SOMMAIRE

DOSSIERS

Science et Défense, *Débats : Carayol / Godement* 03

L' Agrégation de Mathématique, *Collectif, (2ème Partie)* 09

MATHÉMATIQUES

L' enseignement de l'algèbre linéaire . . . .
en première année de DEUG A, *Marc Rogalski* 39

Fonctions, programmes et démonstration, *Jean-Louis Krivine* 63

Paul Dubreil (1904–1994), *Léonce Lesieur* 75

INFORMATIONS

CNRS et Mathématiques 77

Remarques sur les postes de mathématiques 84

Le CNU de la 25ème section (mars 94) 86

Annonces des Prix 88

Annonce de l' I.H.P. 89

LIVRES

Comptes Rendus 91

DATE LIMITE

de soumission des articles, pour parution

dans le n° 61 : **15 juin 1994**

dans le n° 62 : **15 septembre 1994**

SCIENCE ET DÉFENSE

Nous entamons un dossier/débat sur le thème des rapports entre les scientifiques (et particulièrement les mathématiciens bien sûr) et les applications militaires de leur science. Le débat entre M. Carayol et R. Godement sera notamment suivi dans le prochain numéro d'un texte de R. Godement développant son point de vue et les informations esquissées lors du débat.

Après la guerre du Golfe, et l'éclatement de l'URSS, il semblait intéressant de faire le point sur ce sujet. C'est pourquoi l'I.S.M. (Institut des Sciences de la Matière) de l'Université Claude Bernard (Lyon 1) organisait un dîner débat en novembre 1991 sur ce thème. Les invités étaient

M. Michel Carayol
Ingénieur général de l'armement
Chef des services des Recherches de la DRET

et

M. Roger Godement
Professeur honoraire de Mathématiques
Université Paris 7

Madame M. P. Pileni, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) représentait le groupe "Science et Défense" à ce débat, qui était dirigé par B. Jacquier, professeur de physique à l'Université Claude Bernard.

Les notes qui suivent ont été rédigées par B. Jacquier et J. L. Nicolas à partir de l'enregistrement du débat.

Monsieur Godement, pouvez-vous nous faire un historique des relations entre les scientifiques et les militaires ?

R.G. : La collaboration entre scientifiques et militaires remonte à la plus haute antiquité. Tout le monde connaît Archimède, qui fut l'un des rarissimes scientifiques à y laisser sa peau. A la renaissance, la découverte des armes à feu et de l'artillerie bouleverse l'armement, mais les scientifiques n'y prennent pas part, car la chimie n'existe pas. Léonard de Vinci dessine des tanks et des sous-marins. Le baron écossais Neper, 1550-1617, l'inventeur des logarithmes, invente aussi une pompe pour extraire l'eau de ses mines de charbon. Théologien antipapiste, pour lutter contre l'armada des papistes espagnols, il conçoit une machine "capable de débarrasser un champ de 4 miles de tour de toute créature dépassant un pied de hauteur". Sur son lit de mort il devait déclarer à ceux qui lui demandaient les plans de sa machine : "On a tellement donné d'armes aux hommes pour s'entretuer, que si ça ne dépendait que de moi, je ferais tout pour en réduire le nombre. Mais voyant que la méchanceté enracinée au coeur des hommes ne le permettra jamais, je veux du moins éviter de contribuer à en accroître le nombre".

Tartaglia, à qui l'on doit la solution de l'équation du 4^{eme} degré, construit des tables de tir, et Galilée applique ses théories mécaniques à la trajectoire des obus.

Au 17^{eme} et 18^{eme} siècle, c'est une période calme. Le problème de déterminer la latitude, et surtout la longitude des bateaux occupe les scientifiques. En 1792 la création de l'Ecole Polytechnique systématise la liaison entre les scientifiques, les industriels et les militaires. Au 19^{eme} siècle, a lieu le développement des explosifs à des fins civiles et militaires. Pendant la grande guerre, la découverte de la synthèse de l'ammoniac par le chimiste Fritz Haber permet aux allemands de se passer des nitrates du Chili pour fabriquer les engrais et les explosifs. Rappelons également les gaz de combat. Ce sont déjà les scientifiques qui prennent l'initiative d'aller trouver les militaires pour qu'on utilise leur capacité. J. Perrin écrit à Langevin "Si vous étiez mobilisé dans la recherche militaire, vous seriez autant utile qu'un millier de sergents major". Lorsque le physicien anglais Moseley se fait tuer en 1915 dans les Dardanelles, Rutherford s'écrie que c'est idiot d'exposer un type aussi valable au hasard d'une balle turque.

En France, un des arguments présenté pour obtenir la création du CNRS sera que la guerre de 14-18 a mis en évidence l'importance de la recherche scientifique pour la défense.

La période charnière, "the great divide", comme disent les américains, pour les relations entre scientifiques et militaires se situe bien évidemment au début de la seconde guerre mondiale. Avant 1940, la recherche se faisait aux U.S.A. uniquement dans les universités et les industries (par exemple les Bell Labs). La mise en place du Manhattan project pour la fabrication de la bombe atomique (2 milliards de dollars en 1940 soit 1% du P.N.B.) les recherches sur le radar et les télécommunications, sur le guidage des avions à l'atterrissage, sur le développement de l'aéronautique, font que le budget de la Recherche Développement aux U.S.A. augmente considérablement, et que son financement est essentiellement militaire.

Monsieur Carayol, pensez-vous qu'il était nécessaire pour la France de posséder l'arme nucléaire, et cela a-t-il pénalisé l'économie nationale ?

M.C. : Nous n'étions pas les premiers, et il y avait là un mystère qui demandait à être éclairci, quelles que soient les utilisations ultérieures envisageables. Il me semble que la France, par une motivation de curiosité scientifique, ne pouvait pas se passer de la compréhension du principe de cet engin. Je suis d'un naturel assez confiant et j'estime que le pays où je vis est un des plus raisonnables et les moins aventuriers de la terre. A partir du moment où d'autres puissances possédaient l'arme atomique, pourquoi ferions nous courir un risque particulier en la possédant aussi? . On pouvait penser que tous les pays chercheraient à s'en munir, et donc le plus tôt serait le mieux. La fin ultime de tout pays responsable est l'instauration de la paix et le désarmement, et mon pays est capable d'aller dans cette direction. Le fait de posséder la bombe atomique lui donne plus de poids dans les conférences sur le désarmement.

Cela a-t-il pénalisé notre économie? Il est certain que le Japon et l'Allemagne qui ne sont pas des puissances nucléaires connaissent une certaine réussite économique. Mais d'une part, il a été demandé aux Allemands un effort plus important de la part de l'OTAN (puisqu'ils n'avaient pas d'armes nucléaires à financer) d'autre part la réussite Japonaise peut aussi s'expliquer par des qualités particulières de la société de ce pays. En résumé, les avantages de la bombe atomique me paraissent compenser la légère probabilité du phénomène que vous exprimez.

M. Godement qu'en pensez-vous ?

R.G. : Je vais répondre par 3 citations. D'abord le mathématicien Ulam qui a contribué à la bombe H en 1951 : "Contrairement aux gens qui étaient contre la bombe pour des raisons politiques morales ou sociologiques, je n'ai jamais eu aucun problème en ce qui concerne le travail purement théorique. Je ne sentais pas qu'il était immoral d'essayer de calculer des phénomènes physiques. La question de savoir si c'était utile stratégiquement était un aspect totalement différent du problème, en fait une question historique, politique ou sociologique de l'espèce la plus grave, et qui avait très peu de choses à voir avec le phénomène physique ou technologique lui-même. Même le calcul le plus simple dans les mathématiques les plus pures peut avoir de terribles conséquences. Sans l'invention du calcul infinitésimal, la plus grande partie de notre technologie aurait été impossible. Devons nous en conclure que le "Calculus" est mauvais? " Ensuite Oppenheim : "Ce n'est pas un problème académique de savoir si vous pouvez faire une bombe à hydrogène, c'est une question de vie ou de mort." Enfin Churchill déclarait en 1945 : " Notre politique devrait être de garder le secret en des mains américaines et britanniques dans la mesure où nous pouvons le contrôler et de laisser les français et les russes faire ce qu'ils peuvent. Vous pouvez être tout à fait sûr que toute puissance qui mettra la main sur le secret tentera de fabriquer l'article, et cela touche à l'existence de la société humaine. Ce sujet est hors de proportions avec quoi que ce soit d'autre existant dans le monde".

Abordons maintenant le problème économique. Il n'y a pas seulement l'arme atomique qui est en cause, mais toute la recherche et l'industrie militaire. Les techniques militaires sont devenues trop sophistiquées pour être applicables au domaine civil : Si le développement des bombardiers B47 et B52 dans les années 50 a pu profiter aux 707 et 747, l'étude du B1 invisible à MAC3 ne peut pas être utile au domaine civil.

M.C. : Je voudrais intervenir sur ce point. On a d'abord cherché à défendre et ce de façon parfois ridicule, l'idée que la recherche militaire servait au progrès civil. On a cité la prothèse de la hanche, les freins de formule 1. On a ensuite parlé des technologies duales : Les militaires intervenaient efficacement dans l'informatique, la résolution de l'équation de Navier-Stokes en mécanique des fluides, etc... Mais ce discours est apparu comme assez maladroit, comme si on n'avait pas très bonne conscience, et ou s'exposait à se faire rétorquer que l'argent serait mieux placé dans une agence civile centralisant l'action générale de la nation sur ces technologies. Maintenant on justifie les recherches de défense par la défense. Cela dit, on fait tout ce qu'on peut pour favoriser les retombées civiles : Les militaires sont plutôt nationalistes, et la prospérité économique est une cause importante. Si les chômeurs peuvent profiter de la recherche de défense, on essaie de favoriser ce transfert.

Les Scientifiques se plaignent de ce que des domaines de recherche soient frappés du secret défense. Qu'en pensez-vous ?

M.C. : La confidentialité défense s'applique aux dispositifs assez évolués des systèmes militaires (par exemple système auto-directeur de missile) ou aux embryons d'idée dans ce domaine. On peut cependant noter que moins de 10% des contrats de la DRET sont secret défense. Il y a également un dispositif de secret imposé par les industriels, qui souhaitent obtenir, ou conserver le marché de fabrication de ces systèmes militaires.

Nous sommes rentrés maintenant dans une ère de paix relative. Est-il nécessaire de maintenir des crédits de défense aussi importants ?

M.C. : Certes, la menace d'une invasion directe du territoire national s'est éloignée, mais le monde reste agité, et une certaine vigilance est justifiée : La contagion est toujours possible, et je ne suis pas satisfait de laisser les gens s'étriper autour de nous. Il y a nécessité d'une force armée pour être crédible. Le problème d'une défense antimissiles balistiques, tirés par des gouvernements irresponsables, une sorte de bouclier I.D.S., est posé. Faut-il prévoir d'intervenir pour maintenir des intérêts vitaux, par exemple, l'approvisionnement en pétrole? Dans la guerre du Golfe, certains pays non belligérants ont du payer un écot à d'autres pays, comme à des parrains au sens de la Mafia, pour veiller sur leurs intérêts. Je n'aimerais pas que mon pays adopte cette attitude. A cause de la modification brutale du paysage, il y a là un nouveau débat où tous les citoyens sont impliqués et où la communauté scientifique a un rôle à jouer.

Comment estimez vous la capacité de dissuation française contre la Russie au temps de la guerre froide ?

M.C. : Je me rappelle d'une anecdote qui s'était passée pendant l'une des premières réunions de Science et Défense en 1983 et où A. Kastler avait affirmé aux militaires qu'il ne croyait pas du tout en leurs forces car, disait-il, je n'imagine pas un seul instant qu'un président de la république appuyera sur le bouton rouge sachant que dans les minutes qui suivent la France serait vitrifiée. Je constatais à cette occasion qu'Alfred Kastler partageait l'opinion que j'ai affichée tout à l'heure, il avait une immense confiance dans l'usage raisonnable que ce pays ferait de la bombe atomique.

R.G. : L'argument s'applique tout aussi bien aux dirigeants américains et soviétiques. Ils se sont munis d'une quantité massive d'armes mais ils n'ont jamais envisagé un seul instant de s'en servir. Le danger fantastique des armes nucléaires est la possibilité d'être engagé dans un conflit; par exemple : Si Mr Saddam Hussein au lieu de faire la guerre en 1990, l'avait faite en 1980, peut être que les russes n'auraient pas été à ce moment là du même côté que les américains.

Et à Cuba ?

R.G. : A Cuba ce n'était rien du tout car la supériorité américaine était absolument écrasante et il n'était pas question que les russes interviennent mais tout le monde a eu une frousse terrible, y compris Mr Mac Namara. Si vous demandez au Général qui commandait la Stratégic Air Command, lui n'a pas perdu une seconde de sommeil. Il savait qu'il pouvait écraser les russes sans problème à l'époque de Cuba.

Quelles sont les armes actuellement étudiées ?

M.C. : En ce qui concerne les armes chimiques et bactériologiques, il n'y a pas en France de système offensif, simplement une défense pour prévoir ce que pourrait faire un éventuel adversaire. Il y a des activités de recherche de nature défensive, de protection dans ce domaine, c'est tout. La bombe à aérosol a été montée en épingles par les journalistes à l'époque de la guerre du Golfe et présentée comme la bombe du pauvre. Elle a un effet de souffle et présente un certain avantage pour la guerre de tranchées mais n'est pas du tout comparable à l'arme atomique. En fait, il n'y a pas de grands sauts technologiques en vue. Ce n'est pas demain qu'on mettra de l'antimatière en bouteille. L'arme atomique a atteint une telle mise au point que, pour l'instant il n'y a pas d'autre alternative.

Ce que tout le monde poursuit actuellement ce sont des armes intelligentes et de précision qui font appel à de la haute technologie, en particulier la microélectronique, l'intelligence artificielle et surtout des logiciels. C'est au niveau des systèmes qu'intervient l'application militaire et non au niveau de principes de base, comme c'était le cas pour la bombe atomique. Dans ce cas, c'était la physique de base qui était directement liée au problème militaire. La bombe à rayonnement renforcée fait partie de la panoplie des armes nucléaires mais ne fait pas appel à des connaissances vraiment nouvelles par rapport à l'ensemble de ces armes.

Pensez-vous que les milieux scientifiques sont suffisamment informés des projets militaires ?

M.C. : Je veux bien plaider coupable, mais à condition que vous reconnaissiez que de votre côté vous n'avez pas le niveau d'intervention, en matière de défense, qu'on trouve aux Etats Unis. On a fait des progrès, il existe maintenant tout un ensemble de manifestations comme les journées thèmatiques de la DRET où on expose les résultats de contrat. On pourrait faire mieux en généralisant les appels d'offre à toute la communauté scientifique. Ce sont des choses qui vont évoluer. L'appel d'expert pourrait aussi se généraliser et, c'est en projet à la DRET. Il faudrait que vous soyez d'accord, en échange, d'une plus grande participation. Côté américain, un symposium réunit un grand nombre de têtes pensantes pour réflechir au problèmes militaire, ce qui n'existe pas en France. On trouve aussi une capacité du milieu scientifique à prendre en charge les programmes militaires à un assez haut niveau de synthèse alors qu'en France cet effort est assez ponctuel, le responsable reste toujours à la DRET. Je vais être utopique en imaginant qu'un chercheur CNRS soit responsable du programme RAFALE avec une participation plus grande des chercheurs. Ce serait peut être plus efficace que des relations ponctuelles, comme c'est le cas actuellement, sur un ensemble de mesures militaires au niveau de la synthèse.

Certaines publications scientifiques sont utilisées ultérieurement à des fins militaires ...

R.G. : C'est le drame fondamental. Même si vous faites la recherche civile, vous ne pouvez pas prévoir que vos résultats pourront être utilisés vingt ans plus tard à des fins militaires. Il ne peut pas y avoir de législation, le scientifique qui a écrit un papier n'en est pas propriétaire. Il y a une dynamique du progrès scientifique et technique qui est soutenue par des centaines de milliers de scientifiques, ingénieurs et industriels avec beaucoup d'argent et une très grande inertie. Les applications militaires ne s'arrêteront jamais. Si vous ne voulez pas tomber dans ce type de problème faites de la littérature ou de la musique mais ne faites pas de recherche scientifique.

M.C. : Cette intervention montre qu'il y a encore beaucoup à faire pour les militaires à se faire accepter. La seule voie possible pour les scientifiques est d'accepter de rentrer dans le système militaire pour se faire entendre dans l'utilisation des connaissances qu'ils découvrent.

L'AGRÉGATION

Nous publions dans ce numéro la seconde partie du dossier "Agrégation".

Dans une première partie, nous donnons un extrait de la solution au problème de l'agrégation de 1895 paru dans le numéro précédent. Cet extrait reproduit les pages 1 à 3 et 7 à 8 de la copie de René Baire comprenant 8 pages. Nous diffusons aussi l'énoncé d'une autre épreuve de cette même agrégation, ainsi qu'un extrait de la solution proposée par Henri Dulac. L'extrait correspond aux pages 1 à 3 et 11 à 13 de la copie composée de 13 pages.

Dans un seconde partie, nous présentons une brève description de l'évolution des épreuves des agrégations de mathématiques masculine et féminine. Nous publions également les textes de deux épreuves typiques de la période 1885–1959, l'une correspondant à l'épreuve de géométrie descriptive (1959), l'autre à l'épreuve de calcul numérique (1954).

Et, nous concluons avec un extrait d'une réflexion d'Henri Lebesgue sur l'agrégation féminine de mathématiques datant de 1928.

Remarque : Ce dossier a été élaboré grâce au concours de P. Bérard *(Inspecteur général)*, Dominique Cerveau *(Université de Rennes)*, André Chervel *(chercheur au service d'histoire de l'éducation à l'INRP)*, A. Magnier *(Inspecteur général)*, Jean Yves Mérindol *(Université de Strasbourg)* et Robert Moussu *(Université de Dijon)*.

Michèle ARTIGUE – Jacques CAMUS

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE,
DES BEAUX-ARTS
ET
DES CULTES.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

CONCOURS DE 1895.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne un ellipsoïde E qui, rapporté à ses plans principaux, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et une sphère de rayon r et de centre A (x_0, y_0, z_0).

On considère les quadriques S qui sont tangentes à tous les plans tangents communs à la sphère et à l'ellipsoïde E; du point A on abaisse une normale AP sur l'une des quadriques S et au pied P de cette normale on mène le plan tangent Π à cette quadrique.

1° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à une surface H_ρ, homofocale à l'ellipsoïde E, représentée par l'équation

$$H_\rho = \frac{x^2}{a^2-\rho}+\frac{y^2}{b^2-\rho}+\frac{z^2}{c^2-\rho}-1=0$$

2° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à l'une des quadriques S; prouver qu'il est aussi un plan principal pour une autre de ces quadriques. Les réciproques de ces propositions sont-elles vraies?

3° Par tout point M de l'espace il passe trois plans Π polaires du point A par rapport à trois quadriques H_λ, H_μ, H_ν du système homofocal. Exprimer les coordonnées du point M en fonctions des paramètres λ, μ, ν.

Déduire des expressions ainsi obtenues le lieu des points M pour lesquels les trois plans Π sont rectangulaires.

4° Trouver ce que deviennent les expressions des coordonnées du point M, soit quand ce point est sur la développable enveloppée par le plan Π, soit quand il se trouve sur l'arête de rebroussement de cette développable. En conclure le degré de la développable et la nature de son arête de rebroussement.

5° Tout plan Π coupe la développable suivant la génératrice de contact et suivant une conique. De quelle espèce est cette conique? En connaît-on des tangentes remarquables?

6° Trouver le lieu des foyers de ces diverses coniques.

ACADÉMIE DE PARIS

Nom du Candidat : Baire

Prénoms : René Louis

Date et lieu de naissance : 21 janvier 1874 Paris

Qualité : Élève de l'École Normale Supérieure

Domicile : 45 rue d'Ulm

19

CONCOURS d'Agrégation

Le 5 juillet 1895

COMPOSITION EN Math. Spéciales

L'équation tangentielle de l'ellipsoïde E est.

$$\varphi_2 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0$$

Celle de la sphère :

$$(ux_0 + vy_0 + wz_0 + 1)^2 - r^2(u^2+v^2+w^2) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_1 = (x_0^2 - r^2)u^2 + (y_0^2 - r^2)v^2 + (z_0^2 - r^2)w^2 + 1 + 2vwy_0z_0 + 2wuz_0x_0 + 2uvx_0y_0 + 2ux_0 + 2vy_0 + 2wz_0 = 0$$

L'équation tangentielle d'une quadrique S sera :

$$\varphi(uvw) = \varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0$$

Soit Π : $ux + vy + wz + 1 = 0$ un plan tangent à une quadrique

On aura. $\varphi(uvw) = 0$

et le point de contact P de ce plan $(x_1 y_1 z_1)$ sera donné par les formules :

$$x_1 = \frac{\varphi'_u}{\varphi'_t} \quad y_1 = \frac{\varphi'_v}{\varphi'_t} \quad z_1 = \frac{\varphi'_w}{\varphi'_t}$$

Pour que AP soit normale à la quadrique S, il faut que AP soit perpendiculaire au plan Π. Les paramètres de AP sont proportionnels à : $x_1 - x_0 \quad y_1 - y_0 \quad z_1 - z_0$

c'est-à-dire à $\varphi'_u - x_0\varphi'_t \quad \varphi'_v - y_0\varphi'_t \quad \varphi'_w - z_0\varphi'_t$

Il faut donc que l'on ait :

$$\frac{\varphi'_u - x_0\varphi'_t}{u} = \frac{\varphi'_v - y_0\varphi'_t}{v} = \frac{\varphi'_w - z_0\varphi'_t}{w}$$

Or

$$\varphi'_u - x_0\varphi'_t = \varphi'_{1u} - x_0\varphi'_{1t} + \lambda(\varphi'_{2u} - x_0\varphi'_{2t})$$

$$= 2\left[-r^2u + \lambda(a^2u + x_0)\right]$$

Les conditions que doit remplir le plan Π sont donc :

$$\frac{-r^2u + \lambda(a^2u + x_0)}{u} = \frac{-r^2v + \lambda(b^2v + y_0)}{v} = \frac{-r^2w + \lambda(c^2w + z_0)}{w}$$

ou, en simplifiant :

(1) $$a^2 + \frac{x_0}{u} = b^2 + \frac{y_0}{v} = c^2 + \frac{z_0}{w}$$

On voit que le plan Π doit être tangent à une certaine classe développable de 3e classe. — Si on veut que le plan Π soit tangent à une quadrique bien déterminée S, il faut ajouter à ces équations l'équation

$$(2) \qquad \varphi(u\,v\,w) = 0$$

Les équations (1) et (2) admettent 6 solutions, qui correspondent aux six normales menées de A à la quadrique S.

Si l'on prend un plan quelconque Π $(u\,v\,w)$ satisfaisant à (1), l'équation :

$$\varphi_1(u\,v\,w) + \lambda\,\varphi_2(u\,v\,w) = 0$$

détermine la valeur de λ correspondante à la quadrique S tangente à Π.

1°Q. Le plan polaire Π' du point A par rapport à la surface :

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2-\rho} + \frac{y^2}{b^2-\rho} + \frac{z^2}{c^2-\rho} - 1 = 0$$

a pour paramètres :

$$(4) \qquad u = \frac{x_0}{\rho - a^2} \qquad v = \frac{y_0}{\rho - b^2} \qquad w = \frac{z_0}{\rho - c^2}$$

On voit que ses coordonnées satisfont aux équations (1) quel que soit ρ.
Il en résulte que : le plan Π' fait partie de la série des plans Π.
Inversement tout plan Π peut être considéré comme le plan polaire de A par rapport à une des surfaces (3). En effet si $u\,v\,w$ satisfait à (1) il suffit de prendre, d'après les équations (4) :

$$\rho = a^2 + \frac{x_0}{u} = b^2 + \frac{y_0}{v} = c^2 + \frac{z_0}{w}$$

2°Q. Le plan polaire de A par rapport à la quadrique S' correspondant à la valeur λ' du paramètre λ est donné par les équations :

$$\begin{cases} \varphi'_u - x_0\,\varphi'_r = 0 \\ \varphi'_v - y_0\,\varphi'_r = 0 \\ \varphi'_w - z_0\,\varphi'_r = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} (\lambda' a^2 - r^2)u + \lambda' x_0 = 0 \\ (\lambda' b^2 - r^2)v + \lambda' y_0 = 0 \\ (\lambda' c^2 - r^2)w + \lambda' z_0 = 0 \end{cases}$$

On tire de ces équations

$$(5) \qquad \cancel{\frac{x_0}{u} = \frac{r^2}{\lambda'}} \qquad \begin{cases} \dfrac{x_0}{u} = \dfrac{r^2}{\lambda'} - a^2 \\ \dfrac{y_0}{v} = \dfrac{r^2}{\lambda'} - b^2 \\ \dfrac{z_0}{w} = \dfrac{r^2}{\lambda'} - c^2 \end{cases}$$

On voit que les coordonnées du plan satisfont encore identiquement aux équations (1). Donc un plan polaire de A par rapport à une quadrique S satisfait à la définition des plans Π. Inversement, si l'on considère un plan Π, on en déduira une quadrique S dont le paramètre λ' sera, d'après les équations (5) :

$$\lambda' = \frac{r^2}{a^2 + \frac{x_0}{u}} = \frac{r^2}{b^2 + \frac{y_0}{v}} = \frac{r^2}{c^2 + \frac{z_0}{w}}$$

Considérons un plan Π, et cherchons une quadrique S'' dont le ~~centre~~ soit dans le plan Π. Le centre de S'' est le point ~~$x_1 y_1 z_1$ tel que~~ défini par l'équation

$$\cancel{x_1 = \frac{\varphi'_u(0001)}{\varphi'_t(0001)} = \frac{x_0}{1-\lambda''}}$$

$$\cancel{y_1 = \frac{\varphi'_v(0001)}{\varphi'_t(0001)} = \frac{y_0}{1-\lambda''}}$$

$$\cancel{z_1 = \frac{\varphi'_w(0001)}{\varphi'_t(0001)} = \frac{z_0}{1-\lambda''}}$$

$$(6) \quad \varphi'_t(u\, v\, w) = 0$$

~~Il faut donc qu'on ait :~~

$$\cancel{\frac{u x_0}{1-\lambda''} + \frac{v y_0}{1-\lambda''} + \frac{w z_0}{1-\lambda''} + 1 = 0}$$

~~ou bien (6) $u x_0 + v y_0 + w z_0 + 1 - \lambda'' = 0$ ou encore $\varphi'_t(u v w) = 0$~~

Je dis que dans ces conditions Π est un plan principal de S''. Il suffit de montrer que la direction conjuguée lui est perpendiculaire. Cette direction est celle dans laquelle est rejeté à l'infini le pôle de Π, elle a donc pour paramètres :

$$\varphi'_u \quad \varphi'_v \quad \varphi'_w$$

Il faut donc montrer que la condition (6) entraîne :

$$\frac{\varphi'_u}{u} = \frac{\varphi'_v}{v} = \frac{\varphi'_w}{v}$$

ou bien encore, puisque $\varphi'_t = 0$:

$$\frac{\varphi'_u - x_0 \varphi'_t}{u} = \frac{\varphi'_v - y_0 \varphi'_t}{v} = \frac{\varphi'_w - z_0 \varphi'_t}{w}$$

c'est-à-dire d'après le calcul fait plus haut :

$$\frac{\lambda(a'u + x_0) - su}{u} = \frac{\lambda(b'v + y_0) - sv}{v} = \frac{\lambda(c'w + z_0)}{w}$$

c'est-à-dire $\quad a' + \frac{x_0}{u} = b' + \frac{y_0}{v} = c' + \frac{z_0}{w}$

On retombe encore sur les équations (1).

— Inversement, si Π est un plan principal d'une quadrique S'', c'est-à-dire si :

$$\varphi'_t \equiv u x_0 + v y_0 + w z_0 + 1 - \lambda'' = 0$$

et que

$$\frac{\varphi'_u}{u} = \frac{\varphi'_v}{v} = \frac{\varphi'_w}{w}$$

on en déduit les équations (1).

En résumé, nous avons quatre définitions géométriques du plan Π.

[illegible]

exact ! — coordonnées ; les tangentes correspondantes sont elles-mêmes dans ce plan de coordonnées.

6° Φ. Posons :

$$k_1 = \frac{a^2-\mu}{x_0(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

(12 bis)
$$k_2 = \frac{b^2-\mu}{y_0(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

$$k_3 = \frac{c^2-\mu}{z_0(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

La ~~parabole~~ focale Φ sera représentée par :

$$X = k_1(a^2-\lambda)^2$$
$$Y = k_2(b^2-\lambda)^2$$
$$Z = k_3(c^2-\lambda)^2$$

Nous en obtiendrons le foyer $X\ Y\ Z$ de la manière suivante. Soient λ' et λ'' les paramètres des deux points de rencontre de la directrice avec Φ. Écrivons qu'en chacun de ces 2 points la tangente rencontre le cercle de l'infini $T=0$, $X^2+Y^2+Z^2=0$.

La tangente au point λ est :

$$\frac{X-k_1(a^2-\lambda)^2}{k_1(a^2-\lambda)} = \frac{Y-k_2(b^2-\lambda)^2}{k_2(b^2-\lambda)} = \frac{Z-k_3(c^2-\lambda)^2}{k_3(c^2-\lambda)}$$

La condition pour que cette droite rencontre le cercle de l'infini est :

exact (13) $$k_1^2(a^2-\lambda)^2 + k_2^2(b^2-\lambda)^2 + k_3^2(c^2-\lambda)^2 = 0$$

λ' et λ'' doivent donc être les racines de cette équation. Le ~~point X~~ foyer $X\ Y\ Z$ sera le point de rencontre de ces deux tangentes. Il en résulte que λ' et λ'' seront également les racines d'une équation telle que :

$$\frac{X-k_1(a^2-\lambda)^2}{k_1(a^2-\lambda)} = \frac{Y-k_2(b^2-\lambda)^2}{k_2(b^2-\lambda)}$$

(14) ou : $$X k_2(b^2-\lambda) - Y k_1(a^2-\lambda) + k_1k_2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(b^2-a^2) = 0$$

~~En identifiant les équations (13) et (14) on obtient~~ :

Les premiers membres des équations (13) et (14) doivent être identiques à un facteur constant près. En faisant $\lambda=a^2$; $\lambda=b^2$ on trouve :

$$(k_1^2+k_2^2+k_3^2)\,X\,k_2(b^2-a^2) = k_1k_2(b^2-a^2)\left[k_2^2(b^2-a^2)^2+k_3^2(c^2-a^2)^2\right]$$
$$-(k_1^2+k_2^2+k_3^2)\,Y\,k_1(a^2-b^2) = k_1k_2(b^2-a^2)\left[k_1^2(a^2-b^2)^2+k_3^2(c^2-b^2)^2\right]$$

On aurait de même la valeur de Z.

Le foyer est donc le point :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{k_1\left[k_2^2(b'-c')^2+k_3^2(c'-a')^2\right]}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\\ Y &= \frac{k_2\left[k_3^2(c'-b')^2+k_1^2(a'-c')^2\right]}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\\ Z &= \frac{k_3\left[k_1^2(a'-c')^2+k_2^2(b'-c')^2\right]}{k_1^2+k_2^2+k_3^2}\end{aligned}\right.$$

Bien

Si l'on fait varier la position M considérée, c'est-à-dire le paramètre μ, ce foyer engendre une courbe gauche dont les coordonnées d'un point quelconque sont données par les équations (15), en supposant qu'on ait remplacé $k_1\ k_2\ k_3$ par leurs expressions (12 bis) en fonction de μ.

$k_1\ k_2\ k_3$ étant du premier degré en μ, on voit que la courbe est du 3e degré :

R. Baire

MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE,
DES BEAUX-ARTS
ET
DES CULTES.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

CONCOURS DE 1895.

COMPOSITION
SUR L'ANALYSE ET SES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

On considère la courbe C représentée par l'équation

$$(x^2+y^2)\ (x^2+2axy+y^2)+xy=0$$

où a désigne un paramètre arbitraire.

Le paramètre a ayant une valeur quelconque,

1° Déterminer le genre de la courbe C;

2° Former les intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe;

3° Former une intégrale de troisième espèce devenant infinie au point double de la courbe C;

4° Écrire à l'aide de ces intégrales, par l'application du théorème d'Abel, les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe C soient en ligne droite, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe C soient sur la même conique.

Examiner le cas particulier où la droite et la conique passent par le point double de la courbe C;

5° Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe C en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4;

6° Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le genre de la courbe C s'abaisse.

On étudiera en particulier l'hypothèse $a=0$, et l'on résoudra les problèmes suivants pour la courbe particulière D qui correspond à cette hypothèse.

I. Que deviennent, pour la courbe D, les intégrales de première espèce relatives à la courbe générale C?

II. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe D soient en ligne droite et les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe D soient sur une conique.

III. Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe D en quatre points : M_1, M_2, M_3, M_4.

IV. Déterminer les points d'inflexion et les tangentes doubles de la courbe D.

ACADÉMIE DE PARIS

Nom du Candidat : Dulac
Prénoms : Henri Claudius Rosario
Date et lieu de naissance : 3 octobre 1870 Fayence (Var)
Qualité : Etudiant libre à la Faculté des Sciences de Paris
Domicile : 12 boulevard Arago Paris

CONCOURS d'agrégation

Le 6 juillet 1895.

COMPOSITION EN Analyse

Soit $(x^2+y^2)(x^2+2axy+y^2)+xyz^2 = f(xyz) = 0$ l'équation homogène de la courbe. Les coordonnées d'un point double devant annuler les 3 dérivées partielles on aura pour un tel point $x\,y\,z = 0$. Par conséquent la courbe n'a comme point double à distance finie que l'origine. A l'infini elle n'a pas de points doubles si a est quelconque. Cette courbe du 4^{me} degré est donc en général de genre deux. Si l'on considère y comme une fonction de x cette équation définit une fonction qui peut être rendue uniforme en l'étendant sur une surface de Riemann à 4 feuillets; la fonction possède 10 points de ramification dont deux à l'origine et les deux branches de la fonction qui passent à l'origine ont pour premiers termes du développement $y = -x^3 + \dots$ et $y = -x^{\frac{1}{3}}$

2° Pour former l'intégrale ~~abélienne~~ de première espèce la plus générale pour une courbe de degré m il suffit de considérer l'expression $\int \frac{Q_{m-3}\,dx}{f'_y}$ Q_{m-3} désignant une adjointe de degré $m-3$ par conséquent ici une droite passant par l'origine cette intégrale est donc

$$\int \frac{Ax+By}{2(x^2+y^2)(a x+y)+2y(x^2+y^2+2axy)+x}\,dx$$

il y a deux intégrales de 1re espèce à l'aide desquelles on pourra exprimer toutes les autres seront

$$\int \frac{x\,dx}{f'_y} \quad \text{et} \quad \int \frac{y\,dx}{f'_y}$$ que l'on peut aussi mettre

sous la forme $-\int \frac{x\,dy}{f'_x}$ et $-\int \frac{y\,dy}{f'_x}$

3° On sait que pour former une intégrale de troisième espèce admettant pour points logarithmiques les deux points analytiques répondant à un point double il suffit de considérer l'expression $\int \frac{Q_{m-3}}{f'_y}\,dx$

Q_{m-3} désignant une courbe passant par les points doubles, autres que le point considéré; on peut donc prendre ici pour intégrale de troisième espèce demandée

$$\int \frac{dx}{2(x^2+y^2)(ax+y)+2y(x^2+2axy+y^2)+x}$$

on vérifie d'ailleurs immédiatement au moyen du premier terme des developpements de y dans le voisinage de l'origine que le résidu de la quantité sous le signe $\int$ est égal à 1 en effet pour $y = x^3 + \ldots$ le terme de degré le plus faible du denominateur est -1 et pour $y = -x^{\frac{1}{3}} + \ldots$ ce terme est $3x$

4° Les deux intégrales de première espèce peuvent être rendues uniformes sur la surface de Rieman au moyen de 4 coupures pratiquées à cette surface, je designe par u et v ces deux intégrales, par A, B, α, β les périodes relatives aux 4 coupures pour la fonction u; $A' B' \alpha' \beta'$ les periodes relatives à la fonction v ~~Les Sommes~~ les sommes des valeurs de ces deux integrales prises depuis une ~~arbitraire~~ origine fixe jusqu'aux points d'intersection de $f(xy) = 0$ avec deux courbes de degré q ne different que par des multiples des periodes relatives à ces integrales.

Il en est de même pour l'intégrale de troisième espèce considérée, parceque parmi les courbes du faisceau dont font partie les deux courbes considérées, il en est une qui passe par les deux points logarithmiques. Si w est cette integrale $A'' B'' \alpha'' \beta''$ ses periodes cycliques ~~relatives aux coupures de la surface de Rieman~~ sa période polaire étant $2\pi i$ on a pour les 4 points d'intersection d'une droite avec la courbe

$$\begin{aligned} u_1+u_2+u_3+u_4 &= lA+mB+p\alpha+q\beta + C \\ v_1+v_2+v_3+v_4 &= lA'+mB'+p\alpha'+q\beta' + C' \\ w_1+w_2+w_3+w_4 &= 2\lambda\pi i + lA''+mB''+p\alpha''+q\beta'' + C'' \end{aligned}$$

$l\ m\ p\ q$ et λ étant des entiers; les coefficients des periodes cycliques sont les mêmes pour les trois integrales parcequ'on les suppose prises suivant le même chemin

Les deux premières conditions sont nécessaires ~~et~~ elles sont aussi suffisantes. Cela résulte de la theorie de l'inversion puisque la somme des valeurs u_1+u_2 v_1+v_2 des deux integrales de première espèce determine les points 1 et 3 lorsque 3 et 4 sont donnés. On est certain que le theorème de l'inversion s'applique car l'on sait que s'il y a indétermination les points 1 et 2 sont situés sur une adjointe de degré $m-3$; ici une droite passant par l'origine, et ~~les points 3 et 4 auraient d'un recoit dans le~~ cas et comme parmi et ensemble de ces points 1 et 2 doivent se trouver les points d'intersection de la droite 3 4 avec l'origine, on serait dans le cas d'une droite passant par le point double, 3 et 4 seraient confondus avec ce point

La troisième condition est une conséquence des deux premières. De ceci résulte que si 4 points 1 2 3 4 satisfont aux deux premières conditions et ne satisfont pas à la troisième ces points seront sur une droite passant par le point double, cette remarque aura son application dans un instant

Si 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont les 8 points d'intersections d'une conique avec la quartique on a

$$u_1 + u_2 + \quad + u_8 \equiv 2C$$
$$v_1 + v_2 + \quad + v_8 \equiv 2C'$$
$$w_1 + w_2 + \quad + w_8 = 2C''$$

conditions nécessaires et suffisantes. D'après la théorie de l'inversion ces trois équations déterminent 3 points lorsque les cinq autres sont donnés. En examinant la question de plus près on serait amené comme précédemment à excepter les cas où 4 des points donnés seraient en ligne droite et où ~~les coniques passeraient~~ deux points donnés seraient confondus au point double.

Si la droite passe par le point double on a

on $$u_1 + u_2 \equiv C - u' - u''$$
$$v_1 + v_2 \equiv C' - v' - v''$$

u' u'' v' v'' designant les valeurs des intégrales aux points analytiques confondus au point double.

Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes.

Si on ne prenait qu'une d'entre elles étant donné un point 1 il y aurait plusieurs points 2 satisfaisant à l'équation, et l'on n'aurait pas une condition suffisante, cela parceque u est une intégrale relative à une courbe de genre 2. La troisième condition ~~Tous les 6 points d'i~~ relative à l'intégral w perd toute signification puisque w' et w'' deviennent infinis.

Tous les 6 points d'intersection d'une conique passant par le point double on a

$$u_1 + u_2 \quad + u_6 \equiv 2C - u' - u''$$
$$v_1 + v_2 \quad + v_6 \equiv 2C' - v' - v''$$

Equations qui déterminent les points 5 et 6 lorsque 1 2 3 4 sont donnés sauf le cas où trois de ces points seraient en ligne droite. La troisième condition perd ~~toute~~ signification

5° Soient 1 2 3 4 M_1 M_2 M_3 M_4 les 4 points de contact d'une conique

on a
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{lA + mB + n\alpha + q\beta}{2} + C$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{lA' + mB' + n\alpha' + q\beta'}{2} + C'$$
$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = \frac{lA'' + mB'' + n\alpha'' + q\beta''}{2} + \lambda\pi i + C''$$

~~Étant donn~~ Conditions nécessaires et suffisantes ~~pour~~ d'après l'inversion que 4 points soient les points de contact d'une conique. Étant donnés un point M_4 et un système de valeurs de l m n q λ ces équations détermineront les trois autres points, ~~donc autant~~ qui seront des points de contact d'une conique tangente en M_4. Donc autant il y aura de systèmes de valeurs pour l m n q λ autant il y aura de systèmes de coniques de contact.

Ce qui donne ~~32~~ $2^5 = 32$ systèmes.

Mais parmi ces systèmes celui qui répond à $l = m = n = q = \lambda = 0$

(Si A et B sont nuls en même temps les trois conditions sont satisfaites et on a comme faisant partie du lieu les points d'intersection des surfaces

$$\frac{x x_0 a^2}{x(b^2-a^2)(c^2-a^2)} + \frac{y y_0 b^2}{y(c^2-b^2)(a^2-b^2)} + \frac{z z_0 c^2}{z(a^2-c^2)(b^2-c^2)} = 0$$

et

$$\frac{x_0}{x(b^2-a^2)(c^2-a^2)} + \frac{y_0}{y(c^2-b^2)(a^2-b^2)} + \frac{z_0}{z(a^2-c^2)(b^2-c^2)} = 0$$

~~Chaque point de cette droite possède 3 surfaces H1 orthogonales les plans polaires de H1 par rapport à ces quadriques sont donc aussi orthogonaux et ils rencontrent la droite au même point~~

Ce qui donne la droite $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$ Ce qu'on peut prévoir géométriquement ~~(…)~~

4° Si le point $x\,y\,z$ est sur la developpable enveloppe de Π deux des racines μ et ν par exemple sont égales et alors

$$x x_0 = \frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)^2}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)} \qquad y y_0 = \frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)^2}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)} \qquad z = \ldots$$

μ est la valeur du paramètre qui correspond au plan tangent en ce point à la developpable

inintelligible

Si l'on coupe cette developpable par une droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$$

On aura en remplaçant $x\,y\,z$ par leurs valeurs deux equations du 2e degré en μ du 1er en λ en éliminant λ une equation du 4ème degré en μ, à chaque racine de cette equation correspond une seule valeur de λ la surface est donc du 4ème degré elle est d'ailleurs de 3ème classe

Si le point $x\,y\,z$ est sur l'arête de rebroussement de la developpable on a $x x_0 = \frac{(a^2-\mu)^3}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}$ $y =$

bien

μ étant la valeur du paramètre qui correspond au plan osculateur en ce point à l'arête de rebroussement. Les expressions des coordonnées d'un point de cette courbe montrent que c'est une cubique qui (puisque c'est une arête de rebroussement) est necessairement gauche. Elle est de 3ème classe

Cette cubique a une seule branche infinie sans asymptote à distance finie ~~puisque~~ car la distance d'un point de la courbe à un plan quelconque ne pourrait tendre vers 0 lorsque μ augmente indefiniment que si cette distance était constamment nulle ce qui est impossible puisque la cubique n'est pas plane.

absurde (?)

Les points de contact de cette cubique avec les plans osculateurs isotropes sont donnés par $x x_0 = \frac{(a^2-\nu)^3}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}$ etc ν satisfaisant à l'équation (3) on a donc

$$\frac{x_0^2}{(a^2-\nu)^2} + \frac{y_0^2}{(b^2-\nu)^2} + \frac{z_0^2}{(c^2-\nu)^2} = 0$$

Ce qui donne 4 plans ~~d'ailleurs~~ imaginaires

5° Pour tout point de la developpable situé dans un plan Π et non situé sur la génératrice de contact de ce plan la valeur de la racine simple sera constante et égale à la valeur du paramètre qui définit le plan Π λ étant ~~une~~ constant les coordonnées de cette courbe d'intersection sont données par

bien

$x_0 X = \ldots$

On voit donc que cette courbe est une parabole l'axe de cette parabole est parallèle à la droite

$$\frac{x_0 x(b^2-a^2)(c^2-a^2)}{(a^2-\lambda)} = \frac{y_0 y(c^2-b^2)(a^2-b^2)}{b^2-\lambda} = \frac{z_0 z(\ )(\ )}{c^2-\lambda}$$

On pouvait prévoir que cette section serait une parabole la surface étant du 4ème degré et la génératrice de contact étant une droite double de l'intersection, la section est une conique, mais la développable est tangente au plan de l'infini obtenu pour une valeur infinie du paramètre ρ, par conséquent la section sera aussi tangente à cette droite; elle sera aussi tangente aux intersections du plan Π avec les plans de coordonnées puisque ces plans sont obtenus comme plans Π pour les valeurs respectives a^2 b^2 c^2 du paramètre ρ la développable est aussi tangente ~~aussi~~ au plan polaire de $x_0y_0z_0$ par rapport à l'ellipsoïde

6° Par un point xyz de l'espace passent 3 plans Π si ce point est un foyer de la conique du plan λ, les intersections de ~~ces~~ plans ~~étant~~ avec le plan Π étant deux tangentes à la conique ces droites sont deux génératrices du cône isotrope relatif à xyz par conséquent

le plan $\frac{Xx_0}{\alpha}+\frac{Yy_0}{\beta}+\frac{Zz_0}{\gamma}=0$ ~~le plan~~ $\cancel{\frac{Xx_0}{\alpha}+\frac{Yy_0}{\beta}+\frac{Zz_0}{\gamma}=0}$ en posant $\alpha = a^2-\lambda$ $\beta = b^2-\lambda$ $\gamma = c^2-\lambda$

~~est~~ un des plans qui passent par les génératrices d'intersections du cône $X^2+Y^2+Z^2$ avec les deux plans

$\frac{Xx_0}{\alpha_1}+\frac{Yy_0}{\beta_1}+\frac{Zz_0}{\gamma_1}=0$ $\frac{Xx_0}{\alpha_2}+\frac{Yy_0}{\beta_2}+\frac{Zz_0}{\gamma_2}=0$ en posant

$\alpha_1 = a^2-\mu$ et $\alpha_2 = a^2-\nu$ et les analogues

On a donc

$$X^2+Y^2+Z^2+t\left(\frac{Xx_0}{\alpha_1}+\frac{Yy_0}{\beta_1}+\frac{Zz_0}{\gamma_1}\right)\left(\frac{Xx_0}{\alpha_2}+\frac{Yy_0}{\beta_2}+\frac{Zz_0}{\gamma_2}\right) =$$

$$=\left(\frac{Xx_0}{\alpha}+\frac{Yy_0}{\beta}+\frac{Zz_0}{\gamma}\right)\left(A\alpha x_0 X+B\beta y_0 Y+C\gamma z_0 Z\right)$$

A B C étant des coefficients inconnus on a en identifiant les deux membres

$1+\frac{t x_0^2}{\alpha_1\alpha_2} = A x_0^2$ $1+\frac{t y_0^2}{\beta_1\beta_2} = B y_0^2$ $1+\frac{t z_0^2}{\gamma_1\gamma_2} = C z_0^2$

$$t\left(\frac{1}{\alpha_1\beta_2}+\frac{1}{\beta_1\alpha_2}\right) = B\frac{\beta}{\alpha}+A\frac{\alpha}{\beta}$$

remplaçant A et B par leurs valeurs

$$t\left(\frac{1}{\alpha_1\beta_2}+\frac{1}{\beta_2\alpha_1}\right) = \frac{1}{y_0^2}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{x_0^2}\frac{\alpha}{\beta}+t\left(\frac{\alpha}{\beta_1\beta_2\beta}+\frac{\beta}{\alpha_1\alpha_2\alpha}\right)$$

$$t(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2) = \left(\frac{\beta}{\alpha y_0^2}+\frac{\alpha}{\beta x_0^2}\right)\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2+t\left(\frac{\alpha\beta_1\beta_2}{\beta}+\frac{\beta\alpha_1\alpha_2}{\alpha}\right)$$

bonne idée

mal exécutée

ACADÉMIE DE PARIS

Nom du Candidat : Dulac

Prénoms :

Date et lieu de naissance :

Qualité :

Domicile :

CONCOURS

d

Le ______ 189 .

COMPOSITION EN Spéciales

Suite

$\lambda\ \mu\ \nu$ sont les trois racines de

$$\frac{xx_0}{a^2-\rho}+\frac{yy_0}{b^2-\rho}+\frac{zz_0}{c^2-\rho}-1=0$$

et on a $\frac{xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{yy_0}{b^2-\lambda}+\frac{zz_0}{c^2-\lambda}-1=0$ (4)

retranchant les deux équations et divisant par $\rho-\lambda$ on a

$$\frac{xx_0}{(a^2-\rho)(a^2-\lambda)}+\frac{yy_0}{(b^2-\rho)(b^2-\lambda)}+\frac{zz_0}{(c^2-\rho)(c^2-\lambda)}=0$$

Si on chasse les dénominateurs $(a^2-\rho)(b^2-\rho)(c^2-\rho)$ le coeff de ρ^2 dans l'équation est égal à l'unité d'après la condition (4) cette équation devient

$$\rho^2-\rho\left[\frac{(b^2+c^2)xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{(c^2+a^2)yy_0}{b^2-\lambda}+\frac{a^2+b^2}{c^2-\lambda}zz_0\right]+\frac{b^2c^2xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{a^2c^2yy_0}{b^2-\lambda}+\frac{a^2b^2zz_0}{c^2-\lambda}=0$$

$$\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2=2b^2a^2-(a^2+b^2)(\mu+\nu)+\mu\nu=$$

$$=2a^2b^2+\left(\frac{b^2c^2xx_0}{\alpha}+\frac{a^2c^2yy_0}{\beta}+\frac{a^2b^2zz_0}{\gamma}\right)-(a^2+b^2)\left[\frac{(b^2+c^2)xx_0}{\alpha}+\frac{(c^2+a^2)yy_0}{\beta}+\frac{(a^2+b^2)zz_0}{\gamma}\right]$$

$$\beta_1\beta_2=(b^2-\mu)(b^2-\nu)=\frac{(a^2-b^2)(c^2-b^2)yy_0}{b^2-\lambda}$$

En effectuant la substitution on aurait avec

$$\frac{xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{yy_0}{b^2-\lambda}+\frac{zz_0}{c^2-\lambda}-1=0$$

quatre équations du 1er degré en $x\ y\ z$ par conséquent une relation entre t et λ et tirant $x\ y\ z$ des équations on aurait l'équation du lieu des foyers, les coordonnées étant exprimées au moyen d'un paramètre variable

On peut obtenir rapidement une surface renfermant le lieu en cherchant la surface engendrée par le cercle

$$x^2+y^2+z^2-\frac{(a^2-\rho)x}{x_0}-\frac{(b^2-\rho)y}{y_0}-\frac{(c^2-\rho)z}{z_0}=0$$

$$\frac{xx_0}{a^2-\rho}+\frac{yy_0}{b^2-\rho}+\frac{zz_0}{c^2-\rho}-1=0$$

Ce cercle étant circonscrit à un triangle circonscrit à la parabole contient le foyer

Dulac

HENRI DULAC 1870 – 1955

Robert MOUSSU

Ces quelques lignes sur la vie et l'oeuvre de Dulac empruntent beaucoup à la notice nécrologique présentée par Gaston Julia à la séance de l'académie des Sciences du 26 septembre 1995. Ses extraits sont en italiques.

"Il était né le 3 octobre 1870. A sa sortie de l'Ecole polytechnique, en 1892, il s'oriente vers l'enseignement des Mathématiques. Agrégé en 1895, il fait un court voyage à l'étranger, puis, en même temps qu'il s'acquitte en toute conscience de ses lourdes fonctions de professeur aux lycées de Châteauroux, de Nantes et de Poitiers, il compose sur l'un des sujets qui vont fixer l'attention de toutes sa vie, un premier travail qu'il présente comme thèse en 1903. Toute sa carrière dans l'enseignement supérieur va se dérouler à Grenoble, à Alger, enfin à Lyon, où il demeurera 28 ans, dans la chaire de Mathématiques pures, jusqu'a sa retraite".

"Lorsque Henri Dulac s'oriente vers la recherche, l'étude des points singuliers des intégrales des équations différentielles vient de marquer d'éclatants succès. Les noms de Briot et Bouquet, d'Henri Poincaré, d'Emile Picard, de Paul Painlevé, marquent les principales tendances qui se sont révélées dans cette étude.

Il nous reste à faire une étude approfondie de ces singularités, car les possibilités déjà révélées ne sont que les premières étapes d'une classification qui reste à faire et qui est indispensable pour établir une théorie bien ordonnée et cohérente ; elle va faire l'objet d'efforts soutenus, où l'invention, la pénétration et aussi la persévérance d'Henri Dulac porteront de beaux fruits".

Dans *"ses premiers travaux, rapprochant les vues de Briot et Bouquet et de Poincaré"*, il étudie les points singuliers d'équations différentielles ordinaires holomorphes en dimension deux. Il obtient des résultats fondamentaux et très originaux sur l'existence de solutions singulières et sur l'existence d'intégrales générales. Son approche de ces problèmes représente un travail de pionnier. Ce n'est qu'un bon demi-siècle plus tard, que l'on a vraiment compris son importance. Il avait en effet déjà résolu partiellement un bon nombre de questions modernes : existence de séparatrices, existence d'intégrales premières holomorphes ou multiformes, classification des singularités dicritiques, existence et convergence de formes normales. Ses démonstrations reposent sur des arguments très géométriques dont on a redécouvert l'efficacité au début des années 70 : polygone de Newton, éclatements, monodromie des séparatrices...

Après la grande guerre, il applique ses résultats, ses méthodes à l'étude de l'application retour d'un polycycle d'un champs analytique réel en dimension 2. Il s'agit essentiellement de prouver qu'une telle application a un nombre fini de points fixes ; c'est-à-dire qu'il n'y a pas accumulation de cycles limites sur le polycycle *"On sait l'importance des cycles limites, mais on sait fort peu de chose, hors leur existence possible, sur leur détermination précise et même sur la limitation de leur nombre. Or Poincaré avait énoncé un théorème très remarquable :* ***"Les cycles limites sont en nombre fini, pourvu qu'aucun d'eux ne passe par un col"****, et Ivan Bendixson, dont on connaît les beaux travaux sur les points singuliers des équations différentielles, a longtemps cherché sans succès à montrer que la dernière restriction est inutile en particulier que :* ***"Toute équation Xdx + Ydy = 0, où X et Y sont des polynômes, ne peut avoir qu'un nombre fini de cycles limites"****. Avec une profondeur, une ténacité, une ingéniosité de moyens qui'il faut admirer, Henri Dulac, après une longue recherche, à réussi à démontere ce théorème"*. Malheureusement, cette démonstration considérée comme correcte pendant plus d'un siècle est incomplète. C'est en précisant la méthode de Dulac avec les fonctions multisommables, la résurgence, les cocycles de quasi-fonctions que J. Ecalle et J. Il'Yashenko ont finalement prouvé le théorème de finitude à la fin des années 80.

"Dans un domaine de recherches qui paraissait inextricable, et d'une complication sans issue, Henri Dulac a apporté des principes de classification d'une grande netteté, ... Cette étude lui a révélé beaucoup de faits insoupçonnés. S'attaquant à des questions d'une grande difficulté,..., il a réussi à y faire oeuvre originale et féconde. Ce savant de grand mérite, a montré au cours d'une carrière bien remplie les plus belles qualités morales... professionnelles : dévoueemnt total, bienveillance jamais lassée, compétence indiscutée". Il ***"va d'un air simple à la vérité qu'il aime : la vérité lui sourit et quitte volontiers sa retraite pour se laisser produire au grand jour par un homme aussi modeste".***

EVOLUTION DES ÉPREUVES DE L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

L'arrêté du 2 Octobre 1840 établit le "concours spécial d'agrégation pour les sciences mathématiques", ainsi que pour les sciences physiques. Celui-ci était composé de trois épreuves distinctes :

- la première épreuve consistait en deux compositions écrites, l'une sur le calcul différentiel et intégral, l'autre sur la mécanique ;
- la seconde épreuve, celle de l'argumentation, portait sur les matières qui faisaient l'objet de l'examen de la licence ès-sciences de mathématiques ;
- la troisième épreuve consistait en une leçon sur une matière choisie parmi celles enseignées dans les classes de mathématiques des collèges royaux.

Ces dispositions sont restées valables jusqu'en 1853 pour faire place à une agrégation unique pour les sciences. Les épreuves correspondantes étaient composées de deux types d'épreuves, les épreuves préparatoires et les épreuves définitives :

- les épreuves préparatoires consistaient en trois compositions, d'une durée de quatre heures, une sur sur les sciences mathématiques, une sur les sciences physiques et une sur les sciences naturelles ;
- les épreuves définitives se décomposaient en épreuves pratiques et en épreuves orales, ces dernières étant publiques.

Les épreuves pratiques, d'une durée de quatre heures, consistaient en trois épreuves, une sur les mathématiques appliquées, une sur la physique ou la chimie, et une sur les sciences naturelles, chaque candidat subissant deux de ces épreuves à son choix et les sujets étant tirés au sort.

La première épreuve orale était composée de deux leçons d'une heure portant sur un sujet de mathématique, ou de physique, ou d'histoire naturelle, les sujets correspondants embrassant nécessairement la partie des sciences sur laquelle le candidat n'avait pas fait porter son choix lors des épreuves pratiques. En outre, la première leçon portait sur les programmes du baccalauréat ès-sciences, et la seconde leçon sur les programmes de mathématiques spéciales, ou sur les sciences physiques, ou sur les sciences naturelles. Le sujet de la première leçon était indiqué 24 heures à l'avance et la deuxième leçon donnait lieu à une préparation de trois heures.

La seconde épreuve orale consistait, pour chaque candidat, à présenter, pendant un quart d'heure, une appréciation de chacune de ses deux leçons.

Ce type d'agrégation unique pour les sciences sera remplacé en 1859 par une agrégation pour les sciences mathématiques et une agrégation pour les sciences physiques et naturelles. L'organisation de l'agrégation de mathématiques reprend cependant les mêmes groupes d'épreuves avec les modifications suivantes :

- les épreuves préparatoires, d'une durée de six heures, comportaient deux compositions sur le programme de l'enseignement secondaire, l'une sur les mathématiques et l'autre, sur la physique et la mécanique ;
- les épreuves définitives consistaient en deux épreuves orales et une épreuve pratique. La leçon de la première épreuve orale portait sur les mathématiques élémentaires ou la physique élémentaire, et la seconde leçon, sur les mathématiques ou la mécanique.

L'épreuve pratique, quant à elle, consistait en une opération sur les mathématiques appliquées.

L'existence d'une agrégation de mathématiques autonome ne sera ensuite plus remise en cause. En revanche, entre 1966 et 1894, deux types d'agrégation coexisteront, l'agrégation de mathématiques et l'agrégation pour l'enseignement secondaire spécial, section des sciences appliquées. Nous précisons ci-après l'organisation de chacunes d'elles.

– L' agrégation pour l'enseignement secondaire spécial, section des sciences appliquées :

- les épreuves préparatoires étaient composées de trois compositions de quatre heures consistant en une composition française, une composition d'arithmétique ou de géométrie et une composition de physique ou de mécanique élémentaire ;
- les épreuves définitives étaient composées des épreuves orales et des épreuves pratiques.

Les épreuves orales consistaient en deux leçons, chacune de trois quarts d'heures, et donnant lieu à une préparation à huis clos de trois heures. La première leçon portait sur l'algèbre, la trigonométrie et leurs applications ; la seconde leçon sur la géométrie descriptive et ses applications.

Les épreuves pratiques, d'une durée fixée par le jury, comprenaient une épure de géométrie descriptive appliquée, un levé de plan d'après des mesures prises sur le terrain et donnant lieu à l'emploi des formules de trigonométrie, et un dessin de machine d'après les croquis pris dans une usine.

– L'agrégation de mathématiques , proprement dite n'est, elle, modifiée qu'en 1869. Les épreuves préparatoires comportent trois compositions portant respectivement sur les mathématiques spéciales, les mathématiques élémentaires et la mécanique, et sur une question de méthode et d'histoire des mathématiques ; les épreuves définitives comportent deux leçons d'une heure sur les mathématiques élémentaires et les mathématiques spéciales (préparation de trois et quatre heures), et une composition sur un sujet emprunté à la licence ès-sciences mathématiques, et une épreuve pratique du même type que précédemment.

Cependant, cette organisation du concours d'agrégation de mathématiques sera de nouveau modifiée en 1885, avec un ajustement en 1904 et une légère retouche des épreuves orales en 1942, puis restera en vigueur jusqu'en 1959.

Ainsi, l'agrégation de mathématiques comprenaient en 1885 :

- pour les épreuves préparatoires, quatre compositions :

- de mathématiques élémentaires ;
- de mathématiques spéciales ;
- sur l'analyse et ses applications géométriques ;
- de mécanique rationnelle.

- pour les épreuves définitives, deux leçons et deux compositions :

- une leçon de mathématiques élémentaires, après trois heures de préparation à huis clos et sans document ;
- une leçon de mathématiques spéciales, après quatre heures de préparation à huis clos et sans document ;
- une composition de géométrie descriptive ;
- une composition de calcul numérique.

L'arrêté du 18 juin 1904 redéfinira les épreuves préparatoires en quatre compositions de sept heures :

- de mathématiques élémentaires ;
- de mathématiques spéciales ;
- de calcul différentiel et intégral ;
- de mécanique rationnelle ; et conservera la structure des épreuves définitives, en accordant toutefois la même durée de préparation aux deux leçons, soit quatre heures.

Une légère retouche aura lieu en 1942. Elle portera uniquement sur l'intitulé des deux leçons des épreuves orales et sur la durée de la préparation de la première leçon, laquelle sera ramenée à trois heures.

En outre, 1884 verra la création d'une agrégation pour l'enseignement secondaire des jeunes filles (arrêté du 31 janvier 1883). Cette agrégation comportera deux ordres, celui des lettres et celui des sciences. Cette agrégation, ordre des sciences, se divisera en 1895 en deux sections, l'une de mathématiques et l'autre de sciences physiques et naturelles.

En 1959, l'agrégation de mathématiques (masculine) sera profondément modifiée. Les épreuves préparatoires deviennent :

- une composition de mathématiques élémentaires et spéciales de six heures ;

- une composition d'analyse de six heures;
- une composition de mécanique générale de six heures;
- une composition de mathématiques appliquées de quatre heures.

Les épreuves pratiques d'épure et de calcul numérique sont supprimées, et les épreuves définitives comprennent uniquement deux leçons

- de mathématiques élémentaires;
- de mathématiques spéciales; la durée et le programme de ces épreuves étant fixés chaque année sur proposition du jury.

L'année 1968 profilera l'agrégation de mathématiques actuellement en vigueur. Les épreuves préparatoires comportent trois compositions :

- une composition de mathématiques générales de six heures;
- une composition d'analyse de six heures;
- une composition de mathématiques appliquées de quatre heures, à options :

– Analyse numérique;

– Mécanique générale;

– Probabilités et statistiques. Les épreuves définitives comportent deux épreuves orales, de trois quarts d'heures, avec un temps de préparation de trois heures :

- une épreuve d'arithmétique, algèbre, géométrie et géométrie analytique;
- une épreuve d'analyse, trigonométrie et mécanique.

La seule modification substantielle apportée depuis 1968 est l'ouverture, en 1985, d'une option supplémentaire “Mathématiques pour l'informatique” à la composition de mathématiques appliquées.

Epreuve d'Agrégation 1954

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE : *Sujet.* — On considère l'équation différentielle :

(1) $$2x(1-x)y' + y - 2x = 0.$$

1° *Sans chercher à intégrer,* montrer qu'il existe une solution, et une seule, $Y(x)$, qui soit holomorphe pour $x = 0$. On posera :

(2) $$Y(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

et l'on déterminera les coefficients, ainsi que le rayon de convergence R de la série (2). Comment se comporte la solution générale de (1) au voisinage de $x = 0$?

2° Montrer qu'il existe une valeur réelle α, et une seule, comprise entre $-R$ et $+R$, pour laquelle $Y(x)$ est égal à $-0,2$. Calculer cette valeur α à 10^{-3} près.

3° Dans le plan de la variable complexe x, il existe un cercle de centre α et de rayon ρ à l'intérieur duquel $Y(x)$ ne prend qu'une fois la valeur $-0,2$. Sans chercher à déterminer exactement ρ, proposer une quantité ρ' positive telle que ρ est certainement supérieur à ρ'.

DE L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES "FÉMININE"

La notion d'agrégation "féminine" remonte à l'année 1883 pendant laquelle fut créée l'agrégation pour l'enseignement secondaire des jeunes filles. Cette agrégation comportait deux ordres, celui des lettres et celui des sciences et trois types d'épreuves portant chacune sur les mathématiques, la physique et la chimie, et l'histoire naturelle :

- les épreuves écrites préparatoires composées de trois compositions de cinq heures ;
- les épreuves orales composées de trois leçons d'un quart d'heure, précédées d'une préparation de quatre heures sans documents ;
- les épreuves écrites finales composées de trois compositions de cinq heures.

Dès l'année suivante (arrêté du 5 janvier 1884), cette organisation et simplifiée pour ne conserver que deux épreuves :

- les épreuves écrites composées de quatre compositions de quatre heures :

– une composition de mathématiques ;

– une composition de physique et chimie ;

– une composition d'histoire naturelle ;

– une composition littéraire.

- les épreuves orales composées de trois leçons de trois quarts d'heures, d'une interrogation d'une demi–heure précédées de trois heures de préparation sans documents :

– une leçon de mathématiques ;

– une leçon de physique ou chimie (avec expériences) ;

– une leçon d'histoire naturelle (avec démonstration) ;

– une interrogation sur les langues vivantes (allemand ou anglais), avec thème au tableau.

Suivant une évolution analogue à celle de l'agrégation unique pour les sciences créée en 1853, l'agrégation pour l'enseignement secondaire des jeunes filles, ordre des sciences, se divisera en deux sections en 1894, une section pour les sciences mathématiques et une section pour les sciences physiques et naturelles. Le concours est alors modifié et comprend trois groupes d'épreuves :

- une épreuve commune consistant en une composition sur un sujet de morale ou d'éducation (remplaçant la composition littéraire) ;
- des épreuves spéciales comprenant deux compositions :

– composition sur un sujet d'arithmétique et d'algèbre ;

– composition de géométrie et de cosmographie ;

- des épreuves orales comprenant deux leçons :

– leçon d'arithmétique et d'algèbre ;

– leçon de géométrie et de cosmographie.

En 1922, le nombre de compositions des épreuves spéciales passera de deux à trois :

– composition sur un sujet d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie ;

– composition d'algèbre, de trigonométrie et d'analyse ;

– composition de géométrie, géométrie analytique et mécanique ; et l'intitulé des leçons des épreuves orales est modifié :

– leçon d'arithmétique, d'algèbre et d'analyse ;

– leçon de géométrie, de mécanique et de cosmographie.

Durant les années 1935–38, le concours subira, par étapes, plusieurs modifications substantielles rapprochant inévitablement le concours de celui de l'agrégation masculine de mathématiques : – en 1935, la durée des épreuves spéciales passe à cinq heures ; – en 1937, l'épreuve commune de composition sur un sujet de morale et d'éducation est supprimée ; le concours porte désormais le nom d'agrégation féminine de mathématiques ; et les épreuves spéciales, prenant alors le nom d'épreuves écrites, comprennent trois compositions de six heures :

– composition de mathématiques élémentaires ;

– composition de calcul différentiel et intégral ;

– composition de géométrie analytique et de mécanique ;

– en 1938, le concours est redéfini et prend la forme du modèle masculin :

• des épreuves préparatoires constituées de quatre compositions de six heures :

– composition de mathématiques élémentaires ;

– composition de mathématiques spéciales ;

– composition de calcul différentiel et intégral ;

– composition de mécanique ;

• des épreuves définitives constituées de deux compositions et de deux leçons :

– composition de géométrie descriptive ;

– composition de calcul numérique ;

– leçon de mathématiques élémentaires ;

– leçon de mathématiques spéciales.

Après une légère retouche sur la définition des deux leçons des épreuves orales en 1942, les nouvelles dispositions mises en place en 1959 pour l'agrégation masculine de mathématiques s'appliqueront aussi en 1960 pour l'agrégation féminine de mathématiques.

Le rapprochement des deux concours s'opère progressivement au cours des années 70, et la fusion effective aura lieu en 1976.

Epure. — Deux segments OI et OJ sont perpendiculaires ; leurs longueurs sont : $OI = a$, $OJ = 2a$, a étant une longueur donnée qu'on prendra égale à un centimètre pour faire l'épure. On considère les deux paraboloïdes P, Q, de révolution de même foyer O et de sommets respectifs I et J, et le solide Σ formé des points intérieurs à la fois aux deux paraboloïdes.

Etudier l'épure de Σ, les plans de projection étant choisis comme on voudra ; il sera pourtant commode que, l'épure de O étant oo', le segment oo' ait son milieu au centre de la partie utile de la feuille et que la distance oo' soit égale à 16 centimètres.

Soit OK un segment d'origine O, perpendiculaire à la fois aux segments OI et OJ et de longueur $OK = 4a$; le paraboloïde de révolution R, de foyer O et de sommet K partage Σ en deux solides : soit Σ_1 celui formé des points *intérieurs* à R.

Les candidates ont *le choix* entre :

a) Faire l'*épure* du solide Σ et, son *volume* étant de la forme $\lambda\omega^3$, calculer le nombre λ.

La notice précisera le choix des plans de projection, les constructions faites pour l'épure et le calcul de λ.

b) Faire l'*épure* du solide Σ_1. La notice précisera le choix des plans de projection et les constructions de l'épure.

- CONTRE LA FUSION DES AGRÉGATIONS DE MATHÉMATIQUES - MASCULINE ET FÉMININE

Henri LEBESGUE

Il y a quelque trente ans, un très bon élève de mathématiques élémentaires pouvait traiter à peu près tous les problèmes proposés à l'agrégation féminine; aujourd'hui, on entend déclarer qu'il faut, et au plus tôt, imposer aux jeunes filles le programme de l'agrégation masculine. C'est tomber d'un extrême dans un autre.

Peut-être peut-on le dire maintenant que l'unification des traitements masculin et féminin est acquise? Hier, on aurait été accusé de retarder cette unification légitime, désirable, indispensable; va-t-on prétendre, aujourd'hui, qu'égalité de traitement implique identité des programmes de concours? – Non; l'Etat a besoin de bons professeurs femmes comme de bons professeurs hommes, il a autant de peine à recruter les uns et les autres et c'est pourquoi il a été amené à les payer également.

Mais la Justice, l'Egalité n'exigent-elles pas qu'il soit aussi difficile d'être agrégée qu'agrégé? – La difficulté d'un concours ne provient qu'en partie de son programme; en 1 ... , sans changement de programme, l'agrégation de physique était devenue très facile, elle n'attirait que peu de candidats et la plupart médiocres, en même temps, par un phénomène inverse, l'agrégation de philosophie devenait très difficile. Convenait-il de payer les agrégés physiciens moins que les philosophes au nom de la Justice, ou plus au nom de la loi de l'offre et de la demande? – X, très bien doué, passe l'agrégation en se jouant, Y ne réussit qu'après de longs et persévérants efforts; doivent-ils être rétribués de la même façon?

La diversité des agrégations, inévitable puisqu'il faut diverses catégories de professeurs, ne doit pas être prétexte à classification hiérarchique des agrégations. Certains établissent cependant cette classification et des agrégées souffrent du ton dont on parle de leur titre. Qu'elles veuillent bien réfléchir : rien ne peut modifier le programme du concours qu'elles ont subi jadis; au lieu de s'offenser, ne vaut-il pas mieux sourire et s'émerveiller qu'il y ait tant d'orfèvres? Et dans l' "Elite" !

Si, pourtant, certaines femmes pensaient que le programme masculin doit être imposé désormais aux candidates, elles auraient plus d'autorité pour soutenir leur opinion, si elles commençaient par conquérir l'agrégation masculine. Aucune limite d'âge ne les en empêche. Mais, me dira-t-on, nous ne demandons pas que, pour apaiser notre vanité blessée, on soumette les futures agrégées à des brimades que nous n'avons pas connues; nous reconnaissons que certains des griefs articulés contre l'agrégation féminine ne sont pas sans fondement et nous désirerions voir nos jeunes collègues mieux préparées à leur métier que nous ne l'avons été.

Voici la question éclaircie et bien posée : il n'y a à s'occuper que du meilleur recrutement, de la meilleure préparation des futurs professeurs. Admettre que ce but sera atteint en identifiant les programmes des concours masculin et féminin, c'est s'arrêter à une solution simpliste et paresseuse ; c'est oublier qu'agrégés et agrégées n'ont pas à rendre des services identiques ; c'est surtout négliger les différences entre mentalités masculine et féminine ; c'est supposer bien imprudemment que les programmes masculins sont excellents. Examinons mieux la question.

Un bon professeur doit avoir des qualités morales, des qualités pédagogiques, des connaissances, une culture.

Le concours ne peut déceler les qualités morales, il permet de reconnaître si les candidats ont quelques qualités pédagogiques qui pourront, par la suite, se développer au contact des élèves. Le concours donnerait sans doute, à cet égard, des indications plus précises, s'il n'était permis de s'y présenter qu'après deux années d'enseignement. Pour les agrégations masculines ce serait revenir à une règle ancienne ; mais, pour elles, ce retour est impossible, il écarterait trop de bons éléments de l'Université. Cette réglementation pourrait être, au contraire, adoptée pour les agrégations féminines. Certes, avant de le faire il faudrait en peser longuement avantages et inconvénients ; je ne la propose pas ; je veux seulement faire observer que l'Etat pourrait avoir bénéfice à organiser différemment les agrégations masculines et féminines.

Peu de connaissances sont indispensables ; on a vu des professeurs excellents et qui ne savaient rien de plus que ce qu'ils avaient à enseigner ; on en a vu d'autres qui, très instruits, mais dépourvus de sens pédagogique ou de conscience professionnelle, ne se servaient de leur science que pour faire un enseignement plus critiquable. Il convient pourtant d'exiger le plus possible, car on ne se cultive qu'en s'efforçant d'acquérir des connaissances. "Le programme des connaissances exigées pour l'agrégation" est à fixer, non parce que ces connaissances sont indispensables, mais eu égard au degré de culture auquel on désire voir parvenir les candidats. Or, pour obtenir les mêmes efforts de travail intellectuel d'un jeune homme et d'une jeune fille, il ne convient pas, chacun le sait, de leur assigner la même tâche. Un programme vaste, trop vaste, flatte l'amour propre du jeune homme : dans le domaine qu'on offre à son activité, il s'élance en conquérant, parfois à l'aveuglette, souvent en faisant preuve de belles qualités d'initiative et, s'il est bon, il acquiert des vues synthétiques, des idées directrices qui le guident même lorsqu'il est entraîné dans quelques-unes des régions qu'il n'a pas explorées, dans les parties de son programme qu'il a laissées "tomber".

La jeune fille a besoin d'être mise en confiance ; il lui faut savoir dès l'abord qu'elle pourra, elle qui ne plaint pas sa peine, étudier dans le détail tout son programme, le connaître comme elle aime à connaître. Après cette étude, mais après seulement, elle pourra avoir de l'initiative ; elle se trouvera en pays ami, en famille, elle comprendra, ou plutôt elle sentira, ce qu'il faut faire en chaque circonstance. A sa manière, elle aura acquis une connaissance complète des méthodes de la science étudiée.

"En somme, en chaque future agrégée, vous ne découvrez guère que les qualités de la mère de famille et celles de la brodeuse ; conscience, intuition, souci de la perfection du détail, par exemple, et vous n'ambitionnez pas de lui faire acquérir mieux que ces qualités inférieures ? " Inférieures ? Si nous parlons en hommes, certes, inférieures ! Puisqu'il s'agit de qualités que nous possédons à un degré moindre que nos compagnes. Mais s'il ne s'agit plus seulement d'affirmer une fois de plus notre prééminence, c'est à voir.

A l'homme, à Pierre Curie, il suffisait d'avoir compris que le minerai qu'il maniait contenait un élément nouveau, radioactif ; ce n'était qu'un être de raison, mais c'était assez pour le dénommer et raisonner sur lui. Cela ne pouvait suffire à une femme : ce radium deviné, il fallait le connaître et Mme Curie voulut isoler le radium. – Qui ne se féliciterait que l'homme et la femme aient une fois associé leurs qualités !

Je me souviens de discussions épiques entre deux jeunes physiciens. "La physique, c'est les atomes", déclarait l'un. "La physique, c'est la cire molle", répliquait l'autre. Le premier appréciait surtout cette forme de connaissance qui se laisse enfermer dans une théorie, l'autre goûtait cette connaissance plus intime, cette sorte de communion avec la matière à laquelle on parvient par le "bricolage" des expériences ; bricolage où la cire molle joue souvent un grand rôle. L'un et l'autre ont fait depuis des découvertes remarquables en physique.

Toutes les qualités sont précieuses – même pour la découverte ; cultivons donc les qualités naturelles de chacun et, nous appuyant sur elles, efforçons-nous d'en développer d'autres ; nous reconnaîtrons alors que, pour bien des besognes, hommes et femmes se valent ; encore faut-il, pour aboutir au même but à partir de points de départ différents, suivre des chemins appropriés.

Imposer aux femmes le vaste programme des hommes, c'est ne tenir aucun compte de leurs qualités naturelles ; ce n'est pas leur donner de multiples occasions de mieux comprendre, c'est uniquement les perdre dans la multitude des détails. Et c'est, pour un résultat nul ou mauvais, exiger d'elles, qui en sont physiologiquement incapables, un effort plus grand que celui demandé aux jeunes gens.

En mathématiques, en particulier, ce serait leur demander un effort trop considérable. Les mathématiques ne s'apprennent pas, elles se reconstruisent ; leur étude exige une initiative, une décision intellectuelle continuelle et c'est ce qui coûte le plus aux femmes. Avec le programme des hommes – si on l'exigeait réellement ! – on ne pourrait recruter que très peu d'agrégées parmi les très rares femmes qui ont naturellement les qualités masculines. Celles-ci n'y gagneraient d'ailleurs rien ; des deux agrégations masculine et féminine qui leur sont largement ouvertes, une seule leur resterait et l'on écarterait quantité de femmes qui, l'expérience est faite, sont d'excellents professeurs à tous égards.

Aurions-nous, du moins, de meilleures agrégées ? Il est permis d'en douter. Avec le programme des hommes les candidats voient plus de choses ; mais, de certaines d'entre elles, que reste-t-il ? Presque rien dans beaucoup de cas et c'est peut-être encore trop dire ; dans le rapport sur le concours de l'agrégation masculine de 1927, au sujet de la composition d'analyse, on trouvera des observations sévères du correcteur, se terminant ainsi : “Il faut donc constater, comme les années précédentes, que les candidats à l'agrégation ... n'ont pas, pour la plupart, la culture mathématique qui, d'après les programmes, devrait être exigée d'eux.” Et le Président du jury ajoute : “Quelques chiffres, à l'appui des observations du correcteur : sept notes de 10 à 14, cinq de 5,5 à 9, quarante-cinq de 3 à 5, vingt-deux de 0 à 2,5, soit une moyenne générale de 4, indiquent que les connaissances d'un grand nombre de candidats en analyse sont bien superficielles.”

Je n'ajouterai aucun commentaire, un renseignement seulement : au concours de 1927, dix-neuf candidats ont été reçus agrégés ; la liste des 36 admissibles a été arrêtée à la note 4 sur 20.

Dix ans après l'agrégation, la plupart des agrégés ont tout oublié sauf ce qui n'est pas au-delà des programmes de mathématiques spéciales et de mathématiques générales ; encore ceci est-il vrai surtout pour ceux qui ont à enseigner ces programmes. Certes, rien de ce qu'ils ont étudié ne leur a été inutile, tout a été l'occasion d'une gymnastique intellectuelle qu'on n'aurait sans doute pas obtenu de jeunes hommes avec un programme plus restreint ; mais est-ce une raison pour imposer ce programme aux femmes ?

D'autant que, si beaucoup des agrégés auront à enseigner les mathématiques spéciales à quelque moment de leur carrière, il sera tout à fait exceptionnel d'avoir à demander à une femme un tel enseignement. Cette différence essentielle entre les services à demander aux hommes et aux femmes oblige péremptoirement à organiser deux agrégations différentes, masculine et féminine. On ne comprendrait pas, par exemple, qu'à l'agrégation féminine, une des deux leçons d'oral portât sur les mathématiques spéciales !

Les hommes réussissent à enseigner les mathématiques spéciales qui sont souvent à la limite de leurs propres connaissances ; pourquoi les femmes ne réussiraient-elles pas à enseigner les mathématiques élémentaires après avoir étudié aufdelà comme le prévoit le programme actuel qui contient précisément tout ce qui, après plusieurs années, reste encore su de la plupart des agrégés ? Il serait, certes, désirable qu'elles sachent mieux et comprennent plus profondément ce programme ; mais cela on l'obtiendra d'ici quelques années, pourvu toutefois qu'après avoir appris à ne savoir ni le grec, ni le latin, les élèves de l'enseignement secondaire disposent encore de quelques heures.

Il n'y a donc pas lieu d'augmenter le programme actuel de l'agrégation féminine; d'ailleurs, si on devait le faire, il ne conviendrait pas d'adopter pour cela le programme de l'agrégation masculine, car celui-ci n'a pas été établi en vue du meilleur recrutement des professeurs; il a été imposé par des contingences.

Les mathématiques ont le malheur de servir à quelque chose, ou du moins elles ont cette fâcheuse réputation; elles tiennent une place importante dans les concours d'entrée et dans l'enseignement des Ecoles d'Ingénieurs. Le nombre des jeunes gens qu'attirent ces écoles est tel que tous nos programmes de mathématiques sont indirectement déterminés par elles. De plus, le programme de l'agrégation masculine est aussi influencé par l'enseignement des Facultés, c'est-à-dire par certaines recherches mathématiques modernes, mais pas du tout nécessairement par celles qui ont le plus de rapports avec les éléments des mathématiques.

Bref, le programme de l'agrégation masculine n'est pas libre; si bien que l'évolution de l'enseignement des Ecoles d'Ingénieurs et des Facultés a entraîné celle du programme d'agrégation. Des questions directement liées aux programmes de l'enseignement secondaire et qui aidaient à les mieux dominer ont été peu à peu éliminées et remplacées par d'autres qui, je l'ai dit, ne sont pour les candidats que des occasions d'exercices. Chose étrange, sauf pour le calcul différentiel et intégral, le programme actuel semble éviter tout ce qui prolonge directement les programmes de l'enseignement secondaire. Un agrégé sait, à cause de la géométrie analytique, plus de faits géométriques qu'il n'en a à enseigner pour le baccalauréat, mais rien, sauf peut-être un goût personnel heureusement assez répandu, ne l'a obligé à prolonger ses études de géométrie élémentaire : il ne faudrait pas chercher beaucoup pour découvrir un agrégé ignorant, par exemple, ces polyèdres réguliers qui faisaient déjà l'admiration de Platon! Les connaissances de presque tous les jeunes agrégés actuels en algèbre se bornent à peu près à ce qu'ils ont à enseigner et, pour l'arithmétique, le manuel élémentaire en est le dernier mot. Si quelque jour il y avait lieu de corser le programme actuel de l'agrégation féminine, ce serait en puisant dans les prolongements des mathématiques élémentaires qu'il conviendrait de le faire.

Le programme des hommes, qui touche à plus de sujets, n'a-t-il pas du moins l'avantage d'ouvrir plus de voies à l'activité intellectuelle des agrégés? Oui, il a cet avantage; mais dans la plupart des cas c'est un avantage purement fictif, car il y a fort peu d'agrégés s'occupant de mathématiques en dehors de leurs heures d'enseignement.

Que cette constatation ne fasse pas sursauter; le fait n'a rien d'étonnant, ni de scandaleux; il est dû aux difficultés que comporte l'étude des mathématiques et aussi quelque peu au programme d'agrégation. Un professeur d'histoire, de géographie peut lire une thèse de sa spécialité; si ceci est parfois difficile à un physicien, celui-ci peut du moins se tenir au courant des progrès de la physique par la lecture des articles généraux, des conférences-rapports, etc ... Aucune possibilité analogue n'existe pour les mathématiques; pour comprendre l'énoncé d'une question et son intérêt, une initiation est nécessaire et, je l'ai déjà dit, les mathématiques ne se lisent pas, elles se reconstruisent. Lire des mathématiques est encore faire oeuvre de découverte; et comment espérer que beaucoup de professeurs auront la vigueur d'esprit nécessaire, alors que les sujets vers lesquels on les entraîne sont extrêmement éloignés de ceux que leur enseignement journalier leur a fait pénétrer?

Si l'on s'était proposé – ce dont on ne s'est guère préoccupé – d'entraîner les agrégés à se cultiver en travaillant dans les directions indiquées par le programme d'agrégation, on n'y aurait guère réussi. Voyez à quoi s'intéressent les professeurs de mathématiques que vous connaissez : à la physique, à l'histoire, à la musique, à la littérature, à tout sauf aux mathématiques à de rares exceptions près. Et parmi ceux qui s'obstinent à chercher dans les mathématiques un aliment pour leur esprit, beaucoup se bornent à ressasser les mêmes questions élémentaires; à faire, sous le nom de mathématiques, de la pédagogie parfois terre à terre; à construire des énoncés de problèmes, ce qu'on arrive à considérer comme une oeuvre! On ne leur a pas appris qu'en liaison avec ces questions élémentaires, auxquelles ils pensent tout naturellement, il y a d'importants travaux faits et des recherches à faire.

On utilise ainsi aussi mal que possible cette habileté de bon ouvrier en mathématiques qu'exigent les épreuves écrites de l'agrégation et qui est même la seule qualité que ces épreuves exigent. On sait, en effet, que les compositions écrites, qui sont éliminatoires, consistent en problèmes tellement longs que les membres du jury, eux-mêmes, seraient incapables de les traiter et d'en rédiger la solution dans le temps voulu; de sorte qu'il ne saurait être question de juger des talents d'exposition des candidats d'après leurs copies. Certes, demander à un futur professeur de mathématiques quelque habileté mathématique est aussi naturel et nécessaire que d'exiger du futur professeur de littérature qu'il sache écrire en français; mais on ne demande pas à celui-ci d'être poète, pourquoi choisir les professeurs de mathématiques comme s'ils devaient être des mathématiciens créateurs, alors qu'on les aiguille si mal vers la recherche que presque aucun d'entre eux ne s'y livre malgré son goût et ses talents?

C'est que tout l'enseignement des mathématiques a consisté jusqu'ici à mettre les jeunes en présence des théorèmes, ce qui permet à chacun d'eux de reconnaître jusqu'où il peut suivre cette construction de vérités échafaudées, jusqu'à quel point "la bosse des mathématiques" est développée en lui. L'enseignement est fait pour de futurs mathématiciens et l'on demande tout naïvement aux agrégés de prouver une certaine grosseur de bosse. Rien de mieux, après tout, si on leur avait appris à analyser de quoi sont faites leurs bosses, à rechercher pourquoi certains sont arrêtés par ce qui leur paraît, à eux, immédiat; cela leur servirait à être de meilleurs professeurs, alors que trop d'entre eux s'autorisent de leurs bosses pour mépriser et déclarer stupides les élèves qui n'ont pas un don inné pour les mathématiques. Comme si cette prédisposition était indispensable pour comprendre les rudiments des mathématiques et pouvoir tirer parti de leur étude pour la formation logique de l'esprit!

Les femmes tombent moins souvent dans ce travers; beaucoup se rappellent les difficultés qu'elles ont eu elles-mêmes dans les débuts de leurs études mathématiques, ou les difficultés qu'avaient presque toutes leurs compagnes, et elles sentent qu'il ne suffit pas d'exposer les mathématiques, que, lorsqu'on s'adresse à des enfants, il faudrait aussi les enseigner. Je suis persuadé que si, quelque jour, nous avons pour les mathématiques élémentaires la méthode d'enseignement qui nous manque encore, et que les hommes commencent à peine à instituer, nous la devrons en grande partie aux qualités féminines que l'on méconnait quand on se propose d'unifier les agrégations masculines et féminines.

Mais il est temps de me résumer : le programme actuel des femmes est suffisamment vaste pour donner aux candidates une idée claire de la science mathématique et de ses méthodes, il leur fournit bien assez d'occasions d'acquérir l'habileté mathématique désirable. Si, par la suite, ce programme peut être étendu, il conviendra de choisir, pour le faire, parmi les prolongements directs des mathématiques élémentaires. De telles extensions sont souhaitables; elles auraient en particulier l'avantage d'indiquer aux agrégées des directions dans lesquelles elles pourraient, sans trop de peine, continuer à s'instruire et à se cultiver tout en se préparant toujours mieux à leur métier de professeur.

Si le programme de l'agrégation masculine était libre, il y aurait certes lieu de le modifier dans le même sens; mais on ne doit pas oublier que, par suite de l'existence des classes de préparation aux grandes Ecoles dans les Lycées de garçons, les services à demander aux professeurs sont différents pour les hommes et pour les femmes et que, par suite, la préparation de ces professeurs doit être différente.

Références pour les articles de Henri LEBESGUE.

"Contre la fusion des agrégations de mathématiques masculine et féminine", Rev. Ens. Secondaire de jeunes Filles (1928) pp.49–55.

"A propos de l'agrégation féminine de mathématiques", Rev. Ens. Secondaire de jeunes Filles (1928) pp.257–260.

Ces articles peuvent aussi être trouvés dans le tome 5 des oeuvres complètes de H. Lebesgue.

L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE LINEAIRE EN PREMIERE ANNEE DE DEUG A

Marc ROGALSKI

Université de Lille 1

Nous partons de la thèse que l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année scientifique des universités françaises marche mal, c'est à dire se traduit chez les étudiants par un apprentissage médiocre des concepts et des méthodes de l'algèbre linéaire (cependant les résultats aux examens peuvent très bien masquer cet état de fait, car les étudiants ne sont souvent interrogés que sur des techniques, et n'ont ainsi pas à mettre en oeuvre les concepts eux-mêmes).

Une telle affirmation demande évidemment à être argumentée : en matière d'enseignement et d'apprentissage, les impressions individuelles, voire collectives, sont parfois trompeuses. Pour justifier notre diagnostic, nous nous appuierons sur deux analyses effectuées par des didacticiens qui ont étudié en détail l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire. Dans un second temps, nous essaierons de voir les avantages et inconvénients de l'enseignement traditionnel, c'est à dire qui part de l'axiomatique des espaces vectoriels. Puis nous essaierons de dégager quelques raisons générales des dysfonctionnements constatés, et nous terminerons par quelques suggestions de changements susceptibles d'améliorer, peut-être, la situation.

I. Un état de fait préoccupant

En octobre-novembre 1987, une enquête a été faite auprès de 379 étudiants sortant de la première année du DEUG A : 146 à l'université Paris VII, 50 à l'université Paris VI et 183 à l'université de Lille I. Le questionnaire élaboré par les auteurs de cette enquête, Aline Robert et Jacqueline Robinet [1], comportait, à côté d'exercices proprement dits d'algèbre linéaire, des questions plus générales, destinées à cerner le mieux possible l'idée que se font les étudiants de ce domaine mathématique. Nous citons les conclusions des auteurs de l'enquête :

"Nous constatons que moins du quart des étudiants sait manipuler les notions d'image et de noyau d'applications linéaires et que moins de la moitié des étudiants sait résoudre un système d'équations linéaires 4x4 où le calcul numérique est simple [...] Environ le tiers des étudiants ne sait pas calculer la matrice d'une application linéaire, lorsque l'espace vectoriel n'est pas donné sous la forme de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$[...]

Moins du tiers des étudiants cite $\mathbf{R}^n$ comme exemple d'espace vectoriel[...]

Pour une majorité d'étudiants, enfin, l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter; de plus, ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux".

Parmi les phénomènes constatés, celui de "la perte de sens" est sans doute le plus frappant et le plus significatif. Donnons en deux exemples représentatifs. Premier exemple : si on demande la matrice dans la base naturelle des polynômes de degré au plus 2 de l'application $P \longrightarrow (2x+1)P - (x2-1)P'$, il est fréquent de trouver une matrice où, soit figurent les coefficients des polynômes, soit figure la variable x (l'ensemble de ces deux cas recouvre 21% des étudiants). Deuxième exemple : Si on demande de mettre en rapport la propriété $v \circ u = 0$ avec des relations entre $Im(u)$ et $Ker(v)$ [u et $v \in L(E)$], on obtient beaucoup de réponses qui dénotent des pertes complètes de sens (dans 30% des cas); on obtient de plus 27% de non-réponses; enfin, 24% des étudiants, sur cette question, confondent inclusion d'ensembles et égalité d'ensembles.

C'est déjà là un constat d'autant plus inquiétant qu'il porte sur des étudiants reçus à la première année du DEUG A, et... qu'il date de six ans!

Le deuxième travail sur lequel nous appuyons notre diagnostic est la thèse soutenue à l'Université de Grenoble I en 1990 par Jean-Luc Dorier [2]. On y trouve l'analyse détaillée des productions écrites des étudiants d'une section de DEUG A première année (de l'université Paris VI) tout au long de l'année scolaire (devoirs surveillés, tests, examens partiels et terminaux), en ce qui concerne l'algèbre linéaire. De plus, l'auteur a pu mettre en rapport, d'une part les résultats des étudiants à un "prétest" situé au début de l'année, portant sur leurs acquis dans le domaine du raisonnement mathématique et sur leurs connaissances algébriques, et d'autre part les performances des étudiants dans leurs diverses productions. Dégageons quelques conclusions de ce travail.

L'étude des productions des étudiants tout le long d'une année fournit plusieurs résultats. D'abord, il apparait qu'un seuil minimal de connaissances de logique est nécessaire au succès en algèbre linéaire. Ensuite, l'auteur constate que certaines difficultés en algèbre linéaire très liées à la logique ne sont pas surmontées par des étudiants ayant pourtant un bon score au prétest logique. Il semble ainsi que les questions les plus liées au formalisme de l'algèbre linéaire vont demander de continuer, à leur propos, un apprentissage de certains aspects de la logique. L'auteur constate aussi que la corrélation avec les acquis antérieurs algébriques est moins grande qu'on ne pouvait le penser, mais quelle existe en particulier en ce qui concerne les "techniques algébriques" (résolution d'équations linéaires, par exemple). De plus, certaines des conclusions de Jean-Luc Dorier concernent les deux types de tâches souvent données dans les problèmes d'algèbre linéaire : tâches qui semblent être de "modéliser" dans l'algèbre linéaire des problèmes venant d'autres domaines mathématiques, mais sans qu'on dise en fait que c'est cela que l'on fait (et c'est l'énoncé qui le fait, non l'étudiant); et problèmes purement internes à l'algèbre linéaire formelle. Dans les deux cas, les possibilités de perte de sens sont souvent grandes, et peuvent être dues à des questions de contrat ou à l'incompréhension du "jeu auquel on joue" : ou bien on demande aux étudiants d'appliquer de l'algèbre linéaire là où spontanément ils ne l'auraient pas fait, sans évoquer la moindre justification à ce type de travail, ou bien on leur fait faire des exercices formels apparemment "gratuits", purement internes à la théorie. L'analyse de J. L. Dorier est que ces pratiques pédagogiques ne favorisent pas l'accès au sens de l'algèbre linéaire. En particulier, on ne voit jamais dans les problèmes posés aux étudiants les "vraies" raisons qui ont amenés les mathématiciens, d'abord, à inventer l'algèbre linéaire, puis à lui donner le statut de langue universelle dans laquelle on "parle" dans une très grande partie des mathématiques.

Chaque lecteur ayant enseigné l'algèbre linéaire a sans doute plus ou moins confusément ressenti un jour une certaine inquiétude devant l'incapacité de certains étudiants à mettre du sens dans les notions d'algèbre linéaire qu'on leur enseigne. Mais on se rassure souvent en se disant qu'il y a toujours des étudiants qui ne sont pas à leur place. L'avantage de travaux détaillés comme ceux évoqués ci-dessus est, en l'occurence, de montrer qu'il ne s'agit pas d'exceptions, mais qu'il y a là un problème qui concerne, en fait, la majorité des étudiants du DEUG A première année. Peut être n'en a-t-il pas été toujours ainsi, et il se peut que l'évolution du lycée y soit pour quelque chose. Nous reviendrons plus loin sur cette question, car il nous semble effectivement que les rapports entre l'évolution de la population étudiante et la nature même de l'enseignement de l'algèbre linéaire qui leur est donné sont à étudier de près.

II. Comment enseigne-t-on classiquement l'algèbre linéaire?

Le plan des enseignements de l'algèbre linéaire donnés dans nos universités est assez standard, au delà de quelques variantes qu'on peut rencontrer :

- les axiomes des espaces vectoriels (assez souvent sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et leurs premières conséquences;
- indépendance linéaire, familles génératrices, dimension et bases;
- sous-espaces vectoriels;
- applications linéaires, noyau et image, théorème de la dimension;
- matrices, anneau des matrices carrées, changements de bases;

- déterminants ;
- équations linéaires ;
- inversion des matrices ;
- vecteurs et valeurs propres.

Les variantes les plus fréquentes concernent les quatre derniers points : dans certaines université (ou certaines sections de DEUG), les équations linéaires ne sont pas faites faute de temps ; ou bien les déterminants et/ou les vecteurs propres sont reportés en deuxième année ; l'ordre peut aussi être différent entre déterminants, équations linéaires et inversion des matrices... De plus le degré d'étude de l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$ est loin d'être toujours le même : par exemple, il ne semble pas qu'on enseigne partout le fait qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ peut être défini par k équations indépendantes ou par $n-k$ paramètres linéaires indépendants (c'est à dire est de dimension $n-k$).

Les avantages de ce type d'enseignement

Il est clair qu'il s'agit d'une manière rapide et économique d'enseigner l'algèbre linéaire, qui va du général au particulier. Les résultats fondamentaux sont établis assez tôt. De plus cet enseignement ne demande formellement aucun prérequis, il peut, sur le papier, démarrer en début d'année. On peut ainsi penser qu'on pourra disposer des résultats de l'algèbre linéaire pour les parties du cours de DEUG où il peut servir : suites récurrentes linéaires, équations différentielles linéaires, polynômes et fractions rationnelles.

En fait, il ne s'agit d'avantages que pour l'enseignant et l'organisation de son cours, du moins à supposer que ce type d'enseignement puisse passer ainsi auprès des étudiants. L'expérience montre, nous l'avons vu, qu'il n'en est rien. Et on se retrouve alors dans une situation qui ressemble étrangement à celle que nous avons connue lors de la réforme des mathématiques de 1970 dans les établissements du second degré : un enseignement conçu pour être moderne, pour donner accès rapidement à des connaissances puissantes, débouche en fait sur une incompréhension importante de beaucoup de ceux à qui il est destiné.

Mais cela ne marche pas!

Pourtant, les étudiants, au début, aiment l'algèbre linéaire générale. Ils y trouvent en effet quelque chose de radicalement neuf par rapport au second degré, et c'est toujours valorisant d'apprendre des choses nouvelles. Ils ont de plus l'impression qu'on peut avoir tout oublié du programme du baccalauréat et pouvoir quand même apprendre l'algèbre linéaire. Mais les déceptions viennent assez vite.

D'abord, les premiers exercices sont par la force des choses très formels, semblent un jeu de langage, très éloigné de la pratique mathématique antérieure. Puis des "pertes de sens" importantes (ce terme classique est impropre, il s'agit plutôt de "non acquisition de sens" !) apparaissent, du fait de l'impossibilité de se représenter les notions nouvelles. Les étudiants n'ont en effet pas à leur disposition les multiples exemples élaborés qui viennent donner son sens au processus de généralisation en œuvre dans l'algèbre linéaire : géométrie vectorielle dans l'espace usuel, situations et équations linéaires de l'analyse, sous-espaces et applications linéaires dans les polynômes, transformations linéaires en algèbre. Ils sont alors débordés par des raisonnements "abstraits" qui leur semblent inaccessibles... mais qui sont évidents pour les enseignants! Et les difficultés de la logique en usage en mathématiques, et dont les étudiants n'ont jamais entendu parler auparavant, les font souvent échouer. De plus, les raisonnements de type "ensembliste" y jouent un grand rôle, alors qu'il s'agit de notions toutes neuves pour eux. Quand enfin il s'agit d'appliquer l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'autres domaines mathématiques, il y a très souvent, au niveau du DEUG, des solutions moins "abstraites", même s'il faut parfois calculer.

En bref, et c'est une opinion qu'on recueille souvent quand on interroge les étudiants, l'algèbre linéaire leur semble un domaine purement gratuit, très "abstrait", dont ils ne voient pas l'utilité, même au sein des mathématiques.

III. Des causes épistémologiques et didactiques à ces difficultés

Nous allons essayer de dégager quelles sont les causes, selon nous, de ces dysfonctionnement de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire. Nous en dégagerons de plusieurs types : les causes relevant de l'épistémologie de l'algèbre linéaire et de la place des étudiants et des enseignants vis à vis de cette épistémologie; les difficultés didactiques à organiser des "situations-problèmes" susceptibles de donner du sens aux divers concepts de l'algèbre linéaire; les problèmes de prérequis exigés par l'algèbre linéaire dans divers domaines; la modification de l'état d'esprit des bacheliers due à l'évolution de l'enseignement secondaire.

La place respective des enseignants et des étudiants vis à vis de l'épistémologie de l'algèbre linéaire

Les enseignants et les étudiants n'ont évidemment pas les mêmes rapports avec l'algèbre linéaire. Pour les premiers, ils sont d'abord utilisateurs d'une discipline qui s'est imposée comme une sorte de langue naturelle dans laquelle les mathématiciens expriment spontanément une grande part des problèmes qu'ils ont à étudier. La multiplicité des utilisations des concepts de l'algèbre linéaire leur donne, pour l'enseignant, tout leurs sens, mais lui fait en même temps oublier que ces concepts ont eu une histoire, qu'ils n'ont pas toujours été "naturels", et qu'ils n'ont donc aucune raison de l'être pour les étudiants. Ceux-ci ont en effet à construire leur rapport à l'algèbre linéaire, à en élaborer des sens variés à travers un certain nombre de situations de référence où il leur faut découvrir le rôle spécifique de l'algèbre linéaire. De ce point de vue, les étudiants sont dans une situation beaucoup plus proche de celle des mathématiciens qui ont contribué à construire différents aspects de l'algèbre linéaire que de celle d'utilisateurs familiers que sont les enseignants. Ils ont en particulier à justifier pour eux-mêmes le prix de la construction de cette théorie somme toute assez abstraite et aride quand on sort juste du lycée.

Il apparaît ainsi que, même si le problème n'est pas nécessairement d'enseigner selon le déroulement historique de l'algèbre linéaire, la prise de conscience des impulsions et des difficultés intervenues dans cette histoire, peut nous aider à saisir le hiatus entre la place des enseignants et celle des étudiants par rapport à ce domaine.

Il se trouve que, dans sa thèse, Jean-Luc Dorier a fait une étude de l'histoire et de l'épistémologie de l'algèbre linéaire, et qu'il y mesure le type des activités qu'on fait faire aux étudiants et des tâches qu'on leur donne dans un enseignement "classique" de l'algèbre linéaire à l'aune des spécificités épistémologiques de cette discipline, analysées en particulier à travers son histoire.

On trouve d'abord dans ce travail [3] un panorama détaillé de l'évolution des problèmes et des courants qui ont contribué à la création progressive de l'algèbre linéaire. Ce panorama montre clairement à quel point des échecs d'étudiants que les enseignants jugent irritants et incompréhensibles ont été aussi le fait de mathématiciens prestigieux, et cela pendant longtemps. L'auteur fait en particulier ressortir le fait que l'émergence de l'algèbre linéaire a été un processus long et complexe, une convergence de multiples problèmes, où les changements de points de vue et les apports "extérieurs" ont été déterminants. Quatre aspects principaux, se situant à des niveaux différents, se dégagent de ce processus. La composante du "linéaire", dont l'étude des équations linéaires a été le nerf, mais qui a fait intervenir de nombreux autres domaines : courbes algébriques, théorie des déterminants, formes quadratiques, transformations linéaires, matrices. La composante formée par la géométrie analytique, transition vers le calcul vectoriel et l'abord des espaces $\mathbf{R}^n$. Le calcul vectoriel, issu de la géométrie et effort pour s'en dégager en la formalisant. L'étape, enfin, de l'algèbre linéaire proprement dite, d'abord dans le cadre des espaces $\mathbf{R}^n$, le langage algébrique permettant dans un premier temps de se débarasser des déterminants, puis dans le cadre axiomatique, qui ne se diffusera au-delà des précurseurs, surtout influencés par l'algébrisation de la fin du 19ème siècle, que lorsque la problématique de la dimension infinie l'imposera en analyse.

Cette étude met clairement en évidence à quel point certains concepts centraux ont eu du mal à se dégager : notion de vecteur en géométrie, notion de rang, d'abord de systèmes d'équations avant de l'être pour des vecteurs. Elle montre aussi à quel point la "formalisation" en œuvre dans l'algèbre linéaire a eu des causes variées, internes et externes au niveau des problèmes, mais aussi des causes tenant à de nouvelles préoccupations : structures algébriques, soucis d'exposition, de généralisation, de simplification. Enfin, il est intéressant de noter que l'axiomatisation de l'algèbre linéaire n'a été vraiment acceptée que cinquante ans après son introduction, lorsque le rôle intensif des espaces de dimension infinie en analyse fonctionnelle l'a rendue indispensable.

Ensuite, J. L. Dorier constate qu'aucune des multiples problématiques qui ont fortement influencé le développement de l'algèbre linéaire ne se retrouve dans l'enseignement classique de celle-ci. L'organisation générale (des axiomes aux applications ... si on a le temps!) est à l'encontre de la problématique originelle de l'algèbre linéaire, dont les concepts ont été formalisés après que de nombreux problèmes particuliers pouvant en relever aient été résolus par des méthodes particulières, et ont ainsi un rôle d'unification et de généralisation. Il se trouve de plus que les problèmes et exercices qu'on donne aux étudiants, soit sont ressentis comme formels ou gratuits, soit sont des problèmes d'application où la modélisation n'est pas laissée à la charge de l'étudiant, et qui peuvent souvent relever de méthodes de résolution particulières, familières aux étudiants, ne nécessitant pas l'emploi des nouveaux concepts. Ainsi ceux-ci ne voient même pas toujours l'avantage de changer de point de vue et d'adopter le point de vue de l'agèbre, si ce n'est pour des raisons tenant au contrat d'enseignement.

En résumé, dans la manière standard d'enseigner l'algèbre linéaire, rien n'est vraiment organisé pour que les étudiants se créent une ou des problématiques de cette discipline, car on ne leur donne l'accès qu'à la phase finale du processus historique. Et au fond cela se comprend bien : l'enseignant, trop famillier avec elle, n'a plus besoin de problématique pour utiliser l'algèbre linéaire; comme de plus il a probablement été dans sa jeunesse un bon étudiant capable de se construire tout seul les sens des concepts mathématiques qu'on lui a enseignés (sans doute sans problématique!), il a du mal à imaginer où se situent les problèmes des étudiants.

Les difficultés à introduire l'algèbre linéaire par de "bons" problèmes

Nous adoptons, pour discuter de l'enseignement de l'algèbre linéaire, une optique constructiviste de l'apprentissage : l'étudiant doit construire ses connaissances, établir certains rapports aux savoirs qu'il doit apprendre, leurs donner des significations par rapport à ses représentations du monde, des mathématiques, etc... ; on ne peut le considérer comme un vase plus ou moins vide dans lequel on déverserait des connaissances. Dans cette optique, les didacticiens ont dégagé l'importance, pour introduire certaines notions mathématiques, de disposer de problèmes qui aient un sens pour les étudiants, dont ils peuvent imaginer ce qu'en serait une solution, qu'ils puissent partiellement aborder de plusieurs façons, mais qu'ils ne puissent résoudre complètement avec leurs connaissances antérieures, les connaissances nouvelles qu'on veut leur faire apprendre étant indispensables à la solution. Elles apparaissent ainsi comme un "outil" nécessaire, et plus ou moins constructible, au moins en partie, par l'étudiant lui-même. L'enseignant a alors à décontextualiser l'outil ainsi introduit, à en faire une théorie générale, un "objet" mathématique, qui pourra être réinvesti comme bon "outil" dans la solution d'autres problèmes. Cette "dialectique outil/objet", bien analysée par Régine Douady [4], paraît ainsi un moyen de donner du sens aux connaissances enseignées et de faciliter leur apprentissage par les étudiants.

Il se trouve que, à cause des problèmes épistémologiques dégagés plus haut, il semble difficile sinon impossible de construire ces bons problèmes dans le cas des concepts de l'algèbre linéaire. Car les problèmes du niveau du DEUG qui peuvent utiliser des concepts d'algèbre linéaire pour leur résolution peuvent presque toujours être résolus "à la main", par exemple en se ramenant à des calculs sur des équations linéaires. Les seuls problèmes relevant, sans autre choix possible, des concepts à enseigner sont souvent trop difficiles pour les étudiants au début de l'enseignement (correspondant à des espaces de dimension infinie, ou bien concernant des problèmes difficiles de géométrie algébrique, tels le "paradoxe de Cramer"). Autrement dit, pour les étudiants, les concepts d'algèbre linéaire sont d'abord des objets avant de pouvoir jouer le rôle d'outils; les étudiants sont ainsi privés de tout le cheminement qui a, petit à petit, amené des mathématiciens à l'expression de ces concepts. Ils ont donc beaucoup de mal à les "construire" et à leur donner du sens.

Il faut remarquer que cela marche beaucoup mieux avec des concepts de l'analyse élémentaire tels que la dérivée ou l'intégrale : on peut construire de "bons" problèmes permettant de faire jouer la dialectique outil/objet pour avoir accès à ces concepts. Pour l'intégrale, on pourra consulter par exemple l'enseignement mis au point par Denise Grenier, Marc Legrand et Françoise Richard à Grenoble [5].

Il semble, comme l'a signalé Aline Robert dans [6], que les difficultés rencontrées pour faire jouer la dialectique outil/objet en algèbre linéaire soient souvent constitutives de l'épistémologie des connaissances qui ont un caractère volontairement unificateur, généralisateur, simplificateur qu'il est difficile de faire surgir plus ou moins spontanément à travers des problèmes. C'est le cas pour certains concepts de l'analyse (par exemple la convergence des suites), mais surtout de nombreux concepts de l'algèbre. Par contre, nous pensons que l'utilisation d'une "problématique" explicitée avec les étudiants peut permettre de donner du sens à ce type de concepts; nous y reviendrons plus loin quand nous ferons quelques propositions concernant l'algèbre linéaire.

Quelles connaissances sont prérequises pour l'enseignement de l'algèbre linéaire?

Il se dégage des travaux que nous avons cités, mais aussi de certains autres [7] la nécessité, pour apprendre l'algèbre linéaire, de certains préliminaires ou de certaines connaissances éventuellement utiles à enseigner en même temps que l'algèbre linéaire, mais certainement plus particulièrement dès le début. Ces prérequis ne se placent d'ailleurs pas sur le même plan.

1/ Une compréhension des enjeux de vérité en mathématiques et une certaine pratique de la logique élémentaire et du langage ensembliste semblent des préliminaires nécessaires

Il faut comprendre de quoi on parle, garder le contrôle du sens pour des assertions qui ne vont pas être immédiatement "concrètes", et être capable de faire des raisonnements assez délicats. On constate par exemple que l'implication et l'équivalence soulèvent des difficultés, particulièrement en algèbre, si on ne les distingue pas; ainsi, une démonstration d'indépendance se conclut assez souvent par "si les a_i sont nuls, on a montré que $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0$, donc les u_i sont indépendants"! D'autre part, de gros problèmes apparaissent avec les quantificateurs; par exemple, si on demande à quelles conditions sur le paramètre t l'espace $lin\{e_1, e_2, e_3\}$ contient l'espace $lin\{u(t), v(t)\}$, la question peut être traduite en : chercher t pour que x, ya, b, c vérifiant $xu(t) + yv(t) = ae_1 + be_2 + ce_3$. Il est clair qu'il faut alors dominer les quantificateurs pour s'en sortir!

Parmi les activités fréquentes en algèbre linéaire on trouve : l'identification de sous-espaces, la preuve d'inclusions, l'utilisation d'intersections. Il faut ausi savoir interpréter en termes d'injection, de surjection, la résolubilité ou le nombre de solutions d'équations $f(x) = y$. On utilise en permanence une notion générale d'application, déconnectée de tout support numérique ou graphique. Tout ceci demande une certaine familiarité avec les idées et les méthodes de la théorie ensembliste élémentaire. Il y a un passage obligé par le formalisme, qui intervient d'ailleurs aussi dans l'aspect suivant.

2/ Une acceptation (au moins) de la "démarche" algébrique et axiomatique

Accepter de raisonner avec des symboles sans support immédiat, considérer comme des "êtres" individuels des objets mathématiques riches, manier des lois de composition simples, accepter qu'un détour formel puisse amener à une simplification ultérieure et augmente les champs d'application, que généraliser n'est pas un exercice gratuit... Tout ceci relève de ce qu'on peut appeler la démarche algébrique et axiomatique, et semble déterminant en algèbre linéaire, ne serait-ce que pour en accepter la règle du jeu. Reste que le problème relève sans doute autant, sinon plus, d'une approche "métamathématique" de l'enjeu des mathématiques que de connaissances précises en algèbre.

3/ Une pratique de la géométrie dans l'espace et de la géométrie cartésienne

Il n'y a pas sur ce point, contrairement aux précédents, d'études précises. Mais il y a un fort consensus des personnes qui ont réfléchi à la question, et nous l'adoptons comme hypothèse (voir [6]).

Ces connaissances géométriques vont être un support important pour le langage et le sens en algèbre linéaire. Elles peuvent en effet donner des "images" de certains concepts vectoriels : sous-espaces, combinaisons linéaires, somme directe, ensemble des solutions de systèmes d'équations linéaires, paramétrages linéaires, bases,... Il semble d'ailleurs qu'on puisse les enseigner en même temps que les débuts de l'algèbre linéaire. On peut rajouter à cet aspect des choses le fait qu'une pratique du "dessin symbolique" dans l'espace pour représenter des situations générales de l'algèbre linéaire semble utile, et demande sans doute un apprentissage particulier parallèle à celui de l'algèbre linéaire.

Sur ces trois points, il faut bien constater que les bacheliers arrivent dans l'enseignement supérieur sans pratiquement de formation. Logique et théorie des ensembles, même élémentaires, ont à peu près disparu du lycée; le retour en arrière après les déboires de la réforme de 1970 est manifestement, sur ce plan, allé bien trop loin. Si la géométrie est de nouveau présente, l'outil vectoriel est manifestement sous-estimé dans la pratique des enseignements, et la géométrie cartésienne est peu développée. Par exemple, beaucoup de bacheliers pensent qu'une droite dans l'espace est définie, comme dans le plan, par une seule équation. Enfin, il suffit de demander à des étudiants de "faire des dessins" pour les voir immédiatement paniquer!

L'état d'esprit des nouveaux bacheliers face aux exigences de l'algèbre linéaire

Les étudiants de première année de DEUG A, ont souvent eu la moyenne aux épreuves scientifiques du baccalauréat, mais rarement une mention. On trouve parmi eux environ 70% de bacheliers C et 30% de bacheliers D (assez différents, en particulier ils ont vu peu de géométrie, voir [7]), et entre 30 et 40% de redoublants. Il s'agit en général d'un public plutôt scolaire, dont l'épistémologie spontanée se résume assez bien dans la formule "telle notion est importante parce qu'elle peut servir pour les problèmes d'examen", et qui a tendance à prendre les mathématiques pour un ensemble de recettes permettant de résoudre des problèmes bien calibrés, en gros les problèmes de baccalauréat, prévus pour fonctionner dans un seul cadre. Ces étudiants s'attendent à un prolongement dans le supérieur de ce type de mathématiques, et vivent très mal la rupture de contrat, même annoncée, qui a lieu sur ce point. Insistons sur deux aspects de l'enseignement secondaire qui risquent d'être des obstacles sérieux à l'abord de l'algèbre linéaire.

• Depuis quelques temps, la mode semble être à la prédominance des "activités". Il s'agit là d'une réaction a priori assez saine aux excès de la réforme de 1970. Mais il semble que le "tout activités" ait maintenant des effets pervers, dans la mesure où il apparaît que les mathématiques se résument pour les étudiants à des résolutions ponctuelles d'exercices isolés sans que des bilans globaux soient tirés. Les connaissances mathématiques sont d'abord des connaissances générales : ce qui a marché dans tel exercice où problème, c'est telle méthode réinvestissable, tel concept théorique adapté à telle catégorie de problèmes, telle propriété générale. Or les programmes du second degré, et plus encore les commentaires qui les accompagnent mettent sans cesse en garde les enseignants contre "trop de général". Mais du coup, s'agit-il encore de mathématiques? Un exemple significatif de ce phénomène est la pratique des "suites de références" remplaçant le concept de convergence. Certes celui-ci est difficile, et il ne serait pas raisonnable de le supposer acquis à l'issue du second degré; est-ce une raison pour le supprimer totalement, et d'aboutir ainsi, par absence de toutes considérations théoriques sur la convergence, à rendre impossible l'énoncé "la somme de deux suites convergentes l'est encore", et d'obliger les élèves à des gymnastiques effroyables pour, dans chaque cas concret, montrer que la somme de deux suites données convergentes l'est aussi? Certes, les mathématiques c'est aussi une pratique du "bricolage", mais à condition de tirer des bilans théoriques (c'est à dire mathématiques) du bricolage. La prise de conscience qu'en mathématiques (et souvent dans les sciences) on a à faire des "détours théoriques" semble ainsi totalement absentes chez les nouveaux bacheliers. Or l'algèbre linéaire est par excellence l'un de ces détours théoriques qui unifient de nombreuses situations et permettent de résoudre de nouveaux problèmes inaccessibles sans eux.

• L'une des manières de rentabiliser ces détours théoriques est la pratique de la "modélisation intramathématique", c'est à dire l'activité qui consiste à traduire un problème du cadre naturel où il est donné dans un autre cadre théorique, dans lequel on pourra utiliser des résultats puissants mis au point dans ce dernier cadre. Par exemple, si on cherche les polynômes P de degré au plus n qui vérifient l'identité $P(x+1) - 3P(x) = Q(x)$, où Q est un polynôme donné de degré au plus n, on a tout intérêt à l'écrire sous la forme de l'équation linéaire générale $T(P) = Q$, où T est une application linéaire dans un espace vectoriel bien choisi. De même la solution de bien des problèmes linéaires consiste à choisir une "bonne" base dans un espace ad hoc. Or cette activité de traduction intramathématique semble absente des pratiques du second degré. De façon analogue, il ne semble pas non plus qu'on habitue les élèves à effectuer des "changements de cadre", c'est à dire à exprimer un problème posé dans un cadre, par exemple dans le cadre numérique, dans un autre, par exemple géométrique, ou symbolique. Là encore, il s'agit d'une pratique pourtant essentielle en mathématiques, et elle est centrale dans l'utilisation de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes.

IV. Une proposition pour enseigner autrement l'algèbre linéaire

Le constat des difficultés de l'enseignement de l'algèbre linéaire et l'analyse de ces difficultés nous a amenés à essayer depuis quelques années une autre pratique de cet enseignement à l'université de Lille 1, dans une section "expérimentale" (ce terme signifiant simplement que nous avons disposé d'une grande liberté dans l'organisation de l'enseignement et des contrôles). Ce n'est que depuis 1991 environ que l'expérience commence à être à peu près "stabilisée", c'est à dire fondée sur des bases assez claires et avec peu de modifications d'une année à l'autre. M. C. Ayats, G. Chen, M. J. Delval, M. C. Gaultier de Kermoal, M. Rogalski, N. Roussignol ont été les principaux acteurs de cette phase de l'enseignement.

Nous allons, après avoir précisé l'hypothèse générale sur laquelle nous nous appuyons, décrire brièvement les principes qui ont guidé nos choix d'enseignement, puis l'organisation de celui-ci (pour plus de détails, voir [12]). Bien entendu, bien d'autres manières d'enseigner l'algèbre linéaire sont possibles (voir par exemple [13] ou [14]). Nous ne présentons cet exemple que pour montrer que d'autres choix que ceux de l'enseignement "classique" sont viables, respectant nettement plus les contraintes épistémologiques et didactiques que nous avons dégagées.

L'hypothèse générale

Compte tenu des analyses précédentes, nous faisons l'hypothèse qu'il y a lieu de mettre en oeuvre dans l'enseignement plusieurs stratégies, longues et imbriquées, jouant sur le levier "méta" et les changements de cadres (y compris intramathématiques) et de points de vue, pour obtenir une modification efficace pour suffisamment d'étudiants.

Par stratégie longue [9], nous entendons un type d'enseignement qu'on ne peut fractionner, le temps long en étant un élément constitutif, notamment à cause de toute la préparation mathématique, des changements de contrat didactique qui doivent faire leur preuve auprès des étudiants, en particulier à travers l'évaluation, enfin à cause du déroulement non linéaire du cours imposé par l'usage des reprises et changements de points de vue.

Par levier "méta" [10] nous entendons l'utilisation de discours de l'enseignant et d'informations données par lui portant sur : la connaissance des étudiants sur leurs connaissances en mathématiques ou sur leur manière de les apprendre; ou sur les mathématiques (fonctionnement, utilisation, distinction entre domaines particulier ou généraux, rôle des détours théoriques...); ou sur les mathématiques enseignées, par exemple création de problématiques, introduction de méthodes ou d'éléments amenant une réflexion sur des concepts particuliers, des questionnements, etc. Ces informations doivent évidemment être accompagnées d'activités des étudiants qui nécessitent de les utiliser.

Par changement de cadres ou de points de vue [4], nous entendons l'organisation du cours et la mise en place d'activités de résolution de problèmes qui utilisent des traductions d'un concept ou d'une question d'un cadre dans un autre (du formel au numérique, du numérique au géométrique...) ou qui amènent à changer de point de vue sur une notion (par exemple identifier une équation linéaire $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$ avec le vecteur $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, et passer de la pratique des combinaisons linéaires d'équations à la notion de rang d'une famille de vecteurs...).

Les choix stratégiques

(a) Une manière de tenir compte de la nature particulière des concepts de l'algèbre linéaire est d'avoir recours dans l'enseignement, à des moments propices et bien déterminés, à des réflexions ou des activités d'ordre méta : d'une part pour éclaircir la nature particulière de ces concepts (qu'est-ce qu'une équation linéaire générale? rapport entre rang de vecteurs et rang d'équations...); d'autre part pour faire vivre aux étudiants une activité de réflexion sur certains concepts mathématiques (rôle des axiomes des espaces vectoriels, double point de vue des équations et du paramétrage pour représenter un sous-espace de $\mathbf{R}^n$,...); enfin pour leur donner des points de repères, ou des méthodes les aidant à aborder les problèmes (quelles méthodes pour montrer que deux sous-espaces sont identiques? pour déterminer l'intersection de deux sous-espaces? pour déterminer noyau et image d'une application linéaire? etc).

(b) De manière complémentaire, il est souhaitable de concevoir une phase préparatoire assez longue précédant l'enseignement des premiers concepts d'algèbre linéaire, qui mette les étudiants en condition d'apprécier le caractère unificateur de ces concepts, moyennant les interventions "méta" correspondantes. Il s'agit donc d'organiser une "convergence" de certaines connaissances que, justement, l'algèbre linéaire unifiera et interprètera dans un cadre plus général. C'est pendant cette phase que les prérequis indispensables sont complétés, voire construits.

(c) Tout au long de l'enseignement, les changements de cadres et de points de vue sont favorisés, même s'il n'y a pas d'organisation du type dialectique outil/objet, notamment avec la géométrie au début de l'enseignement, avec extension au double point de vue équations/paramétrage pour les sous-espaces de $\mathbf{R}^n$, puis, lors de l'introduction de l'algèbre linéaire "générale", entre algèbre et autres domaines mathématiques, en mettant en valeur "la modélisation intramathématique".

(d) Enfin, un choix plus particulier a été fait d'organiser l'enseignement pour arriver à dégager, de manière centrale, la notion de rang, dont les travaux historiques et épistémologiques ont montré à la fois qu'elle est effectivement centrale en algèbre linéaire et particulièrement difficile pour les étudiants. Cela amène à privilégier l'entrée dans l'algèbre linéaire par la théorie des équations linéaires, pour lesquelles la notion de rang se présente naturellement. Cela amène aussi insister sur le rang d'un système de vecteurs plus que sur l'indépendance seule.

Il importe de voir que notre problématique n'est pas de mettre en place une "progression douce" : $\mathbf{R}^2$ - $\mathbf{R}^3$ - $\mathbf{R}^n$ - algèbre linéaire générale, dans la mesure où, même s'il existe sans-doute des difficultés didactiques croissantes avec la dimension et le caractère de plus en plus abstrait, la difficulté principale nous semble être plus qualitative que quantitative. L'organisation choisie de l'enseignement vise donc à dégager des problématiques, à mettre en évidence des phénomènes de rapprochement et de changement de cadres ou de points de vue, à susciter des réflexions sur les enjeux, à faire accéder les étudiants à une démarche méthodologique qui permette une meilleure compréhension des concepts. De ce point de vue, il peut sembler y avoir un paradoxe apparent : pour améliorer les acquisitions, nous développons une stratégie plus exigeantes envers les étudiants, avec le risque, au moins provisoire, d'une baisse dans les réussites apparentes aux contrôles.

L'organisation globale de l'enseignement

(a) Première étape. Développer des préliminaires en même temps que le début de l'algèbre linéaire, et organiser problématiques, changements de cadres et convergence de points de vue différents.

Nous développons au début du cours l'activité "circuit électrique" (telle que Marc Legrand l'a élaborée [11]) susceptible de favoriser la compréhension par les étudiants du raisonnement mathématique, les éléments de langage de théorie des ensembles, et des compléments de géométrie dans l'espace.

En ce qui concerne l'algèbre linéaire, nous introduisons dès le premier cours la méthode de Gauss pour un système de m équations à n inconnues, en utilisant $\mathbf{R}^n$ et sa structure linéaire simplement comme le référentiel où l'on cherche les solutions. Cela donne tout de suite un moyen puissant de résolution de problèmes tant en algèbre qu'en géométrie du plan et de l'espace. De plus, cela permet de situer ce qui va être pour nous la problématique de base de l'algèbre linéaire : la résolution des systèmes d'équations linéaires, dont nous voulons tirer les concepts de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, de rang, de double représentation par équations et par paramétrage. Les questions de base, dont nous tentons qu'elles deviennent des questions pour les étudiants, et qui vont justifier l'introduction des concepts de l'algèbre linéaire, sont :

- ai-je trop d'équations, pas assez, juste ce qu'il faut ?
- combien de paramètres me faut-il pour décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations? et les seconds membres permettant de le résoudre ?

Nous continuons par un enseignement de géométrie cartésienne dans $''^3$ centré sur le double aspect équations/paramétrage.

(b) Deuxième étape. Cette étape débute par une présentation explicite aux étudiants de toutes les interrogations communes qu'on peut tirer de ce qui a été fait dans la première étape, et met en place le changement de point de vue consistant à considérer une équation linéaire homogène comme un vecteur de $\mathbf{R}^n$. On définit alors indépendance linéaire et rang, et on met en évidence la propriété d'invariance de ce dernier par des combinaisons linéaires réversibles (au moyen du lemme de l'échange). Suivent alors la description paramétrique des sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ définis par des équations, puis le passage inverse, les notions de dimension et bases d'un sous-espace. Du même coup, sont établis les résultats sur les systèmes d'équations linéaires conjecturés dans la première partie, ainsi que le théorème sur le rang des lignes et celui des colonnes d'un tableau de nombres.

Pour la démonstration des résultats fondamentaux, nous utilisons une formulation abstraite, en évitant l'usage des coordonnées; nous le justifions par le recours à la démarche algébrique (à laquelle nous faisons réfléchir les étudiants lors d'activités sur des éléments de théorie des groupes à propos de groupes concrets), et pour favoriser la transition vers la théorie abstraite des espaces vectoriels.

Enfin, nous donnons des éléments de méthodologie sur la résolution des problèmes concernant les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$: inclusion égalité, intersection, paramétrages et équations de sous-espaces de $\mathbf{R}^n$.

Parallèlement à l'algèbre linéaire, dans cette étape, nous utilisons systématiquement des méthodes linéaires dans d'autres domaines mathématiques : polynômes, suites récurrentes linéaires, équations différentielles linéaires.

(c) Troisième étape. Nous traitons dans cette étape l'algèbre linéaire abstraite (axiomatique des espaces vectoriels, espaces de dimensions finis, applications linéaires...) et son utilisation comme cadre de modélisation interne aux mathématiques, en même temps que nous dégageons explicitement un certain nombre de méthodes pour les types de problèmes de l'algèbre linéaire et pour son utilisation. Nous mettons à ce propos en évidence des situations types de référence, déjà vues antérieurement, mais relues dans le cadre de l'algèbre linéaire : suites récurrentes linéaires, polynômes, équations différentielles linéaires, une équation fonctionnelle....Cela se fait en donnant aux étudiants des problèmes riches où le contrat soit de modéliser dans l'algèbre linéaire la situation proposée. L'un des types de problèmes privilégiés est de rechercher une modélisation par l'équation linéaire "générale" $T(u) = v$. La coordination avec d'autres domaines mathématiques du programme est donc, dans cette étape, essentielle, et c'est l'une des contraintes qui mènent à un "projet long".

(4) Quatrième étape. Cette étape est plus technique et plus brève. Elle comporte l'étude des matrices, les techniques de changement de bases, et l'inversion des matrices carrées. Bien sûr, l'outil "matrices", introduit comme tel à propos des applications linéaires, est réinvesti dans divers problèmes, en particulier d'autres domaines des mathématiques. Mais nous ne cherchons absolument pas à faire des étudiants des virtuoses du calcul matriciel, puisque notre but est la compréhension des concepts : un peu de calcul y aide, trop de calculs en détourne les étudiants, toujours adeptes spontanés du "plutôt calculer que raisonner" !

Quelques points plus particuliers

(a) Nous avons choisi d'enseigner des méthodes en algèbre linéaire (et sur d'autres mathématiques de la première année aussi, d'ailleurs), de façon à donner la possibilité aux étudiants d'aborder des problèmes assez riches et difficiles, les seuls aptes à mettre en valeur l'épistémologie des savoirs en algèbre linéaire et à leur donner ainsi du sens. Rappelons que des méthodes ne sont pas des recettes qui donnent des réponses, mais un moyen rationnel de se poser, devant un ou des problèmes, des questions pertinentes et de piloter ainsi l'exploration nécessaire à la résolution. Quand des méthodes générales paraissent peu disponibles, nous avons choisi de donner des situations de référence qui pourront servir de modèles pour "faire pareil" (en particulier pour la modélisation de problèmes d'autres domaines mathématiques dans l'algèbre linéaire). Pour plus de détails sur l'enseignement de méthodes, on peut voir [15], et, pour celles concernant l'algèbre linéaire, [12].

(b) Nous utilisons un logiciel pour visualiser la méthode de Gauss et faire acquérir aux étudiants une intuition géométrique de la combinaison linéaire d'équations et de l'élimination d'une variable. Ce logiciel, élaboré par Carlos Sacré, de l'université de Lille I, semble une bonne introduction à la notion de faisceaux de plans, qui est ensuite généralisée à $\mathbf{R}^n$.

(c) Nous faisons travailler les étudiants en petits groupes de 4, à l'occasion de ce que nous avons appelé des "ateliers", sur des problèmes riches et cruciaux pour certains aspects de l'algèbre linéaire. Ce type d'activités permet de mieux respecter le temps propre de recherche des étudiants, favorise les échanges et discussions entre eux, et c'est le moment le plus propice pour essayer de mettre en œuvre les démarches méthodiques dont nous avons parlé plus haut. Les thèmes sur lesquels ont lieu ces ateliers, en algèbre linéaire, sont variés. Citons : bases et carrés magiques, dualité équations/paramétrage ; initiation à la démarche algébrique sur des éléments de théorie des groupes ; utilisation de dessins symboliques en algèbre linéaire ; introduction à la problématique de l'axiomatisation de l'algèbre linéaire...

(d) Nous avons mis au point certaines situations où l'activité demandée aux étudiants mèle volontairement travail mathématiques classique et réflexion "méta" sur les enjeux des concepts mathématiques utilisés, leurs avantages ou inconvénients, le rôle du détour théorique... Autrement dit, nous demandons à certains moment aux étudiants de faire, non seulement des mathématiques techniques, mais aussi un peu d'épistémologie. Pour plus de détails, voir [12] ; pour une étude approfondie d'une de ces situations ("la formule de Gregory"), voir [16].

Cela marche-t-il ?

Les points à valider sont de deux sortes : l'évaluation globale des performances, et savoir si l'hypothèse générale que nous avons faite est confirmée ou non, ce dernier point intéressant plus particulièrement les didacticiens. J. L. Dorier, A. Robert, J. Robinet et M. Rogalski ont, depuis trois ans dépouillé les productions des étudiants pour essayer de répondre à ces questions.

En ce qui concerne l'évaluation globale des performances, il s'agit essentiellement de savoir si le projet est viable, c'est à dire si le fait d'être en un certain sens plus exigeant n'entraine pas un taux d'échec insupportable.

Pour ce qui est de notre hypothèse générale, plusieurs choses sont à tester.

(a) Le rôle du "méta" : Il s'agit de rechercher les traces de l'utilisation du "méta" par les étudiants : Quelle compréhension ont les étudiants de la nature particulière des concepts introduits ? Quels questionnements peuvent-ils produire sur une situation mathématique donnée ? A quels moyens de contrôle peuvent-ils penser ? Notamment, font-ils appel aux petits dessins, ou à la cohérence entre le nombre de paramètres et le nombre d'équations, entre la dimension et le nombre maximum de vecteurs libres... Cela nous a amenés à proposer des situations où l'objectif est d'abord un questionnement, ou un contrôle.

(b) Les changements de cadres et de points de vue : Il s'agit de savoir si la notion même de jeux de cadres a été perçue, dans quelle mesure elle est disponible ou seulement mobilisable ? Est-elle mise en œuvre dans des problèmes de modélisation par du linéaire, et comment ? Les changements de points de vue sont-ils une aide pour la compréhension ? N'entrainent-ils pas des confusions, au moins pendant un certain temps ?

(c) L'enseignement de méthodes : Il s'agit d'évaluer son impact, notamment en proposant la résolution d'exercices nécessitant une réflexion préalable sur les méthodes utilisables, puis en détectant des indices de cette réflexion (par exemple en faisant rédiger la démarche utilisée.

Les problèmes rencontrés pour ce type d'évaluation, des résultats provisoires

Pour l'examen détaillé de ces difficultés méthodologiques, nous renvoyons à [17], nous bornant ici à évoquer sommairement quelques points.

1) Dans une ingénierie jouant sur le temps long, il est difficile de choisir le moment de l'évaluation, car beaucoup d'interférences ont lieu avec l'organisation de leur temps de travail par les étudiants eux-mêmes, de façon non contrôlée par les enseignants. Ainsi, les phénomènes de mûrissement des connaissances, fonctions de l'investissement (variable tout le long de l'année) des étudiants, sont difficilement accessibles aux bons moments.

2) Il est très difficile de trouver des traces écrites de réflexions "méta" de la part des étudiants : dans le contrat usuel des productions écrites, on ne fait figurer que la solution, jamais comment on l'a trouvée.

3) Un certain nombres de "perturbations" ou "bruits de fond" cachent souvent les phénomènes que nous voulons observer. Il s'agit principalement des phénomènes suivants :

- le fait que les étudiants aient ou non déjà rencontré un problème du type de celui utilisé pour l'évaluation ;
- la variabilité de l'enseignement au niveau des sous-groupes d'exercices ;
- les rapides évolutions du public étudiant en France, sous la pression de l'élargissement de l'accès à l'université et des modifications de l'enseignement des lycées ; ces deux phénomènes font que certains des constats que nous pouvons faire relèvent éventuellement autant d'une analyse sociologique que de la didactique.

Nous nous proposons donc de chercher de nouveaux moyens d'accès aux variables didactiques que nous souhaitons étudier, car il nous est difficile, dans l'état actuel, d'aboutir à des conclusions assez fiables.

Donnons quand même quelques résultats partiels, sous les réserves faites ci-dessus.

- Les résultats d'ensemble sont raisonnables : l'ingénierie n'entraine pas d'échec massif à l'examen ; mais ce résultat, s'il nous rassure, a peu de signification didactique (il implique toutes les mathématiques de la première année, ainsi que les autres matières scientifiques) ;
- il semble que l'appropriation par les étudiants du double point de vue équations/paramétrage sur les sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ ait lieu pour une majorité des étudiants ;
- la notion de rang d'une famille de vecteurs et les méthodes pour le déterminer semblent aussi acquises ;
- pour l'instant, les possibilités de questionnement autonome des étudiants semblent assez faibles ;
- de même la capacité à modéliser spontanément un problème dans le

cadre de l'algèbre linéaire ne semble acquise que par une petite minorité des étudiants ;

• il se confirme que des confusions entre équations et vecteurs s'installent pendant une certaine période chez environ la moitié des étudiants ;

• enfin, il semble se confirmer qu'il est possible de faire fonctionner avec les étudiants des situations "méta", ou l'enjeu est de nature autant épistémologique que directement mathématique ; voir [16].

La clef des améliorations de l'ingénierie en vue d'une meilleure efficacité réside peut-être dans la multiplications de ce type de situations.

Références

[1] ROBERT A. et ROBINET J. : 1989, Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, Cahier de didactique des Mathématiques n°53 IREM de Paris 7.

[2a] DORIER J.L. : 1990, Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique, Thèse de doctorat de l'Université J.Fourier-Grenoble 1.

[2b] DORIER J.L. : 1991, Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 11/2.3, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

[3] DORIER J.L. : 1990, Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire, Cahier Didirem n°7 IREM de Paris 7.

[4] DOUADY R. : 1986, Jeu de cadres et dialectique outil/objet, dans Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7/2, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

[5] LEGRAND M. : 1990, "Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale", dans : Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, IREM de Lyon, 1990.

[6] ROBERT A. : 1987, De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, Cahier de didactique des Mathématiques n°7 IREM de Paris 7.

[7] ROBERT A., ROBINET J. et TENAUD I. : De la géométrie à l'algèbre linéaire. Brochure de l'IREM, 1987, Université Paris 7.

[8] AUTHIER H. : 1990, "Variété des acquis des bacheliers C, D ,E et F", dans : Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, IREM de Lyon, 1990.

[9] ROBERT A. : 1992, Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, dans Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12/2.3, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

[10] ROBERT A. : 1993, Prise en compte du "méta" en didactique des Mathématiques, Cahier de DIDIREM n° 21, IREM de Paris 7.

[11] LEGRAND M. : "Circuit", ou les règles du débat mathématiques, dans : Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, 1990.

[12] ROGALSKI M. : 1991, Un enseignement d'algèbre linéaire en DEUG A première année, Cahier Didirem n° 11 IREM de Paris 7.

[13] HAREL G. : 1986, A comparison between two approaches to embodying mathematical models in the abstract system of linear algebra. Proceedings of the 8-th annual conference of PME, NA Michigan (pp 127-132), Ed G. Lappan, (Michigan 1986).

[14] LEHMANN E. : Mathématiques pour l'étudiant de première année, 1 et 2. Belin.

[15] ROGALSKI M. : 1990, "Enseigner des méthodes en mathématiques", dans : Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, IREM de Lyon, 1990.

[16] DORIER J.L. : 1992, Illustrer l'aspect unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire, Cahier Didirem n° 14 IREM de Paris 7.

[17] DORIER J.L., ROBERT A., ROBINET J. et ROGALSKI M. : L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions, Actes du Colloque "Vingt ans de didactique des mathématiques en France", Paris, 1993, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Annexes 1

Un exemple de devoir permettant de faire réfléchir les étudiants sur l'enjeu du détour théorique que représente l'algèbre linéaire générale

Il s'agit d'un devoir sur la formule de Gregory-Newton.

On demande d'abord aux étudiants de déterminer tous les polynômes de degré au plus 3 vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = -2$, $P(2) = 3$, $P(3) = -1$. Spontanément, ils écrivent P avec des coefficients indéterminés, puis résolvent un système de 4 équations à 4 inconnues. On leur demande ensuite de dire quel système d'équations ils auraient à résoudre pour déterminer un polynôme de degré au plus 13 prenant en $0, 1, \ldots, 12$ des valeurs qu'on donne explicitement. On leur annonce alors que devant le peu de chance d'y arriver sans erreurs on va exprimer le problème dans une base plus commode de l'espace vectoriel $\mathbf{P}_n(X)$.

On introduit alors l'opérateur Δ de différence finie défini par $\Delta P(x) =$

$P(x+1) - P(x)$, et les polynômes $U_0 = 1$, $U_k = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}$, pour $k \leq n$. On fait démontrer que les U_k forment une base de $\mathbf{P}_n(X)$, et identifier les polynômes $\Delta^p U_k$. On demande ensuite de montrer la formule cherchée : tout polynôme P s'écrit, de façon unique : $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \Delta^k P(0) U_k(x)$.) Pour cela, on suggère d'imiter la démonstration de la formule de MacLaurin, sans autre indication.

On demande alors de résoudre le problème du polynôme de degré 13 qu'on n'avait pas osé attaquer par un système d'équations, en écrivant les différences successives de P aux points donnés pour trouver les $\Delta^k P)(0)$.

On termine l'énoncé en demandant aux étudiants de donner leur avis sur les avantages et inconvénients des deux méthodes : système d'équations linéaires ou détour par l'établissement d'une formule théorique générale en utilisant l'algèbre linéaire (dimension, bases, applications linéaires).

L'analyse détaillée de ce problème et des copies rendues par les étudiants (voir [16]) montre, outre un bon succès dans la résolution proprement mathématique, que les trois quarts des étudiants sont capables de faire une discussion intéressante sur l'avantage du détour théorique.

Annexes 2

Un exemple d'atelier portant sur l'épistémologie de l'axiomatique de l'algèbre linéaire

Les "ateliers" sont une forme d'activité où les étudiants travaillent sur un problème par petits groupes de 4, seuls, en ne faisant appel à l'enseignant que s'ils croient avoir une solution, ou s'ils sont en échec depuis un quart d'heure. L'atelier sur les axiomes est une modification d'un "débat en amphi" organisé à Grenoble 1 par J. L. Dorier. On fait d'abord réfléchir les étudiants sur l'éventuelle propriété d'associativité de deux lois de composition : $x \Delta y = y^x$ dans les nombres positifs (touche figurant sur les calculatrices), et $f \circ g$ dans les fonctions sur $\mathbf{R}$. Cette première activité a pour but de leur faire prendre conscience que les règles de calcul usuelles sur les nombres, qu'ils pratiquent naturellement sans en avoir conscience, ne sont pas universelles, et que pour d'autres règles de calcul ou d'autres objets il faut se poser la question de savoir ce qui est valide et ce qui ne l'est pas. On donne ensuite aux étudiants trois exemples d'équations "linéaires" (mais elles ne sont pas présentées ainsi) à résoudre dans trois domaines différents : des fonctions réelles sur un intervalle, des vecteurs de $\mathbf{R}^3$, et des polynômes à coefficients rationnels; mais cette dernière équation a un coefficient $\sqrt{3}$, ce qui fait qu'elle n'a pas de solution dans ce domaine. On demande aux étudiants de bien expliciter les règles de calcul qu'ils utilisent, ainsi que la nature des nombres qui y interviennent et des objets sur lesquels portent les calculs. Ils sont ainsi amenés à dégager tout un ensemble de règles des "calculs linéaires", en général surabondantes, mais qui sont les mêmes dans les trois exemples proposés. Cela établit ainsi une problématique pour le cours qui va suivre sur l'axiomatique des espaces vectoriels : l'aspect unificateur et généralisateur peut ainsi être mis en valeur et compris par les étudiants.

Voici le texte des équations à résoudre :

1/ Trouver, si c'est possible, une fonction réelle f sur]2,5[vérifiant, pour tout x de cet intervalle : $3f(x)-f(x) = f(x)+\pi[2f(x)-\frac{1}{\pi}f_0(x)]+f(x)+2f_0(x)$, où f_0 est la fonction $xsinx$ sur l'intervalle]2,5[.

2/ Trouver, si c'est possible, un vecteur u de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $\sqrt{2}u - u = u + 3[2u - u_0] + u + 4u_0$, où u_0 est le vecteur $(1, -2, 6)$.

3/ Trouver, si c'est possible, un polynôme P à coefficients rationnels, vérifiant $\frac{\sqrt{3}}{2}P - P = P + \frac{4}{7}[2P - P_0] + 5P_0$, où $P_0(x) = 3x^3 - \frac{6}{5}x + 4$.

4/ Même énoncé que 3/, en remplaçant $\frac{\sqrt{3}}{2}$ par $\frac{3}{2}$.

Annexes 3

Des exemples de ce que nous entendons par "méthodes" en algèbre linéaire

Nous donnons essentiellement des points de repère concernant : les types de problèmes; les questions à se poser; les différentes méthodes, souvent liées à différents points de vue, utilisables pour aborder des problèmes. Ces points de repère sont exposés explicitement dans le cours, sont repris à l'occasion des exercices en travaux dirigés, et figurent dans le polycopié de résumé de cours distribué aux étudiants. Cet enseignement de méthodes peut fournir des moyens aux étudiants pour ne pas rester "secs" devant un problème, donc pouvoir en amorcer la résolution (bien sûr cela ne résout pas tout, par exemple cela n'exclut pas les erreurs de calcul; mais les réponses aux questions à se poser qui figurent dans la méthode donnent souvent des moyens de contrôler ses résultats). Le fait d'avoir à sa disposition des méthodes permet de poser des problèmes plus difficiles dans les ateliers (travail en petits groupes de 4), où les concepts de l'algèbre linéaire soient vraiment mis en œuvre, et pas seulement les techniques. En même temps, ces problèmes sont choisis pour que les méthodes fournies soient performantes pour les résoudre.

Donnons quelques exemples.

1)

- Type de problème : problèmes d'inclusion ou d'égalité de 2 sous-espaces vectoriels E et F (de $\mathbf{R}^n$).

• Questions à se poser : quelles sont les dimensions de E et F ? combien d'équations servent à les définir ? Quels rapports y a-t-il entre les équations de l'un et celles de l'autre ? ai-je commodément des générateurs de l'un ou l'autre sous-espace ?

• Méthodes et points de vue : il y a en gros trois points de vue pour aborder ce type de problème :

(a) Un point de vue global , utilisant des arguments d'équations : si E est défini par une partie des équations qui définissent F, alors $F \subset E$; si $F \subset E$ et s'ils sont définis par le même nombre d'équations indépendantes, alors $E = F$; ou bien des arguments de dimension : si $F \subset E$, et si $dim(F) = dim(E)$, alors $F = E$.

(b) Un point de vue semi-global, utilisant des générateurs : si tous les vecteurs d'une famille engendrant F appartiennent à E, alors $F \subset E$.

(c) Un point de vue ponctuel , utilisant les vecteurs pris individuellement : si tout vecteur de F est combinaison de vecteurs de E, ou vérifie les équations de E, alors $F \subset E$.

Le choix du point de vue dépend des réponses données aux questions qui précèdent.

2)

• Type de problème : déterminer noyau et image d'une application linéaire $T : E \to F$.

• Questions à se poser : comment est déterminée l'application ? peut-on choisir des bases dans lesquelles sa matrice sera simple ? le contexte nécessite-t-il de déterminer $Ker(T)$ et/ou $Im(T)$ par des équations ou au moyen de vecteurs les engendrant ?

• Méthodes et points de vue : il y a deux points de vue, donnant chacun une méthode de résolution du problème :

(a) La méthode paramétrique - ou vectorielle : "Gauss sur les colonnes" . On considère les colonnes de la matrice comme des vecteurs générateurs de $Im(T)$, et on en cherche un sous-ensemble linéairement indépendant maximal en faisant la méthode de Gauss sur les colonnes $T(e_1), \ldots, T(e_n)$, c'est à dire par combinaisons linéaires de celles-ci, et en notant les combinaisons de vecteurs qui deviennent 0. On obtient ainsi facilement $Im(T)$ et $Ker(T)$ paramétriquement.

(b) La méthode des équations : "Gauss sur les lignes" . On résoud les systèmes $T(x) = 0$ et $T(x) = y$, par la méthode de Gauss sur ces équations, c'est à dire sur les lignes de la matrice. On obtient d'une part un système minimal d'équations pour $Ker(T)$, système qui est "triangulaire", donc permet immédiatement de paramétrer cet espace. On obtient d'autre part les conditions de résolution sur les seconds membres y_i , c'est à dire un système, lui aussi en "triangle", d'équations pour $Im(T)$, avec paramétrage immédiat si on le désire.

3) Parmi les éléments de méthodes, il est important de dégager les différents cadres dans lesquels fonctionnent les “objets” de l'algèbre linéaire, et les différents points de vue sous lesquels on peut les regarder. Nous abordons explicitement la question avec les étudiants, et nous leur en donnons la présentation suivante :

Les différents cadres et points de vue en algèbre linéaire Pour les vecteurs :

- le cadre vectoriel “pur” (vecteurs notés $x, y, u, \ldots$ avec des calculs sur ces symboles) ;
- le cadre “numérique” (avec des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$) ;
- le cadre géométrique, en dimension 3. Pour les applications linéaires :
- le cadre formel (on les note $T, u, \ldots$ et on calcule sur ces symboles) ;
- le cadre numérique-matriciel : (a_{ij}) ;
- le cadre géométrique pour des applications géométriques en dimension 3. Pour les sous-espaces :
- le point de vue du paramétrage ;
- le point de vue des équations. Pour les matrices, pour la recherche du rang de vecteurs, pour étudier une application linéaire :
- le point de vue des lignes ;
- le point de vue des colonnes. Pour comparer des sous-espaces :
- le point de vue global (équations, dimension) ;
- le point de vue semi-global (avec des générateurs) ;
- le point de vue ponctuel.

FONCTIONS, PROGRAMMES ET DÉMONSTRATION

Journée "Les fonctions en mathématiques : sous le concept, Babel? "

I.H.P. 23 Mars 1994

Jean-Louis KRIVINE

Université de Paris VII, C.N.R.S.

Dans son exposé, C. Houzel nous a montré l'évolution du concept de fonction. Je voudrais vous faire voir ici comment cette évolution a accompagné, jusqu'à aujourd'hui, celle de l'axiomatisation des mathématiques ; et comment le tout dernier avatar de ce concept de fonction, qui est la notion moderne de *programme*, est devenu un outil fondamental de la théorie de la démonstration. En fait, le programme est devenu (et cela en relativement peu de temps) un outil théorique essentiel dans bien d'autres sciences, comme la biologie, les neurosciences, les sciences cognitives, etc. Et, avec la diffusion massive de l'informatique, il a aussi envahi notre vie de tous les jours. Mais je me contenterai de parler ici de son impact sur les mathématiques et la logique.

Revenons tout d'abord brièvement sur l'histoire de la notion de fonction, que nous a décrite C. Houzel, et ce qu'on pourrait appeler (de façon très schématique) les fonctions au sens d'Euler et les fonctions au sens de Riemann.

Pour Euler, une fonction est donnée par une "formule", que celle-ci permette, ou non, le calcul de la fonction. Par exemple, e^x, $1 + x + \cdots + x^n + \cdots$, $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, ... sont considérées comme des fonctions d'une variable x. Le domaine n'est pas précisé a priori, et la formule représente une "tentative" de calcul de la fonction, qui peut ne pas aboutir. Par exemple, l'expression $1+x+\cdots+x^n+\cdots$ représente la fonction $1/(1-x)$ même si $|x| > 1$, alors que cette série ne converge pas. De même $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ représente la fonction Γ même pour des valeurs négatives de x, pour lesquelles cette intégrale n'existe pas. Bien entendu, on peut donner un sens à ces expressions, au moyen d'outils mathématiques créés bien après Euler (séries formelles, prolongement analytique, distributions, opérateurs non bornés, etc.). Mais on est obligé de procéder au cas par cas, d'employer une méthode particulière pour chaque fonction. Il a toujours paru impossible d'obtenir une définition précise de la notion de fonction "à la Euler". Du coup, cette notion a été abandonnée pendant fort longtemps, au profit de celle introduite par Riemann. Mais, comme nous le verrons, la notion eulérienne de fonction a, depuis peu, fait un retour en force.

Avec Riemann, la perspective change du tout au tout, et on en vient à une approche qu'on appellerait maintenant "axiomatique" ; comme on le sait, cette tendance ne va faire que croître et embellir, et nous verrons à quoi tout cela va aboutir.

Toute idée de calcul, ou de formule, a disparu : une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une "boîte noire", c'est-à-dire un objet indéterminé, dont on ne connaît qu'une seule propriété : quand on lui donne un réel, elle rend un réel. On ne s'autorise à raisonner qu'à l'aide de cette seule propriété. Quels avantages y a-t-il donc à brider ainsi le raisonnement ?

En fait, cela signifie que l'on va pouvoir maintenant démontrer des propriétés sur des *classes* de fonctions, et non plus, comme Euler, sur des fonctions particulières. Ou encore démontrer des propriétés *négatives* : telle fonction est continue sur $\mathbb{R}$, et nulle part dérivable.

Le but de ce changement radical de point de vue est ce qu'on appelle la "rigueur" : il s'agit d'avoir des définitions précises des notions de fonction continue, dérivable, analytique, etc. La rigueur, en mathématiques, n'est pas le but en soi, mais le moyen de permettre au raisonnement mathématique de s'épanouir. Les raisonnements et les calculs d'Euler n'étaient pas toujours rigoureux au sens où nous l'entendons aujourd'hui, mais c'était bien des mathématiques, comme chacun sait.

Cette axiomatisation a eu des effets bénéfiques tout à fait évidents : elle a permis l'apparition d'un domaine privilégié, celui des fonctions analytiques (holomorphes) où les les deux conceptions des fonctions se marient exceptionnellement bien. Mais elle a aussi permis toutes les extensions de la notion de fonction, qui deviennent alors indispensables en analyse : mesures ("fonctions" de Dirac), distributions (où l'opération de dérivation est libre), espace de Hilbert, puis espaces fonctionnels divers et variés, ...

On peut donc retenir que c'est à propos de la notion de fonction qu'est apparu le besoin de rigueur, d'où est sortie la méthode axiomatique et, finalement, la théorie des ensembles : on veut savoir précisément ce qu'est une fonction, c'est-à-dire expliciter complètement les propriétés qu'on utilise quand on raisonne avec les fonctions. Puis, on se posera le même problème pour la notion de nombre réel, puis celle de nombre entier, et finalement la notion d'ensemble. Toutes ces questions, qui peuvent paraître de prime abord insolubles, car elles s'attaquent à des notions de plus en plus élémentaires, de plus en plus fondamentales, seront pourtant successivement résolues (Dedekind, Peano, Cantor, Zermelo), et l'aboutissement de ce travail sera la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel, où tous les objets mathématiques trouvent leur place, et se prêtent, sans rechigner, à la rigueur du raisonnement mathématique.

Est-on arrivé alors au bout de cette quête ? Pas du tout, et la notion de fonction, dont on s'était bien éloigné, va refaire surface de plus belle.

En effet, ce qui est maintenant dans le collimateur, c'est le sacro-saint raisonnement mathématique lui-même ! La question est dorénavant : qu'est-ce que ça veut dire de raisonner correctement ? et, qui plus est, pourquoi faut-il donc, à tout prix, raisonner correctement?

Problèmes difficiles s'il en est, et sans aucun rapport, semble-t-il, avec la notion de fonction. Et pourtant, l'inconscient des mathématiciens avait déjà, depuis fort longtemps, fait le rapprochement entre raisonnement et fonction : en effet, on emploie le même symbole $\rightarrow$ pour l'*implication* (et on sait que l'implication symbolise le raisonnement mathématique) et pour *l'application*, c'est-à-dire pour désigner une fonction (on écrit $f : A \rightarrow B$ pour dire que f est une fonction de domaine A et d'image B, c'est-à-dire une application de A dans B).

Ce qui semble n'être qu'une coïncidence de notation est, en fait, un indice qui a permis la découverte d'un outil extraordinairement puissant pour analyser le raisonnement mathématique : il s'agit de ce qu'on a appelé la *correspondance de Curry-Howard.*

Mais ne brûlons pas les étapes, et reprenons l'histoire dans l'ordre. Les premiers systèmes axiomatiques (Frege, Russell) sont plutôt des descriptions du raisonnement mathématique. Ce qui est remarquable, c'est qu'ils sont déjà exhaustifs, c'est-à-dire qu'ils prétendent, à juste titre, mais sans en apporter la preuve, le représenter dans son intégralité. La justification viendra, avec le théorème de complétude de Gödel-Herbrand, qui est sans doute le théorème le plus important et le plus central de la logique. Il montre, en effet, que l'on peut décrire les preuves mathématiques de façon purement formelle, au moyen d'un système de règles de déduction, comme les règles d'un jeu : une démonstration n'est alors pas autre chose qu'une partie jouée à ce jeu, en observant correctement les règles.

Ce théorème est remarquable, d'une part à cause de ce qu'il démontre, mais aussi, et surtout parce qu'il réussit à *énoncer* que certains systèmes axiomatiques représentent l'intégralité du raisonnement mathématique. En effet, il est bien loin d'être évident que l'on puisse seulement énoncer rigoureusement une chose pareille.

On sait donc maintenant que le raisonnement mathématique est complètement mécanisable, et on connaît diverses façons de le mécaniser. Tout le monde comprend qu'il s'agit là d'une découverte très belle et très importante : on peut construire, théoriquement, des machines à faire des mathématiques. Bien sûr, dès que cela devient possible, on s'empresse d'en construire effectivement, et ce sont toutes les recherches sur ce qu'on appelle la *démonstration automatique.*

Maintenant que le raisonnement est complètement analysé et mécanisé, y a-t-il encore quelque chose à chercher? Que pourrait-on dire de plus?

En fait, cette analyse a fait apparaître la notion de machine, et des calculs qu'on peut, ou qu'on ne peut pas, faire sur machine. Une nouvelle sorte de fonction a fait son entrée : ce sont les fonctions récursives, ou fonctions calculables sur machine. Beaucoup de définitions vont en être données (Gödel, Turing, Church, ...) qui se révèlent toutes équivalentes. Mais il faut noter qu'on ne pourra pas démontrer de "théorème de complétude" disant que les fonctions récursives sont toutes les fonctions calculables sur machine : cet énoncé, qu'on appelle la *thèse de Church* n'est, en fait, qu'une définition mathématique de la notion de fonction calculable.

Comme par hasard, (mais, bien sûr, ce n'en est pas un), les véritables machines, c'est-à-dire les ordinateurs, font, au même moment, leur apparition. Or, pour un ordinateur, il ne suffit pas, mais pas du tout, qu'une fonction soit calculable pour qu'il la calcule. Il faut, en plus, qu'on lui donne un moyen (un algorithme) pour la calculer, c'est-à-dire un *programme*. Et nous voilà revenus à la notion de fonction à la Euler, où la fonction est donnée par une formule mathématique, qui représente le calcul de la fonction (calcul qui peut aboutir ou non).

Bien entendu, cette notion s'est quelque peu modifiée en cours de route : la formule a été remplacée par un programme (mais, là aussi, le calcul peut aboutir ou non, on en verra plus loin des exemples), et il ne s'agit plus de fonctions de variable réelle ou complexe, mais de fonctions d'entiers (plus généralement, de fonctions définies sur des structures de données finitaires, comme les entiers, les mots, les formules, les arbres, ...).

La notion centrale va être, dorénavant, celle de programme, c'est elle qui va jouer le rôle essentiel. En effet, elle a un rôle naturel de référence ultime, c'est-à-dire de notion qui peut servir à définir toutes les autres. La raison en est la suivante : une notion peut être considérée comme expliquée, c'est-à-dire complètement analysée, s'il est possible de l'expliquer à une parfaite brute (ou, si l'on préfère, à un parfait Candide), c'est-à-dire à un ordinateur.

Il faut donc, pour cela, pouvoir traduire cette notion en termes de programmes, puisque c'est la seule chose que comprend un ordinateur.

C'est cette méthode qu'on va maintenant employer pour poursuivre l'analyse du raisonnement mathématique : on va analyser la notion de preuve à l'aide de celle de programme. L'idée nouvelle, c'est de tenter d'identifier les preuves à des programmes. Elle trouve son origine dans ce qu'on appelle la sémantique de Heyting pour la logique intuitionniste.

Voici un exemple simple qui montre bien de quoi il s'agit : qu'est-ce qu'une preuve de la proposition $A \to B$, si c'est un programme. La réponse donnée par Heyting est simple et intuitive : c'est un programme qui, à chaque fois qu'on lui donne une preuve de A (à l'aide d'un système d'axiomes quelconque), fournit une preuve de B (à l'aide de ces mêmes axiomes).

Et nous voilà bien en train d'identifier la flèche de l'implication $A \to B$ avec celle d'une fonction : $Pr(A) \to Pr(B)$, $Pr(A)$ étant l'ensemble des preuves de A.

Par ailleurs, comme on veut identifier les preuves et les programmes, on voit que la proposition A correspond à l'ensemble des preuves de A, donc à un ensemble de programmes, qu'on appellera programmes de type A. Autrement dit, un théorème A correspond à ce qu'on appelle un *type* en informatique.

Nous avons ainsi établi les premiers éléments d'une correspondance très féconde et très profonde entre les notions de théorie de la démonstration, et celles de programmation : c'est ce qu'on appelle la *correspondance de Curry-Howard.* C'est cette correspondance qui va nous permettre de poursuivre l'analyse de la notion de preuve mathématique.

Ecrivons les premiers termes de cette correspondance, que nous venons d'obtenir (nous verrons plus loin comment cette liste se prolonge) :

Théorie de la démonstration		*Programmation*
Preuve	$\Leftrightarrow$	Programme
Théorème	$\Leftrightarrow$	Type, spécification
Preuve de $A \to B$	$\Leftrightarrow$	Programme qui prend une preuve de A et rend une preuve de B

Par exemple, $A \to A$ est un théorème, quelle que soit la proposition A, et une preuve de $A \to A$ correspond à un programme qui prend une preuve de A et rend une preuve de A. Il existe bien un tel programme, à savoir celui pour la fonction identité (le programme qui rend exactement ce qu'on lui donne).

Un autre exemple, un peu plus compliqué, mais qui montre bien le rôle des fonctions, est le théorème $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$. Une preuve de ce théorème est un programme (s'il en existe) qui prend une fonction (programme) de A dans B, une fonction de B dans C, et rend une fonction de A dans C. Il existe bien un tel programme, qui consiste à composer les deux fonctions (programmes) données.

On voit, sur ces exemples triviaux, que les programmes ont une propriété curieuse : si on les considère comme des fonctions, leurs arguments et leur valeur sont aussi des programmes. Autrement dit, ils forment un monde fermé de fonctions dont on ne sort jamais. Et c'est bien ce qui se passe dans une machine : un programme est alors une partie de la mémoire de l'ordinateur, ses données, c'est-à-dire ses arguments, sont aussi des zones de la mémoire, et son résultat est également inscrit dans une zone de la mémoire. On a donc affaire à des segments de la mémoire de la machine, qui agissent les uns sur les autres (le moteur de cette action étant le processeur de l'ordinateur).

Pour décrire mathématiquement cette situation, il nous faut construire un univers dans lequel les objets représentent des fonctions dont les arguments et les valeurs sont aussi ces fonctions; autrement dit, un univers de fonctions agissant sur elles-mêmes.

Une telle structure a été inventée par A. Church dans les années 1930, c'est-à-dire bien avant l'avènement des ordinateurs. Le λ-calcul, comme il l'a appelée, est resté longtemps une théorie tout à fait confidentielle et plutôt ésotérique. On comprend facilement, d'après tout ce qui vient d'être dit, qu'elle occupe maintenant une place centrale à la fois en théorie des programmes (c'est-à-dire en informatique) et en logique (en théorie de la démonstration).

Je vais essayer d'en donner une brève description. C'est une structure munie de deux opérations, l'une très simple, l'autre plus subtile. Le λ-calcul sera alors la structure la plus simple possible (la structure libre, si l'on veut) où ces deux opérations sont définies.

La première opération est appelée l'*application*, et son sens intuitif est très simple : si j'ai une fonction f et un argument g (qui, comme on l'a vu est aussi une fonction), alors je peux appliquer f à g et j'obtiens $f(g)$ (qui est aussi une fonction).

On se donne donc, sur la structure considérée, une opération binaire, qu'on appelle *application*, et sur laquelle aucun axiome n'est postulé !

Maintenant, il y a une autre opération, un peu plus difficile à saisir intuitivement, comme son nom l'indique d'ailleurs, car elle est appelée *abstraction*. On peut indiquer approximativement son sens intuitif en disant que c'est la transformation d'une formule de calcul (comme celle des fonctions à la Euler) en objet mathématique. C'est ce qu'on fait, tout à fait couramment, en mathématiques, quand on dit : "Considérons la fonction définie par la formule e^{x+x}, ou $1/(1+x^2)$, ..." ; ou encore : "Considérons la fonction $x \mapsto e^{x+x}$ ". A. Church a introduit la notation $\lambda x e^{x+x}$ pour désigner cette fonction.

Plus précisément, le sens intuitif de cette opération d'abstraction est le suivant : elle consiste à remplacer la fonction considérée par son nom, ou encore sa référence. Par exemple arctan est le nom de la fonction définie par $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Cela veut donc dire que $\lambda x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ est "arctan". Si une fonction $\phi(x)$ est définie dans un texte mathématique sous la référence **Définition 25**, cela veut dire que $\lambda x \phi(x)$ est "Définition 25".

Cette opération n'est, évidemment, pas toujours possible pour les fonctions mathématiques, car elles n'ont pas toutes un nom, ou une référence où elles ont été définies. Par contre, elle est absolument indispensable si on veut pouvoir considérer les fonctions comme des programmes, c'est-à-dire si on se limite à ne considérer que des fonctions qui sont des programmes. En fait, l'opération d'abstraction correspond à des notions tout à fait élémentaires et fondamentales de programmation, de celles qu'on apprend dans les premiers cours d'informatique : ce sont les notions d'*adresse* et de *pointeur*.

Rappelons brièvement de quoi il s'agit : la mémoire d'un ordinateur est divisée en petites cases, qui contiennent chacune un mot, et qui ont chacune un numéro, qu'on appelle leur adresse. Chaque case a donc une adresse fixe, et un contenu variable. Or, le contenu d'une case a peut tout à fait être l'adresse d'une case b. La case mémoire a est alors appelée *pointeur* sur b.

Considérons alors un programme, que je désigne par $P(x)$, pour dire qu'il opère sur une variable x, qui n'est pas autre chose qu'une case mémoire.

Ce programme occupe une zone mémoire, en général très grande, c'est-à-dire une longue suite de cases. S'il doit servir d'*argument* à un autre programme $Q(y)$, il faut pouvoir le désigner par une quantité qui tienne dans une seule case mémoire, c'est-à-dire par une adresse (qui est, par exemple, mais pas toujours, l'adresse du début de la zone mémoire occupée par le programme $P(x)$). Cette adresse sera notée $\lambda x P(x)$ qui se peut alors se lire "adresse du programme P dépendant de la variable x ". On peut alors mettre cette adresse dans la case mémoire y qui devient ainsi un pointeur sur le programme $P(x)$. Il ne reste plus alors qu'à lancer le programme $Q(y)$.

Revenons au λ-calcul comme structure mathématique, qui est donc défini par ces deux opérations d'application et d'abstraction. C'est donc un objet mathématique très simple et très élémentaire à définir, mais, par contre, très difficile à étudier, et qui pose de redoutables problèmes aux mathématiciens qui s'en occupent. Il ressemble beaucoup, en cela, à l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, et il est d'ailleurs tout aussi passionnant.

Les éléments de cette structure sont appelés les termes du λ-calcul, ou encore λ-termes. Par exemple, $\lambda x\, x$ (l'application identique), ou $\lambda x\, x(x)$ (l'opération d'appliquer un programme à lui-même) sont des λ-termes.

Puisque les termes du λ-calcul représentent des programmes, il doit y avoir une opération qui représente l'exécution d'un programme, autrement dit le calcul de la fonction pour une valeur donnée de l'argument. C'est ce qu'on appelle la β-réduction. Elle consiste, par exemple, à transformer $(\lambda x(x+x))(2)$ en $2+2$. En général, elle fait passer de $(\lambda x\, P(x))(A)$ à $P(A)$. Cela paraît tout à fait trivial, mais cela correspond, dans l'ordinateur, à l'opération que j'ai expliquée il y a quelques instants : pour appliquer le programme d'adresse $\lambda x P(x)$ à celui d'adresse A, on met dans la case mémoire x l'adresse A (on transforme x en un pointeur sur A) et on exécute le programme P.

L'exécution d'un λ-terme consistera donc à effectuer des β-réductions, jusqu'à qu'il n'y en ait plus aucune de possible. On dit alors que le terme est normal. Par exemple, $(\lambda x\, xx)(\lambda x\, x)$ donne $(\lambda x\, x)(\lambda x\, x)$ puis $\lambda x\, x$ et on s'arrête là.

Or, en programmation, on écrit souvent des programmes qui ne s'arrêtent pas, par exemple des boucles infinies. Cette situation se retrouve dans le λ-calcul, où l'exemple le plus simple de boucle infinie est donné par $(\lambda x\, xx)(\lambda x\, xx)$. On voit aussi que l'on retrouve ici une expression qui ressemble fort aux séries ou intégrales divergentes que manipulait Euler.

Pour pouvoir, dans cette structure, calculer sur les entiers, il faut les représenter par des λ-termes. A. Church, l'inventeur du λ-calcul, a trouvé une façon naturelle de le faire. L'idée de Church pour cela est simple : si l'entier 3 doit être un λ-terme, c'est-à-dire un programme, ce doit être le programme qui prend une fonction et l'itère trois fois, c'est-à-dire la compose trois fois avec elle-même. Autrement dit, on doit écrire $3 = \lambda f \lambda x\, f(f(f(x)))$.

Même chose, bien sûr, pour n'importe quel entier. On a ainsi défini ce qu'on appelle les *entiers de Church.*

Remarque. On voit particulièrement bien ici, comment la notion de programme peut être utilisée comme concept primitif servant à définir tous les autres : un entier est défini comme un programme qui se comporte de telle et telle façon vis-à-vis des autres programmes.

Grâce à cette représentation, on peut programmer, dans le λ-calcul, certaines fonctions d'entiers dans les entiers. Par exemple, l'addition, qui est $\lambda m\lambda n\lambda f\lambda x\, m(f)(n(f)(x))$, ou la multiplication $\lambda m\lambda n\lambda f\, m(n(f))$. Et l'un des premiers résultats établis par Church et Kleene, est que les fonctions d'entiers que l'on peut programmer dans ce langage sont toutes les fonctions récursives, c'est-à-dire toutes les fonctions d'entiers programmables sur machine. Autrement dit, le λ-calcul est, malgré sa simplicité, un langage de programmation universel. On est d'ailleurs très vite passé de la théorie à la pratique, et l'un des premiers langages de programmation, LISP, est directement inspiré du λ-calcul.

Mais revenons à la correspondance de Curry-Howard entre preuves et programmes. Nous allons pouvoir l'expliciter un peu mieux, maintenant que nous avons, avec le λ-calcul, une représentation mathématique des fonctions comme programmes. A chaque démonstration mathématique, effectuée dans un système formel convenable, on va faire correspondre un programme, sous la forme d'un terme du λ-calcul.

Pour cela, à chaque pas de la démonstration, on assemble des pièces détachées, qui, à la fin, constituent le programme cherché. Par exemple, supposons qu'à un moment donné dans la démonstration, on applique la règle du modus ponens : de A et de $A \to B$, déduire B. Cela veut dire qu'on a déjà démontré A, donc obtenu un programme (λ-terme) t_A, et aussi démontré $A \to B$, donc obtenu un autre programme $u_{A\to B}$. Alors le terme v_B que l'on construit à ce stade de la démonstration est $u(t)$. On voit ainsi que la règle de déduction essentielle de la logique, qui est le modus ponens, est associée à l'opération d'appliquer une fonction à son argument.

Toutes les autres règles de démonstration sont traitées d'une façon analogue, mais je ne le ferai pas, faute de temps, et pour éviter de trop entrer dans la technique.

Quand on a un théorème T, les programmes qui correspondent aux diverses démonstrations de T sont appelés programmes *de type* T. Il y a donc une infinité de programmes d'un type donné, ce type étant une formule qui est un théorème.

Intuitivement, le type d'un programme est, en quelque sorte, sa spécification c'est-à-dire ce qu'il fait, son but, ce pour quoi il a été écrit. On comprend qu'il y ait beaucoup de programmes différents pour réaliser le même but.

Ce qui est, en fait, tout à fait remarquable, c'est qu'on ait trouvé ainsi une approche mathématique de cette notion de spécification, qui semble pourtant particulièrement difficile à cerner avec précision (puisqu'il s'agit de définir ce qu'est l'*intention* du programmeur). Ajoutons qu'on est là dans un champ immense pour les applications pratiques, puisque la question de la conformité d'un programme à ses spécifications est un des problèmes clés de l'industrie informatique. Les déboires du système SOCRATE de réservation de la S.N.C.F. sont un bon exemple de ce qui se passe quand ce problème n'est pas résolu correctement.

Si nous reprenons les deux exemples simples que nous avons examinés précédemment, à savoir les deux "théorèmes" $A \to A$ et $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$, nous voyons que $\lambda x\, x$ ou $(\lambda x\, x)(\lambda x\, x)$ sont des exemples de programmes de type $A \to A$; $\lambda f \lambda g \lambda x\, g(f(x))$, qui est l'opérateur de composition des fonctions, est un exemple de programme de type $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

Pour donner un autre exemple, moins trivial, considérons un théorème d'arithmétique comme : "Il existe une infinité de nombres premiers". A chaque preuve de ce théorème va correspondre un programme, et tous ces programmes ont le même type, qui est ce théorème lui-même. Il est facile de deviner ce que font tous ces programmes : ce sont des fonctions qui, pour chaque entier n, fournissent un nombre premier $p > n$. Voilà donc la spécification associée à ce théorème de théorie des nombres.

Nous voyons donc que, maintenant, chaque théorème de mathématiques a pris une nouvelle signification : outre son sens habituel, celui que lui donnent tous les mathématiciens qui s'en servent, il a un sens comme type, ou spécification de programmes. Pour certains théorèmes, en gros ceux que l'on appelle constructifs, cette nouvelle signification est claire, et très proche du sens habituel. C'est le cas des exemples que nous avons donnés. Or, ce sont des théorèmes que l'on peut prouver dans une logique plus faible que la logique classique, qu'on appelle logique intuitionniste (introduite par Brouwer), dans laquelle on interdit le raisonnement par l'absurde, ou le tiers exclu (A ou non A). Elle a, en gros, la propriété suivante : si on démontre, dans cette logique, qu'il existe un objet ayant une certaine propriété, on donne, en même temps, un moyen de construire un tel objet.

C'est pourquoi on a cru pendant longtemps que seules les démonstrations constructives pouvaient donner lieu à des programmes, c'est-à-dire que la correspondance de Curry-Howard était limitée à la logique intuitionniste. Mais, depuis quelques années, on s'est aperçu que ce n'était pas le cas, et que le raisonnement par l'absurde correspondait à des méthodes de programmation utilisées depuis fort longtemps. C'est une remarquable découverte qui a été faite par Felleisen et Griffin, qui sont, il faut le noter, deux informaticiens.

Toutefois, lorsqu'il s'agit de théorèmes non constructifs, on ne comprend pas, en général, quel est le type qui leur est associé, et il y a là un problème extrêmement intéressant, parce qu'encore tout à fait mystérieux : la recherche du sens caché des théorèmes!

Cependant, on avance dans cette direction, et la découverte même de Felleisen et Griffin en est un exemple : ce qu'ils ont trouvé, en effet, ce n'est pas autre chose que la signification informatique des théorèmes non constructifs les plus simples, à savoir le tiers exclu : A ou non A, et le raisonnement par l'absurde : (non non A) $\to A$. Leur idée est tout à fait étonnante, et il faut un certain temps de réflexion pour se convaincre qu'elle est correcte : les instructions qu'ils associent à ces deux théorèmes sont ce qu'on appelle, en informatique, les instructions d'échappement, qui ont été inventées par les programmeurs pour le traitement des exceptions et des erreurs. Vous les voyez en action, chaque fois que l'ordinateur émet une protestation, c'est-à-dire qu'il affiche un message d'erreur, généralement accompagné d'un bip, par exemple, parce que vous lui demandez de lire une disquette que vous n'avez pas mise dans le lecteur. Avouez qu'il n'était pas évident, a priori, que cette situation avait quelque chose à voir avec le raisonnement par l'absurde!

La recherche sur la correspondance de Curry-Howard entre preuves et programmes, est donc très active (et ce d'autant plus qu'elle n'est pas seulement motivée par ses implications philosophiques, mais aussi, et peut-être surtout, par les applications industrielles dont j'ai parlé tout à l'heure). On est en train, petit à petit, de construire un véritable "dictionnaire" dans lequel chaque notion de programmation a une traduction en théorie de la démonstration, et vice-versa. C'est une situation tout à fait remarquable, dont on a déjà eu un exemple dans l'histoire des mathématiques : lors de la découverte, par Kolmogoroff, de l'axiomatique des probabilités à l'aide de la théorie de la mesure. Chaque notion probabiliste a trouvé alors sa traduction en une notion de théorie de la mesure. On obtient, par exemple :

Probabilité	$\Leftrightarrow$	Mesure
Evénement	$\Leftrightarrow$	Ensemble mesurable
Variable aléatoire	$\Leftrightarrow$	Fonction mesurable
Espérance ou valeur moyenne	$\Leftrightarrow$	Intégrale
Indépendance	$\Leftrightarrow$	Produit d'espaces mesurés
Espérance conditionnelle	$\Leftrightarrow$	Théorème de Radon-Nikodym

Donnons un aperçu de l'état actuel du "dictionnaire" pour la correspondance de Curry-Howard. Comme je viens de le dire, certaines de ces équivalences n'ont été obtenues que très récemment. Elles sont toutes assez surprenantes, et inattendues a priori :

Théorie de la démonstration		*Programmation*
Régle logique (régle de déduction)	$\Leftrightarrow$	Instruction
Preuve	$\Leftrightarrow$	Programme

Axiome, hypothèse	$\Leftrightarrow$	Déclaration de variable
(Preuve d'un) lemme	$\Leftrightarrow$	Procédure, fonction
Théorème (conclusion d'une preuve)	$\Leftrightarrow$	Type, spécification (d'un programme)
Raisonnement par récurrence	$\Leftrightarrow$	Boucle "for"
Réduction d'une preuve (élimination des coupures)	$\Leftrightarrow$	Exécution d'un programme
Négation	$\Leftrightarrow$	Continuation
Raisonnement par l'absurde	$\Leftrightarrow$	Instruction d'échappement (ou de contrôle) par exemple pour le traitement des erreurs
$\perp$ (Faux)	$\Leftrightarrow$	Type des programmes exécutables ou encore du "top-level"

En conclusion, on peut dire qu'on assiste actuellement à l'émergence d'un domaine tout à fait fascinant, où les concepts de fonction et de programme jouent un rôle clé. Il est clair qu'on tient là un fil conducteur extrêmement solide, qui est en train de nous mener à une compréhension en profondeur des mécanismes et de la *nature même* du raisonnement mathématique. Un autre trait étonnant de ce domaine est que, malgré son caractère extrêmement abstrait (quand même, il ne s'agit de rien de moins que l'analyse du raisonnement !), il soit en prise directe avec les applications. Il faut d'ailleurs remarquer que certaines des idées et des intuitions essentielles qui permettent cette analyse, nous viennent, non pas des mathématiques ou de la logique, mais directement de la programmation et de l'informatique.

Livres sur le sujet.

H. Barendregt. The lambda-calculus. North Holland Pub. Co.

J.Y. Girard, Y. Lafont, P. Taylor. Proofs and types. Cambridge Univ. Press

J.L. Krivine. Lambda-calcul, types et modèles. Masson.

Göttingen 1931
Emmy Noether, Mme Dubreil–Jacobin, Paul Dubreil

PAUL DUBREIL (1904-1994)

Léonce LESIEUR

NOUS avons à déplorer le décès de Paul Dubreil, survenu le 9 mars 1994 dans la résidence des Réaux, à Soisy sur Ecole, où il s'était retiré depuis une quinzaine d'années.

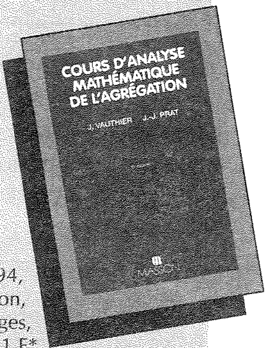
Paul Dubreil a été un témoin et un acteur important du développement de l'Algèbre à partir des années 30.

Un témoin, car il a participé comme boursier Rockefeller au fameux séminaire de Hambourg dirigé par Emil Artin, où se cotoyaient de jeunes et éminents mathématiciens venus écouter ses cours et sa parole, et où Emmy Noether passa comme Professeur visiteur en février 1931 ; il rencontra la même année van der Waerden à Groningen, aux Pays Bas, alors que celui-ci achevait la rédaction de son "Moderne Algebra" ; enfin il séjourna près d'Emmy Noether à Francfort, et, après un passage à Rome, la retrouva à Göttingen où fut prise la photo ci-contre : E. Noether, Mme Dubreil-Jacotin, P. Dubreil.

Un acteur, car il fut précisément l'un des premiers à utiliser la théorie des idéaux dans l'étude des variété algébriques, de la multiplicité de Noether, de la notion de variétés arithmétiquement normale, de variété de première espèce, des systèmes de points, des intersections totales mixtes et non mixtes de surfaces et de variétés, toutes notions qui se poursuivent et se développent encore aujourd'hui avec des apports nouveaux. La deuxième direction de ses recherches se rattache surtout à certaines généralisations de la théorie des groupes. Il remarque que "la démonstration de certains théorèmes fondamentaux, par exemple celle des deux théorèmes d'isomorphisme, fait intervenir des raisonnements très généraux qui appartiennent en réalité à la théorie des ensembles". C'est ainsi qu'il a poussé le plus loin possible, souvent en collaboration avec Mme Dubreil-Jacotin, les propriétés algébriques des relations d'équivalence, celles des équivalences associables, régulières, etc., et apporté une contribution essentielle à la théorie des demi-groupes. Cette dernière a peut-être eu plus d'écho à l'étranger qu'en France, mais on doit noter pour sa défense que certaines des idées qu'elle renferme se trouvent appliquées dans la théorie des automates en informatique.

Enfin, de par son enseignement si clair à de nombreux élèves, soit pendant leurs études universitaires, soit au cours de leurs recherches, Paul Dubreil a exercé une grande influence pour la diffusion de l'Algèbre. Je lui dois en tous cas, et je ne suis pas le seul, mon initiation à l'Algèbre et l'orientation de ma carrière et de mes travaux personnels.

NOUVEAUTÉS



1994,
2e édition,
216 pages,
151 F*

COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE DE L'AGRÉGATION

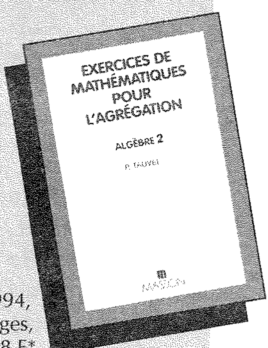
J. VAUTHIER, *Université Pierre et Marie Curie*
J.-J. PRAT, *Université de La Rochelle*

Série Agrégation

« Cet excellent ouvrage présente une synthèse du cours d'analyse mathématique de l'agrégation. L'exposé comporte des démonstrations complètes ».

Zentralblatt für Mathematik
und Ihre Grenzgebite Mathematics Abstrats

La presse spécialisée comme les agrégatifs en mathématiques ont en effet bien accueilli ce cours. Fort de son succès, il connaît déjà une nouvelle édition corrigée et augmentée d'un nouveau chapitre sur les variables complexes et d'une bibliothèque thématique.



1994,
288 pages,
148 F*

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES POUR L'AGRÉGATION
Algèbre 2

P. TAUVEL, *Université de Poitiers*

Série Agrégation

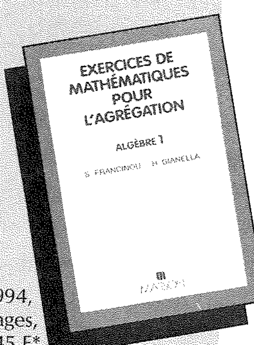
Ce recueil de 292 exercices corrigés d'Algèbre Linéaire correspond au 2e recueil d'exercices de l'ouvrage de cours de P. Tauvel, préparant à l'épreuve écrite de l'agrégation de mathématiques.

CONTENU - Espaces vectoriels - Rang - Applications linéaires - Trace. Nilpotence - Algèbre L(E). Groupe GL(E) - Vecteurs et valeurs propres - Polynômes annulateurs - Déterminants - Algèbre linéaire et analyse - Matrices à coefficients entiers - Matrices hermitiennes. Matrices unitaires - Espaces hermitiens - Matrices symétriques. Matrice orthogonales - Espaces euclidiens - Formes quadratiques réelles - Formes quadratiques : cas général.

Dans la même série

Mathématiques générales pour l'agrégation
*P. Tauvel, 1993, 416 pages, 250 F**

Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre 1
*S. Francinou, H. Gianella, 1994, 272 pages, 250 F**



1994,
272 pages,
145 F*

EXERCICES MATHÉMATIQUES POUR L'AGRÉGATION
Algèbre 1

S. FRANCINOU et H. GIANELLA, *élèves de l'École Normale Supérieure, Agrégés de Mathématiques*

Dans la série "Agrégation de mathématiques", ce quatrième ouvrage est le premier recueil d'exercices d'algèbre. Trois types d'exercices sont présentés : des exercices généraux visant à une bonne assimilation des connaissances ; des études d'exemples précis d'objets mathématiques présentant des propriétés remarquables ; des exercices plus théoriques impliquant des démonstrations de théorèmes fondamentaux. Des rappels théoriques et historiques figurent au début de chaque chapitre. Certaines notions à la limite du programme sont développées en annexe.

CONTENU - Groupes - Anneaux - Arithmétique - Théorie des corps - Polynômes et fractions rationnelles - Les corps R, C et H - Annexes : Produits semi-directs - Théorie de Galois - Corps de nombres.

RAPPELS

Mathématiques générales pour l'agrégation
*P. Tauvel - 1993, 2e tirage, 390 pages, 250 F**

Cours d'analyse mathématique de l'agrégation
*J. Vauthier, J.-J. Prat - 1993, 2e tirage, 390, 151 F**

La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation
*A. Avez, 1993, 2e tirage, 180 pages, 166 F**

Ouvrages en vente en librairie ou à la M.L.S. – B.P. 36 – 41354 Vineuil Cedex

* Prix publics TTC au 01.03.94

INFORMATIONS

CNRS et Mathématiques

Compte-rendu du débat du 20-11-93

établi par François Blanchard

Le débat est introduit par **H. Faure :**

La recherche traverse une période de remises en cause; de nombreuses réorganisations ont déjà commencé au ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche; le ministre organise des discussions sur le rôle du Cnrs. Il est donc important que la SMF sache sur quels points un consensus existe dans la communauté mathématique, afin qu'elle puisse défendre ses vues auprès des pouvoirs publics. C'est pourquoi D. Barlet, F. Blanchard et moi-même avons invité J.-L. Loday (directeur de recherche au Cnrs, directeur de l'URA 1 du Cnrs à Strasbourg) et B. Prum (professeur à Paris 5, ancien président de la commission de math au Cnrs) à en discuter avec nous.

COMPLEMENTARITES ENTRE UNIVERSITES ET CNRS

Jean-Louis Loday

Rappelons que, pour l'essentiel, la recherche mathématique en France est organisée sous la forme de laboratoires universitaires (ou de grandes écoles) qui sont souvent, totalement ou en partie, associés au Cnrs. La contribution du Cnrs se fait à la fois sous forme d'affectation de personnel (chercheurs et ITA) et de finances. Par exemple à Strasbourg l'IRMA (ura 01) comprend 61 enseignant-chercheurs et 17 chercheurs Cnrs, 20% du budget recherche provient du Cnrs. C'est à peu près la moyenne nationale, mais proportionnellement il y a plus de chercheurs Cnrs dans la région Ile-de-France qu'en province. Comparé aux autres disciplines (la physique par exemple) ce pourcentage est très faible.

Sur le plan de la gestion quotidienne cette diversité de sources de financement est un avantage car les règles et les habitudes de fonctionnement ne sont pas exactement les mêmes à l'Université et au Cnrs. Cette dichotomie crée une souplesse appréciée des directeurs de labos.

Par définition les enseignant-chercheurs ont un mi-temps d'enseignement et un mi-temps de recherche (auxquels s'ajoute parfois un mi-temps d'administration!). Ces dernières années ont vu quelques améliorations : primes d'encadrement doctoral, années sabbatiques, postes IUF (Institut Universitaire de France), possibilités de détachement au Cnrs (sans perte de salaire). Les chercheurs peuvent, a priori, consacrer tout leur temps à la *recherche, bien que nombre d'entre eux acceptent de faire de l'administration (par exemple à Strasbourg, le DEA, la bibliothèque et le labo sont dirigés par des chercheurs). Cette liberté potentielle des chercheurs a un prix : une carrière bloque plus rapidement et est moins rapide que celle de leurs collègues universitaires. Ces deux filières correspondent donc à deux types de fonctions différentes et deux types de carrière. Ce choix est un avantage pour la communauté.*

La présence d'un groupe de chercheurs à plein temps dans un laboratoire dynamise très fortement l'activité scientifique. Par exemple à Strasbourg la moitié des séminaires n'existe que grâce à la présence du Cnrs. Mais cette situation est assez atypique et une augmentation notable du nombre de directeurs de recherche est nécessaire pour obtenir une situation satisfaisante dans tous les labos associés. Ce serait un premier pas pour se rapprocher de la situation existant dans les autres disciplines.

La démographie du recrutement est un autre avantage à l'existence de deux filières. En effet le nombre de postes mis aux concours dans les Universités dépend (entre autres) du flux d'étudiants et est sujet à de larges fluctuations. Par contre le Cnrs a su conserver un flot minimum dans le recrutement des jeunes, ce qui a permis d'atténuer notablement le phénomène de "génération sacrifiée". Ce lissage dans le recrutement des jeunes docteurs a été particulièrement sensible à Strasbourg.

Ultime avantage : le type de recrutement. A l'Université les commissions de spécialistes sont "locales" et donc presque fatalement sensibles à d'autres arguments que la valeur scientifique. Au Cnrs la commission est nationale, d'où une philosophie différente du recrutement, plus orienté vers la qualité scientifique. Cette complémentarité dans les critères de choix est importante pour la bonne marche du système.

Parmi les autres points de complémentarité citons brièvement les possibilités d'invitations de chercheurs étrangers (très variables à l'Université, durée d'un mois ou plus ; postes roses et rouges au Cnrs, 3 mois minimum), les relations publiques de la science (locales à l'Université, nationales ou internationales au Cnrs, exemple : "Images des Mathématiques" édité par le Cnrs). Il faut remarquer que, contrairement à l'Enseignement Supérieur qui est divisé en deux filières étanches (universités et grandes écoles), il n'y a que l'administration de la recherche qui est divisée. En effet, enseignant-chercheurs et chercheurs Cnrs travaillent dans les mêmes institutions de base.

Même si parfois la division des pouvoirs, MESR d'un côté et Cnrs de l'autre, amène à des situations de conflit entre ces deux directions, elle reste, pour l'ensemble des mathématiciens, un garant de liberté.

Discussion

D. Barlet : *Une année sabbatique ne représente qu'un avantage mineur quand on reste sur place ; on garde les tâches habituelles, hormis l'enseignement.*

H. Faure : *Le droit aux congés sabbatiques n'est pas clairement défini : y a-t-on droit tous les 7 ans, ou bien une fois dans la vie ?*

R. Langevin : *Les textes sont effectivement peu explicites sur ce point, et l'administration en donne des interprétations contradictoires.*

F. Blanchard : *Il faut veiller à ce que les labos propres (et mixtes ou associés) jouent leur rôle vis-à- vis des enseignants, qu'il n'y ait pas élimination malthusienne d'enseignants actifs qui pourraient y être rattachés.*

D. Barlet : *Le labo de Strasbourg n'est pas représentatif de la recherche universitaire : il a bien plus de chercheurs que la moyenne et plus de crédits. Le Cnrs ne tient pas à intervenir en partenaire mineur, surtout dans ses formations propres, et aimerait peut-être concentrer ses moyens en personnel sur un petit nombre de formations. Il n'est pas clair que ce soit l'idéal pour les mathématiques.*

M. Reversat : *La différence de carrières observée actuellement entre universitaires et chercheurs est conjoncturelle ; dans les années 70 par exemple, on avançait plutôt plus vite au Cnrs qu'à l'Université.*

R. Langevin : *Un seul moment dans une carrière où on peut choisir entre enseignement supérieur et recherche, c'est pernicieux : tout est joué pour la vie. C'est dommage qu'il n'y ait pas plus de ponts entre les deux professions.*

J.-L. Loday : *Je doute qu'il y ait aujourd'hui autant de demandes de détachement ou d'échange en provenance des universitaires qu'il y a quelques années. Cela entraîne qu'on perd la prime de recherche, qui est devenue très substantielle, et j'ai vu plusieurs professeurs renoncer à demander un détachement pour cette raison.*

G. Dloussky : *On ne passe pas facilement en cours de carrière de l'Université au Cnrs ; l'obstacle principal est la croyance répandue qu'on ne peut plus être créatif après un certain âge. En fait la baisse de créativité, pour autant qu'elle existe, est liée au fait d'avoir des enfants, et aux autres obligations extérieures qui se multiplient à partir d'un certain moment de la vie.*

J.-L. Loday : *Il y a des obstacles administratifs aux flux du Cnrs vers l'université : les dates d'inscription sur les listes, par exemple ; il semblerait aussi qu'il va devenir nécessaire d'avoir été ATER pour pouvoir postuler comme maître de conférences. La SMF serait dans son rôle en demandant une plus grande perméabilité.*

POLITIQUE SCIENTIFIQUE ET CNRS EN MATHS

Bernard Prum

La section de mathématiques du Cnrs compte aujourd'hui 308 chercheurs (76 CR2, 142 CR1, 60 DR2, 21 DR1 et 9 DR0), soit environ dix fois moins qu'il n'y a de mathématiciens universitaires. Néanmoins, nombre d'universitaires étant rattachés aux unités Cnrs, on peut estimer que le Cnrs "couvre" directement quelque 40 % des mathématiciens français, et bien sûr les conséquences de ses orientations vont bien au delà. D'un autre côté, ce chiffre de 308 chercheurs traduit un accroissement depuis sept ans d'environ 4 % par an, nettement supérieur au rythme d'accroissement de l'ensemble de l'institut : après le Colloque "Maths A Venir" de Palaiseau, la direction du Cnrs a annoncé une politique de soutien spécifique aux maths, qui s'est traduite par un fort taux de recrutements (une vingtaine par an, ces dernières années – alors que l'on enregistrait en moyenne une dizaine de départs par an), et un accroissement significatif des budgets (hors personnel, ils ont plus que doublé durant les quatre ans de la précédente Commission).

La gestion de la communauté mathématique

Cette communauté est gérée de façon dyarchique – et parfois conflictuelle – par la Direction Scientifique et la commission du Comité National. Cette dernière allie deux rôles : d'une part un rôle décisionnel ou consultatif : recrutements (quand la Commission se mue en jury), promotions, associations d'équipes, détachements, avis divers (budgets, revues, colloques, etc ...). D'autre part, elle est chargée d'une mission de prospective. Chaque session comprend au moins une demi-journée de "discussion de politique générale", et aborde des problèmes de politique scientifique à l'occasion des divers dossiers qu'elle traite. En outre elle, ou son bureau, ou son président – sa présidente, pour l'heure –, participe de façon plus ou moins institutionnelle à la rédaction de divers documents : Rapport de Conjoncture, Plan d'Action, Schéma Stratégique, etc ... On peut aussi croire que souvent la politique scientifique se définit en l'appliquant, et qu'un travail sérieux d'évaluation des dossiers et d'attribution de moyens oriente davantage la recherche que des textes théoriques de portée plus ou moins générale.

Politique scientifique

Notons d'abord que le Comité National est qualifié, dans les textes, de Comité National de la Recherche Scientifique, et qu'en théorie son champ de réflexion déborde largement le seul Cnrs. De fait, lorsque la Dred existait, son directeur pour les mathématiques assistait aux deux sessions annuelles, afin d'utiliser informations et jugements portés pour orienter ses choix. Une politique scientifique au Cnrs peut être mise en application par bien des moyens : au niveau des équipes, choix des associations, répartition des crédits, au niveau *des personnes, recrutements, mais aussi promotions, comme ce fut le cas cette année, où sur 8 "passages" DR2, 4 étaient fléchés "en mobilité", afin de donner une prime aux chercheurs prêts à implanter dans une université nouvelle pour eux une équipe naissante. Cette politique peut revêtir deux aspects (pas toujours disjoints) : un aspect disons administratif, comme la volonté de développer quelques pôles provinciaux (ceux du CIAT, les pôles européens) plutôt que la région parisienne ou la "petite province", ou comme, aujourd'hui, la volonté de restructurer une partie des mathématiciens de Jussieu, un aspect purement scientifique. La première question est alors d'opter soit pour une "veille technologique", laissant les thèmes surgir d'eux mêmes, et sur la base d'une confiance en les individus impliqués, soutenir ce qui paraît le plus prometteur, soit pour une politique volontariste, décidant qu'il est nécessaire de développer tel thème trop peu – voire pas du tout – représenté. Ce fut un temps la politique de développement volontariste des "maths appliquées", qui souffraient de l'orientation traditionnelle des maths en France ; ce peut être aujourd'hui la volonté d'aider (de façon certes limitée) les interactions des mathématiques, ou ce peut être le fléchage de postes sur des profils EDP-modélisation ou calcul formel, comme on l'a vu l'an dernier. La Commission rêverait sans doute de choix purement scientifiques, quand la D.S. lui rappelle les contraintes imposées à un niveau ou à un autre, comme celles nécessaires dans les négociations avec les disciplines voisines, la physique par exemple, ou celles pouvant provoquer des arbitrages favorables au niveau du Directeur Général.*

Qui définit la politique scientifique ?

J'ai dit plus haut que je croyais qu'une bonne part de cette politique se prouvait "en marchant", et résultait des choix concrets successifs. Ceci n'empêche bien sûr pas une réflexion a priori et l'affirmation d'orientations à venir. Cette réflexion est difficile au niveau local, même si certaines Commissions de Spécialistes ont des débats de politique scientifique : les intérêts de la recherche française ne coïncident pas toujours avec ceux ressentis à un moment donné par une université – voire ses mathématiciens ou un groupe de ceux-ci. Elle est naturellement menée par les Directions Scientifiques, du Cnrs, de l'ex-Dred, etc... Mais, les groupes d'experts Dred n'étant pas appelés à ce travail de prospective, le Comité National est un organe obligé de l'élaboration des orientations scientifiques. La Commission doit aussi être en première ligne dans la définition de la politique parce qu'elle émane de la communauté mathématique et se sent responsable devant elle. Sa défection laisserait libre cours à une politique de groupes de pression. Il est clair aussi qu'elle n'en a pas pour autant le monopole, et il est souhaitable qu'elle s'appuie explicitement sur le milieu. C'est ce qui s'est fait quand la Commission actuelle a réuni en janvier dernier directeurs d'UA et présidents de CSE. C'est ce que peuvent faire les sociétés savantes (SMF, SMAI, pour les maths), en suscitant une réflexion et en transmettant ses analyses tant à la Commission qu'aux responsables du Cnrs ou des ministères concernés.

Cnrs et Université

A la conception de carrières se déroulant de bout en bout au Cnrs, du grade de CR2 à celui de DR exceptionnel, on oppose parfois la vision d'un Cnrs accueillant des jeunes jusqu'à leur thèse (HDR, aujourd'hui), puis les laissant partir sur un poste de professeur, quitte à les accueillir en détachement pour 4 ans, quand ils auront fait leurs preuves et se montreront désireux d'animer une opération de recherche, soit personnelle (aboutissement d'un long travail), soit collective (mise sur pied d'une équipe performante). Une vision un peu intermédiaire prône des passages faciles (dans les deux sens) entre Cnrs et Université, non seulement lors de promotions (CR1 nommés PR), mais aussi à niveau égal. Plusieurs incitations vont aujourd'hui dans le sens de flux, en particulier il est question que chaque EPST, comme le Cnrs, ait à détacher 10 % de ses chercheurs pour qu'ils enseignent dans les Universités. Par ailleurs, depuis peu s'est mise en place la procédure d'accueil au Cnrs de professeurs en détachement pour 4 ans, et certains souhaitent voir s'accroître sensiblement le nombre de postes concernés (ce qui impliquerait nécessairement une diminution du nombre d'entrants, chercheurs à temps plein). La Direction Scientifique exprimait il y a quelques années le souhait que 30 % des effectifs de chercheurs soient, à long terme, occupés par des personnes détachées. Cette année, des "délégations croisées" ont été réalisées, par lesquelles un chercheur du Cnrs et un universitaire échangent leurs services ; une condition nécessaire pour qu'un tel échange soit sain est qu'il concerne deux personnes de grades équivalents, ce qui n'a pas toujours été le cas cette année. Si ces échanges devaient se multiplier, il serait impératif de les codifier (dépôt de candidatures, consultation des CSE et du Comité National). Peut-être représentent-ils une protection contre le détachement impératif de chercheurs sur des postes d'enseignement, peut-être sont-ils l'assurance qu'un flux d'entrants conséquent sera maintenu. Le Cnrs a joué un rôle essentiel pour les maths françaises – ne serait-ce qu'en maintenant un flux d'entrants durant les années où l'Université a failli à cette tâche – il continue à le joue, il n'est que de voir le pourcentage des publications ou exposés de séminaires impliquant ses chercheurs pour s'en convaincre. Sa place dans le dispositif mathématique est complexe, son "leadership" et la disponibilté de ses membres pour la recherche suscitant quelques jalousies universitaires. A l'heure où les budgets ne suivent pas les besoins universitaires, les tensions risquent de s'aviver. D'autres formes de collaboration sont peut-être à trouver, mais il est essentiel que le Cnrs puisse sereinement continuer à jouer son rôle dans les mathématiques françaises.

Discussion

M. Dechamps *remarque, à propos de l'intervention de Loday , que l'envie d'enseigner est aussi une raison de choisir l'Université plutôt que le Cnrs.*

C. Roger : *Attention aux cumuls ! On commence à voir des professeurs, détachés au Cnrs, qui partent six mois par an faire leurs cours... aux E.-U.*

Par ailleurs, il y a de grandes disparités dans les soutiens que reçoivent les équipes de mathématiques. Certaines universités cumulent les difficultés, d'autres sont très à l'aise. La notion même d'aménagement du territoire passe par une réduction de ces déséquilibres.

Enfin, il semble que le rôle de Kourilsky dans les choix stratégiques du Cnrs, son poids dans les décisions essentielles, soient sans précédent.

D. Barlet : *Je ne sens pas bien les échanges de services; quelle est la motivation du chercheur qui échange? Beaucoup de chercheurs CNRS ont l'occasion d'enseigner.*

Parlons maintenant des détachements. Il faut bien voir que l'année ou le semestre sabbatique se réduisent en fait à 8 ou 4 mois effectifs, ce qui est dérisoire. A l'autre extrême, quatre ans de détachement c'est bien long et le retour à l'enseignement est parfois difficile. La durée optimale serait 2 ans. Quant au niveau, pourquoi offre-t-on si peu de détachements aux maîtres de conférences? Ceci, par contre coup, créerait un minimum de pression au niveau du passage CR2–CR1 et inciterait les chercheurs les moins "adaptés" au CNRS à se tourner plus vite vers l'Université.

F. Blanchard : *Il y a des motivations pour qu'un chercheur échange! Un peu d'enseignement de troisième cycle ne signifie rien. Par contre, un véritable échange est très instructif et formateur, même s'il n'est pas toujours confortable.*

E. Bayer : *La veille technologique dont a parlé Prum me semble plus judicieuse qu'une politique volontariste d'"occupation de créneaux", parce que plus réaliste.*

C. Roger : *Il faut s'interroger aussi sur la taille des labos. Les plus gros dissimulent parfois une production faible; par "effet boîte noire", leur fonctionnement devient opaque, on ne voit plus où passe l'argent qu'on leur a donné.*

B. Prum : *Le Cnrs a tendance a négliger la dimension humaine. Cela se manifeste au niveau des promotions DR, comme parfois dans sa volonté de se défaire d'équipes associées qui pourtant tournent bien.*

J. Camus : *Les petites équipes locales se cassent, faute de soutien. Le Cnrs doit le prendre en compte.*

Pour les détachements, pourquoi ne pas envisager deux ans renouvelables?

B. Prum : *L'audit interne qui est en cours au Cnrs préconise déjà que le comité national soit appuyé dans sa réflexion par un collège élargi. La SMF peut jouer un rôle important dans ce cadre.*

D. Barlet *appuie.*

G. Dloussky : *Les grands pôles ne sont pas indispensables en mathématiques. Les individualités y jouent un plus grand rôle, les moyens nécessaires sont moindres, nous avons moins l'habitude du pilotage et du programme. Si le Cnrs se concentre sur quelques gros labos, cela sera mal ressenti par les* *équipes concernées et rendra la vie particulièrement difficile en province.*

R. Langevin *approuve.*

B. Prum : *Attention ! Ferrier (directeur scientifique adjoint au Cnrs pour les mathématiques, NDLR) dit souvent qu'on ne peut à la fois proclamer la spécificité des maths et réclamer les moyens des disciplines expérimentales.*

D. Barlet : *Les mathématiciens ne peuvent pas refuser complètement d'élaborer des programmes.*

F. Blanchard *introduit alors formellement la discussion – déjà entamée à plusieurs reprises – sur les carrières.*

Un malaise est perceptible au moins depuis 1980 entre chercheurs et enseignants. Il a d'abord des causes relativement localisées, comme la concurrence entre chargés de recherche et maîtres de conférences aux postes de professeur, dans laquelle les premiers sont manifestement favorisés par leurs conditions de travail, permettant une meilleure productivité. Mais à mon avis, la raison principale est que les enseignants ont l'impression de plus en plus forte d'être submergés par les tâches enseignantes et administratives, à côté de chercheurs qui n'y sont pas assujettis ; quant à ces derniers, ils lorgnent avec envie les promotions plus rapides des enseignants à l'intérieur de leur corps.

Le débordement par l'enseignement s'explique par le manque d'effectifs face à l'arrivée massive d'étudiants. D'où vient l'enflure tout aussi massive des tâches administratives ? Je ne le sais pas. De toute façon, il ne faut considérer ni l'une ni l'autre comme des fatalités, mais au contraire les dénoncer et tâcher d'inverser la tendance. Plus d'échanges et de détachements soulageraient à coup sûr les enseignants ; réclamons-les, sans croire qu'ils assainiront la situation de fonds.

D. Barlet : *Le foisonnement des tâches administratives s'explique par le fait qu'il y a de moins en moins de personnels ATOS ; l'administration, au niveau pédagogique, retombe donc sur les enseignants.*

J.-L. Loday : *Rien n'empêche les chercheurs de prendre des responsabilités dans les départements universitaires ; à Strasbourg, ils le font, et tout le monde est content.*

E. Bayer *Même chose à Besançon. Je reviens sur la spécificité de la recherche en math : les équipes peuvent être actives sans être grosses et sans disposer d'énormes moyens ; la notion de programme est moins importante qu'ailleurs, si bien que des détachements de 2 ans sont suffisamment longs.*

J.-L. Loday : *La direction du Cnrs a tendance à oublier à quel point le label "unité de recherche associée" est essentiel pour une équipe universitaire, en premier lieu vis-à-vis de son université – et même si à la limite le Cnrs ne lui donne pas un sou.*

Remarques sur les postes de mathématiques parus en mars 1994 et bilan sur quelques années

Claude Basdevant - DSPT 1

Quelques mots sur le processus menant à la publication des emplois aux BO ou JO. En septembre les établissements font parvenir au Ministère leurs demandes de publications d'emplois qui comprennent d'une part les emplois vacants ou susceptibles de l'être et d'autre part les demandes de créations classées par ordre de priorité toutes disciplines confondues. Ces listes indiquent pour chaque poste la nature de l'emploi (PR/MCF/PRAG/PRCE), la ou les sections et le profil s'il y en a un. La DGA du Ministère et le Cabinet calculent de leur côté le nombre de créations attribuées à l'établissement (norme SANREMO en particulier) pour respecter le nombre de créations décidé par la loi de finance votée par le Parlement. La discussion entre l'établissement et le ministère s'engage alors avec pour doctrine depuis plusieurs années au Ministère de n'intervenir qu'à la marge dans le classement des universités. Néanmoins des contraintes globales comme le pyramidage des emplois peuvent mener à des modifications de la nature de certains emplois, les critères recherche sont actuellement peu pris en compte sinon pour éviter les profils trop pointus et les postes "moustachus".

Le nombre de postes publiés en mathématiques dépend donc d'une part du nombre de postes vacants (départs en retraite, mutations, promotions etc...) et des éventuels redéploiements dans les établissements, d'autre part des possibilités de créations (toutes matières confondues) ouvertes par la loi de finance, mais il dépend surtout des demandes des établissements. Par exemple, alors qu'en 1993 111 postes de professeurs avaient été publiés, en septembre 1994 les établissements n'en demandaient que 95 (47 vacants et 48 demandes de création); compte tenu des demandes classées trop loin, il n'en est paru que 70.

Il faut donc souligner l'importance des classements des demandes de postes établis dans les établissements.

Créations – lois de finance

année	1990	1991	1992	1993	1994
PR	199	451	261	243	380
MCF	700	1424	1163	1979	645
sous-total	899	1875	1424	2222	1025
PRAG/PRCE	200	1003	800	850	400
PAST (eq t.p)			400	500	200
Autres (lect.)		122	50	50	
total	1099	2000	2674	3622	1625

Postes parus/crées en mathématiques

année	1990	1991	1992	1993	1994
PR	70/?	93/82	105/62	111/62	70/29
MCF	102/?	123/77	131/50	166/93	163/58
sous-total	172/?	216/159	236/112	277/155	233/87
PRAG	34/?	81/?	123/?	151/117	103/51
PRCE	12/?	20/?	60/?	18/0	30/8
total	218/?	317/?	419/?	446/272	366/146

Répartition par sections – postes 1993 & 1994

	MCF/1993	*MCF*/1994	*MCF*/1993	*MCF*/1994
25	43	35	26	15
25°–26°	49	49	33	27
26	72	75	50	27
Autres	2	4	2	1
total	166	163	111	70

Postes PRAG et PRCE 1994 – Répartition

	PRAG	*PRCE*
Universités	48	8
IUFM	15	18
IUT	30	2
Ecoles	10	2
Total	103	30

Postes IUT 1994 – répartition

PR 2 — MCF12 — PRAG 30 — PRCE 2

Postes IUT 1994 – répartition

PR 7 — MCF13 — PRAG 8

CNU 25ème section bilan de la session de qualification tenus par la commission n° 1 les 16, 17 et 18 mars 1994

François Digne

1. Modifications dans la composition de la Commission

Sylvie Guerre-Delabrière et Pierre Bérard ayant démissionné, ils sont remplacés respectivement par Sylvie Paycha (Maître de Conférences à l'Université de Strasbourg) et Jean-Christophe Yoccoz (Professeur à l'Université de Paris-Sud).

Le Collège 2 de la Commission a élu Jean Magloire comme Assesseur, en remplacement de Sylvie Guerre-Delabrière.

2. Inscriptions sur la liste de qualification aux fonctions de Maîtres de Conférences

2.1.Résultats

Nombre de candidats : 333
Dossiers non parvenus : 63
Diplômes absents : 6
Candidatures ne relevant pas de la section 25 : 55
Nombre de candidatures réelles : 209
Nombre d'inscrits sur la liste de qualification : 165
Pourcentage des inscrits : 78,9%

(*) Le pourcentage des inscrits a été calculé sur le nombre des candidatures réelles.

Récapitulatif des qualifications en 92, 93 et 94

année	1992	1993	1994
Nombres de qualifiés	210	144	165
Pourcentage des qualifiés	77,2	77	78,9

2.2. Complément sur les diplômes étrangers et les diplômes français

Sur les 209 candidats "réels", 150 sont titulaires d'un diplôme français, qu'on désignera dans la suite par "candidats DF" (134 nouvelles thèses, 11 thèses de troisième cycle, 4 Doctorats d'Etat, 1 Ingénieur) et 59 sont titulaires d'un diplôme étranger ("candidats DE"). Les 165 qualifiés se répartissent en 119

DF et 46 DE. Le pourcentage des qualifiés calculé pour les candidats DF (resp. DE) est donc 79,3% (resp. 77,9%).

Récapitulatif

	nombre de candidats	*nombre de qualifiés*	*pourcentage de qualifiés*	*âge moyen*
candidats DF	150	119	79,3	31,5
candidats DE	59	46	77,9	34
tous diplômes	209	165	78,9	32,75

On notera que parmi les qualifiés DF, 71 ont 30 ans ou moins et 82 ont 31 ans ou moins; ainsi, plus des 2/3 (68%) des qualifiés issus du système français de formation doctorale ont au plus 31 ans. Parmi les qualifiés DE, 12 (27%) ont 31 ans ou moins.

2.3.Complément sur les diplômes français récents

Sur les 150 candidats DF, 124 avaient obtenu leur thèse en 1993 ou 1994; 108 sur ces 124 ont été qualifiés, soit un pourcentage d'inscrits de 87%.

Dans les autres cas (16 au total), la Commission a estimé qu'il y avait lieu d'attendre que les dossiers soient complétés ou améliorés.

3. Inscription sur la liste de qualification aux fonctions de Professeur

3.1. Résultats

Nombre de candidats : 124
Dossiers non parvenus : 13
Diplômes absents : 2
Candidatures ne relevant pas de la section 25 : 9
Nombre de candidatures réelles : 100
Nombre d'inscrits sur la liste de qualification : 64
Pourcentage des inscrits : 64%

Récapitulatif des qualifications en 92, 93 et 94

année	1992	1993	1994
Nombres de qualifiés	163	93	64
Pourcentage des qualifiés	70,8	71	74

3.2. Complément sur les diplômes étrangers et les diplômes français

Sur les 100 candidats "réels", 40 sont titulaires d'un diplôme français (22 habilitations, 18 Doctorats d'Etat), et 60 sont titulaires d'un diplôme étranger.

Les 64 qualifiés se répartissent en 27 DF et 37 DE. Le pourcentage des qualifiés calculé pour les candidats DF (resp. DE) est donc 67,5% (resp. 61,6%).

Récapitulatif

	nombre de candidats	*nombre de qualifiés*	*pourcentage de qualifiés*	*âge moyen*
candidats DF	40	27	67,5	38,5
candidats DE	60	37	61,6	40,2
tous diplômes	100	64	64	39,4

3.3. Complément sur les diplômes français récents

Sur les 40 candidats DF, 22 avaient obtenu leur diplôme en 1993 ou 1994 (20 habilitations, 2 Doctorats d'Etat) ; 20 sur ces 22 ont été inscrits sur la liste de qualification.

Annonce du Wilkinson Software Prize 1995

Ce Prix honore les contributions éminentes de James Hardy Wilkinson dans le domaine du logiciel numérique.

Les sponsors de ce Prix sont Argonne National Laboratory, National Physical Laboratory et Numérical Algorithms Group.

Le montant du Prix est de 1000 dollars US.

Le premier Prix a été décerné à Linda Petzold à la conférence internationale de l'industrie et des applications mathématiques en 1991 à Washington. Le second prix sera décerné à la conférence internationale de l'industrie et des applications mathématiques au mois de juillet 1995 à Hambourg.

Pour tous renseignements :

J. J. MORÉ
e-mail : more@mcs.anl.gov

Prix Ferran Sunyer I Balaguer 1994

L'Institut d'Estudis Catalans a décerné le second Prix Ferran Sunyer i Balaguer à Klaus Schmidt pour sa monographie, Dynamical Systems on Algebraic Origin.

Le montant du Prix est de 12 000 ECU. La monographie sera publié dans la série "Progress in Mathematics" de Birkhäuser.

Tous les ans, ce Prix sera décerné à l'auteur d'une monographie originale présentant les derniers développements d'un domaine de recherche active auquel l'auteur a apporté des contributions importantes.

Les manuscrits, de préférence en TEX, doivent arriver à l'adresse suivante :

Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
ESPAGNE
e-mail : icrm0@cc.uab.es

Le Prix Du Roi Faisal 1994

Le Prix du roi Faisal en Science (spécialité mathématiques) a été décerné à Dennis P. Sullivan pour son oeuvre en géométrie et topologie algébrique (et spécialement ses travaux sur les fondations de la théorie des systèmes dynamiques complexes et sa contribution à la théorie de l'itération et aux phénomènes de renormalisation.

Le Prix du roi Faisal (Arabie Saoudite) attribue chaque année depuis 1979 cinq récompenses en Science, Médecine, Littérature arabe, Etude Islamique et Service de l'Islam.

La première récompense en mathématique a été décernée à M. Attiyah en 1987, le Prix Science était réservé aux mathématiques en 1991 mais n'a pas été attribué. Le prochain Prix pour les mathématiques sera décerné en 1988. Le Prix comporte un certificat, une médaille et environ 90 000 dollars US.

Décès

L'Institut Henri Poincaré nous prie d'annoncer le décès de son directeur Monsieur Pierre Grisvard survenue brusquement le vendredi 22 avril 1994. Administrateur provisoire puis directeur, il a mené à bien la restructuration de l'I.H.P. et a redonné à ses activités scientifiques tout leur essort.

COMPTES RENDUS

An Elementary Probability

David Stirzaker

Cambridge University Press.

Le calcul des probabilités et la statistique sont enseignés à l'Université, dès la première année de D.E.U.G., en option ou en module obligatoire. Dès lors, l'exposé doit s'adapter aux outils dont disposent réellement les étudiants. La difficulté ne réside pas tant dans le choix des thèmes susceptibles d'être exposés, a priori fort nombreux que dans les moyens de parvenir à l'utilisation effective de ces outils par les étudiants, quels que soient leur orientation et choix futurs. Cet objectif apparaît d'autant plus essentiel que le calcul des probabilités même "élémentaires " doit pouvoir être réutilisé en informatique, physique, biologie, géologie, sciences de l'ingénieur, sciences sociales ou économiques. Aussi combiner la maîtrise des concepts fondamentaux du calcul des probabilités avec l'apprentissage de ces techniques dans un ouvrage directement utilisable par l'étudiant seul, constitue une qualité remarquable, dont se trouve doté le livre de David STIRZAKER.

Le livre est divisé en neuf chapitres, eux-mêmes subdivisés en sections comprenant l'énoncé de proposition et/ou de théorème(s) et la résolution complète et exhaustive d'exercices (examples). De plus, chaque chapitre se termine par environ une dizaine d'exercices complètement rédigés et enfin par l'énoncé d'une quantité assez abondante (en moyenne, 40) d'exercices de difficulté et longueur variables, pour lesquels l'auteur a rassemblé en fin d'ouvrage indications succinctes et réponses plus ou moins détaillées. De façon plutôt classique, l'ouvrage traite, dans l'ordre, de la notion de probabilité (1), de probabilité conditionnelle et indépendance (2), combinatoire (3), variables aléatoires numériques discrètes (4), vecteurs aléatoires discrets (5), fonctions génératrices et applications (6), variables aléatoires numériques continues (7), vecteurs aléatoires à composantes continues (8), et enfin chaînes de Markov (9). Sans entrer dans le détail du contenu de chaque section, nous voulons souligner le choix judicieux et la variété des situations étudiées (les marches aléatoires, par exemple, sont constamment sollicitées), ainsi que l'impression gratifiante que retire le lecteur de ne pas être entraîné sans raison dans les contrées que l'auteur nous fait visiter.

L'aspect le plus original et le plus réussi de l'ouvrage est l'interaction constante entre l'énoncé des propriétés et propositions et la résolution d'exemples directement inspirés par la matière de celles–ci : ces exemples servent autant d'applications directes de ce qui vient d'être énoncé que de prétextes pour progresser. Ce procédé s'avère d'autant moins pesant que le style des exercices formant variation autour du thème principal frappe l'imagination par la diversité des situations modélisées, la clarté de l'expression (l'énoncé est volontairement peu ou pas du tout *mathématisé*), et la cohérence qui préside à leur choix tout le long du livre. Ainsi, les curiosités les plus classiques – ruine du joueur, protocole d'expérience, fiabilité, simulation, paradoxe de Bertrand, aiguille de Buffon, processus génétiques et de branchement, et bien d'autres encore – sont-elles abordées *mezza voce* avec à-propos et discernement. Ce style vivant et alerte s'accompagne aussi d'une touche d'*English humour*, qui n'exclut pas des commentaires tout à fait éclairants sur le sens des situations et des objets mathématiques utilisés.

L'une des qualités potentielles de ce livre de cours–exercices est surtout la faculté d'être utilisé par l'étudiant pour travailler seul ou de pouvoir servir à un usage parallèle en travaux dirigés et pour un travail personnel autonome. Pour des étudiants français ou francophones, il leur faudrait accepter de lire et travailler en langue anglaise mais, même s'ils encourent les foudres des gardiens de notre langue, l'exercice vaut d'être couru...

Marc BRUNAUD
Université Denis Diderot– Paris VII

The Arithmetic and Spectral Analysis of Poincaré Séries

James W. Cogdell et Ilya Piatetskii-Shapiro

Perspectives in Mathematics, vol. 13

Les séries de Poincaré dont il s'agit ont été introduites par A. Selberg en 1965 ([8]). Elles concernent un sous-groupe discret G du groupe $PSL_2(\mathbf{R})$ des automorphismes du demi-plan supérieur $Im(z) > 0$, pour lequel l'espace quotient correspondant $G\backslash PSL_2(\mathbf{R})$ n'est pas compact, mais son volume - pour une mesure invariante sous le groupe - est fini : on dit qu'il s'agit d'un groupe fuchsien de première espèce. La plus simple des séries de Poincaré relative au groupe $PSL_2(\mathbf{Z})$ est la somme sur l'orbite par $PSL_2(\mathbf{Z})$ de la fonction partie imaginaire de la fonction $(Imz)^s e^{(2i\pi Im(z))}$. On obtient une fonction périodique en la partie réelle, de période 1. On calcule ses coefficients de Fourier en décomposant cette orbite en réunion d'orbites du sous-groupe des translations entières du demi-plan; ceci fait apparaître une somme de fonctions de Bessel pondérées par des sommes de Kloosterman, la plus classique étant $\sum e^{(2i\pi((x+y)/n)}$, la somme portant sur l'hyperbole $xy = 1$ de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$. D'autre part, on dispose - au moins théoriquement - de la décomposition spectrale de la représentation régulière du groupe $PSL_2(\mathbf{R})$ dans l'espace $L^2(PSL_2(\mathbf{Z})\backslash PSL_2(\mathbf{R}))$. Ceci donne un cas de la formule de Kutzenov (1977, voir [7]) trouvée indépendamment par Bruggemann (1978, voir [1]), reliant l'expression géométrique à l'expression spectrale de séries de Poincaré attachées à des groupes fuchsiens de première espèce.

En fait, on veut une formule valable pour assez de fonctions-tests, pour pouvoir l'appliquer à des questions de théorie analytique des nombres (par exemple en direction de la conjecture de Linnik sur le comportement de sommes de sommes de Kloosterman, ce qu'ont obtenu notamment Deshouillers-Iwaniec [2]) et à l'étude du comportement du spectre du Lapla-

cien.

La partie essentielle de cet ouvrage donne une démonstration, élégante et conceptuelle, de la formule de Kutzenov-Bruggemann, reposant sur l'analyse harmonique du groupe $PGL_2(\mathbf{R})$. Les auteurs interprètent toutes les notions en termes de concepts naturels de la théorie des représentation (fonctionnelles de Whittaker, modèles de Kirillov, facteurs L des représentations et équations fonctionnelles) introduits par Gelfand-Graev-Piatetskii-Shapiro-Kirillov ([4]), et Jacquet-Langlands ([6]). Les questions de convergence ne sont pas éludées, et la moitié de cette partie concerne l'application aux fonctions zeta que Selberg a attachées aux sommes de Kloosterman. La formule des traces relatives de Jacquet conduit aussi à cette formule de Kutzenov-Bruggemann : voir ses travaux avec Lai [5].

La seconde partie, due à Piatetskii-Shapiro, étudie les questions analogues pour un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. Le groupe $PGL_2(\mathbf{R})$ est remplacé par le groupe $PGL(2)$ pris sur les adèles de ce corps et le sous-groupe G par le groupe $PGL(2)$ pris sur le corps. Les travaux de Jacquet-Langlands permettent de retrouver les concepts ci-dessus, et Drinfeld([3]) ayant démontré la conjecture de Petersson-Ramanujan dans ce cas, l'analogue de la conjecture de Linnik est prouvé dans cette seconde partie.

Cet ouvrage montre encore l'élégance de la formulation, et de leur démonstration, de questions de théorie analytique des nombres en termes d'analyse harmonique; il permet de vérifier aussi la nécessité d'une solide connaissance d'analyse classique.

Références :

[1] Bruggeman, R.W., Fourier Coefficients of Automorphic forms, Lecture Notes in Mathematics n° *865, Springer 1981.*

[2] Deshouillers, J.-M., et Iwaniec, H., Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp-forms, Invent. Math. 70 (1982), 219-188.

[3] Drinfeld, V.G., Langlands conjecture for $GL(2)$ over function fields, in Proc. Int. Congress Math Helsinki 1978, vol. 2, pp. 565-574.

[4] Gelfand, I.M., Graev, M.I., et Piatetskii-Shapiro, I.I., Representation theory and automorphic functions, W.B. Saunders and C°, *Philadelphia 1969.*

[5] Jacquet, H., et Lai, K.F., A relative trace formula, Comp. Math. 54 (1985), 243-310.

[6] Jacquet, H., et Langlands, R.P., Automorphic Forms on $GL(2)$, Lecture Notes in Mathematics n° *114, Springer 1970.*

[7] Kutznetsov, N., Petersson's conjecture for cusp-forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums, Math. Sbornik 39 (1981), 299-342.

[8] Selberg, A., On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, in Proc. Symp. Pure Math VIII (1965), 1-15.

Paul GERARDIN
Université Denis Diderot– Paris VII