec l'action du groupe des difféomorphismes et ainsi préserve les isométries de la métrique initiale. Ainsi, les variétés géométriques de dimension 3 restent géométriques. Pour les géométries mixtes « négatives » ($\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\tilde{S}L(2,\mathbb{R})$, *Nil* et *Sol*), le flot de Ricci normalisé contracte les fibres $\mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{T}^2$ et dilate le facteur constitué par la surface de base ; pour les géométries mixtes « positives » $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, le flot de Ricci normalisé contracte le facteur $\mathbb{S}^2$ et dilate le facteur $\mathbb{R}$.

Maintenant considérons le flot de Ricci (5) en général. D'après la forme de l'équation il est clair que le flot $g(t)$ existera si et seulement si la courbure de Ricci reste bornée. Cela suggère le fait que l'on peut considérer le flot induit sur la courbure par le flot sur la métrique. Le plus simple étant le flot induit par le flot sur la métrique sur la courbure scalaire :

$$\frac{d}{dt} R = \Delta R + 2|Ric|^2. \tag{7}$$

En évaluant cette relation en un point qui réalise le minimum R_{min} de R sur M on obtient le fait important que R_{min} est monotone croissante le long du flot. En particulier le flot de Ricci preserve la positivité de la courbure scalaire (en toute dimension). De plus si $R_{min}(0) > 0$, par le même argument on a $\frac{d}{dt} R_{min} \geq \frac{2}{n} R_{min}^2$ (notons qu'on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|Ric|^2 \geq \frac{1}{n} R^2$). Une simple intégration par parties donne donc

$$t \leq \frac{n}{2R_{min}(0)}. \tag{8}$$

Ainsi le flot de Ricci existe pour un temps fini T et $T \leq \frac{n}{2R_{min}(0)}$. Par opposition, dans les régions où la courbure de Ricci est définie négative le flot existe en tout temps.

L'evolution de la courbure de Ricci a la même forme que l'équation (7) :

$$\frac{d}{dt} R_{ij} = \Delta R_{ij} + \tilde{Q}_{ij}. \tag{9}$$

L'expression de $\tilde{Q}$ est beaucoup plus compliquée que le second terme du membre de droite de (7) mais ne fait intervenir que des termes quadratiques en la courbure. Malgré tout $\tilde{Q}$ fait intervenir le tenseur riemannien et pas seulement la courbure de Ricci (tout comme (7) fait intervenir la courbure de Ricci et pas seulement la courbure scalaire). Un fait important en dimension 3 est que le tenseur riemannien est entièrement déterminé par le tenseur de Ricci. Cela implique qu'en général le flot de Ricci a de meilleures chances de « marcher » en dimension 3. Par exemple, l'analyse du terme $\tilde{Q}$ montre que le flot de Ricci conserve la positivité du tenseur de Ricci en dimension 3 : si $Ric_{g(0)} > 0$ alors $Ric_{g(t)} > 0$ pour tout $t > 0$. Ceci n'est pas le cas en dimension plus grande. D'un autre coté, en dimension supérieure ou égale à 3, le flot de Ricci ne preserve pas la négativité du tenseur de Ricci pas plus qu'il ne preserve une borne inférieure $Ric \geq -\lambda$ pour $\lambda > 0$. Dans tout le reste de cet article nous supposerons que la dimension de la variété est 3.

Dans le théorème de compacité de Gromov et la décomposition fine/épaisse (3), l'hypothèse $|Riem|$ bornée peut aussi être remplacée par une borne sur $|Ric|$ (car nous sommes ici en dimension 3). Il en découle que sur les intervalles de temps où $|Ric|$ reste bornée les métriques $g(t)$ sont toutes quasi-isométriques : à savoir qu'il existe c et C dépendant du temps t tels que $cg(0) \leq g(t) \leq Cg(0)$. De ce fait, la région fine M_ν pour $\nu << 1$ ne peut apparaître, sous l'hypothèse $|Ric|$ bornée, que pour des temps très grands.

De tout cela il vient que le flot de Ricci est très naturel et a de nombreuses propriétés intéressantes. On peut en effet voir des liens avec la vision de Thurston des variétés de dimension 3. Pourtant, la première indication que le flot de Ricci est un outil important pour traiter des problèmes géométriques est le résultat suivant de Hamilton :

Space form theorem. — *Si $g(0)$ est une métrique à courbure de Ricci strictement positive sur une variété de dimension 3, alors le flot normalisé a une solution en tout temps et converge vers la métrique standard de $\mathbb{S}^3/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe fini de $SO(4)$ agissant librement sur $\mathbb{S}^3$.*

Ainsi le flot de Ricci « géométrise » les variétés de dimension 3 à courbure de Ricci strictement positive. Depuis ce résultat important, la question de savoir si ce résultat peut être étendu aux variétés à courbure scalaire strictement positive reste complètement ouverte.

Même si l'évolution de la courbure le long du flot est très compliquée pour des métriques initiales quelconques, une analyse détaillée de (9) donne le résultat suivant :

Estimation sur le pincement de la courbure : [10], [12]. — *Soit $g(t)$ une solution du flot de Ricci sur une variété fermée M de dimension 3. Alors il existe une fonction φ $]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, qui tend vers 0 en l'infini, et une constante C ne dépendant que de la métrique initiale $g(0)$ telles que*

$$Riem(x,t) \geq -C - \varphi(R(x,t)).|R(x,t)|. \tag{10}$$

Cet énoncé signifie que toutes les courbures sectionnelles R_{ijji} de $g(t)$, où e_i est une base orthonormée en (x,t), sont minorées par le membre de droite de (10).

Cette estimation n'implique pas une borne inférieure sur $Riem(x,t)$ uniforme en temps. Pourtant lorsqu'on la combine avec le fait que la courbure scalaire est minorée uniformément en temps, elle implique que lorsque $R(x,t) >> 1$ alors $|Riem(x,t)| >> 1$. Par conséquent pour controler la taille de $|Riem|$, il est suffisant de controler la courbure scalaire par le haut. Ceci est tout à fait remarquable puisque la courbure scalaire est un invariant de la métrique beaucoup moins rigide que le tenseur riemannien. De surcroit, aux points où la courbure est assez grande, (10) montre que $\frac{Riem(x,t)}{R(x,t)} \geq -\delta$ avec δ petit. Il est donc clair que si on normalise la métrique de façon que $R(x,t) = 1$ alors $Riem(x,t) \geq -\delta$. Pour une telle normalisation la métrique a une courbure presque positive au voisinage de (x,t).

Inégalité de Harnack : [9]. — *Soit $(N, g(t))$ une solution du flot de Ricci telle que $Riem \geq 0$ et $|Riem|$ bornée, et supposons que $g(t)$ est une métrique complète sur N. Alors pour tout $0 < t_1 \leq t_2$,*

$$R(x_2, t_2) \geq \frac{t_1}{t_2} exp\left(-\frac{d_{t_1}(x_1, x_2)}{2(t_2 - t_1)}\right) R(x_1, t_1), \tag{11}$$

où d_{t_1} est la distance sur (M, g_{t_1}).

Cette estimation nous permet de relier ou de controler la géométrie des solutions en différents points de l'espace-temps.

L'obtention d'une estimée analogue à celle de (11) en général (*i.e.* sans l'hypothèse $Riem \geq 0$) a été l'un des obstables majeurs pour des progrès plus importants sur le flot de Ricci.

L'analyse faite plus haut montre que le flot de Ricci semble favoriser la courbure strictement positive. Le flot tend à évoluer de manière à rendre la courbure plus positive, et les résultats les plus forts ont été prouvés dans le cas de la courbure strictement positive, et cela contraste d'une certaine façon avec l'approche de Thurston.

La formation des singularités

L'analyse la plus profonde du flot de Ricci concerne les singularités pouvant apparaître le long du flot en temps fini. Comme (8) le montre déjà, le flot de Ricci n'existera pas en général en tout temps. Dans le cas d'une métrique initiale à courbure de Ricci strictement positive, ce problème est écarté grâce à une renormalisation du volume. Le Space Form Theorem d'Hamilton montre que le flot normalisé existe en tout temps et converge C^∞ vers la métrique ronde. Pourtant la situation est nécessairement plus compliquée en dehors de la classe des variétés à courbure de Ricci strictement positive. Considérons par exemple des métriques initiales à courbure scalaire strictement positive. Toute variété qui est une somme connexe de facteurs pouvant être $\mathbb{S}^3/\Gamma$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ possède une métrique à courbure scalaire strictement positive (comparer cela avec la décomposition en sphère (1)). Ainsi pour des raisons topologiques évidentes, le flot de Ricci normalisé ne peut pas converger vers une métrique ronde ; même le flot normalisé peut développer des singularités.

Des singularités apparaissent fréquemment dans de nombreux types d'EDP non linéaires et celles-ci ont été intensivement étudiées depuis plusieurs décennies. Tout spécialement dans un contexte géométrique, le problème classique pour comprendre la structure des singularités est de renormaliser ou de faire un changement d'échelle sur une suite qui converge vers la singularité de manière à rendre la solution bornée et essayer de passer à la limite sur la solution renormalisée. Une telle solution limite sert de modèle pour cette singularité, et l'on peut espérer (ou attendre) que la singularité possèdera certaines caractéristiques qui la rendra plus simple qu'une solution arbitraire de l'équation.

Un singularité ne peut se former le long du flot de Ricci que là où la courbure devient non bornée. Supposons $\lambda_i^2 = |Riem|(x_i, t_i) \to \infty$ pour une suite de points $x_i \in M$ et une suite de temps $t_i \to T < \infty$. Il est alors naturel de considérer les métriques renormalisées et le temps renormalisé

$$\tilde{g}_i(\tilde{t}_i) = \lambda_i^2 g(t), \quad \tilde{t}_i = \lambda_i^2(t - t_i). \tag{12}$$

Les métriques $\tilde{g}_i$ sont aussi solutions du flot de Ricci et sont à courbure bornée en $(x_i, 0)$. Pour un choix adéquat de x_i et t_i, la courbure sera bornée au voisinage de x_i, et pour des temps voisins négatifs $\tilde{t}_i \leq 0$; par exemple, on pourrait prendre les points où la courbure est maximale sur $(M, g(t))$, $0 \leq t \leq t_i$.

La renormalisation (12) dilate les distances d'un facteur λ_i et le temps d'un facteur λ_i^2. Donc on en vient à étudier de très petites régions, de tailles spatiales d'ordre $r_i = \lambda_i^{-1}$, et en utilisant un « microscope » pour examiner les phénomènes à petite échelle dans cette région sur une échelle de taille environ 1. Bien sûr, un changement de coordonnées est implicitement fait dans cette analyse, i.e. l'utilisation de difféomorphismes locaux en accompagnement de la renormalisation de la métrique.

Une version locale du théorème de compacité de Gromov autorise donc à passer à la limite sur les solutions du flot de Ricci, au moins localement en temps et espace, à condition que les volumes locaux de la renormalisation soient minorés par une quantité strictement positive ; plus précisément on a besoin que $x_i \in M^\nu(\tilde{g}_i(\tilde{t}_i))$, pour un certain $\nu > 0$; voir (3). En terme de flot original (non normalisé), cela signifie que la métrique $g(t)$ ne doit pas s'effondrer localement, à l'echelle de sa courbure, *i.e.*

$$VolB_{x_i}(r_i, t_i) \geq \nu r_i^3.$$

Une limite maximal connexe $(N, \bar{g}(\bar{t}), x)$ contenant le point base $x = \lim x_i$ est alors appelée un modèle singulier. Observons que la topologie de la limite N peut très bien être différente de celle de la variété originale M, beaucoup de celle-ci pouvant avoir été envoyée à l'infini par la renormalisation.

Pour décrire l'utilité potentielle de ce procédé, supposons que nous avons un non effondrement local sur les métriques normalisées et que nous avons choisi des points en temps et en espace de courbure maximale. On a alors, au moins pour une sous-suite, une solution limite du flot de Ricci $(N, \bar{g}(\bar{t}), x)$, avec point base x, définie au moins sur $]-\infty, 0]$; de plus $\bar{g}(\bar{t})$ est une métrique riemannienne complète sur N. Elles sont appelées « ancient solutions » du flot de Ricci dans la terminologie d'Hamilton. Les estimations dans (10) et (11) peuvent maintenant être utilisées pour montrer que les modèles singuliers ont en fait d'importantes caractéristiques qui les rendent plus simples que les solutions générales du flot de Ricci. Comme nous le disions à la suite de (10), l'estimation de pincement implique que la limite est à courbure positive ou nulle. De plus, la topologie des variétés complètes N à courbure positive ou nulle est complètement comprise en dimension 3. Si N est non compacte alors N est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ ou un quotient de ces variétés. Si N est compacte, alors une forme légèrement plus forte du théorème d'Hamilton ci-dessus implique que N est difféomorphe à $\mathbb{S}^3/\Gamma$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1$. De plus l'inégalité de Harnack (11) est vraie à la limite.

Ces propriétés générales des modèles singuliers sont certainement encourageants. Néanmoins il reste de nombreux problèmes à résoudre pour tirer un vrai bénéfice de ceci.

I On doit prouver le non-effondrement à l'échelle de la courbure pour obtenir un modèle singulier.

II En général, la courbure peut exploser à différentes échelles ou vitesse, et il n'est pas entièrement suffisant de comprendre seulement les modèles singuliers aux points de courbure maximale. Ce type de phénomène (appelé généralement « bubbling ») se produit dans beaucoup d'autres problèmes variationnels issus de la géométrie, par exemple les applications harmoniques, les champs de Yang-Mills, les métriques d'Einstein, et d'autres. Dans de tels problèmes elliptiques ces problèmes d'échelles multiples ont effectivement été résolus.

III Même en sachant résoudre les deux premiers problèmes listés ci-dessus, on doit tout de même relier la structure des singularités avec la topologie de la variété sous-jacente.

L'étude de la formation des singularités le long du flot de Ricci a été initiée par Hamilton [10] ; voir aussi [4] pour un survey récent. Même s'il y a eu de nombreux progrès techniques en la matière pendant la dernière décennie, les problèmes essentiels sur l'existence et la structure des modèles singuliers et de leurs relations avec la topologie restaient ouverts jusqu'à l'apparition des travaux de Perelman en 2002 et 2003.

Le travail de Perelman

Le travail récent de Perelman [15]-[17] (ainsi qu'un article moins crucial et qui reste à paraître) implique une solution complète de la conjecture de géométrisation. Ceci se fait grâce à l'introduction de nombreuses idées hautement originales en géométrie et de nombreuses techniques nouvelles pour comprendre le flot de Ricci. En particulier, le travail de Perelman résout complètement les questions I-III ci-dessus. Commentons maintenant, necessairement brièvement, certaines des avancées dues à Perelman.

I Non effondrement

Considérons la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert

$$\mathcal{R}(g) = \int_M R(g)dv(g) \tag{13}$$

définie sur l'espace des métriques riemanniennes $\mathbb{M}$ sur une variété M. Les points critiques de $\mathcal{R}$ sont les métriques Ricci-plates ($Ric = 0$). Cette fonctionnelle peut être modifiée, par exemple en ajoutant une constante cosmologique -2Λ, pour donner une fonctionnelle dont les points critiques seraient des métriques d'Einstein à courbure de Ricci constante[5]. Il est naturel d'essayer de relier le flot de Ricci

[5] L'action (13) mène à l'équation de champ d'Einstein dans le vide en relativité générale pour les métriques de Lorentz sur une variété de dimension 4. Le terme $\lambda(t)$ dans (4) est l'analogue de la constante cosmologique.

à $\mathcal{R}$; par exemple la flot de Ricci est-il le flot du gradient de $\mathcal{R}$ (par rapport à la métrique naturelle L^2 sur $\mathbb{M}$) ? Même s'il semblait que ce devait être presque vrai, il fut reconnu que tel n'est pas le cas. En fait le flot du gradient de $\mathcal{R}$ n'existe même pas puisqu'il implique une équation rétroactive de la chaleur pour la courbure scalaire R (similaire à (7) mais avec un signe moins devant le laplacien).

Considérons maintenant la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{F}(g,f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} dv(g). \tag{14}$$

C'est une fonctionnelle sur l'espace plus grand $\mathbb{M} \times C^\infty(M,\mathbb{R})$, ou de façon équivalente une famille de fonctionnelles sur $\mathbb{M}$ paramétrée par $C^\infty(M,\mathbb{R})$[6]. Prenons une mesure lisse dm sur M et considérons le couplage de Perelman demandant que (g,f) satisfasse

$$e^{-f} dg(g) = dm. \tag{15}$$

La fonctionnelle ainsi obtenue

$$\mathcal{F}^m(g,f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) dm \tag{16}$$

devient une fonctionnelle sur $\mathbb{M}$. Au premier abord il pourrait sembler que ceci est beaucoup plus compliqué que (13) ; pourtant pour tout $g \in \mathbb{M}$, il existe une large classe de fonctions f (ou de mesures dm) telles que le flot du gradient L^2 de $\mathcal{F}^m$ existe en g, et il est donné par

$$\frac{d\tilde{g}}{dt} = -2(Ric_{\tilde{g}} + D^2 f), \tag{17}$$

où $D^2 f$ est la hessienne de f pour la métrique $\tilde{g}$. L'équation d'évolution (17) pour $\tilde{g}$ est simplement le flot de Ricci (5) modifié par une difféomorphisme infinitésimal : $D^2 f = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* \tilde{g})$, où $\frac{d}{dt}\varphi_t = \nabla f$. Il s'ensuit que le flot du gradient de $\mathcal{F}^m$ est le flot de Ricci aux difféomorphismes près. Différents choix de dm correspondent à des choix différents de difféomorphismes. En particulier la fonctionnelle $\mathcal{F}^m$ croit le long du flot de Ricci.

Que peut-on faire avec cette fonctionnelle plus compliquée ? Il s'avère qu'étant donnée une métrique initiale $g(0)$ et $t > 0$, la fonction f (et ainsi la mesure dm) peut être librement déterminée en $g(t)$ ($g(t)$ étant l'évolution de $g(0)$ le long du flot de Ricci (5)). Perelman utilise alors cette « liberté » pour vérifier la géométrie de $g(t)$ avec des choix adéquats de f.

Par exemple, on peut montrer par une analyse très simple de $\mathcal{F}^m$ que l'effondrement ou le non effondrement de la métrique $g(t)$ au voisinage d'un point $x \in M$ peut être detecté à partir de la taille de $\mathcal{F}^m(g(t))$ en choisissant e^{-f} de telle façon qu'elle soit une approximation d'une masse de Dirac en x. Plus l'effondrement de $g(t)$ en x est grand plus la valeur de $\mathcal{F}^m(g(t)$, sera négative. L'effondrement est donc écarté à toutes les echelles en temps fini en associant ceci avec le fait que la fonctionnelle $\mathcal{F}^m$ croit avec le temps le long du flot de Ricci. En fait, cet argument

[6] La fonctionnelle (14) apparait en théorie des cordes comme énergie de moindre action [5] ; la fonction ou le champ scalaire f est appelée la dilatation. Il est intéressant de noter dans ce contexte que le champ gravitationnel et le champ de dilatation proviennent simultanément de la quantification du « string world sheet » (σ-model) [5]

est mis en œuvre en utilisant une fonctionnelle plus compliquée que $\mathcal{F}^m$, et invariante par changement d'échelle ; motivé par certaines analogies avec la physique statistique Perelman l'appelle la fonctionnelle entropie.

Modèles singuliers. — Une seconde avancée de [15] est essentiellement une classification de tous les modèles singuliers complets $(N, g(t))$ pouvant apparaître en temps fini. Ici complet signifie que la métrique $g(0)$ est une métrique complète sur N. Si N est compacte et lisse, il s'ensuit grâce au space-form theorem d'Hamilton que N est difféomorphe à $\mathbb{S}^3/\Gamma$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^2$. Dans le cas plus difficile où N est complète non compacte, Perelman prouve que la géométrie de N à l'infini est la plus simple et la plus naturelle possible. Au temps $t = 0$ et en un point x avec $r(x) = dist(x, x_0) >> 1$, pour un point base fixé x_0, un voisinage « de grande taille » de x à une echelle où $R(x) = 1$ est ε-proche d'un voisinage « de grande taille » sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ muni de sa métrique standard. Ici ε peut être rendu arbitrairement petit en choisissant $r(x)$ grand. Une telle région est appellée ε-neck. Ainsi la géométrie à l'infini de N est celle d'une réunion de ε-necks, où le rayon de $\mathbb{S}^2$ variant lentement peut être soit uniformément borné soit diverger vers l'infini, mais seulement à une vitesse inférieure à celle de $r(x)$. De surcroit, cette structure est aussi valable sur un intervalle long pour des temps négatifs, de telle façon que sur ces régions la solution est proche de celle du flot de Ricci rétroactive sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Topologiquement N est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ ou (N, g) est isométrique à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Perelman montre que ce résultat de structure pour les modèles singuliers est aussi vrai pour la solution $g(t)$ au voisinage d'un temps singulier T. Ainsi, pour un point de base (x, t) où la courbure est assez grande, le changement d'échelle fait en (12) sur l'espace-temps par la courbure est suffisamment proche, sur des domaines compacts de grande taille, de domaines de grande taille sur un modèle singulier complet. Le modèle singulier complet « idéal » décrit en réalité la géométrie et la topologie près d'une singularité. Par conséquent, on a une compréhension détaillée de la géométrie à petite échelle et de la topologie partout sur $(M, g(t))$ pour t proche de T. En particulier cela montre une version générale de l'inégalité de Harnack (11).

Ces résultats sont bien sûr assez techniques et les preuves ne sont pas simples. Pourtant elles ne sont pas exceptionnellement difficiles et elles reposent sur des idées novatrices et des outils nouveaux pour comprendre le flot de Ricci. Une idée clé est l'utilisation du résultat de non effondrement ci-dessus à toutes les echelles.

III Lien avec la topologie

Le point important maintenant est l'apparition de sphères de dimension 2 au voisinage des singularités. Rappellons, d'après (1), que l'on doit d'abord faire une décomposition en sphère de M avant de pouvoir la géométriser. Il n'y a pas de géométrie correspondant à la décomposition en sphère[7]. Alors que la décomposition en sphère est l'opération la plus simple topologiquement, géométriquement et analytiquement elle est de loin la plus difficile à comprendre. Comment peut-on repérer des sphères de dimension 2 dans M sur lesquelles faire de la chirurgie à partir de la géométrie donnée par une métrique ? Nous allons voir maintenant que de telles

[7] On pourrait penser que la géométrie de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ correspond à la décomposition en sphère mais ceci n'est pas tout à fait exact ; au mieux ceci pourrait avoir un sens dans un contexte limité.

sphères, plongées dans les ε-necks dont on a parlé ci-dessus, apparaissent naturellement au voisinage des singularités du flot de Ricci.

L'idée est alors de faire de la chirurgie sur M le long de sphères de dimension 2 juste avant le temps T d'apparition de la première singularité. La figure 4 donne une description schématique d'une métrique partiellement singulière $g(T)$ sur M. La métrique $g(T)$ est lisse sur un domaine maximal Ω, où la courbure est localement bornée mais singulière, *i.e.* pas complètement définie, sur le complémentaire de l'ensemble où la courbure explose lorsque $t \to T$.

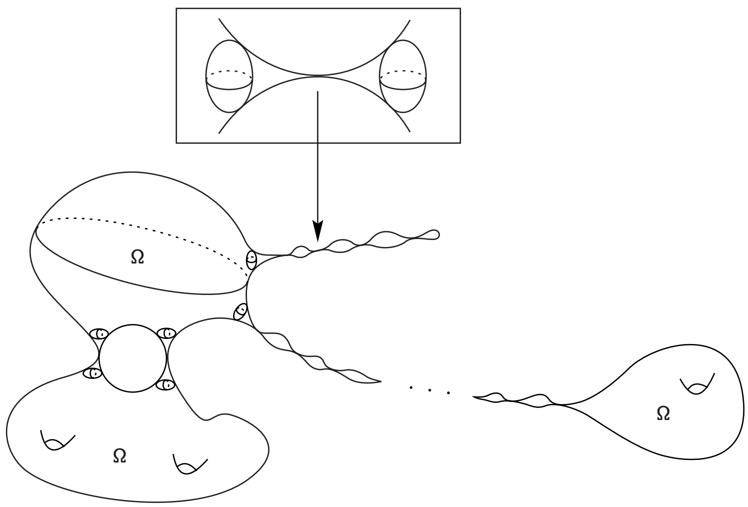


FIG. 4. Cornes sur la limite singulière

Supposons d'abord que Ω est vide, de telle manière que la courbure de $g(t)$ explose partout sur M quand $t \to T$. On dit que la solution du flot de Ricci s'éteint au temps T. Notons que $R(x,t) >> 1$ pour tous $x \in M$ et t au voisinage de T (d'après l'estimation de pincement (10)). Etant entendu que nous avons une compréhension complète des modèles singuliers, il n'est pas difficile de voir que M est alors difféomorphe à $\mathbb{S}^3/\Gamma$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1$. Dans cette situation on a fini et M est géométrique.

Si Ω n'est pas vide le point important est que les petits voisinages de $\partial\Omega$ sont composés de cornes. Une corne est une métrique sur $\mathbb{S}^2 \times [0,\delta]$ où le facteur $\mathbb{S}^2$ est presque rond de rayon $\rho(r)$ avec $\rho(r)$ petit et $\frac{\rho(r)}{r} \to 0$ lorsque r tend vers 0. Alors une corne est une union de ε-necks assemblés à des échelles de plus en plus petites. La figure 4 représente une métrique partiellement singulière sur une variété lisse $\mathbb{S}^2 \times I$, constituée de paires de cornes jointes par une métrique dégénérée. Au temps T il peut y avoir une infinité de composantes de Γ, de taille arbitrairement petite, contenant de telles cornes. Pourtant seul un nombre fini de telles composantes sont des cornes doubles, qui sont toutes topologiquement de la forme $\mathbb{S}^2 \times I$. En termes quantitatifs, il existe une constante petite $\rho_0 > 0$ telle que si Ω ne contient pas de cornes contenant une sphère $\mathbb{S}^2 \times \{\delta\}$ de rayon supérieur ou égal à ρ_0, alors, comme ci-dessus dans le cas Ω vide, M est difféomorphe à $\mathbb{S}^3/\Gamma$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{S}^2 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{S}^1$ et on a fini. S'il existe des cornes contenant une sphère $\mathbb{S}^2 \times \delta$ d'une taille fixée ρ_0 dans Ω, alors on peut faire de la chirurgie sur chacune de ces cornes en la tronquant le long de $\mathbb{S}^2$ de rayon ρ_0 et en recollant une boule de dimension 3, donnant ainsi une famille disjointe de variétés de dimension 3.

Maintenant que l'on a déconnecté M par chirurgie sur des sphères de dimension 2 en un nombre fini de composantes, on continue ainsi avec le flot de Ricci sur chaque composante. Un argument conceptuellement simple mais techniquement difficile basé sur la décroissance du volume associé à chaque chirurgie, montre que le nombre de ces chirurgies est localement fini : sur tout segment de temps il n'y a qu'un nombre fini de temps où des singularités peuvent se former.

Comme exemple concret supposons que la métrique de départ soit à courbure scalaire strictement positive. Alors l'estimée (8) montre que le flot de Ricci est complètement terminé, i.e. il s'éteint en temps fini. Ainsi on ne fait qu'un nombre fini de chirurgies sur M le long du flot de Ricci et il s'ensuit que M est difféomorphe à une somme connexe d'un nombre fini de facteurs de la forme $\mathbb{S}^3/\Gamma$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Le point important de cette procédure est que si successivement on ignore ces composantes qui s'éteignent en temps fini (et qui ont déja été identifiée topologiquement), le flot de Ricci avec chirurgie existera sur $[0, \infty[$. À quoi ressemble alors la géométrie des composantes $\{\hat{M}_i\}$ pour un temps très grand T_0 ? Ici la décomposition fine et épaisse de Gromov-Thurston apparaît. Fixons $\hat{M} \in \{\hat{M}_i\}$ et regardons la métrique normalisée $\hat{g}(t) = t^{-1}g(t)$, pour $t = T_0$. Il est facile de voir en utilisant l'équation du flot de Ricci que le volume de $(\hat{M}, g(t))$ est uniformément borné. Pour ν assez petit Perelman montre qu'il y a un contrôle suffisant sur la partie ν-épaisse $\hat{M}^\nu$ pour montrer que $\hat{M}^\nu$ est difféomorphe à une variété hyperbolique complète H de dimension 3 (ayant un nombre fini de composantes connexes). Le flot de Ricci existe sur $\hat{M}^\nu$ en tout temps, et les métriques normalisées $t^{-1}g(t)$ convergent vers la métrique hyperbolique de courbure $-\frac{1}{4}$ lorsque $t \to \infty$. Alors qu'il y a moins de contrôle sur la partie ν-fine, il y en a assez pour conclure que $\hat{M}_\nu$ est difféomorphe à une variété graphe G (ayant un nombre fini de composantes). Même s'il y peut y avoir une infinité de chirurgies cette fois pour pouvoir continuer le flot, elles ont toutes lieu dans G. Ainsi la variété originale M a été décomposée topologiquement (pour des temps très grands)

$$M = (K_1 \sharp \dots \sharp K_p) \sharp (\sharp_1^q \mathbb{S}^3/\Gamma_i) \sharp (\sharp_1^r \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

Perelman a montré récemment [17] que les facteurs $\mathbb{S}^3/\Gamma$ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ s'éteignent nécessairement en temps fini (avec une borne sur ce temps d'extinction qui dépend de la métrique initiale), et donc seuls les facteurs K subsistent après un temps assez long (ce résultat n'est de toute façon pas nécessaire pour la conjecture de géométrisation).

De plus chaque $K = K_i$ se décompose en partie fine et épaisse comme union

$$K = H \cup G,$$

où H est une variété hyperbolique complète de volume fini (qui peut être non connexe) et G est une variété graphe (qui peut être non connexe). L'union de H et G se fait le long d'une collection de tores plongés. Perelman utilise les preuves de [11] ou [1] et [2] pour conclure que chacun de ces tores est incompressible dans K.

Ce procédé donne donc à la fois la décomposition en sphère et en tore de la variété M. Même s'il n'est pas avéré que le flot de Ricci détecte les décompositions de G en composantes Seifert fibrées, ceci devrait être comparativement plutôt élémentaire d'un point de vue topologique. Les composantes toriquement irréductibles de K sont en fait des variétés hyperboliques.

Ceci termine notre survol de la conjecture de géométrisation. Le travail de Perelman a provoqué beaucoup d'émulation au sein de la communauté mathématique, ainsi que parmi les gens qui s'intéressent à la science en général. Alors même que des vérifications détaillées du travail de Perelman sont en cours, la beauté et la profondeur de ses contributions sont évidentes.

Je suis très reconnaissant à Bruce Kleiner, John Lott et Jack Milnor pour leurs nombreuses suggestions et commentaires, qui ont contribués à améliorer de manière significative le contenu de cet article.

Références

[1] M. Anderson, Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds, in Comparison Geometry, (Berkeley 1993-94), MSRI Publications, **30**, (1997), 49-82.
[2] M. Anderson, Scalar curvature and the existence of geometric structures on 3-manifolds, I, Jour. Reine Angew. Math. **553**, (2002), 125-182.
[3] L. Andersson, The global existence problem in general relativity, (preprint, 1999), gr-qc/9911032, to appear in "50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity", eds. P.T. Chruściel and H. Friedrich.
[4] H.-D. Cao and B. Chow, Recent developments on the Ricci flow, Bull. Amer. Math. Soc, **36**, (1999), 59-74.
[5] E. D'Hoker, String theory, in Quantum Fields and Strings : A Course for Mathematicians, **2**, Amer. Math. Soc. (1999).
[6] M. Gromov, Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes, Cedic/Fernand Nathan, Paris, (1981).
[7] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Publ. Math. I.H.E.S. **50**, (1982), 5-100.
[8] R. Hamilton, Three manifolds of positive Ricci curvature, Jour. Diff. Geom. **17**, (1982), 255-306.
[9] R. Hamilton, The Harnack estimate for the Ricci flow, Jour. Diff. Geom. **37**, (1993), 225-243.
[10] R. Hamilton, Formation of singularities in the Ricci flow, in Surveys in Differential Geometry, Vol. 2, International Press, (1995), 7-136.
[11] R. Hamilton, Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds, Comm. Anal. Geom. **7**, (1999), 695-729.
[12] T. Ivey, Ricci solitions on compact three-manifolds, Diff. Geom. and Appl. **3**, (1993), 301-307.
[13] B. Kleiner and J. Lott, Ricci flow website : `http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html`
[14] J. Milnor, Towards the Poincaré Conjecture and the classifiation of 3-manifolds, (preprint, 2003), to appear in Notices Amer. Math. Soc.
[15] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, (preprint, 2002), `math.DG/0211159`.
[16] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, (preprint, 2003), `math.DG/0303109`.
[17] G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, (preprint, 2003), math.DG/0307245.
[18] W. Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds, (preprint, 1978), Princeton University ; available online at `http://www.msri.org/publications/books/gt3m`, and Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1, Princeton University Press, (1997).
[19] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **6**, (1982), 357-381.

EDP SCIENCES

Quadrature

Le magazine de mathématiques « pures et épicées »

- **Alphanumérisme**
- **Probabilités et statistiques**
- **Étymologie**
- **Arithmétique**
- **Analyse**
- **Histoire des mathématiques**
- **Géométrie**
- **Logique**
- **Échecs hétérodoxes**
- **Coin des problèmes**
- **Physique mathématique**
- **Nouvelles**

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**. La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université. Revue publiée avec le concours du Centre national du livre.

BON DE COMMANDE

NOM INSTITUTION

ADRESSE

CODE POSTAL VILLE/PAYS

Paiement : ❒ Chèque (à l'ordre d'EDP Sciences)
❒ Carte de crédit : ❒ Visa
❒ Eurocard/Mastercard
❒ American Express

DATE/SIGNATURE

Carte No: ....
Date de validité : ....

ISSN 1142-2785 • 4 numéros	**France et Europe** (TTC)	**Reste du Monde** (HT)
Abonnement pour 1 AN	❒ 32€	❒ 37€
Abonnement pour 2 ANS	❒ 58€	❒ 68€

Veuillez retourner ce bon de commande

EDP Sciences • 17 av. du Hoggar • B.P. 112 • P.A. Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A
Tél.: 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax: 33 (0)1 69 86 06 78 • E-mail: quadrature@edpsciences.org

ENSEIGNEMENT

Le 14 janvier 2004, s'est tenue à l'Institut Henri Poincaré une réunion sur le thème Mathématiques dans les années de Licence : spécialisation et pluridisciplinarité. Certains collègues y ont présenté des exemples d'enseignement des mathématiques dans un cadre pluridisciplinaire, dans les années qui suivent le Baccalauréat. Voici les interventions de deux d'entre eux.

Quelles mathématiques pour les physiciens

Gilles Christol

Le passage au LMD a été l'occasion d'une (trop courte) réflexion sur notre manière d'enseigner les mathématiques. En particulier, elle a été l'occasion de se poser à nouveau les questions suivantes

1) Quelles mathématiques enseigner dans les filières de sciences de l'ingénieur et de sciences de la matière (mécanique, électronique, physique, chimie)[1] durant les trois premières années d'université ?

2) Comment enseigner ces mathématiques ?

Pour tenter d'y répondre, j'ai été amené à en parler avec de nombreux collègues des différentes disciplines. Au fur et à mesure, il m'est apparu que la manière dont nous enseignons les mathématiques repose sur des a priori dont nous (c'est-à-dire moi et sans doute quelques autres) ne sommes plus vraiment conscients[2].

Je veux juste dans ce texte en présenter quelques uns. Peut-être, après examen, certains jugeront qu'il ne faut rien changer. Au moins le feront-ils en connaissance de cause.

1) Quoi enseigner

Pour cette question de « macrodidactique », il semblerait normal de s'appuyer sur les expériences passées. On s'aperçoit très vite que cette voie est sans issue. En effet, s'il y a eu effectivement des expériences relativement nombreuses de changement soit du contenu soit de la forme d'enseignement, peu d'entre elles ont

[1] Dans le texte nous employerons le terme global de « physiciens ». Précisons que nous n'y incluons pas les informaticiens qui ont des préoccupations souvent orthogonales à celles des physiciens et demandent des mathématiques différentes. Répondre à ces exigences opposées est d'ailleurs l'un des problèmes auxquels est confronté l'enseignement des mathématiques.

[2] Plusieurs de ces *a priori* sont l'héritage que nous avons reçu des mathématiciens de l'après guerre au travers de leurs cours oraux ou rédigés. Leur approche des mathématiques, qui résultait d'un rejet partiel de l'enseignement qu'ils avaient eux-même subi, était parfaitement adaptée aux objectifs qu'ils avaient pour l'enseignement universitaire : dégager parmi des étudiants ayant déjà reçu une formation de base solide ceux qui pouvaient prétendre faire de la recherche en mathématiques. Il n'est pas évident qu'elle reste adaptée aux étudiants d'aujourd'hui.

été décrites et encore moins, c'est-à-dire aucune à ma connaissance, n'a donné lieu à un bilan[3].

Puisqu'une expérience quantifiée et irréfutable est impossible, on peut essayer de faire appel à l'expérience subjective des collègues (mathématiciens ou physiciens) qui enseignent dans ces filières. On constate vite que leurs réponses subissent deux influences : la première est la présentation des mathématiques qu'ils ont eux-mêmes suivi (et qui ne leur a pas si mal réussi) : en simplifiant, les prémodernistes souhaitent plus de géométrie et les modernistes plus de théorie des ensembles. La deuxième est plus personnelle et indépendante de l'âge : il y a ceux pour qui les notions abstraites doivent s'appuyer sur des problèmes concrets (vive les robinets) et qui préconisent d'aller du particulier au général et ceux pour qui le plaisir esthétique de l'abstraction n'a pas besoin de justification (que les catégories sont belles) et qui veulent aller du général au particulier. Finalement, à l'exception de quelques extravagances, toutes les propositions de programmes trouvent des partisans acharnés et des adversaires tout aussi acharnés.

Cette hétérogénéité des collègues n'est sans doute qu'un pâle reflet de l'hétérogénéité des étudiants. On peut donc supposer que, quel que soit le choix du programme, celui-ci sera adapté à certains d'entre eux mais pas toujours les mêmes. Je suggère que c'est ce qui explique que, lors d'expériences pédagogiques, les résultats obtenus soient largement indépendants de la manière d'enseigner. Hormis quelques échecs patents[4], l'absence d'effet global lors de ces expériences pourrait ainsi cacher de grandes variations individuelles, par essence non mesurables car correspondant à un apprentissage individuel non reproductible. Terminons sur ce point par une note optimiste : grâce à la souplesse introduite par le LMD, le découpage de l'enseignement en « petits » modules imposé par les réformes successives permet au moins de proposer des approches différentes des mêmes concepts dans des modules différents. On peut espérer toucher ainsi un plus grand nombre d'étudiants.

Puisqu'aucune expérience objective ou subjective ne permet de conclure, pourquoi ne pas demander tout simplement aux physiciens de quelles mathématiques leurs étudiants ont besoin. Quand on a réussi à franchir la méfiance des physiciens à l'égard des mathématiciens[5] on obtient de leur part une liste de techniques que

---

[3] Le débat sur l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire, qui repose sur une expérimentation de plusieurs générations, dont l'objet est beaucoup plus précis que celui que nous abordons ici et qui a mobilisé des moyens sans commune mesure avec ceux dont nous pourrions bénéficier, montre d'ailleurs que l'interprétation des résultats obtenus n'est pas simple et peut se réduire à conforter chacun dans les idées qu'il avait *a priori*.

[4] Une étude récente de Daniel Duverney « reflexions sur la place des mathématiques dans l'enseignement scientifique » met en lumière une telle réforme faite au niveau national et qui se solde par un échec. Il jette en effet un éclairage très intéressant sur les causes possibles de la baisse du nombre d'étudiants choisissant les filières dont nous parlons. Si on le suit dans son raisonnement très convaincant, l'un des facteurs importants de cette baisse serait le surcroit de travail exigé dans les études scientifiques en général et dans la classe de terminale S en particulier. Les étudiants venant à l'université n'étant pas les plus travailleurs parmi ceux qui ont obtenu leur baccalauréat, on peut penser que la démonstration de Duverney s'applique particulièrement bien à eux.

[5] Ils les considèrent collectivement, en tous cas à Paris VI, comme méprisants, peu intéressés par les étudiants et dogmatiques. Une explication possible de ce point de vue serait que l'on peut faire des mathématiques en ignorant tout de la physique alors que l'inverse n'est évidemment pas vrai. Mais il y a peut être d'autres raisons plus subjectives que je laisse au lecteur le soin de deviner.

les étudiants doivent savoir maîtriser. La solution de facilité serait donc d'enseigner ces techniques quitte à les ordonner pour les mettre dans un cadre cohérent[6]. Cela présente de multiples avantages :

– c'est valorisant car les étudiants améliorent rapidement leurs performances dans les exercices répétitifs utilisant ces techniques,
– c'est facile à évaluer à partir de ces mêmes exercices.

Mais justement, comme c'est un enseignement facile et valorisant, les physiciens ne voient pas pourquoi il faudrait le confier à des mathématiciens peu contrôlables.

Il nous faut donc insister sur ce qu'apportent les mathématiques : le passage de la technique au concept. Il est souvent difficile d'expliquer à des collègues (pas seulement physiciens) qui ont intégré ces concepts depuis leurs études que ceux-ci ne sont pas innés et que leur acquisition nécessite un temps de maturation incompressible. Ils comprennent parfaitement que l'on consacre du temps pour apprendre à calculer des développements limités mais les notions d'ordre de grandeur ou de propriété locale qui sont sous-jacentes leur semblent aller de soi. Il suffit pourtant de faire faire des développements limités ailleurs qu'en zéro ou de voir des étudiants utiliser le développement en 0 pour trouver les asymptotes pour constater que rien n'est moins vrai.

Les didacticiens ont mis suffisamment en évidence le risque de « sous-compréhension » masquée par la réussite à des exercices de pure technique pour qu'il soit inutile d'insister[7]. Pour garder la spécificité de l'enseignement des mathématiques, il me semble donc indispensable de prendre conscience des notions et concepts que nous voulons faire passer au travers des techniques. À condition de réellement mettre en pratique cette approche, nous serons beaucoup mieux armés pour défendre ces enseignements et pour exiger qu'ils restent de la compétence des mathématiciens.

2) Comment enseigner

Il est très intéressant de lire des cours de mathématiques rédigés respectivement par des mathématiciens et des physiciens. On constate immédiatement que les physiciens enseignent par l'exemple et les mathématiciens par le contre-exemple. Cela est bien entendu lié à la manière dont ils utilisent les résultats : pour le physicien, un théorème est associé à certains modèles et c'est l'expérience qui justifiera, ou non, son application dans le cas considéré. Le mathématicien, lui, veut pouvoir appliquer son théorème dans une situation qu'il n'avait pas prévue lors de sa démonstration. Il doit donc préciser soigneusement le domaine de validité et, pour cela, les contre-exemples sont indispensables.

Comme souvent, il me semble qu'il faille éviter les extrêmes. Pour les développements limités par exemple, supposer que toutes les fonctions sont analytiques et remplacer le $o(x^n)$ par des points de suspension à la mode physicienne masque sans doute un aspect important du concept mais faire croire que le cas le plus important est celui de la fonction $x^2\sin(1/x)$, comme cela se dégage à

[6] ce qui n'est pas forcément facile lorsque les chimistes, par exemple, demandent de traiter les dérivées partielles dans la première semaine de la première année.

[7] Pour ne citer qu'un exemple on pourra lire le livre d'Aline Robert, Marie Lattuati et Jacqueline Penninckx *l'enseignement des mathématiques au lycée : un point de vue didactique* qui, contrairement à ce que suggère son titre, s'applique remarquablement à l'enseignement en DEUG.

la lecture des livres rédigés par des mathématiciens, est certainement inadapté en tout cas lors d'une première approche.

Pour tirer partie des qualités des uns et des autres (en évitant de cumuler les défauts !) des expériences d'enseignements mixtes (faits en collaboration plus ou moins étroite entre physiciens et mathématiciens) ont été tentées. En général plus la collaboration est étroite moins elle dure longtemps à cause de l'investissement en temps de concertation qu'elle nécessite. Il n'y a aucune mesure de l'efficacité de ces expériences pour les étudiants mais tous les enseignants qui m'ont dit y avoir participé en vante l'enrichissement que cela leur a apporté ne serait-ce que par l'élargissement de leur liste d'exemples et d'exercices. On peut donc favoriser ce genre de rapprochement en privilégiant, si on veut pouvoir les pérenniser, les organisations qui ne nécessitent qu'un minimum d'échanges en espérant qu'ils seront de qualité.

Un dernier point qui pose question est celui de la place des démonstrations dans l'enseignement des mathématiques pour physiciens. En fait, pour la physique, on a besoin de technique de calcul, de théorèmes mais pas de démonstration. La tentation est donc grande de faire de la zoologie des mathématiques : voilà les objets et voilà comment ils se comportent. Outre que ne pas faire de démonstration c'est ne plus faire de mathématiques, en adoptant une telle attitude, nous ne répondrions pas à la demande des physiciens. En effet ceux-ci constatent, comme nous, que les étudiants qui arrivent à l'université n'ont pas été formés au raisonnement. Cette capacité à savoir raisonner est fondamentale pour leur enseignement mais ils admettent volontiers ne pas être les mieux armés pour la développer. Ils sont donc prêts à nous confier cet aspect de la formation et nous devons relever le défi.

Personnellement, je pense qu'on apprend à raisonner par l'exemple. Dans un deuxième temps, une réflexion sur la nature des raisonnements peut être profitable mais ce n'est pas le plus urgent. Donc il faut faire des démonstrations, mais lesquelles ? Les faire toutes serait fastidieux, surtout pour des étudiants peu motivés et lorsqu'il est de notoriété publique que ces démonstrations ne serviront pas à l'examen. Par contre passer du temps pour en faire quelques unes bien choisies[8] en explicitant les méthodes de raisonnement et en valorisant éventuellement leur acquisition sous forme de questions de cours à l'examen me semble une bonne solution. Par ailleurs cela permet d'énoncer les théorèmes avec leurs « vraies » hypothèses même si on ne dispose pas encore des outils pour les démontrer en toute généralité (le théorème de Lebesgue est une bonne illustration de ce genre de situation).

[8] Bien choisies en fonction des goûts de l'enseignant tant il est vrai que l'on n'enseigne bien que ce que l'on aime.

Contribution au débat du 14 janvier sur « l'enseignement au niveau L, spécialisation ou pluridisciplinarité »

Johan Yebbou

Les classes préparatoires fonctionnent aujourd'hui sous le régime de la réforme de 1995 qui a modifié profondément le système des filières. Ce texte concerne les classes préparatoires scientifiques à dominante mathématiques, sciences physiques et sciences de l'ingénieur ; dans les grandes lignes, la description restera valable aussi pour les classes BCPST (biologie, chimie, physique et sciences de la Terre).

La réforme de 1995 a remplacé la classe de mathématiques supérieures par le système des deux voies de première année MPSI (mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur) et PCSI (physique, chimie et sciences de l'ingénieur) aboutissant en deuxième année aux trois classes MP (mathématiques et physique), PC (physique et chimie) et PSI (physique et sciences de l'ingénieur) ; parallèlement, la classe de mathématiques supérieures technologiques T a été remplacée par la classe de PTSI (physique, technologie et sciences de l'ingénieur) suivie en deuxième année de la classe de PT (physique et technologie) ; enfin, certaines classes préparatoires sont destinées aux bacheliers technologiques (TSI, TPC) ou titulaire d'un BTS (classes ATS). Cette énumération montre déjà la diversité des voies qui s'offrent au bachelier désirant faire une classe préparatoire scientifique (hors biologie et sciences de la Terre).

Dans chacune de ces classes, les mathématiques ont un poids important car elles sont la première discipline en terme de volume horaire. Cependant, elles n'ont certainement pas vocation à avoir un rôle hégémonique, car les autres disciplines contribuent fortement à la tonalité des filières, conformément à leurs dénominations. L'objectif de la réforme était en effet de diversifier le profil de recrutement des grandes écoles, de privilégier une pédagogie de l'approfondissement, une approche plus concrète des problèmes, et d'introduire de nouvelles matières (sciences industrielles) afin de mieux répondre aux attentes du monde économique et industriel ; un autre aspect important,en cohérence avec les formations de premier et deuxième cycle universitaires, de faciliter les dispenses d'études et les passerelles.

L'enseignement en classe préparatoire a toujours été multidisciplinaire, comprenant un fort enseignement scientifique accompagné de disciplines littéraires (lettres, langues vivantes) importantes pour la formation d'un ingénieur. On peut dire que la réforme de 1995 a accentué ces caractéristiques. En effet, les programmes de mathématiques se préoccupent davantage de leur utilité pour les autres sciences. Citons le préambule : « Les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière développant des concepts, des méthodes et une démarche spécifique, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles. » On voit ici qu'il ne s'agit pas de sacrifier l'intérêt des mathématiques pour elles-mêmes : chacun est bien convaincu que faire des mathématiques en classe préparatoire comme partout ailleurs, c'est d'une part développer des capacités de logique, de rigueur, de créativité, d'imagination et d'autre part donner des connaissances pouvant être utiles aux autres sciences. S'il serait extrêmement dommageable d'ignorer le premier point, les finalités des classes préparatoires aux grandes écoles conduisent naturellement à satisfaire aussi le second.

La diversité des disciplines enseignées n'est pas forcément synonyme d'une mise en pratique effective de la pluridisciplinarité. Disons clairement les choses : le travail des étudiants des classes préparatoires se fait d'abord discipline par discipline : les emplois du temps, les programmes prévoient les choses ainsi. Il faut reconnaître que les bacheliers doivent essentiellement acquérir les méthodes, les connaissances fondamentales indispensables pour construire quelque chose de solide et qu'il est naturel que le travail monodisciplinaire soit un passage obligé. Cela dit, il y a depuis quelques années une réflexion sur un réel travail en commun des disciplines. Ce n'est pas une chose complètement nouvelle car depuis longtemps certains professeurs de mathématiques, sciences physiques ou industrielles organisaient occasionnellement du travail en commun : j'ai par exemple le souvenir de cours sur les équations différentielles présentés par les professeurs de mathématiques et de physique d'une classe ce qui permettait de donner aux étudiants simultanément les divers points de vue. Cela restait souvent des cas isolés. Mais, certains éléments de la réforme de 1995 ont fait évoluer les choses.

Le premier est la création des TIPE (Travaux d'initiative personnelle encadrée). Dans le cadre des TIPE, les étudiants doivent, à l'intérieur d'un thème, réaliser une étude, théorique ou expérimentale, d'un problème pouvant être à dominante mathématique, physique ou industrielle, (ou biologique, géologique en BPCST) mais relevant souvent d'une approche pluridisciplinaire.

Certains thèmes, comme « Systèmes dynamiques », « Approximation », « Terre et espace », « Cryptologie » ont permis aux étudiants de combiner plusieurs champs disciplinaires dont les mathématiques. Les TIPE ont ainsi conduit naturellement les professeurs à collaborer sur des sujets communs, tout en favorisant l'esprit d'ouverture et d'initiative des étudiants.

On peut considérer que les TIPE, malgré les difficultés qui sont parfois apparues, ont contribué à ce que les classes préparatoires évoluent vers un enseignement moins figé, ont amélioré les capacités d'autonomie des étudiants et ont favorisé la possibilité d'approches pluridisciplinaires dont on peut dire qu'elles sont profitables tant qu'elles ne prétendent pas être aveuglément systématisées : c'est ainsi qu'il est souhaitable que soit laissée la possibilité pour les étudiants qui le souhaitent de faire des TIPE monodisciplinaires, en particulier en mathématiques. Certains des étudiants des classes préparatoires manifestent un goût marqué pour les mathématiques et sont capables de faire des travaux de bonne qualité dans ce domaine : il faut bien sûr les y encourager. N'oublions pas en effet qu'il existe, en nombre non négligeable, des étudiants de classe préparatoire qui poursuivront des études universitaires et qu'il est aussi de notre mission de les y préparer.

Un deuxième point important, mais dont je parlerai peu, est celui de l'informatique. En classe préparatoire, elle revêt deux aspects distincts : l'informatique fondamentale qui est une discipline autonome et dont l'état d'esprit est voisin des mathématiques, car on y travaille la programmation (Caml), la logique, les automates ; l'informatique appliquée, dont on peut considérer qu'elle n'est pas de l'informatique au sens strict car il s'agit de travail sur des logiciels dédiés, en physique, chimie, sciences industrielles, ou sur Maple (calcul formel). L'informatique appliquée est enseignée au sein des diverses disciplines et est souvent l'occasion d' échanges pluridisciplinaires : par exemple, résolution de problèmes d'origine physique en cours de mathématiques à l'aide de Maple, problème liés à la modélisation. Il faut noter aussi l'intervention de l'informatique (fondamentale ou appliquée) dans le travail des TIPE : elle permet par exemple de faire un travail « expérimental » dans des travaux mathématiques, l'expérience se faisant sur ordinateur.

Un autre élément important mais qu'il est sans doute un peu tôt pour juger est la récente rénovation des programmes. Celle-ci a prévu l'organisation, pendant les sept ou huit premières semaines de première année, d'un programme de mathématiques de première période où l'accent est mis sur des notions assez directement utiles dans les sciences physiques (fonctions usuelles, équations différentielles, géométrie). Cette façon de procéder peut créer des difficultés pour la structure logique du cours de mathématiques mais a aussi quelques avantages : favoriser le dialogue entre disciplines, améliorer la transition entre terminale et classe préparatoire, entrer rapidement dans des sujets substantiels.

Pour conclure, je dirai que le travail pluridisciplinaire n'est pas la première caractéristique de l'enseignement dispensé en classe préparatoire, et il est sans doute normal qu'il en soit ainsi dans la mesure où l'objectif poursuivi est d'abord l'acquisition d'une maîtrise de chacune des disciplines.

Les récentes réformes des classes préparatoires ont cependant permis une ouverture vers la pluridisciplinarité ce qui est sans doute une bonne chose mais crée aussi parfois des difficultés quant au positionnement des mathématiques.

Je souhaite que ce débat permette une meilleure connaissance des situations à l'université et en classe préparatoire ; ma conviction est en effet que les différents systèmes d'enseignement du niveau L doivent efficacement coopérer afin que les mathématiques puissent être partout un élément moteur d'un enseignement scientifique de qualité.

PRIX ET DISTINCTIONS

Le palmarès des lauréats 2004

Prix Balzan

Pierre Deligne a reçu le prix Balzan 2004 pour les mathématiques, d'un montant de un millon de francs suisses, la moitié devant servir à des projets concernants de jeunes chercheurs.

Citoyen belge né en 1944, Pierre Deligne est depuis 1984 professeur à l'Institute for Advanced Study, Princeton aux USA. Il a obtenu son doctorat en mathématiques à l'université libre de Bruxelles en 1968 et son doctorat d'état des sciences mathématiques à l'université de Paris Sud en 1972. De 1968 à 1984 il a été membre visiteur puis professeur permanent à l'IHÉS.

Membre étranger de plusieures académies et docteur *honoris causa* de Vlaamse Universiteit Brussel et de l'ÉNS, il a reçu le prix François Deruyts (Belgique 1974), la médaille Henri Poincaré (Paris 1974), le prix quinquennal A. De Leeuw-Damry-Boulart (Belgique 1975), la médaille Fields (1978) et le prix Crafoord (partagé avec A. Grothendieck 1988).

Pierre Deligne est devenu mondialement célèbre très jeune par sa démonstration élégante des conjectures de Weil *qui concernent le nombre de solutions de systèmes de congruences polynomiales (les* conjecture de Riemann sur des corps finis *en font partie). Ces conjectures étaient à la fois difficiles à résoudre (les meilleurs spécialistes, et parmi eux Alexandre Grothendieck, ont travaillé dessus) et des plus intéressantes pour la portée des conséquences de leur résolution.*

La démonstration, qui fut publiée dans deux articles des Publ. Math IHÉS *totalisant environ 150 pages (1974, 1980), était basée sur une façon ingénieuse d'utiliser une grande combinaison de techniques difficiles ; un véritable tour de force qui valut à son auteur la médaille Fields en 1978.*

La première réussite de Pierre Deligne fut suivie de quelques autres de la même importance. Elles ont toutes en commun la grande variété ainsi que la difficulté des techniques en jeu et l'inventivité des méthodes. [extrait de l'éloge de la Fondation Balzan, Zürich]

Médaille d'or du CNRS

Le CNRS a décerné la Médaille d'Or 2004 au mathématicien Alain Connes, l'un des plus grands mathématiciens de notre temps, professeur au Collège de France et à l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS).

Tout au long de sa carrière, Alain Connes s'est intéressé à la résolution des problèmes mathématiques soulevés par la physique quantique et la théorie de la relativité. Il a en particulier révolutionné la théorie des algèbres d'opérateurs et créé une nouvelle branche des mathématiques, la géométrie non-commutative. Ses travaux ont été récompensés par la médaille Fields, en 1982 et par le prix Crafoord en 2001.

Alain Connes est né en 1947 à Draguignan. élève de l'École normale supérieure de 1966 à 1970, il a soutenu sa thèse en 1973.

Chargé de recherche au CNRS de 1970 à 1974, il passe l'année 1975 à l'université de Kingston au Canada dans le cadre de la coopération. À son retour il est nommé maître de conférence puis professeur à l'université Paris VI (1976 à 1980) puis directeur de recherche au CNRS de 1981 à 1984 où il devient titulaire de la chaire d'analyse et géométrie du Collège de France.. Depuis 1979 il est aussi professeur à l'IHÉS. [extrait du communiqué de presse]

Les lecteurs de la Gazette *peuvent retrouver dans le numéro 94 une présentation de la géométrie non commutative selon Alain Connes par Georges Skandalis.*

Prix Irène Joliot-Curie

Marie-Françoise Roy a reçu le prix Irène Joliot-Curie reconnaissance. Ce prix créé en 2001 et décerné par le ministère délégué à la recherche, cette année en partenariat avec l'entreprise EADS, récompense les actions visant à favoriser la présence des jeunes filles dans les études scientifiques et techniques et à promouvoir la place des femmes dans le monde de la recherche en France.

Professeure de mathématique à l'université Rennes I, Marie-Françoise Roy préside depuis juin 2004 la Société Mathématique de France. Scientifique de renommée internationale, engagée en faveur de la promotion des femmes dans les domaines des mathématiques et de l informatique, elle œuvre également pour le développement des mathématiques en Afrique. Première présidente de l'association *Femmes et Mathématiques*, membre fondatrice de « European Women in Mathematics », Marie-Françoise Roy est l'initiatrice des Forum des jeunes mathématiciennes et informaticiennes .

Admise à l'École normale supérieure de Sèvres en 1969, Marie-Françoise Roy obtient son Diplôme d'études approfondies de mathématiques en 1971 puis son agrégation en 1972. De 1972 à 1985 elle est maître assistante puis maître de conférences dans les universités de Paris XIII, Niamey (Niger) et Rennes. Élève de Jean Bénabou, elle soutient en 1980 sa thèse d'état (« Spectre réel d'un anneau et topos étale réel ») à l'université Paris-Nord. Les contributions majeures de Marie-Françoise Roy portent sur la définition et l'étude — en collaboration avec Michel Coste — du spectre réel d'un anneau. Cette notion, reconnue comme essentielle par de nombreux mathématiciens, est utilisée partout dans le monde. *Géométrie algébrique réelle*, co-écrit en 1987 avec J. Bochnack et M. Coste, est devenu l'ouvrage de référence en ce domaine.

Depuis 1988, elle se consacre à l'étude des algorithmes de la géométrie algébrique réelle, dans le cadre du développement du calcul formel. Ces travaux, menés avec de nombreux collaborateurs, dont, depuis plus de dix ans, S. Basu et R. Pollack, ont déjà fait l'objet d'un nouveau livre *Algorithms in real algebric geometry* en 2003. Une version interactive de cet ouvrage est en préparation.

Depuis son séjour au Niger, elle œuvre pour les échanges culturels entre la France et le Niger, dans le cadre de l'Association franco-nigérienne Tarbiyya-Tatali, et le développement des mathématiques en Afrique. Elle a co-organisé en janvier 2002, une École du CIMPA à Niamey *Effectivité et algorithmique en algèbre et géométrie*. Enfin, elle est l'un des deux coordinateurs du Réseau africain d'algèbre et de géométrie appliquées au développement, créé en aout 2003. [extrait du communiqué de presse]

Prix Jaffé

La lauréate 2004 est Colette Moeglin, directrice de recherche au CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu à Paris, pour récompenser son œuvre portant notamment sur les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie, la théorie des formes automorphes et la classification des représentations de carré intégrable des groupes réductifs p-adiques classiques en terme de représentations cuspidales.

Ce prix annuel, décerné par l'Institut de France sur proposition de l'Académie des sciences est destiné à couronner des expériences destinées au progrès et au bien-être de l'humanité.

Prix Sophie Germain

Le lauréat 2004 est Henri Berestycki, directeur d'études au Centre d'analyse de l'école des hautes études en sciences sociales (ÉHÉSS) à Paris, pour ses contributions essentielles concernant des équations aux dérivées partielles non linéaires, tout particulièrement de modèles issus de la physique et de la chimie ainsi que, plus récemment, de la biologie.

Prix annuel décerné par l'Institut de France sur proposition de l'Académie des sciences. Il est destiné à couronner un chercheur ayant effectué un travail de recherche fondamentale en mathématiques. Ce prix a été créé en 2003.

Prix Paul Doistau-Émile Blutet

Le lauréat 2004 est Laurent Stolovitch, chargé de recherche au CNRS dans le laboratoire émile Picard à Toulouse.

Prix biennal de l'Académie des sciences couronnant des recherches.

Prix Servant

Le lauréat 2004 est Guy David, professeur à l'université Paris-Sud à Orsay, laboratoire de mathématique du CNRS à Orsay, pour l'élaboration de nouvelles lois en analyse complexe et en théorie des opérateurs, comprenant l'étude de situation où les difficultés viennent de la géométrie notamment l'étude des espaces de Hardy, la continuité des opérateurs définis par des intégrales singulières la conjecture de Vitushkin.

Prix décerné chaque année par l'Académie des sciences, une année dans le domaine des mathématiques, une année dans le domaine des sciences physiques.


Université de Bourgogne

Portrait de Hugues Méray offert par la famille Méray-Philippot à l'université de Bourgogne

INFORMATIONS

Conte de la Saint Vincent

Vincent Cossart[1]

Saint Vincent est mon saint patron, mais surtout celui des vignerons. Il est donc fêté chaque année comme il se doit à Mercurey (Côte chalonnaise, Bourgogne, 90% de vin rouge et 10% de vin blanc). Lors de cette cérémonie, un producteur se voit confier pour un an la statue de Saint Vincent et invite tout le village pour l'occasion.

Le matin du 23 janvier 2004, j'étais présent dans la rue principale de Mercurey lors de la procession. Bienheureux hasard ou intervention du saint patron ? Je me renseigne sur l'événement et j'en retire bientôt l'information essentielle : tous allaient boire un coup au domaine Jobard-Martin à qui on confiait la statue. Je me joins donc à la foule, bien décidé à me « taper l'incruste » comme diraient nos chers étudiants.

Une fois sur place, la tradition est immuable : il faut subir les discours des élus et autres préfets avant de passer aux choses sérieuses. Je subis... Le maître des lieux, J.-P. Jobard parle en dernier. Après s'être présenté, professeur retraité d'économie à la Sorbonne, puis avoir fait les honneurs de sa propriété, un domaine dont la maison et les vignes ont été léguées à sa mère par une certaine famille Méray, son ton change brusquement. Il apostrophe les élus locaux : ils devraient être fiers de « Hugues Méray » ! Cet enfant du pays et mathématicien de renommée internationale n'est pas assez bien considéré dans son propre village... M. Jobard reproche d'ailleurs aux notables d'ignorer son existence et son importance scientifique. Les VIP se prêtent en souriant à la polémique, certains racontant que ce dont ils se souviennent à propos de Méray, ce sont surtout ces anecdotes qui tendent à prouver qu'il n'était qu'un mauvais coucheur, grand faiseur d'histoires et de complications à la réputation épouvantable : les villageois allant jusqu'à se plaindre qu'ils avaient dû laisser son cercueil en bas de la route du cimetière, Méray ayant choisi de se faire enterrer un jour de grand verglas. Le pauvre scientifique était accusé d'avoir nui à la communauté jusque après sa mort. Un soupçon de mauvaise foi peut-être ?

Quoi qu'il en soit, un verre de blanc premier cru à la main droite, une gougère dans la main gauche, je vais voir Jobard, lui avouant mon état de mathématicien et mon ignorance totale de Méray. Là, il me confirme ses propos. Hugues Méray fut doyen de l'université de Dijon, professeur de mathématiques, membre correspondant de l'Académie des sciences sur insistance de H. Poincaré, et grand emm... devant l'Éternel. La discussion se pousuit car Jobard semble content de me rencontrer. Il a des livres et des manuscrits de Méray dans son grenier et aimerait

[1] Laboratoire de Mathématiques LAMA UMR 8100, Université de Versailles. Email : `cossart@math.uvsq.fr`

bien que quelqu'un en tire profit. Sans doute inspiré par Saint Vincent autant que par le délicieux breuvage offert par mon hôte, je promis alors à Jobard d'obtenir des précisions sur Méray. Il ne serait pas dit que la brochure sur les mercuréens célèbres, distribuée par le bureau de tourisme local continuerait à snober Hugues Méray plus longtemps.

De retour à mon bureau, et quelque peu perplexe, je me connectai au site d'histoire des maths du collège de St Andrews. La note bibliographique confirma les propos de Jobard : professeur à Dijon, Méray était un mathématicien qui n'a pas su faire connaître ses résultats redémontrés plus tard par Cantor. "*So here we have a case of a mathematician who produced work which might have made him one of the leading mathematicians in the world. However, as happened many times throughout history, Méray was unlucky for the genius of his work was not recognised at the time. Others (we give details below) published the same ideas and it would be their work rather than that of Méray which influenced the direction of mathematics. All we can do now is to give Méray the credit he deserves for his remarkable work, even if fate did not allow Méray a role of importance in the development of the subject*".

Intrigué je poursuivis mon enquête en me rendant chez Hélène Gispert du Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay. Elle me sort la thèse de Dugac et l'article de Bkouche sur la réforme de l'enseignement de la géométrie en 1902–1905 qui me confirment alors la valeur de Méray. Ce mathématicien méconnu est pourtant le premier à avoir construit les réels par les suites de Cauchy et à avoir trouvé la caractérisation par l'existence d'une borne supérieure d'une partie bornée. Nous utilisons ses théorèmes tous les jours !

Il est aussi l'auteur d'un livre de géométrie présentant une nouvelle pédagogie : pour lui la géométrie était un corollaire de la mécanique. Comme chercheur en pédagogie, là encore, c'était un Monsieur. Je lis actuellement son livre de géométrie élémentaire, ouvrage très original qui semble effectivement bien adapté à l'enseignement technique. Une remarque découverte à cette occasion : il signait ses papiers « Charles Méray », utilisant son deuxième prénom.

Comment un tel homme avait-il pu sombrer dans l'oubli ? Motivé par ce qui me semblait de plus en plus être une injustice, je décidais de contacter Jean-Paul Dufour, doyen de la faculté des sciences de Dijon par courrier électronique. Trente secondes plus tard, mon téléphone sonne : Jean-Paul Dufour m'appelait pour m'annnoncer qu'il me parlait sous le regard de Méray dont le portrait trône depuis des années au-dessus de son bureau ! Le doyen se montre ravi par ma curieuse demande d'informations et m'engage vivement à poursuivre cette aventure œnologico-mathématique. Nous organisâmes donc une réunion le 7 juillet 2004 avec D. Beau (Irem Dijon), J.-P. Dufour (université de Bourgogne), H. Gispert (univ. de Paris–sud), J.-P. Jobard (univ. Sorbonne et vigneron), M. Pauty (secrétaire de l'Académie des sciences, Arts et Belles Lettres Dijon). Lors de cette entrevue, Hélène et moi voyons enfin le portrait de Méray... Bel homme, il émanait de son tableau une impression de force, d'autorité et d'intelligence. De l'avis de tous, ce portrait émettait des ondes favorables.

À l'unanimité nous décidons d'organiser un colloque scientifique « Le savant Méray » le jeudi 9 juin 2005 au centre universitaire Condorcet (annexe de l'université de Bourgogne au Creusot). Je contacte ensuite D. Juillot le député-maire de

Mercurey et les professionnels de la vigne : il est convenu qu'à la fin du colloque, nous nous rendrons à Mercurey pour inaugurer solennellement une plaque sur la maison de Méray : justice lui sera enfin rendue dans son village !

Les jours précédant le colloque sera organisé un « *experimentarium* » par D. Raichvarg (université de Bourgogne) dans la communauté d'agglomérations de Chalon Val de Bourgogne. Ce sont des journées durant lesquelles six ou huit doctorants viennent expliquer dans des lycées, collèges ou écoles primaires leurs travaux. Espérons que nous éveillerons quelques vocations parmi les petits bourguignons.

Dans le colloque, nous pensons étudier les travaux d'analyse de Méray, sa vision de l'enseignement de la géométrie, et une série considérable de documents trouvés chez M. Jobard : textes de conférences sur l'enseignement et la place des mathématiques, notes de cours, textes de problèmes et de questions d'oral, brouillons d'articles, ainsi qu'un document poignant : le journal intime de son fils André mort de tuberculose en Algérie à vingt-et-un ans.

Il y a une question à laquelle cette aventure permet de répondre mais que nous n'étudierons pas : comment faire pour sombrer dans l'oubli quand on est un chercheur de grande qualité ? C'est simple, il suffit de suivre la méthode H. Méray :
1- Écrivez dans un langage mathématique si personnel que les grands maîtres contemporains qui emploient, eux, un dialecte incompréhensible et rédigent vraiment trop mal, ne peuvent vous comprendre.
2- Acceptez un poste de professeur mais démissionnez immédiatement sous prétexte que la ville ne vous convient décidément pas.
3- Quand enfin Henri Poincaré vous honore, faites-lui savoir qu'il n'a rien compris de vos travaux.
4- Écrivez un traité d'analyse exposant vos vues nouvelles et tombez sur un reviewer qui estime que « dans les sciences comme dans la politique, les transformations lentes sont les plus sûres » et qui « n'ose le suivre dans la voie où [vous vous] êtes engagé ».
5- Ayez un caractère épouvantable au point qu'un siècle après votre mort, on en parle encore.

C'est la fin de ce conte qui a commencé avec un verre de vin et une gougère, sous le patronnage de Saint Vincent. On va rendre hommage à un remarquable collègue. Laissons les mauvaises langues persifler que, s'il nous voit, Méray doit être content : les taupins qui peinent générations après générations sur la construction des réels et sur la borne sup vont enfin connaître le coupable auteur de cette théorie et ils pourront le vouer aux gémonies. La réputation d'emm... de Méray durera jusqu'à la fin des temps et sortira de Mercurey pour devenir universelle.

C'est décidé. Il faut que la SMF reconnaisse St Vincent comme le Patron des Mathématiciens.

Colloque du 9 juin 2005
Centre universitaire Condorcet au Creusot

Avec la participation de la Société Mathématique de France
en la personne de sa présidente M.-F. Roy.

Les vignerons et leurs associations professionnelles ont aussi manifesté leur soutien au colloque, nous savons que les autorités académiques ont à cœur de les suivre.

Organisateurs :

V. Cossart (univ. Versailles), H. Gispert (univ. Paris–sud), J.-P. Dufour (univ. Bourgogne).

Voici les informations actuelles sur le programme de cette journée, sous réserve de modifications...

– *L'équipe de l'IREM de Dijon* qui dépouille et commence l'étude du monceau de documents trouvés chez J.-P. Jobard fera un exposé et (ou) une table ronde sur Méray et l'enseignement des mathématiques.
– *J.-M. Aroca* (univ. de Valladolid) fera un exposé sur la rigueur en analyse.
– *R. Bkouche* (univ. de Lille) fera un exposé sur Méray et la géométrie.
– *G. Chazal* (univ. de Bourgogne) fera un exposé sur la pédagogie et la philosophie des mathématiques au temps de Méray et Poincaré.
– *M. Pauty* (secrétaire de l'Académie des sciences, Arts et Belles Lettres de Dijon) fera un exposé sur Méray le bourguignon.

Nous nous retrouverons à 17h à Mercurey.

Hommage au mercuréen Méray à Mercurey

17h – Inauguration d'une plaque commémorative sur la maison de J.-P. Jobard (ancienne propriété de Méray).

© Sophie Jobard-Bourland

Dessin de la maison de la famille Méray à Mercurey réalisé par Sophie Jobard-Bourland

Septième Colloque franco-roumain de mathématiques appliquées[1]

Marius Iosifescu[2] & Vicentiu Radulescu[3]

En 1993 l'INRIA a organisé à l'université Alexandru Ioan Cuza de Iaşi en Roumanie une École d'été franco-roumaine en mathématiques appliquées. Sur proposition faite par Haïm Brezis, lors de son discours de réception à l'Académie roumaine en juin 1993, il fut décidé d'organiser une telle rencontre tous les deux ans, sous forme d'un colloque tenu alternativement en France et en Roumanie. Les prochaines éditions ont été organisées en 1994 à l'École normale supérieure de Paris, en 1996 à l'université Babes-Bolyai de Cluj, en 1998 à Metz, en 2000 à Constanta et en 2002 à Perpignan. Ce colloque prestigieux est arrivé cette année à sa 7e édition. En effet, cette édition a eu lieu à Craiova du 30 août au 3 septembre 2004 et a été organisée par la faculté de mathématiques et d'informatique de l'université de Craiova et par l'Institut de statistique mathématique et de mathématiques appliquées de l'Académie roumaine.

Cette édition a réuni environ 120 scientifiques en provenance de 9 pays : France, Roumanie, Suisse, Allemagne, Espagne, Italie, Royaume-Uni, États-Unis et Moldavie.

Les conférences plénières ont été présentées par : Vlad Bally (Paris), Catherine Bandle (Bâle), Jean-Yves Chemin (Paris), George Dinca (Bucarest), Horia Ene (Bucarest), Cristian Faciu (Bucarest), Olivier Goubet (Amiens), George Haiman (Lille), Dragos Iftimie (Lyon), Petru Jebelean (Timisoara), Claude Le Bris (Paris), Bernadette Miara (Noisy Le Grand), Sorin Micu (Craiova), Gheorghe Nenciu (Bucarest), Radu Precup (Cluj), Mircea Sofonea (Perpignan) et Michel Théra (Limoges).

Quatre sessions invitées ont été organisées sur des sujets faisant l'objet d'une coopération franco-roumaine créative :
– contrôle des systèmes, gouvernés par des EDP (Dan Tiba et Marius Tucsnak),
– mathématiques financières (Radu Tunaru),
– biomécanique (Marc Thiriet),
– inégalités et applications (Constantin Niculescu).

Les participants ont profité de leur présence en Roumanie pour admirer quelques monastères d'Oltenie : Dintr-un Lemn, Horezu, Bistrita et Govora.

Le colloque a été annoncé sur plusieurs sites et quelques journaux.

M. Ion Vladimirescu, recteur de l'université de Craiova, a beaucoup aidé les organisateurs du colloque, qui le remercient chaleureusement.

Des détails sur cette 7e édition du Colloque franco-roumain de mathématiques appliquées se trouvent à la page web `http://inf.ucv.ro/colloque2004/`
Les meilleures contributions présentées au colloque seront publiées dans un numéro

[1] Craiova, Roumanie, du 30 août au 3 septembre 2004

[2] Vice-Président de l'Académie roumaine, miosifes@acad.ro
[3] Université de Craiova, radulescu@inf.ucv.ro

spécial des *Annales de l'université de Craiova* (voir `http://inf.ucv.ro/~ami`), reconnu comme l'un des meilleurs journaux mathématiques de Roumanie.

La prochaine édition du Colloque franco-roumain de mathématiques appliquées sera organisée en 2006 par l'université de Savoie.

Le colloque « Travaux de Thom et théorie des singularités », Nantes, 8–11 juin 2004

Marc Chaperon[1]

Un numéro spécial de la Gazette *paraît aujourd'hui en hommage à René Thom (1923–2002), médaille Fields 1958, personnalité scientifique de premier plan dépassant largement le cadre des seules mathématiques. Le colloque qui s'est tenu du 8 au 11 juin 2004 à la faculté des sciences et techniques de l'université de Nantes était la première manifestation scientifique en son honneur depuis sa disparition, si l'on met à part l'après-midi commémoratif d'octobre 2003 à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, dont Thom était membre permanent depuis 1964.*

Il y a deux ans, Fouad El Zein et François Laudenbach avaient conçu le projet d'organiser à Nantes un colloque strictement scientifique fondé sur l'œuvre mathématique de Thom. L'idée a suscité l'enthousiasme de laboratoires fortement impliqués dans sa thématique, qui lui ont apporté directement leur soutien financier :

- l'Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette)[2]
- l'Institut de Mathématiques de Bourgogne (Dijon)
- l'Institut de Mathématiques de Jussieu, projet « géométrie et dynamique » (Paris)
- le Laboratoire Angevin de Recherche Mathématique (Angers)
- le Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné (Nice)
- le Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (Nantes).

Ce soutien, s'ajoutant à l'aide du CNRS, du Ministère de la Recherche, de l'université de Nantes et du Conseil général de Loire-Atlantique, a permis au colloque d'avoir lieu.

Puisque mon laboratoire fait partie de la liste, je peux expliquer notre enthousiasme : la personnalité exceptionnelle de Thom lui permettait d'être au carrefour de domaines mathématiques très variés, tous importants et qui, en son absence, sont retombés entre les mains parfois redoutables des spécialistes[3]. Nous étions donc un peu à la recherche d'un paradis perdu, celui du séminaire Thom, non

[1] Université Paris VII – Denis Diderot, chaperon@math.jussieu.fr
[2] Son directeur, Jean-Pierre Bourguignon, a été le premier à proposer son aide au colloque et lui a offert le dessin de l'affiche.
[3] Sans doute faut-il mettre à part Vladimir Arnold, dont l'école continue de couvrir presque toute l'étendue du terrain défriché par Thom.

par pure nostalgie, mais par souci de transmettre et de faire fructifier un héritage considérable.

Quant à la transmission de cet héritage, il reste en effet beaucoup de chemin à parcourir : à l'oral d'algèbre de l'agrégation, je me souviens d'avoir demandé à un candidat si une matrice carrée réelle prise au hasard avait des chances d'être inversible ; non seulement il n'en avait aucune idée, mais la question a visiblement été considérée comme grossière par mes « conjurés » [4].

Thom citait parfois le mot de Schrödinger : « La Science progresse par la mort des vieux », qui ne s'applique guère à son cas car il n'a jamais été un vieux mathématicien : quand il s'est senti incapable de remonter la pente du volcan[5] pour en recueillir les produits les plus brûlants, il a quitté les mathématiques.

Le champ qu'il avait ouvert demeurant trop vaste pour le colloque, le comité scientifique de celui-ci[6] lui a assigné pour objet d'identifier l'impact actuel de la théorie du cobordisme d'une part, de la théorie des singularités d'autre part. L'accent a été mis sur ce deuxième aspect, moins achevé, qui demeure un domaine de recherches très actif. Il semblait important de faire un état des lieux à la lumière des idées originales de Thom, avec l'espoir de renforcer la collaboration entre les différents groupes travaillant dans ce domaine.

Le colloque a consisté en un mini-cours de trois séances dispensé par son invité principal John Mather (Princeton) et vingt autres conférences, données par sept *juniors* et treize *seniors*. Il y avait un total de sept conférenciers étrangers, venus de Madrid, Mainz, Moscou, Nijmegen, Princeton, Tokyo et Trieste.

Bernard Malgrange a joliment ouvert le colloque par une mise en perspective historique. Son théorème de préparation différentiable l'avait placé aux avant-postes dans l'aventure intellectuelle qui a conduit au livre *Stabilité structurelle et morphogénèse* de Thom. Il nous a donc fait bénéficier d'un témoignage de première main, à la fois précis et émouvant[7].

Maxim Kazarian et Fabien Morel ont montré comment les idées de la théorie du cobordisme, à l'origine de nature essentiellement topologique, peuvent être adaptées à la géométrie analytique et à la géométrie algébrique. Leurs exposés ont été un des moments forts du colloque, d'autant plus qu'ils ne s'étaient jamais rencontrés.

Dans son mini-cours, John Mather a réussi à retracer le chemin partant de l'œuvre de pionnier de Thom pour aboutir, après un énorme travail, à la démonstration de théorèmes « définitifs » sur les singularités d'applications et leur

---

[4] À propos de grossièreté et contrairement à ce que prétendait Kazarian (citant Arnold) dans son exposé à Nantes, Thom était bien trop courtois pour dire : « On trouvera toujours un imbécile pour faire les démonstrations ». Voici la phrase correcte : « On trouvera bien un *algébriste* pour faire les démonstrations ».

[5] Cette comparaison de la connaissance à un volcan dont les produits périphériques, refroidis, sont moins dignes d'intérêt que ceux qui viennent de sortir du feu central, j'ai entendu Thom la faire à l'École normale supérieure dans un exposé au séminaire Loi vers 1974, devant un auditoire parfois hostile.

[6] Alain Chenciner, Alexandru Dimca, Harold Levine, Bernard Malgrange, Robert Moussu.

[7] On pourra en trouver trace dans le numéro spécial de la *Gazette* à la mémoire de René Thom et dans la notice nécrologique que contient le *Recueil 2004* complétant l'*Annuaire 2004 de l'Association amicale de secours des anciens élèves de l'École normale supérieure.*

classification topologique. Le texte passionnant de Mather dans le numéro spécial de la *Gazette* souligne que le sujet suscite encore d'actives recherches, même après le dernier livre d'Andrew du Plessis et Terry Wall.

Une des découvertes les plus spectaculaires dans la lignée des travaux de Thom ces dernières années a été la cohomologie d'intersection. Cette théorie utilise les stratifications localement topologiquement triviales des espaces singuliers, largement mises en relief par Thom. Robert MacPherson, qui ne cesse de rappeler l'influence de Thom sur sa pensée, n'a pu venir nous en parler, mais Jean-Paul Brasselet en a donné un aperçu.

Frédéric Pham est parti du célèbre article de Thom sur la théorie des enveloppes pour présenter une vision personnelle du sujet.

Les exposés de Lê Dũng Tráng et Bernard Teissier ont porté sur les développements de la théorie des singularités en matière de monodromie et de stratifications respectivement.

La théorie de Hodge mixte et la dégénérescence des variations de telles structures ont été abordées dans l'exposé de Joseph Steenbrink.

Deux exposés ont été consacrés aux dynamiques de gradient. Adam Parusiński a parlé de la résolution de la conjecture de Thom sur la dynamique des champs de gradient en géométrie analytique (travail en commun avec Krzyztof Kurdyka et Tadeusz Mostowski). Par ailleurs, en topologie différentielle, le fameux complexe de Thom-Smale, remis en lumière par Edward Witten en 1982, est aujourd'hui au carrefour de l'homologie de Floer et de l'homologie de Novikov. Spécialiste du sujet, Andreï Pajitnov a retracé ce parcours.

Pour finir, j'ai tenté sans grand succès un parallèle entre les rudiments de la théorie des catastrophes élémentaires (singularités de fonctions réelles) et leur analogue en dynamique, où l'application des mêmes idées est à la fois féconde et problématique.

Les jeunes conférenciers[8] ont présenté des travaux plus pointus et fort intéressants, témoignant de la vivacité de la recherche dans ces domaines.

Beaucoup des conférenciers, qui avaient connu Thom et fréquenté son séminaire, ont commencé par en évoquer le souvenir de manière souvent passionnante et toujours touchante. Ce n'est donc pas seulement par sa grande qualité scientifique que ce colloque constituait un digne hommage à son dédicataire.

Les organisateurs n'ont pas ménagé leur peine. Ils ont su utiliser avec art les moyens dont ils disposaient, contribuant très largement à l'excellente ambiance qui a régné de bout en bout. C'est en partie ainsi que le colloque a atteint un de ses buts : rapprocher les peuples de la planète Thom.

[8] Benoît Audoubert, Thomas Brélivet, Georges Comte, Mauricio Garay, Franck Loray, Patrick Popescu-Pampu, Guillaume Valette.

Une exposition à l'IHP : Mathématiques et Art

Claude P. Bruter[1]

Une exposition « Mathématiques et Art » se tiendra d'abord dans les locaux de l'Institut Henri Poincaré au cours du premier trimestre 2005. Elle bénéficie du soutien moral de la SMF, du soutien également financier du Ministère de la Culture. Le vernissage aura lieu le samedi 22 janvier 2005 à 17 heures. Auparavant, deux exposants, Bahman Kalantari (Rutgers University) à 14h30, puis Michael Field (Houston University) à 15h30, présenteront leurs œuvres dans l'amphithéâtre Darboux.

Cette exposition est en principe destinée à devenir itinérante pour pouvoir toucher des publics très différents. Elle pourrait donc contribuer à réconcilier le pays avec nos mathématiques, et, qui sait, contribuer également à l'évolution du contenu de nos programmes d'enseignement, tous cycles confondus. À l'Institut Henri Poincaré, quelques ordinateurs seront mis à la disposition des visiteurs qui pourront consulter les sites de quelques-uns des exposants, ou des réalisations pédagogiques remarquables faites à l'étranger, comme par exemple celles de Maria Dedo avec le concours de l'université de Milan. Sa collègue Marina Cazzoli viendra présenter ce travail le 17 mars. François Apéry et John Sullivan feront également chacun un exposé à l'IHP dans le cadre de l'exposition, le 9 février. Voici, en avant-première pour les lecteurs de la *Gazette*, une introduction écrite pour le catalogue, permettant de se faire une idée du contenu de l'exposition.

Introduction

Architecture ou Musique ? Peinture ou Sculpture ? Lequel de ces arts aurait, le premier, contribué à féconder les Mathématiques, ou bien, à rebours, aurait puisé dans cet art intellectuel et bien avant ses rivaux, techniques et inspiration ? Sans aucun doute, d'agréables conversations, érudites et fort animées, contribueront à forger des réponses à ces questions. Le fait est que, dans le cours de l'histoire, le développement des arts classiques a été concomitant avec celui des mathématiques. Ainsi, l'époque de la Renaissance a été particulièrement féconde avec la redécouverte des polyèdres et la création de la théorie de la perspective linéaire. Les tableaux et gravures de ce temps sont nombreux qui illustrent ces avancées de la science, et témoignent de la symbiose entre peinture et mathématiques : souvenons-nous par exemple de la fameuse gravure au burin de Dürer intitulée « Mélancolie » (1513-1514), si riche par son contenu et par ses allusions, souvenons-nous aussi du magnifique tableau de Jacopo de Barbari (musée de Naples) : le personnage central en est Luca Pacioli, le mathématicien du XV^e siècle auteur d'un ouvrage célèbre illustré par Léonard de Vinci, Divine proportion. Le XIX^e siècle développe la Géométrie différentielle, introduit la Topologie et l'Algèbre dans son sens moderne : de nouveaux objets mathématiques sont créés. Surface de Scherk, Bouteille de Klein, Cubique de Cayley, Plan hyperbolique, sont quelques

[1] Département de Mathématiques, Université Paris XII

noms d'objets familiers pour les mathématiciens, et que l'on découvre alors. Il faudra attendre un bon siècle pour que les artistes s'emparent de quelques-uns de ces objets ou de ceux de leurs familles. Salvador Dali, avec sa toile représentant l'hypercube, Mauritz Escher utilisant la richesse des pavages du plan hyperbolique font figure de pionniers géniaux. De très nombreux nouveaux objets mathématiques font leur apparition au cours de la seconde moitié du XX^{e} siècle : les familles des nœuds et des surfaces minimales par exemple s'accroissent considérablement. Le lecteur pourra consulter le site `www.isama.org` où il découvrira, peut-être avec surprise, le très grand nombre d'artistes, peintres, sculpteurs ou architectes, qui ont trouvé la matière de leurs œuvres dans cet univers mathématique récent. Par la beauté de leurs réalisations, par leur renommée, ces artistes contribuent ainsi à faire connaître à tout un chacun des formes originales et inattendues, la pureté de leurs lignes, la perfection de leur équilibre, l'étonnante diversité de ces objets mathématiques, incarnés dans la pierre éclatante, dans le métal étincelant, ou révélés par le dessin, par le jeu des couleurs, gaies, vives et chatoyantes. L'art mathématique contribue ainsi à renouveler l'art plastique. Et nul doute qu'au fil du temps plus nombreux seront les artistes à trouver une part de leur inspiration auprès des œuvres mathématiques. Cette exposition, la première dans son genre peut-être, en annonce sans doute d'autres dans le futur et dans la même veine. Mais également, en dévoilant son étendue, en révélant le caractère très concret et fascinant de son contenu, une telle exposition contribue à réconcilier le public avec le monde mathématique, dont l'image reste encore souvent faussée par le jugement mal fondé. L'exposition présente aussi un intérêt de curiosité qui pourrait inciter de jeunes ou de moins jeunes mathématiciens à approfondir la connaissance de leur univers de travail et de passions, à engager de nouvelles recherches. L'un des traits évidemment marquant d'un grand nombre d'œuvres qui sont présentées est l'absence de référence immédiate aux objets familiers. Que ce soient les œuvres des mathématiciens artistes en particulier n'est guère étonnant. D'aucun seront acquis au caractère acéré de leur beauté. D'autres préfèreront peut-être des œuvres plus chargées d'affects, où le monde sensible est présent, en même temps que s'y déploient les créations de l'imagination proprement humaine.

Les exposants dont le visiteur va rencontrer les œuvres sont tous des mathématiciens, à l'exception quand même de six d'entre eux, Philippe Charbonneau qui est dessinateur, Jean-François Colonna qui est informaticien, Patrice Jenner qui est graveur, Jean Constant, Irène Rousseau et Dick Termes qui sont peintres.

Les soubassements mathématiques des œuvres sont parfois très distincts. George Hart expose deux de ses polyèdres originaux : la géométrie classique et la théorie des groupes sont à l'arrière-plan de ces œuvres. Les carrelages de surfaces planes sont appelés pavages par les mathématiciens. Mike Field, faisant appel à cette même théorie des groupes et à la théorie assez récente des singularités au sein de celle des systèmes dynamiques, nous éblouit par des pavages du plan totalement inédits et captivants, tant dans leur dessin que dans leur texture, par ailleurs très riche. Ce sont encore des pavages du plan usuel, mais dits à la Penrose, c'est-à-dire présentant de savantes irrégularités, que montrent William Casselman et son collègue, David Austin ; un effet de moiré surprend et réjouit l'œil. L'affiche, préparée par Bill Casselman, rassemblant plusieurs des images de couverture des

Notices de l'American Mathematical Society nous a été envoyée avec l'accord de l'AMS : nous sommes heureux de pouvoir remercier ici nos collègues américains. On ne trouvera, dans ce catalogue que la plus récente de ces images, celle de décembre 2004, parfaite pour faire briller les yeux des enfants en cette période des fêtes de Noël ; Davis Wright nous fait voir un remplissage du plan hyperbolique évoqué plus haut avec des petits disques aux couleurs vives. On ne peut s'empêcher de rapprocher cette œuvre de celle d'une artiste, Irène Rousseau ; ses mosaïques sont très belles : les pièces, de diverses couleurs, font ressortir la beauté de ce plan hyperbolique qui allie l'équilibre apaisant de ses symétries avec la dynamique gaie de ses courbes.

Les œuvres suivantes ont trait à un autre chapitre des mathématiques, la géométrie moderne ici penchée sur la théorie des surfaces et celle de leurs extensions dans les espaces à plusieurs dimensions, sur leurs propriétés topologiques. On retrouve l'image d'une très belle sculpture de John Robinson, épurée, celle d'un objet que les mathématiciens appellent un nœud, en l'occurrence le nœud de trèfle. Les mathématiciens savent retourner la sphère sans la plier ni la déchirer : François Apéry et John Sullivan montrent, ou par des sculptures métalliques étincelantes, ou par des images étoffées à la manière des tapisseries, des moments privilégiés de ce retournement. La notion d'extrémalité, qui n'est pas sans lien profond avec celles de stabilité, d'optimalité et de symétrie, est très présente dans leurs réalisations, tout comme dans les gravures de Patrice Jeener où la contemplation statique (vue de Chalancon, hypercube) s'oppose au regard dynamique (oliviers et surfaces minimales), par nature beaucoup plus vif et vivant. La géométrie dite algébrique, car elle fonde ses démonstrations sur les propriétés structurales des objets mathématiques, n'est pratiquement ici représentée que par une seule œuvre, très élégante et lumineuse, celle de Philippe Charbonneau. De leur côté, Thomas Banchoff et Davide Cervone ont consacré ces quinze dernières années l'essentiel de leurs activités, dans les domaines de la topologie et de la géométrie, à la visualisation d'objets et de phénomènes présents dans des espaces de dimension parfois plus élevée que celle de l'espace usuel, et aux formes souvent inhabituelles. Ces visualisations, par leur beauté intrinsèque, ne peuvent que stimuler la créativité artistique, elles aident aussi les mathématiciens eux-mêmes à se familiariser avec le contenu de ces espaces.

Jean-François Colonna a également réalisé un grand nombre de visualisations pour les physiciens et les mathématiciens ; savamment retravaillées, « peintes », elles sont devenues de véritables œuvres d'art qui ont déjà fait chez nous l'objet d'expositions.

Pour la résolution d'un problème classique, trouver les valeurs de l'inconnue qui annulent un polynôme, Bahman Kalantari a étendu une méthode déjà employée par Newton dans un cas simple. L'algorithme s'accompagne de la création de domaines que l'on peut colorier. Les résultats visuels sont parfois fascinants. Ils l'ont conduit à développer un procédé nouveau et puissant de création artistique, certes encore inconnu en France. Le procédé est également ludique et instructif. Particulièrement dans le cas présent, les mathématiques sont au service de l'art, qui, reconnaissant, vient épauler les mathématiques.

Nat Friedman est un mathématicien, mais également un sculpteur. Le sculpteur aime l'éclat de la matière autant que le génie de ses formes. La Nature donne parfois à ces dernières un aspect fractal. On y découvre alors, malgré une similitude d'apparence, l'expression d'une délicate et séduisante infinie variété de motifs. C'est ce caractère que N. Friedman a choisi de montrer dans ses œuvres toutes récentes.

L'œuvre du peintre Dick Termes est originale : il peint non pas sur des toiles mais sur des sphères de manière à représenter la totalité de l'espace qui environne ces sphères. De ce fait, il soulève la curiosité du mathématicien car il a instinctivement reproduit des procédés utilisés par ailleurs par les topologues, ce qui l'a conduit alors, du point de vue technique, à faire appel à plusieurs centres de perspective. L'artiste est fécond, nombre de ses peintures sont le fruit de son imagination.

C'est également le cas de Jean Constant. Il construit ses tableaux à partir de trames mathématiques parfaitement visibles. Ces trames lui ont été fournies par le mathématicien Richard Palais. Ce sont des visualisations fines en trois dimensions, soit des nombreux objets classiques, soit de surfaces obtenues par Richard Palais lui-même, provenant de la résolution d'équations aux dérivées partielles attachées à la théorie physico-mathématique dite des solitons. Jean Constant a amplement enrichi ces trames, et a créé une famille impressionnante et chaleureuse de tableaux hauts en couleur et plein de vitalité.

Au sortir de cette exposition, le visiteur ne manquera pas de s'interroger encore sur les raisons de l'activité artistique de l'homme dont on rencontre ici la diversité des manifestations. Il n'est pour moi pas de doute que l'une des motivations parmi les plus profondes qui la sous-tend est, liée à la nécessité, la volonté de saisir l'espace, de le maîtriser, ce qui implique sa compréhension, fille aînée de sa représentation.

Un texte, un mathématicien

Cycle de conférences organisées par la Bibliothèque nationale de France et la Société Mathématique de France

Quatre conférences de mathématiques vont être organisées à l'attention du grand public, des professeurs du second degré et des lycéens et étudiants au cours du printemps 2005. Elles auront lieu le mercredi a 18h30 à la BNF (site F. Mitterrrand). Les conférenciers partiront d'un texte, ou d'un *corpus* de textes, et montreront en quoi ce texte les a influencés personnellement et a conduit à des recherches contemporaines.

Don Zagier (le 16 mars) parlera à partir des lettres de Ramanujan à Hardy. Jean-Christophe Yoccoz (le 13 avril) s'intéressera à la fameuse erreur de Poincaré. Pierre-Louis Lions (le 18 mai) montrera comment la lecture du *Courant Hilbert* l'a conduit à certains travaux en analyse numérique. Enfin Alain Connes (le 8 juin) évoquera Evariste Galois et son héritage mathématique.

Le cycle est organisé en partenariat avec France Culture et la revue *Tangente*. Les détails (titres, résumés) seront disponibles sur le site de la SMF à :
`http://smf.emath.fr/VieSociete/BNF2005/`

CARNET

René Taton (1915-2004)

Jeanne Peiffer[1]

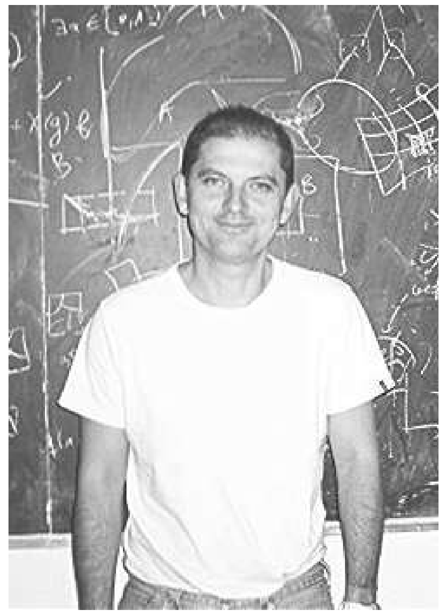
© Archives privées de la famille Taton

René Taton, qui vient de décéder cet été au mois d'août, a été une figure clé de la constitution de l'histoire des mathématiques en discipline, après la seconde guerre mondiale, particulièrement en France. Fils d'agriculteurs ardennais, agrégé de mathématiques (1941), il a pu exercer ce qu'il a appelé lui-même son « goût pour la pensée géométrique » avec des professeurs comme Élie Cartan ou Henri Lebesgue. Jeune professeur de mathématiques à Orléans, il a été approché par les Presses Universitaires de France (PUF) pour qu'il rédige une histoire du calcul pour la fameuse collection *Que sais-je ?* Cette commande orienta définitivement ses recherches et sa carrière vers l'histoire des mathématiques. Admis au CNRS en 1946 dans la commission de philosophie, après avoir été refusé par celle de mathématiques, René Taton prépara sous la direction de Gaston Bachelard une thèse sur Gaspard Monge et consacra sa thèse complémentaire à Girard Desargues, dont il put retrouver un exemplaire original du *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan* (1639), traité de géométrie projective dans lequel on trouve la notion de point à l'infini. Il n'a jamais cessé de côtoyer Monge et vers la fin de sa vie, il travailla encore à une édition de sa correspondance. Avec son collègue et ami russe, Adolf P. Youschkevitch, il publia un volume de la correspondance d'Euler. Sous l'impulsion de Jean Dieudonné, il acheva l'édition des *Œuvres complètes* de Cauchy. Directeur de 1964 à 1983 du Centre d'histoire des sciences fondé en 1958 par Alexandre Koyré, il enseigna à ses élèves, venus du monde entier, extrême rigueur dans la documentation et prudence dans l'interprétation. René Taton fut pendant de longues années responsable de l'organisation du séminaire d'histoire des mathématiques de l'Institut Henri Poincaré, qu'il lui arrivait de fréquenter en voisin jusqu'à l'année dernière.

[1] (CNRS) Centre Alexandre Koyré

Frédéric Poupaud (1961-2004)

Claude Bardos[1]



La disparition de Frédéric Poupaud a été pour nous tous une grande peine et une lourde perte.

J'ai eu la chance de l'avoir comme collègue au Centre de mathématiques appliquées de l'ÉNS Ulm en 1985-1988 alors qu'il était « assistant normalien doctorant » à Paris VI et qu'il préparait sa thèse. Dès le début il s'est révélé un collaborateur exceptionnel.

Il m'a paru d'abord discret et modeste mais d'une extrême gentillesse et toujours d'une merveilleuse bonne humeur. Il a tout de suite fait preuve à la fois de sérieuses compétences mathématiques et d'un très bon goût dans le choix de ses domaines de recherches.

Ces tendances n'ont cessé de se confirmer par la suite. Il a très vite acquis une grande maturité scientifique. Il a résolu des problèmes de modélisation vraiment appliqués dans des domaines variés (gaz raréfiés et semi-conducteurs entre autres) et en même temps il a su très bien développer l'outil mathématique. Il avait une vision juste et profonde de l'interaction entre cet outil et les applications et ainsi a su apporter des idées nouvelles qui sont vites devenues des « classiques ». Je cite deux exemples qui me semblent particulièrement pertinents.

1) Son programme de travail sur la définition et l'utilisation des mesures de Wigner mené en collaboration avec Patrick Gérard, Peter Markowich et Norbert Mauser, avec lequel il a developpé les « séries de Wigner-Bloch », un outil avancé pour l'homogénéisation des structures périodiques. Cela a conduit à un nouvel aspect de l'analyse microlocale particulièrement bien adapté aux problèmes concrets, comme la dérivation des « équations semiclassiques » pour la modélisation quantique des semiconducteurs.

2) La justification, en collaboration avec A. Vasseur, de l'approximation de la diffusion pour des phénomènes de propagation dont la structure varie aléatoirement en espace et aussi en fonction du temps . Il s'agit d'un sujet « chaud » qui a suscité des contributions de quelques « géants » comme G. Papanicolaou ou H. T. Yau. On peut ici aussi observer que le point de vue de Frédéric colle au mieux aux applications (par exemple propagation d'ondes en acoustique sous marine).

[1] Université Paris VII

Notre communauté a bien su apprécier à la fois ses travaux scientifiques (Médaille de Bronze du CNRS en 1992) et son dévouement pour les tâches collectives : gestion de l'enseignement et de la recherche.

Entre autre il avait pris en charge en 1999 la direction du laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné de l'université de Nice. Cette direction n'a suscité que des éloges et il me semble juste de constater que les dix ans où Frédéric a été professeur à Nice ont été des facteurs clé pour une remontée en puissance assez remarquable de ce laboratoire (où j'avais travaillé moi-même quelques années).

Frédéric a été très reconnu au niveau européen. Ses collaborateurs, par exemple en Autriche, en Espagne et en Italie étaient devenus de vrais amis. Avec eux il a joué un rôle essentiel dans la réalisation de réseaux européens qui se sont révélés de nouveaux instruments pour la recherche, la communication et l'accueil des jeunes, notamment le réseau HYKE sur les équations hyperboliques et cinétiques, coordonné par son collaborateur Norbert Mauser.

Dans sa courte vie avec sa gentillesse et ses réalisations il aura profondément marqué notre communauté et aura suscité de profondes amitiés. Je tâche de m'en faire l'interprète pour témoigner aussi à sa famille notre solidarité dans sa douleur.

© M. W. Suits

Fête de la Science 2004, Village des Sciences, jardin du Luxembourg à Paris

© M. W. Suits

Fête de la Science 2004, Village des Sciences, jardin du Luxembourg à Paris
Le stand « Expo Math »

TRIBUNE

Quelles images des Mathématiques ? Promenade au Village des Sciences

Gérard Tronel

Depuis quelques années la communauté mathématique cherche à rendre plus visibles et plus lisibles ses activités. Les moyens pour mener à bien des actions dans ce but ne sont pas nombreux. Au cours de ces dernières décennies, les mathématiques n'avaient pas la faveur du grand public ni celle des élèves de l'enseignement secondaire et des étudiants de l'enseignement supérieur : la décroissance des effectifs dans les filières scientifiques est la traduction de la désaffection, voire du désintérêt de l'opinion publique et des politiques face à la science en général et aux sciences dures en particulier.

Comment réagir devant une telle situation ?

La communauté mathématique n'est pas unanime et certains d'entre nous se demandent si le combat n'est pas déjà perdu ou s'il est bien raisonnable d'essayer de faire bouger la société qui ne souhaite pas développer la culture scientifique. Et puis pourquoi s'inquiéter, les mathématiques françaises ne sont pas si mal en point puisque que nous récoltons régulièrement des médailles Fields, des prix Abel, des médailles d'or du CNRS ; nous exportons aussi nos meilleurs mathématiciens. En fait, d'autres discours annoncent, non moins régulièrement, la déshérence de notre économie faute de cadres scientifiques et techniques. La vieille Europe serait atteinte du même mal, mais notre pays ne serait en trop mauvaise position, nous serions enviés par certains de nos partenaires européens et par nos concurrents américains, chinois, japonais ou russes. Bien sûr, un pays comme la Hollande est dans un état de cessation culturelle dans le domaine scientifique ; Jean-Pierre Bourguignon soulignait, dans une de ses interventions, qu'au cours de l'année 2000, huit cents étudiants hollandais avaient une formation scientifique à l'entrée à l'université, cet effectif se réduisait à un peu plus d'une centaine deux ans plus tard ! Nous ne sommes peut-être pas encore dans cette configuration catastrophique, mais les filières scientifiques sont en voie de disparition dans certaines universités, nous allons vers une situation bien connue en Grande Bretagne qui voit des départements de mathématiques disparaître faute de recrutement de jeunes. Les États-Unis cherchent par tous les moyens à améliorer la formation et la culture scientifique de leurs élites, car le drainage des cerveaux venant de la sphère sous influence soviétique ou de l'Asie est en train de se ralentir, voire de se tarir.

Alors que faire ?

C'est en 1992 que Jacques-Louis Lions, alors président de l'IMU, lança l'idée de faire de l'an 2000, l'Année Mondiale des Mathématiques, avec le patronage de l'UNESCO. Trois axes étaient privilégiés :

– les problèmes spécifiques à la communauté mathématique : organisation, place dans la société, structures internationales, européennes, nationales ;
– l'enseignement des mathématiques ;
– l'image des mathématiques dans le grand public.

Sans revenir dans le détail sur les différentes actions réalisées en l'an 2000, citons pour mémoire les campagnes d'affichage dans les métros de quelques grandes villes de plusieurs pays, l'édition de brochures comme « *Les mathématiques de la vie quotidienne* », suivie par « *l'Explosion des mathématiques* », la première participation de mathématiciens au Village des Sciences pendant la Fête de la Science au mois d'octobre 2000.

Quels enseignements pouvions-nous tirer de cette présence hors de notre champ clos ? Tout d'abord la nécessité de rendre nos activités lisibles et visibles. Notre présence sur le terrain nous a mis face à toute une série de questions du type :

« À quoi servent les mathématiques ? » ou « À quoi ou à qui servent les mathématiciens ? »

« La recherche en mathématiques est-elle utile, nécessaire ? »

« Les mathématiques ne dessèchent-elles pas le cœur et l'esprit, ne tuent- elles pas l'intuition, la créativité, l'inventivité ? »

« Les mathématiciens, comme le soulignaient le code justinien, ne sont-ils pas aussi dangereux que les voleurs ? »

« Les étudiants des filières mathématiques sortant d'une école supérieure ou de l'université trouvent-ils à se placer sur le marché de l'emploi ? »

« Quels sont les métiers des mathématiques hors de l'enseignement ? »

« Pourquoi dans les offres d'emplois ne trouve-t-on jamais d'entreprises qui embaucheraient des mathématiciens ? »

La liste des questions est interminable et celle des réponses possibles est encore plus longue. Un tel déluge d'interrogations prouve que le public n'est pas aussi indifférent aux problèmes qui nous préoccupent.

Je voudrais dans la suite faire un bref compte rendu de la 13e édition de la Fête de la Science.

À l'occasion de la Fête de la Science, le Ministère de la Recherche organise des manifestations dans tout le pays, mais c'est surtout le Village de la Science qui fera l'objet de la suite.

Pour la première fois, le Village a quitté la cour carrée du Ministère de la Recherche, sur la montagne Sainte-Geneviève, pour prendre ses quartiers dans trois allées du jardin du Luxembourg ; l'École des Mines de Paris, adossée au jardin, prêtait ses locaux pour les conférences, les cafés des sciences et en profitait pour ouvrir quelques uns de ses laboratoires et son exceptionnelle collection de minéraux. Les exposants, aussi nombreux que les années précédentes, étaient logés dans des tentes confortables. Le stand « EXPOMATH » abritait plusieurs organisations proches des mathématiques : le Palais de la Découverte, le Centre international des jeux mathématiques. Je représentais plus ou moins la SMF et la SMAI, je regrette d'avoir été un peu seul, même si quelques collègues sont venus prêter main forte de temps en temps. L'association « *femmes et mathématiques* » partageait, cette année, le stand de « Femmes et Sciences » ; « maths en jeans » et « ANIMATH » n'avaient pas de représentant permanent contrairement aux années précédentes.

Nous avons connu quelques moments creux, mais les journées de samedi et dimanche ont été particulièrement chargées ; les stocks de brochures *Les mathématiques de la vie quotidienne*, *L'explosion des mathématiques*, *Images des mathématiques 2004* éditée par le CNRS, ainsi que quelques numéros de la *Gazette* et de *MATAPLI* ont été rapidement épuisés. À certaines heures les permanents du stand étaient littéralement éjectés par une foule de visiteurs qui voulaient s'initier aux mathématiques par des jeux, qui voulaient poser des questions, celles données plus haut mais beaucoup d'autres auxquelles nous ne savions pas toujours répondre. Voici quelques exemples :

« Quelles différences peut-on faire entre une démonstration et une preuve ? En anglais il n'existe qu'un seul vocable pour traduire ces deux mots, mais dans d'autres langues ont plus de deux mots pour traduire une même opération ».

D'autres questions plus spécialisées portent sur l'existence de nouvelles démonstrations du théorème de Fermat. Un visiteur, qui se dit non mathématicien mais curieux de mathématiques, s'intéresse à la conjecture de Poincaré et demande si Perelman a réellement démontré cette conjecture. Des collègues polonais sont venus présenter leurs logiciels sur le pavage de l'espace, le public a été très intéressé par cette présentation. De plus, sur le stand de la Pologne, pays invité au même titre que l'Allemagne et la Grande-Bretagne déjà présents l'année précédente, des animations et des exposés présentaient les possibilités de cryptage et de décryptage avec un exemplaire de la machine « Enigma ». Nous avons également profité de cet événement pour annoncer que la Fête de la Science aurait un prolongement cette année puisqu'une présentation de l'exposition « Pourquoi les Mathématiques » aura lieu du 10 au 31 décembre, à la Maison des métallos, à Paris.

Quelles conclusions pouvons-nous tirer de cette présence dans les manifestations réservées à un public de non-spécialistes ?

Tout d'abord cela nous permet d'avoir une visibilité que nous n'avions pas toujours. De plus, la perception du grand public, face aux mathématiques et aux mathématiciens, change petit à petit ; nous ne sommes plus, – nous n'en avons plus les moyens ! – les auxiliaires conscients ou inconscients de la sélection sociale. Les mathématiques sont présentes dans la vie quotidienne mais cette présence est encore trop peu visible et pas suffisamment lisible. Il ne s'agit nullement de nous transformer en bateleurs, quoique Descartes, à son époque, n'ait pas hésité à discuter de mathématiques dans les rues d'Amsterdam, cependant, il est clair, que si nous ne sommes pas présents dans la vie sociale notre image devient floue et, dans un déluge d'informations cette image risque de s'estomper voire de disparaître. Il me semble que le philosophe Bergson écrivait que les idées philosophiques même les plus sophistiquées devraient pouvoir s'exprimer dans un langage accessible à tous. Pourquoi n'en serait-il pas de même des mathématiques ?

Alors à vos plumes pour expliquer ce que vous faites, si vous souhaitez que les politiques, les décideurs vous accordent les moyens de vos ambitions : continuez à faire ce que nous aimons et qui est notre raison de vivre !

Pour terminer, je vous rappelle que la bibliothèque nationale de France et la SMF organisent un cycle de quatre conférences (voir page 64), grand public, au premier semestre 2005 ; les conférenciers sont les quatre professeurs au Collège de France : Dan Zaguier, P.-L. Lions, J.-C. Yoccoz et A. Connes.

Faîtes connaître cette initiative autour de vous et aussi en dehors de notre communauté.

Valoriser et faire connaître les actions grand public de la SMF

Geneviève Courtade-Coulomb

Introduction

Depuis longtemps, la SMF s'est investie dans des actions de vulgarisation des mathématiques. Citons par exemple : le prix d'Alembert, le mouvement « Math. en Jean », la publication de la brochure *Horizons Mathématiques*, la participation à Animath. Force est malheureusement de constater qu'elles sont mal connues en dehors des milieux de l'enseignement et de la recherche.

Ayant, à juste titre, décidé de lancer de nouvelles actions en direction du grand public, la SMF doit aussi définir une nouvelle politique de communication. Je souhaite, par cette tribune libre, contribuer à la réflexion sur les buts et les moyens d'une telle politique. J'insisterai sur le rôle d'Internet : les jeunes aiment naviguer sur le web, et ils ont de plus en plus souvent un accès facile à un ordinateur multimédia. Par exemple, le département des Landes a, durant cette année scolaire 2004-2005, mis gratuitement à disposition de tous les élèves de troisième un ordinateur portable.

Regrouper sous une même rubrique du site Internet de la SMF toutes ses actions grand public

« L'explosion des Mathématiques » est accessible en deux clics lorsqu'on se connecte au site de la SMF. Tant qu'ils y figuraient, les documents relatifs à la journée « La face cachée des mathématiques » étaient beaucoup plus difficiles à atteindre. Si vous vous connectez pour la première fois sur le site de la SMF, et que vous cherchez des renseignements relatifs à « Math en Jeans » ou la référence d'un journal de mathématiques destiné à des collégiens ou lycéens (sans connaître Animath), vous risquez de ne rien trouver.

Or, beaucoup d'entre nous ont sans doute vécu une expérience analogue à celle-ci : rencontrer à l'occasion d'un cocktail, ou d'une réunion quelconque, une personne sympathique, parent d'un enfant « précoce » (terme que je préfère à celui de « surdoué » ou de « haut potentiel ») ; l'écouter confier ses difficultés à motiver son enfant en mathématiques ou à organiser des activités scientifiques pour le camp d'été de son association de parents d'enfants précoces. Vous lui expliquez qu'il y a des journaux mathématiques pour les jeunes collégiens et lycéens, qu'il existe des associations qui organisent des rencontres entre jeunes et chercheurs, ce qui la passionne. Mais vous devez en rester là, parce que votre conversation est brusquement interrompue, et que vous n'avez pas la possibilité (ou le désir), de prendre ses coordonnées. Quel dommage de ne pouvoir lui glisser : « je vous conseille, pour en savoir plus de regarder le site de la SMF à la rubrique... » ! Cela rendrait service et ferait de la publicité à la SMF.

C'est pourquoi il me semble souhaitable de regrouper tout ce qui concerne la vulgarisation des mathématiques dans une même rubrique du site de la SMF, rubrique accessible dès la page d'accueil du site. Il faudrait y faire figurer une brève présentation des activités permanentes de la SMF en direction des jeunes, avec des liens pour les personnes souhaitant obtenir plus de renseignements. On pourrait appeler cette rubrique, par exemple, « découverte des mathématiques » ou « mathématiques pour tous ». Dans vulgarisation, il y a « vulgaire », et il me semble préférable d'éviter ce mot dans la dénomination de la rubrique.

Pour la faire vivre, il serait bon d'envisager la publication régulière d'une ou deux chroniques, dont une qui pourrait traiter de l'actualité des mathématiques et de la vie de la SMF, et une autre d'un thème. Je rêve d'une chronique, à destination des collégiens et lycéens, traitant de l'histoire des mathématiques : cette discipline est un moyen d'accès privilégié aux mathématiques pour certains jeunes, et il y a une demande du côté des enseignants.

Mieux tirer parti du travail de vulgarisation fait pour les conférences « grand public » organisées par la SMF

À la fin de la journée « La face cachée des mathématiques », j'étais frappée par le décalage entre l'important et très intéressant travail de vulgarisation effectué à cette occasion d'une part, le faible nombre de personnes qui en profitaient d'autre part. Le dossier que consacre *La Gazette des Mathématiciens* à cette manifestation va améliorer la situation, mais il risque d'être lu surtout par les membres de la SMF et leurs proches.

De plus, je doute que ce dossier, dont je ne connais pas le contenu en écrivant cette tribune, nous donne tous les exposés et l'essentiel des débats qui ont suivi : les conférenciers, s'ils sont chercheurs, hésitent à faire ce travail de rédaction et de mise au point, car il prend beaucoup de temps et ne rapporte rien sur le plan carrière.

La SMF envisage une série de conférences à la Bibliothèque Nationale de France au printemps 2005. Il est sans doute prévu, comme pour « La Face Cachée des Mathématiques », un enregistrement audio. Ne pourrait-on pas interroger, avant la manifestation, les intervenants :
– rédigeront-ils leur conférence ?
– en cas de réponse négative, acceptent-ils de mettre à disposition d'un bénévole, mandaté par la SMF, les transparents utilisés dans leur intervention ? puis de corriger, et valider l'article établi par ce bénévole après retranscription de la bande audio.

Je vois en effet un double intérêt à la rédaction des conférences et débats. D'une part les documents mis au point pourraient être mis sur le site de la SMF. D'autre part, en procédant de la même manière pour toutes les manifestations grand public à venir, on aurait les matériaux pour la publication d'une nouvelle brochure du type *Horizons Mathématiques*.

À plus long terme, il faudra réfléchir à un enregistrement vidéo des conférences, en plus de l'enregistrement audio. Il serait intéressant de projeter les cassettes obtenues à l'occasion de manifestations comme « Sciences en Fête » ou de journées d'information sur les études supérieures. On pourrait aussi les utiliser à l'université même, par exemple pour aider les étudiants dans le choix de cours à option, ou en introduction à certains enseignements. On pourrait enfin, à l'image de ce qui se fait à l'Université de tous les Savoirs, mettre ces enregistrements à disposition de tous ceux qui disposent d'un accès Internet à haut débit.

Faciliter le travail des journalistes

Le journaliste J.C. Guillebaud expliquait, dans un article consacré au prix « Reporters d'Espoir » (décerné pour la première fois en mai 2004), qu'une des raisons majeures pour laquelle les médias parlaient peu d'événements positifs était le coût de la recherche d'informations de ce type : le bien ne fait pas de bruit, et ne se juge que sur la durée. Aussi important que le prix, sinon plus, lui semblait la publication d'un volume regroupant tous les articles qui avaient concouru pour le prix : les directeurs de rédaction y trouveraient, en période creuse en particulier, des sujets d'article.

Je trouve des analogies entre le problème exposé par J.C. Guillebaud et celui de la publication d'articles relatifs aux mathématiques dans les médias. Même si l'on manque encore de recul pour juger de l'efficacité de la démarche ainsi initiée, je pense qu'il serait intéressant de reprendre dans notre domaine l'idée d'une base de données pour journalistes, idée qui me semble d'autant plus importante que peu de médias peuvent se payer les services d'un journaliste scientifique.

Il me semble que la SMF pourrait créer, à moindre frais, une telle banque de données : à l'occasion des grands événements de la communauté (prix, anniversaire, numéro spécial de la *Gazette* consacré à un mathématicien décédé récemment), elle pourrait prévoir systématiquement un article à destination du grand public. La SMF le mettrait sur son site et l'adresserait par courriel ou courrier aux journalistes intéressés. Le texte proposé devrait être substantiel, pour que chacun puisse en extraire les renseignements qui intéressent sa publication.

Conclusion

Une fois la politique de communication de la SMF définie, la société aura besoin de mobiliser de nouveaux bénévoles. En effet, à travers les propositions faites dans cette tribune, on constate qu'il faudra faire appel à des compétences très diverses : mathématiques, informatique, communication, techniques de prise de son et d'images vidéos, etc.

La SMF pourra bien sûr se tourner vers des associations avec lesquelles elle travaille déjà. Il serait souhaitable qu'elle fasse également connaître ses besoins à d'autres mouvements, entre autres d'enseignants et d'ingénieurs, ainsi qu'à la banque du volontariat.

Il faut y voir une opportunité de communiquer sur les actions de la SMF et de rappeler qu'elle n'est pas seulement une association de chercheurs. Ce sera donc une chance pour notre association de recruter de nouveaux adhérents.

COURRIER DES LECTEURS

À propos de l'article de P. Sargos

Dans la rubrique « enseignement » la *Gazette* a publié un article de P. Sargos : « enseigner les mathématiques à l'université ». J'ai lu avec intérêt cet article et j'ai eu l'impression de retourner plus de 30 ans en arrière. Non pas que les remarques de P. Sargos soient obsolètes, seulement il se place en marge de toute une recherche en science de l'éducation, recherche qui, en mathématiques, a été essentiellement initiée par les IREM.

Les IREM sont nés en 1969 et ont permis l'essor de la didactique des mathématiques. C'est toujours par l'intermédiaire des IREM que cette discipline diffuse dans l'enseignement, à tous les niveaux. Quand on sait que certaines universités font pression pour supprimer leurs IREM, on peut se demander si un texte comme celui de Sargos n'apporte pas de l'eau au moulin des détracteurs de la recherche en pédagogie et en didactique : « Inutile de financer des IREM puisque quelques recettes suffisent ! » Que dirait-on d'une médecine qui se contenterait de recettes ?

Que l'on me comprenne bien. Les recettes élémentaires de médecine sont utiles et méritent d'être vulgarisées pour éviter de graves erreurs de la part du non médecin. C'est ainsi que l'on diffuse les règles élémentaires de secourisme. Mais le recours au généraliste ou au spécialiste reste indispensable ensuite. Alors si P. Sargos a pour but d'éviter les impairs de répétiteurs néophytes, son texte peut être la première leçon d'une formation pédagogique que tout enseignant devrait avoir. Mais j'attends ensuite qu'il se mobilise pour les leçons suivantes, pour qu'enfin une formation pédagogique digne de ce nom soit donnée à tout enseignant et pas seulement aux enseignants d'universités.

Malheureusement je ne vois pas apparaître cette tentative de mobilisation et, ce qui est plus grave, en commençant son article par « La pédagogie est une pratique, pas une science », il semble dénier toute possibilité de recherche en pédagogie. La pédagogie fait appel à la fois aux sciences humaines et à la didactique de la discipline, les mathématiques en ce qui nous concerne. Les critères de validation des thèses dans ces domaines n'ont rien à voir avec ceux en vigueur en mathématiques, ce qui ne les empêche pas d'être rigoureux et de mériter notre respect.

Je voudrais préciser ma réflexion par quelques exemples.

1) C'est en 1973 que l'IREM de Strasbourg a publié à l'instigation de son directeur, Georges Glaeser, le premier fascicule du livre du problème, intitulé *Pédagogie de l'exercice et du problème*[1]. On y trouvera largement développé et utilement classé les

[1] Le livre du problème, fascicule 1 : Pédagogie de l'exercice et du problème, Université Louis Pasteur, IREM de Strasbourg, Chez CEDIC, 100 pages.

différents types d'exercices qui peuvent être proposés à l'apprenant et ce que l'on peut attendre de sa part. Cela lui permettra d'étoffer largement son deuxième paragraphe sur les travaux dirigés ainsi que le quatrième sur le sujet d'examen.

2) P. Sargos fait l'impasse sur l'utilisation des moyens audiovisuels, que ce soit l'usage assez ancien du rétroprojecteur ou bien plus récent de l'ordinateur. L'usage de ces instruments n'est pédagogiquement pas neutre et demande une réflexion sur leur emploi et sur l'interaction entre l'homme (maître ou élève) et la machine. Une telle réflexion apparaît dans les recherches des IREM et on en trouve des exemples dans *Repères IREM*[2] qui contient systématiquement une rubrique multimédia. L'expérience prouve que les étudiants ont tendance à ne plus prendre de note quand on fait une simulation ou une présentation sur ordinateur. Il serait bon à ce sujet d'anticiper sur les problèmes que posera l'arrivée des tableaux virtuels[3].

3) L'insistance de l'auteur à présenter des dessins pour faciliter la compréhension fait référence à ce que les didacticiens appellent le changement de registre. P. Sargos a raison, mais il n'y a pas que les dessins. Le changement de registre peut intervenir entre diverses formulations d'un même thème, entre diverses présentations d'une même notion, entre diverses interprétations d'un même calcul. Il y a là tout un champ de recherche très actif et qui ne concerne pas seulement les mathématiques mais aussi, d'une façon générale, la sémiotique. En liaison avec cet aspect de l'enseignement, il faudrait insister sur les difficultés de la transposition didactique[4], des ruptures qui interviennent dans l'apprentissage, etc. Le sujet est vaste.

4) L'enseignant doit être au clair avec lui-même. P. Sargos en parle à propos des professeurs chahutés. Mais il oublie le professeur tellement « coincé » que presque rien ne passe auprès des élèves ou des étudiants. Des thérapies existent, qui permettent à l'enseignant de prendre conscience de ses défauts ce qui est déjà un grand pas vers un meilleur contact enseignant-apprenant.

5) Dire que les programmes mathématiques sont bien au point depuis longtemps c'est faire l'impasse sur toutes les difficultés inhérentes aux mathématiques elles-mêmes et à certaines parties des mathématiques. Une réflexion sur l'histoire des mathématiques montre la difficulté conceptuelle de notions somme toute qualifiées d'élémentaires. Que l'on pense à la notion de limite de Zénon à Euler et au-delà avec le cours de Cauchy « démontrant » que la limite de fonctions continues est continue ; que l'on pense à la notion d'infini avec les indivisibles de Cavalieri, les travaux de Leibniz puis de Weierstrass ?[5]

Ces quelques remarques n'ont aucunement la prétention de couvrir le sujet. Je ne peux que réitérer la demande d'une formation pédagogique, initiale et continue, de tous les enseignants et non pas d'un catalogue de

[2] Repères-IREM, trimestriel édité par Topiques éditions, 3 place Jeanne d'Arc, 57000 Metz.

[3] Voir *Le Monde* du 23 novembre 2004 : *Tableaux noirs et ordinateurs fusionnent en douceur* de Michel Alberganti à propos du salon Educatec.

[4] On pourra consulter les « Annales de didactique et de sciences cognitives » université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg.

[5] Le travail des IREM est là encore remarquable, mais il n'est pas le seul. On pourra consulter les revues d'histoire des mathématiques comme *La revue d'histoire des mathématiques* publiée par la SMF.

recettes, aussi bien fait soit-il. Malheureusement une telle formation coûte et contrairement à la médecine que j'ai citée plus haut, les erreurs en pédagogie (malgré la remarque justifiée de P. Sargos : « Un enseignant-catastrophe = des générations sacrifiées ») n'ont pas l'impact social d'une mauvaise médecine. L'élève ou l'étudiant sera peut-être dégoûté des maths (ou seulement de l'analyse,...) mais il trouvera presque sûrement ailleurs de quoi avancer. On comprend alors le faible intérêt, pour ne pas dire le désintérêt total des autorités de tutelle pour financer une formation pédagogique digne de ce nom. Cela n'est pas une raison de fournir les verges pour se faire battre.

Pour terminer sur une note plus positive, je remercie P. Sargos pour l'insistance avec laquelle il encourage les collègues à se concerter, à parler entre eux de leurs difficultés. Les aléas de la vie peuvent induire des difficultés plus ou moins passagères dans son enseignement, difficultés qui seront surmontées plus facilement et plus rapidement avec l'aide de collègues. Mais là encore on ne peut se contenter de bricolage et la présence de spécialistes que l'on pourrait contacter à intervalles réguliers me paraît indispensable.

Mais peut-être suis-je utopiste, car c'est à une remise en cause complète de la « solitude » baptisée trop souvent « liberté » de l'enseignant que je m'attaque. Et pourtant, que de progrès nous pourrions attendre d'une solidarité bien comprise !

Jean Lefort
Lycée Blaise Pascal de Colmar

Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques

P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie,
K. Kato, M. Rapoport (Éd.)

Offre spéciale

Astérisque 278, 279, 295

Ces trois volumes sont consacrés aux méthodes p-adiques en géométrie arithmétique. Les thèmes abordés dans le premier volume touchent à la théorie des groupes formels et de leurs déformations, au programme de Langlands p-adique, et à la géométrie hyperbolique p-adique. Le second est centré autour des problèmes de construction des cohomologies p-adiques et des théorèmes de comparaison entre ces cohomologies : géométrie logarithmique, cohomologie cristalline, D-modules arithmétiques, équations différentielles p-adiques, et théorèmes de comparaison de Faltings et Tsuji. Le troisième traite de questions de nature arithmétique: représentations galoisiennes, fonctions L p-adiques de formes modulaires, théorie d'Iwasawa des formes modulaires.

Pour les trois volumes :

Prix public* : 150 € ; Prix membre* : 100 €
*** Frais de port non compris**

Commandes

Maison de la SMF, BP 67, 13274 Marseille Cedex 9 France
Tél : 04 91 26 74 64 - Fax : 04 91 41 17 51 - mail : smf@smf.univ-mrs.fr
url : http://smf.emath.fr/

LIVRES

Galois theory of linear differential equations[1]

M. van der Put and M.F. Singer

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2003. 438 p.
ISBN : 3-540-44228-6. 89,95 €

Let me begin with my overall impression, in two words : at last ! At last, a thorough exposition, including most of the facets it presents nowadays, of this beautiful analogue of the Galois theory of field extensions, initiated by Liouville on the footsteps of Galois, enriched by Lie's introduction of infinitesimal groups, turned into a theory by Picard and Vessiot, and forgotten for half a century until Kolchin gave it its "modern" form in a fundamental 1948 article ([Ko], 87-128). The theory consists, in short, of replacing polynomials over a field K by linear differential operators over a differential field (K, ∂), splitting fields by Picard-Vessiot differential extensions, and finite groups by linear algebraic groups : you then still get a Galois dictionary. When K is a global object such as $\mathbf{C}(z)$, you can localize at one of the singular points of the differential equation, say 0, and get an array of analogues of the inertia groups : the formal differential group after base extension to the field of formal powers series $\mathbf{C}((z))$, or stopping half-way in the completion, the local analytic differential group over the field of convergent powers series $\mathbf{C}(\{z\})$. All this, and much more, will here be found.

This laudative introduction does not mean that I praise everything in the book, and I give some hopefully constructive criticisms below. It does not mean either that our authors's predecessors must be forgotten : Kaplansky's book [Ka] played a crucial role in publicizing Kolchin's Picard-Vessiot theory (and the Zariski topology). It did lack foundational material on Picard-Vessiot extensions, but this is remedied by Magid's monograph [M]. Several articles (see in particular [S], [Be], [Le]) also helped, and in spite of their inaccessible language or distribution, we can further mention lecture notes such as [P] or [La]. Finally, a special notice should be made of Kolchin's two books and of his collected works [Ko], which go beyond the (linear) Picard-Vessiot theory. In fact, non-linear differential Galois theory is still under construction, with new view-points provided by current work of Umemura, Pillay, Malgrange, and a synthesis is clearly required. Wisely for a Grundlehren volume, the book under review, which we now analyse in a more details, restricts to the linear case.

Chapter 1 gives a self-contained presentation of the foundational material on Picard-Vessiot extensions and of the Galois correspondance, all in 30-odd pages : a real treat. One difficulty in this type of exposition is the choice one has to make between the various interpretations of a linear differential equation : an element

[1] Cette recension est reproduite avec l'aimable autorisation du *Jahresbericht* de la Deutsche mathematische Vereinigung

of the ring of differential operators $K[\partial]$, a differential system, a module over $K[\partial]$ (all these are presented, together with their relationships, in Chapter 2), or the localization at the generic point of a vector bundle with connection (which will appear in Chapter 6). Chapter 2 also introduces the constructions of linear algebra in the differential context, leading to the language of tannakian categories, and to the first example (here between differential equations and representations of groups) of the numerous equivalences of categories to be met in the book. The usefulness of this approach is well conveyed by the one-line proof it provides (p. 56, ℓ. 1) that the fixed field under a normal subgroup is a Picard-Vessiot extension. Chapter 3 concerns the local theory over a field $\hat{K}$ of type $\mathbf{C}((z))$, with the classical dichotomy between regular and irregular singularities : in the second case, determining factors, here called eigenvalues, produce the exponential torus, a subgroup of the formal Galois group which is in general not covered by the formal monodromy. This leads to an equivalence of categories between differential equations over $\hat{K}$ and a category Gr_1 made of down-to-earth triples. Chapter 4 goes global, and describes general methods for computing differential Galois groups, which are supported by ingenious (and often efficient) algorithms ; this is probably their first appearance in book form. It is interesting to note that just as in the study of ℓ-adic representations, Jordan's theorem on finite subgroups of GL_n plays an important role ; further links with classical Galois groups are given at the end of this chapter.

For most of the rest of the book, the constant field is $\mathbf{C}$, allowing for an analytic description of the Galois group. Thus, Chapters 5 and 6 study regular singular systems over the Riemann sphere, and their re-interpretation, using GAGA, as local systems over the complement of the singular locus , or equivalently, as representations of its fundamental group (cf. §§6.2 and 6.4) ; here, the monodromy group is Zariski dense in the Galois group. The various forms of the Riemann-Hilbert problem are clearly stated, leading to Bolibrukh's negative (and sometimes positive) solution if one searches for a connection with logarithmic singularities on a trivial bundle. Chapters 7, 8, and 9 concern the much more difficult case of irregular singularities, with the study of asymptotic expansions and the Stokes phenomenon, their refined Gevrey versions and multisummation, yielding Stokes matrices and Ramis's theorem, according to which the local analytic Galois group is topologically generated by the monodromy, the exponential torus, and the Stokes group. Differential equations over $\mathbf{C}(\{z\})$ are classified in terms of the Stokes sheaf ; and the category they form is shown to be equivalent to a refined version Gr_2 of Gr_1, which is still easy to describe. The inverse problem of differential Galois theory is the subject of Chapter 11, in both local and global contexts, and from both theoretical and constructive points of view. Chapter 12 offers tentative approaches to moduli spaces of differential equations. Finally, Chapter 13 describes the work of Matzat and the first author on iterative differential equations over fields of finite characteristic, and their applications to p-adic differential equations.

Needless to say, a book with such a large scope cannot maintain a homogeneous level, and although its basic results require only standard notions from multilinear or commutative algebra, further prerequisites are needed in its more advanced parts. Fortunately, the authors have added three useful appendices to come to the rescue. They respectively deal with algebraic geometry, including a short course on linear algebraic groups ; tannakian categories, pedagogically introduced by Galois categories and affine group schemes ; and sheaf cohomology. (A last appendix concerns the Picard-Vessiot theory of linear partial differential equations.)

Now for the criticisms. The book is not free of misprints, and I'll here give only a sample : on p. 31, ℓ. 1-, read $C[G]$, or $\mathcal{O}(G)$, instead of $\mathcal{O}[G]$; complete the sentence on p. 220, $\ell\ell$. 17-20 ; add "are invertible" on p. 249, ℓ. 15- ; on p. 340, ℓ. 18, read "reducible" instead of "irreducible" ; erase "non" on p. 341, ℓ. 17, ... But on the content itself, I think the book would have gained from the following additions :

– examples of how to compute the Galois groups of some classical families of differential equations (for instance, rigidity deserved more than the passing remark at the end of §5.1 ; more could have been said on Lie algebraic methods, as in the work of N. Katz, or on the general algorithm of Compoint and Singer in the reductive case) ;

– a better presented index : e.g., the word "defect" has two completely different meanings in the book (p. 177, and p. 275), while the index lists only one.

– a more thorough bibliography, or rather, a more homogeneous one : there is nothing wrong with quoting very recent articles or preprints whose impact it is still difficult to evaluate, but basic papers such as [F] or [A] should not be forgotten ;

– last, but not least : more detailed comments on the history of the recent results covered by the book. I found such shortcomings more noticeable in its analytic part (see, for instance, Lemma 7.59), even if scattered comments (7.25, 8.11, ...) do appear along the text. It would have been useful to gather them in the conclusion of each chapter, as was actually done at the end of Chapters 3 and 11. Also, unnecessary adverbs sometimes accompany the attributions, e.g. on p. 229, where Ramis's theorem is "originally" due to Ramis, or on p. 79, where Katz's criterion for formal irreducibility "also" appears in a paper of Katz.

When presenting a theory, authors are of course free to choose their favoured approach, or to put the stress on what they believe to be the final word, but this book is bound to become *the* reference on the subject, and it is a pity to downplay the role of other view-points (say, for instance, the analytic approach to multisummation via inverse and direct Laplace transforms, p. 227). Fortunately, references such as [Ko] (see in particular the second author's commentary, pp. 527-524), or the preface of [Ba], provide enough information to answer the above criticisms.

These are minor points. The book is in fact already becoming a standard reference, not only for differential Galois theory proper, but also for the many areas which have accompanied its recent growth : tannakian categories, the algorithmic aspects of differential algebra and of representation theory, multisummability, the Riemann-Hilbert and other inverse problems, moduli... On top of its intrinsic interest, differential Galois theory is an ideal testing ground for these theories. Any (young or not so young) student working in these areas will benefit from this book, which clearly belongs to all mathematical libraries.

References

[A] Y. André : *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*; Ann.Sc. ENS **34**, 2001, 685-739.

[Ba] W. Balser : *From divergent series to analytic functions*; Springer LN 1582, 1994.

[Be] F. Beukers : *Differential Galois theory in* "From number theory to physics", Chapter 10, Springer, 1992.

[F] A. Fahim : *Extensions galoisiennes d'algèbres différentielles*; Thèse Univ. Lille, 1990 ; see also Pacific J. Math. **180**, 1997, 7-40.

[Ka] I. Kaplansky : *An introduction to differential algebra*; Hermann, 1957.

[Ko] E. Kolchin : *Selected works, with commentary*; AMS 1991.

[La] Ê R. Lardon : *Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle*; Notes d'un Cours de 3e Cycle, Univ. Paris 6, 1985-86.

[Le] G. Levelt : *Differential Galois theory and tensor products*; Indag. math., **1**, 1990, 439-450.

[M] A. Magid : *Lectures on differential Galois theory*; AMS ULS 7, 1994.

[P] M. van der Put : *Galoistheorie van differentiaalvergelijkingen*; College Univ. Groningen, 1982.

[S] M. Singer : *An outline of differential Galois theory*; Proc. CADE, Acad. Press, 1989, 3-57.

D. Bertrand, Université Paris VI

Probability Models
JOHN HAIGH
Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, 2004.
256 p. ISBN : 1-85233-431-2 $ 39,95

Probability Models est un livre d'enseignement qui se destine à des étudiants dont le niveau s'échelonne entre notre actuelle deuxième année de licence et une première année de master appliqué. Son but ambitieux est de mener, en environ 250 pages, le lecteur ignorant tout à une relative maîtrise des concepts, et surtout des outils, du calcul des probabilités.

Outre les notions classiques et incontournables (loi de probabilité, probabilité conditionnelle, indépendance, variable aléatoire, moments, convergences), Haigh n'hésite pas à proposer quelques introductions ou incursions dans des sujets plus élaborés issus de la modélisation : marches aléatoires, processus de branchement, de renouvellement, chaînes de Markov, et une initiation aux processus à temps continu. Le niveau du livre se veut résolument élémentaire ; en particulier, la théorie abstraite de la mesure est bannie (ce qui pose parfois des problèmes d'exposition). L'originalité pédagogique veut reposer sur des exemples développés tout au long du texte. On notera aussi un grand nombre d'exercices (succintement corrigés) en fin de chaque chapitre. Le lecteur, étudiant ou enseignant, dispose donc d'un matériel significatif pour pratiquer la matière.

Je diviserai le livre en deux parties : la première partie, les chapitres 1 à 6, très classique, qui correspond grossièrement à ce que l'on enseigne en premier cycle *depuis toujours* et qui, de ce point de vue, n'est pas particulièrement originale. Puis, une seconde partie, les chapitres 7 et 8, qui, sur près de soixante pages aborde les processus stochastique à temps discret et (un peu) à temps continu. Le texte est clair et agréable à lire, il manque parfois de précision. Le choix pédagogique consiste, comme souvent, à introduire la notion de loi de probabilité abstraite, en restant (volontairement) un peu vague sur l'axiomatique sous-jacente, puisque, comme on l'a dit plus haut, la théorie de la mesure est évacuée (au prix de pirouettes de style comme le paragraphe 1.7. intitulé *Intellectual Honesty*). Je n'ai rien contre cela, mais il semble qu'on pourrait dire les choses plus simplement. Le prix à payer est la difficulté usuelle lorsque l'on quitte les espaces de probabilités finis ou dénombrables. On retrouvera bien sûr plus tard cette difficulté (et des petites incohérences inévitables dans ce contexte mathématiquement simplifié) pour traiter la loi et l'espérance d'une variable aléatoire (et l'espérance conditionnelle). L'auteur n'échappe par d'ailleurs à la dichotomie espace discret – espace continu, et s'embourbe dans des considérations un peu inattendues pour parler de la loi d'une variable aléatoire réelle en toute généralité. Il n'utilise pas (ou peu) l'outil fort agréable dans ce contexte élémentaire qu'est la fonction de répartition. Ceci laisse planer sur les chapitres 1 à 4 (espaces de probabilités, probabilité conditionnelle et indépendance, lois de probabilité usuelles et variables aléatoires) une légère impression de flou, qui, il faut le reconnaître, est tout de même compensée par de nombreux exemples bien traités et utiles à la compréhension. Les chapitres 5 et 6, respectivement, sommes de variables aléatoires et convergence, sont plus ambigus. Certaines preuves ne sont pas tout a fait rigoureuses (ou bien pas *self-contained* comme dirait l'auteur), et l'auteur s'éloigne de la modélisation qui lui tenait tant à cœur lors des chapitres précédents. L'utilisation des modes de convergences classiques (convergence presque-sûre, convergence en probabilité et en loi) n'est peut-être pas suffisamment motivée, ce qui rend la compréhension des théorèmes classiques (loi des grand nombres et TCL) un peu difficile. Il est dommage que dans un tel contexte, l'auteur n'en ait pas profité pour donner quelques applications directes et simples des théorèmes limites, en statistique par exemple.

La seconde partie, les chapitres 7 et 8, traite respectivement des processus à temps discret et à temps continu Comme je l'ai déja dit plus haut, en s'imposant un style élémentaire, l'auteur aborde plusieurs aspects de la modélisation des processus de manière concrète et sur des exemples développés, et pas toujours triviaux. C'est à mon avis la partie la plus réussie du livre, qui pourrait très bien servir à des étudiants préparant l'épreuve de modélisation de l'Agrégation. Après les difficultés d'usage liées à la notion de loi de processus, qui, si elles sont évacuées (ce qui naturel ici) sont néanmoins trop souvent mentionnées (ce qui donne une impression inutile de malaise), Haigh traite un peu de processus de branchement, de marches aléatoires, et de chaînes de Markov. Les chaînes à temps continu sont visitées (sans preuves, équations de Chapman-Kolmogorov, semi-groupe et générateur) et développées sur des exemples pertinents (processus de vie et mort, propagation d'une épidémie). On trouve aussi, dans ce contexte, des files d'attente, et, ce qui est plus étonnant, des éléments de théorie du renouvellement.

Le livre conclut sur le processus de Wiener en admettant au passage les points trop délicats. On trouve tout de même le principe de réflexion, la loi gaussienne inverse et le pont brownien est évoqué !

Comme on l'aura constaté, mon impression générale sur *Probability models* de Haigh est mitigée. Il contient beaucoup de bonnes choses, mais aussi beaucoup d'imprécisions et de choix pédagogiques qui ne semblent pas toujours heureux. Gageons que de telles réticences sur ce livre d'enseignement très anglo-saxon sont plus culturelles qu'objectives, et qu'il pourra servir à nos étudiants ou enseignants !

Marc Hoffmann, Université de Marne-la-Vallée

Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe
Claire Voisin
Cours spécialisé, Soc. Math. France, 2002. 595 p.
ISBN : 2-85629-129-5. 69,00 €

L'objet de ce livre est d'expliquer comment la décomposition de Hodge de la cohomologie des variétés projectives permet de donner des informations profondes sur les cycles algébriques.

De nombreux ouvrages ou articles d'exposition existent sur le sujet, mais ils culminent bien souvent au théorème de décomposition de Hodge. Ce n'est pas le cas ici, loin s'en faut.

La pari de l'auteur est de donner une présentation de la théorie aussi *self-contained* que possible tout en allant très loin dans des domaines de recherches actifs (conjectures de Hodge, théorie de Noether-Lefschetz, conjectures de Bloch...). Ce pari risqué est pour l'essentiel gagné.

Le livre débute par une présentation de la théorie des formes harmoniques sur les variétés kählériennes compactes qui essentiellement ne suppose que des connaissances de maîtrise, voire de licence. On n'exige même aucune connaissance de la théorie des faisceaux, les notions de base étant rappelées. On arrive alors assez rapidement aux théorèmes de décomposition de Hodge et de Lefschetz (d'aucuns regretteront le parti-pris de cacher l'action de sl_2).

Cette partie, très réussie, n'est pas la partie originale du livre : elle n'en est que le socle.

On poursuit en étudiant comment varient les structures de Hodge des familles de variétés projectives. Le théorème classique de trivialité topologique des submersions propres est clairement dégagé, ce qui est agréable. On prouve alors les théorèmes d'holomorphie et de transversalité de l'application des périodes (qui à une variété associe sa structure de Hodge), clef de voûte de l'histoire. Immédiatement, des applications délicieuses en découlent (Torelli générique pour les courbes par exemple).

On poursuit en construisant très soigneusement les classes fondamentales de cycles analytiques, en étudiant les compatibilités diverses ce qui permet d'introduire la conjecture de Hodge.

Après un passage sur l'application d'Abel-Jacobi, généralisation naturelle de l'intégration des 1-formes sur une courbe, on débouche sur un superbe chapitre expliquant la théorie de Lefschetz (comparaison des topologies d'une variété et de ses sections hyperplanes). L'outil est la théorie de Morse (réelle). La version complexe permet d'introduire et d'étudier les cycles évanescents. La preuve des théorèmes de monodromie (quasi-nilpotence, irréductibilité) en découle.

A ce stade, on rentre dans l'autre partie de l'ouvrage, traitant de sujets rarement expliqués à ce niveau.

La preuve (Deligne) des cycles invariants est lumineuse. Un paragraphe explique d'abord pourquoi la décomposition de Lefschetz assure que la suite spectrale de Leray d'une submersion propre de variétés projectives dégénère en E_2. Un argument de théorie de Hodge mixte permettant alors d'obtenir la preuve. C'est vite fait bien fait : on croirait lire un roman ! On donne ensuite des applications parfois récentes de la théorie comme le théorème de Noether-Lefschetz (les courbes d'une surface de $\mathbb{P}^3$ lisse générique de degré $d \geqslant 4$ sont intersections complètes), la preuve de Donagi du théorème de Torelli générique pour les hypersurfaces... Les derniers paragraphes sont plus avancés, mais restent très accessibles, en seconde lecture sans doute (théorèmes de connexité de Nori, non représentabilité des zéros cycles sur les surfaces qui ont une deux forme holomorphe (Mumford)...).

Avant tout, répétons-le, l'aventure que constitue l'écriture d'un tel ouvrage est un succès. Il constitue une excellente introduction dans ses premiers chapitres et un guide très efficace et clair dans sa partie plus avancée. Même si ça et là se glissent quelques petites coquilles, le texte est très précis (cf. l'effort dans le calcul des signes). Quelques petits regrets peut-être. Les exercices ne sont pas tout à fait à la hauteur de la richesse du texte. Le caractère *self-contained* n'est pas total (par exemple, une bonne connaissance de topologie algébrique, comme dans le livre de Greenberg, est très souhaitable). Du coup, le caractère extrêmement élémentaire du tout début peut surprendre. Et puis, mais l'auteur(e) n'y est pour rien, la SMF pourrait se décider à relier correctement de tels livres, qui seront des ouvrages de référence à consultation fréquente, comme elle sait le faire dans quelques-unes de ses collections.

Mais, mon sentiment est clair : précipitez-vous chez votre libraire préféré pour acheter ce livre. Vous ne regretterez pas vos 69 euros.

Yves Laszlo, Université Paris VI, Institut de Mathématiques de Jussieu

---

Recent developments in the Navier-Stokes problem
P.-G. Lemarié-Rieusset
CRC press, 2002. 408 p. ISBN : 1-584-88220-4. $ 99,95

Ce livre est une présentation de résultats récents concernant l'étude mathématique des équations de Navier-Stokes incompressibles dans tout l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 3$ en général), en particulier au sujet du problème de Cauchy. La plupart des résultats existants sur la question (jusqu'en 2002) y sont traités et démontrés, par des techniques d'analyse harmonique.

La volonté de l'auteur étant de fournir un texte auto-contenu, le premier quart de l'ouvrage (la premiere partie, formant une centaine de pages) est une introduction à l'analyse harmonique réelle, avec l'énoncé et la démonstration de tous les résultats qui pourront être utiles par la suite pour l'étude du problème de Cauchy des équations de Navier-Stokes, depuis les classiques injections de Sobolev jusqu'à des résultats sophistiqués sur BMO (le théorème $T(1)$, les espaces de Hardy), en passant par deux chapitres sur les ondelettes.

Les deux parties suivantes présentent les résultats « classiques » sur les équations de Navier-Stokes : après une présentation générale des équations (projections sur les champs de vecteurs de divergence nulle, considérations sur la pression), l'auteur énonce et démontre le théorème de Leray (existence globale de solutions d'énergie finie) et les résultats d'unicité de Serrin et de von Wahl, ainsi que les résultats de Fujita et Kato d'existence et d'unicité de solutions plus régulières ($\dot{H}^s$ pour $s \geqslant d/2 - 1$ et L^p pour $p \geqslant d$). La démonstration du théorème de Leray suit la méthode d'origine de régularisation de l'opérateur non linéaire par convolution. La démonstration des résultats de Fujita et de Kato repose classiquement sur une méthode de contraction en suivant un schéma de Picard.

La quatrième partie du livre traite de résultats récents d'existence et d'unicité de solutions dans des espaces invariants d'échelle. À peu près tous les espaces de ce type sont traités, depuis les espaces de Lorentz et les Besov jusqu'à BMO^{-1}. La question de l'autosimilarité des solutions est également étudiée.

La cinquième partie consiste en une analyse de propriétés plus qualitatives des solutions : analyticité, localisation spatiale et décroissance en grand temps en particulier (aussi bien pour des solutions d'énergie finie que pour des solutions plus régulières).

Enfin la dernière partie présente des résultats fins sur les solutions faibles dans l'esprit des travaux de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (dimension de Hausdorff de l'ensemble des points singuliers), ainsi que de résultats d'unicité fort-faible généralisant ceux de von Wahl.

De nombreuses références figurent à la fin du livre, ainsi qu'un index (par auteurs et par sujets).

Ce livre présente donc une quantité impressionnante de résultats sur le problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes incompressibles dans l'espace entier. Son caractère auto-contenu en fait un outil de travail idéal pour quelqu'un voulant s'initier à cette théorie – notons qu'un travail d'édition plus soigné n'aurait certainement pas nui à la qualité de l'ouvrage, certaines preuves étant pénibles à lire pour de simples raisons de mise en page. Signalons d'autre part que ce souci d'exhaustivité a pour contrepartie un foisonnement de résultats qui ne permet pas toujours de dégager les théorèmes significatifs des autres – à cet égard, la lecture de la quatrième partie de cet ouvrage conforte dans l'impression que la théorie du problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes est arrivée à un point où il devient urgent de trouver un autre angle d'attaque si l'on veut progresser, les méthodes « classiques » semblant avoir donné tout ce qu'elles pouvaient.

En conclusion je recommanderais la consultation de ce livre à quiconque voudrait s'initier à l'état de l'art sur les équations de Navier-Stokes, mais aussi à des techniques fines d'analyse harmonique utiles plus généralement dans l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires dans l'espace entier.

Isabelle Gallagher, Université Paris VII

Les lendemains de l'intégrale – Lettres à Émile Borel
Henri Lebesgue
Préface de Gustave Choquet, Vuibert 2004. 240 p.
ISBN : 2-7117-5309-3. 29,00 €

Ce livre mérite une large audience. Ce n'est pas un ouvrage de mathématiques. C'est un témoignage, brut, sur la vie et la façon de penser d'un mathématicien d'exception.

Il rassemble des lettres de Lebesgue à Borel qui vont de 1901 à 1917. Borel avait conservé ces lettres, et je dirai plus loin comment elles ont été découvertes. Les lettres de Borel à Lebesgue sont perdues. Il s'agit donc d'une demi-correspondance, dont la lecture a le charme de la moitié qu'on lit et de la moitié qu'on devine. Lebesgue y figure en relief avec sa rugosité et ses aspérités, et Borel en creux, très présent cependant, l'aîné bien établi, séduisant et protecteur. Lebesgue écrit au fil de la plume,comme il pense, sans souci de mise en forme, sans soupçonner que d'autres que leur destinataire liront ses lettres un siècle plus tard.

Certaines lettres sont datées, d'autres non. Dans les premières, jusqu'en mars 1905, il donne à Borel, qui a quatre ans de plus que lui, du « Cher Monsieur », puis il passe à « Mon cher ami » et « Mon cher Borel ». Les sujets sont multiples : les soucis d'argent, le cours Peccot, la carrière de Lebesgue et celle de Borel, la publication des ouvrages de Lebesgue, les travaux de Borel, les approches différentes de la mesure, de l'intégrale et d'autres notions mathématiques, la famille de Lebesgue, qu'il lui faut entretenir laborieusement, et celle de Borel, qui le soutient (dès leur mariage, la femme et la belle-mère de Lebesgue sont malades ; Borel a épousé Marguerite, la fille de Paul Appell, qui se fera appeler Camille Marbo comme femme de lettres), les autres mathématiciens auxquels ils ont affaire, l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, la guerre, les différends scientifiques et enfin la brouille.

Ce qui est extraordinaire est le ton de ces lettres. Elles sont sincères et brutales. Lebesgue connaît sa valeur, et ses devoirs à l'égard de sa famille. Le besoin d'argent est lancinant. Le début de carrière n'est pas facile. Le cours Peccot, avant d'être un honneur et un moyen de faire connaître ses travaux, est pour lui un enjeu financier, d'où la compétition et le conflit avec Baire. Il s'en explique avec une « *franchise brutale* » ; c'est le terme utilisé par Borel, et repris en citation par Lebesgue dans la lettre du 15 octobre 1903. Il pense, ajoute-t-il, « *que sans une franchise exagérée on ne peut avoir de vrais amis* ». Cette franchise s'exprime à son endroit (« *je suis susceptible sur certaines choses, sur toutes celles qui concernent la question argent* »), dans une totale spontanéité (« *et voici encore une lettre non relue et écrite au courant de la plume, sans poids ni balance* »). L'occasion de cette lettre est « *une coïncidence bizarre* » relevée par Borel entre un travail de Lebesgue et celui d'un autre mathématicien ; le terme a heurté Lebesgue, il l'a dit à Borel avec sa « *franchise stupide* », et il y revient dans sa lettre.

Voici un autre exemple de cette franchise. En 1909, Borel va être titularisé à la Sorbonne. Lebesgue lui écrit :

« *J'ai donc appris que l'on voulait vous titulariser... Eh bien ! très franchement je regrette cette affaire. Rien de plus naturel que votre désir d'être titularisé, mais* *la titularisation dans le moment actuel ne semble être à l'étude que parce qu'Hadamard reçoit un avancement. J'aurais voulu, ce qui vous eût été bien facile, que vous légitimiez cette titularisation par des travaux. Pour tout dire je vous reproche La revue du mois. Je sais bien que vous trouvez là l'occasion de dépenser vos qualités d'action et vos ardeurs d'administrateur, mais c'est ce que j'estime le moins en vous.* »

Suit une longue réponse de Borel, que nous pouvons imaginer car Lebesgue insiste dans sa lettre du 26 avril 1909 : « *Oui, vous avez fait moins de mathématiques et plus d'à-côté et c'est ce que je vous reproche car, je sais que ce que je vais dire est à la fois cruel et injuste mais je veux espérer que le seul fait que je vous le dise vous prouve que j'en vois l'outrance, vous ne renoncez pas à avancer dans l'université ni les Académies.* » Et encore, dans une lettre postérieure où il évoque sa propre situation à l'époque, et la perspective de terminer sa carrière en province : « *Vraiment il est curieux que nous nous entendions si peu. Je vous reproche à l'occasion de votre titularisation d'avoir délaissé les mathématiques et vous me prouvez que vous n'avez pas fait une carrière de gendre. Je vous laisse voir que je ne suis pas égayé par les derniers évènements et vous me croyez une mentalité de méconnu, de persécuté, d'obsédé. Non.* »

Rien ne résume mieux cet aspect des relations entre Lebesgue et Borel que le début d'une lettre bien postérieure, du 11 octobre 1915 : « *J'avoue que j'ai remis plusieurs fois avant de vous écrire, j'ai trop peur de ne pas savoir dire bien ce que je devrais vous exprimer sans peine : le sentiment d'amitié profonde et jalouse que j'ai pour vous. Il ne s'est manifesté à vous que par des attrapages rudes, durs et parfois injustes : c'est qu'alors je vous en voulais âprement de ne pas avoir été complètement ce que j'aurais voulu à tort ou à raison que vous fussiez.* »

C'est bientôt la fin de la correspondance, à cause d'un différend scientifique sérieux sur le rôle de chacun dans les théories de la mesure et de l'intégrale. Le 2 novembre 1917, dans une note très sèche et ironique, Lebesgue écrit : « *J'ai vu avec plaisir que, bien que dans votre dernière notice, vous réclamiez la mesure des ensembles linéaires 'bien définis' comme vous étant 'entièrement due', il me reste comme travail 'entièrement personnel' l'introduction des mots 'de mesure nulle'.* » Puis le 21 décembre, à l'occasion d'un déjeuner esquivé, la déclaration de rupture : « *Pour le moment, toute relation qui sortirait de la camaraderie serait, de ma part, une hypocrisie. Ce ne serait pas avec vous que je déjeunerais, ce serait avec de vieux souvenirs.* »

La suite peut se lire dans le grand article de 1918 *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, où Lebesgue polémique durement avec Borel, et de manière très convaincante. Lebesgue a la dent dure à l'égard de presque tous ses contemporains. Voici quelques-unes des ses appréciations :

Après son échec devant Baire pour le second cours Peccot, il est amer.
« J'admets que vous, Picard, Hadamard, Montel nous aient lus Baire et moi. Croyez-vous qu'il y en ait d'autres ? » [lettre du 17 décembre 1903)]

« Croyez-vous Tannery compétent ? » [*ibidem*]

« Je ne veux pas discuter, surtout avec vous, la compétence de M. Appell. » [20 décembre]

« Ce que vous avez vu dans mes lettres c'est mon dégoût de tout ce public mathématique qui juge en regardant l'effet que vont produire les paroles qu'il prononce et non parce qu'il exprime ce qu'il a pensé. La mode, le snobisme peuvent être mathématiques. » [17 décembre]

« Je m'étonne que chacun dans ma thèse ne voie que les parties qui intéressent. Pour Jordan j'ai défini l'aire d'une surface. Pour Picard j'ai fait des surfaces applicables et des surfaces de Plateau. Pour vous j'ai appliqué intelligemment la notion de mesure. Je serais heureux qu'il existe quelqu'un pour qui j'ai fait à la fois ces trois choses. » [*ibidem*]

« Je trouve Lindelöf incorrect. » (question de priorité) [20 décembre 1903]

« Lerch est idiot. » [17 janvier]

« *Je considère le résultat d'Arzelà comme une jolie tautologie.* » [19 mars 1904]

« Je ne suis pas si sévère que j'en ai l'air et, bien que l'on aurait pu mieux rédiger, je n'ai pas de Fréchet une trop mauvaise opinion. » (Fréchet avait rédigé les leçons de Borel) [26 août 1904]

« Il m'est apparu que Baire était égoïste et que, s'il admettait que d'autres que lui savaient raisonner sur la théorie des fonctions, c'était à condition qu'il reste le surhomme. » [11 octobre 1904]

« Je considère Young comme un jeune ou vieil élève qui cherche à glaner de ci de là quelques théorèmes à démontrer. » [14 décembre 1904]

« J'ai reçu de Couturat (le logicien) des remarques qui m'ont semblé stupides quant au fond, prétentieuses quant à la forme. » [17 décembre 1904]

« Le Lindelöf est à mon avis trop inutilement compliqué et général. » [4 mars 1905]

« J'ai reçu une charretée de brochures de Young et en particulier des choses amusantes et pontifes sur l'intégration où il me félicite d'avoir aperçu quelque chose d'équivalent à sa théorie générale, qui date de l'an dernier. Ça prouve que la vérité est en marche. On y voit aussi l'*extended Heine-Borel theorem*. Je finis par croire que ces gens-là sont inconscients et s'imaginent de bonne foi avoir fait des choses énormes. Je finirai par comprendre Lindelöf. » [15 novembre 1905]

« Les bêtises de Pompeiu. » [9 mars et 23 mars 1906]

« Heine a démontré incidemment un théorème dont il n'a aperçu ni l'énoncé, ni l'intérêt ; bien d'autres que Heine sont dans le même cas, Goursat par exemple. » (Lebesgue s'insurge contre l'appellation « Heine-Borel ») [5 janvier 1906]

« Je ne connais rien de plus désolant, de plus décourageant que la lecture d'un article de l'Encyclopédie. » (il s'agit de l'Encyclopédie allemande, dont s'occupe Molk pour l'édition française) [31 janvier 1906]

« Je connais peu, moi aussi, les travaux de Cartan, mais ils me semblent être de bons travaux sans originalité. » [11 décembre 1908] (c'est le moment où Cartan et Lebesgue sont candidats sur le même poste à la Sorbonne)

« Je ne crois en vouloir à personne du choix fait, à Cartan moins qu'à tout autre. J'ai, bien qu'incompétent, beaucoup d'estime pour les travaux de Cartan que j'estime solides, bien faits, difficiles et utiles, tout au plus je lui reproche de ne pas avoir donné à leur auteur occasion de faire preuve de qualité d'invention, ce qui ne prouve pas qu'il soit incapable de création véritable. » [27 avril 1909]

« J'ai été très intéressé par l'article de Cartan, au moins pour certaines parties, bien qu'à ce moment j'avais des raisons particulières pour ne pas trouver épatant ce que faisait Cartan. » [30 septembre 1909] (il s'agit d'un article dans l'Encyclopédie, commandé par Molk ; le début de la lettre est un assassinat de Molk)

« Le livre de Fabry est grotesque, on le croirait pensé et rédigé par d'Adhémar. » [30 mai 1910]

« La conférence de Russell n'a eu que peu de succès ; ce qu'il a dit était fort obscur et peu nouveau. » [23 mars 1911]

« J'ai vu Janiszewski, il est évidemment aussi têtu et étroit d'idées qu'on peut le souhaiter. » [10 avril 1911]

« Il faut peut-être aussi soutenir Brouwer à cause de son mauvais caractère, qui doit lui avoir fait quelques ennemis. Pour moi je suis au plus mal avec lui... » [1er janvier 1912]

Il faut replacer ces rosseries dans leur contexte, car elles sont éclairées par les circonstances ou par des discussions serrées.

Lebesgue est rigoureux, il a un goût sûr et un jugement solide sur les matières qu'il connaît. En particulier, sa brouille avec Baire n'est pas seulement affaire de heurts personnels et de torts mutuels : la controverse scientifique latente est très bien exposée par Lebesgue. Par contre, son jugement sur Élie Cartan est biaisé, et il le sait. Il n'a pas su apprécier Janiszewski, qui l'avait choisi comme directeur de thèse et qui se révélera un remarquable topologue et l'artisan principal de l'essor des mathématiques polonaises. Au cours des années 1920, c'est d'ailleurs en Pologne et en Russie et non en France qu'il fallait chercher l'héritage de Lebesgue. Lebesgue en est responsable pour une part, parce qu'il ne s'intéresse plus à l'intégrale ; on en trouve une preuve dans sa lettre du 11 octobre 1915, où il parle à Borel de l'invitation de Charles de la Vallée Poussin au Collège de France : « *Maintenant se pose la question de l'auditoire, si bien que je vais sans doute être obligé cet hiver d'aller étudier au Collège de France les intégrales de Lebesgue (que c'est vieux ces choses-là)* ».

Lebesgue a de l'estime et de la sympathie pour un petit nombre de mathématiciens : Montel, son camarade de promotion, Fatou, son élève, et Denjoy, qui « *nage dans le Baire comme dans son élément naturel.* » [lettre du 10 décembre 1904] On trouve dans les lettres à plusieurs reprises une évocation de leurs travaux.

Le contenu mathématique des lettres peut être écarté à première lecture. La matière en est riche, mais elle doit être étudiée en confrontation avec les œuvres publiées. Choquet en donne un aperçu dans sa préface. En règle générale, on comprendra mieux les mathématiques de Lebesgue en lisant ses articles que sa correspondance. Par contre, même un lecteur non-mathématicien doit pouvoir apprécier combien la pensée de Lebesgue est agile et son expression fulgurante.

Il faut lire en premier la préface de Choquet. Avant de commenter le contenu du livre il en indique la genèse, et l'histoire vaut d'être contée ici.

Borel conservait beaucoup de choses, et il avait entreposé ses archives dans le sous-sol de l'Institut Henri Poincaré. En 1988, Jean Lefèbvre , cherchant à y mettre de l'ordre, découvre 230 lettres de Lebesgue à Borel, s'étageant entre mai 1901 et décembre 1918. Denise Lardeux les répertorie. Bernard Bru et Pierre Dugac, aidés d'Hélène Nocton, les déchiffrent, les confrontent à d'autres textes, les annotent et les publient en 1991 dans le volume 12 des *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*. Choquet et Dugac pensent alors qu'une sélection de ces lettres complèterait bien les *Œuvres scientifiques* de Lebesgue publiées en 1972 et 1973 par la revue de Genève l'*Enseignement mathématique*. Ils sélectionnent 111 lettres et en préparent l'édition, négocient, et contre leur attente c'est l'échec. En 2000 meurt Dugac, laissant en chantier projets et travaux. André Warusfel entre en scène, il éveille l'intêret de Marc Jammet aux éditions Vuibert. Des révisions sont encore nécessaires, en confrontant les lettres manuscrites et leur transcription dans les *Cahiers* : c'est Florence Greffe, la directrice des Archives de l'Académie des sciences, très intéressée aux mathématiques depuis qu'elle a reçu le fonds Borel et déterré le pli cacheté de Doeblin, qui se charge de ce travail minutieux. Autre travail nécessaire, la constitution d'un index : il est exécuté par Hélène Gispert. Choquet met au point la préface. Et Vuibert sort sous une forme très agréable les lettres préfacées, annotées, illustrées, indexées et complétées par une riche bibliographie.

Je me réjouis personnellement de l'échec des négociations avec Genève et de la forme trouvée pour la publication. Le livre peut s'adresser à un bien plus large public que les *Œuvres*. Il peut amener des lecteurs ayant une bonne formation en mathématiques à s'intéresser non seulement à la personnalité de Lebesgue, mais au contenu mathématique des commentaires ou des controverses qui se trouvent dans les lettres. Il peut les conduire à consulter les œuvres de Lebesgue, celles de Borel, celles de Baire, les études déjà menées par les historiens des mathématiques et en particulier par Dugac, et à se renseigner sur les œuvres des mathématiciens que Lebesgue apprécie ou déteste. Les notes de Bru et Dugac constituent à cet égard un bon guide.

Mais ce beau livre n'avait pas bien sa place dans l'édition savante que constituent les *Œuvres* publiées en 1972 et 1973, et on comprend les réticences des Genevois à l'accueillir comme dernier volume. Certaines des lettres de Lebesgue se trouvent déjà dans les *Œuvres*. D'autre part la nature des notes utiles n'est pas tout à fait la même pour un large public et pour des mathématiciens, et celles qui figurent dans le livre me paraissent plutôt adaptées à un large public (je pense par exemple à la note 421, relative à Élie Cartan, qui rectifie l'image qu'en donne Lebesgue), et parfois un peu sommaires dans les jugements énoncés (la note 243, qui dit seulement « *Lebesgue se trompe* », à propos des approches de Borel et de Tchebycheff de la théorie de l'approximation, dont Lebesgue dit qu'elles n'ont rien en commun). Reste que l'ensemble des notes constitue à lui seul une belle contribution à l'histoire des mathématiques au début du vingtième siècle.

Le sous-titre du livre s'appelle *Les lendemains de l'intégrale*. Il est remarquable que le centenaire de l'intégrale de Lebesgue ait éveillé tant d'écho. La force maîtresse dès le départ a été celle de Gustave Choquet. L'Académie des sciences, la SMF et en particulier la *Gazette*, l'ÉNS de Lyon, l'université de Rennes, et la rédaction de *Panoramas et synthèses* ont œuvré à la célébration du centenaire et à l'exploration des pistes ouvertes par la thèse de Lebesgue. L'écho hors de France a été important. C'était sans doute le bon moment d'attirer l'attention sur les lettres de Borel à Lebesgue. Encore une fois, on peut se réjouir d'en disposer maintenant sous la forme de ce beau livre.

Jean-Pierre Kahane, Université Paris Sud

L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours (tome 1 : 1791-1914)
Renaud d'Enfert
Institut national de la recherche pédagogique (2003).
374 p. ISBN : 2-7342-0909-8. 32,00 €

Renaud d'Enfert, avec la collaboration d'Hélène Gispert et de Josiane Hélayel, nous propose avec ce livre un recueil de textes officiels concernant comme le titre l'indique, l'enseignement des disciplines relevant des mathématiques à l'école primaire (en France) durant ce qu'il est convenu d'appeler le long 19^{e} siècle, soit de la Révolution française au début de la première guerre mondiale. Les 70 textes sont précédés d'une passionnante introduction justifiant le choix de ces textes tout en replaçant les directives régissant l'enseignement des disciplines mathématiques dans le contexte général de la politique de l'enseignement primaire pendant le 19^{e} siècle.

Durant cette période, l'enseignement primaire ne constitue pas un cycle préparatoire à l'enseignement secondaire. En effet, deux systèmes d'enseignement coexistent parallèlement : l'école primaire qui scolarise les enfants des couches populaires et l'enseignement secondaire[2] réservé aux enfants de la bourgeoisie. Ainsi, l'enseignement primaire possède sa propre voie d'enseignement prolongé : les écoles primaires supérieures ; l'enseignement secondaire, quant à lui, englobe des classes élémentaires régies par des textes relevant de cet ordre d'enseignement.

Si l'enseignement primaire élémentaire est durant presque tout le 19^{e} siècle consacré à la trilogie «lire, écrire, compter», à laquelle s'ajoute à partir de la Restauration, l'instruction morale et religieuse ainsi que le système légal des poids et mesure, les écoles primaires supérieures prolongent cet enseignement et préparent à la vie professionnelle. Il comprend

> «les éléments de la géométrie et ses applications usuelles, spécialement le dessin linéaire et l'arpentage, des notions des sciences physiques et de l'histoire naturelle applicables aux usages de la vie, le chant, les éléments de l'histoire et de la géographie, et surtout de l'histoire et de la géographie de la France.»
> [Extrait de la loi Guizot – 28 juin 1833 – p. 72]

L'enseignement mathématique est emblématique de la place de l'école primaire dans le dispositif éducatif et social français durant le 19^{e} siècle. Celle-ci ne doit offrir que des connaissances pratiques et usuelles. Ainsi, les programmes de l'école primaire quant à l'enseignement mathématique ne concernent essentiellement que le calcul ou l'arithmétique. Ceux des écoles primaires supérieures peuvent, selon les périodes, proposer des éléments de géométrie (le plus souvent en liaison avec des applications comme l'arpentage) et ceux des écoles normales où se forment les futurs instituteurs, une introduction à l'algèbre.
Les textes régissant l'instruction primaire illustrent l'ambivalence des objectifs que les divers gouvernements qui se succèdent durant cette période assignent à la

[2] Pour plus de précisions sur l'enseignement scientifique dans l'enseignement secondaire durant le 19^{e} siècle, on peut consulter le livre de Bruno Belhoste : *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels, 1789-1914*, Paris : INRP/Economica, 1995.

formation des classes populaires. D'une part, il s'agit d'assurer à chacun une instruction élémentaire minimale ; sans sous-estimer les préoccupations humanistes des éducateurs, il ne faut pas oublier les intentions centralisatrices des promoteurs de la généralisation de l'instruction :

> La langue française ajoutée à la lecture et à l'écriture, le système légal des poids et mesure ajouté au calcul, sont deux enseignements qui doivent être universels pour que le langage uniforme des lois soit partout compris, et pour resserrer de jour en jour davantage les liens qui unissent déjà toutes les parties de la population, et augmenter encore cette admirable unité française qui est notre gloire et notre force.
> [Victor Cousin – 21 mai 1833 – p. 71]

D'autre part, l'enseignement des écoles primaires doit rester pratique, concret et appliqué pour ne pas produire des «déclassés», ou pire des «savants de village», dont les connaissances et la formation seraient «incompatibles avec leur destinée naturelle». Tout ce qui est de l'ordre de l'abstraction ou de la théorie relève de l'enseignement secondaire.[3]

Renaud d'Enfert distingue quatre périodes : la première (1791-1815) correspond à la période révolutionaire et napoléonienne. Elle est caractérisée par un important décalage pour l'école primaire entre les ambitions affichées et la perpétuation en fait des «petites écoles» de l'Ancien Régime. Ainsi, malgré la volonté originelle d'introduire dans les *curricula* des notions de géométrie pratique, incluant le toisé et l'arpentage, l'enseignement mathématique se cantonnera (y compris dans les textes officiels) très rapidement à l'apprentissage du calcul. La seconde période est celle de la Restauration et de la Monarchie de Juillet avec un regain d'intérêt pour les écoles primaires et l'apparition des écoles primaires supérieures (loi Guizot du 28 juin 1833). Cette période est caractérisée par «l'école mutuelle», une organisation des *curricula* dans laquelle les apprentissages de la lecture, de l'écriture et du calcul se font simultanément alors que dans la tradition des petites écoles, l'enseignement du calcul était rélégué en fin de scolarité après l'apprentissage de la lecture et de l'écriture et donc souvent sacrifié. Le souci de développer l'enseignement primaire se traduit par l'introduction effective dans les programmes d'élements de géométrie et des applications de celles-ci comme «le dessin linéaire et l'arpentage». La place de la géométrie dans les *curricula* de l'école primaire est un enjeu entre ceux qui veulent faire évoluer cette voie de formation et en particulier développer un enseignement professionnel et ceux qui «réclament un enseignement véritablement primaire, détaché de tout raisonnement abstrait».

La troisième période (1850-1870), celle du Second Empire, est caractérisée par une réaction et un rejet de l'extension donné à l'enseignement primaire depuis 1830. Cela se traduit par une limitation des programmes et l'exclusion de la géométrie de l'enseignement mathématique primaire. Seuls, le calcul et le système métrique subsistent ainsi que de manière facultative, quelques applications utiles de la géométrie

[3] Sur la question des objectifs de l'enseignement primaire et de la place assignée aux enseignements mathématiques durant le 19^{e} siècle, on peut consulter l'article de Teresa Assude et Hélène Gispert, *Les mathématiques et le recours à la pratique : une finalité ou une démarche d'enseignement ?* dans le volume édité par P. Kahn et D. Denis, *L'école républicaine et la question des savoirs : Enquête au cœur du Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson* (Paris : CNRS éditions, 2003). Dans le même volume, dans son article, «*Manuel (travaux)*» *: préparer au métier ou éduquer ?*, Renaud d'Enfert reprend aussi cette problématique en s'intéressant au travail manuel et aux liens que les exercices manuels entretiennent avec l'enseignement mathématique.

comme l'arpentage, le nivellement et le dessin linéaire. Les instructions aux instituteurs excluent explicitement tout raisonnement, toute approche abstraite ou spéculative :

> Le maître évitera donc toutes les questions oiseuses qui n'ont d'application dans aucune profession, ou qui offrent seulement de l'intérêt comme préparation à des études que les élèves n'entreprendront jamais, ou comme curiosité et exercice de l'esprit. [...] L'arithmétique, avons nous dit, est, de toutes les branches de l'enseignement primaire, celle qui trouve le plus une application directe dans les toutes les positions de la vie. Profitons donc du caractère particulier de cette science, et puisque le sens pratique des populations leur fait dédaigner les recherches et les spéculations purement théoriques dont ils ne comprennent pas la portée, exerçons de préférence l'esprit de nos élèves sur des questions qui touchent à des besoins de chaque jour. [De la direction à donner par les instituteurs à leur enseignement – février-mars 1855 – p. 137.]

L'arrivée en 1863 de Victor Duruy au ministère de l'Instruction publique amène une extension modérée des programmes de l'école primaire avec l'introduction de nouvelles matières facultatives comme la géométrie. Ces mesures annoncent la quatrième période (1870-1914), celle de l'avénement de la République auquel correspond, selon Renaud d'Enfert, un renouvellement pédagogique sans précédent. Les rythmes d'apprentissage sont modifiés ; par exemple, à partir de 1882, les programmes de l'école primaire comportent un enseignement scientifique élémentaire de sciences naturelles, physique et mathématiques. Dès le début de la scolarité, l'apprentissage du calcul et l'initiation au système métrique sont généralisés. En particulier, l'introduction de notions de système métrique dans les programmes des premières années de l'école primaire entraîne un bouleversement de l'enseignement de l'arithmétique : l'étude des nombres entiers et décimaux dès le cours élémentaire. L'enseignement de la géométrie commence aussi dès le cours élémentaire et bénéficie du renouvellement pédagogique qui prône autant l'acquisition de connaissances qu'une «éducation intellectuelle».

> L'éducation intellectuelle, telle que peut la faire l'école primaire publique [...] ne donne qu'un nombre limité de connaissances. Mais ces connaissances sont choisies de telle sorte, que non seulement elles assurent à l'enfant tout le savoir pratique dont il aura besoin dans la vie, mais encore elles agissent sur ses facultés, forment son esprit, le cultivent, l'étendent et constituent vraiment une éducation.
> [Programmes annexés au règlement d'organisation pédagogique des écoles primaires publiques – 27 juillet 1882 – p. 216]

Enfin, il ne faut pas oublier que durant le 19e siècle, l'enseignement des filles et celui des garçons sont régis par des textes différents. L'enseignement mathématique féminin est systématiquement simplifié par rapport à celui des garçons ; en particulier, la géométrie est quasiment inexistante jusqu'en 1893. De plus, la formation des maîtres subit les évolutions de la politique générale de l'enseignement primaire. Ainsi, en même temps que, comme on l'a vu, les programmes de l'école primaire sont revus à la baisse au moment de l'avènement du Second Empire, les écoles normales sont reprises en main ; leur objectif est alors de former selon le ministre Fortoul, «des instituteurs sages et modestes» recrutés après une enquête de moralité.

Outre l'introduction, le lecteur appréciera les trois index (onomastique, géographique et thématique). Ce livre constitue bien entendu une source indispensable pour tout ceux qui s'intéressent à l'histoire de l'enseignement ou à celle du 19^e siècle. Mais de plus, dans la mesure où l'histoire des mathématiques n'est plus heureusement depuis longtemps une histoire des résultats mathématiques et des mathématiciens, mais s'intéresse autant aux conditions de production de ces résultats qu'à la place des mathématiques dans la société, ce recueil est une importante contribution à l'histoire des mathématiques surtout si l'on se souvient que l'enseignement primaire est celui de l'immense majorité de la population. Pour finir, au moment où de nombreuses voix se font entendre pour «revenir aux fondamentaux» dans l'enseignement et/ou pour professionaliser les formations, ce livre permettra, en nous rappelant qu'un des soucis constants de l'état en matière d'éducation durant le 19^e siècle est l'encadrement des classes populaires, d'interroger les intentions réelles de ceux qui ne mettent pas au centre des objectifs de l'école l'apprentissage du raisonnement et d'une pensée critique exigente.

Philippe Nabonnand, Université Nancy II

Épures de géométrie descriptive
Concours d'entrée à l'École normale supérieure
Boris Asancheyev
Préface de Gabriel Ruget, Hermann 2002. 231 p.
ISBN : 2-7056-6447-5. 22,00 €

Je dois à rené Thom le fait que certaines assertions, du genre « tout ou rien », bien qu'elles semblent triviales, ne le sont pas tellement. Un cas typique est celui de la géométrie descriptive. Ceux des générations qui ont eu affaire à elle par force pour passer les concours des grandes écoles sont répartis en deux classes, pas une de plus : ceux qui la haïssaient, ceux qui l'adoraient. Le livre de Boris Asancheyev s'adresse donc exclusivement aux membres de la deuxième classe. Notre analyse enthousiaste ne fera pas changer ceux de la première. Mais ces enthousiastes existent : juste après avoir reçu de la SMF le livre à recenser, un ancien polytechnicien nous a demandé comment se procurer les épures du concours ! Et appris récemment que de nombreux « Compagnons du Tour de France » raffolent plus de la géométrie descriptive (la « DES ») que même la taille des pierres elle-même.

On lira dans le chapitre 1 une très bonne histoire de cette discipline. Le but est de représenter un objet de l'espace (notre espace à trois dimensions) par deux projections sur des plans perpendiculaires (on parle d'une « épure » : cela fait quatre paramètres, alors que trois seulement sont nécessaires, mais il y a un alignement nécessaire pour les points des deux projections qui finalement réduit bien ce nombre à trois, ce sont les fameuses « lignes de rappel », exigées en rouge, mais qui sont en traits noirs fins dans le livre). On verra ensuite comment l'auteur a mélangé programmation d'ordinateur et géométrie personnelle pour finalement présenter ces épures du concours de l'ÉNS de 1865 à 1959. Certaines on un aspect esthétique qui nous a beaucoup plu.

Très brièvement : construite et développée par Monge vers 1794, la « DES » est enseignée très peu de temps par lui à l'École normale supérieure (ÉNS), mais dès 1826 elle fait partie du cursus de l'école, puis dès 1858 fait partie du programme du concours. Le présent livre résout toutes les épures du concours de l'ÉNS : à l'oral jusqu'en 1904, la DES constitue une des quatre épreuves de l'écrit à partir de 1905, et n'en est supprimée qu'en 1959. Elle aussi à l'écrit du concours de Polytechnique jusqu'en 1958, et reste encore à l'écrit des écoles Centrale, des Ponts et Chaussés et des Mines jusqu'en 1962.

Il nous semble raisonnable de dire que la « DES » est restée longtemps à l'écrit de ces concours pour une double raison : d'une part faire de la géométrie pour elle-même, d'autre part pour former à une vision de l'espace. La composante géométrique explique l'insistance de l'épure de « DES » à l'ÉNS, mais aussi sa disparition car la géométrie des épures du concours était devenue, si ce n'est obsolète, en tout cas n'était plus dans le courant principal de cette discipline (en gros la géométrie algébrique). Pour les autres écoles il s'agit plutôt de la composante « vision dans l'espace ». Ici cette disparition est plus surprenante. Ce qui va suivre est assez polémique, mais nous semble important pour l'avenir. En passant signalons que le livre comporte une bibliographie, dont le livre (Sakarovich 1998) est probablement le plus intéressant. On pourra y ajouter la recension (Patras 1991) de la réimpression de l'ouvrage original de Monge.

La vision dans l'espace reste aujourd'hui encore une nécessité pour de nombreuses professions. Nous en laissons un essai de liste complète au lecteur. Mentionnons seulement : les pilotes d'avion, plus encore les contrôleurs aériens, les chirurgiens (la cœlioscopie ne fait que rendre cette vision encore plus nécessaire), les dentistes, un grand nombre d'ingénieurs, tous ceux qui doivent concevoir des robots, les architectes, en fait tous les métiers de la mécanique. L'affirmation simpliste que la CAO (conception assistée par ordinateur), ou que la modélisation, permettent de s'en passer est un leurre. Certes la CAO est utile, voire indispensable, mais de l'avis de toutes les personnes que nous avons consultées, des constructeurs d'avions aux architectes, on ne peut vraiment bien s'en servir si l'on n'a pas déjà d'une façon ou d'une autre, développé cette fameuse, voire redoutée, vision. Pour beaucoup ce sont des esquisses, des petits dessins « à la main », qui sont nécessaires, etc. En outre la CAO peut avoir parfois des conséquences graves. Un cas subtil est celui du moulage des pièces, car il faut que l'on puisse les démouler !

Pour en revenir d'abord à la vision dans l'espace, elle est une chose difficile, même si certains l'ont plus ou moins naturellement. Le texte (Cartier 1991) est une réflexion importante à ce sujet : même une compréhension profonde de la géométrie plane est encore un sujet « trop » difficile pour les mathématiciens aujourd'hui. Reste la question fondamentale : comment enseigner, dans les écoles ou les universités qui préparent à des professions qui en ont besoin, cette vision dans l'espace ? Répétons le problème : sur les deux exemples typiques, les contrôleurs aériens et les chirurgiens, surtout en cœlioscopie, ils doivent réaliser des choses à trois dimensions alors qu'ils ne disposent sur leurs écrans d'ordinateur que de configurations planes. La lecture d'un livre d'anatomie, décrivant la crosse de l'aorte, est instructive à ce sujet. Certes on peut l'apprendre « sur le tas », mais au prix parfois d'erreurs. Pour le cas historique du pont de Navier (le même que celui de l'équation de Navier-Stokes et du prix Clay), voir le texte passionnant (Cannone and Friedlander 2003), entre autres la citation du « Curé de village » de Balzac.

Or actuellement, au mieux de notre connaissance la DES est abandonnée dans toutes les écoles d'ingénieurs, et pire, en amont, la géométrie dans l'espace a pratiquement disparue des programmes du secondaire, et même de l'agrégation (de mathématiques), programme duquel par exemple ont disparu pratiquement les coniques, et en tout cas les quadriques. La DES reste enseignée dans les écoles d'architecture, et nous avons entendu dire que le quai Malaquais (jargon pour la direction des études d'architecture à l'école des Beaux-Arts de Paris) envisageait de renforcer cet enseignement, qui avait été réduit à quelques quatre épures dans tout le cursus ! La Suisse est plus sérieuse que nous : si les ingénieurs n'y ont pas de DES, outre certes des cours de CAO, ils ont quand même un cours de géométrie euclidienne (géométrie vectorielle), transformations affines et isométries, initiation aux courbes et surfaces. Pour les architectes, ils font 4 ou 5 semaines de DES (Monge-Perspective-Axonométrie). Mieux, en amont, les lycéens de certains cantons ont encore un cours assez poussé de DES dans certaines filières scientifiques (mais je doute que cela soit encore le cas dans 10 ans). Dans les années 1940-1950 il y avait encore un peu de DES en France dans l'ex-section « math. élém. », et les années où les trois questions de cours en étaient, cela frôlait le drame.

Il y a en France une exception notable au niveau des ingénieurs, c'est celle de l'École des Arts et Métiers. Même s'il s'y montre de plus en plus une forte tendance vers le professions purement commerciales, voire, financières, une grande partie des élèves qui en sortent ont eu, tant dans leur préparation au concours qu'à l'école, une formation à la vision des mécanismes les plus compliqués, par des dessins à analyser, des croquis à faire, etc. En fait les ingénieurs des Arts et Métiers forment une très grande partie des ingénieurs « de terrain » de nombreuses usines et contribuent à la qualité exceptionnelle de l'industrie française de pointe. *A contrario*, nous savons que quand certains polytechniciens ont été embauchés au service des recherches pétrolifères d'ELF Aquitaine, il leur a fallu plusieurs mois avant de réaliser que la recherche pétrolifère est un problème à trois (et pas à deux) dimensions !

Revenons à la CAO, la modélisation, et sur un problème qui généralise celui de la vision dans l'espace. C'est celui du fossé qui va grandissant, avec la complexité et la technicité du monde actuel, entre le pathos d'un utilisateur de CAO et le résultat qui sort de l'ordinateur. Ici il n'est plus seulement question « d'ordre de grandeur », mais d'une discontinuation absolue. Il suffit que l'on rentre mal les données dans l'ordinateur pour que le produit final soit complètement inadéquat, ce qui est un moindre mal dont on s'aperçoit au montage de la pièce sur l'ensemble à construire. Mais si c'est la résistance, la souplesse, etc. qui est en cause, une catastrophe peut arriver. À moins que dans l'usine il n'existe encore un ingénieur de terrain, un contremaître, un ouvrier qualifié, auquel sa vieille expérience dira qu'il faut reprendre les choses, refaire les calculs, etc. Pour Navier, rappelons d'abord qu'il n'avait pas fait de maquette, et ensuite (c'est plus grave) qu'il n'avait pas ajouté les canoniques 10% de marge.

Il ne s'agit pas de science-fiction ; nous savons de source directe que de telles erreurs sont arrivées, entre autres dans la fabrication d'avions, et dans des constructions de bâtiments, où tout récemment des dalles de béton se sont effondrées, causant plusieurs morts. L'histoire suivante est entièrement véridique, et montre que le trou « pathos-ordinateur » peut parfois être comblé. Le viaduc de l'autoroute qui entre à Lyon par le tunnel de Fourvière ne s'est jamais écroulé, *i.e.* n'a jamais bronché lors des mesures régulièrement faites. Ceci grâce au savoir-faire, au « know how » des gens de terrain. Car il avait été construit par la même entreprise, et avec exactement les mêmes normes, que le viaduc de l'autoroute Lyon-Chambéry sur le lac d'Aiguebelle. Or celui-ci a commencé à s'enfoncer, et il ne fallut rien moins que doubler le tablier. On a consulté le chef de chantier du viaduc de Lyon, et il y a répondu : « *quand j'ai vu les normes demandées pour le métal du béton armé, je les ai trouvées trop faibles et j'ai simplement fait doubler les fers* ».

Avant de conclure, rétablissons quelque peu l'équilibre entre savoir-faire, pratique sur le terrain, et approche conceptuelle. Il est évident que cette dernière est essentielle pour progresser. C'est ainsi que Monge devint célèbre immédiatement par son étude des défilements, et par celle de l'optimisation des déblais-remblais. Assez récemment, un jeune élève de Polytechnique en stage chez Renault put expliquer pourquoi un pourcentage de lunettes arrière des R11 devaient être recassées ; la raison était que le schéma numérique mis en place à l'usine, même avec des maillages de plus en plus fins, était trop primitif dans la géométrie différentielles des surfaces (usage trop simplifié de la forme fondamentale de la surface des dites lunettes). Reste que cette histoire montre une fois de plus la tendance actuelle à faire trop confiance à la modélisation, alors que d'une part le programme peut être insuffisant ou erroné, mais aussi que la rentrée manuelle des paramètres peut elle aussi être erronée.

Terminant donc en insistant bien sur le fait que la DES n'est probablement pas le meilleur moyen pour façonner une vision de l'espace, mais à part les dessins et la théorie de la perspective (enseignée dans les écoles d'Art systématiquement) et en souhaitant, au vu des drames de plus en plus nombreux qui vont probablement arriver dans plusieurs domaines, que trois études soient faites : une enquête sur ce problème de vision dans l'espace et de son apprentissage, une enquête sur comment combler le vide devenu presque absolu entre le pathos des utilisateurs d'ordinateurs (modélisation, CAO), et les résultats qui sortent de ces machines. Et troisièmement mettre au point un (ou des) système(s) de vérification, de certification de projets de constructions, qui soit meilleur, et surtout plus sûr que celui qui est en place actuellement.

Marcel Berger, IHÉS

Cannone, M. and S. Friedlander – *Navier : Blow-up and collapse*, Notices of the AMS **50**, number 1, 2003, p. 7-13.

Cartier, P. – *Le calcul des structures à deux ou trois dimensions est un défi pour les mathématiciens*, Pour la Science **168**, octobre 1991, p. 8-10.

Patras, F. – *Géométrie descriptive*, Gaspard Monge, recension dans la *Gazette des mathématiciens*, Soc. Math. de France, **48**, 1991, p. 62-64.

Sakarovich, J. – *Épures d'architecture. De la coupe des pierres à la géométrie descriptive*, Birkhaüser, 1998.