SOMMAIRE

DATE LIMITE

de soumission des articles, pour parution

dans le n° 59

30 mars 1994

Oui, ce numéro de la Gazette est un peu court. Pour lui donner le volume habituel, il aurait fallu en différer encore la publication. Nous avons préféré le faire suivre rapidement du premier numéro de 1994; nous rattraperons ainsi le retard causé en 1993 par les problèmes de secrétariat qui m'ont amené à démissionner (voir la Gazette n° 56) — problèmes fort heureusement résolus depuis lors.

Avec nos excuses, nous présentons à nos lecteurs nos meilleurs vœux pour 1994.

Marc Chaperon

Nos vœux tout particuliers à Marc Hindry, désormais responsable de la Gazette.

GEORGE REEB (1920-1993)

Francine DIENER

GEORGES Reeb est mort le 6 novembre dans sa 73ème année. Cette grande figure des mathématiques françaises fut l'inventeur de la théorie des feuilletages dans les années 50. Après un premier poste à Grenoble en 1952, il vint s'installer à Strasbourg en 1963, où il avait fait ses études, et y fonda l'école trajectorienne. Ses travaux portaient sur l'approche géométrique des systèmes différentiels, dans la lignée de Henri Poincaré, Paul Painlevé et Elie Cartan. La consécration de la théorie des feuilletages est intervenue bien après, en 1982, avec les médailles Fields d'Alain Connes et surtout de William Thurston, qui a toujours marqué une grande admiration pour G. Reeb. Mais Reeb, lui, avec sa curiosité sans limite et un brin de malice, était déjà, à ce moment, parti à la conquète d'un nouveau "continent". C'est en effet au début des années 70 qu'il entreprit de populariser en France une nouvelle théorie des infiniment petits, née au Etats-Unis peu avant : c'est la naissance de l'Ecole non-Standard.

Georges Reeb fut président de la Société Mathématique de France, fondateur et directeur de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA), UA CNRS n°1, à Strasbourg. Lauréat en 1971 du prix Petit-D'Ormoy de l'Académie des Sciences, il était Docteur Honoris Causa des universités de Neuchatel et de Fribourg en Brisgau.

Nous reproduisons ci dessous de larges extraits de la lettre que Gustave Choquet adressa à Daniel Bernard au moment du décès de G. Reeb. Elle exprime à merveille le sentiment de tous ceux qui ont fréquenté le Maître que nous venons de perdre.

Cher Bernard,

Je tenais à venir à Strasbourg accompagner Reeb à sa dernière demeure et retrouver, au milieu de ses élèves et de tous ceux qui l'aimaient, le souvenir précieux de sa présence chaleureuse.

[...] C'est que Reeb était pour moi, comme certainement pour beaucoup d'autres, un de ces êtres qui font croire en la sagesse et en la bonté de l'homme. Aussi restera-t-il toujours pour moi un réconfort et un soutien aux heures de doute.

Et pourtant je n'ai pas eu la chance de le rencontrer souvent : je savais qu'élève de Charles Ehresmann, il avait créé et développé une théorie des feuilletages, et que déjà il avait su entrainer dans son sillage plusieurs élèves brillants qui sont devenus de très bons mathématiciens. Mais ce furent deux circonstances plus tardives qui me firent découvrir à la fois le semeur d'idées mathématiques, et l'homme chaleureux et sage qu'il était.

La première fut une longue conversation au retour des obsèques de Charles Ehresmann à Amiens; elle fit de moi un disciple convaincu de sa vision de l'Analyse non-Standard : sa phrase "Les entiers 1, 2, 3, ... etc... n'épuisent pas l'ensemble $\mathbb{N}$ de la théorie des ensembles". Rarement phrase aussi courte, aussi peu technique ou pédante, entraina autant de convictions et de disciples.

Mon second contact prolongé avec G. Reeb, — et ce fut malheureusement le dernier —, eut lieu lors du Colloque de Cerisy la Salle voici 3 ans, sur le Continu et le Discret. Beaucoup de ses élèves étaient présents; et je fus le témoin émerveillé de l'affection et de l'admiration dont ils l'entouraient; affection et respect mutuels, car il savait attirer et retenir les jeunes par le respect de leurs idées, sa façon socratique de leur faire découvrir leurs errements et choisir des voies fécondes.

Il fut un homme très humain, un exemple pour nous tous.[...]

Gustave CHOQUET

UN KANGOUROU A BIEN OBSERVER

Jean-Pierre KAHANE

Il y a dix ans, en visite en Australie pour préparer le cinquième congrès international de l'enseignement mathématique qui allait se tenir en 1984 à Adelaïde, j'ai fait connaissance avec la toute nouvelle compétition mathématique australienne et avec son initiateur, Peter O'Halloran. Dès la seconde année, cette compétition groupait plus de 300 000 participants — aujourd'hui, c'est 600 000 — pour une population de 15 millions d'habitants. Elle s'avérait un grand succès populaire et médiatique. A priori, j'étais réticent à l'égard de la formule : une épreuve courte, deux heures, avec beaucoup de questions, une trentaine, et des réponses en cochant des cases, sans explications. Des mathématiques moulinées QCM, ça ne me plaisait guère. J'ai brusquement changé d'avis quand on m'a parlé du grand vainqueur de 1983 : non seulement premier prix, mais "full mark", pas une faute! C'était un jeune français dont l'histoire était curieuse. La compétition venait d'être étendue au domaine francophone du Pacifique, et les lycées français présentaient donc des candidats. Celui-là d'abord, n'avait pas été jugé par son lycée digne de concourir : pas sérieux, toujours absent, incapable de s'exprimer oralement ou par écrit. A vrai dire, il ne fréquentait le lycée que lors des escales du bateau qu'avec son père, plombier retraité, il promenait sur l'Océan. Sur le bateau il avait des livres, dont des livres de mathématiques, mais peu de conversation. Il avait acquis des connaissances, nourri son imagination, développé son intuition, mais quel type d'épreuve pouvait le révéler? Aucun des examens et concours français, où la capacité d'expression joue un rôle décisif, ne pouvait lui convenir. Par contre, il a su mettre les croix au bon endroit. Aujourd'hui, il est docteur en informatique.

La portée de l'anecdote est que les mathématiciens doivent être ouverts et attentifs à l'innovation sociale. Il y a, en France même, un grand nombre de compétitions mathématiques, et toutes ont leur intérêt. Il y a des activités non compétitives. Le Congrès mathématiques junior qui s'est tenu en parallèle avec le premier Congrès européen de mathématiques à Paris en juillet 1992 a réuni avec un grand succès des jeunes que ces compétitions ou activités avaient révélés comme des amateurs de mathématiques. Plus il y aura de canaux pour manifester les aptitudes et les goûts en mathématiques, ou simplement pour rendre les mathématiques plus familières et plus attrayantes, mieux ce sera. Et si c'est l'occasion de réviser des préjugés à l'égard des QCM, tant mieux!

"KANGOUROU" a été créé en 1991, à l'initiative de Jean-Pierre Boudine et André Deledicq. Il faut concevoir l'audace du projet : sans logistique lourde, préparer et diffuser des sujets de différents niveaux pour des dizaines de milliers de participants, faire assurer le déroulement simultané de la compétition dans des centaines d'établissements, recueillir les réponses, les noter, distribuer les prix ... On attendait 50 0000 participants la première année, il y en eut 300 000; 250 000 en 1992; plus de 500 000 en 1993. En même temps le projet prenait dimension européenne, avec des participations étrangères importantes, particulièrement en Pologne et en Roumanie. Le 15 mai 1993, une réunion de travail, au lycée Louis-le-Grand, avec des représentants de quinze pays d'Europe, échafaudait un programme d'initiatives coordonnées pour les années à venir. La date du prochain Kangourou est fixée au mardi 10 mai 1994. Chaque pays l'organisera pour son compte, mais la tranche d'âge privilégiée a été ciblée : 13-14 ans, et les sujets, sans être entièrement communs, donneront lieu à une concertation préalable.

Une brochure fort bien faite donne les sujets et les résultats de 1993. L'épreuve a duré une heure quinze, le vendredi 14 mai, et il y avait cinq niveaux (CM1-CM2; 6e-5e; 4e-3e; 2e-1re; terminale-sup). Ont participé 461 328 français, 1 762 bulgares, 11 408 polonais, 27 762 roumains, et, en France 4 353 établissements. Les fiches réponses, centralisées, ont été traitées par lecture optique, ce qui a permis de disposer des résultats dans des délais très courts. L'impact de Kangourou a été considérable. On en a parlé dans les établissements, dans les familles, dans les cités populaires. Par contre, peu dans la presse, presque pas à la radio et à la télévision. Pour la place des manifestations mathématiques dans les media, la France est encore loin derrière l'Australie.

Les membres des la SMF ont toutes les raisons de s'intéresser à Kangourou. C'est maintenant un fait de société, qui modifie l'image des mathématiques chez les élèves et dans le public. Le choix des sujets n'est donc pas insignifiant, ni les suites qu'ont peut donner à l'entreprise — certaines souhaitables, certaines dangereuses. A l'étape actuelle, l'indifférence des medias et des universitaires garantit l'aspect ludique voulu par les organisateurs. Comment vaincre l'indifférence et garder l'aspect ludique?

La SMF elle-même est sollicitée. En effet, au-delà des compétitions, c'est une grande diversité d'actions qui sont menées, dans tous les pays, pour rapprocher les jeunes et les mathématiques. Il n'est sans doute pas utile de les coordonner, mais il faudrait en tenir un état à jour, et mener quelques études sérieuses sur certaines d'entre elles. Pour le premier stade, tenir à jour un état des actions de caractère mathématique entreprises parmi les jeunes, en complément de l'enseignement proprement dit, une concertation des sociétés mathématiques européennes répondrait à une attente, exprimée notamment dans la réunion du 15 mai 1993.

Note de la rédaction : la rédaction de la Gazette a entendu l'appel de Jean Pierre Kahane et vous proposera dans son prochain numéro un premier panorama des activités ainsi menées en France (affaire à suivre donc!)

CONCOURS KANGOUROU 1994

Le mardi 10 mai 1994
se déroulera la quatrième concours Kangourou des Mathématiques.

Le Jeu-Concours KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES est une démarche originale pour populariser les mathématiques auprès des jeunes, dynamiser l'intérêt pour les mathématiques en France, et favoriser les rencontres et les découvertes autour des mathématiques.

Il a été organisé pour la première fois en France en 1991 par Jean-Pierre Boudine et André Deledicq, en s'inspirant d'un concours australien, d'où son nom...

Une réunion avec des représentants de dix-huit pays s'est tenue à Paris au mois de mai pour l'organisation d'un "Kangourou Européen" ouvert à tous les jeunes d'Europe en 1994. Il est destiné aux élèves de la 9ème à la Sup.

Comme les années précédentes, le Kangourou 1994 est doté de nombreux prix, et tous les participants reçoivent un cadeau mathémétique.

Mais l'important est de participer, en effet le Kangourou n'est pas une épreuve ou un examen de mathématiques, mais une manière ludique d'aborder les mathématiques : en 1h15 les participants répondent à 30 questions courtes et amusantes en choisissant, à chaque fois, parmi 5 réponses proposées.

Ouverture des inscriptions : le 05 janvier 1994.

Contact Presse : Martine Thervet : Tél : (1) 45 79 61 53 – Fax : (1) 42 72 55 03.

LA REFORME DU CALCULUS AUX U.S.A.

Une Interview d'E. DUBINSKY

IL y a un peu plus de cinq ans maintenant, une réforme de grande ampleur s'est engagée aux U.S.A. Elle concernait l'enseignement du *calculus*, dont la sclérose était dénoncée par des mathématiciens comme Lax et Steen.

"Among our many educational crimes, that one that bears the greatest responsability for the shortage of young americans choosing mathematics, physics or engineering as careers may very well be the wretched way we teach calculus" écrivait à l'époque Peter Lax.

Comment cette réforme s'est-elle engagée? Quelles en ont été les principes moteurs? Quels en ont été les effets? C'est ce que nous avons demandé à Ed Dubinsky, professeur à l'université de Purdue, responsable d'un des projets subventionnés et éditeur, depuis sa création il y a six ans, du journal "UME Trends"[1].

Q. : Depuis quelques années, une réforme de grande ampleur de l'enseignement du calculus s'est engagée aux U.S.A. Pourquoi cette réforme?

R. : Les difficultés rencontrées par les étudiants pour comprendre et appliquer les idées du caclulus ont toujours préoccupé les enseignants aux Etats-Unis comme dans d'autres pays, mais c'est il y a une quinzaine d'années que le problème est devenu véritablement aigu, sans doute du fait de l'afflux massif des étudiants vers les cours de calculus. Dès le début des années 80, il est devenu évident que cet enseignement ne marchait pas : moins de la moitié des étudiants finissait par réussir et seul un faible pourcentage y parvenait de façon honorable. Il n'était même pas sûr d'ailleurs que ceux qui réussissaient brillamment avaient bien compris les concepts enseignés car ils étaient incapables d'appliquer les résultats et techniques du calculus dès que l'on sortait du cadre des situations familières.

C'est à ce moment que se créa, à l'initiative de Tony Ralston de l'université de Buffalo, un groupe de réflexion cherchant une alternative à l'enseignement classique du calculus. On s'y demandait notamment si les étudiants devaient tous commencer leurs études universitaires par un cours de calculus, s'il ne serait pas plus raisonnable d'enseigner des mathématiques discrètes pendant les deux premières années universitaires.

Cette suggestion suscita une grande controverse et il apparut à cette occasion que, même si la majorité des mathématiciens se retrouvaient d'accord pour critiquer l'enseignement du calculus tel qu'il fonctionnait, ils ne souhaitaient pas le supprimer, fut-ce dans des cas particuliers. Ce qu'ils souhaitaient fortement, c'était l'organisation, à grande échelle, d'une véritable réforme du calculus.

Q : Quand et comment cette réforme a-t-elle donc commencé? Avec quels moyens?

R : Le mouvement pour la réforme du calculus démarra en fait avec un colloque organisé en 1986 par la fondation Alfred P. Sloan et, l'année suivante, une rencontre organisée par le Conseil National de la Recherche. Ces deux rencontres donnèrent lieu à des rapports qui appelaient à la réforme et, à la fin de 1987, La National Science Foundation (N.S.F.) annonça le lancement d'un vaste programme de financement. Le programme initial était prévu sur cinq ans et correspondait à 10 millions de dollars

[1] Note de la rédaction : nous nous sommes appuyés, pour préparer cet entretien et en rendre compte, sur diverses sources (cf. les références qui terminent l'article) ainsi que sur les informations transmises à la rédaction de la Gazette par J.F. Méla que nous tenons à remercier ici.

environ. Il fut prolongé pour une durée équivalente avec approximativement le même financement. Les premières subventions furent accordées en 1988. Grâce au soutien de la N.S.F., universités, collèges et lycées se lancèrent individuellement dans la réforme, avec des projets de taille et d'envergure très variées. Mais il faut souligner aussi qu'il y eut un nombre important de projets lancés et réalisés sans aucun support financier.

Q : Comment ont été choisis les projets soutenus ?

R : Les projets soutenus ont été sélectionnés à partir de propositions formelles par la N.S.F. , l'évaluation des propositions étant faite essentiellement sur la base de rapports de pairs. Pour les projets non soutenus par la N.S.F., il suffisait d'obtenir l'accord de l'établissement concerné.

Q : Ces projets, vous l'avez dit, étaient d'initiative individuelle. Reposaient-ils pour autant sur des principes communs ?

R : Au départ, la plupart des projets se sont centrés sur l'intégration de nouvelles technologies[2] comme les systèmes de calcul formel et les langages mathématiques de programmation dans le curriculum. On pensait que le contenu de l'enseignement en serait modifié profondément modifié, que de nombreuses parties du calculus disparaîtraient et que l'on pourrait introduire en revanche ce que l'on appelait “des problèmes du monde réel”. Au début, c'était l'idée dominante. Peu de projets cherchaient à introduire de nouvelles formes pédagogiques comme l'enseignement coopératif, d'autres formes d'enseignement que le cours magistral, par exemple la réalisation de projets longs par les étudiants, ou à mettre l'étudiant en situation de construire ses connaissances par intéraction l'interaction avec l'ordinateur. Un seul projet était explicitement relié à une recherche didactique.

Le temps passant, beaucoup réalisèrent qu'en fait le problème essentiel n'était pas celui des contenus d'enseignement, que peu de changements étaient réellement nécessaires ou même seulement possibles à ce niveau. L'attention s'est aujourd'hui déplacée vers des préoccupations plus pédagogiques et didactiques comme celles citées plus haut. Mais il faut remarquer que même si la nécessité de lier les projets de rénovation à la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage est maintenant reconnue, le nombre des projets où ceci est effectivement réalisé n'a guère augmenté.

Q : Et au delà de ces grandes tendances communes, y avait-il des différences importantes ?

R : A mon avis, même si chaque projet se voulait différent des autres, les similarités l'emportaient la plupart du temps sur les différences. Dans beaucoup de projets, l'essentiel de la rénovation consistait à faire utiliser par les étudiants des ordinateurs et calculatrices graphiques pour produire des graphes de fonctions données par des expressions et pour résoudre des problèmes numériquement.

Il y a bien sûr des exceptions, la plupart du temps d'ordre pédagogique ou concernant l'utilisation interactive des ordinateurs, qui ont conduit à des projets réellement

[2] Note de la rédaction : les technologies introduites sont extrêmement variables : de la calculatrice HP28S à un environnement Mathematica comme dans le projet de l'université d'Illinois, mais il semble que la nature du matériel utilisé soit en fait de peu d'importance. Les nouvelles technologies, quelles qu'elles soient, ont conduit à donner moins d'importance à l'apprentissage de techniques calculatoires, à acccorder en revanche plus d'importance aux explorations numériques et graphiques. Elles ont conduit aussi à relativiser le rôle des cours magistraux et se sont accompagnées de la mise en place de laboratoires de mathématiques où se déroulent une importante partie voire la quasi-totalité des activités des étudiants. Elles ont été en fait le moteur d'une l'évolution des contenus et des méthodes pédagogiques qui aurait peut-être, comme le souligne le rapport *Priming the Calculus Pump*, pu être obtenue par d'autres moyens.

originaux. Je dirais qu'il y a eu en gros 6-7 projets réellement différents, le reste n'étant que variations[3]. Il y a aussi des projets plus récents où l'on a choisi d'implanter le cours de Calculus produit dans un autre projet, parfois avec des modifications spécifiques. Ces projets sont maintenant assez nombreux et montrent la progression de la diffusion des innovations à travers tout le pays.

Q : Finalement, cinq ans après le lancement des premiers projets, que ressort-il des innovations et travaux menés ?

R : A mon avis, à la fois des résultats importants et des questions non résolues. Pour ce qui est des résultats :

a. Beaucoup de personnes pensent maintenant que les questions essentielles pour la réforme du calculus ne sont pas des questions de contenu mais plutôt des questions d'ordre pédagogique.

b. La nécessité de recherches sur la façon dont les étudiants apprennent le calculus est maintenant largement reconnue.

c. Les mathématiciens professionnels sont devenus beaucoup plus conscients de la nécessité d'une réforme.

d. Un certain nombre de questions importantes concernant l'enseignement et l'apprentissage du calculus ont été soulevées et précisées.

e. On a développé et implanté un ensemble d'innovations tout à fait intéressantes.

f. Et, finalement, les enseignants qui se sont engagés dans cette réforme ont beaucoup appris.

Pour ce qui est des questions ouvertes :

a. Il n'y a pas eu de réel changement des pratiques d'enseignement. Bien que beaucoup d'enseignants soient maintenant favorables à certaines pratiques nouvelles, on ne sait pas combien de temps cela peut prendre, ni même tout ce qui serait engagé dans une telle évolution.

b. La réforme du calculus s'est pour l'instant peu diffusée. Plus l'innovation est importante, moins les projets diffusent et de manière générale, dans le processus de diffusion, la part d'innovation a systématiquement tendance à se réduire.

c. On dispose enfin de très peu de données pour savoir dans quelle mesure l'apprentissage du calculus s'est ou ne s'est pas trouvé amélioré par les innovations réalisées [4].

Q : Vous soulignez que les changements sont lents et ne répondent pas tout à fait à vos attentes mais comment s'est organisée la diffusion de la réforme et peut-on dire quand même que l'enseignement du calculus au Etats-Unis est globalement en train de bouger ?

R : Une certaine publicité a été donnée à cette réforme sous forme de rapports,

[3] Note de la rédaction : parmi les projets introduisant les changements les plus radicaux, on citera notamment le projet de Purdue University où l'enseignement est organisé autour de la programmation dans un langage particulier : ISETL, en liaison avec une modélisation de type Piagétien du développement cognitif, le projet des Five Colleges où l'accent est mis sur le lien avec la résolution de problèmes réels : *Calculus in Context*, le projet de Duke University intitulé : *Mathematics as a Laboratory Course* où il n'y a pratiquement plus de cours classiques et où sont seulement pris en compte dans l'évaluation les rapports de labo et les projets, le projet of Illinois, le plus informatisé, au contenu très lié à la puissance de Mathematica, avec une heure de cours par semaine, le reste du temps au labo (Mac disponibles de 10h à 22h).

[4] Note de la rédaction : il est unanimement souligné en revanche dans les rapports que les étudiants engagés dans ces nouveaux cursus fournissent un travail considérable et que les enseignants qui y participent ont le sentiment d'être embarqués dans une aventure passionnante.

d'articles publiés dans les revues lues par les mathématiciens, grâce aussi à quelques articles publiés dans les média. Mais il faut reconnaître que la responsabilité de la diffusion est surtout laissée aux initiatives individuelles : les équipes qui participent à la réforme publient des manuels (il existe actuellement environ une dizaine de nouveaux manuels associés à tel ou tel projet), donnent des conférences, organisent des ateliers ou mini-cours dans les congrès, mettent en place des universités d'été...

C'est vrai, le changement est encore faible mais il est visible. La question maintenant est de savoir s'il va se poursuivre malgré la réduction des moyens accordés à la réforme ou si les tendances conservatrices naturelles vont reprendre le dessus et nous amener progressivement à une situation globale qui différera peu de celle dont nous sommes partis.

Q : Les mathématiciens se sont-ils réellement engagés dans cette réforme ?

R : Sans aucun doute. Cette réforme est presque entièrement l'oeuvre de la communauté mathématique.

De plus, récemment, les deux plus grandes associations professionnelles mathématiques des U.S.A., à savoir l'American mathematical Society (A.M.S.) et la Mathematical Association of America (M.A.A.) ont constitué un comité commun pour la recherche sur l'enseignement au niveau "undergraduate" (C.R.U.M.E.). Ce comité, en collaboration avec l'American Mathematical Association of Two Year Colleges (A.M.A.T.Y.C.) et le National Council for Teachers of Mathematics (N.C.T.M.), sponsorise un certain nombre d'activités. La plus importante est peut-être la publication d'une série annuelle d'ouvrages intitulés : "Research in collegiate Mathematics Education" (R.C.M.E.). Ces ouvrages visent à la publication des meilleurs articles de recherche dans ce domaine et l'on encourage vivement les chercheurs du monde entier à soumettre des articles. On espère que R.C.M.E. deviendra à terme une revue normale. Les éditeurs actuels en sont James Kaput, Alan Schoenfeld et moi-même et le premier volume devrait sortir incessamment.

Q : Quelles lectures conseillez-vous au lecteur français qui souhaiterait en savoir plus ?

R : Plusieurs volumes ont été publiés dans les Notes et Reports Series de la Mathematical Association of America (M.A.A.). Je suggérerai en priorité le N° 17 : "Priming the Calculus Pump" réalisé par le Committee on Calculus Reform and the First Two Years, qui trace un premier bilan de la réforme, le N° 20 : "The Laboratory Approach to Teaching Caclulus" de L. Carl Leinbach et al. et le N° 24 : "Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education" de Zaven A. Karian. La plupart des projets importants sont décrits dans ces rapports que l'on peut commander à la M.A.A. et, si l'on souhaite plus d'informations sur un projet donné, on peut ensuite écrire directement aux équipes concernées.

Q : Vous êtes éditeur de la "Newsletter U.M.E. Trends". Pouvez-vous nous dire quelques mots sur ce journal ?

R. : La création de la Newsletter UME Trends portant sur l'enseignement des mathématiques au niveau "undergraduate" est une des retombées de la réforme. Créée il y a six ans, elle a été soutenue financièrement par la N.S.F. pendant les deux premières années et vit maintenant de façon autonome. Elle est publiée par le "Joint Policy Board for Mathematics" et paraît six fois par an. Le tarif de l'abonnement est de 24 $ pour les personnes demeurant hors des Etats-Unis. Cette publication comporte seize pages, fournit des informations sur toutes les activités menées aux

U.S.A. en relation avec l'enseignement des mathématiques au niveau undergraduate. Elle rend compte aussi d'actions internationales, par exemple des activités du groupe "Psychology of mathematics Education" et publie à l'occasion des reportages sur l'enseignement dans d'autres pays. En 1992, par exemple, elle a publié un rapport de B. Cornu concernant la réforme de la formation des maîtres en France.

Quelques adresses et références :

Quelques publications du M.A.A. concernant plus spécialement le calculus (1529 Eighteenth street NW, Washington DC 20036) - MAA Notes :

N° 7 : Toward a Lean and Lively Calculus, Ronald G. Douglas, Editor

N° 8 : Calculus for a New Century, Lynn A. Steen, Editor

N° 17 : Priming the Calculus Pump : Innovations and Resources, Committee on Calculus Reform and The First Two Years, a subcommittee of the Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, Thomas W. Tucker, Editor

N° 19 : Visualization in Teaching and Learning Mathematics, Committee on Computers in Mathematics Education, Steve Cunningham and Walter S. Zimmermann, Editors

N° 20 : The Laboratory Approach to Teaching Calculus, L. Carl Leinbach et al., Editors

N° 24 : Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education, Zaven A. Karian, Editor

N° 25 : The concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy, Ed Dubinsky and Guershon Harel, Editors

Signalons également l'article de D. O'Shea : "Calculus in Context" relatif au projet mis en place dans les "Five Colleges", un des projets les plus novateurs, publié dans le numéro spécial de la Gazette de la S.M.F. "Renouveler l'Enseignement (premier cycle universitaire et classes préparatoires)", supplément au numéro 48 paru en avril 1991.

Signalons aussi les Actes du groupe de travail intitulé : "Students' Difficulties in Calculus" du Congrès ICME 7 à Québec, août 1992, édités par M. Artigue et G. Ervynck, dont quelques exemplaires sont encore disponibles (s'adresser à M. Artigue) et qui permettent de se faire un idée plus globale de l'évolution de l'enseignement du calculus dans le monde et des problèmes rencontrés dans ce domaine.

RECTIFICATIF

LES TABLES RONDES DU PREMIER CONGRES EUROPEENS DE MATHEMATIQUES

Bernard PRUM

A la suite d'une erreur matérielle, le dossier "Les Tables Rondes du Premier Congrès Européen de Mathématiques", publié dans le dernier numéro 57 de la Gazette et dont l'auteur est Bernard PRUM, responsable de l'organisation des Tables Rondes, a été attribué à Fulbert MIGNOT.

La Gazette prie Bernard PRUM, Fulbert MIGNOT et ses lecteurs de l'excuser de cette erreur.

Société Mathématique de France

• **Carte de Membre** : celle-ci donne droit à des réductions de **10%** sur tous les ouvrages disponibles à la Librairie **OFFILIB** (48 rue gay Lussac 75005 Paris) et sur les ouvrages de mathematiques disponibles aux **Editions Hermann** (6 rue de la Sorbonne 75005 Paris)

• **Délais de réglement** : Pour assurer la continuité de l'abonnement à la Gazette et à l'Officiel, veuillez adresser votre réglement **avant le 1/3/94**. En cas de non-réabonnement, la distribution de ces deux revues ne sera plus assurée après cette date.

• **Cotisation SMF+SMAI** : donne droit à la Gazette et à Matapli.

• **Cotisation conjoint(e)** : accessible à tout conjoint d'un membre SMF, elle donne droit à la carte de membre et au vote lors de l'Assemblée Générale (mais pas à la Gazette).
Nom du Conjoint :

• **Accords de réciprocité** : si vous êtes membre de la SMF et que vous désirez adhérer à l'une des Sociétés indiquées au verso, la SMF peut recueillir votre cotisation en francs français (**avant le 31/01**) et la transmettre.

- **AMS** : vous devrez remplir et retourner avec la mention "paid to SMF" le formulaire d'inscription qui vous a été envoyé par l'AMS. En cas de première inscription, des formulaires sont disponibles au secrétariat de la S.M.F.

- En tant que membre de la SMF, vous avez droit à un **tarif préférentiel** auprès des Sociétés Mathématiques des pays suivants : Allemagne, Australie, Brésil, Canada, Danemark, Espagne, Inde, Italie, Pays-bas, Portugal, Suède, et à celle de Londres. Dans ce cas, adressez-vous directement à celles qui vous intéressent en mentionnant votre appartenance à la SMF.

• **Cotisation AFCET+SMF** : Merci de vous adresser directement à l'AFCET, 156 Bd Péreire, 75017 Paris.

• **Mode de paiement** : Pour faciliter le traitement de votre dossier, nous vous demandons de payer **par chèque**.

• **Dons** : La cotisation SMF n'est pas déductible : seuls les dons le sont. Des reçus fiscaux vous seront envoyés par la SMF et/ou par la Fondation de France.

Don Pro Mathematica
Fondation de France

Chèque au nom de *"Fondation de France, Pro Mathematica"*
à renvoyer avec votre cotisation.
Votre don pour ProMathematica et votre cotisation devront faire l'objet de deux chèques différents.

SOCIETE MATHEMATIQUE DE FRANCE
Association reconnue d'utilité publique par décret du 11.02.1888
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Secrétariat général - [33] (1) 44 27 67 96 - Fax [33] (1) 40 46 90 96 - smf@dmi.ens.fr

COTISATION INDIVIDUELLE 1994

Merci de vérifier les informations ci-contre
et de noter les modifications ci-dessous

Nom : ....
Prénom : ....
Adresse : ....
....
....
....
Code Postal : .... Ville : ....
Pays : ....

Merci de bien vouloir entourer les options choisies et de nous renvoyer ce formulaire avec votre réglement

COTISATION obligatoire *donnant droit à la Gazette*	
SMF	360 F
SMF *retraité-e, ou < 30 ans*	180 F
SMF *conjoint-e*	110 F
SMF/SMAI	540 F
SMF/SMAI *retraité-e et < 30 ans*	390 F
SMF/AFCET *Contacter l'AFCET*	

Adhésions par l'intermédiaire de la SMF aux sociétés suivantes :	
Société Mathématique Européenne	100 F
AMS *(Etats-Unis)*	336 F
SMJ *(Japon)*	390 F
SMB *(Belgique)*	82 F
SMC *(Cuba)*	100 F
SMS *(Suisse)*	100 F

Dons	
Promathematica (voir instructions au dos)	> 50F
Commission du Développement et des Echanges (U.M.I.)	> 50F

PUBLICATIONS facultatives	
Officiel *(adresse en Europe)*	125 F
Officiel *(adresse hors Europe)*	155 F
Bulletin *(adresse en Europe)*	310 F
Bulletin *(adresse hors Europe)*	320 F
Bulletin et Mémoires *(adresse en Europe)*	480 F
Bulletin et Mémoires *(adresse hors Europe)*	530 F
Astérisque *abonnement complet (adresse en Europe)*	780 F
Astérisque *abonnement complet (adresse hors Europe)*	1080 F

TOTAL =

Merci de régler de préférence par **CHEQUE** bancaire ou postal (CCP 5215Z PARIS) **à l'ordre de la S.M.F.**

N° de Chèque ou de Carte Bancaire (Visa, Mastercard) :
Date d'expiration et nom de la **Banque** pour les Cartes Bancaires :
Date : Signature :

Cadre réservé à la SMF
Paiement le :
Crédité le :

Indications au verso

INFORMATIONS

LES SESSIONS "L'ÉTAT DE LA RECHERCHE"

Pierre SCHAPIRA

Ces sessions sont organisées deux fois par an, sous l'égide de la Société Mathématique de France, avec le soutien de la Mission Scientifique et Technique du Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche.

Elles ont pour ambition de répondre au défi que pose l'évolution très rapide de notre discipline, évolution que traduit la technicité croissante de chaque branche comme l'émergence de nouveaux champs d'étude. Ces sessions ont donc pour objectif de maintenir au contact de la recherche "de pointe" le plus grand nombre de mathématiciens, non-spécialistes du sujet exposé. Elles se déroulent dans toute institution d'enseignement et de recherche de France qui accepte de les recevoir, et donc d'assurer l'organisation pratique des journées, avec bien sûr l'appui logistique et financier de la SMF (et du Ministère).

Les sessions 93 ont eu pour thèmes "Groupes Quantiques" à Strasbourg et "Théorie de Jauge" à Toulouse (cette deuxième session 93 a en fait eu lieu en janvier 94). Les sessions 94 auront pour thèmes "Milieux aléatoires" et "Théorie de Hodge".

Ces sessions sont dotées d'un Conseil Scientifique, actuellement composé de : E. Bayer, A. Beauville, G. Benarous, D. Bennequin, J. M. Coron, J. P. Demailly, P. Gérard, E. Ghys, C. Moeglin, G. Lachaud, P. Schapira (secrétaire), C. Soulé.

RAPPORT SUR LA PREMIÈRE SESSION "L'ÉTAT DE LA RECHERCHE"

consacrée aux Groupes Quantiques

Pour les organisateurs,
Christian KASSEL

La première session "Etat de la Recherche" de la S.M.F. a eu lieu du 2 au 4 avril 1993 à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée (I.R.M.A., U.R.A. n⁰ 001 du C.N.R.S.) de l'Université Louis Pasteur à Strasbourg. Elle était consacrée à une introduction aux groupes quantiques et à leurs applications à la théorie des nœuds et a réuni près de 150 participants. Les organisateurs en étaient Christian Kassel, directeur de recherche au C.N.R.S., Marc Rosso, professeur à l'Université Louis Pasteur et Vladimir Turaev, directeur de recherche au C.N.R.S.

Objectifs généraux. *Le but de cette session que nous avons appelée "Journées Quantiques" était de permettre à un large public (au moins 50 personnes) de mathématiciens non-spécialistes d'accéder à la théorie des groupes quantiques et à ses applications topologiques. La forme choisie par la S.M.F. consistait en une série de cours intensifs tenant en un week-end.*

La S.M.F. s'était engagée à obtenir un financement spécifique substantiel pour l'opération auprès du Ministère de la Recherche et de l'espace (M.R.E) et auprès de la Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales (D.R.E.D.) du Ministère de l'Education Nationale. L'idée était d'utiliser les fonds obtenus non seulement pour couvrir les frais d'organisation de la session, mais aussi les frais de voyage et d'hébergement des participants.

Programme.

Les Journées Quantiques ont commencé le vendredi 2 avril à 10h du matin et se sont achevées le dimanche 4 vers midi, ce qui a permis à la plupart des participants de retourner chez eux le jour même. Dans l'intervalle, les auditeurs ont eu droit à 11 heures de cours en français sur lesquels je vais donner quelques détails. La première matinée a démarré avec une conférence d'introduction de près de deux heures donnée par P. de la Harpe (Université de Genève). Les cours proprement dits ont débuté le vendredi après-midi. Ils ont été donnés par M. Rosso, V. Turaev et moi-même (trois heures chacun) et ont porté sur les points suivants :

C. Kassel :

— Définitions de base : Equation de Yang-Baxter, groupes de tresses, algèbres de Hopf quasi-triangulaires, catégories tensorielles tressées.

— Monodromie des systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov et groupes quantiques.

M. Rosso : Double quantique de Drinfeld. Application à $U_q(\mathrm{sl}(n))$: représentations, R-matrice universelle.

V. Turaev : Nœuds et entrelacs dans $\mathbf{R}^3$. Diagrammes planaires. Polynôme de Jones et généralisation. Invariants quantiques des variétés de dimension trois.

Polycopiés. *Au cours de la session, chaque auditeur a également reçu 5 polycopiés de notes de cours (représentant au total plus de 140 pages). En voici la liste.*

— Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's Higman-Sims model par P. de la Harpe (39 pages).

— Algèbres de Hopf - Catégories tensorielles - Définitions et premières propriétés par C. Kassel (37 pages).

— Invariants des nœuds, catégories tensorielles et groupes quantiques par C. Kassel (17 pages).

— Algèbres de Hopf quasi-triangulaires - Double quantique - Construction de l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q\mathrm{sl}(N+1)$ - R-matrice universelle - Représentations de dimension finie - Théorie quantique des invariants par M. Rosso (18 pages).

— Ribbon categories and invariants of graphs in the Euclidean 3-space par V. Turaev (32 pages).

Participants. *Nous avons recensé 147 participants, pour la plupart des mathématiciens (le nombre total exact était très vraisemblablement légèrement supérieur). Nous avons également repéré 21 physiciens (environ 15 % du total). L'auditoire était composé aux 2/3 de mathématiciens (ou physiciens) confirmés et pour 1/3 de thésards. Bien que la session ait été avant tout destinée à la communauté scientifique française (rappelons que tous les exposés ont été donnés en français), un nombre non négligeable de collègues en poste à l'étranger (27, circa 18 % de l'auditoire) ont été attirés par le sujet (Allemagne : 7, Suisse : 5, Belgique : 3, Pologne : 2, Italie : 1, Pays-Bas : 1, ...).*

Comme prévu, le plus gros de notre budget a servi à payer les frais de mission des participants. Nous avons distribué des fonds à toute personne qui en avait fait la demande (y compris pendant les Journées). Les frais de voyage ont été remboursés au taux réel sur présentation des billets de train. Pour les frais de séjour, nous avons proposé des forfaits journaliers de 300 F pouvant monter jusqu'à 500 F pour certains participants avec peu de moyens financiers ou provenant de l'étranger. C'est sur ces bases que nous avons pris en charge (partiellement ou totalement) 53 participants, soit un bon tiers de l'auditoire.

Soutien financier et matériel. *Nous avons reçu le soutien financier de la D.R.E.D. et de la S.M.F. (le soutien de cette dernière était une avance sur la subvention de l'ex-M.R.E). Notre laboratoire a pris intégralement en charge les frais de courrier, de téléphone, de fax, de photocopie, de tirage des affiches et des polycopiés et a généreusement mis son personnel et ses locaux à notre disposition. C'est ainsi que Mme Moreau, secrétaire du laboratoire, a assuré le secrétariat des Journées Quantiques et a organisé — tâche délicate et très prenante — l'hébergement des participants à Strasbourg.*

Conclusion. *A l'issue de cette première session, on peut dire sans risque d'être contredit que la S.M.F. a gagné le pari qu'elle avait lancé avec l'opération "Etat de la Recherche". L'ampleur de la participation (150 personnes) a montré que tous les buts fixés ont été atteints et qu'une demande incontestable de manifestations de cette nature existait au sein de la communauté mathématique française. Le format utilisé pour la session (2–3 jours de cours intensifs le temps d'un week-end) a trouvé un accueil très favorable auprès des participants de cette première expérience. Il est clair que celle-ci doit être poursuivie.*

Le financement obtenu pour la première session s'est révélé adapté à l'objectif fixé. Nous avons eu la confirmation que le fonctionnement de telles sessions requiert aussi le soutien du laboratoire d'accueil. Dans notre cas, cet appui a été réel et décisif pour le bon déroulement de la session qui s'est tenue sans problème et à la satisfaction de tous.

Sur le plan local, les "Journées Quantiques" ont constitué un temps fort de la vie du Département de Mathématiques de Strasbourg en 1993. Elles ont permis de conforter sa nouvelle image de "pôle quantique".

Je voudrais terminer en remerciant pour leur aide MM. Barlet, Gramain, Schapira et Mlle Ropartz de la S.M.F., nos collègues Giraud (D.R.E.D) et Raoult (M.R.E.) qui ont immédiatement saisi l'intérêt de l'idée de la S.M.F. et ont permis de la concrétiser financièrement, ainsi que l'I.R.M.A., son directeur et son personnel très dévoué.

Nous souhaitons bon vent aux futures sessions "Etat de la Recherche".

LES COURS DE DEA INTENSIFS

François DIGNE

Depuis quelques années la DRED (maintenant la MST) favorise par une subvention (actuellement 45 000 francs) l'organisation de cours de DEA dits "résidentiels". Ces cours se déroulent sur une ou deux semaines, le public visé est celui des doctorants débutants et des étudiants de DEA. Ils doivent être organisés par une équipe de deux à quatre enseignants pour une quinzaine d'auditeurs environ, et porter sur un domaine enseigné dans un ou plusieurs groupes de formation doctorale. La subvention permet l'indemnisation des organisateurs et couvre en partie les frais de déplacement et de *séjour des étudiants. Jusqu'ici ces cours se sont faits à Luminy, mais il ne semble pas que ce soit une condition nécessaire. Une enquête auprès des collègues ayant déjà organisé de tels cours montre que :*

— Dans la pratique l'organisation était de deux ou trois heures de cours par jour, les séances de cours étant séparées et suivies de discussions et de sorte de travaux dirigés.

— Les étudiants de chacun de ces cours venaient de plusieurs universités y compris étrangères. Les universités d'origine ont souvent dû compléter le financement, surtout que le nombre d'auditeurs a plusieurs fois dépassé largement 15.

— Ces cours ont été parfois suivis d'un examen et parfois validés d'une autre façon (rédaction des cours) en vue du DEA.

— La plupart des organisateurs et des auditeurs pensent que la formule est intéressante, voire "très appréciée" et sont prêts à renouveler l'expérience.

Pour toute information on peut contacter la MST au Ministère de l'Enseignement Supérieur. Pour les informations spécifiques à Luminy on peut envoyer un message vide à l'adresse électronique suivante :

cirminfo@cirm5.univ-mrs.fr, (service d'informations automatiques du CIRM).

INSTANCES MATHÉMATIQUES NATIONALES

LES NOUVELLES STRUCTURES DU MINISTÈRE

Le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche comprend pour l'essentiel des directions administratives :

- DGES (Direction des enseignements supérieurs)

- DGRT (Direction générale de la recherche et de la technologie)

- DGARHAF (Direction générale de l'administration, des ressources humaines et de affaires financières)

- DISTB (Direction de l'information scientifique et technique et des bibliothèques)

et la MST (Mission scientifique et technique).

C'est cette dernière structure qui d'une certaine manière succède a la DRED; en voici la définition telle qu'elle est donnée dans l'actuel organigramme : "La Mission est sous la responsabilité du chef de la MST. Il est assisté par trois chargés de missions placés auprès de lui, chargés respectivement de la coordination de l'expertise en matière d'activités européennes et de relations internationales, en matière de recherche et de développement industriels et en matière de recherche pour le développement. La Mission est constituée d'un ensemble de 10 départements scientifiques, pédagogiques et techniques (DSPT), de 10 conseillers d'établissement (CE) et de quelques conseillers scientifiques et techniques sur des thèmes transversaux."

En ce concerne les mathématiques le direction correspondante est DSPT1 dont la composition est la suivante :

- Jean-Luc Joly, PR à Bordeaux 1, directeur scientifique

- Joëlle Pichaud, MdC à Paris 7, coordinatrice

- Claude Basdevant, PR à Paris 13, consultant

- Pierre Bérard, PR à Grenoble 1, consultant

– *Alain Louveau, DR à Paris 6, consultant.*

Elle est assistée d'un groupe d'experts (GE) dont la composition n'est pas encore officielle.

Les coordonnées précises risquent d'être provisoires car la DSPT1 doit changer de locaux. L'adresse sera inchangée :

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Mission scientifique et technique, DSPT1, 61 rue Dutot, 75015 Paris Le téléphone du secrétariat est actuellement 40 65 69 47.

LA COMMISSION 01 DU CNRS

Composition actuelle de la commission :

Bon Saint Come Chantal (Assistant Ingénieur, Bordeaux); Chakhoff Sonia (Attachée d'administration, Nice); Chemin Jean-Yves(*) (PR Paris 6), **Secrétaire** *; Cioranescu Doina (DR, laboratoire d'analyse numérique, Paris 6); Doclot Ginette (Assistant Ingénieur, Laboratoire de topologie et géométrie différentielle, Villeneuve d'Asq); Étesse Jean-Yves (CR Rennes); Girard Jean-Yves (DR, laboratoire de mathématiques dicrètes, Marseille); Le Jan Yves (PR Orsay); Mathieu Yves (PR Aix-Marseille I); Méléard Sylvie (PR Paris 10); Périaux Jacques (Chef de service, Département d'aérodynamique théorique, Dassault, Saint-Cloud); Prum Bernard(*) (PR Paris 5); Ramis Jean-Pierre (PR Strasbourg I); Roy Marie-Françoise(*) (PR Rennes I),***Présidente** *; Saint-Jean-Paulin Jeanine (PR Metz); Serre Denis(*) (PR Lyon); Sikorav Jean-Claude(*) (DR, laboratoire de topologie et géométrie, Toulouse III); Stora Raymond (DR, laboratoire de physique des particules, Annecy le Vieux); Teissier Bernard(*) (DR, ENS, Paris),* **Représentant au conseil du département** *; Torasso Pierre (PR Poitiers).*

(*) membre du bureau.

N.B. Nous ignorons encore qui sera nommé en remplacement de Pierrette Cassou-Noguès, démissionnaire.

Calendrier pour 1994. La prochaine réunion de bureau aura lieu le 3 février, la commission se tiendra les 8, 9, 10 mars, les auditions CR le 22 avril et le jury d'admissibilité les 25, 26, 27 avril.

LE CNU DE LA 25ème SECTION

Cette année la commission 1 examine les questions de qualification et la commission 2 les gestions des carrières. Les dossiers d'avancement devront parvenir à l'administration centrale avant le 30 mars 94. Réunion prévue de la commission 1 : 16,17 et 18 mars.

Composition de la commission 1 :

Raïs Mustapha (Poitiers) **président** *; Breen Laurence (Paris 13)* **vice-président** *; Robinet Jean-François (Lille I)* **vice-président** *; Guerre Sylvie (Paris 6)* **Assesseur**.

Membres PR : *Bérard Pierre (Grenoble); Bonami Aline (Orléans); Boutet de Monvel Louis (Paris 6); Cerveau Dominique (Rennes I); Esterle Jean (Bordeaux I); Mauduit Christian (Lyon I); Mérindol Jean-Yves (Strasbourg).*

Membres MC : *Charreton Christine (Lyon I); David Simon (Paris 6); Duret Jean-Louis (Angers); Ilias Saïd (Toursq); Magloire Jean (Montpellier); Mossé Brigitte (Aix-Marseille I); Thérond Jean-Daniel (Montpellier).*

Composition de la commission 2 :

Illusie Luc (Paris 11) **président** *; Schiffmann Gérard (Strasbourg)* **vice-président** *; Elhahad Jimmy (Marseille)* **vice-président** *; Castella Dominique (Poitiers)* **assesseur**.

Membres PR : *Cœuré Gérard (Lille 1); Dehornoy Patrick (Caen); Françoise Jean-Pierre (Paris 6); Métivier Guy (Rennes I); Pansu Pierre (Paris 11); Vignéras Marie-France (Paris 7); Waldschmidt Michel (Paris 6).*

Membres MC : *Brochet Jean-Michel (Lyon I); Delorme Marianne (Lyon I); Gilain Christian (Paris 6); Hée Jean-Yves (Paris 11); Paul Emmanuel (Toulouse III); Slupinski Marcus (Strasbourg); Thieullen Philippe (Paris 11).*

LE CNU DE LA 26ème SECTION

Composition de la commission 1 :

Jacod Jelan (Paris 6)**président**; *Saramito Bernard (Clermont II)* **vice-président** *; Hachem Ghias (Paris 13)* **vice-président** *; Fourt Guy (Clermont II)* **assesseur**.

Membres PR : *Auslender Alfred (Clermont II); Bardos Claude (Paris 7); Ben Arous Gérard (Paris 11); Berestycki Henri (Paris 6); Cornet Bernard (Paris 1); Deheuvels Paul (Paris 1); Monjardet Bernard (Paris 5).*

Membres MC : *Allain Geneviève ép. Loeser (Paris 12); Chatelain Joseph (Besançon); Godlewski Edwige (Paris 6); Morin Madelaine ép. Eberhard (Grenoble I); Rabut Christophe (Toulouse); Tronel Gérard (Paris 6); Vieu Philippe (Toulouse III).*

Composition de la commission 2 :

Nedelec Jean-Claude (École Polytechnique) **président** *; Thivent Christiane ép. Cocozza (Marne-La-Vallée)* **vice-président** *; Blot Joël (Paris 1)* **vice-président** *; Perriot André (E.N.I.B.)* **assesseur**.

Membres PR : *Benilan Philippe (Besançon); Hiriart Urruty Jean-Baptiste (Toulouse III); Kavian Otared (Nancy I) Lanne Michèle ép. Artigue (I.U.F.M. Reims); Rochet Jean-Charles (Toulouse I); Saut Jean-Claude (Paris 12); Viano Marie-Claude (Lille I).*

Membres MC : *Boudou Alain (Toulouse III); Boussouira Fathia ép. Alabau (Bordeaux I); Gabriel Patrick (Dijon); Ruyet Danièle ép. Lefebvre (Lille I); Lecot Christian (Chambéry); Nobelis Photis (Strasbourg I).*

VISAS ET TITRES DE SÉJOUR DES MATHÉMATICIENS NON EUROPÉENS

Marc DIENER

La libre circulation des personnes et des idées est un atout important pour la recherche. Elle renforce le sentiment de communauté entre ceux qui se sont consacrés à cette mission. Or à la rentrée dernière, nous avons constaté une accumulation inhabituelle de difficultés administratives pour nos invités, ressortissants de pays situés hors d'Europe. Saisi de ce problème lors du Bureau du 22 octobre, Daniel BARLET m'a chargé de procéder à des prises de contacts afin de cerner la nature et l'ampleur du problème. J'ai dans un premier temps contacté les correspondants de la Gazette membres de la SMF.

Caen, Grenoble, Lyon, Marseilles, Montpellier, Nice, Valenciennes, m'ont déjà informé de telles difficultés. Bien que n'ayant pas encore fait le tour du problème (il semble complexe), j'observe deux types de tracas, qui n'ont sans doute pas été atténués par une loi promulguée en août dernier.

Premier type : ceux avant le départ du pays d'origine, pour obtenir un visa : là c'est généralement l'Office des Migrations Internationales de nos Ambassades qui introduit des délais dans l'établissement des visas des futurs employés des universités françaises ("leurs travailleurs" selon la formule de l'OMI) : ce service doit dans certains cas attendre l'avis de la Direction Départementale du Travail et de l'Emploi, elle-même saisie par l'employeur.

Mais des problèmes existent aussi dans certains Consulats pour de simples invitations scientifiques, sans que ces services n'avancent de raisons précises.

Puis il y a les tracas en France, dont le premier est l'établissement d'un véritable titre de séjour : nombreux sont les services préfectoraux qui ne délivrent que des récépissés de dépot de dossier d'une validité de trois mois, souvent sur le point d'expirer au moment où ils sont remis aux intéressés. Mais il y a aussi des documents "erronés" tels que carte de séjour étudiant donnée à un Professeur, document qui ne donne pas droit au regroupement familial, ni, à terme, à une carte de résident.

Ces pratiques sont contraires au principe de courtoisie que nous sommes en droit d'attendre à l'égard de nos invités. Lorsqu'elles concernent des fonctionnaires recrutés dans le cadre du droit à ouvrir la fonction de Professeur ou de Maître de Conférences sans autre exclusive que la qualité et la compétence, elles constituent un obstacle à la bonne application de notre législation.

Si nos craintes sont confirmées, le Président alertera le Premier Ministre et les ministres concernés. Pour ma part, je souhaite être informé de toute attitude anormale de l'administration. Je suggère que chacun de nos collègues qui rencontre des difficultés dans les services préfectoraux soit accompagné dans ses démarches, pour l'aider à dénouer l'écheveau administratif, mais aussi pour permettre des témoignages précis dans les cas de mauvaise volonté ou négligence manifestes.

Des formulaires sont à votre disposition à la SMF, à l'IHP et à notre Maison *de Luminy, ou directement auprès de moi (*diener@math.unice.fr *ou Laboratoire CNRS de Mathématiques, Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2) pour vous permettre consigner vos observations.*

Merci de nous aider à veiller à ce que la France reste un pays où la recherche mathématique se développe sans considération de nationalité.

PROGRAMME EUROPÉEN "F B P" (PROBLÈME A FRONTIÈRE LIBRE)

Henri BERESTYCKI

Alain DAMLAMIAN

La première année du programme de l'European Science Foundation "Mathematical Treatment of Free Boundary Problems" vient de s'achever en fin 1993.

Il s'agit d'un programme d'une durée totale de 4 ou 5 années, portant sur les applications aussi bien que sur la théorie des problèmes à frontières libres. Les crédits importants (jusqu'à 1000 kF par an) proviennent des contributions de divers organismes *nationaux de recherche publique des pays du Conseil de l'Europe. Pour la France, le CNRS participe au financement de ce programme.*

Le but de ce programme est de soutenir les activités de recherche sur les problèmes de frontières libres et d'encourager les collaborations et échanges en Europe. Les activités principales de ce programme sont :

- *Aide à l'organisation de "workshops" et autre colloques scientifiques dont le sujet est en rapport direct avec les problèmes à frontières libres.*

- *Visites individuelles de chercheurs dans un centre de recherche d'un autre pays européen. Il s'agit de visites de courte durée (une semaine à dix jours).*

- *bourses de niveau post-doctoral destinées à des jeunes chercheurs pour effectuer un séjour dans un centre de recherche d'un autre pays européen. La durée de ces séjours est de 3 à 12 mois.*

- *Publication d'un bulletin de liaison : "FPB News".*

Le programme est dirigé par un comité de 10 membres sous la présidence de J.F. Rodrigues (Lisbonne) qui a été l'initiateur du projet et qui publie FBP News. Il a été décidé qu'il y aurait une rotation annuelle du représentant français au sein de ce comité directeur. Alain Damlamian vient d'y être remplacé par Henri Berestycki pour l'année universitaire 93-94. Il sera suivi, dans l'ordre, par Michel Frémond, Michel Chipot et Alain Bossavit.

Au cours de sa première année, le programme a apporté son soutien au Congrès International de Tolède sur les problèmes à frontières libres (21-26 Juin 93), qui entre dans le cadre d'une série (tous les trois ans) de colloques sur ce thème, dont les premiers datent des années 70. Le prochain colloque de cette série est prévu pour 1996 en Pologne. Le programme a également soutenu cinq workshops spécialisés dont l'un en France (Metz 29-30 Novembre 93 : "Calcul de formes en EDP" organisé par M. Chipot).

Les workshops prévus pour le premier semestre 1994 sont les suivants :

- *"Free Boundary Problems in Porous Media Flow", Delft (20-22 Janvier)*

- *"Energy Methods for Free Boundary Problems in Continuum Mechanics", Oviedo (21-23 Mars)*

- *"Phase transitions", Bonn (25-28 Mars)*

- *"Méthodes Numériques pour les Problèmes à Frontières Libres", session dans le cadre du Colloque de Pont-à-Mousson (13-14 Juin)*

- *"Motion of Surfaces by Mean Curvature", Trento 27 Juin-2 Juillet*

Toute personne désirant recevoir FBP News, obtenir des renseignements complémentaires ou souhaitant bénéficier d'une des activités de ce programme est priée de contacter :

Henri Berestycki
Université Pierre et Marie Curie
Analyse Numérique,
tour 55-65 - 5ème étage
4 Place Jussieu
75 252 Paris cedex 05
e-mail beres@dmi.ens.fr

Alain Damlamian
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex
e-mail damla@orphee.polytechnique.fr

CENTRE INTERNATIONAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES (CIMPA)

Le CIMPA est une association à but non lucratif, créée à Nice en 1978 à l'initiative du gouvernement français et sous les auspices de l'UNESCO. Il a pour objectif d'aider les chercheurs des pays en développement en mathématiques et en informatiques.

En particulier, le CIMPA a réuni dans un livret intitulé

Bibliothèque sélective de mathématiques

une liste d'environ 350 ouvrages fondamentaux couvrant l'ensemble des mathématiques, à l'intention des mathématiciens exerçant dans les pays en développement et désirant constituer une bibliothèque minimale.

Ce livret est disponible en TEX ou Word Macintosh par ftp "anonymous" sur la machine "math.unice.fr" (répertoire /pub/biblio-math*).*

Les personnes qui n'ont pas accès au réseau informatique Internet peuvent obtenir le livret en envoyant une demande à l'adresse suivante :

CIMPA, 1 avenue Edith Cavell, F-06000 Nice, France.

AIDE AUX JEUNES MATHÉMATICIENS DES PAYS EN VOIE DE DÉVELOPPEMENT

Sur la demande du secrétaire de l'Union Mathématique Internationale (UMI) et pour aider les jeunes mathématiciens de ces pays qui souhaitent participer au Congrès de Zürich, le CNFM encourage les Départements de Mathématiques et les équipes du CNRS à inviter ceux avec qui ils sont en rapport (anciens thésards, chercheurs) pour un séjour avant le Congrès, en juillet 1994. Le CNFM propose ensuite de payer le voyage à Zürich, au départ d'une ville en France. Par ailleurs, la Commission du Développement et des Echanges (CDE) de l'UMI peut attribuer des bourses de voyage à des mathématiciens de pays en voie de développement pour un séjour de recherche dans un laboratoire qui prend en charge leurs frais (candidatures à envoyer au Secrétaire-Trésorier de la CDE, Pierre BÉRARD, à l'Institut Fourier).

Pour contacter le CNFM à ce sujet veuillez vous adresser à :

Gérard Gonzalez-Sprinberg, e-mail : gonsprin@grenet.fr

Institut Fourier Université Grenoble 1 BP 74 , 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

COMISSION DES COLLOQUES ET CONGRÈS INTERNATIONAUX

Compte-rendu d'activité pour 1993

La Commission des Colloques et Congrès Internationaux est un comité d'experts qui gère une subvention versée au Comité National Françai s de Mathémaiciens par le Ministère des Relations Extérieures pour aider les mathématiciens de France à participer à des congrès internationaux. La somme correspondante (136 kF en 1992) ne peut bien sûr que représenter un appoint à l'ensemble des dépenses de missions.

Pour demander à bénéficier d'une subvention, écrire à

C.C.C.I., c/o Madame V. Gallardo
Mathématiques
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie
69364 Lyon Cédex 07

en joignant une lettre de motivation, une lettre d'invitation et une description la plus complète possible du congrès (organisateurs, conférenciers principaux, but, importance, périodicité ...).

Les critères de choix en 1993 ont été les mêmes que l'année précédente (voir la Gazette des Mathématiciens, *numéro 51, janvier 1992 page 57). La commission tient compte de la qualité et de l'aspect international du colloque. Elle accorde une priorité aux jeunes, sans aller jusqu'aux étudiants en thèse. Elle n'accorde, pour les voyages lointains, qu'un soutien très partiel. Elle n'accorde pas à la même personne une subvention deux années de suite. Si elle est plus sévère avec les habitués, elle l'est moins avec les mathématiciens isolés.*

La commission, qui se réunit une fois par trimestre, sera composée en 1994 de

M. Brion *(ENS Lyon)* **secrétaire**, P.J. Cahen *(Marseille)* , F. Campana *(Nancy)* , J.Y. Charbonnel *(Paris 7)* , M. Esteban *(Paris 9)* **trésorière**, J.M. Ghidaglia *(ENS Cachan)* , F. Ledrappier *(Paris 6)* , J.L. Loday *(Strasbourg)* , P. Maillavin *(Paris 6)* , J.P. Otal *(ENS Lyon)* , *J.C. Rochet (Toulouse).*

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS À ZÜRICH

du 03 au 11 Août 1994

Les mathématiciens français désireux de participer au Congrès de Zürich pourront solliciter une subvention auprès de la C.C.C.I.

Les demandes, qui doivent parvenir à l'adresse ci-dessus avant le 31 janvier 1994, devront comporter une lettre de motivation, un curriculum vitae, une liste de publications à jour et une ébauche de plan de financement (utiliser l'adresse électronique ccci@umpa.ens-lyon.fr de préférence). Une réponse leur sera donnée courant avril 1994.

Mais avant toute chose, il doivent s'inscrire auprès des organisateurs du Congrès à l'adresse suivante : ICM 94, International Congress of Mathematicians, ETH Zentrum, CH-8092 Zürich, Suisse.

CRÉATION D'UN ATELIER FRANCO-ROUMAIN EN GÉOMÉTRIE À L'INSTITUT FRANÇAIS DE BUCAREST

Norbert DODILLE, Directeur de l'Insitut français de Bucarest

Christian DUHAMEL, Attaché de Coopération Scientifique et Technique

Conformémént à sa tradition et à sa vocation universitaires, l'Institut Français de Bucarest organise déjà, en coopération avec l'INSERM, une recherche-formation dans le domaine médical, et, avec l'EHESS, un atelier en Sciences Sociales. L'implantation d'un second atelier en Sciences Humaines, sur le thème de l'"Histoire Orale", est prévu pour le début de l'année 1994.

Nous projetons d'ouvrir un autre atelier de Mathématiques Pures, centré sur la géométrie (ou les géométries : algébrique, différentielle, analytique, non commutative,...), mais qui pourra se spécialiser si le besoin s'en fait sentir. Son responsable roumain sera le professeur Paltin IONESCU, de la faculté de Mathématiques de l'Université de Bucarest.

Ces trois ateliers bénéficieront d'une salle de séminaires organisés en alternance et d'une bibliothèque spécialisée dans les trois disciplines.

Des professeurs français ou de jeunes mathématiciens géomètres roumains ayant soutenu leurs thèses en France seront invités à animer des séminaires sur des résultats récents avec un public de jeunes chercheurs roumains. Pour cet atelier de formation doctorale, des missions de chercheurs français seront régulièrement organisées. Ces missions dureront trois jours pleins, pour faire naître des relations durables entre le conférencier animateur et son auditoire.

Par ailleurs, un séminaire hebdomadaire sera animé par les doctorants et post-docs roumains, éventuellement en préparation de la prochaine mission. L'idéal serait d'arriver à traiter, durant chaque année académique, un thème bien délimité en organisant quelques misions.

Les frais de déplacements et de séjour pourront être pris en charge. Nous souhaitons l'appui de bibliothèques mathématiques françaises pour nous envoyer régulièrement les polycopiés, thèses, pré-publications ou copies d'article et, si possible, quelques livres sur les sujets de géométrie.

Quelques bourses pour des stages de trois mois en France seront attribuées aux doctorants roumains participant régulièrement à cet atelier dont le devenir est, nous l'espérons, de se transformer en une école doctorale franco-roumaine en géométrie.

Correspondance : M. l'Attaché de Coopération Scientifique, Ambassade de France à Bucarest (Roumanie), V. D. 128 bis rue de l'Université, 75007 Paris. Fax : (19) 401 210 09 73

Envoi d'ouvrages : Atelier de Géométrie de Bucarest c/o Mme Doïna Cioranescu, Université Pierre & Marie Curie, Analyse Numérique, tour 55, 5ème étage, 4 Place Jussieu, 75005 Paris. Fax : (1) 44 27 72 00

LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DU CANADA

Monique BOUCHARD

La Société mathématique du Canada (SMC) a vu le jour en 1945. L'objectif de ses fondateurs était de créer un organisme qui servirait de tremplin à l'épanouissement du milieu canadien des mathématiques. En anglais, la Société était connue sous le nom de Canadian Mathematical Congress. Or, comme cette appellation était souvent confondue avec celle des congrès quadriennaux, on a songé pendant longtemps à la changer. En 1979, l'organisme s'est constitué en société charitable sans but lucratif. On a alors profité de l'occasion pour modifier l'appellation anglaise, qui est devenue Canadian Mathematical Society. L'appellation française, elle, est demeurée la même.

La mission de la SMC a trois volets : de favoriser la recherche en mathématiques; d'aider à l'avancement de l'enseignement des mathématiques dans les universités, les collèges et les écoles du Canada; de stimuler et soutenir le développement des mathématiques et le perfectionnement de l'enseignement des mathématiques.

Membres

Les membres de la SMC poursuivent de nombreux objectifs. Ils ont à coeur l'avancement de la recherche ainsi que l'orientation et le perfectionnement des programmes de mathématiques au Canada. En outre, ils recherchent des idées nouvelles et innovatrices pour inspirer les jeunes et encourager les chercheurs accomplis. Ils conçoivent aussi des plans et des stratégies, et prennent des décisions pour des départements, des facultés et des entreprises.

Structure

La SMC est dirigée par un Comité exécutif de six membres élus : un président, un président sortant ou un président élu, et quatre vice-présidents représentant chacun une région désignée du Canada. La direction compte aussi un trésorier d'office ainsi qu'un directeur administratif et secrétaire. Le Comité exécutif relève du Conseil d'administration. La Société compte aussi de nombreux comités; en ce moment, ils sont au nombre de douze. En voici la liste : Olympiade mathématique du Canada, Didactique mathématique, Finances, Collecte des fonds, Politiques gouvernementales, Droits de la personne, Affaires internationales Olympiade internationale de mathématiques, Mises en candidature, Publications, Recherche, et Les femmes en mathématiques.

Activités de la Société

La SMC souligne l'apport des mathématiciens en publiant les recherches les plus récentes dans le Journal canadien de mathématiques et le Bulletin canadien de mathématiques. On compte parmi les autres publications : les Comptes rendus de conférences, une publication élaborée de concert avec la American Mathematical Society et Wiley Interscience/Série SMC, une série de livres de mathématiques avancées.

Elle facilite la diffusion de l'information et les relations entre collègues en organisant des réunions semestrielles de 3 à 4 jours tenues en juin et en décembre et des séminaires annuels de deux semaines tenus en juin ou en juillet. Elle offre aussi aux membres la possibilité d'ajouter des séances spéciales autonomes aux réunions semestrielles.

La SMC tente d'étudier des questions pédagogiques en publiant le Crux Mathematicorum, magazine international de résolution de problèmes de niveaux secondaire et de premier cycle universitaire. Elle publie aussi une sélection de problèmes et de solutions présentés à l'Olympiade mathématique du Canada. Elle inscrit des séances de formation au programme de ses réunions semestrielles pour inciter les enseignants des écoles, des collèges et des universités à se perfectionner. La SMC administre l'Olympiade *mathématique du Canada, la plus haute épreuve annuelle de mathématiques pour les élèves du secondaire. Elle choisit, forme et appuie les membres de l'équipe canadienne à l'Olympiade internationale de mathématiques, tenue annuellement. Elle finance des activités de sensibilisation aux mathématiques.*

Relations

La SMC a conclu des ententes de réciprocité avec quatorze autres sociétés mathématiques. Des ententes spéciales ont été conclues avec la American Mathematical Society et la Mathematical Association of America. La SMC offre une tribune aux mathématiciens canadiens. De concert avec le service des affiliations internationales du Conseil national de recherches, la SMC sera chargée de déterminer la composition du Comité national canadien à l'Union mathématique internationale. Partenaire du ministère canadien de l'Industrie, des Sciences et de la Technologie, la SMC prend part à différentes activités, notamment la Semaine nationale de sensibilisation aux sciences et à la technologie.

Vos privilèges de membre

Vos privilèges de membres incluent des réductions aux réunions semestrielles de la SMC, un abonnement gratuit aux Notes de la SMC (le premier médium de communication en la SMC et ses membres.), un exemplaire gratuit du Répertoire des membres et des réductions importantes sur les tarifs d'abonnement aux publications de la SMC et à d'autres périodiques.

Depuis sa création, la SMC a acquis un auditoire mondial pour ses deux publications de recherche et s'est dotée d'un programme de réunions élaboré et bien soutenu. Elle s'intéresse sans relâche aux intérêts des mathématiciens canadiens, notamment en matière de recherche, d'éducation et de perfectionnement professionnel. Plus de 10 % de nos membres participent activement aux publications, aux concours, aux réunions et aux nombreux comités chargés de différents dossiers. À l'approche de son 50e anniversaire, en 1995, la SMC contemple son passé avec fierté et se tourne vers l'avenir avec optimisme.

Pour obtenir une demande d'adhésion, communiquez avec le bureau administratif de votre société ou directement avec la Société mathématique du Canada , 577, me King Edward, salle 109, C.P. 450, succursale A, Ottawa (Ontario) Canada KIN 6N5, Tél : (613) 564-2223, Téléc : (613) 565-1539, Courrier électronique : lpalmer@acadvml.uottawa.ca

PRIX MAX PLANCK

Les lauréats du Prix Max Planck 1993 en Mathématiques et Informatique sont messieurs Joachim CUNTZ de l'Université d'Heidelberg (Allemagne), Guennadi KASPAROV de l'Université d'Aix-Marseille (France) et de l'Académie des Sciences de Chernogolovka (Russie), Klaus KIRCHGÄSSNER de l'Université de Stuttgart (Allemagne), Gérard IOOSS de l'Université de Nice (France), Stefan MÜLLER de l'Université de Bonn (Allemagne), Vladimir SVERÁK de l'Université de Prague (République Tchèque).

PRIX ÉLIE CARTAN

(25 000 F) Le Prix est décerné à Clifford TAUBES, professeur à l'Université d'Harvard, pour ses travaux sur les équations de Yang Mills et la géométrie.

PRIX LANGEVIN

En Hommage à la Mémoire des Savants Français Assassinés par les Nazis en 1940-1945 : René Gosse, Armand Lambert et Jacques Solomon.

(7 500 F) Le Prix est décerné à Yves GUIVARC'H, Directeur de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique à l'Université de Rennes I, pour ses travaux sur les marches aléatoires indépendantes sur les sous-groupes du groupe linéaire, et en particulier, pour un critère remarquable de simplicité des exposants de Liapunoff.

PRIX LEQUEUX

(5 000 F) Le Prix est décerné conjointement à Serge ALINHAC, professeur à l'Université Paris-Sud à Orsay et Guy MÉTIVIER, professeur à l'Institut de Recherches Mathématiques de Rennes, pour leurs travaux sur l'unicité du problème de Cauchy et sur les systèmes hyperboliques.

PRIX CARRIERE

(4 500 F) Le prix est décerné à François LABOURIE, chargé de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique à l'Ecole Polytechnique à Palaiseau, pour ses résltats sur la géométrie des surfaces, les groupes de transformation et la théorie ergodique géométrique.

PRIX BINOUX

(4 000 F) Le Prix est décerné à Jean DHOMBRES, directeur d'études à l'Ecole des Hautes Etudes, pour ses travaux d'histoire des Sciences et notamment pour l'ouvrage "Leçons de Mathématiques à l'Ecole Normale de l'an III : Laplace, Lagrange, Monge"..

PRIX MICHEL MONPETIT

(30 000 F) Le prix est décerné à Jean Pierre QUADRAT, Directeur de Recherche à l'Institut National de Recherche Informatique et Automatique au Chesnay, pour ses contributions à l'analyse et au contrôle des systèmes stochastiques et complexes, tant sur le plan mathématique que sur le plan physique.

PRIX BLAISE PASCAL DU GAMMI–SMAI

(10 000 F) Le Prix est décerné à Bruno STOUFFLET,chef du service Aérodynamique et Electromagnétique Théorique chez Dassault–Aviation, pour ses travaux sur les bifurcations et sur les systèmes dynamiques.

PRIX CHARLES–LOUIS DE SAULSES DE FREYCINET

(8 000 F) Le Prix est décerné à Jean Pierre KERNEVEZ, professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, pour ses travaux sur les bifurcations et sur les systèmes dynamiques.

PRIX LAZARE CARNOT

(200 000 F) Le Prix est décerné à Pierre-André RAVIART, professeur à l'Ecole Polytechnique. Les premiers travaux de Pierre André RAVIART ont porté sur l'étude de la convergence de la méthode des différences finies pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles avec des applications à la résolution effective de problèmes de neutroniques et d'hydrodynamique. Au début des années 70, il a contribué à bâtir une théorie mathématique précise de la méthode des éléments finis introduite par les ingéniers por les besoins du calcul des structurs puis à étendre son champ d'application à d'autres domaines scientifiques tels que la mécanique des fluides, la neutronique ou l'électromagnétisme. A partir des années 80, il atravaillé sur la résolution des modèles cinétiques (du type des équations de Vlasov–Maxwell) en physique des plasmas. C'est ainsi qu'il a contribué à établir les fondements mathématiques des méthodes particulaires et particules–grille (particle–in–cell) de manière, d'une part, à pouvoir traiter des géométries tridimensionnelles complexes. Ses travaux plus récents se sont orientés vers l'utilisation des méthodes asymptotiques pour construire et justifier des modèles approchés en physique des plasmas (modèles d'émission limite, modèles de Darwin, modèles paraxiaux) avec des applications à la résolution effective de problèmes se posant dans diverses applications (faisceaux de particules chargées, dispositifs hyperfréquences.

NÉCROLOGIE

Yvette AMICE, professeur de mathématiques à l'Université Denis Diderot (Paris 7), est décédée le 4 juillet 1993, à l'âge de cinquante-sept ans.

J. L. CALLOT, professeur à l'Université de Haute Alsace, est décédé fin août 1993, à l'âge de quarante-trois ans.

Claude KIPNIS, professeur de mathématiques à l'Université de Paris-Dauphine (Paris 9), est décédé le 13 septembre 1993, à l'âge de quarante-quatre ans.

Benedict MAILLIARD, maître de conférences à l'Université Denis Diderot (Paris 7), est décédé le 27 juin 1993, à l'âge de quarante-deux ans.

Les mathématiciens de l'Université de Nice font part du décès brutal, survenu le 18 novembre 1993, de leur invitée Nina MASLOVA, professeur à Saint-Pétersbourg.

ASTÉRISQUE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.
Revue éditée par la Société Mathématique de France.

ASTÉRISQUE 214* . — LE POTIER (J.), *Systèmes cohérents et structures de niveau.*
143 pages, prix public (TTC) : 125 FF, prix membres SMF : 90 FF

Un système cohérent (Γ, F) de dimension d sur une variété algébrique projective et lisse X de dimension n est la donnée d'un faisceau algébrique cohérent F sur X dont le support est de dimension d et d'un sous-espace vectoriel Γ de l'espace vectoriel des sections $H^o(F)$. Dans cet article, on construit, en s'inspirant du travail de C. Simpson, une variété projective $\mathbf{Syst}_X(P)$ qui est un espace de modules grossier pour des systèmes cohérents semi-stables (Γ, F) dont on a fixé le polynôme de Hilbert $P_f = P$. On donne deux illustrations de cette construction : la première conduit à une description de l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathrm{P}2}$ (2;0,4) des classes de faisceaux semi-stables de rang 2, et de classes de Chern (0,4) sur le plan projectif et permet de comprendre comment étendre à cette variété projective la correspondance birationnelle bien connue avec la variété des systèmes linéaires de dimension 1 et de degré 5 sur les coniques lisses du plan. La seconde application conduit à l'étude des trois composantes irréductibles, découvertes par Trautman, de l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2, de classes de Chern (0, 2, 0) sur l'espace projectif. Cette étude est liée à celle de certains espaces de modules de faisceaux semi-stables de dimension 2 sur l'espace projectif, portés par des quadriques éventuellement singulières.

ABONNEMENT 1993

Prix public Europe : 1215 FF Hors Europe : 1515 FF
Prix Membres Europe : 730 FF Hors Europe : 1030 FF

DISTRIBUTION

Membres de la S.M.F. : *Maison de la S.M.F., Case 916, Luminy, 13288 Marseille Cedex 09*

France et Etranger (excepté les Etats-Unis, le Canada et le Mexique) :
Maison de la S.M.F., Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 09
ou *Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05*

Etats-Unis, Canada, Mexique :
American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940, U.S.A.

LES DEGRÉS DES NOMBRES ALGÉBRIQUES $\cos(2\pi/n)$ ET $\sin(2\pi/n)$ ET LA TRANSCENDANCE DE π

François GRAMAIN

Université Jean Monnet, Équipe de Théorie des Nombres, Saint-Étienne

La lecture des vieux dictionnaires — et aussi des moins vieux — est souvent instructive et source de réflexion. Je livre à votre curiosité l'article "CERCLE" du *Dictionnaire de la Conversation et de la Lecture* (Paris, Firmin Didot Frères, Fils et Cie, Seconde Édition 1862) écrit par Ed. Merlieux :

CERCLE (en latin *circus, circulus*, du grec *κιρκος*). C'est une figure plane, terminée par une circonférence, ligne courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur nommé *centre*. Les droites égales qui du centre aboutissent au contour du cercle en sont les *rayons*. Toute droite terminée de part et d'autre à la circonférence reçoit le nom de *corde*. Les cordes passant par le centre sont des *diamètres*, et comme un diamètre se compose de deux rayons, tous les diamètres sont égaux.

De toutes les surfaces planes terminées par une ligne courbe, le cercle est la seule dont s'occupe la géométrie élémentaire. Pour mesurer cette figure, elle emploie diverses méthodes. Par exemple, on peut regarder le cercle comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés infiniment petits; et comme un polygone régulier a pour mesure son périmètre multiplié par la moitié de son apothème, il s'ensuit que la surface du cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié de son rayon; en d'autres termes, cette surface est la même que celle d'un triangle qui aurait pour base une droite égale à la circonférence et pour hauteur le rayon. Ce raisonnement a l'avantage de faire retrouver facilement l'expression générale de la mesure du cercle; mais il n'offre pas à l'esprit cette rigoureuse exactitude que l'on aime à rencontrer dans les spéculations mathématiques. Par la méthode des limites, il en est autrement; le cercle étant toujours compris entre deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés, on démontre qu'en doublant constamment le nombre de ces côtés, la différence entre les polygones peut être rendue plus petite que toute quantité donnée; d'où l'on conclut que l'aire du cercle est la limite vers laquelle tendent les aires des polygones. On arrive ainsi à la même conclusion que tout à l'heure. Donc, si r désigne le rayon d'un cercle, la circonférence étant représentée par $2\pi r$, il faut multiplier cette expression par $r/2$, et le résultat πr^2 est la mesure cherchée; c'est-à-dire que la surface du cercle est égale au carré de son rayon multiplié par le nombre π qui représente le rapport de la circonférence au diamètre ($\pi = 3,1415926\ldots$).

Le problème de la quadrature du cercle, qui a été l'objet de tant de recherches infructueuses au moyen âge et dans les temps modernes, a acquis une certaine célébrité. Ce problème peut s'énoncer ainsi : Trouver un carré ayant même surface qu'un cercle donné. Appelant x le côté du carré cherché, on devra donc avoir $x^2 = \pi r^2$, d'où $x = r\sqrt{\pi}$; et π étant un nombre incommensurable, ainsi que Lambert l'a démontré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1761, la valeur du côté x ne pourra être calculée qu'approximativement. Mais on sait, par exemple, que la racine carrée de 2, quoique incommensurable, est représentée exactement par la diagonale du carré qui a pour côté l'unité. Dès lors on pourrait supposer que le problème de la quadrature du cercle est susceptible d'être résolu géométriquement, c'est-à-dire avec l'unique secours de la règle et du compas. Il n'en est pas ainsi, et toutes les solutions trouvées du problème font usage de courbes que l'on ne peut construire que mécaniquement : telle est la quadratrice de Dinostrate.

Si l'on parvenait à rectifier la circonférence, c'est-à-dire à construire géométriquement une droite qui lui fût égale, le problème serait résolu, puisqu'on aurait transformé le cercle en un triangle, figure que l'on peut à son tour transformer en un carré équivalent. Or, outre que π est incommensurable, Legendre a prouvé qu'il en est de même de son carré. Seulement il n'a pas démontré que π ne pût pas être racine d'une équation complète du second degré, et là est la question. Cependant tout porte à croire que l'on ne doit espérer aucune solution donnée par des intersections de droites et de cercles : ainsi, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1772, Vandermonde a donné une expression élégante du nombre π, qui nous apprend que ce nombre est une quantité irrationnelle d'un ordre supérieur aux irrationnelles élémentaires; de plus, **on sait que lorsque le nombre des côtés d'un polygone régulier augmente, le degré de l'équation qui donne le rayon en fonction du côté augmente aussi** [souligné par moi]; enfin M. Terquem a démontré, dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, que l'hexagone est le seul polygone régulier dont le côté soit commensurable avec le rayon; ce qui ne permet pas de supposer que π puisse être racine d'une équation du second degré. Tout cela n'empêche pas chaque année de voir éclore plusieurs prétendues solutions du problème qui vont grossissant toujours le nombre de celles dont Montucla a conservé la mémoire dans son intéressante *Histoire* *des recherches sur la quadrature du cercle.* Aussi l'Académie a-t-elle décidé depuis 1775 qu'elle passerait à l'ordre du jour sur toutes les communications qui lui seraient adressées, tant relativement à cette question qu'à celle du mouvement perpétuel.

Charles-Quint avait promis cent mille écus à celui qui carrerait le cercle ; les États de Hollande avaient mis aussi cette question au concours avec une forte récompense pour celui qui en donnerait la solution ; plusieurs académies avaient suivi cet exemple. Mais depuis les travaux que nous venons de citer, le problème peut être considéré comme mathématiquement résolu, puisque le nombre π a été calculé par des méthodes sûres, jusqu'à 200 décimales (*voyez* CIRCONFÉRENCE), et que, si besoin était, on l'obtiendrait avec une approximation plus grande encore : on peut donc à très-peu de chose près *mesurer* un cercle quelconque. Quant à la solution géométrique, elle serait sans utilité.

"L'erreur de ceux qui se livrent à la recherche de la quadrature du cercle, disent les auteurs du *Dictionnaire des Sciences Mathématiques*, imprimé sous le nom de Montferrier, c'est de supposer qu'il doit nécessairement exister une ligne droite égale en longueur à toute ligne courbe donnée, ce qui n'est pas plus vrai que de supposer qu'il existe nécessairement un nombre entier ou fractionnaire égal à une racine de tout nombre donné." Mais en vérité l'auteur perd ici sa géométrie en croyant faire de la métaphysique ; car une ligne droite croissant d'une manière continue, passe nécessairement par tous les états de grandeur depuis zéro jusqu'à l'infini et se trouve toujours être à un certain moment égale à une longueur donnée. Il existe donc certainement une ligne droite égale à une ligne courbe quelconque ; nos moyens pratiques ne nous permettent de la trouver qu'approximativement ; voilà tout ce qu'il fallait dire.

E. MERLIEUX.

Cet article appellerait de nombreux commentaires, mais je veux seulement parler de l'argument heuristique (que j'ai "engraissé" dans le texte) donné par E. Merlieux pour la transcendance de π, vingt ans avant que Ferdinand Lindemann n'en donne la première preuve.

Plutôt que de calculer "le rayon en fonction du côté" , étudions le périmètre du polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans le cercle de rayon 1 (ce qui ne change rien pour les degrés). On peut traduire l'affirmation d'E. Merlieux en langage moderne en disant que le degré du nombre algébrique $2n\sin(\pi/n)$, *i.e.* le degré minimal d'une équation polynômiale non triviale à coefficients entiers dont il est solution, est une fonction de n croissante (on verra que c'est faux) et tendant vers l'infini (c'est juste). Cela incite à croire à la transcendance (un nombre est dit transcendant s'il n'est pas algébrique, c'est-à-dire s'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers rationnels) de sa limite 2π. Quoi que l'on pense de sa validité ($2^{1/n}$ est de degré n et sa limite est on ne peut plus algébrique), cette argumentation me paraît digne d'intérêt et m'a décidé à calculer les degrés des nombres algébriques $\cos(2\pi/n)$ et $\sin(2\pi/n)$, car je n'ai trouvé aucune référence bibliographique pour ces calculs. À la suite de leur publication (assez confidentielle) dans le Séminaire d'Arithmétique de Saint-Étienne, Jean-Paul Allouche m'a conseillé de regarder le livre *Irrational Numbers* d'Ivan Niven (Carus monograph n° 11, Math. Assn. 1956). J'y ai retrouvé le résultat ci-dessous (Theorem 3.9., page 37) dont la paternité est attribuée à Derrick H. Lehmer (*A Note on Trigonometric Algebraic Numbers*, Amer. Math. Monthly 40 (1933), 165–166) :

THÉORÈME.— *Soient $n \geq 3$ un entier naturel et $\zeta_n = a_n + i\,b_n$ (a_n et b_n réels) une racine primitive n-ième de l'unité. Les corps $\mathrm{Q}(a_n)$ et $\mathrm{Q}(b_n)$ sont indépendants du choix de ζ_n et leurs degrés sont*

$$[\mathbf{Q}(a_n) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\cos(2\pi/n)) : \mathbf{Q}] = \varphi(n)/2$$

et, pour $n \neq 4$,

$$[\mathbf{Q}(b_n) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\sin(2\pi/n)) : \mathbf{Q}] = \begin{cases} \varphi(n) & si \quad n \not\equiv 0 \pmod 4 \\ \varphi(n)/2 & si \quad n \equiv 0 \pmod 8 \\ \varphi(n)/4 & si \quad n \equiv 4 \pmod 8 \end{cases}$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

Expliquons un peu les notations : Si K est un sous-corps de L, le degré [L : K] de L sur K est la dimension de L comme espace vectoriel sur K. Si $a \in$ L est algébrique sur K, on note K(a) le plus petit sous-corps de L contenant K et a, et le degré [K(a) : K] est le degré minimal d'un polynôme non nul P à coefficients dans K vérifiant P(a) = 0. L'indicatrice d'Euler est définie par

$$\varphi(n) = \mathrm{card}\{k \in \mathbf{Z}\,;\, 1 \leq k \leq n \text{ et } (n,k) = 1\},$$

où l'on a noté (n,k) le pgcd de n et k. Une racine primitive n-ième de l'unité est un générateur quelconque du groupe des racines n-ièmes de 1. Les racines primitives n-ièmes de l'unité sont clairement les exp $(2ik\pi/n)$ pour k entier premier à n, elles sont les racines du n-ième polynôme cyclotomique Φ_n et leur degré est $\varphi(n)$. Toutes ces notions sont très bien expliquées dans le beau livre *Théorie des corps, la règle et le compas* de Jean-Claude Carrega (Hermann, Paris 1981 ; nouvelle édition, enrichie d'exercices en 1989, publicité non payée. Notons en passant que, malgré la graphie utilisée par son éditeur, l'intéressé pense qu'il faut peut-être un accent aigu sur l'e de Carréga), qui appelle φ l'indicateur d'Euler (pas de remarque sexiste S.V.P. !). Les propriétés de l'indicatrice d'Euler que nous utiliserons sont :

$$\varphi(4m) = \varphi(4)\varphi(m) = 2\varphi(m) \quad \text{si } m \text{ est impair,}$$

qui résulte de la multiplicativité de φ, et

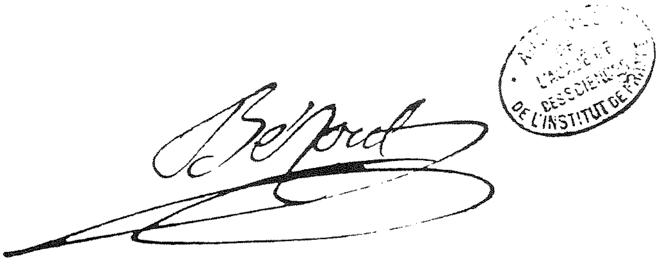
$$\varphi(2m) = \begin{cases} \varphi(m) & \text{pour } m \text{ impair} \\ 2\varphi(m) & \text{pour } m \text{ pair} \end{cases}$$

qui vient, par exemple, de la formule $\varphi(\prod_i p_i^{\alpha_i}) = \prod_i p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$.

Il résulte du Théorème que le périmètre $2n\sin(\pi/n)$ du polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans le cercle de rayon 1 est un nombre algébrique de degré $\varphi(n)$ si n est impair ou divisible par 4, et $\varphi(n)/2$ si $n \equiv 2 \pmod 4$. La formule donnant la valeur de $\varphi(n)$ montre que ce degré n'est pas une fonction croissante de n. Mais ce degré tend vers l'infini avec n car, pour tout $\delta > 0$, $\varphi(n)n^{-1+\delta}$ tend vers l'infini avec n (voir G. H. Hardy et E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, 1971, Theorem 327). En particulier, pour $n \geq 2$, le périmètre du polygone régulier à $2n$ côtés (resp. à 3.2^n côtés, utilisé par Archimède pour le calcul de π) est de degré $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$ (resp. $\varphi(3.2^n) = 2^n$).

Si $\zeta_n = a_n + i\,b_n$ est une racine primitive n-ième de l'unité, on a $a_n = \cos(2k\pi/n)$ et $b_n = \sin(2k\pi/n)$, où $k \in \mathbf{Z}$ et $(k,n) = 1$. Les formules classiques de trigonométrie montrent que $\cos k\theta \in \mathbf{Z}[\cos\theta]$, c'est-à-dire est un polynôme à coefficients entiers en $\cos\theta$. Si $(k,n) = 1$, le théorème de Bachet-Bézout (il faut bien un accent aigu sur l' e d'Étienne Bézout (1730-1783), comme en témoignent l'index biographique de l'Académie des sciences et la signature de Bézout que m'a aimablement transmise Madame Demeulenaere-Douyère, Conservateur des Archives de l'Académie des sciences — je suis heureux de la remercier ici) prouve l'existence de a et b dans $\mathbf{Z}$ tels que $a\,k + b\,n = 1$, de sorte que l'on a $2\pi/n = 2ak\pi/n + 2b\pi$ et $\cos(2\pi/n) = \cos(2ak\pi/n)$ est donc dans $\mathbf{Z}[\cos(2k\pi/n)]$. Il en résulte que, pour tout choix de la racine primitive ζ_n, on a $\mathbf{Q}(a_n) = \mathbf{Q}(\cos(2\pi/n))$. Le cas du sinus est moins clair puisque $\sin k\theta$ n'est pas un polynôme en $\sin\theta$ si k est pair. Nous aurons donc besoin d'arguments un peu moins simples pour obtenir la preuve du Théorème.

Démontrons maintenant la première partie du Théorème. Soit $\zeta_n = a_n + i\,b_n$, avec a_n et b_n réels, une racine primitive n-ième de l'unité. Le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ est indépendant du choix de ζ_n. On a $2\,a_n = \zeta_n + \zeta_n^{-1}$ donc $\mathbf{Q}(a_n)$ est contenu dans $\mathbf{Q}(\zeta_n)$. Mais a_n est réel et ζ_n ne l'est pas, donc $[\mathbf{Q}(\zeta_n) : \mathbf{Q}(a_n)] \geq 2$. D'autre part $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ est contenu dans $\mathbf{Q}(a_n, i\,b_n)$ et $|\zeta_n| = 1$ peut s'écrire $(i\,b_n)^2 = a_n^2 - 1$; par suite on a $[\mathbf{Q}(\zeta_n) : \mathbf{Q}(a_n)] \leq [\mathbf{Q}(a_n, i\,b_n) : \mathbf{Q}(a_n)] \leq 2$. Il en résulte que l'on a $\mathbf{Q}(\zeta_n) = \mathbf{Q}(a_n, i\,b_n)$, $[\mathbf{Q}(\zeta_n) : \mathbf{Q}(a_n)] = 2$ et $[\mathbf{Q}(a_n) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\zeta_n) : \mathbf{Q}]/2 = \varphi(n)/2$. De plus, comme $\mathbf{Q}(a_n)$ est contenu dans $\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}(\zeta_n)$ qui est différent de $\mathbf{Q}(\zeta_n)$, $[\mathbf{Q}(\zeta_n) : \mathbf{Q}(a_n)] = 2$ montre que $\mathbf{Q}(a_n) = \mathbf{R} \cap \mathbf{Q}(\zeta_n)$, d'où il résulte que $\mathbf{Q}(a_n)$ est indépendant du choix de ζ_n.



La signature d'Étienne Bézout en 1779
(Archives de l'Académie des sciences, Paris)

Le procédé de Lehmer est un peu plus explicite : il montre que $2a_n$ est un entier algébrique de degré $\varphi(n)/2$ en exhibant son polynôme minimal qui se déduit facilement du n-ième polynôme cyclotomique Φ_n. En effet, l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité étant stable par passage à l'inverse, le polynôme cyclotomique est réciproque, donc $X^{\varphi(n)}\Phi_n(X^{-1}) = \Phi_n(X)$. Si $n \geq 3$, alors $\varphi(n)$ est pair et il en résulte que $X^{-\varphi(n)/2}\Phi_n(X) = F_n(X + X^{-1})$, où F_n est un polynôme unitaire (monic) à coefficients entiers. Il est clair que $2a_n$ est racine de F_n et que F_n est irréductible (comme Φ_n). C'est donc que F_n est le polynôme minimal de $2a_n$.

Étudions alors b_n : on a $\sin(2k\pi/n) = \cos(\pi/2 - 2k\pi/n) = \cos\frac{(n-4k)\pi}{2n}$, donc b_n est la partie réelle d'une racine de l'unité et nous allons pouvoir calculer son degré en utilisant ce qui précède. De $2n - 2(n-4k) = 8k$, on déduit que $(n-4k, 2n)$ divise $8k$; mais n et k sont premiers entre eux, donc $(n-4k, 2n)$ divise 8. Différents cas apparaissent suivant le reste de n modulo 8 :

1) Si $n = 4q \pm 1$, avec $q \in \mathbf{N}$ (*i.e.* si n est impair), alors $n - 4k$ est impair et l'on a $b_n = \cos \frac{(n-4k)\pi}{2n} = \text{Ré}(\zeta_{4n})$, où ζ_{4n} est une racine primitive $(4n)$-ième de l'unité. Ainsi $\mathbf{Q}(b_n) = \mathbf{Q}(a_{4n})$ est indépendant du choix de ζ_n et le degré de b_n est égal à $\varphi(4n)/2 = \varphi(4)\varphi(n)/2 = \varphi(n)$, car n est impair.

2) Si $n = 4q + 2$, alors $\frac{(n-4k)\pi}{2n} = \frac{2(2(q-k)+1)\pi}{2n}$ et $2(q-k)+1$ est impair, donc $b_n = \text{Ré}(\zeta_{2n})$. Comme ci-dessus $\mathbf{Q}(b_n)$ est indépendant du choix de ζ_n et son degré est $\varphi(2n)/2 = \varphi(n)$, car n est pair.

3) Si $n = 8q$, alors on a $\frac{(n-4k)\pi}{2n} = \frac{2(2q-k)\pi}{n}$ et $(2q-k, n) = 1$, car $2q$ divise n et $(k, n) = 1$. Alors $b_n = \text{Ré}(\xi_n)$ où ξ_n est une racine primitive n-ième de l'unité et le corps $\mathbf{Q}(b_n)$, indépendant du choix de ζ_n, a pour degré $\varphi(n)/2$.

4) Si $n = 8q + 4$, alors k est impair car n est pair, on a $(q-(k-1)/2, 2q+1) = 1$ car $2q+1$ est impair, et $\frac{(n-4k)\pi}{2n} = \frac{(q-(k-1)/2)\pi}{2q+1}$.

Si $q - (k-1)/2$ est pair, on a $b_n = \text{Ré}(\zeta_{2q+1}) = a_{n/4}$ et son degré est donc égal à $\varphi(2q+1)/2 = \varphi(n/4)/2 = \varphi(n)/4$, car $n/4$ est impair.

Si $q - (k-1)/2$ est impair, alors $b_n = \text{Ré}(\zeta_{4q+2}) = a_{n/2}$ et son degré est donc égal à $\varphi(4q+2)/2 = \varphi(n/2)/2 = \varphi(n)/4$, car $n/2$ est pair.

Remarquons d'abord, ce que je n'avais pas fait dans mon exposé du Séminaire de Saint-Étienne, que ces arguments ne s'appliquent pas si $q = 0$, c'est-à-dire si $n = 4$, puisque la première partie du Théorème ne donne le degré de $\text{Ré}(\zeta_m)$ que pour $m \geq 3$. Notons ensuite que les deux cas ci-dessus peuvent se produire pour un même $n \geq 12$ donné, suivant les valeurs de k. Mais on a $a_{n/2} = \cos(4\pi/n)$ et $a_{n/4} = \cos(8\pi/n) = 2\cos^2(4\pi/n) - 1$ est dans $\mathbf{Q}(a_{n/2})$; comme $a_{n/2}$ et $a_{n/4}$ ont même degré $\varphi(n)/4$, les corps $\mathbf{Q}(a_{n/2})$ et $\mathbf{Q}(a_{n/4})$ sont les mêmes, et $\mathbf{Q}(b_n)$ est indépendant de k, puisqu'il leur est égal. Cela achève la preuve du Théorème.

Il est amusant (et réconfortant) de constater que, dans son article, D. H. Lehmer, dont la rédaction est extrêmement concise, oublie complétement de traiter à part le cas où n est congru à 4 modulo 8 et donne donc, dans ce cas, un degré deux fois trop gros pour b_n. Lehmer indique que son papier est un essai de réponse à une question de E. T. Bell : trouver tous les angles commensurables à 2π dont le sinus (ou le cosinus) est un nombre algébrique de degré donné. Comme on ne sait pas inverser l'indicatrice d'Euler, on ne peut pas donner de réponse satisfaisante, mais Lehmer donne un tableau pour les degrés compris entre 1 et 7. Il est clair que son tableau ne peut qu'être faux pour les sinus; de plus, il y a une faute de frappe dans celui des cosinus. Le lecteur vérifiera sans peine (ou plutôt sans difficulté) la véracité du tableau suivant.

d	n ; $[\mathbf{Q}(\sin(2\pi/n)) : \mathbf{Q}] = d$	n ; $[\mathbf{Q}(\cos(2\pi/n)) : \mathbf{Q}] = d$
1	1, 2, 4, 12	1, 2, 3, 4, 6
2	3, 6, 8, 20	5, 8, 10, 12
3	28, 36	7, 9, 14, 18
4	5, 10, 16, 24, 60	15, 16, 20, 24, 30
5	44	11, 22
6	7, 9, 14, 18, 52, 84	13, 21, 26, 28, 36, 42
7	aucun	aucun

On peut aussi interpréter géométriquement les calculs précédents. Pour cela, notons $\mathbf{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité et $\mathbf{PU}_n$ l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité. En notant s la symétrie par rapport à la première bissectrice des axes, qui agit sur le cercle unité par $e^{i\theta} \mapsto e^{i(\pi/2-\theta)}$, nous avons montré que l'image par s d'une racine primitive n-ième de l'unité était une racine primitive dont nous avons calculé l'ordre m. Comme s échange sinus et cosinus, nous avons déduit le degré de b_n de celui de a_m. Nous allons donner, cas par cas, une description plus précise de l'action de s sur $\mathbf{U}_n$ et $\mathbf{PU}_n$. Nous aurons aussi besoin de la symétrie t par rapport à Oy, qui agit par $\theta \mapsto \pi - \theta$, et de la symétrie u par rapport à Ox, qui agit par $\theta \mapsto -\theta$. Nous utiliserons enfin les deux faits immédiats suivants : si σ est une bijection du cercle unité $\mathbf{T}$, et A une partie finie de $\mathbf{T}$ stable par σ (*i.e.* telle que $\sigma(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$) alors $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$; si, de plus, τ est une bijection de $\mathbf{T}$ et B une partie finie de $\mathbf{T}$ telle que $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $\tau(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$, alors A est stable par la transmuée $\sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma$. Reprenons maintenant les cas étudiés plus haut :

3) Si $n = 8q$, il est clair que $\mathbf{U}_n$ est stable par s, donc que $s(\mathbf{U}_n) = \mathbf{U}_n$; le calcul ci-dessus montre qu'il en est de même de $\mathbf{PU}_n$, donc que $s(\mathbf{PU}_n) = \mathbf{PU}_n$.

1) Si n est impair, on vérifie que $s(\mathbf{U}_n) \subset \mathbf{U}_{4n}$ (c'est le cas pour toute valeur de n, mais pour n impair l'inclusion est stricte) et on

peut préciser (la vérification est facile) cette inclusion en disant que $\mathbf{U}_{4n}$ est la réunion disjointe $\mathbf{U}_{4n} = \mathbf{U}_{2n} \cup s(\mathbf{U}_{2n})$, où $\mathbf{U}_{2n}$ est la réunion disjointe $\mathbf{U}_{2n} = \mathbf{U}_n \cup t(\mathbf{U}_n)$. Le calcul fait plus haut montre que $s(\mathbf{PU}_n) \subset \mathbf{PU}_{4n}$. L'inclusion est stricte pour des raisons de cardinalité, mais on peut aussi constater que $\mathbf{PU}_{4n}$ est stable par u (comme tous les $\mathbf{PU}_n$) mais que $\mathbf{PU}_n$ ne l'est pas par $s^{-1} \circ u \circ s = t$; alors $\mathbf{PU}_{4n}$ est la réunion disjointe de $s(\mathbf{PU}_n)$ et $(u \circ s)(\mathbf{PU}_n)$.

2) Si $n = 4q + 2$, on voit de même, en utilisant le cas 1), que $s(\mathbf{U}_n) \subset \mathbf{U}_{2n}$, que $\mathbf{U}_{2n}$ est la réunion disjointe $\mathbf{U}_{2n} = \mathbf{U}_n \cup s(\mathbf{U}_n)$ qui est stable par s et que $s(\mathbf{PU}_n) = \mathbf{PU}_{2n}$.

4) Si $n = 8q+4$, alors $s(\mathbf{U}_n) = \mathbf{U}_n$, mais $\mathbf{PU}_n$ n'est pas stable par s : on vérifie que $s(\mathbf{PU}_n)$ est la réunion disjointe $s(\mathbf{PU}_n) = \mathbf{PU}_{n/4} \cup \mathbf{PU}_{n/2}$.

ASTÉRISQUE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.
Revue éditée par la Société Mathématique de France.

ASTÉRISQUE 215* . — DUFLO (M.), KUMAR (S.), VERGNE (M.), *Sur la cohomologie équivariante des variétés différentiables.*
205 pages, prix public (TTC) : 170 FF, prix membres SMF : 120 FF

Soit G un groupe de Lie réel opérant dans une variété M. Le complexe de de Rham équivariant et sa cohomologie $H_G^*(M)$ ont été introduits par H. Cartan. Si l'action de G sur M est libre, $H_G^*(M)$ est la cohomologie $H^*(G\backslash M)$ de l'espace des orbites et si M est le point $\bullet$, $H_G^*(\bullet)$ est l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur l'algèbre de Lie g de G. A chaque fibré G-équivariant sur M muni d'une connection G-invariante sont associées des classes de Chern équivariantes. Il s'est avéré indispensable de considérer des objets cohomologiques plus généraux tels que l'algèbre $H_G^\infty(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients C^∞ qui est une algèbre sur $H_G^\infty(\bullet) = C^\infty(g)_G$, et l'espace $H_G^{-\infty}(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients $C^{-\infty}$ qui est le module pour $H_G^\infty(M)$, et pour laquelle $H_G^{-\infty}(\bullet)$ est l'espace des fonctions généralisées invariantes $C^{-\infty}(g)_G$.

Le premier des deux articles réunis ici, *Cohomologie équivariante et descente*, par M. Duflo et M. Vergne, étudie une généralisation, notée $\mathcal{K}_G(M)$, de la cohomologie $H_G^\infty(M)$. C'est une algèbre sur $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)_G$. On peut la considérer comme une analogue globale de $H_G^\infty(M)$ et comme une version de Rham de la K-théorie équivariante de M. La construction de $\mathcal{K}_G(M)$ est basée sur la considération des points fixes dans M des éléments de G contenus dans un sous-groupe compact. Tout au moins lorsque G lui-même est compact, et sous certaines conditions d'orientations, "l'intégrale" sur M d'un élément de $\mathcal{K}_G(M)$ est une fonction G-invariante sur G.

Le deuxième article, *Equivariant cohomology with generalized coefficients*, par S. Kumar et M. Vergne, entreprend une étude systématique des espaces $H_G^{-\infty}(M)$. On découvre des classes remarquables qui n'ont pas d'équivalent dans la théorie C^∞. En particulier lorsque l'action de G sur M est libre, l'intégrale sur M d'un élément de $H_G^{-\infty}(M)$ est une fonction généralisée sur g de support 0. Lorsque G est compact, une suite spectrale permet de comparer $H_G^{-\infty}(M)$ et la cohomologie équivariante $H_G^*(M)$.

Les deux articles, bien qu'ayant des motivations communes, peuvent être lus indépendamment.

ABONNEMENT 1993

Prix public Europe : 1215 FF Hors Europe : 1515 FF
Prix Membres Europe : 730 FF Hors Europe : 1030 FF

DISTRIBUTION

Membres de la S.M.F. : *Maison de la S.M.F., Case 916, Luminy, 13288 Marseille Cedex 09*

France et Etranger (excepté les Etats-Unis, le Canada et le Mexique) :
Maison de la S.M.F., Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 09
ou *Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05*

Etats-Unis, Canada, Mexique :
American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940, U.S.A.

LIVRES

LIVRES RECUS

Cours de Mathématiques spéciales

B. Gostiaux

PUF.

Ce cours en trois tomes (tome 1 : Algèbre; tome 2 : Topologie, analyse réelle; tome 3 : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel) a été rédigé à partir des notes du cours de mathématiques spéciales fait par l'auteur au lycée Saint Louis. Un cours vivant, émaillé de réflexions et commentaires intéressants, un cours très complet aussi dont les ambitions dépassent largement celles de l'enseignement actuel de DEUG.

COMPTES RENDUS

Lectures on Arakelov Geometry

C. Soulé, D. Abramovich, J. F. Burnol, J. Kramer

Cambridge studies in advanced mathematics 33. 1992.

Dans l'étude des équations diophantiennes, S. Arakelov a ouvert la voie en 1974 à une nouvelle géométrie, combinant la théorie des schémas et la géométrie hermitienne. Considérant une courbe X définie par des équations à coefficients entiers comme une surface arithmétique "complètée à l'infini" par la surface de Riemann de $X(\mathbb{C})$, il construit, à l'aide de la théorie du potentiel sur $X(\mathbb{C})$, une théorie globale de l'intersection aux propriétés analogues à celles de l'intersection sur une surface projective lisse; les hauteurs (complexité arithmétique) des points algébriques de X y apparaissent comme intersection. Cette théorie culmine avec le théorème "de Riemann - Roch" sur les surfaces arithmétiques dû à G. Faltings (Ann. of Maths 1984).

Pour un exposé de ces résultats, on peut consulter l'article de L. Szpiro (Contemp. Math 67) ou le petit livre de S. Lang "Introduction to Arakelov theory" (Springer, 1988).

Peu après la parution de ce dernier, H. Gillet et C. Soulé complétaient le vaste programme pluridisciplinaire consistant à étendre cette théorie en dimension quelconque (bien entendu, d'autres mathématiciens, et aussi des physiciens, ont contribué à cette profonde généralisation, notamment D. Quillen, P. Deligne et J. M. Bismut). P. Vojta l'a utilisé pour donner une nouvelle preuve de la conjecture de Mordell (Ann. of Maths 1991).

Nous introduire pas à pas dans le vif de ce sujet passionnant, neuf et déjà mûr, voilà l'objet de "Lectures on Arakelov Geometry", basé sur un cours de Soulé (1989), rédigé et développé en collaboration avec D. Abramovich, J. F. Burnol et J. Kramer.

Avant d'entrer dans la description technique du contenu de l'ouvrage, distinguons sommairement ses deux moitiés. La première construit, d'après Gillet - Soulé, une théorie de l'intersection arithmétique sur une variété arithmétique X de dimension quelconque (i.e un schéma régulier, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$) : anneau de Chow $\widehat{CH}(X)_{\mathbb{Q}}$, classes caractéristiques arithmétiques d'un fibré vectoriel muni d'une métrique hermitienne. Cette partie —dont les moyens analytiques restent assez élémentaires, mais dont les démonstrations n'évitent pas une bonne dose de K-théorie— suffira probablement à l'usage de maint géomètre arithméticien; mais ce serait se priver de bien belle mathématique que de ne pas entreprendre, après avoir repris haleine, l'ascension de la seconde moitié qui, mettant en oeuvre (avec la collaboration de Bismut) des outils analytiques sophistiqués, culmine en *un théorème de Riemann-Roch arithmétique.*

Le premier chapitre expose avec beaucoup de clarté la théorie de l'intersection sur un schéma régulier X *de dimension finie. Un accouplement d'intersection entre groupes de Chow rationnels à supports*

$$\widehat{CH}^p_Y(X)_{\mathbf{Q}} \otimes \widehat{CH}^q_Z(X)_{\mathbf{Q}} \to \widehat{CH}^{p+q}_{Y\cap Z}(X)_{\mathbf{Q}} \qquad (1)$$

y est construit, ayant les propriétés usuelles. Comme on ne dispose pas du lemme de déplacement de Chow dans ce contexte général, on introduit pour ce faire les K*-groupes locaux* $K_0^Y(X)$ *engendrés par les complexes finis de fibrés vectoriels acycliques en dehors de* Y*, et l'accouplement*

$$K_0^Y(X) \otimes K_0^Z(X) \to K_0^{Y\cap Z}(X) \qquad (2)$$

donné par le produit tensoriel, puis on prouve que la filtration F *par la codimension du support vérifie*

$$F^p K_0^Y(X)_{\mathbf{Q}}.F^p K_0^Z(X)_{\mathbf{Q}} \subset F^{p+q} K_0^{Y\cap Z}(X)_{\mathbf{Q}} \qquad (3)$$

et enfin que

$$\widehat{CH}^p_Y(X)_{\mathbf{Q}} \cong Gr^p_F K_0^Y(X)_{\mathbf{Q}} \qquad (4)$$

[(3) provient de ce qu'il existe une structure de λ*-anneau sur* $\oplus_Y K_0^Y(X)$ *telle que les opérations d'Adams scindent* F^p*, tandis que (4) s'obtient à l'aide de la suite spectrale de localisation de Quillen].*

Le second chapitre introduit la notion de courant de Green pour un cycle algébrique Z *sur une variété projective lisse X : courant* g *tel que* $dd^c g + \delta_Z$ *soit lisse (*δ *désigne le courant d'intégration). Le prototype en est* $-log|f|^2$ *pour* Z *le diviseur d'une fonction rationnelle* f *(Poincaré - Lelong).*

Supposons (par additivité) que Z *soit un sous-schéma irréductible, et soit* $q : \tilde{Z} \to X$ *le morphisme dans* X *d'une désingularisation de* Z*. Alors la formule*

$$g_{Y.Z} = (dd^c g_Y + \delta_Y) g_Z + q_* q^* g_Y \qquad (5)$$

définit un courant de Green pour $Y.Z$*, et par là un produit (commutatif associatif) pour les courants de Green.*

Dans le chapitre III, un cycle arithmétique de degré p *sur une variété arithmétique* X *est défini comme un couple* (Z, g)*, où* Z *est un cycle algébrique de codimension* p *sur* X*, et* g *est un courant de Green réel de type* $(p-1, p-1)$ *sur* $X_{\mathbf{C}}$ *pour* $Z_{\mathbf{C}}$*.*

Le groupe de Chow arithmétique $\widehat{CH}^p(X)$ *est le groupe abélien des cycles arithmétiques de degré* p*, modulo le sous groupe engendré par* $(0, \partial u + \bar{\partial} v)$ *et* $(div(f), -log|f|^2)$*, où* u *et* v *sont des courants arbitraires du bon bidegré, et* $div(f)$ *est le diviseur d'une fonction rationnelle sur un sous-schéma fermé irréductible de codimension* $p-1$ *de* X*. Le noyau de la flèche évidente* $\widehat{CH}^p(X) \to CH^p(X)$ *est décrit en termes de l'image d'un régulateur. L'accouplement d'intersection arithmétique*

$$\widehat{CH}^p(X)_{\mathbf{Q}} \otimes \widehat{CH}^q(X)_{\mathbf{Q}} \to \widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbf{Q}} \qquad (6)$$

issu de (1) et (5) fait de $\widehat{CH}(X)_{\mathbf{Q}} = \oplus \widehat{CH}^p(X)_{\mathbf{Q}}$ *une algèbre commutative et graduée. On a la bifonctorialité et la formule de projection usuelles.*

L'un des mérites de cette intersection arithmétique est de fournir une notion de hauteur (positive) pour les sous-variétés de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$*, utilisée par Faltings dans son étude des points rationnels sur les variétés abéliennes (Ann. of Maths 1991).*

Au chapitre IV sont construites, pour tout fibré hermitien $\bar{E}$ *sur* X*, des classes caractéristiques arithmétiques à valeurs dans* $\widehat{CH}(X)_{\mathbf{Q}}$*, parmi lesquelles* $\widehat{ch}$ *(caractère de Chern arithmétique).*

Pour tout représentant (Z, g) *de* $\widehat{ch}(\bar{E})$, *on a*

$$dd^c g + \delta_Z = ch(\bar{E}) \tag{7}$$

le caractère de Chern usuel.

De plus $\widehat{ch}$ *vérifie les axiomes usuels pour* ch, *en restreignant toutefois l'additivité aux suites exactes orthogonales. Pour des suites exactes quelconques de fibrés hermitiens, le défaut de l'additivité de la seconde composante de* $\widehat{ch}$ *est donné par la classe caractéristique secondaire de Bott-Chern, l'un des ingrédients essentiels de la théorie, et dont une ingénieuse construction est proposée au début du chapitre.*

La construction de $\widehat{ch}$ *se fait soit au moyen d'un principe de scindage pour les groupes de Chow arithmétiques des grassmanniennes, soit par l'intermédiaire d'une définition directe de classes de Segre arithmétiques (§ 7).*

Passons à la seconde moitié du livre, consacrée à l'étude d'une notion d'image directe d'un fibré hermitien par un morphisme projectif plat de variétés arithmétiques, qui requiert la notion préalable de déterminant régularisé du laplacien, très agréablement présentée dans le chapitre V, en partant de l'exemple :

$$1.2.3.4\ldots = e^{-\zeta'(0)} = \sqrt{2\pi}\ ,\ \zeta'(s) = -\sum (logn)n^{-s} \tag{8}$$

Le lien avec les parties finies d'intégrales de fonctions thêta est explicité [1].

Puis est prouvée l'existence d'un noyau de la chaleur $p_t(x, y)$ *pour tout laplacien généralisé (= opérateur différentiel H d'ordre 2 vérifiant* $[[H, f], f] = -2|df|^2$ *pour toute fonction lisse* f*) agissant sur les sections d'un fibré vectoriel; ceci permet, dans le cas positif, d'écrire la fonction thêta sous la forme*

$$\Theta(t) = \int tr\, p_t(x, y) \tag{9}$$

(En ce qui concerne les propriétés de $p_t(x, y)$, *la stratégie des auteurs sera ensuite de s'appuyer sur le livre de N. Berline, E. Getzler et M. Vergne "Heat kernel and the Dirac operator" Springer (1992), et de rester aussi autonome que possible modulo cette référence).*

Le laplacien généralisé qui interviendra est le double de l'opérateur de Laplace - Beltrami complexe $\Delta^q = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ *agissant sur l'espace préhilbertien* $A^{0,q}(X_{\mathbf{C}}, \bar{E}_{\mathbf{C}})$ *des formes de type* $(0, q)$ *à valeurs dans un fibré holomorphe hermitien sur une variété kählérienne* ($\bar{\partial} = \bar{\partial}_{\bar{E}}$ *est l'opérateur de Cauchy - Riemann,* $\bar{\partial}^*$ *son dual).*

Le chapitre VI introduit le fibré en droite hermitien $\lambda(\bar{E}_{\mathbf{Q}}) = (\lambda(E), h_{\mathbf{Q}})$ *déterminant de la cohomologie, pour un morphisme* $f : X \rightarrow Y$ *projectif plat de variétés arithmétiques, lisse sur la fibre générique* $X_{\mathbf{C}}$ *et pour un fibré hermitien* E *sur* X *; on suppose la fibration* $f_{\mathbf{C}}$ *localement kählérienne.*

La fibre en tout point y *de* Y *de* $\lambda(E)$ *est le produit tensoriel alterné (A. Grothendieck, F. Knudsen, D. Mumford)*

$$\lambda(E)_y = \otimes_{q \geq 0} \Lambda^{max}(H^q(X_y, E_y))^{(-1)^q} \tag{10}$$

D'après Quillen, on obtient une métrique lisse h_Q *sur* $\lambda(E)$ *en identifiant* $H^q(X_y, E_y)$ *avec* $Ker\Delta^q$ *(pour* $y \in Y(\mathbf{C})$ *), et en multipliant sa métrique* L^2 *par* $\Pi(det'\Delta^q)^{(-1)^q q}$, *c'est-à-dire par l'exponentielle de la torsion analytique de Ray - Singer*

---

[1] Signalons une coquille : p. 96, l. 7 il faut remplacer le facteur $\theta(\pi/t)$ par $\theta(\pi^2/t) + 1/2$

$$h_Q = h_{L^2}.expT(\bar{E})\ ,\ T(\bar{E}) = \sum(-1)^{q+1}q\zeta_q'(0) \tag{11}$$

où ζ_q est la fonction zêta de Δ^q.

Le chapitre crucial qui suit calcule la courbure de h_Q :

$$c_1(\lambda(\bar{E}_Q)) = (f_{\mathbf{C}})_*(ch(\bar{E}_{\mathbf{C}})Td(f_{\mathbf{C}}))^{(2)} \tag{12}$$

généralisant des résultats de Quillen, Bismut - Freed, et des formules "d'anomalie" familières en théorie quantique des cordes.

Cette formule est obtenue à partir du théorème de l'indice pour les familles d'opérateurs de Dirac (Bismut) et d'une estimation à l'infini du noyau de la chaleur, grâce à l'usage capital des superconnexions; ainsi, soit $(\bar{E}_., v_.)$ un complexe acyclique de fibrés hermitiens, et soit $\nabla = \nabla^+ + \nabla^-$ la connection unitaire associée. On sait que la supertrace $tr_s exp(-A^2)$ est, en négligeant des facteurs $2i\pi$, la somme alternée des $ch(\bar{E}_i)$ (ici, A désigne la superconnexion $\nabla + v + v^*$). Mais il y a plus : la classe de Bott - Chern apparaît (à normalisation près) comme

$$\int_z tr_s exp(-A_z^2) log|z|^2 \tag{13}$$

où A_z est la superconnexion

$$\nabla + dz\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + zv + \bar{z}v^* \tag{14}$$

Si l'on joue le même jeu avec le complexe de Dolbeault relatif (non acyclique et de dimension infinie), l'intégrale (13) diverge mais la partie finie de sa composante de degré 0 donne essentiellement la torsion analytique (via le formalisme des fonctions thêta du chapitre V).

Le dernier chapitre combine (12) avec le théorème de Riemann - Roch - Grothendieck pour f, pour obtenir rapidement le théorème de Riemann - Roch arithmétique sous la forme suivante : la différence

$$\widehat{c}_1(\lambda(\bar{E}_Q)) - f_*(\widehat{c}h(\bar{E})\widehat{T}d(f))^{(1)} \in \widehat{CH}^1(Y)_{\mathbf{Q}} \tag{15}$$

dont la projection sur $CH^1(Y)_{\mathbf{Q}}$ est nulle, ne dépend que de la classe de $E_{\mathbf{Q}}$ dans $X_{\mathbf{Q}}$.

Application : on tord $\bar{E}$ par $\bar{L}^{\otimes n}$, $\bar{L}$ étant un fibré de droite hermitien avec $c_1(\bar{L}) > 0$. Alors $f_*(\widehat{c}h(\bar{E})\widehat{T}d(f))^{(1)} \in \widehat{CH}^1(\mathbf{Z}) = \mathbf{R}$ croît comme κn^{d+1}, avec

$$\kappa = (rangE)\bar{L}^{d+1}((d+1)!)^{-1}\ ,\ d = dim(X/\mathbf{Z}) \tag{16}$$

tandis que la différence (15) croît en n^d. Comme la partie "torsion analytique" de $\widehat{c}_1(\lambda(\bar{E} \otimes \bar{L}^{\otimes n})_Q)$ est $O(n^d logn)$ (Bismut - Vasserot), on en déduit, via Minkowski, le théorème d'amplitude arithmétique : si $\bar{L}^{d+1} > 0$, le logarithme du nombre de sections de $E \otimes L^{\otimes n}$ dans la boule unité croît au moins en κn^{d+1}.

Il existe en fait une formule exacte pour (15), obtenue par Gillet - Soulé en s'appuyant sur des travaux de Bismut et de Lebeau, et citée dans ce chapitre; mais sa preuve, très difficile, requerrait un autre livre (signalons que ce livre existe maintenant, dû à Faltings [2], qui a simplifié et étendu ce résultat).

[2] Ann of Maths studies 127, Princeton (1992)

Ce compte-rendu laconique laisse dans l'ombre l'un des aspects les plus remarquables de cet ouvrage : son accessibilité. Le style est celui d'une introduction, à la fois limpide et extraordinairement concise, où tous les objets sont définis avec soin — quitte à recourir çà et là à d'autres sources pour leurs propriétés. (Ayant coorganisé un séminaire à Bonn il y a quatre ans à partir de la jungle des prépublications originales, j'apprécie le succès de l'énorme effort de lisibilité accompli par les auteurs, particulièrement aux chapitres IV et VII, les plus techniques). L'ordre des matières semble couler de source, en partie grâce à un subtil élagage de points techniques secondaires. Tous les calculs sont faciles à suivre (parole de non-analyste!). En outre, le texte est parsemé de remarques et problèmes ouverts destinés à piquer l'intérêt du lecteur.

J'en viens à mon unique réserve, qui tempère quelque peu les mérites d'exposition que je viens de souligner : ce livre ne contient pas d'exemples [3]. Il faut recommander vivement au lecteur de traiter lui-même, pour chaque notion introduite, le cas facile mais instructif de $E = \mathcal{O}(n)$ *sur* $\mathrm{P}^1_{\mathbf{Z}}$ *(munis des métriques de Fubini - Study), où tout s'explicite. Du reste* X *demeure d'un bout à l'autre une variété arithmétique (ou complexe) de dimension quelconque* d *(sur* $\mathbf{Z}$ *ou* $\mathbf{C}$*), jamais spécialisé à* $d = 1$ *(sauf pour une brève allusion en III 5.2, 5.3); en particulier il n'y a pas un mot sur les rapports entre le théorème de Riemann - Roch arithmétique prouvé ici (dû à Deligne dans le cas* $d = 1$*) et le théorème de Riemann - Roch - Faltings sur les surfaces arithmétiques. Le lecteur déjà familier avec la théorie d'Arakelov* $(d = 1)$ *devra se reporter à l'exposé Bourbaki n°713 de Soulé (1989) pour faire le lien.*

En conclusion, voici une excellente introduction à la théorie d'Arakelov en dimension supérieure, à lire la plume à la main; un livre très dense qui s'adresse bien entendu d'abord aux géomètres arithméticiens, mais dont la richesse attirera un public varié de K*-théoriciens, analystes de tendance géométrique, et spécialistes de la théorie des cordes.*

Appendice : un doute a plané (et s'est même abattu [4]) naguère sur la forme forte du théorème de Riemann - Roch arithmétique, i.e. la formule pour (15). Bien que celui-ci sorte stricto sensu du cadre de ce livre, une rapide mise au point est peut-être opportune ici.

Examinons d'abord l'effet d'une dilatation de la métrique kählérienne de X *par un coefficient* $\alpha > 0$ *: la métrique* L^2 *sur* $A^{0,q}(X, \bar{E})$ *est dilatée par* α^{d-q}*, d'où*

${}_\alpha\Delta^q = \alpha^{-1}\Delta^q$,

${}_\alpha\zeta_q(0) = \zeta_q(0)$, *mais*

${}_\alpha\zeta'_q(0) = \zeta'_q(0) + log\alpha.\zeta_q(0)$.

On a alors la "formule d'anomalie"

$$log\frac{{}_\alpha h_Q}{h_Q} = log\alpha.(d.\chi(E) + \sum(-1)^{q+1}q(t^d\theta_q(t))_{|t=0})$$

où θ_q *désigne la fonction theta de* Δ^q *(lorsque* X *et* E *varient holomorphiquement,* $log\frac{{}_\alpha h_Q}{h_Q}$ *varie donc continûment, et même harmoniquement, cf. chapitre VI lemme 9).*

Le point litigieux est que, dans "Analytic torsion..." (Topology 1991), Gillet - Soulé empruntent la liste des valeurs propres de Δ^q *pour* $X = \mathrm{P}^N$ *(muni de Fubini - Study) à A. Ikeda - Y. Taniguchi (Osaka J. of Maths 1978), qui travaillent avec le laplacien riemannien. Pour justifier la citation, il suffit donc, d'après ce qui précède, de vérifier que la métrique utilisée par Ikeda - Taniguchi est le double de la métrique riemannienne induite par Fubini - Study. Comme ces métriques sont a priori proportionnelles (car* $U(N+1)$*-invariantes), cela se voit aisément par récurrence, en utilisant le plongement isométrique standard* $\mathrm{P}^{N-1} \subset \mathrm{P}^N$*; pour* $N = 1$*, un calcul direct de la première valeur propre conclut.*

---

[3] à part deux exemples de fonctions de Green cités sans explication au chapitre II.
[4] cf. Encycl. of Math. Sc 60, Number theory III, p.174

Certes, Ikeda - Taniguchi prétendent utiliser Fubini - Study, mais on remarquera que la $(1,1)$*-forme qu'ils associent au § 3, loc.cit.,est le double de la forme usuelle.*

Yves ANDRÉ
Paris 6

Géométrie et Dioptrique au Xe siècle

Traduction de R. RASHED

Belles Lettres, Paris. 1993.

Cet ouvrage présente un certain nombre de textes établis et traduits en français pour la première fois, ainsi qu'un résumé et commentaire de la plupart de ces textes. C'est donc un livre source mais aussi un livre de recherche centré sur quelques thèmes et sur la découverte d'une personnalité scientifique : celle de Ibn Sahl.

L'écrit le plus étonnant, découvert par l'auteur à l'occasion de ses recherches sur l'optique arabe du Xème siècle, est sans conteste le traité sur les "instruments ardents" d'Ibn Sabl provenant d'un manuscrit de la bibliothèque de Téhéran considéré à tort jusqu'à présent comme un traité sur les miroirs ardents. C'est en fait la première dioptrique de l'histoire de l'optique connue à ce jour. Ce traité contient une loi implicite pour la réfraction tout à fait analogue à la formulation qu'en donnera Snell au XVIIème siècle, une étude élégante des lentilles convexes hyperboliques, et une méthode de tracé continu des coniques nouvelle en ce qu'elle utilise la constance d'une somme. Un autre écrit d'Ibn Sahl est un commentaire du traité sur l'astrolabe d'al-Quhi, commentaire remarquable par le développement au premier chapitre d'une étude de pure géométrie projective qui dépasse le cadre nécessaire à la construction et à l'utilisation de l'astrolabe.

Ces points nouveaux s'insèrent naturellement au cours de l'ouvrage dans le contexte plus général de l'innovation scientifique propre à cette époque illustré par des textes d'al-Quhi, Ibn al-Haytham et al-Farisi. L'intérêt demeure cependant centré sur l'optique et les transformations en géométrie, excluant le domaine de la géométrie algébrique et des méthodes archimédiennes pour les quadratures et l'étude des centres de gravité.

Les textes ont été établis d'après les manuscrits disponibles pour chacun d'eux, puis traduits en français, et sont présentés en version bilingue. Il s'agit de 8 textes d'optique et de géométrie auxquels s'ajoutent 3 textes donnés en appendices parce que nécessaires à la lecture de certains des textes principaux. Ainsi en est-il du traité sur l'astrolabe d'al-Quhi et d'un livre de synthèses de problèmes géométriques écrit par un inconnu avec l'intention de compléter l'analyse, aujourd'hui perdue, de ces mêmes problèmes par Ibn Sahl. Le traité des synthèses permet alors à l'auteur de reconstituer les analyses de Ibn Sahl. Les principaux textes du livre sont les suivant :

- *"Le livre sur les instruments ardents" d'Ibn Sahl.*
- *"Preuve que la sphère céleste n'est pas d'une transparence extrême" d'Ibn Sahl.*
- *"Des propriétés des trois sections coniques" d'Ibn Sahl.*
- *Commentaire du traité sur l'Art de l'Astrolabe d'al-Quhi, par Ibn Sahl.*
- *Une partie du septième livre de l'Optique d'Ibn al-Haytham concernant le dioptre sphérique et la lentille sphérique.*
- *Le traité sur la Sphère ardente d'Ibn al-Haytham et sa rédaction par al-Farisi.*

Le premier chapitre du commentaire écrit par l'auteur traite uniquement des deux premiers textes dont il résume les démonstrations d'une façon concise et claire et dont il commente les traits principaux et l'originalité par rapport aux auteurs anciens connus par Sahl, essentiellement Ptolémée pour l'optique de la réfraction et Apollonius pour les coniques.

La démarche d'Ibn Sahl est remarquable par son propos mais aussi par le style des démonstrations qui tiennent compte de toutes les configurations possibles et se *soucient de l'existence et de l'unicité des plans tangents aux coniques. Il ne s'agit pas d'une rigueur axiomatique, beaucoup de propriétés utilisées ne sont pas énoncées mais supposées implicitement connues. Il est clair cependant que l'on se trouve en face d'un géomètre, l'un des plus grands de son époque, dont le souci est théorique même si le but de l'étude des instruments ardents est d'"embraser".*

La démonstration de la convergence au foyer de l'hyperbole de tous les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe de la lentille plan-convexe est à mon avis la plus surprenante du livre par son élégance et son originalité.

Le fait de s'intéresser à la focalisation et non à la vision conduit Ibn Sahl à ne traiter que de cas que nous qualifierions aujourd'hui de"stigmatisme exact", et c'est ce qui l'oppose à son successeur Ibn al-Haytham. C'est aussi ce qui fait qu'il n'étudie pas le dioptre plan pour lui-même et ne dégage pas explicitement la loi générale de la réfraction. Celle-ci est utilisée comme intermédiaire pour établir les propriétés de focalisation de ses lentilles hyperboliques.

Ibn Sahl traite également de la réflexion par les miroirs parabolique et elliptique, mais ceci n'est pas nouveau.

Les caractéristiques mises en avant pour les coniques sont évidemment les propriétés bifocales pour l'optique, et d'autre part la constance d'une somme pour le tracé continu des trois sortes de coniques. Tout ceci semble admis a priori dans le déroulement nettement synthétique du procédé de construction. Les détails pratiques indiquent bien la volonté de réaliser pratiquement le dessin, mais il s'agit de le réaliser à partir de la donnée des foyers et de l'excentricité, ce que permettait difficilement le "compas parfait" d'al-Quhi.

Le deuxième chapitre analyse les traités d'Ibn al-Haytham et d'al-Farisi et permet, par comparaison, d'apprécier d'avantage me semble-t-il l'originalité et l'élégance du travail d'Ibn Sahl. Il est vrai que le propos d'Ibn al-Haytham est plus ambitieux puisqu'il tente une étude générale de la réfraction d'après des observations expérimentales et s'intéresse à la vision à travers le dioptre et la lentille sphérique. Mais c'est justement le rapport avec une expérimentation trop restreinte qui est source d'erreur, ainsi que la confusion en ce qui concerne la notion d'image. Quoiqu'il en soit, l'intervention ici de cette partie du VIIème livre de l'optique d'Ibn al-Haytham permet de présenter dans un même ensemble les textes sur les lentilles du Xème et XIème siècles.

L'auteur conclut en explicitant l'apport nouveau d'Ibn al-Haytham par rapport au travail d'Ibn Sahl sur lequel il s'appuie. Ainsi le traitement du miroir sphérique où, comme dans le traitement du dioptre sphérique donné dans ce livre, apparaît l'aberration sphérique. L'intérêt accordé à la vision crée chez Ibn al-Haytham une séparation entre les problèmes liés à la propagation de la lumière, pour lesquels il donne un modèle, et ceux de l'image et de la vision. L'importance de l'expérimentation dans la théorie est toute autre que chez Ibn Sahl mais provoque malheureusement un retour en arrière vers Ptolémée et un effacement de la loi de Snell.

Le troisième chapitre concernant Ibn Sahl mathématicien est le plus riche en réflexions générales sur le contexte des mathématiques arabes de cette époque. L'auteur reprend de façon plus schématique les procédés de construction mécanique des coniques dans son lien avec les préoccupations optiques. On traite ensuite des divisions harmoniques dans les coniques d'une façon un peu différente de celle d'Apollonius, de l'analyse et de la synthèse de divers problèmes géométriques à partir de lemmes dont l'un est le théorème de Menelaüs. Bien que l'originalité d'Ibn Sahl soit ici moins flagrante, on le sent tout-à-fait capable de saisir et d'expliciter les innovations de ses contemporains, à leur demande parfois.

Mais le deuxième point vraiment surprenant de ce livre concerne la l'étude par Ibn Sahl des projections de la sphère. Bien que l'étude de l'astrolabe se réduise à la seule projection stéréographique, d'autres projections sont envisagées avec le souci d'étudier l'existence et la nature de la sur-

face projetée selon la surface sur laquelle on projette, le caractère cylindrique ou conique de la projection, et selon les positions relatives des divers éléments. Là encore, la contribution d'Ibn Sahl est originale, car son simple commentaire transforme les considérations allusives d'al-Quhi à ce sujet en une étude théorique à part entière.

Le quatrième et dernier chapitre traite des différents manuscrits utilisés précisant ainsi les problèmes de sources pour chaque texte établi. L'auteur donne tous les renseignements qu'il possède sur les divers textes existants, leurs mutilations, les copistes connus et les filiations supposées. On donne aussi les renseignements biographiques concernant Ibn Sahl, ainsi qu'Ibn al-Haytham et al-Farisi, permettant de les replacer dans leur contexte.

L'auteur exprime enfin sa volonté de respecter au maximum le texte original, dans l'établissement du texte aussi bien que dans la traduction, plutôt que d'en favoriser l'élégance.

Ces quatre chapitre écrits par l'auteur contiennent peu d'interprétation, sauf à la fin du second chapitre où il s'agit plutôt de rendre compte de l'oeuvre d'Ibn al-Haytham précédemment étudiée par l'auteur. Les commentaires concernant Ibn Sahl sont plus descriptifs et donnent envie au lecteur d'approfondir les comparaisons de style entre les diverses approches géométriques ainsi qu'entre le rôle et l'utilisation de l'optique. Mais l'ensemble du livre répond déjà en partie à ces questionnements par la simple confrontation des textes qui y sont juxtaposés. Les textes d'optique et de géométrie s'éclairent mutuellement et on comprend ainsi par l'optique la nouvelle approche des coniques. L'ensemble du livre pose de plus le problème du rôle des intruments dans la théorie, problème que l'auteur suggère sans le traiter. C'est cette discrétion même qui fait de ce livre un excellent outil de recherche, un livre source organisé de façon thématique qui peut constituer la base de toute réflexion dans ce domaine.

L'abondance de renseignements techniques sur les antécédants, les résumés des différents textes et la cohérence de l'ensemble permettent la lecture sans connaissances préalables du domaine concerné. La compréhension des démonstrations ne requiert que quelques connaissances sur les propriétés élémentaires des coniques. Le lecteur non averti devra cependant lire l'ensemble du commentaire pour saisir les liens entre les différents texte présentés. Le chercheur spécialisé peut par contre se promener à sa guise dans ce livre, y découvrir des textes inconnus à ce jour et profiter de l'énorme travail que représentent les traductions et résumés de toutes les démonstrations.

Christiane VILAIN
Paris 7

Sur les courbes définies par une équation différentielle

Mémoire de Henri Poincaré accompagné de la thèse de l'auteur et d'un Mémoire de Briot et Bouquet
Réédition Gabay, 1993.

La publication en quatre parties – de 1881 a 1886 – du Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle *par M. H. Poincaré Ingénieur des Mines dans le* Journal de Mathématiques pures et appliquées *peut être considérée comme le point de départ de la théorie des Système Dynamiques. Confronté aux difficiles questions de la Mécanique Céleste, en particulier au Problème des Trois Corps, Poincaré comprend la nécessité qu'il y a à asseoir sur une base ferme une théorie qualitative des équations différentielles. Commençant par les équations dans le plan, il crée de toutes pièces une problématique, un vocabulaire, une technique, dont sortiront non seulement la théorie en question mais également les prémisses de la Topologie et de la théorie Ergodique. Dès la première page du Mémoire le but est clairement as-*

signé : "Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas en étudiant la fonction proposée dans le voisinage d'un des points du plan. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction dans toute l'étendue du plan". Il ne se passe que deux ans entre la thèse – reproduite également dans cette réédition – et la publication de la première partie du Mémoire, trois ans entre la publication de la dernière partie et le Mémoire couronné sur le Problème des Trois Corps qui sera développé de 1892 a 1899 dans les trois volumes des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. En une dizaine d'années, c'est un bouleversement complet de la posture du mathématicien que provoque Poincaré. Le résumé des dix-neuf chapitres du Mémoire (239 pages) est donné dans le chapitre V de l'Analyse des Travaux Scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même rééditée en tête du volume (mais pourquoi n'avoir pas également réédité le chapitre I qui résume la thèse et la situe par rapport aux travaux de Cauchy et de Briot et Bouquet?). Notons simplement parmi cet extraordinaire foisonnement de notions et de résultats la classification "linéaire" des points singuliers (cols, foyers, nœuds, $\cdots$), la théorie des "conséquents" (sections de Poincaré) et le "théorème de Poincaré-Bendixson" sur la structure des ensembles-limites d'un champ de vecteurs dans le plan, l'étude des "cycles limites", le "problème du centre", la définition de l'indice d'un champ de vecteurs en un point singulier et la démonstration du "théorème de Poincaré-Hopf" sur l'égalité à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la somme des indices d'un champ de vecteurs sur une surface, l'étude des équations différentielles sur le tore avec en particulier l'existence du "nombre de rotation" d'un homéomorphisme du cercle. Sur le problème de la stabilité, la fin du dernier Mémoire préfigure déjà les recherches des Méthodes Nouvelles : l'importance de la préservation d'une mesure lisse et reconnue, ainsi que la possibilité à côté d'une stabilité géométrique – trajectoire confinée – d'une stabilité qu'il appellera plus tard "à la Poisson" ou la trajectoire revient indéfiniment dans un voisinage arbitraire de ses conditions initiales après de grandes excursions (dans le cas de Poisson il s'agit des valeurs des demi-grands axes des orbites planétaires). Enfin, bien que centré sur les équations d'ordre un ou deux dont les solutions se décrivent dans le plan ou dans l'espace, Poincaré est bien conscient de l'universalité de sa démarche. Il le dit encore plus clairement dans l'Analyse des travaux : "Pour étendre les résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second, il faut renoncer à la représentation géométrique qui nous a été si commode, à moins d'employer le langage de l'hypergéométrie à n dimensions. Mais ce langage est si peu familier à la plupart des géomètres qu'on perdrait ainsi les principaux avantages que l'on peut attendre de la représentation en question. Les résultats n'en subsistent pas moins $\cdots$"

La thèse de Poincaré, si elle n'a pas l'ampleur du Mémoire, défriche elle aussi un domaine nouveau. Il s'agit de comprendre les problèmes posés par la résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans les cas ou la théorie de Cauchy ne s'applique pas, autrement dit faire sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre ce que Briot et Bouquet avaient fait sur les équations différentielles ordinaires (voir plus bas). On lira avec intérêt le rapport de Darboux, reproduit à la page 331 du livre qu'Hélène Gispert a consacré à l'histoire de la Société Mathématique de France, et que cette dernière a publié récemment : s'il affirme que le théorème donné au début de la deuxième partie "constitue un premier progrès réellement remarquable" et que "quelques lemmes de l'introduction ont aussi paru dignes d'intérêt", le reste de la thèse est jugé "un peu confus"$\cdots$ Le théorème dont parle Darboux concerne les équations de la forme $X \cdot z = \lambda z$, ou $X(x_1, \cdots, x_n)$ est un (germe en 0 de) champ de vecteurs holomorphe s'annulant en 0 dans C^n. Poincaré montre l'existence d'une solution holomorphe $z(x_1, \cdots, x_n)$ pour λ valeur propre de la derivée $dX(0)$ dès que *cette dernière est "non résonante" et appartient à ce qu'on appelle aujourd'hui le "domaine de Poincaré". Cette démonstration est interprétée aujourd'hui comme la possibilité de "linéariser" X au voisinage de 0 par un changement holomorphe de coordonnées. C'est l'origine de la théorie des "formes normales".*

A la suite de la thèse on trouvera une note de Poincaré, écrite en 1878 dans le **Journal de l'Ecole Polytechnique** *alors qu'il était encore Elève-Ingénieur à l'Ecole des Mines. La note prolonge le travail de Briot et Bouquet reproduit à la fin du livre en montrant que si la fonction holomorphe $f(x,y)$ est telle que $\partial_y f(0,0) = \lambda$ soit de partie réelle positive mais ne soit pas un entier positif, les solutions de l'équation différentielle $x\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, bien que non holomorphes, se laissent développer au voisinage de $x = 0$ en séries de puissances de x et x^λ.*

Le volume se clôt sur les trois Mémoires de Charles Briot et Jean-Claude Bouquet parus en 1856 au **Journal de l'Ecole Impériale Polytechnique** *: faisant "disparaître ainsi les nuages qui obscurcissaient encore le beau théorème de M. Cauchy", le premier Mémoire expose les principes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Le théorème de Cauchy en question concerne l'équivalence – basée sur l'intégrale de Cauchy – entre analyticité (représentation par une série entière convergente) et holomorphie. Les auteurs exposent également l'extension "indiquée par M. le capitaine Laurent", le théorème de Liouville, et les résultats de ce dernier sur les fonctions doublement périodiques, un bon cours d'initiation à ce sujet en somme! Dans le deuxième Mémoire on aborde l'étude des fonctions définies par des équations différentielles. Comme le soulignera Poincaré, il s'agit d'une étude locale dans le champ complexe. Le but des auteurs est d'étendre la théorie de Cauchy aux équations $\frac{du}{dz} = f(u,z)$ dans lesquelles f n'est plus holomorphe au voisinage du point considéré (u_0, z_0). Les résultats auxquels ils sont arrivés sont très bien résumés au début de la note de 1878 de Poincaré. Ils montrent en particulier que l'étude locale d'une équation différentielle implicite algébrique $F\left(z,u,\frac{du}{dz}\right)$ se ramène "en général" à celle d'une forme normale $z\frac{du}{dz} = f(z,u)$ avec f holomorphe (points singuliers "réguliers"), et discutent la nature des solutions de cette dernière équation suivant les valeurs de $\frac{df}{du}$ au point considéré. C'est cette discussion que complète la note de Poincaré. Dans le troisième Mémoire, l'accent est mis sur la classification et l'intégration au moyen des fonctions elliptiques des équations différentielles algébriques de la forme $F\left(u,\frac{du}{dz}\right)$ qui possèdent des intégrales uniformes (monodromes dans le langage des auteurs), en particulier les onze équations de la forme $\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u)$ qui admettent pour intégrales des fonctions uniformes doublement périodiques.*

Les articles cités de Poincaré etaient déjà rassemblés, parmi d'autres, dans le premier tome de ses œuvres complètes. La comparaison que suggère le présent livre aux travaux de Briot et Bouquet souligne l'intensité de la rupture qu'inaugure le Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.

Alain CHENCINER
Paris 7

RECTIFICATIF

Ondelettes et opérateurs, Tome 3

R. R. Coifman et Y. Meyer

Editition Hermann.

La Gazette prie les Editions Hermann de l'excuser d'avoir attribué par méprise cet ouvrage aux Editions InterEditions.