SOMMAIRE DU N^o 78

La Gazette des mathématiciens *prie ses lecteurs de l'excuser pour la sortie tardive de son numéro automnal.*

Elle tient à remercier chaleureusement le concepteur de ses nouveaux atours, Antoine Chambert-Loir, qui fit preuve d'une certaine longanimité. La mise en place du «format Gazette» fut, en effet plus tourmentée que prévue ...

Dates limites de soumission des articles
pour parution dans le n° 79 : *15 novembre 1998*
pour parution dans le n° 80 : *15 février 1999*

SMF

Mot de la présidente

Les mathématiques ont été à l'honneur cet été à Berlin, où s'est tenu le Congrès International des Mathématiciens, ICM98, qui sera le dernier de ce siècle. Au cours de ce congrès ont été décernées 4 médailles Fields (Richard Borcherds, Timothy Gowers, Maxim Kontsevitch et Curtis McMullen), un prix Nevanlinna (Peter Shor), et un prix spécial pour récompenser les travaux exceptionnels d'A. Wiles concernant le dernier théorème de Fermat.

Les autorités allemandes ont accordé une grande importance à cette manifestation, en soulignant le caractère universel des mathématiques, « langage commun à toutes les sciences, technologie-clé de notre temps ».

Mireille Martin-Deschamps

La SMF a célébré l'évènement en organisant, conjointement avec la SMAI, une réception à la Maison de France à Berlin (les représentants de l'ambassade, installés à Bonn pour environ un an, ont apporté un soutien chaleureux), pour fêter en particulier la médaille de Maxim Kontsevitch, qui fait l'honneur à notre pays d'y résider depuis 1995. Un communiqué de presse a été envoyé aux agences de presse et aux journaux français afin de les inciter à parler du congrès et des médailles.

Les discours entendus durant cette période manifestent une sympathie réelle pour notre discipline, et nous ne pouvons que nous en féliciter, mais ils ne doivent pas nous faire oublier les critiques dont nous sommes fréquemment l'objet, ainsi que les remises en cause de l'utilité des mathématiques. La SMF doit continuer à assurer son rôle de défense et de soutien de la communauté, comme elle l'a fait ces années passées (par exemple en organisant des débats comme celui qui a eu lieu au printemps 1997 au Palais de la Découverte).

Elle doit aussi accentuer son travail de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, partout où elles sont enseignées (que ce soit par des mathématiciens ou par des collègues d'autres disciplines ; il convient dans ce cas d'analyser les raisons de cette perte de territoire), l'ont été, ou pourraient l'être (en particulier dans les écoles d'ingénieurs, où leur enseignement se réduit d'année en année). Un problème aigu est celui de l'emploi de nos étudiants, y compris hors des voies traditionnelles de l'enseignement et de la recherche. Il faudrait dans un premier temps prolonger le travail remarquable qui a été fait pour MAV+10.

Enfin la SMF doit approfondir et améliorer ses activités scientifiques, à travers le CIRM, les publications et le serveur :

– depuis les conclusions heureuses du contrôle fiscal, nous savons qu'il va falloir trouver un nouveau statut pour le CIRM, modifier son lien juridique avec la SMF, tout en veillant à préserver sa vocation d'outil exceptionnel au service de notre communauté ; c'est une des tâches importantes de la SMF à l'heure actuelle ;

– nos publications sont maintenant reconnues internationalement, comme en témoigne en particulier le contrat de co-édition que nous venons de signer avec l'AMS, et qui est détaillé à la rubrique *Vie de la Société* ;

– le serveur dont je vous rappelle l'intitulé `http://smf.emath.fr/` se développe, et sera bientôt pourvu d'un responsable éditorial.

Plus que jamais, la SMF a besoin du soutien, éventuellement critique, et de la participation active de toute la communauté mathématique pour mener à bien ses missions.

Mireille Martin-Deschamps

⋆ ⋆ ⋆

Vie de la société

Le renouvellement du conseil

Les élections au conseil du 13 juin 1998 ont donné les résultats suivants : C. Deschamps, 459 voix (élu) ; R. di Cosmo, 386 voix (élu) ; H. Géman, 370 voix ; A. Jaquemard, 448 voix (élu) ; M. Martin-Deschamps, 485 voix (élue) ; A. Pajor, 335 voix ; J. Queyrut, 415 voix (élu), G. Ruget, 431 voix (élu) ; C. Sabbah, 481 voix (élu) ; M. Vigué, 400 voix (élu) ; 17 bulletins nuls, 6 bulletins blancs ; un certain nombre de personnes non-candidates ont obtenu entre 1 et 4 voix.

Le conseil est maintenant constitué, outres des nouveaux élus, de Martin Andler, Pierre Bérard, Jean-Pierre Borel, Michel Broué, Paul-Jean Cahen, Gilles Christol, Paula Cohen, Emmanuel Hebey, Bernard Helffer, Jean-Yves Mérindol, Michel

Merle, Patrice Perrin, Annie Raoult, Philippe Tchamitchian, Bruno Wirtz, Michel Zisman.

L'élection du bureau et de la présidente

Le conseil s'est réuni le 14 juin et a élu Mireille Martin-Deschamps présidente de la SMF. Le bureau est constitué de : Martin Andler (vice-président, chargé de la communication), Paul-Jean Cahen (vice-président, chargé de la cellule de Marseille), Michel Merle (vice-président, chargé de l'enseignement), Jean-Pierre Henry (trésorier), Claude Sabbah (secrétaire aux publications), Michel Zisman (secrétaire).

La nouvelle présidente est directrice de recherche au CNRS, spécialiste de géométrie algébrique projective ; elle est depuis 1998 affectée à l'équipe de mathématiques de l'université de Versailles dont elle est la directrice.

Assemblée générale

L'A.G. a eu lieu à l'IHP le 13 juin 1998. Suivant l'usage, les rapports ont été présentés : rapport moral par J.-J. Risler, rapport sur la cellule de Marseille par P.-J. Cahen, rapport financier par J.-P. Henry. Après un débat qui a porté sur l'orientation de la SMF, les rapports ont été adoptés à l'unanimité des présents, sauf le rapport moral pour lequel il y a eu cinq abstentions.

Le serveur de la SMF `http://smf.emath.fr`

Il est maintenant possible d'effectuer des commandes d'ouvrages publiés par la SMF, de s'inscrire à la SMF directement sur le serveur.

Joindre la SMF *par courrier, ou courrier électronique*

Tout le courrier doit être adressé, soit au secrétariat, soit aux membres du bureau, soit aux comités de rédaction des revues et publications, à l'adresse de la SMF : IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75 231 Paris cedex 05.

– Secrétariat général
  Claire Ropartz : `smf@dmi.ens.fr`

– Secrétariat des publications
  Astérisque, *Bulletin* et *Mémoires*, *Panoramas & Synthèses*
  Nathalie Christiaën : `christiae@dmi.ens.fr`
  Officiel, *Gazette*, *Revue d'histoire des mathématiques*, *Collections* SMF
  Nathalie Hermellin : `officiel@dmi.ens.fr`

– Bureau
  Mireille Martin-Deschamps : `smf@dmi.ens.fr` ou `mmd@math.uvsq.fr`
  Martin Andler : `andler@math.uvsq.fr`
  Paul-Jean Cahen : `paul-jean.cahen@math.u-3mrs.fr`
  Jean-Pierre Henry : `henry@orphee.polytechnique.fr`
  Michel Merle : `merle@math.unice.fr`

Claude Sabbah : sabbah@math.polytechnique.fr
Michel Zisman : zisman@math.jussieu.fr

Contrat SMF-AMS

Un contrat a été signé entre la SMF et l'American Mathematical Society définissant un cadre permettant la publication en anglais d'un certain nombre de titres publiés par la SMF, soit dans ses collections de livres, soit dans Astérisque ou les Mémoires. Avec l'accord des auteurs, les titres seraient publiés par l'AMS deux ou trois ans après leur publication par la SMF.

Réforme de l'agrégation de mathématique

A la suite de la publication dans le BO du 21 mai et le JO du 15 juin d'un texte réformant l'agrégation de mathématiques (le point principal étant la suppression de l'épreuve d'option à l'écrit, et la création d'une épreuve orale supplémentaire de « modélisation »), la SMF, SMAI et la SPECIF (Société des Personnels Enseignants et Chercheurs en Informatique en France) ont écrit le 3 juillet 1998 au ministre pour protester sur la réforme et à propos du manque de concertation sur sa mise en place. Le 16 juillet, les sociétés ont été reçues par D. Dacunha-Castelle, membre du cabinet du ministre. La position du ministère est que cette réforme ne peut pas être différée. Des recommandations seront faites au jury pour éviter que la nouvelle épreuve n'ait un poids effectif excessif la première année. Un dossier substantiel est disponible sur le serveur de la SMF http://smf.emath.fr

Réflexion sur la mise en place d'un Capes mathématiques-informatique

Un projet de Capes mathématique-informatique est en discussion au ministère. La SMF est consultée sur ce texte. Le projet actuel a été diffusé à tous les membres de la SMF qui ont donné à la société leur adresse électronique.

Martin Andler

TRIBUNE LIBRE

INTERVIEW DE PIERRE-LOUIS CURIEN ET DIDIER ROBERT[1]

Le 7 juillet, Pierre-Louis Curien, Directeur Scientifique pour le Département Mathématique et Informatique de la Direction de la Recherche et Didier Robert, responsable des mathématiques à cette Direction ont reçu Bernard Prum pour « Matapli » de la SMAI *et Marie-Françoise Roy pour « La Gazette » de la* SMF*. Durant près de trois heures, ils ont fait part de leur point de vue sur la situation des mathématiques dans l'enseignement supérieur et la recherche. Les réponses aux questions posées étant faites conjointement par nos deux interlocuteurs, nous ne distinguerons pas explicitement à chaque instant lequel s'exprime.*

Bernard Prum (SMAI), Marie-Françoise Roy (SMF)

[1] NdR : Messieurs Pierre-Louis Curien et Didier Robert ont donné leur démission à dater du 1er octobre 1998.

[1] sigles : ATER : Attaché temporaire d'enseignement de recherche – ATOS : Administratifs, techniciens, ouvriers de service – CIFRE : Convention industrielle de formation par la recherche – CNU : Conseil national des universités – CSE : Commission de spécialistes – DSPT : Département scientifique pédagogique et technique – EPIC : Etablissement public et commercial à caractère industriel – HDR : Habilitation à diriger des recherches – UMR : Unité mixte de recherche – CR : Chargé de recherche – DR : Directeur de recherche – MC : Maître de conférence – PR : Professeur – PRAG : Professeur agrégé – PEDR : Prime d'encadrement doctorale – AMA : Allocation moniteur agrégé – AMN : Allocation moniteur normalien – AMX : Allocation moniteur polytechnicien.

On a annoncé ces jours-ci quelque 800 postes nouveaux pour l'enseignement supérieur en 99. Savez-vous s'il s'agit de postes d'enseignants, d'ATOS, de PRAG ? Savez vous aussi si une planification des postes à venir existe, pour prévoir les nombreux départs à la retraite que nous allons connaître ?

Pierre-Louis Curien

On ne peut pas dire que la situation soit mauvaise pour les publications de postes en mathématiques — et je ne crois pas qu'il y ait lieu d'être pessimiste pour les années à venir. A condition aussi que, localement, les mathématiciens soient actifs et s'investissent dans leurs établissements, qui ont l'initiative des demandes de postes, et qui les négocient. Ici, à la Direction de la Recherche, nous n'avons pas une vue d'ensemble sur les postes, qui dépendent pour la plupart de la Direction des Enseignements Supérieurs. Nous n'intervenons pas directement sur l'attribution de postes dans les universités.

Cependant, en 1998, il y a eu deux catégories de postes d'enseignants pour lesquels notre avis a été déterminant : les « postes de recherche » (300, dont une vingtaine en mathématiques) et les « postes chercheurs » (100, dont une demi-douzaine en mathématiques). Il y avait quelque 3000 postes en mouvement.

Les « postes chercheurs » sont destinés à recevoir en détachement des chercheurs des grands organismes, tel le CNRS. Ce détachement ne passe pas en Commission de Spécialiste, mais, bien sûr, par la suite, si la personne concernée souhaite rester dans l'enseignement supérieur, il faut un avis favorable de la CSE. La procédure n'a pas très bien fonctionné, sans doute à cause de la mauvaise publicité qui en avait été faite : pour les 100 postes en cours de sélection, il n'y a eu que 140 propositions de création de postes par les Présidents d'université. Le Directeur de la Recherche, Daniel Nahon, a demandé aux Directions Scientifiques de dire quelles étaient les demandes les plus intéressantes, et l'addition a donné les 100 postes offerts.

Souvent le dossier n'indiquait pas à quel chercheur correspondait la demande, et nous avons dû réclamer des précisions. Plusieurs dossiers ont été rejetés car ils ne correspondaient pas réellement à un détachement

« à grade égal », mais cachaient un passage de CR à Professeur. L'esprit de ces postes est de mettre un CR sur un poste MC ou un DR sur un poste PR. Le Directeur de la Recherche a insisté sur ce point.

La finalité est de rajeunir la moyenne d'âge des organismes de recherche en général, et du CNRS en particulier. Le Ministre trouve que 47 ans est une moyenne trop élevée pour le CNRS. Bien sûr l'âge moyen est plus bas en mathématiques... Le CNRS a pris au sérieux le problème du passage CR/Professeur par rapport aux postes au concours de Directeur de Recherche, et je trouve que le système des entretiens approfondis est bien fait. Les jeunes matheux trouvent cet entretien intéressant. Il permet de poser clairement la question « est-ce que je suis quelqu'un de suffisamment motivé par la recherche pour rester un peu plus longtemps au CNRS et courir le risque de ne pas être pris comme DR, ou bien est-ce que je dois chercher à exercer une carrière de Professeur ? ». En mathématiques, le message « passer de CR1 à Professeur est quelque chose de normal dans la carrière », est en général tout à fait reçu.

Mais, même si les chercheurs CNRS sont bien insérés dans le milieu universitaire, le mouvement ne s'enclenche pas suffisamment. Dans beaucoup de cas, le passage CR CNRS/Prof se fait très bien : les CR1 candidatent assez jeunes sur les postes de PR et trouvent naturellement leur place au sein de l'université. Dans d'autres cas, ils attendent trop longtemps un poste de DR qui n'arrive pas, et se décident à candidater comme PR trop tardivement ; ils deviennent alors difficiles à défendre en commission de spécialistes. Aussi je crois que les CR1 ne doivent pas trop attendre pour entreprendre une carrière de professeurs.

Le problème se pose avec plus d'acuité en Informatique ; l'INRIA est un organisme jeune, où les gens passent DR plus jeunes en moyenne qu'au CNRS. Les charges d'enseignement sont souvent plus lourdes en informatique qu'en mathématiques : en mathématiques on arrive dans un environnement assez rodé, en informatique, il faut mettre en place de nouveaux enseignements tous les 3-4 ans. Tout ceci ne facilite pas le passage de chercheur à enseignant-chercheur.

Il ne me semble pas opportun de créer des postes de PR réservés aux chercheurs. En revanche, il est clair que si l'on rendait les carrières universitaires plus attractives, il y aurait davantage de passages chercheurs–enseignants. D'une part, on peut faciliter la possibilité de candidater à la PEDR très rapidement après le passage CR/PR (aujourd'hui, il faut être titulaire pour bénéficier de cette prime). D'autre part, le Ministère réfléchit à la possibilité pour les enseignants-chercheurs montrant une importante activité de recherche d'avoir des allégements de service. Ceci ne serait pas spécialement réservé aux chercheurs arrivant dans l'enseignement, mais serait une incitation pour que plus de bons chercheurs prennent un poste de PR. Le système actuel du « tout ou rien » pour l'enseignement doit pouvoir être aménagé.

Vous avez aussi mentionné des « postes–recherche ».

Les « postes–recherche » sont des postes demandés au titre de la recherche ; ils sont très importants pour la Direction de la Recherche : ce sont ceux pour lesquels nous pouvons exercer une influence sur la politique de recrutement des universités.

Un appel d'offre a été lancé en 1997, à la suite de quoi les universités ont fait une demande argumentée de postes sur des profils de recherche précis (on peut concevoir que le Ministère souhaite renforcer un axe de recherche quelque part et suggère une demande au titre de la recherche — mais ce n'est pas la règle générale). Ces postes sont attribués sur ce seul critère qualité-recherche, donc indépendamment du nombre d'étudiants, même si ceci n'apparaît pas clairement lors de la publication. Il n'y a pas de dispositif central permettant de contrôler que les Commissions de spécialistes pourvoient ces postes selon le profil demandé ; c'est au Président d'université de faire passer le message[2].

La pression est plus forte sur les postes MC que sur les postes PR. A cela notons deux raisons : il y a quelques années, les recrutements dans les établissements d'enseignement supérieur ont été faibles, avec pour conséquence le petit nombre de MC passant aujourd'hui leur HDR ; et, s'il y a eu davantage de recrutements il y a 5 ou 6 ans, les MC recrutés semblent avoir un peu tendance à retarder leur habilitation. L'HDR est peut-être de niveau plus élevé que l'ancienne thèse, en tous cas elle demande plus de temps pour être préparée.

Je pense que les services d'enseignement que l'on donne aux jeunes MC sont lourds pour des enseignants-chercheurs débutants. Ce sont des jeunes, habitués à travailler dans de bonnes conditions, avec une allocation de recherche, avec un peu d'enseignement s'ils sont moniteurs, et d'un seul coup, alors qu'ils ne sont pas nécessairement devenus très autonomes en recherche, ils se retrouvent avec 192 heures de cours, pas toujours bien équilibrées, face à des salles de TD conséquentes. Pendant les deux ou trois premières années ils sont très accaparés par ces enseignements, et ont parfois du mal à sortir de cette situation. Ceci explique

[2]Le budget 99 n'a malheureusement pas permis de reconduire cette procédure en 1999. Cependant, la DR a examiné fin octobre 98 l'ensemble des demandes de créations de postes, emettant des avis quant aux profils de recheche.

peut-être pourquoi la préparation de l'habilitation s'étale sur un nombre d'années important.

Il faut s'inquiéter de ce que deviennent les jeunes MC. Il serait dommage que les deux tiers d'entre-eux n'arrivent pas à faire une HDR dans les 6 ans à venir par exemple. Nous devons surveiller ce point de près sinon nous aurons des problèmes pour faire face aux prochains départs massifs à la retraite : pourvoir la moitié de ces postes par des recrutements d'étrangers n'est pas envisageable.

Il se peut qu'il y ait un phénomène de foule, qu'une génération considère d'abord « qu'elle a le temps », puis que d'un seul coup elle décide qu'elle va rencontrer une pression plus forte et qu'il devient donc urgent de passer l'HDR. Nous aurions subitement alors, beaucoup plus d'habilités que de postes de PR.

On constate que la proportion de PRAG augmente considérablement par rapport à celle des MC. De nombreux jeunes souhaitant faire de la recherche acceptent de tels postes par nécessité, ce qui compromet leurs chances de mener une recherche fructueuse. En outre la co-existence de personnels similaires mais ayant des obligations différentes crée des tensions dans nos laboratoires. Pensez-vous que ces postes vécus souvent comme « une secondarisation des premiers cycles » doivent continuer à se multiplier ?

Les PRAG ne dépendent pas du tout de notre Direction. Un argument que j'ai entendu en faveur des PRAG est qu'il est important que dans les premiers cycles de l'enseignement supérieur il y ait des enseignants ayant une culture scientifique assez large. L'idéal est un agrégé ayant aussi une thèse. Au sortir d'une thèse on a en moyenne une culture très pointue, alors qu'un agrégé a en général une culture assez large. Il n'y a pas grand chose à redire à cet argument sinon qu'il a moins de force en mathématiques, où les MC sont au moins une fois sur deux agrégés.

Mettre des agrégés dans les premiers cycles peut servir aussi à rapprocher les premiers cycles et les classes préparatoires, ce qui est un objectif de notre Ministre.

Comme vous le signalez dans votre question, beaucoup de PRAG ne sont PRAG que par les lois du marché du travail : ils ont alors vocation à passer dans l'enseignement supérieur si on ne les noie pas sous une charge de services et des conditions psychologiques qui les différencient trop des MC, rendant impossible un dégagement suffisant de temps pour constituer un dossier de recherche solide. Ces questions sont examinées avec attention par le Cabinet ; l'objectif est de permettre aux PRAG ayant vocation à devenir enseignants-chercheurs de mener leur recherche.

Mais inversement il y a des sous-disciplines un peu particulières : les jeunes venant de passer une thèse dans un domaine comme l'informatique fondamentale ou le calcul formel ne sont pas particulièrement bien préparés pour passer l'agrégation de maths telle qu'elle est. Ils ne vont pas tous devenir chercheurs à l'INRIA ou MC, ils seraient très utiles comme enseignants en premier cycle, et ils ne peuvent pas être recrutés comme PRAG. Aux États-Unis après une thèse on peut être enseignant en « college », nous ne proposons rien de cette nature aux titulaires d'une thèse.

J'envisagerai pour répondre à votre question une autre possibilité : je suis plutôt contre l'agrégation d'informatique. L'agrégation ne doit pas se couper de ses origines qui sont les savoirs fondamentaux enseignés au lycée. La multiplication des disciplines qui donnent lieu à agrégation m'inquiéterait un peu. Ou alors il faut changer l'agrégation pour la calquer sur les besoins des « colleges » au sens américain du terme. Je crois que l'agrégation continue à servir en bonne part dans le secondaire. Or je ne vois pas l'informatique comme une discipline fondamentale du secondaire, mais plutôt comme un appoint.

L'informatique bouge aussi très vite. Beaucoup d'agrégés ne sont pas en contact avec l'évolution de la recherche ; dans le cas de l'informatique une personne aujourd'hui très en pointe sur ce qui se fait du point de vue des langages et systèmes d'exploitation (Java, html), sera largement dépassée dans 4 ans. Il n'y a pas de formation permanente après l'agrégation ! Je suis donc assez prudent. Une chose qui me plairait serait qu'à côté de l'agrégation de mathématiques, apparaisse une agrégation maths-info, comme on pourrait imaginer une agrégation maths-physique etc. Je pense qu'il faudrait alléger le programme de mathématiques d'une partie suffisante pour permettre une bonne formation d'informatique afin d'obtenir une agrégation vraiment mixte, tout en gardant assez de mathématiques pour former de très bon professeurs du secondaire, voire même de taupe. Les étudiants auxquels vous faites allusion seraient dès lors à même de passer cette agrégation.

Et que pensez vous d'un CAPES math-info qui semble en gestation ?

L'esprit en serait un peu différent. Pour le CAPES math-info, il s'agirait de préparer les professeurs de mathématiques du collège (6–3) de demain à être capables de faire aussi tourner les ordinateurs et de former les adolescents à l'outil informatique. Il s'agit plus de donner « le virus informatique » aux professeurs de math. Je suis d'accord que tout ceci devrait s'organiser au sein d'une filière maths-info.

Continuons si vous voulez sur l'Agrégation. Les matheux appliqués en particulier ont assez mal réagi quand ils ont vu les mathématiques appliquées disparaître de l'écrit pour figurer à l'oral sous forme « d'illustration ».

J'ai effectivement eu écho par plusieurs messages électroniques de cette critique. La réforme s'est essentiellement développée en dehors du ministère en tant que structure. Claudine Ruget a mené la réflexion, elle y a consacré beaucoup de temps, elle a réuni des gens autour d'elle.

Je l'ai rencontrée. Elle m'a expliqué les raisons de cette réforme : la perception des jurys successifs depuis quelques années était que les épreuves d'options écrites influaient extrêmement peu sur les moyennes. Elles n'avaient pas un caractère assez affirmé : l'épreuve de maths-applis n'était pas vraiment des maths-applis mais plutôt de l'analyse déguisée, l'épreuve d'informatique pas très informatique mais de l'algèbre avec une petite perception informatique, sans entrer dans le cœur de l'informatique.

Elle m'a aussi expliqué qu'il fallait remédier au fait que l'on trouve encore beaucoup de jeunes professeurs agrégés qui ne savent utiliser ni un logiciel de calcul numérique, ni un logiciel de calcul formel, ou encore de statistiques, de visualisation.

Elle pense qu'il faut un tronc commun minimum pour tout le monde, sans prétention à pousser très loin ni en analyse numérique, ni en probas-stat, ni en informatique qui garantisse que les futurs professeurs sachent utiliser les logiciels de calcul scientifique et de calcul formel. Ceci implique leur sensibilisation à l'outil informatique et à un type de mathématiques qui se prête plus au traitement par ordinateur. J'aime beaucoup l'idée de voir se multiplier les cours de mathématiques appuyés sur l'ordinateur. Il s'en publie plus à l'étranger que chez nous, c'est bien dommage.

J'ai vu la lettre cosignée par Mireille Martin-Deschamps (SMF), Alain Damlamian (SMAI) et Max Dauchet (SPECIF). Elle me paraît très bien et pas du tout en contradiction avec les démarches que j'avais faites. Je souscris aux deux points présentés par Claudine Ruget, mais je souscris aussi à votre souci quant à la relative précipitation des choses. Elle a bien sûr consulté nombre de collègues...

Aucune de nos deux Sociétés Savantes en tout cas... et elle a une opinion claire de ce qu'elle souhaite et elle est allée au bout de ses opinions.

En dehors de cette idée de tronc commun — qui sur le plan du principe me paraît une bonne chose : décrasser tout agrégé en probas et en calcul numérique, formel, et symbolique est une excellente idée — le point qui me paraît nodal, et qui ne me semble pas réussi, est ce qui reste de l'option. D'abord il y a un mariage forcé entre le calcul scientifique et l'informatique (réduite au calcul formel), ce qui montre une méconnaissance de ces disciplines. Ensuite la liste des thèmes proposés pour illustrer la leçon ne me paraît pas très optimale. Et, pour le moment, l'informatique en tant que discipline scientifique est presque totalement absente : un informaticien n'est pas seulement une personne qui sait se servir d'un ordinateur — et qui sait enseigner ce maniement.

Ceci dit, cette réforme est parue au J.O., elle sera effective cette année. Mais Claudine Ruget s'est dite ouverte pour modifier l'agrégation dès l'an prochain. Il y a donc moyen de recréer des options décentes en respectant le passage de l'écrit à l'oral et l'idée du tronc commun. On peut réinjecter des options différenciées avec un fort contenu, et en mettre trois ou quatre au lieu de deux seulement.

En résumé, je suis favorable à une différenciation nette de l'épreuve orale optionnelle, qu'il y ait une vraie option d'informatique, une vraie option d'analyse numérique, etc.

Chaque campagne de recrutement est l'occasion d'un nouveau débat sur le choix entre candidats locaux et candidats en mobilité. Quel est votre point de vue sur cette question ?

La mobilité géographique dans le recrutement des enseignants chercheurs doit être encouragée à tous les niveaux, car c'est un facteur de dynamisme. Cependant, il faut savoir nuancer. Les recrutements locaux ne doivent pas être interdits par principe, même s'ils doivent être exceptionnels. Dans certaines circonstances, un recrutement local peut-être bénéfique pour une équipe.

Le problème se pose déjà en amont, pour les ATER : les allocations de recherche incitent à maintenir les jeunes chercheurs au même endroit, en particulier s'ils n'ont pas fini leur thèse. Une fois qu'ils enseignent de façon satisfaisante quelque part, on a tendance à les y recruter comme MC. Il faudrait déjà promouvoir le service d'ATER dans un autre laboratoire. Il serait d'ailleurs très instructif de procéder à une enquête sur le caractère local ou non des ATER.

De même, il faudrait multiplier les séjours post-doctoraux, en particulier à l'étranger. Ces séjours apportent un « plus » à l'étudiant, et les commissions de spécialistes devraient souvent puiser chez les post-docs. Avoir fait un post-doc devrait être un avantage et non un handicap. Il nous faut convaincre les collègues que c'est un bon choix, mais il y a des endroits où ce message risque de ne passer que lentement.

On doit constater que la mobilité se fait mieux au CNRS ou à l'INRIA. Les mathématiciens y jouent bien la mobilité, tant géographique que thématique. Mais, même à l'université, ça marche mieux chez nous qu'en physique ou en chimie.

Et les bourses d'accueil pour étrangers ?

Il existe des appels d'offre pour des bourses post-doctorales et pour des bourses de haut niveau ; certaines sont gérées par les Affaires Étrangères (par exemple les bourses Chateaubriand) ; il existe aussi maintenant des bourses du Ministère, qui sont gérées par le Bureau des Relations Internationales de la Direction de la Recherche. Le flux est petit, aujourd'hui une cinquantaine de bourses post-doc, mais on attend une montée en puissance. Nous voulons aussi amplifier le dispositif des bourses en cotutelle. Naturellement, on aimerait qu'un tel effort corresponde à un effort analogue de nos partenaires et qu'il y ait davantage de bourses à l'étranger pour nos étudiants.

Il semble que les bourses dans les EPIC aient vu leur nombre diminuer ; on parle même de leur disparition à court terme. Qu'en est-il ?

Il existe une volonté affirmée que les thèses se déroulent dans le périmètre universitaire au sens strict ou dans le sein d'une association clairement définie entre équipe d'accueil et université. Jusqu'à aujourd'hui, par exemple, le CEA a accueilli un grand nombre de thésards sans convention bien définie et sans qu'il y ait de contrôle sur la thèse par les universitaires. Le Ministère préférerait voir le CEA accueillir en préembauche des post-docs.

Les allocations 98 iront à des DEA dont toutes les équipes d'accueil sont reconnues. Nous faisons une forte pression pour que les organismes tels l'INRIA créent des Unités Mixtes de Recherche. C'est déjà le cas à Rennes, Nancy et bientôt Grenoble. L'INRIA est déjà fortement impliquée dans nombre de DEA et formations doctorales. On peut aussi concevoir des UMR entre le CEA et l'université.

Les allocations de recherche seront désormais fléchées sur les écoles doctorales, ce qui devrait donner plus de souplesse dans la répartition entre les divers DEA concernés.

Les bourses AMA (réservées aux agrégés) ont été supprimées, tandis que les bourses AMN et AMX ont été maintenues, même si leur nombre a diminué d'environ 10%. Il existe toujours les bourses propres aux organismes (CNRS, INRIA,...) ainsi que les bourses CIFRE (notez au passage qu'il y a maintenant un mathématicien, Jean-Michel Ghidaglia à la Direction de la Technologie).

Les « groupes d'experts » ont été supprimés. Comment va donc se faire l'évaluation de la recherche dans nos établissements ?

Le dossier de l'évaluation est encore en chantier. Le but recherché est la création d'une Agence Nationale d'Évaluation, travaillant de façon indépendante sous l'égide du Ministre — quelque chose comme le « Conseil Supérieur de l'Audiovisuel ». Elle devrait avoir pour vocation l'évaluation de l'ensemble de la recherche en France, depuis celle des universités, jusqu'au CNRS, l'INRIA, l'INSERM,... Elle travaillerait « à la commande » sur un lieu géographique, ou un thème, ou un concept plus général (par exemple « les mathématiques appliquées dans le Sud-Ouest »), voire un organisme entier, comme le CNRS. Ses compétences ne comprendraient pas l'évaluation des individus, qui dépendraient encore du CNU ou du Comité National. Cette Agence travaillerait uniquement sur les rapports écrits fournis par les experts choisis. Ceux-ci ne se réuniraient pas, et ce serait l'instance mandataire, par exemple la Direction de la Recherche du Ministère, qui ferait la synthèse des rapports et les exploiterait. Le Ministre est très opposé aux doublons, et les doubles évaluations sont donc à proscrire. En conséquence, là où les organismes disposent d'instances d'évaluation, comme bien sûr le Comité National au CNRS, et, avant la mise sur pied de l'Agence, le Ministère ne procédera pas à une seconde évaluation.

Notons à ce propos une difficulté. Quand une équipe nouvelle demande à être évaluée par le Comité National, elle ne sera pas évaluée ensuite par le Ministère. Si la conclusion du CN est négative, elle n'aura pas une « seconde chance » d'être reconnue. Elle doit donc choisir à l'avance d'être examinée par le CN du CNRS ou par le Ministère, avec un ou exclusif.

Les primes de recherche et encadrement sont, elles, attribuées par des jurys non renouvelables choisis par les Directeurs Scientifiques du Ministère. Sur les trois prochaines années, le nombre de primes devrait monter de 7500 à 12000, de sorte que près de la moitié des enseignants chercheurs pourraient en bénéficier. Dans l'attribution des primes, nous avons demandé aux jurys à qualité égale, de favoriser les MC et les jeunes PR et de privilégier légèrement les dossiers de recherche par rapport à la quantité de thèses encadrée. Les noms de tous les experts seront publics, sans que l'on sache bien sûr lequel a rapporté sur tel ou tel dossier.

Il est question de voir disparaître les DEA. Ceci est-il fondé sur une réalité, et quelle est l'organisation à venir des thèses ?

Le cadre de la réflexion est le 3–5–8 de J. Attali, qui a pour objectif une harmonisation européenne souhaitable des formations. Il n'y aura probablement aucun diplôme supprimé[3]. Tous les DEA sont prolongés jusqu'en 99. Une difficulté vient du fait que l'actuel DEA se fait en 5ème année, ce qui correspond à la fin d'un cycle et non au début du cycle menant à la thèse.

Dans le système 3–5–8, un étudiant entrant en quatrième année devrait choisir entre une filière courte, le Mastère, et une filière longue aboutissant à la Thèse. Une réorientation serait possible en fin de 4ème année.

Le Mastère correspondrait à l'actuel DESS, et serait à vocation professionnalisante. En ce sens l'agrégation s'inscrirait dans ce cadre, étant professionnalisante pour l'enseignement secondaire (c'est moins vrai en mathématiques ou en lettres que dans d'autres disciplines). Les formations d'ingénieurs se trouveraient ainsi rapprochées de cette filière universitaire.

L'autre filière devrait être rattachée à une formation doctorale. Le Ministère veut favoriser cette notion d'école doctorale ; par exemple les allocations de recherche parviendront uniquement à ces écoles, et les DEA qui relèvent d'une même école devront les répartir entre eux. Il s'agit de responsabiliser davantage les établissements : aux universités de faire les choix, aux Présidents d'université de prendre leurs responsabilités, la nouvelle Direction de la Recherche n'ira pas — comme le faisaient les DSPT — visiter les laboratoires et intervenir dans les décisions locales. Elle observera et, lors des contrats quadriennaux, décidera de soutenir ou non telle formation doctorale ou telle équipe.

La rupture entre l'année de DEA, constituée essentiellement de cours, et les années de recherche devrait disparaître. Tout au long des quatre années (de bac+5 à bac+8), la formation doctorale devrait dispenser des cours, et l'étudiant ne pourra soutenir sa thèse que s'il valide tous ces enseignements.

La formation doctorale sera typiquement multidisciplinaire mais monosite : dans les grands centres, mathématiques seulement, ou mathématiques + physique, ou mathématiques + physique + chimie, ou mathématiques + biologie, ou mathématiques + informatique, par exemple. Elle est destinée à augmenter la lisibilité de la recherche dans un établissement et à faciliter la mobilité notamment du fait qu'elle correspond à une harmonisation à l'échelle européenne.

[3]selon des informations d'octobre 98, les les DEA ne seront pas supprimés. Ils seront créés et évalués dans le cadre des contrats quadriennaux.

Comment voyez vous la place des mathématiques dans les écoles d'ingénieurs ?

Notre Direction n'intervient pas au titre de l'enseignement dans les écoles d'ingénieur (pas plus que dans les universités). Je trouve néanmoins préoccupant d'y voir l'intérêt pour les mathématiques baisser d'année en année. Je pense qu'elles devraient se rapprocher des universités, voire entrer dans le périmètre des universités. Les diplômes d'ingénieurs doivent être reconnus dans les formations universitaires, en mathématiques comme en informatique. Il serait très préjudiciable de classer systématiquement les écoles d'Ingénieurs dans le cadre « 5 », et de leur interdire de participer au cadre « 8 ».

Quel message souhaitez vous faire passer à notre communauté ?

Tout d'abord un message rassurant. La Direction de la recherche, en partie héritière de l'élan donné par la DRED à la recherche universitaire en général et au développement des laboratoires de mathématiques en particulier, place le monde universitaire au centre du dispositif de recherche national. Les moyens attribués aux équipes en 1998 ont été renforcés en moyenne, la part occupée par les mathématiques est restée globalement stable. Rien ne nous pousse à nous inquiéter réellement pour le soutien qu'auront les mathématiques ces prochaines années.

Ensuite ce qui caractérise les mathématiques ces dernières années, c'est leur ouverture vers les disciplines voisines, physique, informatique, biologie et vers les applications : les mathématiciens font de réels efforts d'ouverture. Il est essentiel que cet effort se poursuive, que davantage de jeunes (les AMN dont nous parlions, par exemple) se tournent vers les mathématiques appliquées (probas-stat, edp,...). C'est particulièrement vrai pour les statistiques, qui sont insuffisamment développées en France, c'est très important, pour ce qui est de la couverture scientifique comme pour les débouchés.

Cette ouverture remarquable n'est pas synonyme d'éclatement, ou d'éparpillement, elle va de pair avec une affirmation de plus en plus grande de l'unité des mathématiques.

SUR L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

Vladimir I. ARNOLD
Université Paris IX et Institut Steklov

Difficile est saturam non scribere.

Juvenal, Satura I, 30.

Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher.

L'identité de Jacobi (qui force les trois hauteurs d'un triangle à être concourantes) est tout autant un fait expérimental que la rotondité de la Terre (le fait que la terre soit homéomorphe à une boule), mais cela revient moins cher à vérifier ! Au milieu du XX^e^ siècle on a essayé de séparer les mathématiques de la physique. Les résultats ont été catastrophiques ! On a vu apparaître des générations entières de mathématiciens ignorant la moitié de leur science — n'ayant d'ailleurs pas la moindre idée d'aucune autre. Ils ont commencé à enseigner leur horrible scolastique pseudomathématique, d'abord aux étudiants, puis aux lycéens, en oubliant le principe de Hardy, selon lequel il n'y a pas de refuge permanent sous le soleil pour des mathématiques laides. Comme de telles mathématiques scolastiques, séparées de la physique, ne sont adaptées ni à l'enseignement, ni à aucune application éventuelle à d'autres sciences, les mathématiciens se sont fait haïr des lycéens (dont certains ensuite sont devenus ministres[1]) et des utilisateurs. La construction sans harmonie faite par des mathématiciens ruminant leurs complexes d'ignorance vis-à-vis de la physique me fait penser à la construction axiomatique des nombres impairs. Il est évident qu'on peut construire une telle théorie, on peut même la faire admirer par les élèves pour sa beauté et son architecture interne (on a par exemple que la somme d'un nombre impair de nombres impairs est toujours bien définie ainsi que le produit de nombres impairs). De ce point de vue sectaire, les nombres pairs sont une hérésie ; mais on peut aussi les introduire plus tard dans la théorie comme « nombres idéaux », ceci pour s'adapter aux besoins de la physique et du monde réel. Malheureusement, c'est une construction similaire qui a dominé l'enseignement de la mathématique en France pendant des décades.

[1]NTD Cet article a été écrit pour une revue moscovite

Cette perversion, née en France, s'est vite répandue à l'enseignement de base des mathématiques, d'abord aux étudiants, puis aux élèves, d'abord en France, puis ailleurs, Russie inclue. A la question « Combien font 2 +3 ? » un élève d'école français a répondu « 3 +2, puisque l'addition est commutative ». Il ne savait même pas à quoi cette somme était égale, il ne comprenait même pas ce qu'on lui demandait ! Un autre élève (tout a fait sensé selon moi) définissait les mathématiques de la manière suivante : « Il y a des carrés, encore faut-il le prouver ! » Selon mon expérience pédagogique en France, l'idée de la mathématique chez les étudiants n'est pas très éloignée de celle de cet écolier. C'est même vrai pour les normaliens (j'ai la plus grande pitié pour ces étudiants, qui ne manquent évidemment pas d'intelligence par nature mais sont estropiés par un enseignement abêtissant). Par exemple les normaliens n'ont jamais vu de paraboloïde hyperbolique de leur vie et si on leur demande la forme de la surface d'équation

$$xy = z^2$$

cela provoque chez eux de la stupeur ! Dessiner la courbe donnée sous forme paramétrique par exemple par

$$x = t^3 - 3t$$
$$y = t^4 - 2t^2$$

est un problème insoluble pour les étudiants (et probablement pour la majorité des professeurs français de mathématiques). Pourtant, à l'époque du premier manuel d'analyse de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696) et en gros jusqu'au manuel de Goursat la capacité de résoudre de tels problèmes était considérée — autant que la connaissance des tables de multiplication — comme une part indispensable du bagage de tout mathématicien. Les zélotes de la mathématique superabstraite, privés par les Dieux de l'imagination géométrique, ont éliminé toute la géométrie de l'éducation, alors que c'est à travers elle que passent le plus souvent les relations avec la physique et le réel. Les manuels de Goursat[2], Hermite, Picard, ont failli récemment être jetés de la bibliothèque universitaire de Jussieu, comme obsolètes et donc néfastes (on ne les a conservés que sur mon intervention). Les normaliens, qui avaient déjà suivi des cours de géométrie algébrique et de géométrie différentielle donnés par des mathématiciens respectés, se sont révélés ignorant de la surface riemannienne associée

[2]NDT Pauvre Goursat, il en a eu des malheurs : C'est déjà pour remplacer son manuel « out of date » que se sont manifestées les premières velléités, alors pédagogiques, de N. Bourbaki : cf. discours d'H. Cartan en 1958, publié en anglais en 1980, The Math. Intelligencer vol. 2, 4. 1980, page 176

à une courbe elliptique et aussi de la classification topologique des surfaces (sans parler des intégrales elliptiques de première espèce ni de la structure de groupe d'une courbe elliptique ou du théorème d'addition : ils n'ont appris que les structures de Hodge et les variétés jacobiennes !) Comment a-t-on pu en arriver là, en France, le pays de Lagrange, de Cauchy et Poincaré, de Jean Leray et de René Thom ? Je me souviens de l'explication que m'a proposé Petrovski en 1966 du comportement des mathématiciens : les vrais mathématiciens ne forment pas de gangs, mais les faibles en ont besoin pour survivre.[3]

Ils peuvent se regrouper sous différentes banderoles (la superabstraction, l'antisémitisme ou les problèmes « appliqués et industriels »), mais cela se fait toujours essentiellement pour résoudre un problème de nature sociale : comment survivre dans un environnement intellectuel plus qualifié ? Je me souviens d'ailleurs des mots de Louis Pasteur « il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais de « sciences appliquées », il n'y a que des applications de la science » (souvent très utiles !) Il m'est arrivé de mettre en doute la réflexion de Petrovski, mais aujourd'hui je suis de plus en plus convaincu de son exactitude. Une part significative de la mathématique dite abstraite se réduit tout simplement à une appropriation systématique et impudente des résultats chez les créateurs, pour ensuite les attribuer aux épigones généralisateurs. De même que l'Amérique ne porte pas le nom de Colomb, les résultats mathématiques ne portent presque jamais le nom de ceux qui les ont découverts. Je dois remarquer que mes résultats n'ont jamais fait l'objet de pareils détournements, mais c'est arrivé systématiquement à mes maîtres (Kolmogorov, Petrovski, Pontryagin, Rohlin) comme à mes élèves.

Le professeur Michael Berry a formulé les deux principes suivants :

— Principe d'Arnold : Si une notion porte un nom propre, ce n'est pas celui de son créateur.

— Principe de Berry : Le principe d'Arnold s'applique à lui-même.

Revenons à l'enseignement des mathématiques en France. Quand j'étais étudiant en première année à l'Université de Moscou, le cours d'Analyse était fait par Toumarkin, un spécialiste de topologie et théorie des ensembles, et il suivait un cours à la française (comme Goursat). Il nous apprenait que les intégrales de fonctions rationnelles le long de courbes algébriques s'expriment au moyen de fonctions élémentaires si la surface de Riemann correspondante est une sphère, et qu'en général elles ne s'expriment pas ainsi si le genre est supérieur, et que pour que la surface de Riemann soit une sphère il suffit qu'il existe pour une courbe de degré fixé un assez grand nombre de points doubles (qui obligent la

[3]NDT Ceci ne s'applique évidemment qu'aux mathématiciens russes.

courbe à être unicursale : on peut dessiner les points réels dans le plan projectif d'un seul trait). Ces faits en eux-mêmes excitent l'imagination, même sans aucune démonstration, et donnent une meilleure idée des mathématiques contemporaines que plusieurs volumes de Bourbaki. Ils nous apprennent en effet qu'il existe des relations remarquables entre des faits apparemment sans rapports : l'existence d'une expression d'intégrales en termes de fonctions élémentaires et la topologie de la surface de Riemann correspondante, ou encore le lien entre le nombre de points doubles et le genre de la surface, qui en plus se manifeste dans le plan réel comme la propriété d'unicursalité. Déjà Jacobi affirmait que c'était le plus grand attrait de la mathématique que de voir apparaître la même fonction dans la représentation d'un nombre entier comme somme de quatre carrés et dans le mouvement du pendule. La découverte de ces liens entre objets mathématiques éloignés peut être comparée à celle des rapports entre l'électricité et le magnétisme en physique, ou de la ressemblance entre la Côte Ouest de l'Afrique et la Côte est de l'Amérique en géologie. Il est difficile de surestimer la valeur émotionnelle de ces découvertes dans l'enseignement. Elles nous apprennent en effet à chercher et à trouver d'autres manifestations de l'unité du monde. La dégéométrisation de l'éducation mathématique et le divorce avec la physique brisent ces relations. Par exemple, les étudiants d'aujourd'hui, comme les géomètres algébristes modernes ne connaissent plus en général le fait (voir la remarque de Jacobi) que l'intégrale elliptique de première espèce exprime le temps le long d'une courbe elliptique pour le système dynamique hamiltonien correspondant. En reprenant les mots connus sur l'électron et l'atome[4], on peut dire que l'hypocycloïde est aussi inépuisable qu'un idéal de l'anneau des polynômes. Mais enseigner les idéaux de polynômes à des étudiants qui n'ont jamais vu d'hypocycloïde est aussi absurde que d'enseigner l'addition des fractions à des enfants qui n'auraient jamais divisé une pomme ou un gâteau en parties égales, ne serait-ce que mentalement. Il ne faut pas s'étonner ensuite qu'ils préfèrent ajouter le numérateur au numérateur et le dénominateur au dénominateur.

[4] Lénine « L'électron est aussi inépuisable que l'atome ! »

Mes amis français m'ont dit que la tendance à la généralisation toujours plus abstraite est une tradition nationale[5]. Je me demande effectivement s'il ne s'agit pas d'une maladie héréditaire, mais je souligne tout de même que j'ai emprunté l'exemple de la pomme et du gâteau à Poincaré. Le schéma de construction d'une théorie mathématique ressemble tout à fait à celui de n'importe laquelle des autres sciences naturelles. Au début nous étudions certains objets, nous faisons des observations dans différentes circonstances. Puis nous cherchons à trouver les limites d'applications de nos observations, nous cherchons des contre-exemples, en évitant de trop généraliser (exemple : le nombre de partitions des entiers impairs 1, 3, 5, 7, 9 en un nombre impair de parties forme la suite 1, 2, 4, 8, 16, mais ensuite apparaît le nombre 29). A la suite de ces observations nous formulons si possible une conjecture comme découverte empirique (par exemple la conjecture de Fermat, celle de Poincaré). Puis arrive la période difficile où il s'agit de vérifier si nos conjectures sont à la hauteur des réalités. En mathématique a été mise au point une technique particulière qui peut parfois être utile pour les applications pratiques mais qui peut nous induire en erreur. Elle s'appelle la *modélisation*. Pour la construction d'un modèle on fait l'idéalisation suivante : certains faits, connus seulement avec un certain degré d'approximation ou de probabilité, sont considérés comme absolument vrais et sont pris comme « axiomes ». La signification de cet « absolu » est exactement que nous nous permettons d'agir avec ces « faits » selon les règles de la logique formelle, en appelant « Théorèmes » les déductions que nous en tirons. Il est clair que dans aucune action réelle on ne peut s'appuyer entièrement sur de telles déductions, parce que les paramètres des phénomènes étudiés ne sont pas connus tout à fait exactement, et qu'une petite modification (par exemple des conditions initiales du processus) peut complètement bouleverser le résultat. C'est ainsi qu'il n'est pas possible d'espérer des prévisions météorologiques dynamiques sur une longue période, et que

[5]Il semble que le premier « Bourbakiste » ait été Descartes, qui a subordonné toute les sciences à des axiomes simples en voulant en déduire tout le reste par des déductions mathématiques. Quand Pascal, encore très jeune, a confirmé par des expériences célèbres (en remplaçant le mercure de l'Italien Toriccelli par du vin français), que l'axiome « la nature a horreur du vide » est faux, il est venu en discuter avec le grand Maître des Sciences de l'époque, Descartes. Comme ces expériences infirmaient ses théories, Descartes, méprisant, a désapprouvé les théories de Pascal ; il a écrit quelque temps après à Huygens que le seul vide auquel il croyait était celui du cerveau de Pascal. Quelque mois plus tard le prophète de l'axiomatisme prétendait déjà avoir suggéré à Pascal ces expériences. Ref. Henri Gee, « L'Auvergne, berceau du voyage spatial », Le Monde, le 3 avril 1998, p. 24

cela restera impossible quels que soient les perfectionnements des ordinateurs et de l'enregistrement des données. De même une petite modification des axiomes (en lesquels de toute façon nous ne pouvons avoir totalement confiance) peut conduire à d'autres conclusions que celles fournies par les théorèmes obtenus. Plus sont longs et astucieux les raisonnements (« démonstrations »), moins le résultat final est robuste. Les modèles compliqués sont rarement utiles (sauf pour écrire des thèses). La technique mathématique de modélisation consiste en ce qu'on oublie les défauts et on parle des modèles déductifs comme s'ils coïncidaient avec la réalité. Le fait même que cette méthode évidemment incorrecte du point de vue scientifique conduise souvent à des résultats utiles est appelé « l'efficacité déraisonnable des mathématiques dans les sciences physiques » (Wigner). On peut d'ailleurs ajouter, suivant Israël M. Gelfand, qu'il y a un autre phénomène tout aussi déraisonnable, c'est l'inefficacité déraisonnable des mathématiques en biologie. Pour un physicien, « le poison subtil de la formation mathématique », selon l'expression de Félix Klein, c'est justement que le modèle devenu autonome se sépare de la réalité et ne lui est plus comparé. Voici un exemple simple : les mathématiques nous apprennent que la solution de l'équation de Malthus

$$dx/dt = x$$

est déterminée de manière unique par les conditions initiales — autrement dit les différentes courbes intégrales dans le plan des variables (x, t) ne se rencontrent pas. Cette conclusion du modèle mathématique est bien éloignée de la réalité. Une expérience sur ordinateur montre que toutes les courbes intégrales ont des points communs sur l'axe négatif des t. Et en effet les deux courbes correspondant aux conditions initiales

$$x(0) = 0$$

et

$$x(0) = 1$$

sont pratiquement confondues en $t = -10$, et en $t = -100$ on ne peut plus mettre un atome entre les deux courbes. Les propriétés de l'espace à des distances aussi infimes ne sont absolument plus décrites par la géométrie euclidienne. L'application du théorème d'unicité dans cette situation dépasse évidemment le degré d'exactitude du modèle. Il faut en tenir compte dans les applications pratiques, sinon on peut avoir de sérieux ennuis. Je remarque par ailleurs que le même théorème d'unicité explique pourquoi l'étape finale d'amarrage d'un bateau est conduite à la main. Le contrôle, avec une vitesse fonction lisse — par exemple linéaire

— de la distance, demanderait un temps infini pour l'amarrage. L'alternative serait un choc contre le quai (amorti par des corps convenables, pas parfaitement élastiques). Il a fallu traiter sérieusement ce problème lors de l'arrivée des premiers appareils sur la Lune et sur Mars, et aussi pour l'amarrage aux stations spatiales, et là le théorème d'unicité travaille contre nous. Malheureusement, ni de tels exemples, ni les recommandations face au danger de la fétichisation des théorèmes ne se trouvent dans les manuels modernes, même les meilleurs.

Je me suis même dit que les scolastes de la mathématique (qui connaissent si peu la physique) croient en une différence fondamentale entre les mathématiques axiomatiques et la pratique habituelle de la modélisation (qui doit toujours être suivie de la vérification des conclusions par l'expérience). Sans parler même du caractère relatif des axiomes introduits, il ne faut pas oublier les erreurs logiques inévitables dans de longs raisonnements, ou des erreurs d'ordinateurs dues aux oscillations quantiques ou par exemple à des particules cosmiques. Tout mathématicien en activité sait que s'il ne se contrôlait pas (au mieux par des exemples), sur une dizaine de pages de calculs la moitié des signes serait fausse, et les « 2 » passeraient par erreur du numérateur au dénominateur. La technique pour combattre de telles erreurs est le contrôle extérieur par des expériences ou des comparaisons, avec des résultats obtenus par des méthodes indépendantes, comme dans toute autre science expérimentale. Il faut enseigner cette technique dès le début aux écoliers, dès les premières années d'enseignement. La tentative de construire des « mathématiques pures » suivant la méthode axiomatico-déductive a conduit au refus du schéma classique en physique :

— expérience-modèle-étude du modèle-conclusions-vérifications par l'expérience,

et à son remplacement par le schéma :

— définition-théorème-démonstration.

On ne peut pas comprendre une définition non-motivée, mais cela n'arrête pas nos criminels axiomatisateurs algébristes. Ils seraient prêts par exemple à définir le produit des nombres entiers à l'aide de la loi de multiplication des nombres décimaux. La commutativité de la multiplication devient alors un théorème difficile, pénible à démontrer, elle peut être déduite des axiomes. On peut alors enseigner ce théorème et sa démonstration aux misérables étudiants, avec pour but à la fois d'affirmer l'autorité de la science et celle des enseignants. Il est clair qu'une telle définition et de telles démonstrations n'ont aucune valeur ni pour l'enseignement ni pour leur utilisation pratique. Elles ne peuvent faire que du mal. Pour comprendre la commutativité de la multiplication, il faut soit compter de deux manières le nombre de soldats alignés en rang sur une place, soit calculer la surface d'un rectangle selon deux ordres différents. Essayer d'échapper à l'intervention de la réalité physique dans les mathématiques est une attitude sectaire et isolationniste qui détruit aux yeux de toute personne sensée l'image des mathématiques comme activité utile.

Je vais dévoiler encore quelques secrets du même genre, dans l'intérêt des étudiants terrorisés par l'abstraction.

— Le *déterminant* d'une matrice, c'est le volume (orienté) du parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs-colonnes. Si on livre aux étudiants ce secret, soigneusement caché dans des manuels d'algèbre bien astiqués, alors toute la théorie des déterminants devient compréhensible comme une partie naturelle de la théorie des formes multilinéaires. Si on définit les déterminants autrement, un étudiant sensé gardera toute sa vie une aversion pour les déterminants comme pour les matrices jacobiennes et donc pour le théorème des fonctions implicites.

— Qu'est-ce qu'un *groupe* ? Les algébristes nous enseignent que c'est un ensemble muni de deux opérations, avec une pile d'axiomes qu'on oublie facilement. Cette définition suscite naturellement une protestation : en quoi un être intelligent a-t-il besoin d'un tel couple d'opérations ? La situation est complètement différente si on ne commence pas par les groupes abstraits mais par la notion de transformation (correspondance bijective d'un ensemble dans lui-même), comme d'ailleurs ce fut le cas historiquement ; une famille de transformations d'un ensemble s'appelle un groupe si chaque fois qu'elle contient deux transformations elle contient leur composée et si chaque fois qu'elle contient une transformation elle contient son inverse. Voilà la définition complète. Les « axiomes » ne sont que les propriétés (évidentes) des groupes de transformations. Ce que les axiomatisateurs appellent « groupes abstraits », ce sont simplement les groupes de transformations de différents ensembles, regardés à isomorphisme près (correspondance bijective qui conserve les opérations). Il n'y a pas d'autres groupes plus « abstraits » dans la nature, comme l'a démontré Cayley. Pourquoi faut-il que les algébristes torturent encore aujourd'hui les définitions avec la définition abstraite ? Dans les années soixante j'ai fait un cours de théorie des groupes à des lycéens moscovites, m'éloignant le plus possible de l'axiomatique, je cherchais à être le plus proche de la physique, et en un semestre je suis arrivé au théorème d'Abel sur l'irrésolubilité de l'équation générale du cinquième degré par radicaux (chemin faisant j'ai enseigné aux élèves les nombres complexes, les surfaces de Riemann, les groupes fondamentaux et les groupes de monodromie des fonctions algébriques). Ce cours a été rédigé et publié par un des élèves, V. Alexeiev, sous le nom de « Le théorème d'Abel par les problèmes ».

— Que veut dire *variété lisse* ? J'ai lu récemment dans un livre américain que Poincaré ne connaissait pas cette notion (qu'il a introduite lui-même en mathématique), et que la définition moderne a été introduite seulement dans les années vingt par Veblen ; une variété, c'est un espace topologique vérifiant toute une série d'axiomes. Quels péchés les étudiants doivent-ils expier pour devoir subir toutes ces tortures ? Dans son article « Analysis situs » Poincaré donne une définition claire et directe d'une variété différentiable, bien plus utile que la définition abstraite. Une sous-variété différentiable de dimension k de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, c'est un sous-ensemble qu'on peut représenter au voisinage de chacun de ses points comme le graphe d'une application de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$. C'est la généralisation directe des courbes habituelles dans le plan comme le cercle

$$x^2 + y^2 = 1$$

et des courbes et des surfaces dans l'espace. On définit entre variétés différentiables, de manière naturelle, la notion d'application différentiable. Un difféomorphisme est une application différentiable ainsi que son inverse. Une variété différentiable « abstraite », c'est une sous-variété différentiable d'un espace euclidien, considérée à difféomorphisme près. Il n'y a pas dans la nature de variétés différentiables de dimension finie plus « abstraites » (C'est le théorème de Whitney). Pourquoi torturons-nous encore maintenant les étudiants avec la définition abstraite ? Ne vaut-il pas mieux leur démontrer le théorème de classification des variétés compactes de dimension deux (des surfaces) ? Inversement, ce théorème remarquable (n'est-ce pas vraiment étonnant que toute surface compacte connexe orientée soit une sphère à laquelle on a rajouté un certain nombre d'anses ?) donne une bonne idée de ce qu'est la mathématique aujourd'hui, une idée bien plus exacte que les généralisations superabstraites des sous-variétés naïves des espaces euclidiens, généralisations stériles présentées par les axiomatisateurs comme de grandes victoires des mathématiques. Le théorème de classification des surfaces est un succès mathématique de premier ordre, comparable à la découverte de l'Amérique ou à celle des rayons X. C'est une véritable découverte de la connaissance mathématique et il est d'ailleurs difficile de décider si le fait lui-même relève des mathématiques ou de la physique. Par sa signification et ses conséquences, sa contribution à une mise en place de conceptions justes sur l'Univers, il surpasse de loin les « accomplissements » des mathématiques que sont la solution du problème de Fermat ou la démonstration de ce que tout nombre entier assez grand est somme de trois nombres premiers. A titre de publicité pour la mathématique contemporaine on présente souvent de telles réussites sportives comme le dernier mot de cette science. Il est clair que non seulement cela ne provoque pas une grande admiration pour la mathématique, mais qu'au contraire cela suscite des doutes sur la nécessité de tels efforts (comparables à l'escalade de rochers difficiles) pour résoudre des problèmes exotiques dont on peut se demander à qui et à quoi ils vont servir. Le théorème de classification des surfaces devrait être introduit (sans démonstration) dans le cours de mathématique dès le lycée, mais étrangement il n'est même pas encore enseigné à l'Université (où d'ailleurs, en France, on a pratiquement ôté ces dernières années toute la géométrie). Le retour de l'éducation mathématique, à tous les niveaux, de bavardages scolastiques à l'étude d'un champ important de la connaissance, est une question même plus urgente en France qu'ailleurs. J'ai été stupéfait d'apprendre qu'ici les étudiants ne connaissent pas les meilleurs livres d'enseignement des méthodes mathématiques (qui ne sont d'ailleurs pas tous traduits en français, semble-t-il) : *Nombres et figures* de Hans Rademacher et Hugo Toeplitz, *Géométrie visuelle* de Hilbert-Cohn-Vossen, *Que sont les mathématiques ?* de Courant-Robbins, *Comment résoudre un problème ?* et *Mathématique et raisonnement* de George Polya, *Leçons sur le développement des mathématiques au* XIX^e^ *siècle* de Félix Klein. Je me souviens très bien de la très forte impression que fit sur moi pendant mes années de lycée le livre d'analyse d'Hermite (qui existait en russe !). Les surfaces de Riemann apparaissaient, semble-t-il, dans l'un des premiers Chapitres (l'analyse se faisait bien entendu sur les complexes, comme il se doit). Le développement des intégrales était étudié à l'aide de déformations du chemin d'intégration sur la surface riemanienne, obtenus en déplaçant les points de ramification (aujourd'hui on appellerait cela la théorie de Picard–Lefschetz, d'ailleurs Picard était le gendre d'Hermite ; les compétences mathématiques se transmettent souvent par les gendres, la dynastie Jacques Hadamard–Paul Lévy, Laurent Schwartz–Uriel Frisch est un autre exemple à l'Académie des Sciences). Le cours obsolète d'Hermite d'il y a cent ans (probablement retiré à présent des bibliothèques universitaires françaises) était bien plus moderne que les ennuyeux manuels d'analyse qui font souffrir les étudiants d'aujourd'hui. Si les mathématiciens ne se font pas eux-mêmes la leçon, les utilisateurs (qui auront toujours besoin des résultats de la mathématique moderne, dans le meilleur sens du mot, et qui gardent une immunité naturelle contre le bavardage axiomatique inutile) chasseront finalement les scolastes demi-savants des écoles et des universités. Sinon, le professeur de mathématiques qui n'aura pas assimilé une bonne partie des Landau-Lifchitz paraîtra aussi anachronique qu'aujourd'hui celui qui ne connaît pas la différence entre un ouvert et un fermé.

Traduction : J.-M. Kantor

MATHÉMATIQUES

GÉOMÉTRIE ET ORDINATEURS (I) DROITES, CERCLES, PARABOLES

Jean-Pierre REVEILLÈS
LLAIC1, Université d'Auvergne
jprev@llaic.u-clermont1.fr

1 – Géométrie et virgule flottante

L'arithmétique flottante des ordinateurs a été essentiellement mise au point pour traiter des problèmes relevant de l'analyse. Dans ce système de calcul qui n'utilise qu'un nombre fini de nombres décimaux, les équations usuelles ou comparaisons n'ont plus de sens et sont généralement remplacées par des *inéquations*.

Si cette modification s'adapte malgré tout assez bien à l'analyse numérique, c'est parce que cette discipline dispose de nombreux théorèmes de continuité donnant des approximations aussi bonnes qu'on veut des grandeurs désirées : limites de suites, valeurs d'intégrales, extréma, zéros de fonctions, solutions d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Mais si l'arithmétique flottante n'est pas une gêne insurmontable pour l'analyse numérique, elle en est une en géométrie ou en algèbre. La factorisation des polynômes, par exemple, n'est pas un phénomène continu : une petite perturbation peut changer complètement le résultat. C'est aussi le cas en géométrie : même si une surface est une entité régulière, la topologie de ses sections peut changer brutalement quand on *traverse* une valeur critique. Connaître un plan de section approximativement peut être inacceptable dans certaines applications en CAO (conception assistée par ordinateur) et en FAO (fabrication assistée par ordinateur) par exemple. Des questions apparemment simples posent déjà des problèmes (alignement de 3 trois points, appartenance d'un point à une droite, calcul du rang d'une famille de vecteurs) et sont impossibles à traiter dans le système de calcul à virgule flottante.

Les difficultés de ce type sont à l'origine de nombreux travaux destinés à construire d'autres systèmes de calcul. Malheureusement la nature *finitiste* des ordinateurs rend cette tâche insurmontable malgré les prolongements de travaux historiques précurseurs, (en particulier la *Théorie des Corps* de David Hilbert), qui ont abouti à l'avènement du calcul formel et de la théorie de la démonstration automatique. Bien que ces théories, appuyées par l'algorithmique algébrique des *bases de Gröbner* aient contribué à rapprocher la géométrie et l'informatique, cette forme de discrétisation de la géométrie est très éloignée des discrétisations provoquées par les appareils d'acquisition ou d'affichage. Elles n'évacuent pas le souhait d'un système adapté aux nombreuses discrétisations de la géométrie provoquées par l'emploi des ordinateurs.

2 – Géométrie discrète ou numérique

Un très grand nombre de disciplines scientifiques ont besoin de traiter des concepts géométriques par le biais de l'ordinateur : CAO, modélisation géométrique, géométrie algorithmique, analyse, traitement et synthèse d'images, imagerie médicale, systèmes périphériques, parallélisme. Même si cette obligation apparaît sous des formes très diverses, les difficultés ou les impasses rencontrées dues à l'arithmétique flottante sont très souvent irrémédiables : incohérences, pertes d'information, plantages. Les résoudre suppose d'examiner leur traduction effective dans le système de calcul numérique employé. Réparer l'arithmétique flottante est une tâche insurmontable (et se heurtant à des résultats d'indécidabilité connus des informaticiens), si l'on veut obtenir une géométrie numérique générale analogue à l'analyse du même nom.

Les efforts des chercheurs intéressés dans le traitement de notions géométriques en machine se regroupent en deux courants essentiels : le courant pragmatique du *tout-voxel* et le courant théorique de la *construction des théories discrètes*. Pour les premiers des discrétisations assez fines de la réalité produisent des ensembles finis de données (pixels, voxels) auxquels les ordinateurs, eux aussi finis, s'adaptent de manière évidente, (cf [3], [9]). Cette approche est souvent inévitable si l'on doit traiter les données numériques fournies par des appareils de mesures : caméras CDD, scanners, etc. Elle a malheureusement l'inconvénient de nécessiter des ressources machine importantes pour traiter le volume colossal de données engendrées, bien que les progrès technologiques constants permettent de considérer cette voie comme praticable dans un futur proche pour quelques applications.

Par contre un très grand nombre d'applications resteront toujours hors de portée de cette approche *tout voxel*, ce qui a conduit les *constructivistes* de cette communauté, à la suite des pionniers tels que Rosenfeld, Earnshow, Bresenham, Bruckstein, Kong etc., (cf [1], [10], [14], [15], [16]), qui ont posé les premiers jalons de la *topologie discrète*, à essayer plutôt de dégager des résultats mathématiques généraux valables pour des objets discrets judicieusement définis. Des développements parallèles dans d'autres branches des mathématiques devraient aboutir à la constitution de véritables théories discrètes, la géométrie étant la plus attendue.

Ces constructivistes observent que les discrétisations données par la plupart des appareils d'acquisition sont des sous-ensembles bornés de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$ (voire $\mathbb{Z}^4$) assez *réguliers* dont il est assez tentant d'étudier les structures. La tentation est d'autant plus grande qu'on constate qu'ils interviennent par ailleurs : en physique dans la description de la matière cristallisée ou en mathématique (géométrie des nombres, convexité, optimisation entière entre autres). Il n'est pas déraisonnable d'essayer de dégager les propriétés *géométriques* de ces ensembles qui soient les plus proches de celles des ensembles continus. Quelques éléments de cette *géométrie discrète* sont présentés dans cet article. Pour traiter simultanément les aspects théoriques et numériques, deux piliers traditionnels de la géométrie sont modifiés : les équations sont abandonnées au profit des inéquations et les espaces euclidiens continus sont remplacé par les espaces discrets $\mathbb{Z}^n$. Par conséquent les objets fondamentaux de cette géométrie sont définis à l'aide d'*inéquations diophantiennes* (voir [4], [5], [12], [13]). Précisons que les inéquations de la géométrie discrète n'assurent pas à priori le contrôle des erreurs de calcul, comme c'est le cas en analyse numérique, mais celui de la topologie des objets introduits. Il est en effet indispensable que ceux-ci possèdent assez de points pour devenir *connexes* au sens des nouvelles topologies discrètes. C'est le choix du cadre arithmétique dans lequel est placée cette géométrie qui permet d'effectuer des *traitements numériques exacts.*

L'étude des versions discrètes des droites, plans, variétés, etc. définis dans $\mathbb{Z}^n$ requiert l'emploi d'outils mathématiques classiques : arithmétique, groupes, équations et inéquations diophantiennes, combinatoire, optimisation entière. Les applications pratiques, qui sont la motivation de cette nouvelle approche de la géométrie, reçoivent une attention toute particulière, ce qui nécessite aussi d'aborder les questions *d'algorithmique* et de *complexité* qui lui sont liées. On est donc conduit à prolonger certains travaux mathématiques comme ceux de Minkowski, Gauss, Hilbert, Klein, (en particulier à adapter le fameux *Programme d'Erlangen* de ce dernier) etc. mais aussi, de manière paradoxale, l'algorithme d'Euclide ainsi que ses versions plus récentes : fractions continues, bases de groupes etc. (voir les ouvrages [7], [8], [11], [17] pour ces notions classiques). Mais la notion classique certainement la plus utile pour cette théorie est l'interprétation géométrique du *théorème de Bézout* qui s'avère très fructueuse.

Ce premier article montre comment quelques résultats classiques de mathématique interviennent naturellement dans l'étude des propriétés d'objets discrets tels que droites, cercles et sphères. Il illustre également l'usage que l'on peut faire de ces nouvelles propriétés tant dans la pratique (les codes Maple de plusieurs algorithmes sont joints), que dans la compréhension de questions théoriques. Les objets discrets étudiés dans cette partie sont presque tous de dimension 2. Les sphères discrètes, introduites pour prolonger de manière évidente une propriété des cercles discrets, donnent un aperçu des objets de dimension 3 qui seront examinés dans la deuxième partie.

3 – Droites discrètes définition et reconnaissance

La simplicité de la ligne droite euclidienne disparaît totalement dès qu'on la discrétise. Reste-t-il d'ailleurs une notion mathématique digne d'intérêt après discrétisation ? Un objet discret analogue, ayant lui aussi un rôle fondamental, existe-t-il pour la géométrie discrète ? Dans le cas de la discrétisation du plan euclidien par le groupe $\mathbb{Z}^2$, ce qui rend compte d'un très grand nombre de discrétisations pratiques, une définition raisonnable de ce qu'est une *droite discrète* s'énonce comme suit.

Définition 1. — *Soient a, b, μ et $\omega \geq 0$ des entiers où a et b sont premiers entre eux. On appelle droite discrète de vecteur normal (a, b), de borne inférieure μ et d'épaisseur arithmétique ω l'ensemble des points entiers (x, y) solutions de la double inéquation*

$$\mu \leq ax + by < \mu + \omega. \tag{1}$$

Cette *droite*, notée $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$, n'est que l'ensemble des points entiers de la bande semi–ouverte définie par les droites usuelles d'équations $ax + by = \mu$ et $ax + by = \mu + \omega$. Les points entiers de la première droite appartiennent à $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$, ceux de la deuxième en étant exclus.

Il est commode d'appeler *pointillé* une droite discrète d'épaisseur arithmétique égale à 1, c'est à dire l'ensemble des solutions d'une équation diophantienne $ax+by = \mu$; on dit alors que μ est l'indice du pointillé. Le vecteur (u, v) tel que $au + bv = 1$ et $0 \leq u < |b|$ est appelé le *vecteur* *de Bézout* du pointillé $ax + by = \mu$. La translation de ce pointillé selon son vecteur de Bézout donne le pointillé $ax + by = \mu + 1$, appelé *suivant* du pointillé d'indice μ. De nombreuses propriétés des droites et plans discrets sont contenues dans les références [4] et [12].

En pratique la représentation graphique d'une droite euclidienne sur un écran discret, fait souvent appel à de tels ensembles de points. Le cas particulier où $\omega = max(|a|, |b|)$ — dit cas *naïf* — joue un rôle privilégié car les droites discrètes associées définissent une bijection de $\mathbb{Z}$ dans lui-même. Ces dernières peuvent également être définies comme l'ensemble des points entiers les plus proches d'une droite euclidienne donnée. Cette propriété caractéristique des droites naïves explique bien leur intérêt, dès que de bonnes approximations discrètes des droites euclidiennes sont requises, mais s'avère insuffisante pour construire une théorie géométrique.

La notion précédente se généralise immédiatement au cas des hyperplans discrets définis par une double inéquation :

$$\mu \leq \overrightarrow{a}.\overrightarrow{x} < \mu + \omega \tag{2}$$

où $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{x}$ sont deux vecteurs (entiers) de $\mathbb{Z}^n$, les entiers ω et μ étant comme ci-dessus.

Pour étayer un peu l'avantage de la définition (1) nous allons nous intéresser à un *problème inverse* discret à savoir celui de *retrouver les quatre paramètres d'une droite discrète à partir des coordonnées entières de certains de ses points*. De nombreux dispositifs digitaux transforment des droites, des plans ou des hyperplans en structures discrètes telles que celles définies par (2) ou par des inéquations diophantiennes plus générales. Retrouver les caractéristiques géométriques à partir des données discrètes est donc un problème pratique important. Reconnaître des segments de droites discrètes permet immédiatement de *polygonaliser* les courbes discrètes, ce qui est à l'origine de nombreuses applications pratiques (cf [4], [6]). On pourrait être tenté de croire que le problème précédent est très particulier et que les discrétisations données par l'instrumentation actuelle sont beaucoup plus générales. C'est partiellement vrai car bien que ces discrétisations portent sur des fonctions très souvent non-linéaires elles sont néanmoins suffisamment différentiables pour que ces discrétisations soient localement du type (2). Reconnaître des hyperplans locaux permet donc de trouver les gradients de ces fonctions.

Ce type de problème pourrait être abordé par la programmation linéaire entière mais il donnerait des calculs lourds et peut éclairants. Il est plus pertinent de chercher des algorithmes de nature géométrique fondés sur la structure même des objets considérés. Le reste du paragraphe sera consacré au cas particulier des segments discrets naïfs ; on se rapportera à [4] pour des résultats sur la reconnaissance des plans discrets.

Plus précisément étant donné l'ensemble S des points entiers de $\mathbb{Z}^2$ situés sur le segment OM d'une droite discrète naïve $\mu \leq ax+by < \mu+b$ reconnue où l'on suppose $0 < -a < b$, et où 0 désigne l'origine des coordonnées et $M = (x, y)$, *il s'agit de savoir si l'adjonction du point* $N_1 = (x+1, y)$ *ou du point* $N_2 = (x+1, y+1)$ *forme encore avec* OM *un segment de droite discrète ou non*, avec éventuellement changement de paramètres. Comme la pente $-a/b$ de la droite discrète supportant S est comprise entre 0 et 1 et comme l'épaisseur arithmétique ω est égale à b, la correspondance f qui définit y à partir de x est fonctionnelle de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ et est ici déterminée par $f : x \mapsto -\left[\frac{ax-\mu}{b}\right]$. L'observation des droites conduit à montrer que

$$\forall x \quad (0 \leq f(x+1) - f(x) \leq 1).$$

Ceci implique que les deux positions possible de N pour incrémenter le segment S sont N_1 ou N_2.

Le segment discret S ci-dessus contient au moins un point (x_0, y_0) vérifiant l'égalité $ax_0 + by_0 = \mu$ et au moins un point (x_1, y_1) vérifiant l'égalité $ax_1 + by_1 = \mu + b - 1$. On désigne par P le point de S d'abscisse minimale vérifiant l'équation $ax + by = \mu$ et par Q celui d'abscisse minimale vérifiant $ax + by = \mu + b - 1$; on dit que P (resp. Q) est le point d'appui inférieur (resp. supérieur) principal du segment S.

Posons $N = (x', y')$, on vérifie facilement le résultat suivant.

Théorème 1. — *Soient la droite naïve* $\mu \leq ax + by < \mu + b$ *et* $r = ax' + by'$, *alors si*

- $\mu \leq r < \mu + b$ *l'ensemble* $S \cup \{N\}$ *est un segment de la droite discrète* $\mathcal{D}(a, b, \mu, b)$, *i.e. les caractéristiques sont les mêmes,*
- $r = \mu - 1$ *ou* $r = \mu + b$, *l'ensemble* $S \cup \{N\}$ *est un segment de la droite discrète* $\mathcal{D}(a', b', \mu', b')$ *avec un nouveau point d'appui supérieur principal* Q' *défini par* $OQ' = ON + (-b, a+1)$ *et de nouvelles caractéristiques* $(b', -a') = PN$ *si* $r = \mu - 1$ *et* $OP' = ON + (-b, a-1)$, $(b', -a') = QN$ *si* $r = \mu + b$.
- $r < \mu - 1$ *ou* $r > \mu + b$, *l'ensemble* $S \cup \{N\}$ *ne peut pas former un segment de droite discrète.*

Dans le cas où $N = (x+1, y)$ et $r = \mu - 1$, la nouvelle direction de la droite portant $S \cup \{N\}$ est celle du segment PN, i.e. on a $(b', -a') = PN$, et $\mu' = a'x_P + b'y_P$. On a un résultat analogue avec Q à la place de P si $N = (x+1, y+1)$. Plus précisément $(b', -a') = QN$ et $\mu' = a'x_Q + b'(y_Q - 1) + 1$. Chaque fois que la direction du segment change, l'un des deux points d'appui principaux se déplace : c'est le point d'appui supérieur principal, noté Q, dans le premier cas, le point d'appui inférieur dans le deuxième.

Rappelons que le 4-*voisinage* d'un point $P = (x, y)$ de $\mathbb{Z}^2$ est l'ensemble des points $\{(x+1, y), (x, y+1), (x-1, y), (x, y-1)\}$. De même le 8-*voisinage* de P est l'ensemble $\{(x+1, y), (x+1, y+1), (x, y+1), (x-1, y), (x-1, y), (x-1, y-1), (x, y-1), (x+1, y-1)\}$. Une suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de $\mathbb{Z}^2$ est une courbe $8-$*connexe* si $\forall i \in [1, n-1]$, P_i et P_{i+1} sont 8-voisins, c'est-à-dire si chaque point appartient au 8-voisinage du point qui le suit dans l'énumération de 1 à n ; on a une définition analogue pour les courbes 4-connexes. Une partie A de $\mathbb{Z}^2$ est dite $8-$*connexe* si deux points quelconques de A peuvent être reliés par une courbe discrète 8-connexe ; une définition équivalente peut être donnée pour les parties 4-connexes. La figure 1 donne un exemple de chacun de ces types de courbe.

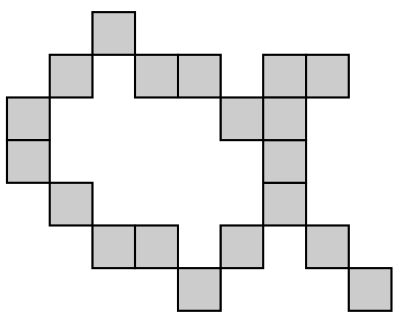


Figure 1. — *La connexité des courbes discrètes*

On en déduit facilement l'algorithme incrémental suivant de reconnaissance d'un segment discret, noté *Incr*, utilisé dans la procédure *Reco* donnée ci-dessous. Celle-ci peut servir à *polygonaliser* une courbe discrète 8-connexe à partir d'un point quelconque. On observe que, contrairement à ce qui se passe dans le continu, toute courbe *connexe* tracée sur un écran d'ordinateur *est formée d'une suite de segments de droites discrètes ;* c'est donc toujours une ligne *polygonale*. En particulier elle est paramétrisable. Par contre il n'existe pas de polygonalisation canonique.

Il utilise la fonction booléenne *Incr* qui prend la valeur *vrai* si le segment discret défini par les variables globales a, b, x_P, y_P, x_Q, y_Q peut être prolongé par le point N.

Incr:=proc(N)
local d, r, mu:
global a, b, x, y:

```
    mu := a * x_P + b * y_P;
    r := a * N[1] + b * N[2];
    d :=evalb(r ≥ mu - 1 and r ≤ mu + b);
    if d then
      if r = mu - 1 then
        x_Q := N[1] - b; y_Q := N[2] + a + 1;
        a := y_P - N[2]; b := N[1] - x_P;
      elif r = mu + b then
        x_P := N[1] - b; y_Q := N[2] + a - 1;
        a := y_Q - N[2]; b := N[1] - x_Q
      fi
    fi;
  end;
```

La procédure *Reco* analyse une courbe discrète 8-connexe et rend les paramètres du premier segment discret rencontré.

```
  Reco:=proc(C)
  local i, d:
  global a, b, x, y;
    a := 0: b := 1;
    x[P] := C[1][1]; y[P] := C[1][2];
    x[Q] := C[1][1]; y[Q] := C[1][1];
    i := 2;
      while i < nops(C) and Incr(C[i]) ='true'
        do i := i + 1 od;
    [a, b, x[P], y[P], x[Q], y[Q]]
  end:
```

4 – Enveloppe convexe des cercles discrets

La plupart des applications concrètes nécessitant un calcul d'enveloppe convexe de points peuvent se contenter d'un résultat *approximatif* résultant de l'imperfection des données et des erreurs de calculs causés par l'arithmétique flottante. L'exécution des algorithmes classiques de convexité dans ce système de calcul ne peut pas donner le résultat de manière certaine et il n'est pas possible de corriger ce défaut en augmentant la précision puisque le *nombre de sommets* de l'enveloppe n'est pas une fonction continue du rayon du cercle. Si l'on s'intéresse à l'obtention exacte de cette structure, il est indispensable de disposer d'algorithmes fonctionnant sur d'autres principes.

Ce problème va être traité en *effectuant uniquement des calculs arithmétiques, donc exacts, sur les coordonnées entières des points donnés.*

Cercles et sphères discrets sont définis de manière analogue aux droites ou plans discrets précédents, c'est-à-dire comme l'ensemble des points entiers respectivement contenus dans une couronne euclidienne circulaire ou sphérique de rayons extrêmes $R - \frac{1}{2}$ et $R + \frac{1}{2}$, où R est entier. On désignera par $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{S}_R$ le cercle et la sphère discrets ainsi définis.

Traitons d'abord le cas des cercles discrets. L'algorithme en pseudo-code suivant donne la partie du bord 8-connexe de $\mathcal{C}_R$ contenue dans l'octant $0 \leq x \leq y$. On obtient le tracé complet par les symétries évidentes. La procédure $point(x, y)$ affiche un point en coordonnées (x, y).

$x = 0$; $y = R$; $temp = R^2 + R$
répéter
  $point(x, y)$;
  $temp = temp + 2x + 1$;
  $x = x + 1$;
  si $temp \geq R^2 + R + 1$
  alors
    $temp = temp - 2y + 1$; $y = y - 1$
  fin si
jusqu'à $x \geq y$

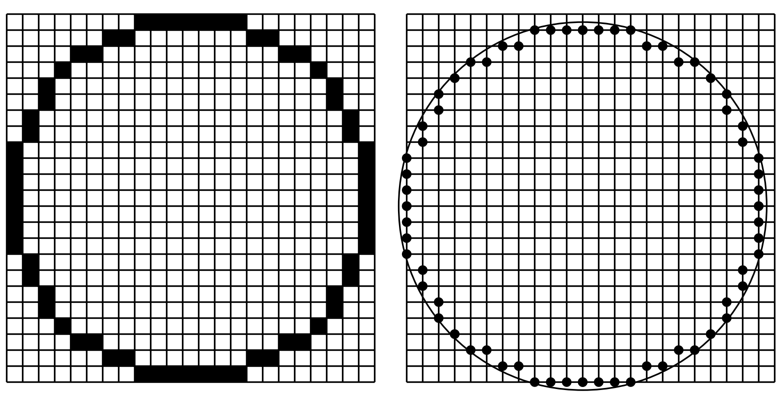


Figure 2. — *Le cercle discret de rayon 11*

Plusieurs types d'algorithmes robustes peuvent être développés pour des ensembles de points tels que $\mathcal{C}_R$. Ici nous allons montrer qu'il y a là encore une structure arithmétique sous-jacente à cette géométrie, celle-ci étant contenues dans les propriétés bézoutiennes du réseau $\mathbb{Z}^2$; (les références [8] et [17] présentent les aspects théoriques et concrets des ces notions).

Plus précisément si M et N sont deux points de $\mathcal{C}_R$, nous allons montrer qu'il est possible de caractériser arithmétiquement les cordes MN qui appartiennent à l'enveloppe convexe *réelle* de $\mathcal{C}_R$.

On désigne par $\{\frac{\mu}{\nu}\}_\rho$ le *plus petit reste* de la division euclidienne de l'entier μ par l'entier ν, i.e. l'unique entier ε vérifiant $-\frac{1}{2}\nu \leq \varepsilon < \frac{1}{2}\nu$ pour lequel il existe un quotient entier θ vérifiant

$$\mu = \nu\theta + \varepsilon.$$

Nous nous intéressons aux cordes extrémales d'un cercle discret. Commençons par observer un exemple avec le cercle discret $\mathcal{C}_R$ de rayon 25. Considérons les pointillés associés à la direction d'une corde MN du cercle discret $\mathcal{C}_R$ d'extrémités M et N comme sur la figure 4 ainsi que ceux de la direction orthogonale.

Les coordonnées des points M et N étant respectivement $(5, 25)$ et $(11, 23)$, la corde MN représentée sur la figure 4 est une partie du pointillé d'équation $x + 3y = 80$. Pour des raisons évidentes on dira que celui d'équation $x + 3y = 81$ est le pointillé *suivant* MN. On voit que la corde MN est une arête de l'enveloppe convexe du cercle discret de rayon 25 si et seulement si tous les points de son pointillé suivant sont extérieurs au cercle de rayon $25+\frac{1}{2}$, ce qui est bien le cas sur cet exemple. Il faut remarquer que la droite euclidienne contenant le pointillé suivant peut fort bien couper le cercle euclidien limite de rayon $R + \frac{1}{2}$.

Ceci se généralise dans le théorème 1 qui suit.

Théorème 1. — *Soit* $M = (x, y)$ *un point de* $\mathcal{C}_R$ *et* $\nu = (b, -a)$ *une direction entière de vecteur de Bézout* (u, v)*, tel que* $au + bv = 1$ *et* $0 \leq u < b$*. Soit* $r = \left\{\frac{(ax+by+1)(bu-av)}{a^2+b^2}\right\}_\rho$*, où l'indice* ρ *désigne un calcul modulaire au plus petit reste. Alors la corde définie par* M *et* ν *est extrémale pour l'enveloppe convexe de* $\mathcal{C}_R$ *si et seulement si on a*

$$r^2 > (a^2 + b^2)(R + \frac{1}{2})^2 - (ax + by + 1)^2.$$

Démonstration — Elle résultera des lemmes 1 et 2 qui suivent appliqués aux pointillés associés à la direction entière (a, b), avec $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. On observe que ceux-ci sont équidistants et que la distance qui les sépare est égale à $(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$ et qu'on passe d'un pointillé au suivant par une translation du vecteur de Bézout $(v, -u)$ où $au + bv = 1$ et $0 \leq u < b$ (n'importe quel vecteur de Bézout ferait l'affaire, mais celui que la contrainte portant sur u détermine a le mérite d'être petit).

Remarque. — Les pointillés considérés ci-dessus sont *orthogonaux* au vecteur (a, b) ; le vecteur $(b, -a)$ les dirige.

On a un résultat analogue pour la direction orthogonale $(b, -a)$ dont la distance entre pointillés est encore $(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$ et le vecteur de Bézout est égal à (u, v).

Il est clair que l'indice du pointillé associé à la direction (a, b) passant par le point $(b, -a)$ est égal à $a^2 + b^2$.

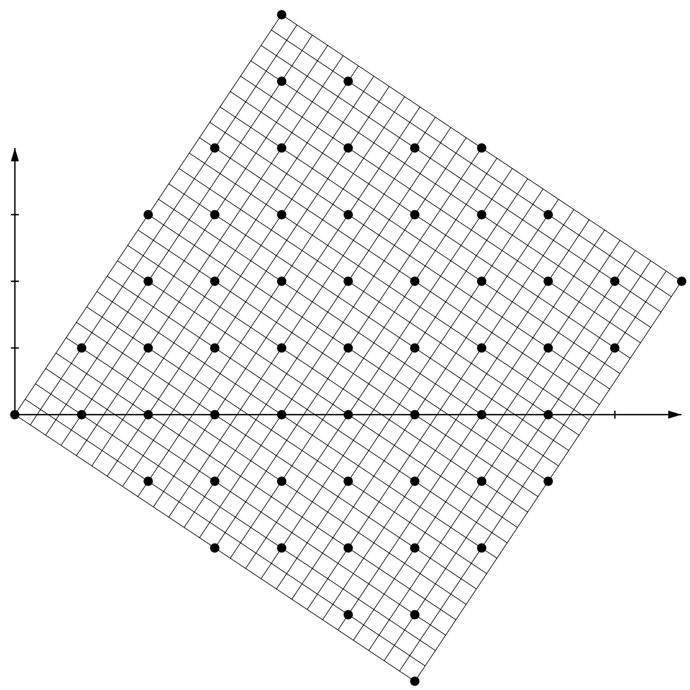


Figure 3. — *Les pointillés associés à la direction (2,3) ; les points noirs sont les points entiers de* $\mathbb{Z}^2$.

Les pointillés simultanément associés aux deux directions orthogonales (a, b) et $(b, -a)$ produisent un système de coordonnées engendré par la base rationnelle $\mathcal{B} = \left((\frac{b}{a^2+b^2}, \frac{-a}{a^2+b^2}), (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}) \right)$.

Le point entier de coordonnées (x, y) a encore des coordonnées entières dans cette base : $(bx-ay, ax+by)$; et réciproquement le point de coordonnées (k, l) dans la base $\mathcal{B}$ possède des coordonnées $\frac{1}{a^2+b^2}(bk+al, -ak+bl)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Pour compléter ces évidences, remarquons qu'un point de coordonnées (k, l) dans $\mathcal{B}$ est toujours rationnel ; il est entier ssi

$$\begin{cases} bk + al & \equiv 0 \pmod{a^2+b^2} \\ -ak + bl & \equiv 0 \pmod{a^2+b^2} \end{cases}$$

Le lemme suivant est géométriquement évident :

Lemme 1. — *Une corde MN du cercle discret $\mathcal{C}_R$ appartient à l'enveloppe convexe de cet ensemble ssi son pointillé suivant est extérieur au cercle euclidien de rayon $R + \frac{1}{2}$.*

Nous pouvons caractériser arithmétiquement les cordes extrémales de l'enveloppe convexe. Rappelons que si m et n sont deux entiers, avec $n > 0$ et si r est le reste de la division euclidienne usuelle de m par n alors le reste de la division *au plus petit reste* de m par n est celui des deux nombres r et $n - r$ ayant la plus petite valeur absolue. On le désignera par $\{\frac{m}{n}\}_\rho$.

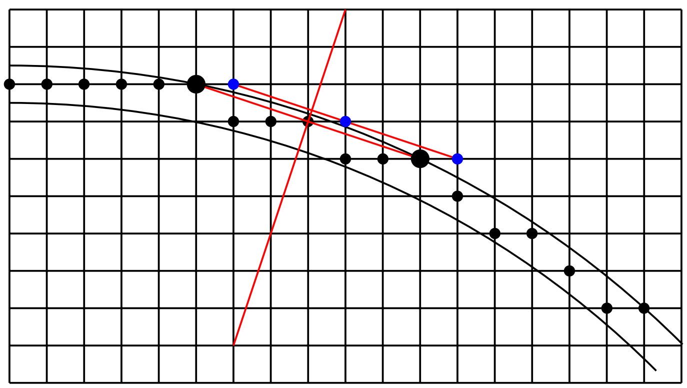


Figure 4. — *Une corde et son pointillé de Bézout*
$R = 25,\ M = (5, 25),\ (a, b) = (1, 3),\ (u, v) = (1, 0)$

Le vecteur entier (a, b) (et réduit, i.e. $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$) est orthogonal à la corde MN. Soient u et v les coefficients de Bézout tels que $au + bv = 1$ et désignons par x et y les coordonnées du point M. Soit r l'entier défini par

$$r = \left\{ \frac{(ax + by + 1)(bu - av)}{a^2 + b^2} \right\}_\rho .$$

Observons le pointillé suivant MN.

Lemme 2. — *Soit un point (X, Y) appartenant au pointillé d'équation $aX + bY = ax + by + 1$ qui suit celui portant MN. Si $K = (s, t)$ est le point de ce pointillé qui est le plus proche de la droite dirigée par le vecteur (a, b) alors on a $bs - at = r$.*

Ce lemme exprime l'indice de K relatif à la direction (a, b) à l'aide de l'arithmétique de a et b. Sur la figure 4 précédente K est le point de coordonnées $(9, 24)$, son indice relatif à la direction $(1, 3)$ s'évalue avec la forme $3x - y$, il vaut donc $r = 3.9 - 24 = 3$. Comme $a = 1$ et $b = 3$ on a $u = 1, v = 0$. Le lemme 2 dit que cette valeur r s'obtient aussi à partir de $M = (5, 25)$ en calculant $(3-0)(5+3.25+1) \pmod{10}$ soit 243 (mod 10), qui donne également 3 évalué au plus petit reste. Le lemme donne de l'information sur le point K sans en connaître ses coordonnées ; c'est son intérêt.

Connaissant la distance entre les pointillés, qui est $(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$, on déduit du lemme 2 que la distance de K à la perpendiculaire à MN passant par l'origine d'équation $y = \frac{b}{a}x$, vaut $r(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$. Mais la distance de l'origine au pointillé passant par K et dirigé par $(b, -a)$ (le suivant de MN) est $(ax+by+1)(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$. Nous pouvons donc calculer le carré de la distance OK :

Par conséquent le pointillé successeur de MN est à l'extérieur du cercle euclidien de rayon $R + \frac{1}{2}$ ssi on a

$$(ax + by + 1)^2 + r^2 > (a^2 + b^2)(R + \frac{1}{2})^2 \tag{1}$$

C'est la caractérisation d'extrémalité de la corde MN dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{C}_R$.

La démonstration du lemme 2 revient à calculer les coordonnées de K dans la base $\mathcal{B}$ et à remarquer qu'elles valent $(r, ax + by + 1)$. Seule l'expression de r en fonction des données mérite d'être explicitée. Considérons les pointillés associés à la direction $(b, -a)$, qui est celle de la corde MN. Le vecteur de Bézout (u, v) appartient au pointillé d'indice 1 de cette famille, i.e. $au + bv = 1$. Toujours dans cette famille le point K a pour indice $ax + by + 1$, puisque K appartient au pointillé suivant celui de $M = (x, y)$. Donc le point L de coordonnées $(ax + by + 1)(u, v)$ est également sur le même pointillé que K. On évalue alors l'indice de L dans le système de pointillés orthogonaux aux précédents, c'est-à-dire la valeur de la forme $bx - ay$ en L. Cet indice vaut $(ax + by + 1)(bu - av)$. Mais l'indice du vecteur $(b, -a)$ pour cette dernière forme étant $a^2 + b^2$, le quotient de la division euclidienne de l'indice de L par $a^2 + b^2$ donne le nombre de points entiers du pointillé de K parallèle à MN situés entre L et la droite $y = \frac{b}{a}x$. Si q est ce quotient le point $L - q(u, v)$ est la solution de l'équation diophantienne $aX + bY = ax + by + 1$ ayant la plus petite valeur $bX - aY$ positive possible. Le reste pris au sens de la division au plus petit reste donne bien l'indice $bX - aY$ du point K le plus proche de la droite $y = \frac{b}{a}x$. On pourrait également faire le raisonnement à partir d'autres points L possibles comme $L = M + (u, v) = (x + u, y + v)$. Dans ce cas la valeur de r s'évaluerait par le reste

$$r = \left\{ \frac{b(x+u) - a(y+v)}{a^2 + b^2} \right\}_\rho$$

mais la condition (1) resterait inchangée.

Il reste à montrer que si le pointillé suivant de MN ne possède pas de points dans $\mathcal{C}_R$, les pointillés d'indice supérieur n'en ont pas non plus.

Il suffit de considérer les solutions de $a(X - x) + b(Y - y) = 0$, de $a(X - x) + b(Y - y) = 1$ et $a(X - x) + b(Y - y) = 2$ qui satisfont aussi $x \leq X < x + b$. S'il existait une solution $M_2 = (x_2, y_2)$ de $a(X - x) + b(Y - y) = 2$ vérifiant aussi $x \leq X < x + b$ avec $M_2 \in \mathcal{C}_R$ et aucune solution du système $a(X - x) + b(Y - y) = 1, x \leq X < x + b$ dans $\mathcal{C}_R$. Mais ce dernier a une solution unique, soit $M_1 = (x_1, y_1)$. Par linéarité on aurait aussi l'identité $(x_0, y_0) + 2(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (x_2, y_2)$, ce qui signifie que le point M_1 est le milieu du segment MM_2. Par convexité M_1 devrait appartenir à $\mathcal{C}_R$, ce qui est une contradiction.

Cet exemple montre comment on peut rendre les algorithmes géométriques classiques *robustes* i.e. exacts, quand leurs données sont entières.

5 – Enveloppe convexe des paraboles discrètes

Regardons le cas simple où cette conique est discrétisée par l'ensemble des points entiers (x, y) qui satisfont aux inéquations

$$0 \leq ay - x^2 < a, \tag{2}$$

a étant également un entier positif.

On constate facilement que la structure de cette courbe discrète, que l'on désignera par $\mathcal{P}$, c'est-à-dire ses paliers, correspond bijectivement aux séquences montantes de la suite des *résidus quadratiques* $x^2 (\mathrm{mod}\ a)$ elle-même périodique et de période a.

Cette parabole admet la représentation paramétrique entière :

$$x \mapsto \left[\frac{x^2}{a} \right] + 1. \tag{1}$$

Bien que la parabole définie par $-a < ay - x^2 \leq 0$ admette la paramétrisation plus simple définie par $\left[\frac{x^2}{a} \right]$, celle que nous avons choisie en (2) s'avèrera plus maniable dans les calculs ultérieurs.

Le résultat suivant caractérise arithmétiquement les arêtes de l'enveloppe convexe de la parabole discrète $\mathcal{P}$.

Théorème 2. — *Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathcal{P}$ et $\nu = (\alpha, \beta)$ un vecteur entier issu de M de vecteur de Bézout (u, v). On pose $k = \beta x - \alpha y$ et*

$$r = \left\{ \frac{2(k+1)u\alpha - a\beta}{2\alpha^2} \right\}_\rho$$

où ρ indique un calcul au plus petit reste. Alors la corde définie par M et ν est une arête de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ si et seulement si on a

$$r^2 > a^2\beta^2 - 4ax\alpha\beta + 4ay\alpha^2 - 4a\alpha.$$

Ce critère assure que le segment d'origine M et d'extrémité $M + \ell\nu$, pour ℓ convenable, est une arête de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$. Une formule simple pour ℓ sera donnée plus loin. Dans ce qui suit nous supposons $x \geq 0$ et $0 \leq \beta < \alpha$, c'est-à-dire que nous travaillons sur la partie de $\mathcal{P}$ définie par $0 \leq X \leq a/2$. La démarche suit à peu de chose près les principes mis en évidence dans le cas du cercle discret.

Démonstration — Désignons par $\nu' = (u, v)$ le vecteur de Bézout du vecteur $\nu = (\alpha, \beta)$; il satisfait à l'équation

$$\beta u - \alpha v = 1, \tag{4}$$

et on peut supposer $0 \leq v < u < \alpha$. Rappelons que le rationnel $\frac{v}{u}$ est l'avant-dernière *réduite* de la fraction continue associée à $\frac{\beta}{\alpha}$ et qu'on l'obtient rapidement par l'algorithme dit d'Euclide-Blankinship (cf [2], [17]).

L'expression du critère cherché utilise essentiellement deux cordes de la parabole *euclidienne* $Y = \frac{X^2}{a}$ notée (p) :

- celle passant par M et dirigée par le vecteur ν, d'équation

$$\beta X - \alpha Y = k, \tag{5}$$

avec $k = \beta x - \alpha y \geq 0$,

- ainsi que la corde définie par la droite d'équation

$$\beta X - \alpha Y = k + 1. \tag{2}$$

La deuxième est appelée *corde de Bézout* de la corde (5) ; les abscisses x_1, x_2 des points d'intersection de (6) avec (p) sont données par l'équation

$$X^2 - \frac{a\beta}{\alpha}X + \frac{a(k+1)}{\alpha} = 0. \tag{7}$$

On en déduit immédiatement que l'on a

$$(x_2 - x_1)^2 = \frac{a^2\beta^2}{\alpha^2} - 4\frac{(k+1)a}{\alpha}.$$

On obtient de la même manière

$$(y_2 - y_1)^2 = \frac{a\beta^2}{\alpha^2}(\frac{a\beta^2}{\alpha^2} - 4\frac{(k+1)}{\alpha}).$$

Cherchons maintenant le *point entier* de la corde de Bézout le plus proche du milieu I de cette corde. Si P est un point entier quelconque de la corde, comme ceux-ci sont distants de $(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}$, il est facile d'en déduire le point cherché.

Un point tel que P est facile à obtenir, il suffit de multiplier le vecteur ν' par $k+1$, i.e. de poser $P = (k+1)(u,v)$. Calculons la longueur du segment IP, les coordonnées de I se déduisant facilement des coefficients de l'équation (7) : $I = \big(a\beta/2\alpha,\ (a\beta^2 - 2(k+1)\alpha)/2\alpha^2\big)$, on a

$$IP = \big(\frac{2(k+1)u\alpha - a\beta}{2\alpha^2}\big)(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Cette expression permet de trouver, en utilisant le *plus petit reste* de $2(k+1)\alpha u - a\beta$ modulo $2\alpha^2$, noté

$$r = \left\{\frac{2(k+1)\alpha u - a\beta}{2\alpha^2}\right\}_\rho$$

comme précédemment pour le cercle discret.

Plus précisément nous savons que le point entier C le plus proche de I est défini par $IC = \pm\frac{r}{2\alpha^2}(\alpha,\beta)$.

On aboutit à la condition cherchée en écrivant que la valeur absolue de la première composante $|IP_x|$ est supérieure à $|x_2 - x_1|$, ou ce qui est équivalent en prenant les carrés :

$$r^2 > a^2\beta^2 - 4(k+1)a\alpha.$$

En remplaçant k par sa valeur on a

$$r^2 > a^2\beta^2 - 4ax\alpha\beta + 4ay\alpha^2 - 4a\alpha,$$

qui est bien la condition annoncée.

L'entier ℓ mentionné plus haut s'exprime comme partie entière :

$$\ell = \left[\frac{2(k+1)\alpha u - a\beta}{2\alpha^2}\right].$$

Il est tel que le segment d'extrémités M et $M + \ell\nu$ est une arête de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ si le théorème est satisfait.

6 – Enveloppe convexe des sphères discrètes

Le traitement numérique de la géométrie se complique avec l'augmentation de la dimension. Il est important de localiser la source des difficultés. Mais ce n'est pas parce que le but avoué d'une discipline est de produire des applications, comme c'est le cas pour la géométrie discrète, qu'elle pourra éviter de se heurter à des difficultés d'ordre théorique.

Ce paragraphe montre que la généralisation naturelle du théorème 1 aux sphères discrètes fait intervenir *la réduction des bases des groupes* $\mathbb{Z}^3$. L'exemple retenu a le mérite, à notre avis, de donner un sens géométrique à des questions souvent considérées comme abstraites lorsqu'elles sont abordées sous un angle strictement algébrique. Si ce cas peut être traité directement il n'évacue toutefois pas, dans les dimensions supérieures, le recours à la théorie complète considérée comme assez sophistiquée.

La sphère discrète $\mathcal{S}_R$ considérée est formée des points frontière de la boule discrète définie par l'inéquation $x^2 + y^2 + y^2 < (R + \frac{1}{2})^2$.

L'algorithme suivant construit les points de la sphère discrète $\mathcal{S}_R$ qui satisfont aux inégalités $0 \leq x \leq y \leq z$, ce qui donne un $48 - ième$ de la sphère complète. Leur projection sur le plan xOy est le quart d'ellipse $x^2 + 2y^2 < (R + \frac{1}{2})^2, x \geq 0, y \geq 0$. La variable tmp_e permet de construire le bord de cette ellipse en suivant le point courant de coordonnées (x, y_e) de manière incrémentale.

$x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $tmp = R^2 + R$
$y_e = [R\sqrt(2)/2]$; $tmp_e = tmp$;
pour $x = 0$ à R faire
  pour $y = 0$ à y_e faire
    $point(x, y, z)$;
    $tmp = tmp + 2y + 1$;
    $y = y + 1$;
    si $tmp \geq R^2 + R + 1$
    alors
      $tmp = tmp - 2z + 1$; $z = z - 1$
    fin si
  fin pour
  $tmp_e = tmp_e + 2x + 1$
  si $tmp_e \geq R^2$
  alors
    $tmp_e = tmp_e - 4y_e + 2$;
    $y_e = y_e - 1$
  fin si
fin pour

Soient $M=(x,y,z)$ un point de $\mathcal{S}_R$ et $\nu=(\alpha,\beta,\gamma)$, $\nu'=(\alpha',\beta',\gamma')$ deux directions entières. Le produit vectoriel $\nu\wedge\nu'$ donne le vecteur normal à la face définie par M et les deux directions ν et ν', noté $n=(a,b,c)$. Cette fois notre problème nécessite l'étude des deux cercles d'intersection définis par les plans $aX+bY+cZ=k$ et $aX+bY+cZ=k+1$, où $k=ax+by+cz$, avec la sphère euclidienne $X^2+Y^2+Z^2=(R+\frac{1}{2})^2$. La partie essentielle du travail consiste à calculer la distance du point I d'intersection de la droite dirigée par $n=(a,b,c)$ et du plan $aX+bY+cZ=k+1$, de coordonnées

$$I=(k+1)(a^2+b^2+c^2)^{-1}(a,b,c),$$

aux éléments du réseau entier d'équation

$$aX+bY+cZ=k+1.$$

Nous avons vu à propos des procédures présentées dans ce paragraphe comment évaluer cette distance qui sera notée r comme dans les deux cas précédents ; on a aussi le résultat suivant.

Théorème 3. — *La face définie par le point M et les deux vecteurs ν et ν', est une face de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}_R$ si et seulement si on a*

$$r^2>(R+\frac{1}{2})^2-\frac{(ax+by+cz+1)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

La généralisation du théorème 1 aux sphères discrètes nécessite donc de savoir trouver le point d'un sous-groupe G de rang 2, de $\mathbb{Z}^3$, le plus proche d'un point (rationnel) donné du plan euclidien défini par G. Ce problème suppose lui-même que l'on sache trouver la *base minimale* d'un groupe tel que G. Ces questions sont traitées dans la partie II de l'article (à paraître dans la *Gazette*).

Dans notre cas le groupe G est défini par une équation diophantienne

$$ax+by+cz=0,$$

il s'agira donc de déterminer la base minimale du sous-groupe G de $\mathbb{Z}^3$ orthogonal à la direction entière (a,b,c) normale à la face testée.

Bibliographie

[1] Bresenham (J.). — *Algorithm for computer control of a digital plotter.* IBM System Journal, 1965, vol. 4, pp. 25-30.

[2] Blankinship W.A. — *A new version of the Euclidean algorithm.* Amer. Math. monthly, pp. 742-745, 1963.

[3] Cohen (D.) et Kaufman (A.E.). —*Fundamentals of surface voxelisation*, CVGIP–GMIP, 57 (6), v. 95, pp. 453-461.

[4] I. Debled-Rennesson. —*Etude et reconnaissance des droites et plans discrets.* Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, déc. 1995.

[5] Debled (I.) et Reveillès (J.-P.) — *A New Approach to Digital Planes*. —Vision Geometry III, (R.A. Melter, A.Y. Wu eds.), Boston 1994, pp. 12–21, SPIE vol. 2356.

[6] Debled (I.) et Reveillès (J.P.) — *A linear algorithm for the segmentation of discrete curves*. — In Parallel Image Analysis and applications. Series in Machine Perception artificial intelligence, Vol. 19 pp. 73-100, World Scientific 1996, ISBN 981-02-2476-1

[7] Erdös (P.), Gruber (P.M.) et Hammer (J.). — Lattice points. Longman Scientific & Technical. 1989.

[8] Hardy (G.H.) et Wright (E.M.) — An introduction to the theory of number, fifth edition, Oxford Sc. Pub., 1989.

[9] Kaufman (A.E.). — *Volume synthesis*. 6th International Workshop, Discrete Geometry for Computer Imagery 96, Lyon, France, November 1996. Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag.

[10] Kong (T.I.) et Rosenfeld (A.) . — *Digital Topology : Introduction and survey* — Computer Vision, Graphics and Image Processing 48, pp. 352-393, 1989.

[11] Lang (S.) . — Algebra, 3rd edition. Addison-Wesley. 1994.

[12] Reveillès (J.-P.). —*Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*, —Thèse d'État, Strasbourg, 1991.

[13] Reveillès J.-P. et Yaacoub (J.). — *MAT Operator for contour extraction. Journal of Electronic Imaging*,

[14] Rosenfeld (A.). — Picture processing by computer, Acad. press, N.-Y. 1969.

[15] Rosenfeld (A.). — Picture Languages, Acad. press, N.-Y. 1979.

[16] Rosenfeld (A.). —*Digital straight lines segments*, I.E.E.E. Trans. on Computers, t. *23*, 12, 1974, p. 1264-1369.

[17] Seroul (R.). — Math-info. Informatique pour mathématiciens. Collection *iia*, InterEditions 1995.

MATHÉMATIQUES PURES & APPLIQUÉES

LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE EN ÉCONOMIE

Ivar EKELAND
Université Paris IX

Ce texte a été écrit en réaction contre quelques idées trop souvent reçues, même parmi des personnalités scientifiques et politiques du plus haut niveau. On entend dire que :

– en économie, les modèles mathématiques sont complètement déconnectés de réalité ; les économistes feraient mieux de s'occuper à résoudre le problème du chômage que des problèmes de point fixe ;

– de toutes façons, les mathématiques utilisées en économie sont toujours triviales (sauf en finance, et à la rigueur en statistiques) ; si elles ne le sont pas, c'est qu'elles ne servent à rien (voir ci-dessus) ;

– la différence entre l'économie et les sciences véritables, comme la physique ou la géologie, c'est que l'économiste ne teste jamais ses modèles théoriques, alors que les vrais scientifiques font des expériences qui leur permettent de les valider.

Pour montrer à quel point ces idées sont fausses, je vais partir du niveau zéro de la théorie économique, c'est-à-dire de ses fondements, et je vais montrer comment, très vite, et justement pour des questions de vérification expérimentale, on est conduit à se poser des problèmes mathématiques non triviaux.

Cette conférence a été prononcée à l'occasion des journées SMAI de mai 1997. Je remercie Valérie Perrier et Daniel Barsky d'avoir insisté pour que je la rédige.

1 – Le modèle microéconomique

Les sciences sociales traitent des relations entre deux entités considérées comme distinctes, la société d'une part, l'individu d'autre part. Elles ont le choix de celle qu'elles considèreront comme primitive, l'autre étant alors dérivée. C'est un avatar de l'éternel débat entre la poule et l'oeuf, mais dans ce cas précis, ce choix revêt une grande importance méthodologique. En sociologie notamment, il a été illustré au début de ce siècle par les prises de position antagonistes d'Emile Durkheim et de Max Weber.

– pour Durkheim, c'est la société qui est le donné de départ, et les comportements individuels ne font que traduire, de manière consciente ou inconsciente, explicite ou implicite, des contraintes sociales. Le but de la sociologie est alors d'expliquer les comportements individuels à partir du donné social. C'est ainsi que l'un des livres les plus celèbres de Durkheim, « Le suicide » [9], montre comment cet acte, qui paraît pourtant l'acte individuel par excellence, est en fait un acte social, largement déterminé par des circonstances sociales qui ne laissent finalement à la liberté individuelle que fort peu de place.

– pour Weber, c'est l'individu (ou plutôt les individus) qui est le donné irréductible. Le fonctionnement de la société résulte alors de l'agrégation des comportements individuels, et le but de la sociologie est de montrer comment. Le livre le plus connu de Weber, « L'éthique protestante et l'esprit du capitalisme » [17], montre comment le développement du mode capitaliste d'organisation de la production, et donc la révolution industrielle, sont le résultat collectif d'un nouveau type de comportements individuels, dus à la mise en place d'un nouveau système de valeurs morales.

La théorie économique d'aujourd'hui, celle tout au moins à laquelle je me rattache et qui est visée par les critiques que j'ai évoquées, est résolument wéberienne : la donnée première, irréductible, la brique avec laquelle on construira la théorie, c'est l'individu. C'est la microéconomie qui fonde la macroéconomie, et non l'inverse.

Cet individualisme méthodologique nous impose d'avoir un bon modèle du comportement individuel. Le plus usité est le modèle de l'utilité espérée qui a pris sa forme définitive au tournant de ce siècle, avec les travaux de Léon Walras [16], Vilfredo Pareto [12], et finalement von Neumann et Morgenstern [11]. Chaque individu est caractérisé par

– un ensemble d'actions possibles : $a \in A$;

– des probabilités a priori sur les évènements futurs ($x \in X$), dépendant de l'action entreprise aujourd'hui ($a \in A$) : $d\mu_a(x)$;

– une fonction d'utilité $U(x) \in \mathbb{R}$.

Le choix de l'action $a \in A$ conduit à une utilité espérée $E_a[U]$ égale à

$$E_a[U] = \int U(x) d\mu_a(x)$$

et le problème du décideur se réduit alors à un problème d'optimisation :

$$\underset{a \in \mathcal{A}}{\text{Maximiser}}\, E_a[U]$$

L'exemple le plus simple et le plus classique de ce type de comportement est le problème du consommateur en microéconomie. Dans ce cas, il n'y a pas d'incertitude sur l'avenir, donc pas de probabilités a priori. Le décideur se borne à choisir un certain assortiment

$$x = (x^1, ..., x^K) \in \mathbb{R}^K$$

de K bien disponibles immédiatement (le nombre x^k représente la quantité choisie de bien k), qui peuvent être des produits matériels (alimentation, ménager) ou non (loisirs). Il sait que le choix de l'assortiment x lui apportera une satisfaction $U(x)$, mais lui coutera une somme de

$$px = \sum_{k=1}^{K} p_k x^k$$

où les coefficients p_k (prix du bien k) sont donnés indépendamment de lui (prix du marché). Si son budget total est w, son problème de décision s'écrit alors :

$$\underset{\substack{x \\ p\cdot x \leqslant w \\ x^k \geqslant 0 \quad \forall k}}{\text{Maximiser}}\, U(x).$$

Pour des raisons de cohérence logique, on impose que la fonction d'utilité U soit strictement concave, ou tout au moins quasi-concave : cela assure l'unicité de la solution. Il s'agit en effet d'une théorie de la décision, qui doit indiquer quel choix fait l'individu dans telles circonstances : si elle laisse subsister une ambiguïté (deux solutions possibles) elle n'aura pas rempli son but. Enfin, nous nous asseyons, dès maintenant, sur toutes les finesses mathématiques liées à l'existence de la solution, à sa différentiabilité par rapport aux données, et aux conditions d'optimalité. Nous supposerons en outre que les contraintes de positivité ne sont pas saturées à l'optimum (ce qui nous permet dorénavant de les oublier) et que la contrainte de budget l'est, ce qui nous permet de réécrire le problème du consommateur comme suit

$$(\mathcal{P}) \qquad \underset{p\cdot x = w}{\text{Maximiser}}\, U(x)$$

On ne saurait exagérer l'importance de ce modèle ; son influence s'étend aujourd'hui bien au-delà de ce que beaucoup de gens tiendraient pour les frontières naturelles de l'économie. Il est devenu un paradigme pour tout le comportement humain, modifié, bien sûr, par des considérations sur l'information disponible, qui peut être incomplète (personne ne sait ce qui va se passer) ou asymétrique (je ne le sais pas, mais d'autres le savent) ; pour ne citer qu'un petit exemple, Gary Becker (prix Nobel 1994) a appliqué ce type d'analyse aux mariages, aux divorces, au taux de fertilité et à l'éducation des enfants [3]. Loin de rester confinées dans le milieu académique, ses idées se retrouvent dans les encycliques pontificales comme dans le programme électoral de Bob Dole.

Mais ce n'est pas parce que tout le monde croit quelque chose que c'est vrai. L'économie est une science, et non une opinion. D'où la question fondamentale :

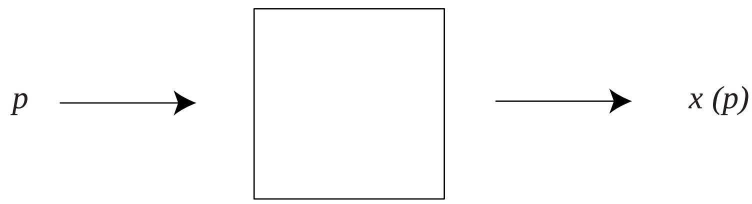
2 – Le modèle est-il vrai ?

La question du vrai est mal posée en science. On sait, grâce notamment aux travaux de Popper, que ce qu'on peut demander de mieux à un modéle, c'est d'être falsifiable, c'est-à-dire de pouvoir être perpétuellement remis en cause par de nouvelles expériences. Il ne peut être considéré comme vrai que de manière provisoire, en attendant l'expérience qui montrera ses limites.

Cette question se pose en général à la naissance d'une théorie. C'est le cas ici, puisque le premier à l'avoir posée (et résolue) est Giovanni Battista Antonelli, dans un bref mémoire publié à Pise (à compte d'auteur) en 1886 alors qu'il terminait des études d'ingénieur. Son travail tomba dans l'oubli, lui-même poursuivant par ailleurs une brillante carrière d'ingénieur, et ne fut redécouvert qu'en 1943, ce qui permet à un autre Pisan, Eugenio Slutsky, de refaire le même chemin en 1915 [14].

La difficulté du problème est que les fonctions d'utilité sont comme les licornes : tout le monde sait ce que c'est, mais cela ne court pas les rues. Si on me demande quelle est ma fonction d'utilité, je suis bien en peine pour répondre. C'est même un objet mathématiquement mal défini : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, les fonctions U et $\varphi \circ U$ donnent les mêmes résultats (ce sont donc deux fonctions d'utilité différentes qui conduisent aux mêmes décisions).

La solution d'Antonelli (et de Slutsky) est de considérer la solution du problème d'optimisation $(\mathcal{P})$ comme fonction des paramètres $p = (p_1, ..., p_k)$. En d'autres termes, le consommateur est modélisé comme une boîte noire, qui transforme une entrée $p = (p_1, ..., p_K)$ en une sorte $x(p) = (x^1(p), ..., x^K(p))$:



L'avantage de voir le problème de cette manière est que p et $x(p)$ sont l'un et l'autre observables, alors que $U(x)$ ne l'est pas. La question est alors de savoir si la relation observée entre p et $x(p)$ peut ou non être expliquée par la présence dans la boîte noire d'un problème d'optimisation du type $(\mathcal{P})$.

On est donc amené à chercher des conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire la fonction $x(p)$ pour provenir de la résolution d'un problème de type $(\mathcal{P})$. Une première condition est bien entendu :

$$p\dot{x}(p) = 1 \quad \forall p \tag{1}$$

La deuxième condition est connue sous le nom de relations de Slutsky. Elle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} = s^{ij} + a^i b^j \tag{2}$$

avec

$$s^{ij} = s^{ji} \quad \text{définie négative.} \tag{3}$$

En d'autres termes, la matrice jacobienne $x'(p)$ est la somme d'une matrice symétrique, définie négative, et d'une matrice de rang 1. On a la proposition :

Théorème : *Les conditions (1) (2) (3) sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction strictement concave U telle que $x(p)$ soit la solution du problème $(\mathcal{P})$.*

Démonstration : On considère la fonction dite d'utilité indirecte (appelée aussi fonction de performance).

$$\begin{aligned} V(p) &= \operatorname*{Max}_x \Big\{ U(x) \mid px \leqslant w \Big\} \\ &= \operatorname*{Max}_x \Big\{ U(x) + \lambda(1 - px) \Big\} \\ &= U\Big(x(p)\Big) + \lambda(p)\Big(1 - px(p)\Big) \end{aligned}$$

On a introduit un multiplicateur de Lagrange $\lambda = \lambda(p) \geqslant 0$. En dérivant par rapport à p, et en utilisant les conditions d'optimalité, on obtient (c'est ce que les économistes appellent le théorème de l'enveloppe)

$$\begin{aligned} V'(p) &= \Big[U'\Big(x(p)\Big) - \lambda(p)p\Big]x'(p) + \lambda'(p)(1 - px(p)) - \lambda(p)x(p) \\ &= -\lambda(p)x(p) \end{aligned}$$

D'où il ressort que $x(p)$ est colinéaire à un gradient :

$$x(p) = \mu(p)V'(p)$$

avec $\mu = \frac{-1}{\lambda}$. En dérivant, on obtient une condition nécessaire :

$$x'(p) = \mu(p) - V''(p) + \mu'(p)V'(p)$$

Le second membre est bien la somme d'une matrice symétrique (définie négative) et d'une matrice de rang 1. Pour montrer que cette condition est (localement) suffisante, on peut procéder de plusieurs manières, dont l'une consiste à appliquer le théorème de Frobenius [2].

Les relations de Slutsky étant nécessaires et suffisantes, on dispose enfin d'un test pour valider le modèle classique :

- on observe la fonction de demande $x(p)$;
- on regarde la matrice jacobienne $x'(p)$ et on vérifie si elle se décompose en une matrice symétrique négative et une matrice de rang un.

C'est faisable, mais ce n'est pas complètement évident. Le problème ici c'est qu'on veut observer des fonctions de demande dans des conditions réelles et non des conditions de laboratoire, ce qui veut dire que l'on s'interdit de faire varier les prix de manière artificielle. La solution consiste à prendre un grand pays, comme le Canada, où les prix varient d'une province à l'autre, notamment pour des raisons fiscales. Dans chacune des provinces, on mène alors des enquêtes très détaillées, qui permettent d'associer certains profils de consommation à certaines caractéristiques socio-professionnelles. Si alors on trouve, en Colombie Britannique et au Nouveau Brunswick, deux individus ayant les mêmes caractéristiques socio-professionnelles (mais des profils de consommation différents) on considère qu'il s'agit du même individu réagissant à deux sytèmes de prix différents.

Tout ce travail est du domaine de l'économétrie. La dernière étape consiste à imposer une forme, la plus souple possible, aux fonctions de demande. Un exemple typique est le suivant :

$$x(p,w) = \alpha + \Gamma p + \beta\Big(\operatorname{Log} w - a(p)\Big) + \frac{\lambda}{b(p)}\Big(\operatorname{Log} w - a(p)\Big)^2 \tag{4}$$

avec

$$a(p) = \alpha_0 + \alpha^* p + \frac{1}{2} p^* \Gamma p \tag{5}$$

$$b(p) = \exp(\beta^* p) \tag{6}$$

où $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, α, β et $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ sont des paramètres à ajuster. L'astérisque désigne la transposition. On a fait intervenir explicitement le budget w du consommateur.

Dans ce contexte, les relations de Slutsky se ramènent au fait que la matrice Γ doit être de la forme $S + R$, où S est symétrique négative et R de rang 1. D'habitude, on ne teste que la symétrie. La question est donc : une fois ajustés les paramètres des formules (4) (5) (6) sur des données réelles, la matrice Γ que l'on obtient est-elle symétrique (modulo le rang 1) ?

Jusqu'à tout récemment, la réponse était négative. Aucun des tests économétriques pratiqués avant 1994 n'a jamais permis de vérifier les relations de Slutsky, ni donc de valider le modèle classique. D'où une situation trouble, bien connue en physique, où les théoriciens s'accrochent à leurs théories et les expérimentateurs à leurs expériences, se renvoyant mutuellement la responsabilité de l'échec, les uns prétendant que la théorie est fausse, les autres que les expériences sont mal faites.

En 1994, pour la première fois, un nouveau point de vue s'imposait : le modèle est vrai, si l'on a des difficultés, c'est qu'on ne le prend pas assez au sérieux. Browning et Chiappori [4] faisaient observer que les relations de Slutsky caractérisent le comportement individuel, alors que dans les études économétriques qui avaient été menées jusque-là, aucune distinction n'était faite entre les individus et les ménages. Reprenant alors les éléments des enquêtes FAMEX (Family Expenditure Survey) menées au Canada en 1978, 1982, 1984, 1986 et 1990, ils séparent les données concernant les célibataires, et testent sur celles-ci les relations de Slutsky, et ils obtiennent, pour la première fois depuis un siècle, une réponse positive.

3 – Peut-on aller plus loin ?

Browning et Chiappori ne s'arrêtent pas en si bon chemin. Que faire des données concernant les ménages ? La différence avec les individus, c'est que l'on a maintenant affaire à plusieurs décideurs, ayant chacun leur propre fonction d'utilité. Dans le cas d'un couple, par exemple, il y aura deux fonctions d'utilité, U_1 et U_2, dépendant chacune de $x_1 \in \mathbb{R}^K$ (consommation particulière de madame), $x_2 \in \mathbb{R}^K$ (consommation particulière de monsieur), et $X \in \mathbb{R}^K$ (consommation commune du ménage). Dans cette dernière catégorie, on range par exemple le loyer et la chaîne hi-fi. On obtient ainsi un problème d'optimisation à deux critères, $U_1(x_1, x_2, X)$ et $U_2(x_1, x_2, X)$, sous une contrainte de budget commune :

$$p(x_1 + x_2) + PX \leqslant w \tag{7}$$

On a affaire à un problème de choix collectif. La difficulté de ce genre de problèmes est que, comme on ne peut pas maximiser simultanément deux fonctions, la décision à laquelle on s'arrêtera dépendra de beaucoup de facteurs qui ne sont pas inclus dans le modèle, comme la procédure de négociation, l'histoire passée, des considérations d'équité, etc. Voici longtemps que la théorie économique a appris à court-circuiter cette difficulté en faisant simplement une hypothèse de non-gaspillage. Plus précisément, on fera l'hypothèse que le profil de consommation (x_1, x_2, X) auquel aboutit le ménage est efficace, ou Pareto-optimal, ce qui signifie qu'il n'existe pas d'autre profil de consommation (y_1, y_2, Y), vérifiant également la contrainte de budget (7), et améliorant le sort de chacun :

$$U_1(y_1, y_2, Y) > U_1(x_1, x_2, X)$$
$$U_2(y_1, y_2, Y) > U_2(x_1, x_2, X)$$

C'est une des grandes réussites de la théorie économique que d'avoir découvert que cette simple hypothèse permet d'aller très loin. Dans le cas qui nous occupe, on montre que (x_1, x_2, X) est efficace si et seulement si on peut trouver un coefficient $\mu > 0$ tel que (x_1, x_2, X) maximise la somme pondérée $U_1 + \mu U_2$. On est donc conduit à formuler le problème du couple de la manière suivante : étant données des fonctions U_1, U_2 et μ,

$$\underset{\substack{(x_1,x_2,X) \\ p(x_1+x_2)+PX\leqslant w \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ X\geqslant 0}}{\text{Maximiser}} \quad U_1(x_1, x_2, X) + \mu(p) U_2(x_1, x_2, X) \tag{$\mathcal{B}$}$$

Comme ci-dessus, on oubliera les contraintes de positivité et on saturera la contrainte de budget. Etant donné un système de prix (p, P), on obtient une solution unique

$$\Big(x_1(p, P), x_2(p, P), X(p, P)\Big)$$

que l'on n'observe pas directement. Ce que l'on observe, c'est

$$\Big(x(p, P), X(p.P)\Big), \quad \text{où} \quad x(p, P) = x_1(p, P) + x_2(p, P).$$

La différence entre ce problème et le précédent est la présence de la fonction inconnue $\mu(p, P)$ qui donne un degré de liberté supplémentaire. Pour ajuster le modèle aux données, c'est-à-dire aux fonctions de demande observées, $x(p, P)$ et $X(p, P)$, on dispose des fonctions

$U_1(x_1, x_2, X)$, $U_2(x_1, x_2, X)$ et $\mu(p, P)$, plus le multiplicateur de Lagrange $\lambda(p, P)$. Il faut donc s'attendre à ce que les conditions de Slutsky soient considérablement affaiblies. Effectivement, on a le résultat suivant :

Proposition : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions $U_1(X)$, $U_2(X)$ et $\mu(P)$ telles que $X(P)$ soit localement la solution du problème*

$$\underset{PX=w}{\text{Maximiser}}\, U_1(X) + \mu(P)U_2(X).$$

est que $PX(P) = w$ et que la matrice jacobienne $\left(\dfrac{\partial X^i}{\partial p_j}\right)$ soit la somme d'une matrice symétrique, et d'une matrice de rang deux.

La condition nécessaire est due à Browning et Chiappori. Il suffit de reprendre le raisonnement antérieur, en dérivant la fonction d'utilité indirecte

$$\begin{aligned} V(P) &= \text{Max}\Big\{U_1(X) + \mu(P)U_2(X) + \lambda(P)(w - PX)\Big\} \\ V'(P) &= -\lambda(P)X(P) + \mu'(P)U_2(X(P)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X(P) &= \frac{-1}{\lambda(P)}V'(P) + \frac{U_2(X(P))}{\mu'(P)}\mu'(P) \\ &= f(P)V'(P) + g(P)\mu'(P) \end{aligned}$$

$X(P)$ est donc combinaison linéaire de deux gradients. En dérivant une fois de plus, on obtient la matrice jacobienne

$$X'(P) = f(P)V''(P) + g(P)\mu''(P) + f'(P)^*V'(P) + g'(P)^*\mu'(P)$$

A droite, chacun des deux derniers termes est une matrice de rang 1, et chacun des deux premiers est une matrice symétrique. D'où le résultat.

Pour la démonstration de la condition suffisante, (voir [6]), on se ramène à un théorème de Darboux sur les formes différentielles.

Dans la représentation précédente, il n'y a que des consommations communes : les fonctions d'utilité sont de la forme $U_1(X)$ et $U_2(X)$. Si l'on veut qu'il y ait également des consommations privées, si par exemple on cherche des représentations de la forme $U_1(x_1)$ et $U_2(x_2)$, il faut des conditions supplémentaires (voir [5]). La question de la concavité est encore mal comprise (voir cependant [7]).

Tel qu'il est, ce résultat permet déjà de tester le modèle sur la consommation des ménages. Dans les données FAMEX déjà citées, Browning et Chiappori isolent les données concernant les couples sans enfants, et montrent (a) que leurs profils de consommation ne vérifient pas les relations de Slutsky (b) mais vérifient les conditions ci-dessus (symétrique + rang deux). Ce deuxième résultat positif apporte au modèle microéconomique classique une très forte validité.

4 – Le passage à la macroéconomie

Maintenant que les soubassements microéconomiques sont bien étayés, on peut s'interroger sur les superstructures macroéconomiques. La fonction de demande collective d'une société comme la France résulte de la sommation d'une multitude de fonctions de demande individuelles. Peut-on retrouver dans cette demande agrégée, ses composantes individuelles ?

Précisons un peu le problème sur un modèle simple. Soit une société composée de N individus, caractérisés chacun par leur fonction d'utilité U_n et leur budget w_n. Si le système de prix est $p \in \mathbb{R}^K$, chacun réagit en choisissant ce qu'il préfère parmi ce qu'il peut se payer :

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \operatorname*{Max}_{px \leqslant w_n} U_n(x)$$

d'où il résulte une demande individuelle $x_n(p)$. La demande collective $x(p)$ est la somme :

$$x(p) = \sum x_n(p)$$

On se pose alors un problème dont les questions suivantes ne sont que des variantes :

- peut-on tester le modèle microéconomique classique (maximisation de l'utilité espérée) sur des données agrégées comme $x(p)$ plutôt que des données individuelles ?
- la fonction de demande agrégée $x(p)$ possède-t-elle certaines propriétés particulières que l'on pourrait exploiter (par exemple, pour arriver à un équilibre).
- peut-on obtenir des renseignements micro à partir de données macro ?

La réponse à ces trois questions est non. La première indication en ce sens est due à Sonnenschein, Mantel et Debreu dans une série de travaux [15], [10], [8] ; voir [13] pour un historique). Dans le cadre donné ici, la réponse a été apportée dans l'article [6], qui a fait rentrer dans le sujet les méthodes du calcul différentiel extérieur d'Elie Cartan.

On reformule le problème en utilisant de nouveau les fonctions d'utilité indirectes

$$V_n(p) = \mathrm{Max}\Big\{U_n(X) + \lambda_n(1 - pX)\Big\}$$
$$V_n'(p) = -\lambda_n(p)x_n(p)$$

d'où $x_n(p) = \dfrac{-1}{\lambda_n(p)}V_n'(p)$, et la décomposition

$$x(p) = \sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{\lambda_n(p)}V_n'(p) \tag{8}$$

avec

$$px_n(p) = 1 \quad 1 \leqslant n \leqslant N \tag{9}$$

On est donc amené à résoudre le problème suivant : trouver N fonctions convexes $V_1, ..., V_N$ sur $\mathbb{R}^K$ telles que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{pV_n'(p)}V_n'(p) = x(p) \ .$$

C'est un sytème de K équations aux dérivées partielles non linéaires pour N fonctions inconnues dont on cherche des solutions convexes. Comme ce système n'est d'aucun type connu, on est obligé, pour le résoudre, de faire appel à la théorie des systèmes différentiels extérieurs, et plus particulièrement au théorème de Cartan-Kähler bien connu des géomètres. On montre ainsi que

– si $x(p)$ est analytique réelle

– si $N \geqslant K$ (plus d'acteurs que de biens)

le problème a toujours une solution locale (voir [6]). En d'autres termes, si $N \geqslant K$, n'importe quelle fonction analytique $x(p)$ peut être la somme des demandes d'individus se conformant au modèle microéconomique classique.

L'utilisation du théorème de Cartan-Kähler est pour moi une chose entièrement nouvelle : c'est plutôt un outil de géomètre que d'analyste, et son apparition dans ce genre de question est une vraie surprise. J'espère avoir réussi à montrer comment, à condition de la prendre au sérieux, la théorie économique nous conduit rapidement à des questions où l'intérêt mathématique va de pair avec la rigueur scientifique.

Bibliographie

[1] G.B. ANTONELLI, « Sulla teoria matematica dell economia politica », Pisa, 1886

[2] Vladimir ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, 1968

[3] Gary BECKER, *A treatise on the family*, enlarged edition, Harvard University Press, Cambridge, MA

[4] M. BROWNING et Pierre-André CHIAPPORI, « Efficient intra-household allocations : a general characterization and empirical tests », to appear, Econometrica

[5] P.A. CHIAPPORI and I. EKELAND, *Problèmes d'agrégation en théorie du consommateur et calcul différentiel extérieur*, CRAS Paris, 323 (1996), p.565-570

[6] P.A. CHIAPPORI and I. EKELAND, *Aggregation and market demand : an exterior differential calculus viewpoint*, to appear, Econometrica

[7] P.A. CHIAPPORI and I. EKELAND, *A convex Darboux theorem*, to appear, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.

[8] Gérard DEBREU, « Excess demand functions », Journal of Mathematical Economics, 1 (1974), p. 15-23

[9] Émile DURKHEIM, *Le suicide*, 1930 ; réédition, PUF, 1993

[10] R. MANTEL, « On the characterization of aggregate excess demand », Journal of Economic Theory 7 (1974), p.348-353

[11] John von NEUMANN et Oskar MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour*

[12] Vilfredo PARETO, *Manuale di Economia Politica*, 1906, réédité, Studio Tesi, 1994

[13] W. SHAFER et Hugo SONNENSCHEIN, « Market demand and excess demand fuctions », *Handbook of Mathematical Economics*, Kenneth Arrow and Michael Intriligator eds., 1982, vol 2, ch. 14, p. 670–693

[14] Eugenio SLUTSKY, « Sulla teoria del bilanzio del consumatore », Gioranle degli economisti, **51** (1915), p. 1–26

[15] Hugo SONNENSCHEIN, « Market excess demand functions », Econometrica **40** (1972), p. 549–563

[16] Léon WALRAS, *Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, 1900, Rouge (Lausanne), Pichon (Paris)

[17] Max WEBER, *L'ethique protestante et l'esprit du capitalisme*, 1904, traduction Plon, 1964

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

L'HISTOIRE DE LA PERSPECTIVE AU XX^e^ SIÈCLE : UNE DÉCONSTRUCTION

Jeanne PEIFFER
Centre Alexandre Koyré

Introduction

La perspective linéaire est une technique mathématique relativement simple : une projection centrale dans $\mathbb{R}^3$. Si T est un plan de $\mathbb{R}^3$, O un point n'appartenant pas à T, et T' le plan passant par O et parallèle à T, alors on appelle *perspective de centre O sur T* une application de $\mathbb{R}^3 \setminus T'$ sur T, qui à un point M associe le point d'intersection de OM avec le plan T. Le point O est appelé « œil » et T le plan du « tableau ». Cette projection est une transformation non affine étudiée et enseignée dans le cadre de la géométrie projective, qui est une importante branche de l'arbre des connaissances mathématiques.

Pourtant la plupart du temps, nous parlons de perspective en des termes qui dépassent largement le cadre étroit de cette définition mathématique. Inventée à la Renaissance par les peintres comme une technique de construction picturale, la perspective a eu des prolongements non seulement en mathématiques, mais aussi en philosophie, dans l'art des jardins, ... , et de fait dans toute la culture occidentale, comme le langage en porte témoignage (nous ouvrons des perspectives, défendons des points de vue, etc.). En effet, la vision perspective, un dispositif fondé en géométrie, informe notre culture visuelle jusqu'à créer un « *habitus* de la représentation » (Havelange 1998, p.268) qui domine largement notre appréhension du monde visible et sert de modèle métaphorique à la connaissance.

L'historicisation et la métaphorisation de la perspective

Si la perspective, d'une technique picturale fondée en géométrie, (tombée en désuétude avec Cézanne, dit-on) a pu devenir une puissante métaphore linguistique, cognitive ou épistémologique, c'est qu'il y a eu des ruptures dans la manière d'écrire l'histoire de cette invention. L'une d'elle a été la publication, en 1927, d'un article fondamental de l'historien de l'art Erwin Panofsky, « La perspective comme forme symbolique », parue en allemand dans *Vorträge der Bibliothek Warburg* pour 1924-25 (Berlin-Leipzig 1927). Panofsky y battait en brèche l'idée d'un système unique de construction perspective, qui reproduirait exactement l'impression visuelle. D'abord, il met en évidence l'existence, chez les Anciens, d'un procédé de perspective fondé sur le principe d'un axe de fuite, la fameuse « arête de poisson » — perspective à plusieurs points de fuite alignés, conforme à l'axiome des angles de l'optique euclidienne[1]. La question est désormais, pour les diverses régions de l'art et ses différentes époques, « de savoir, non seulement si les uns et les autres ont une perspective, mais encore quelle perspective elles ont » (Panofsky 1975, p.59-83).

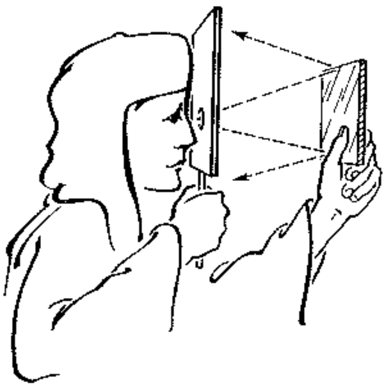
Puis, Panofsky s'attaque à la « vérité » de la perspective linéaire. Objet et objet représenté ne coïncident pour l'observateur occupant un point de vue fixe qu'au prix de contraintes fortes comme la vision monoculaire, l'immobilité de l'œil et l'abstraction des déformations latérales. « De simple instrument technique, la perspective passe avec lui, selon Marisa Dalai (article « perspective » de l'*Encyclopædia universalis)*, au rang de phénomène stylistique et culturel majeur, dont la fonction naturaliste est relativisée et qui subit un procès radical d'historicisation ».

Cet article pionnier est à l'origine d'une littérature volumineuse, il a suscité des débats (notamment sur le statut qu'il faut donner à l'illusionnisme perspectif) et profondément infléchi le développement ultérieur de l'historiographie sur la perspective. Si la thèse de Panofsky a été assez largement acceptée, ses arguments l'ont été beaucoup moins et de nombreuses études de détail sont venues préciser, amender ou infirmer ses analyses. Il en est résulté une attention renforcée aux textes, surtout aux premiers traités de perspective de la Renaissance — ceux d'Alberti 1435, Piero della Francesca v.1475, Gaurico 1504, Pélerin 1505, Dürer 1525, Barbaro 1568, Vignola 1583, Guidobaldo 1600 — dont certains, n'existant que sous forme manuscrite, ont fait l'objet d'éditions soignées, de traductions et de commentaires. Rappelons qu'en France le

[1] Euclide visait à de calculer la grandeur apparente d'un objet à mesure qu'il s'éloigne. Elle est proportionnelle à l'angle visuel (et non inversement proportionnelle à l'éloignement). Pour plus de détails, voir Simon 1988 ; Elkins 1994, chap.5 ; Raynaud 1998, p.53-62.

groupe « Histoire, théorie et pratique de la perspective et des modes de représentation », réunissant des mathématiciens, des historiens des mathématiques, des historiens des sciences, des architectes, des historiens d'art... s'est attelé à la relecture (et pour partie la traduction[2]) des textes de perspective, de géométrie projective et de géométrie descriptive.

Le mythe de l'origine



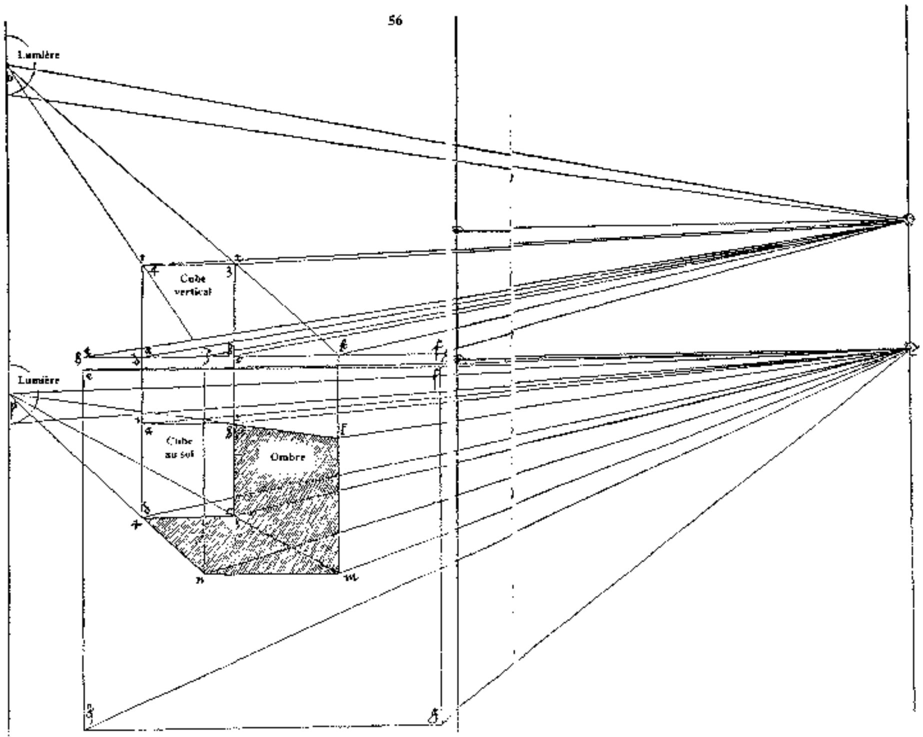
Les origines de la perspective ont attiré une attention qui ne s'est jamais démentie. Rappelons les grandes lignes du récit des origines tel qu'il s'est peu à peu constitué, pratiquement en l'absence de tout document fondateur. Vers 1413, l'architecte florentin Filippo Brunelleschi aurait réalisé deux *tavolette* représentant l'une le baptistère San Giovanni de Florence, « tel qu'il peut être vu de l'extérieur » par un observateur qui se tient à l'entrée de la cathédrale, l'autre la place et le palais de la Seigneurie. Mais surtout, il aurait imaginé un dispositif qui permet de faire coïncider cette représentation avec l'édifice représenté. La planche de bois aurait été percée d'un trou, où l'observateur, qui tient d'une main le tableau face peinte vers l'extérieur et de l'autre à bonne distance un miroir, doit poser son œil. Il découvre alors dans le reflet du miroir la peinture et il peut en apprécier la coïncidence avec l'édifice réel. Cette expérience nous a été relatée par Antonio Manetti dans sa *Vita di Filippo Brunelleschi*, rédigée vers 1475, c'est-à-dire plus de 60 ans après que l'expérience a eu lieu. Manetti prétend avoir eu en main les *tavolette*, depuis disparus. Son récit reste assez vague pour que les historiens de la perspective puissent pleinement y exercer leurs talents d'exégètes (voir, par exemple, Damisch 1987, p.67-112 et passim ; Kemp 1990, p.11-14 et 344-345 ; Comar 1992, p.31-33 ; Hamou 1995, p.57-67 ; Field 1997, p.21-24 ; Havelange 1998, p.245-251).

[2] Jean-Pierre Le Goff et Marie-France Clergeau ont chacun traduit le *De prospectiva pingendi* de Piero della Francesca, Christian Guipaud les *Perspectivae libri sex* (1600) de Guidobaldo del Monte, Béatrice Marry la *Prospettiva* (1693) d'Andrea Pozzo. (Ces traductions sont restées inédites et fragmentaires pour certaines). J'ai moi-même traduit les *Notes et Additions* (1774) à la *Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral* de Jean-Henri Lambert (Cédic/Nathan 1987) ainsi que l'*Underweysung der Messung* d'Albrecht Dürer (Editions du Seuil 1995).

On fait en général l'hypothèse que la règle — *la regola* — mise en œuvre par Brunelleschi pour dessiner le baptistère est celle que l'humaniste Leon Battista Alberti a décrite, en 1435, dans son *De pictura*. La perspective y est définie comme une intersection plane du cône visuel ayant comme sommet l'œil du peintre et comme base l'objet à représenter. La construction, surnommée «legittima» par Pietro Accolti en 1625 (Field 1997, p.30) se fait à partir du plan et de l'élévation de tout le dispositif perspectif : œil, rayons visuels, objet, plan de coupe qui intercepte point par point une réalité perçue. La représentation en plan donnant les valeurs en largeur, celle en élévation les valeurs en hauteur, il suffit de reporter ces valeurs sur un troisième plan (celui du tableau) — en choisissant la projection orthogonale de l'œil comme origine — pour obtenir la représentation en perspective.

Dürer définit la perspective comme «coupe plane et transparente pratiquée au travers de tous les rayons, qui tombent de l'œil sur les choses qu'il voit»

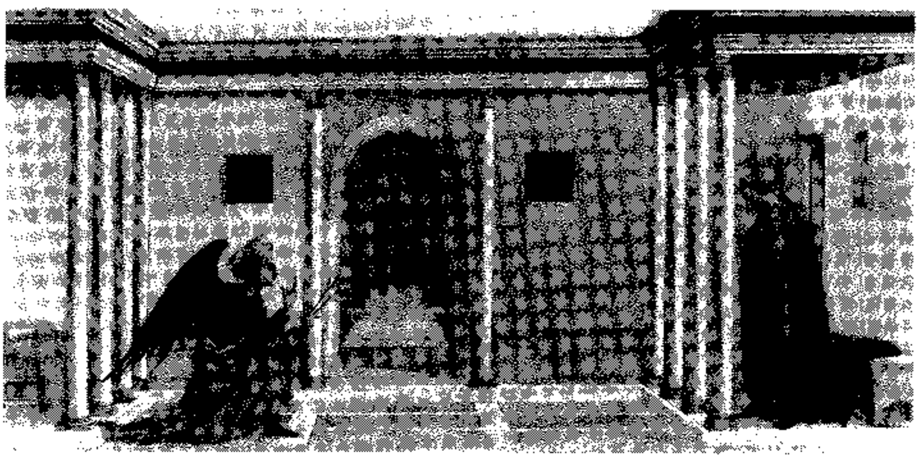
Brunelleschi est ainsi désigné par le récit mythique comme le principal



Albrecht Dürer, *Underweysung der Messung* 1525, figure IV.56

acteur de l'expérience originaire dont les prolongements s'étendraient jusqu'à aujourd'hui. Lorsque l'on s'intéresse au processus historique qui a mené à l'invention de la perspective en tant que technique d'abord picturale, puis mathématique, on se trouve confronté à deux scénarios selon que l'on veuille donner à cette invention une origine empirique ou théorique.

Selon le premier scénario, la perspective doit son apparition, après une période de tâtonnements, à la longue maturation qu'elle a subie dans les ateliers. La conquête de la profondeur, sous forme de convergence des orthogonales au tableau en un point appelé point de l'œil par les artistes de la Renaissance (notre point de fuite principal), avait débuté bien avant Brunelleschi, dans l'entourage de Giotto et de Duccio. De fait, deux pratiques distinctes s'étaient développées, la méthode albertienne (ci-dessous) et celle du point de distance mise en œuvre par Jean Pélerin, dit Viator, dans son *De artificiali perspectiva* (1505). Cette dernière utilise la convergence des diagonales d'un damier vers des points (dits de distance) situés sur l'horizon de part et d'autre du point de fuite principal à une distance égale à celle de l'observateur du tableau. Panofsky avait cru pouvoir constater que ces deux approches provenaient de régions géographiques distinctes, la méthode albertienne correspondant à une pratique méridionale, celle du point de distance provenant des ateliers situés au Nord des Alpes. Tout récemment, cette distinction



Domenico Veneziano, *L'annonciation*, v.1445, aujourd'hui au musée Fitzwilliam, Cambridge. Ce tableau a pu être construit selon la méthode albertienne.

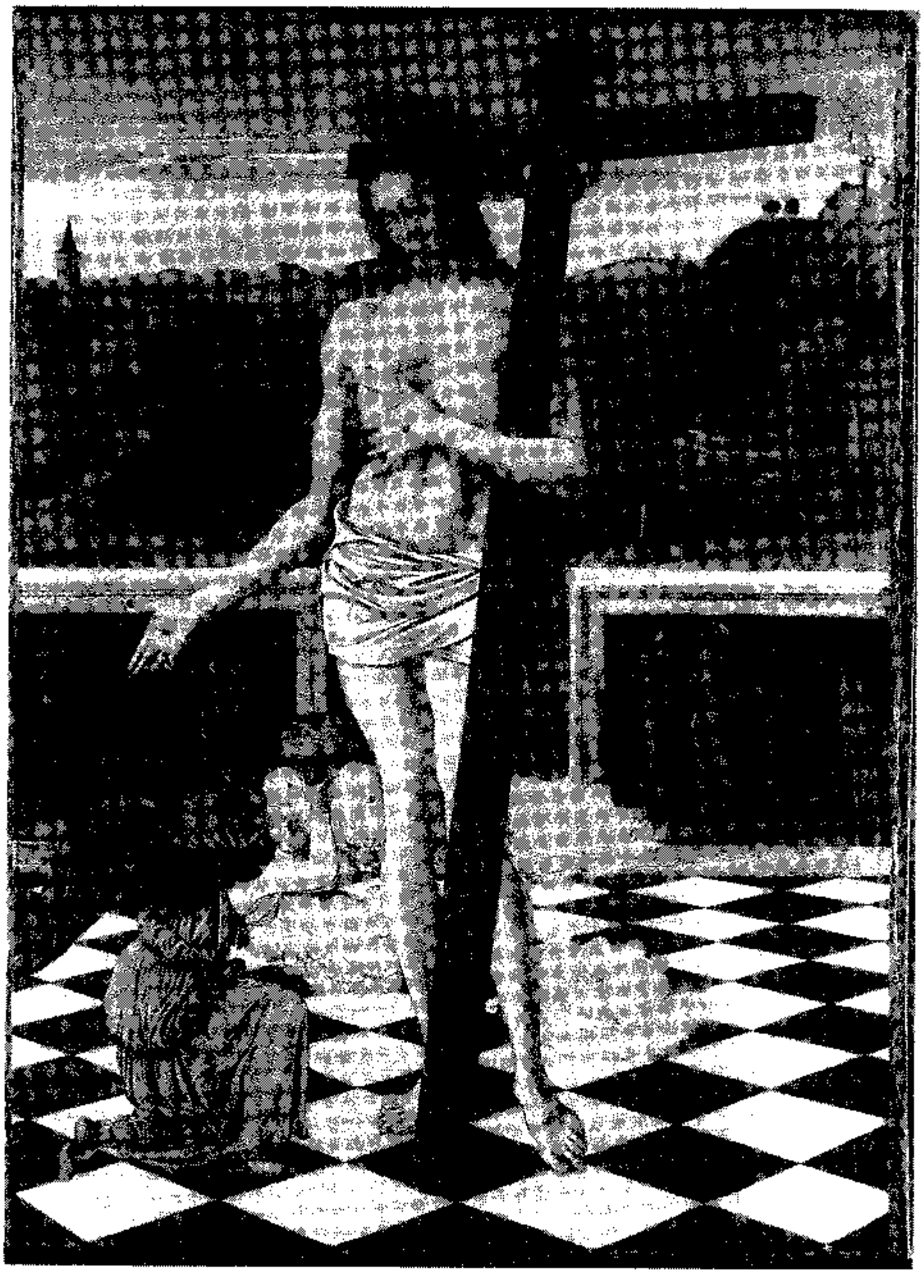
est devenue, chez Svetlana Alpers, opposition entre deux manières différentes de fabriquer des images ou de représenter le monde, entre : celle de l'art descriptif néerlandais et celle de l'art narratif italien.

De fait, il semblerait que les points de distance aient également été en usage au Sud des Alpes — *Le sang du rédempteur*, vers 1460-1465, de Giovanni Bellini, aujourd'hui à la *National Gallery* de Londres, aurait pu être construit à l'aide des points de distance — la méthode albertienne se diffusant, surtout grâce aux *Instructions pour la mesure* de Dürer, lentement mais sûrement au Nord.

Un second scénario relie la *perspectiva artificialis*, celle des peintres, à l'optique géométrique médiévale, la *perspectiva naturalis*. La notion de cône, ou pyramide, visuel utilisée par Alberti appartient à l'optique géométrique euclidienne. Nous commençons à mieux connaître, à travers notamment les travaux de Lindberg et de Rashed, l'optique médiévale et l'influence énorme qu'a exercée notamment celle d'Ibn al-Haytham (Xe siècle) sur les théoriciens du XIIIe siècle, parmi lesquels on compte : le franciscain oxonien Roger Bacon ; Witelo auteur d'une encyclopédie d'optique largement répandue intitulée *Perspectiva* ; et John Pecham également franciscain d'Oxford et auteur d'une *Perspectiva communis*. A travers les *Quaestiones super perspectivam* de Biaggio Pelacani, analysée par G. Frederici Vescovini, les perspectivistes du *quattrocento* auraient pu avoir connaissance de l'optique, dont ils reprirent le squelette géométrique. Cette filiation a récemment donné lieu, en France, à la publication dans une collection « Sociologies » d'un essai intitulé L'*Hypothèse d'Oxford*, où l'auteur-architecte Dominique Raynaud formule de fait une thèse (qu'il ne se donne aucunement les moyens de démontrer) : Il existe un « courant prépondérant de transmission culturelle » de l'optique anglaise à la perspective italienne. Ce courant « pointe l'index sur : 1/ une discipline majeure, l'optique (*perspectiva*) ; 2/ dans sa facture médiévale plutôt qu'antique ; 3/ et telle qu'elle fut proposée dans les milieux franciscains d'Oxford » (Raynaud 1998, p.170).

Les pratiques picturales du *quattrocento*

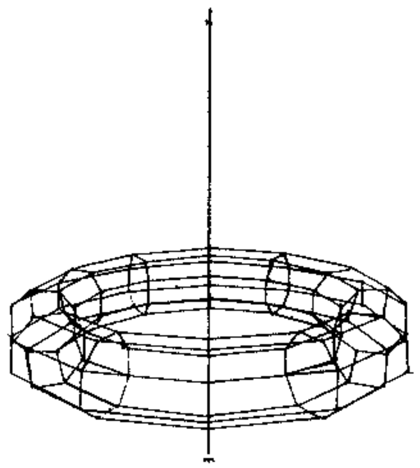
Les amis de Brunelleschi — le sculpteur Donatello et le fresquiste Tommaso di Giovanni, dit Masaccio — auraient été les premiers à appliquer dans leurs travaux la règle exhibée par Brunelleschi. *La Trinité* (vers 1426), apposée par Masaccio sur les murs de *Santa Maria Novella* de Florence, est réputée être la première fresque, qui nous soit conservée, construite exactement selon les règles de la perspective linéaire. De fait, des analyses menées il y a dix ans par J. V. Field et R. Lunardi (Field



Giovanni Bellini, *Le sang du rédempteur* v.1460-65

1996, p.43-61) ont clairement montré que la construction est mathématiquement fausse (les orthogonales ne convergent pas), alors que l'impression visuelle produite est extraordinairement juste. La voûte « semble percer le mur » disait déjà Vasari.

La Trinité ne constitue pas la seule image de la Renaissance dont les mathématiciens aient montré l'inexactitude de la construction géométrique sous-jacente. Il est assez généralement admis aujourd'hui que les peintures de la Renaissance construites selon les règles de la perspective linéaire sont relativement rares. Comme le sont aussi les images déployant un espace infini et homogène, dans lequel viendrait se dérouler une histoire que l'on découvrirait comme à travers une fenêtre ouverte. Panofsky était convaincu qu'un espace systématique, infini, homogène et isotrope est apparu au XV^{e} siècle. Et que c'est l'existence de cet espace qui a rendu possible l'avènement de la perspective linéaire. C'est ce qui est aujourd'hui contesté. Un tel espace rationnel n'existait pas à la Renaissance, ni sur le plan esthétique, ni en mathématiques. James Elkins, auteur d'une « poétique de la perspective », constate à juste titre que la notion de perspective, telle qu'elle était comprise à la Renaissance, est davantage orientée vers les objets que vers un espace pictural fictif. Les artistes disposaient d'une collection de méthodes rationnelles considérées comme indépendantes les unes des autres et d'ailleurs pas forcément compatibles entre elles — décrites dans les traités — leur permettant de représenter dans le tableau des objets en perspective, chacun souvent avec son propre point de fuite. Ils construisent des perspectives dans les tableaux plutôt que des tableaux en perspective (Elkins 1994, p.15). En représentant des objets géométriquement aussi complexes que les *mazzochi* (un *mazzochio* est un couvre-chef florentin), ils peuvent démontrer leur habileté technique. Les traités proposent d'ailleurs des figures exemplaires en perspective prêtes à être introduites dans les images.



Mazzochio de Piero della Francesca
De prospectiva pingendi

L'invention de la perspective est-elle une anticipation rationnelle de la géométrie projective ?

Une certaine historiographie établit un lien entre la pratique perspective du *quattrocento* et la géométrie projective. La formulation mathématique correcte de la perspective, au XVII^e siècle avec Desargues, aurait donné naissance à cette nouvelle branche de la géométrie. Cette reconstruction rationnelle n'a pas résisté à l'examen rigoureux des textes fondateurs mené ces dernières années par des historiens des mathématiques comme J.V. Field, Jan Hogendijk et Kirsti Andersen.

Alors que les peintres italiens du XVI^e siècle, passés maîtres dans la création de tableaux illusionnistes, ne se soucièrent pas des mathématiques sous-jacentes, des mathématiciens comme Danti, issu d'une famille d'artistes, Benedetti, Commandino et Guidobaldo del Monte se sont intéressés, dans le contexte des études euclidiennes florissantes dans la seconde moitié du siècle, à la perspective. Celle-ci a alors joué un rôle important dans le mouvement des idées scientifiques. Mais pas avant, selon Martin Kemp qui dénonce la tendance des historiens à projeter cette situation de proximité intellectuelle sur le XVI^e siècle et les origines de la perspective. Pour lui, donc — et je ne suis pas sûre qu'il ait raison — la perspective n'a pu féconder les sciences, et les mathématiques en particulier, que déjà mathématisée et absorbée dans un contexte fonctionnel différent, mettant l'accent, non sur la confection de tableaux, mais sur des questions générales, des problèmes de fondement, etc.

Ainsi, Guidobaldo del Monte, élève de Commandino, auteur de *Perspectivae libri 6*, Pesaro 1600, met, dès son introduction au livre 1, l'accent sur les démonstrations. Voici ce qu'il écrit : « Le sujet que nous traitons sera donc relatif aux différents aspects du visible, dans la manière où il se présente à nous, par exemple en trompant, d'une certaine façon, la vue ; et nous le ferons en utilisant des raisonnements mathématiques dont je me servirai pour les démonstrations, qui, eux, ne peuvent pas être faux et qui éliminent cet aspect trompeur... » (traduction Christian Guipaud *in Bessot et al.* 1991, p.262). Guidobaldo établit, en termes euclidiens, une théorie complète des parallèles en perspective. Il considère d'abord des situations particulières où les droites sont parallèles ou perpendiculaires au tableau, puis le cas général de droites parallèles en situation quelconque. Il démontre la proposition suivante établissant l'existence des points de fuite, qu'il appelle points de concours : « Si l'œil voit des lignes parallèles qui, prolongées, rencontrent la section — c'est-à-dire le plan du tableau — les lignes apparentes dans la section se rencontreront en un point unique, aussi haut que l'œil au-dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles ». (Livre 1, Prop. 32 dans la traduction de Guipaud *in* Bessot *et al.* 1991, p.264).

Des droites parallèles qui concourent en un point ! On reconnaît là la notion de point à l'infini introduite au XVII^e siècle par Kepler et surtout par Desargues longtemps présenté comme un homme évoluant entre le monde des praticiens et celui des mathématiciens. Ainsi Jean Dieudonné a pu écrire, *Cours de géométrie algébrique*, Paris 1974, vol. 1, p.25-26 : « cherchant à donner un fondement mathématique aux méthodes de la 'perspective' utilisées par les peintres et les architectes, il [Desargues] était arrivé à une conception claire de l'adjonction au plan usuel d'une 'droite à l'infini', grâce à l'usage systématique de la projection centrale, de sorte que sa conception de $P_2(\mathbb{R})$ ne diffère pas de la définition moderne comme ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine ».

Le quatrième centenaire de la naissance de SGDL, Sieur Girard Desargues Lyonnais, en 1991, a été l'occasion d'entreprendre des recherches dans les archives lyonnaises et de faire une relecture critique des traités arguésiens. Nous savons maintenant que Desargues est né dans une famille aisée (Chaboud *in* Dhombres *et al.* 1994, p.433), ce qui lui a sans doute permis d'acquérir une formation classique et de bonnes connaissances en mathématiques. En 1636, il publie un opuscule de 12 pages sur la perspective intitulé *Exemple de l'une des manières universelles du* SGDL *touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, que nous allons désormais citer en abrégeant le titre en *La perspective.* En 1639, il publie à compte d'auteur en 50 exemplaires, une théorie des sections coniques, *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*, connu à travers une copie manuscrite (1679) de La Hire, retrouvée par Michel Chasles et publiée en 1864 par Poudra jusqu'à ce que René Taton retrouve à la Bibliothèque Nationale de Paris un exemplaire original qu'il a publié en 1951.

Ce *Brouillon project* est un traité de géométrie projective par les éléments qu'il met en place : points à l'infini, idée de propriétés invariantes par projection centrale, théorie unifiée des coniques comme perspectives de cercle. Rappelons brièvement la manière dont Desargues y introduit le point à l'infini. Il définit une ordonnance de droites comme un ensemble de droites soit parallèles soit convergentes. Ces ordonnances tendent toutes à un même endroit : le but de l'ordonnance. Celui-ci se trouve à distance infinie pour les droites parallèles et à distance finie pour les droites convergentes. Points à l'infini et points à distance finie jouent exactement le même rôle.

En menant une étude interne du *Brouillon project*, Jan P. Hogendijk (dans *Centaurus* 34, 1991) a pu mettre en évidence l'existence d'une relation historique forte entre ce traité, fort original, et les *Coniques* d'Apollonius, ouvrage standard sur les sections coniques à l'époque de Desargues. Grâce aux points et aux droites à l'infini, Desargues, qui avait certainement lu Apollonius, pouvait établir plus simplement la théorie apollonienne des diamètres et des ordonnées. Hogendijk le démontre en mettant en avant des similitudes terminologiques et des références implicites à Apollonius. Les sources de Desargues sont à chercher, selon lui, du côté des mathématiques classiques, dans Apollonius et Pappus, et non du côté des praticiens.

Alors que pour Rudolf Bkouche, la notion arguésienne de point à l'infini est issue d'une certaine lecture des constructions perspectives, qui fait le passage de la pratique perspectiviste à la géométrie projective, Kirsti Andersen, à la suite de J.V. Field et Jeremy Gray, défend une position plus nuancée. S'interrogeant (dans *Centaurus* 34, 1991) sur les relations entre les points à l'infini du *Brouillon project* et *La perspective*, elle réexamine de fait la place qu'on a longtemps assignée à Desargues entre mathématiciens et utilisateurs des mathématiques. Je cite une de ses conclusions : « it is extremely likely that Desargues' idea of introducing points at infinity stems from his work on perspective, but that the link was not, as could be expected, related to vanishing points ». Desargues, même si cette idée est très répandue dans la littérature, n'a pas ajouté le point à l'infini à la droite pour obtenir un point pouvant être décrit comme un point de fuite en perspective. Dans le *Brouillon project*, Desargues étudie des projections de droites sur des droites, de plans sur des plans, mais il n'y considère pas de projections de l'espace sur un plan — projections qui importent seules en perspective. Andersen en conclut que le lien entre perspective et géométrie projective est moins étroit qu'une reconstruction rationnelle pourrait le suggérer.

Elkins va plus loin dans le même sens en niant toute relation entre la perspective et les mathématiques arguésiennes. Pour lui, depuis le milieu du XVI^e siècle (période que Kemp désigne comme fructueuse pour les interactions !) il y a eu développement parallèle : « In historical scholarship, but not in mathematical history, perspective is said to be tied to certain mathematical developments such as the Desargues theorem ; but that connection is virtually nonexistent, and mathematics and perspective have developed in parallel, mutually isolated streams since the mid-sixteenth century » (Elkins 1994, p.3).

Conclusion : L'histoire de la perspective, une histoire plurielle

La perspective est un objet qui échappe à toute étude à l'intérieur des disciplines telles qu'elles se sont historiquement constituées. On a écrit sur elle dans nombre de domaines aussi variés que la psychanalyse, la philosophie, l'esthétique, l'histoire de l'art, l'histoire des mathématiques, les mathématiques, etc. Mais aucune de ces disciplines ne peut en donner une description adéquate. Dans l'écriture de cette histoire plurielle, les mathématiciens ont un rôle à jouer. D'abord en étudiant les modalités selon lesquelles l'invention de la perspective linéaire s'est prolongée en l'espèce de la géométrie projective et de la géométrie descriptive. Puis, Elkins a attiré l'attention sur la « pseudogéométrie » développée par les historiens de la perspective, qu'il fustige pour ne pas rendre compte de la complexité des choses et se contenter d'utiliser des schémas simplifiés à l'extrême. « Perspective is rarely good mathematics, more often it is something else, a kind of experimentation in the ruins of mathematics » (Elkins 1994, p.116). A ce niveau-là, celui d'une historiographie simplificatrice, les historiens des mathématiques peuvent mettre en œuvre leur compétence — et c'est ce que certains ont commencé à faire avec beaucoup de bonheur — pour proposer des schémas correspondant à la complexité de la situation décrite dans les traités de perspective. Dans la mise à plat, qui est actuellement en cours, de textes surinterprétés, les mathématiciens sont prompts à distinguer entre concepts abusivement identifiés. Si écrire sur la perspective, c'est écrire entre les disciplines (Elkins 1994, p.262) ou sur le fil du rasoir disciplinaire, les mathématiques serviront de garde-fou.

Bibliographie succincte

Alpers, Svetlana, *L'art de dépeindre. La peinture hollandaise au* XVII^e *siècle*, Gallimard, Paris 1990

Andersen, Kirsti, « Desargues' Method of Perspective », *Centaurus* 34, 1991, p.44-91

Bessot, Didier ; Hellegouarc'h, Yves ; Le Goff, Jean-Pierre, sous la dir. de, *Destin de l'art. Desseins de la science*, ADERHEM, Caen 1991

Comar, Philippe, *La perspective en jeu. Les dessous de l'image*, Découvertes Gallimard, Paris 1992

Damisch, Hubert, *L'origine de la perspective*, Flammarion, Paris 1987

Dhombres, Jean ; Sakarovitch, Joël, sous la dir. de, *Desargues en son temps*, Libr. A. Blanchard, Paris 1994

Elkins, James, *The Poetics of Perspective*, Cornell University Press, Ithaca and London 1994

Federici Vescovini, G., « Le questioni di 'perspectiva' di Biagio Pelacani da Parma », *Rinascimento, 2e série*,1, 1961, p.163-243

FIELD, J. V. ; GRAY, Jeremy J., *The geometrical work of Girard Desargues*, Springer Verlag, New York 1987

FIELD, J. V., *The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford University Press, Oxford 1997

FLOCON, Albert ; TATON René, *La perspective*, Que sais-je ?, PUF, Paris 1963

HAMOU, Philippe, *La vision perspective (1435-1740)*, Petite Bibliothèque Payot, Paris 1995

HAVELANGE, Carl, *De l'œil et du monde*, Fayard, Paris 1998

HOGENDIJK, Jan P., « Desargues' *Brouillon Project* and the Conics of Apollonius », *Centaurus* 34, 1991, p.1-43

KEMP, Martin, *The Science of Art : Optical Themes in Western Art from Brunelleschi to Seurat*, Yale University Press, New Haven 1990

LAMBERT, Jean-Henri, *Notes et additions (1774) à la perspective affranchie de l'embarras du plan géométral (1759)*, trad. par Jeanne Peiffer *in* Roger Laurent, *La place de J.-H. Lambert (1728-1777) dans l'histoire de la perspective*, CEDIC/Nathan, Paris 1987

LINDBERG, David C., *Theories of Vision from al-Kindi to Kepler*, University of Chicago Press, Chicago 1976

PANOFSKY, Erwin, *La perspective comme forme symbolique*, précédé de Dalai Emiliani, Marisa, « La question de la perspective », Les éditions de minuit, Paris 1975

PEIFFER, Jeanne, éd. Albrecht Dürer, *Géométrie*, Seuil, Paris 1995

RASHED, Roshdi, *Optique et mathématiques. Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Aldershot, Variorum 1992

RAYNAUD, Dominique, *L'hypothèse d'Oxford. Essai sur les origines de la perspective*, PUF, Paris 1998

SIMON, Gérard, *Le regard, l'être et l'apparence*, Des Travaux/Seuil, Paris 1988

ENSEIGNEMENT

POURQUOI MODIFIER LA STRUCTURE ET LES CONTENUS DE PROGRAMME DE L'AGRÉGATION EXTERNE DE MATHÉMATIQUES ?

Claudine RUGET
Présidente du Jury de l'agrégation externe de mathématiques

Les modifications apportées au programme et à l'organisation des épreuves de l'agrégation externe de mathématiques ont suscité des réactions vives à la fois chez certains universitaires et chez les professeurs chargés des préparations. Les protestations ont été diverses et souvent contradictoires. On comprend l'émotion bien légitime des personnes chargées de la préparation qui voyaient le contexte de leur travail modifié, qui devaient réfléchir à une nouvelle distribution des enseignements (parfois élargis quand certaines options n'étaient pas offertes précédemment) et s'inquiéter d'équipements informatiques alors qu'elles avaient pu parfois négliger ce point jusque là. Mais que la recherche d'une meilleure adéquation aux objectifs de l'enseignement, en particulier une approche plus riche des applications des mathématiques, soient passée inaperçue dans certains milieux universitaires est plus difficile à comprendre.

La nécessité de modifier une organisation bien familière, dans laquelle chacun a sa place et ses attributions, qui est plus ou moins bien articulée avec les enseignements respectifs des différentes universités ne se fait pas sentir en un jour. C'est le résultat de réflexions qui mûrissent au fil des sessions, et qui sont alimentées par les observations de terrain. Je m'exprime ici à la fois comme présidente du jury et membre de ce jury pendant plusieurs années, et comme inspecteur général.

Comme le relève l'argumentaire qui a été fourni au Ministère en janvier 1998 et à la SMF en juin 1998 l'épreuve à options ne correspond plus aux objectifs qui lui ont été fixés initialement, et simultanément les exposés des leçons laissent de plus en plus apparaître de graves insuffisances en ce qui concerne les illustrations et les applications (y compris en mathématiques). Ajoutons que les observations de terrain montrent bien que les pratiques ne se modifient pas au cours des années d'exercice, et que les élèves ne bénéficient pas plus que les membres du jury d'exemples éclairants, d'illustrations pertinentes et d'applications significatives. Enfin, des parties importantes des programmes des lycées et des premiers cycles ne font pas partie du bagage de certains agrégatifs, en raison de mauvais choix de leur part ou de lacunes dans les enseignements proposés par les préparations (par exemple à Poitiers ou à Nantes en ce qui concerne les probabilités, et dans d'autres centres pour les options informatique et mécanique).

Il faut une fois de plus rappeler que l'agrégation est d'abord un concours de recrutement d'enseignants. Si parmi les étudiants qui préparent le concours de l'agrégation un grand nombre suivent ou suivront des cours de DEA et si certains d'entre eux s'engageront peut-être dans un travail de recherche, les agrégatifs ne représentent cependant pas uniquement un vivier de thésards et le concours n'est pas organisé dans cette perspective. Il faut d'ailleurs remarquer que l'université, actuellement majoritairement opposée au recrutement d'agrégés en mathématiques, recherche cependant de préférence des thésards agrégés pour assurer l'enseignement dans les premiers cycles par exemple. Aujourd'hui, les exigences à prendre en compte comprennent les suivantes :

— le professeur agrégé doit connaître et être capable d'enseigner les contenus des programmes de mathématiques en vigueur au lycée et dans les classes post baccalauréat telles les classes de BTS et les classes préparatoires. Ainsi, il n'est plus possible que le professeur agrégé n'ait reçu aucun enseignement concernant les probabilités et le calcul formel, puisque les premières ont été introduites dans les programmes du lycée il y a déjà quelques années, et que l'utilisation avancée des logiciels de calcul formel est au programme du tronc commun de toutes les classes préparatoires scientifiques.

— le professeur agrégé doit non seulement maîtriser les notions mathématiques au programme des classes qu'il peut avoir en charge, mais aussi connaître leurs interventions dans les différents domaines des mathématiques et dans les sciences voisines. En particulier, on attend de lui autre chose qu'un exposé d'énoncés et de démonstrations de théorèmes bien enchaînés. Il est indispensable que son enseignement soit nourri d'exemples et d'applications, pour donner de l'épaisseur, de la chair et de l'intérêt à ce qu'il enseigne. Le professeur agrégé doit participer à la collaboration interdisciplinaire, même modestement.

La modification du concours de l'agrégation essaie de tenir compte de ces exigences. La définition de thèmes annuels limitant le champ des applications est destinée à faciliter la recherche de documentation d'une part, et à éviter autant que faire se peut le bachotage et les exposés convenus à l'avenir.

En résumé, les principaux apports de la réforme sont les suivants :

— Création d'une épreuve de modélisation à l'oral qui devrait entraîner peu à peu une modification des enseignements, aussi bien pendant la formation des futurs professeurs que plus tard dans leur pratique professionnelle. En particulier, l'étude critique d'un texte scientifique relatif à une modélisation incitera les nouveaux professeurs à la pratique de la lecture de documents scientifiques en vue d'enrichir leur enseignement. Ils participeront du même coup, même modestement, au rapprochement et à la collaboration interdisciplinaire.

— Nécessité pour tous les candidats de subir une première exposition à la théorie des probabilités (deuxième épreuve d'écrit et tronc commun de la troisième épreuve d'oral).

— Nécessité pour tous les candidats d'être familiarisés avec un logiciel de calcul formel et un logiciel de calcul numérique ; valorisation des illustrations sur machine (tronc commun de la troisième épreuve d'oral).

— Réduction à deux du nombre d'options de la nouvelle épreuve d'oral. Chaque candidat devra ainsi posséder un spectre plus large de connaissances : par exemple, les candidats ayant choisi l'option probabilités ne pourront plus se contenter des aspects théoriques, mais devront connaître les méthodes et applications de la statistique ; de la même façon, les candidats ayant choisi l'option calcul scientifique devront conjuguer leurs connaissances en analyse numérique avec par une plus grande maîtrise du calcul formel.

— Poids plus important accordé à l'oral : le cas extrême de candidats reçus dès l'écrit et dont les résultats à l'oral sont catastrophiques ne pourra quasiment plus se présenter.

Les épreuves ainsi conçues répondent mieux aux exigences de l'enseignement au lycée et dans les premiers cycles de l'enseignement supérieur. La formation initiale des candidats est maintenant adéquate aux programmes et aux objectifs de formation qui leur correspondent. Simultanément, la culture générale des candidats est augmentée par les contenus du tronc commun de la troisième épreuve d'oral, et la réduction du nombre d'options.

Remarque : Pour la session de 1999, des dispositions exceptionnelles sont prévues pour assurer la transition. Les énoncés des sujets ont été diffusés à l'ensemble des responsables des préparations, ainsi que des exemples de textes, et une bibliographie. Ces informations sont consultables sur le serveur de la SMF. De plus, dès que possible (courant septembre sans doute), une machine de référence (c'est-à-dire une machine du modèle unique de celles qui seront disponibles dans les salles de préparation et les salles de jury) sera consultable sur le Web afin que la configuration et les logiciels au programme soient accessibles à tous. Pour apaiser les craintes qui pourraient subsister, les illustrations à l'aide de l'ordinateur ne sont pas obligatoires pour cette session mais seulement « appréciées ».

RÉFORMER INTELLIGEMMENT OUI ! BRADER NON !

Georges VIDIANI
Professeur de mathématiques spéciales MP1 Lycée Carnot à Dijon

---

Publiées au B.O. du 18 juin 1998, *les nouvelles modalités du concours externe d'Agrégation de Mathématiques sont les suivantes :*

(1) Deux épreuves écrites de six heures (Analyse, Algèbre et Géométrie), au lieu de trois et donc disparition de l'épreuve à option.

(2) Trois épreuves orales, et non plus deux, trois heures de préparation pour les deux premières, quatre heures pour la troisième. Pour la troisième épreuve les candidats ont le choix entre deux options : informatique et analyse numérique ou probabilités. Ils devront de plus savoir se servir de deux logiciels de calcul. En plus d'un tronc commun aux deux options et de parties spécifiques à chacune, figurent au programme quatre thèmes. Les deux autres épreuves orales restent les mêmes.

Ces modifications appellent des remarques et des critiques, sur la forme et le fond.

Sur la forme tout d'abord. Rendues publiques en juin 1998, sans que rien ait été annoncé avant — et semble-t-il sans que les membres du jury aient été consultés — ces dispositions doivent s'appliquer dès le concours 1999. Elles pénalisent donc gravement tous les candidats qui ont orienté leurs études de maîtrise dans une mauvaise direction. Par exemple, il paraît maintenant impossible de réussir sans avoir étudié de façon approfondie le calcul des probabilités. Au contraire, des connaissances de mécanique sont désormais inutiles, alors qu'il était auparavant possible de choisir à l'écrit l'option mécanique. Nul ne peut nier que l'Agrégation de Mathématiques se prépare pendant l'année de Licence et surtout l'année de Maîtrise. Un report de deux ans ne serait qu'une mesure d'équité.

Sur le fond ensuite :

On peut tout d'abord regretter la disparition de la troisième épreuve écrite (épreuve à option). Deux épreuves seulement, c'est bien peu pour décider de l'admissibilité. Et l'épreuve orale qui la remplace ne permettra évidemment pas de juger aussi bien la solidité des connaissances. *(Ainsi qu'on le verra plus loin, les modalités de la troisième épreuve risquent de rendre difficile l'évaluation correcte de la valeur des candidats).*

Cette nouvelle épreuve orale présente deux nouvautés, et de taille : l'usage de logiciels de calculs et la présence des thèmes. Chacune appelle plusieurs commentaires.

(1) L'usage des logiciels Maple (version étudiant) et Matlab (version étudiant) ou Scilab

Ces logiciels ont été choisis en raison de leur faible coût (environ 500 francs chacun). On peut tout de même se demander sur quelles machines ils devront « tourner ». Surement pas sur celles des universités, sous équipées, mais bien évidemment (et le choix des versions étudiant le montre) sur les machines des candidats. Et là, impossible de s'en sortir à moins de 8000 francs...

Un autre aspect paraît très critiquable : le temps de la préparation de cette épreuve. Quiconque a un jour mis au point ne serait-ce que quelques dizaines de lignes de programmes avec l'un ou l'autre de ces logiciels sait le temps que cela demande. Ils utilisent en effet un langage évolué, complexe et riche de centaines de procédures. Dans ces conditions il semble difficile de mettre au point en quatre heures un exposé de qualité. Il faudrait un temps de préparation au d'au moins six heures. Sinon on peut craindre que les leçons soient toutes assez pauvres et qu'on en vienne à juger la forme — et l'usage de l'outil informatique y invite — plutôt que le fond, ce qui serait grave.

(2) La présence des thèmes

C'est certainement la disposition la plus novatrice et l'absence de commentaires la concernant est inadmissible. On ignore en effet :

— s'ils sont communs aux deux options

— s'ils sont valables pour un an seulement

— les ouvrages s'y rapportant dont les candidats disposeront

— l'intitulé des leçons qui seront proposées

(rappelons que chaque rapport de concours contient, en plus des commentaires du jury et de la liste des ouvrage à la disposition des candidats, la liste des leçons posées l'année précédente et qu'elle change peu d'une année à l'autre).

Au delà de ces interrogations matérielles, la présence de ces thèmes pose d'autres problèmes, autrement plus graves.

Tout d'abord, quel sens donner aux quelques mots qui les définissent ? En effet les thèmes ont été choisis hors du domaine commun des mathématiciens. Ce sont des questions de spécialistes et, pour le dire brutalement, elles sont étrangères aux préoccupations de 99% des enseignants du secondaire et du supérieur. Par exemple, qui, à part un certain nombre de chercheurs travaillant principalement à l'INED sait ce qu'est la « dynamique des populations » ? En l'absence d'une bibliographie de référence, qui baliserait la question et indiquerait le sens donné par le jury à ces trois mots, comment faire ? Doit-on considérer l'aspect « système dynamique » ? l'aspect « statistique » ? les deux ? l'un ou l'autre suivant l'option présentée ?

Comment d'autre part préparer l'épreuve ? Pour le candidat isolé, c'est évidemment impossible. Mais aussi comment trouver dans chaque université proposant une préparation, les spécialistes capables de l'assurer ? (et désireux de faire ce travail au tarif actuel des heures supplémentaires...). Ce devrait être possible de la faire dans les plus grands centres. Mais ailleurs ? On peut ainsi s'attendre à voir disparaître un certain nombre de préparations au profit d'autres.

On peut même craindre que les difficultés rencontrées par les universités soient aussi celle du jury... En effet, en toute logique, le nombre d'interrogateurs devra augmenter de moitié et chaque nouvel interrogateur devra être — c'est la moindre des choses — spécialiste d'un thème au moins et faire l'effort non négligeable de comprendre de quoi retournent les trois autres.

À chaque interrogation doivent être présents quatre interrogateurs représentant chacun l'un des thèmes, et cela tous les jours. On n'ose en effet imaginer que les sujets proposés soient triés en fonction des disponibilités de tel ou tel. Et l'année d'après que fait-on ? Le programme ayant changé, le spécialiste est redevenu un honnête homme, qui ne remplit donc plus les conditions énoncées plus haut pour faire partie du jury...

L'argument peut paraître dérisoire et on objectera que le programme entier de certaines agrégations change chaque année sans qu'on renouvelle les jurys en totalité. C'est là méconnaître un fait fondamental : ce qui fait la qualité d'un mathématicien, ce n'est pas d'être capable de tenir cinquante minutes devant un auditoire cultivé, c'est de maîtriser la question *dans le détail* et de cela seul un spécialiste peut juger. En son absence, une leçon pourra paraître correcte alors qu'elle renferme une contradiction grave mais subtile, qui aura échappé au jury.

On peut enfin remarquer (c'est une constatation) que les nouvelles dipositions augmentent de façon importante l'étendue du programme. La mécanique a effectivement disparu, mais les trois autres options de l'écrit ont été ramenées à deux sans beaucoup de suppressions et on a rajouté l'utilisation de logiciels ainsi que la partie variable (les thèmes). Va-t-on vers une diminution du nombre des places (en utilisant le processus bien connu : le niveau baisse, on n'attribue pas toutes les places mises au concours, et l'année suivante...) ?

NÉCROLOGIE

HAMID GUIDOUCHE (1944-1998)

Hamid Guidouche

Hamid Ghidouche est décédé d'un cancer le mardi 16 juin à l'âge de 54 ans. Il était le fils aîné d'une famille de paysans de Kabylie. Il suit des études secondaires à Bougie (Bejaïa) et les hasards de la guerre d'indépendance de l'Algérie l'amènent un moment à Grenoble. Plus tard il fait des études supérieures à Alger et c'est là que C. Bardos, coopérant en Algérie, le convainc de venir travailler en France. Il arrive à Paris en 1969 et passe son DEA puis sa thèse de troisième cycle, en collaboration avec N. Point, sous la direction de C. Bardos et S. Ukaï. Docteur d'état il a contribué en particulier à l'analyse numérique et au calcul scientifique de problèmes de changement de phase dans les milieux poreux avec applications à la mécanique des sols. Sa collaboration avec M. Frémond et le LCPC a été durable et fructueuse. Travaillant à l'université Paris XIII dès la création de celle-ci, il y deviendra Maître de Conférences Hors Classe. Hamid Ghidouche a joué à Paris XIII un rôle fondamental dans le développement et l'animation des enseignements d'analyse numérique et de calcul scientifique, d'abord dans la MST puis dans le diplôme d'ingénieur MACS. Toujours disponible pour un conseil ou un service, il était très apprécié des étudiants et de tous ses collègues. Son courage et sa lucidité face à sa maladie forcent notre admiration. Toute notre sympathie va à son épouse Danielle et à ses enfants Gaël et Maïwenn.

Claude Basdevant

ROBERT FORTET (1912-1998)

Robert Fortet est né le premier mai 1912 à Boulazac en Dordogne. Après des études au Prytanée militaire de la Flèche, il entre en octobre 1931 à l'École normale supérieure. Il est agrégé de mathématiques en août 1934. Boursier de recherche, il entreprend une thèse de mathématiques sous la direction de Maurice Fréchet (1878-1973). Ce dernier développe alors à Paris ce qui deviendra la théorie des processus de Markov et qui, en 1934, n'est vraiment complète que pour les chaînes à nombre fini d'états traitées par des méthodes d'algèbre linéaire. Fréchet propose à Fortet d'étudier le cas des chaînes dénombrables en utilisant la théorie des systèmes linéaires à une infinité d'inconnues. On sait que cette approche n'est pas bien adaptée au problème dont il s'agit qui sera bientôt traité par Doeblin et Kolmogorov à l'aide d'arguments probabilistes particulièrement simples et élégants. Toutefois Fortet est le premier à énoncer dans ce cas particulier une condition simple de régularité dont Doeblin montrera la généralité et qui porte son nom. Le cas des chaînes dénombrables introduit naturellement aux processus à valeurs dans des domaines non bornés dont l'étude est à peine commencée. Il s'agit d'étudier le comportement des itérés d'un opérateur (défini sur un espace de Banach convenable) qui n'est généralement pas compact (déjà dans le cas des chaînes dénombrables). On peut alors envisager d'utiliser une généralisation adéquate

Robert Fortet

de la théorie spectrale des opérateurs compacts de F. Riesz ; c'est la partie de la thèse de Fortet la plus riche. Fortet étend la théorie classique au cas des opérateurs quasi-compacts de Krylov et Bogolyubov. En collaboration avec W. Doeblin qui est en train d'édifier une théorie générale des chaînes par des méthodes probabilistes, Fortet en déduit en 1937 un théorème ergodique remarquable qui sera retrouvé indépendamment un peu plus tard par Yosida et Kakutani et qui porte leurs noms. Toujours en collaboration avec Doeblin, Fortet utilise sa méthode spectrale pour aborder l'étude de certaines chaînes à liaisons complètes dont les opérateurs associés sont quasi-compacts ; là encore, le théorème ergodique obtenu par Doeblin et Fortet est important.

Après sa thèse soutenue en mars 1939, Fortet supplée Darmois à la Faculté des sciences de Paris et est chargé d'un cours de mécanique à Caen (en remplacement de Zoretti) où il sera nommé professeur en 1946. En 1941, Fortet s'intéresse activement à la théorie des diffusions. Cette théorie, très ancienne, n'est jusqu'alors qu'un chapitre de la théorie des équations aux dérivées partielles. On en sait les liens avec le calcul des probabilités depuis les travaux probabilistes de Bachelier (1906) et ceux plus analytiques de Kolmogorov (1931) et Feller (1936) sans que l'approche probabiliste n'ait véritablement fait progresser la théorie. Fortet obtient par des méthodes probabilistes (principe de réflexion, loi du logarithme itéré...) un théorème d'existence plus général que ceux obtenus par les méthodes purement analytiques. Son article de 1943 rassemblant ses résultats sur ce sujet fera date.

A la Libération Fortet supervise la thèse de Blanc-Lapierre sur les fonctions aléatoires du second ordre intervenant en théorie du signal. Il commence la publication de travaux sur l'analyse spectrale des processus du second ordre, théorie initiée indépendamment par de nombreux auteurs pendant la guerre (Cramér, Loève, Doob...) et dont Blanc-Lapierre et Fortet donnent une interprétation physique intéressante (la méthode des filtres) que Fortet aimait à rapprocher de la théorie des distributions qui lui est contemporaine. L'ensemble de ces travaux est exposé dans un livre publié en 1953 et notamment traduit en russe. Toute sa vie il continuera à cultiver la théorie des processus du second ordre ; les éditions Hermès viennent de publier son cours de troisième cycle sur le même sujet.

C'est également au début des années cinquante que Fortet dirige la thèse d'Édith Mourier sur la généralisation des théorèmes classiques du calcul des probabilités, lois des grands nombres, théorème central limite, aux suites de variables aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach. Fortet et Mourier montrent notamment le rôle fondamental joué par la transformée de Fourier dans ces questions qui ont connu un grand développement et dont ils sont après Fréchet les pionniers. C'est pendant les années de l'immédiat après-guerre que Fortet commence à s'intéresser aux applications de la théorie des processus stochastiques aux sciences de l'ingénieur qui se développent de façon remarquable partout dans le monde. Il est l'un des très rares universitaires français à pouvoir en suivre les développements et à jouir de la reconnaissance internationale nécessaire. Il sera conférencier invité aux trois premiers Symposiums de Berkeley (1950, 1955, 1960), rassemblement mondial des meilleurs spécialistes de probabilité théorique et appliquée du moment. C'est tout naturellement qu'il est appelé à la Faculté des sciences de Paris en 1952. Il est nommé titulaire de la chaire de calcul des probabilités et physique mathématique en 1960 en remplacement de Darmois. Il crée alors l'une des toute premières équipes de mathématique associées au CNRS qu'il dirigera pendant vingt ans. Après la suppression des chaires en 1968, Fortet sera jusqu'à sa retraite en 1980, directeur du Laboratoire de probabilités de Jussieu dont il a lui-même suscité la création en juin 1968 avec beaucoup d'intelligence et d'humour. Pendant toute cette période, Fortet, dont la culture théorique et appliquée est considérable, est appelé à intervenir dans tous les projets scientifiques français où la théorie moderne des probabilités joue un rôle. Il y fera preuve d'une grande habileté politique et de qualités humaines rares dont ses nombreux élèves et tous ceux qui l'ont approché et aimé peuvent témoigner.

Robert Fortet a été élu correspondant de l'Académie des sciences en 1973. Il était depuis 1951 professeur à l'École de physique et chimie industrielles de la Ville de Paris.

Engagé dans d'innombrables opérations de promotion et d'enseignement du calcul des probabilités et de ses applications, Fortet se trouve ainsi être le successeur naturel d'Émile Borel qui avait entrepris de faire de Paris un centre international des applications du calcul des probabilités. Après la mort de Borel en 1956, à un moment où les applications des mathématiques ne sont plus particulièrement encouragées à l'université, Robert Fortet a su maintenir vivante l'École probabiliste française dont on s'accorde à reconnaître généralement qu'elle a été et qu'elle demeure l'une des meilleures au monde et de cela en particulier la communauté mathématique française lui est redevable.

Robert Fortet est mort à Paris le 3 juillet 1998.

Bernard Bru, Jacques Neveu

ANDRÉ WEIL (1906-1998)

André Weil
©Sugaku Seminar

André Weil est décédé le 6 août 1998 à Princeton, à l'âge de 92 ans. Il était le frère aîné de la philosophe Simone Weil, morte en Angleterre en 1943. Né à Paris le 6 mai 1906, il entre à l'Ecole normale supérieure à l'âge de 16 ans. A sa sortie de l'Ecole, il fait de longs séjours dans des centres mathématiques européens parmi les plus actifs de l'époque (Rome, Göttingen, Berlin). Il soutient sa thèse en 1928. Son intérêt pour la civilisation indienne l'amène à accepter un poste à l'université d'Aligarh, près de Delhi, en 1930. De retour en France, il est nommé chargé de cours à Marseille puis professeur à Strasbourg, où il enseigne de 1933 à 1939. Il se trouve à Helsinki lorsque la guerre éclate. Arrêté par la police finlandaise, qui le prend pour un espion soviétique, il manque de peu d'être fusillé. Reconduit en France, il est emprisonné à Rouen et condamné pour insoumission. Il est libéré en mai 1940, incorporé à Cherbourg, et envoyé en Angleterre. Il parvient à regagner la France et émigre aux états-Unis en janvier 1941. Il y bénéficie de diverses bourses. De 1945 à 1947 il enseigne à Sao Paulo, puis obtient une chaire à Chicago, qu'il quitte en 1958 pour l'Institute for Advanced Study de Princeton. Il y prend sa retraite en 1976, mais continuera d'y travailler comme professeur honoraire. Le prix Wolf lui avait été décerné en 1979 et le Kyoto Prize en 1994.

Avec Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, Szolem Mandelbrojt et René de Possel, André Weil était l'un des fondateurs du groupe Bourbaki. Il y collabora jusqu'en 1956, s'appliquant à lui-même la règle de la retraite à cinquante ans qu'il avait fait adopter par le groupe.

Son œuvre a eu une influence considérable sur le développement de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres des cinquante dernières années.

En 1940 et 1941, il établit pour les courbes de genre arbitraire l'hypothèse de Riemann sur les corps finis formulée par E. Artin en 1924 et prouvée par Hasse pour les courbes elliptiques en 1933. La démonstration qu'il esquisse alors (et qu'il rédigera complètement plus tard dans ses livres *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*[1] et *Courbes algébriques et variétés abéliennes*[2]) reposait sur un lemme de positivité de trace, dont la mise au point est à l'origine de ses travaux de la fin des années 40 sur la théorie des variétés abéliennes, et la géométrie algébrique en général. C'est ainsi qu'il fut amené à construire dans *Foundations of Algebraic Geometry*[3], une théorie des variétés algébriques « abstraites » sur des corps quelconques, où il donne en particulier les bases requises à la théorie des intersections. En 1949, il formule des conjectures (« les conjectures de Weil ») sur la fonction zêta des variétés algébriques sur les corps finis (rationalité, équation fonctionnelle, interprétation cohomologique, et généralisation de l'hypothèse de Riemann pour les courbes), et les démontre dans le cas des hypersurfaces monomiales. Ces conjectures fascinèrent les géomètres algébristes dans les vingt-cinq années qui suivirent. Elles furent l'une des principales motivations de Grothendieck pour ses travaux des années 60, notamment la construction de la cohomologie étale. La rationalité fut d'abord établie par Dwork en 1960, par des méthodes p-adiques. En 1965, Grothendieck, au moyen de la cohomologie étale, en démontra une généralisation et donna l'équation fonctionnelle et l'interprétation cohomologique espérée par Weil. Enfin Deligne, en 1973, prouva la dernière de ces conjectures, sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius.

Dans sa thèse, généralisant un résultat de Mordell pour les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, Weil avait démontré, pour les jacobiennes de courbes quelconques sur un corps de nombres, que le groupe des points rationnels (« le groupe de Mordell-Weil ») est de type fini. Les variétés abéliennes, qui apparaissaient là pour la première fois dans son œuvre, devaient être pour lui une source d'inspiration constante, à travers, plus généralement, les problèmes arithmético-géométriques liés aux motifs abéliens. C'est à ce courant d'idées que l'on peut rattacher ses travaux sur les caractères de Hecke associés aux variétés monomiales et aux sommes de Jacobi, sur

[1] *Œuvres Scientifiques/Collected Papers*, Springer-Verlag, 1980, Tome I, II & III, [1948 a].

[2] Ibidem, [1948 b].

[3] Ibidem, [1946 a].

le corps de classes (construction des « groupes de Weil » des corps locaux et globaux), ainsi que ceux, généralisés par Shimura et Taniyama, sur les fonctions zêta de certaines variétés abéliennes à multiplication complexe. Il reviendra sur l'histoire de ce sujet dans son très vivant exposé Bourbaki *La cyclotomie jadis et naguère*[4] et son livre *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*[5].

On doit également à Weil des résultats profonds et novateurs sur les groupes arithmétiques. En 1958, motivé par un problème de Selberg, il étudie le module des déformations d'un sous-groupe discret d'un groupe de Lie semi-simple. Dans le cas cocompact, il résout complètement le problème, prouvant en particulier la rigidité infinitésimale si le groupe n'a pas de facteur SL_2. Quelques années plus tard, inspiré par des résultats de Siegel sur les formes quadratiques, il étudie les volumes des domaines fondamentaux pour les groupes arithmétiques. Suivant une idée de Tamagawa, il en donne un traitement systématique à l'aide de groupes adéliques dans *Adèles and Algebraic groups*[6]. Ce travail le conduit à écrire son article *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*[7], où il définit le groupe métaplectique.

En 1967, dans un article dédié à Hecke, *Über die Bestimmung der Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*[8], Weil prouve qu'une série de Dirichlet dont les « tordues » par suffisamment de caractères possèdent des équations fonctionnelles du type de Hecke est la transformée de Mellin d'une forme modulaire. Un résultat spectaculaire, qui fut ensuite généralisé par lui-même et par Jacquet-Langlands, et dont on peut considérer qu'il est à l'origine des « théorèmes réciproques » pour les formes automorphes. A la fin de son article, Weil observe que son théorème suggère la possibilité que toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ provienne d'une forme modulaire, de niveau égal au conducteur de la courbe. C'est cette conjecture, connue maintenant sous le nom de conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, qui, dans le cas semi-stable, fut démontrée par Wiles en 1995 (et, comme on sait, implique le dernier théorème de Fermat).

Weil a aussi apporté des contributions importantes à la géométrie différentielle (démonstration faisceautique du théorème de de Rham, « métrique de Weil » sur l'espace des modules des courbes) et à la théorie analytique des nombres (formules « explicites » pour la somme des valeurs

[4]Ibidem, [1974 c].
[5]Ibidem, [1976 a].
[6]Ibidem, [1961, a]
[7]Ibidem, [1964 b].
[8]Ibidem, [1967 a].

d'une fonction aux zéros situés dans la bande critique de la fonction zêta d'un corps de nombres).

Citons encore ses monographies classiques *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*[9], présentant une théorie générale de la dualité pour les groupes abéliens localement compacts, *Introduction aux Variétés kählériennes*[10], premier exposé systématique moderne de la théorie de Hodge, et *Basic Number Theory*[11], où il traite, d'un point de vue adélique, la théorie des fonctions zêta et la théorie du corps de classes de manière uniforme pour les corps de nombres et les corps de fonctions. On consultera également avec profit, dans ses *Œuvres scientifiques*[12], les notes qu'il a rédigées sur ses articles et ses commentaires sur la création mathématique.

Dans ses dernières années d'activité, Weil s'est beaucoup intéressé à l'histoire des mathématiques, écrivant notamment le très beau livre *Number Theory : An Approach through History from Hammurapi to Legendre*[13]. Enfin, dans *Souvenirs d'apprentissage*[14], il évoque de façon émouvante sa jeunesse de mathématicien, jusqu'à son installation aux Etats-Unis.

Nous remercions vivement Henri Cartan et Jean-Pierre Serre de leur aide pour la rédaction de cette notice

Laurent Clozel & Luc Illusie

[9]Ibidem, [1940 d].
[10]Ibidem, [1958 a].
[11]Ibidem, [1967 c].
[12]*Œuvres Scientifiques/Collected Papers*, Springer-Verlag, 1980, Tome I, II & III.
[13]Birkhäuser, Boston, 1984.
[14]Birkhäuser, Boston, 1984.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

Les prestigieuses médailles Fields ainsi que le prix Nevanlinna ont été décernés au Congrès International des Mathématiciens qui s'est tenu à Berlin du 18 août 1998 au 27 août 1998.

Les récipiendaires de la médaille Fields sont :

⋆ ***Richard E. BORCHERDS*** *(Cambridge University, England) pour sa contribution à l'étude des algèbres de Kac-Moody et des formes automorphes.*

⋆ ***W. Timothy GOWERS*** *(Cambridge University, England) pour ses travaux sur la théorie des espaces de Banach et la combinatoire.*

⋆ ***Maxim KONTSEVICH*** *(I.H.E.S. Bures-sur-Yvette, France) pour ses apports à la physique mathématiques, la géométrie algébrique et la topologie.*

⋆ ***Curtis T. McMULLEN*** *(Harvard University, U.S.A.) pour ses travaux en dynamique complexe et en géométrie hyperbolique.*

Le prix Nevanlinna a été attribué à :

⋆ ***Peter W. SHOR*** *(AT&T Labs Florham Park, New Jersey, U.S.A.) pour sa contribution au calcul quantique et à la géométrie algorithmique.*

Le comité de rédaction de la Gazette de la Société Mathématique de France a souhaité publier dans ce numéro ainsi que dans les suivants des textes courts décrivant, de manière nécessairement succincte, les travaux qui ont valus aux personnes ci-dessus les prix Fields et Nevanlinna.

Le premier de ces textes concerne les résultats obtenus par R. E. Borcherds. Ils sont décrits par Urmie Ray, Research Fellow à l'université de Cambridge, qui est actuellement Maître de conférences associée à l'université de Strasbourg.

LE MONSTRE AU CLAIR DE LUNE
SUR LES TRAVAUX DE R. BORCHERDS

Urmie RAY
Université de Strasbourg

Une des quatre prestigieuses médailles Fields a été décernée en 1988 à Richard E. Borcherds pour ses travaux en « algèbre et géométrie, en particulier pour sa démonstration de la conjecture dite de Moonshine ». Mathématicien britannique d'une extraordinaire originalité, il est Professeur de la Royal Society à l'université de Cambridge depuis 1996, où il a fait ses études, Fellow de la Royal Society, et Professeur à l'université de Berkeley depuis 1993. Il a ouvert le nouveau domaine des algèbres de vertex et en a déduit la construction des algèbres de Kac-Moody généralisées, appelées également algèbres de Borcherds. La portée de ces idées, basées entre autres sur une application remarquable de concepts de la théorie des cordes (de la physique théorique), est montrée par sa démonstration très élégante de la conjecture Moonshine (i.e. « clair de lune ») de Conway et Norton. Cette conjecture révèle la surprenante connexion entre deux domaines très différents (d'où le nom « Moonshine »), celle des groupes simples sporadiques, en particulier du Monstre, et celle des fonctions modulaires elliptiques.

Avant d'énoncer cette conjecture, il est nécessaire de donner un aperçu du « Monstre », des groupes finis simples, des représentations des groupes et des fonctions modulaires elliptiques.

Le *Monstre* [C], appelé aussi « Géant Amical » est le groupe fini simple sporadique le plus grand avec

$$2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71$$

(environ 8×10^{53}) éléments, ce qui représente à peu près le nombre d'atomes composant la Terre. Un *groupe* est un ensemble d'éléments avec une loi de composition satisfaisant certains axiomes et peut décrire les symétries d'une structure géométique [Bu]. Il est aisé d'imaginer les rotations d'un cube en dimension 3 et de conclure que son groupe de rotations a 24 éléments. Borcherds a travaillé sur les rotations d'un flocon de neige théorique dans un espace de dimension 196884. En effet le Monstre est le groupe d'automorphismes d'un algèbre dans un espace Euclidien de cette dimension.

Les groupes finis simples[1] [G] sont en quelque sorte les briques de base avec lesquelles sont bâtis les groupes finis. Il est donc naturel d'étudier les groupes finis simples. Dans les années 70, plusieurs mathématiciens, dont J.H. Conway et J.G. Thompson, médaille Fields en 68, ont contribué à leur classification, œuvre de quelques milliers de pages. Il y a trois familles infinies de groupes finis simples (par exemple, celle des groupes cycliques d'ordre premier ($G = \{1, x, ..., x^{p-1}\}$ où p est premier et $x^p = 1$)), et 26 groupes finis simples qui ne font partie d'aucune famille. Ces 26 groupes sont par conséquent appelés *sporadiques*.

Richard E. Borcherds

C'est via leurs représentations [S2] que les groupes sont utiles dans plusieurs autres domaines mathématiques et scientifiques. Revenons à notre groupe G des rotations du cube en dimension 3. Il existe un homomorphisme ρ de G (i.e. pour tout $g, h \in G$, $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$) au groupe $GL(V)$ de toutes les applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel V de dimension 3 (sur le corps des nombres complexes).[2] Pour tout $g \in G$, la trace de $\rho(g)$ est invariante de la base choisie pour écrire la matrice $\rho(g)$. Une représentation est complètement déterminée par la donnée des traces de $\rho(g)$ pour tout $g \in G$. Tout groupe a une représentation triviale de dimension 1 donnée par $\rho(g)v = v$ pour tout $g \in G$, où $V = \mathbf{C}v$.

Il nous reste à donner une idée des fonctions modulaires elliptiques [S3], étroitement liées aux fonctions elliptiques. Un des exemples les plus communs, l'*invariant modulaire* j, est une fonction holomorphe (i.e.

[1] Un groupe G est simple si tout sous-groupe $H \leq G$ tel que $\forall g \in G$, $h \in H$, $g^{-1}hg \in H$, satisfait à $H = 1$ ou $H = G$. Donc pour tout groupe fini G, il existe des sous-groupes G_i $0 \leq i \leq n$ tel que $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = 1$ et $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ est simple pour tout i.

[2] Une représentation ρ d'un groupe G quelconque est un homomorphisme de G dans $GL(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension n. On identifie $GL(V)$ avec le groupe des matrices carrées d'ordre $n$avec déterminant non nul.

analytique complexe) sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{x+iy \in \mathbf{C} | y > 0\}$ invariante sous l'action du groupe modulaire $SL_2(\mathbf{Z})$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telles que $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ et $ad - bc = 1$:

$$j(z) = j(\frac{az+b}{cz+d}) \quad \text{pour tout} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}).$$

En particulier $j(z+1) = j(z)$, $z \in \mathcal{H}$ puisque $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$. On peut donc écrire j comme une fonction de $q = e^{2\pi i z}$ et j est holomorphe dans le disque $|q| < 1$ moins l'origine. A l'origine j a un pôle (i.e. il existe un entier $m > 0$ tel que $\lim_{q \to 0} q^m j(q) \in \mathbf{C} - \{0\}$) et donc a une série de Laurent à l'origine : $j(q) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n q^n$. L'expression exacte de j est :

$$j(q) = \frac{(1 + 240 \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n)^3}{q \prod_{n>0} (1-q^n)^{24}} \quad \text{où} \quad \sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3.$$

On trouve

$$j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + \dots .$$

De plus j est une bijection du quotient $\mathcal{H}/PSL_2(\mathbf{Z})$ (espace où $z_1 = z_2$ si $j(z_1) = j(z_2)$) dans $\mathbf{C}$, et donc de la surface compacte de Riemann $\overline{\mathcal{H}/PSL_2(\mathbf{Z})}$ à la sphère $\mathbf{C} \cup \infty$.

En général une *fonction modulaire elliptique* f est méromorphe sur $\mathcal{H}$ (holomorphe partout sauf en un nombre fini de points, où f a des pôles) invariante sous l'action de sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbf{R})$ contenant la transformation $z \mapsto z+1$, $z \in \mathcal{H}$. La fonction f peut alors être écrite en termes de q, et par définition des fonctions modulaires, f a un pôle à l'origine, et donc une série de Laurent au voisinage de 0. Si la série de la fonction f est du genre $q^{-1} + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$, f est dite *normalisée*. Et si f donne une bijection de $\overline{\mathcal{H}/G}$ avec la sphère $\mathbf{C} \cup \infty$, on dit que G est dite de *genre 0*.

Nous sommes maintenant prêts à donner la conjecture Moonshine. La plus petite représentation V_1 non-triviale du Monstre est de dimension 196883. McKay avait remarqué que l'invariant modulaire j a un coefficient égal à $196883 + 1$, donc à la dimension d'une représentation du Monstre $M : V_1 \oplus V$, où V est la représentation triviale de dimension 1. Puis Thompson a montré que chaque coefficient de $j - 744$ est la dimension d'une représentation V_n du Monstre. Notons que la dimension de V_n est la trace de l'identité du Monstre sur V_n. Que peut-on dire de la trace des autres éléments g du Monstre sur les représentations V_n ? S'appuyant entres autres sur des calculs pour n petit, Conway et Norton ont conjecturé en 1979 que [CN] :

Conjecture Moonshine. *Pour tout élément g du groupe Monstre,*

$$T_g = q^{-1} + \mathrm{trace}(g|V_1)q + \mathrm{trace}(g|V_2)q^2 + \dots$$

est une fonction modulaire elliptique normalisée pour un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{R})$ de genre 0.

Parlons maintenant brièvement des algèbres de vertex et des formules du dénominateur des algèbres de Borcherds qui jouent un rôle crucial dans la démonstration donnée par Borcherds de cette conjecture [Bo1],[Bo2].

La définition des algèbres de vertex est motivée par la construction des algèbres de Lie simples de dimension finie à partir de leur réseau de racines. Les *algèbres de Lie simples* classiques sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre des $n\times n$-matrices, l'opération de Lie $[.,.]$ étant définie par $[A,B] = AB - BA$ [S1]. Prenons par exemple L'algèbre sl_2 de dimension 3 des 2×2 matrices de trace 0, ayant pour base $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $h = [e,f] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors $[h,e] = 2e$ et $[h,f] = -2f$. Donc sl_2 est la somme directe des espaces propres de l'application linéaire $\mathrm{ad}(h)$ définie par $\mathrm{ad}(h)(x) = [h,x]$. Les valeurs propres appartiennent au dual[3] H^* de l'espace vectoriel $H = \mathbf{C}h$ (H est appelée *sous-algèbre de Cartan* de sl_2). Toute valeur propre non nulle est appelée *racine* de sl_2 (il s'agit de $\pm\alpha \in H^*$ avec $\alpha(h) = 2$). Il existe un forme bilinéaire symétrique sur le réseau de racines R (groupe abélien engendré par α), isomorphe à $\mathbf{Z}$. Les racines de sl_2 sont les éléments de R de norme 2. Soit $\hat{R}$ une extension centrale de R par un groupe d'ordre 2. Pour α (resp. $-\alpha$), notons e^α (resp. $e^{-\alpha}$) un élément fixe de $\hat{R}$ correspondant à α (resp. $-\alpha$). Alors sl_2 peut être défini comme le $\mathbf{Z}$-module $R \oplus \sum_{\alpha^2=2} e^\alpha$. Toute algèbre de Lie simple L de dimension finie a une décomposition comme ci-dessus par rapport à une sous-algèbre de Cartan, et on peut redéfinir L de manière analogue. Cette construction donne une base explicite (la base de Tits-Chevalley) pour L.

En 1967, Kac et Moody ont indépendamment défini une nouvelle classe d'algèbres de Lie [K], connues aujourd'hui sous le nom d'algèbres de Kac-Moody qui inclut les algèbres de Lie simples de dimension finie et les algèbres affines (algèbres ayant multiples applications en physique et mathématique). Les *algèbres de Kac-Moody* ont aussi un réseau de racines et une décomposition analogue à sl_2. Une *algèbre de vertex* V généralise la construction ci-dessus pour les algèbres de Kac-Moody. C'est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ identifiable à l'espace de Fock des physiciens qui est défini à partir du réseau de racines d'une algèbre de Kac-Moody,

[3]Le dual d'un'espace vectoriel complexe V est l'espace vectoriel des fonctions linéaires de V dans $\mathbf{C}$.

avec un nombre infini de produits bilinéaires. Il peut être considéré en quelque sorte comme un anneau commutatif avec une action formelle du groupe $\mathbf{C}$, où l'action de $z \in \mathbf{C}$ sur $a \in V$ est l'opérateur $a(z)$, et $a(z)b$ est donné par le produit de $a(z)$ avec b. Borcherds montre que, pour certaines algèbres de vertex V, un certain sous-quotient de V est une algèbre de Lie généralisant le concept d'algèbre de Kac-Moody. Ce sont les algèbres aujourd'hui appelées *algèbres de Borcherds* qui ont aussi un réseau de racines et une décomposition comme pour sl_2. En particulier, il construit l'algèbre de Lie dite du Monstre : $G = \mathbf{R^2} \oplus_{m,n\in\mathbf{Z}} G_{(m,n)}$, où $\mathbf{R^2}$ est la sous-algèbre de Cartan et le réseau de racines est $\mathbf{Z^2}$. L'espace radiciel $G_{(m,n)}$ (espace propre de $\mathbf{R}^2$ correspondant à la racine (m,n)) est une représentation du Monstre isomorphe à V_{mn}.

D'autre part, il existe une classe importante de représentations pour les algèbres de Borcherds qui généralisent la notion de représentations de dimension finie pour les algèbres simples de dimension finie. Il s'agit des représentations de plus haut poids (en général de dimension infinie), qui sont une somme directe d'espaces propres de dimension finie de la sous-algèbre de Cartan. Il existe une formule, démontrée par Borcherds, donnant la dimension de ces espaces pour certaines représentations irréductibles et généralisant la formule de Kac-Weyl. En calculant cette formule de deux façons différentes, on trouve de nouvelles formules intéressantes de fonctions modulaires ou on redécouvre d'anciennes formules. Par exemple, via la représentation triviale, on arrive à la formule du dénominateur dont le terme de gauche est un produit infini et le terme de droite est une série infinie. La formule du dénominateur caractérise les algèbres de Borcherds. Pour l'algèbre du Monstre G, Borcherds a montré qu'elle est :

$$p^{-1} \prod_{m>0,n\in\mathbf{Z}} (1 - p^m q^n)^{c(mn)} = j(p) - j(q),$$

donnant ainsi la formule maintenant célèbre pour l'invariant modulaire j.

Plus récemment Borcherds a prouvé que les formules du dénominateur des algèbres de Borcherds correspondent à des formes automorphes pour un groupe orthogonal $O_{s+2,2}(\mathbf{R})^+$, où $s+2$ est la dimension de la sous-algèbre de Cartan [Bo3] et il a fait un travail remarquable sur les formes automorphes et aussi les surfaces $K3$ (lié aux formes automorphes). Il a ainsi ouvert plusieurs directions de recherches extrêmement intéressantes.

Références

[Bo1] R.E. BORCHERDS, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 83, 3068–3071, 1986

[Bo2] R.E. BORCHERDS, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. math.*, Vol. 109, 405–444, 1992

[Bo3] R.E. BORCHERDS, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbf{R})^+$ and generalized Kac-Moody algebras, *ICM* 1994

[Bu] W. BURNSIDE, The Theory of Groups of Finite Order, C.U.P., Cambridge, 1911

[C] J.H. CONWAY, A simple construction of the Fischer-Griess monster group, *Invent. Math.*, Vol. 79, 513–540, 1985

[CN] J.H. CONWAY, S.P. NORTON, Monstrous Moonshine, *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 11, 308–339, 1979

[G] D. GORENSTEIN, Finite simple groups, An introduction to their classification, The University Series in Mathematics, New York - London : Plenum Press.

[K] V.G. KAC, Infinite dimensional Lie algebras, Third ed., C.U.P., Cambridge 1990

[S1] J-P. SERRE, Algèbres de Lie semi-simples complexes, W.A. Benjamin, Inc, New-York, 1966

[S2] J-P. SERRE, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967

[S3] J-P. SERRE, Cours d'Arithmétique, P.U.F., Paris, 1970

DISCOURS DES PRÉSIDENTS DE LA SMAI ET DE LA SMF[1]

Alain DAMLAMIAN & Mireille MARTIN-DESCHAMPS
président de la SMAI & présidente de la SMF

Monsieur le Ministre Délégué, Mesdames et Messieurs les Présidents, chers collègues,

Nous sommes heureux de vous accueillir à la Maison de France.

Nos sociétés savantes, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, et la Société Mathématique de France, ont souhaité organiser cette réception à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens.

Nous avons bénéficié de l'aide précieuse de l'Ambassade de France, notamment par l'intermédiaire du Conseiller pour la Science et la Technologie, que nous tenons à remercier chaleureusement.

Il y a quatre ans, au congrès de Zürich, deux mathématiciens français, Pierre-Louis Lions et Jean-Christophe Yoccoz, avaient obtenu une médaille Fields, en compagnie de Jean Bourgain, dont on connait les liens avec la France, et Efim Zelmanov. Cette année, les lauréats sont deux anglais, Richard Borcherds et Timothy Gowers, un américain, Curtis McMullen, et un russe résidant en France, Maxim Kontsevich. Nous tenons à les féliciter tous les quatre, sans oublier le récipiendaire du prix Nevanlinna, Peter Shor, américain lui aussi. Ce congrès a été également l'occasion d'apporter une reconnaissance unanime à Andrew Wiles pour l'extraordinaire démonstration qu'il a donnée du fameux dernier théorème de Pierre de Fermat.

Depuis qu'il a quitté l'ancienne Union Soviétique en 1990, Maxim Kontsevich a séjourné dans les plus prestigieux centres de recherche occidentaux, en particulier au Max Planck Institut für Mathematik à Bonn, où il a passé en tout plus de trois années. Nous voulons particulièrememt le remercier d'avoir maintenant choisi de s'installer en France, à l'IHES où il est professeur permanent depuis 1995. Il est la preuve de la capacité que possède la France d'accueillir des mathématiciens étrangers de tout premier plan, et par là-même, de la renommée de l'école mathématique française. Nous nous réjouissons du message de félicitations adressé à Maxim Kontsevich par notre ministre, Claude Allègre.

[1]Discours prononcé à l'occasion de la réception donnée par la SMAI et la SMF à l'ambassade de France le 26 août 1998.

Puisque nous sommes ici les hôtes du ministère des affaires étrangères, nous nous tournons vers ses représentants pour leur demander de poursuivre leur soutien : la France doit continuer à attirer les meilleurs étudiants, les meilleurs post-docs, les meilleurs chercheurs confirmés de par le monde, que ce soit pour qu'ils restent chez nous et y apportent leur contribution, ou, pour la majorité d'entre-eux, afin qu'ils retournent chez eux tout en conservant des contacts privilégiés avec notre pays. Il en va du rayonnement de la France ! Dans cet esprit, nous saluons la décision récente du gouvernement de faciliter l'accueil des chercheurs étrangers en France par la création d'une catégorie de visa scientifique, mais nous ne pouvons que constater que sa mise œuvre n'est pas encore satisfaisante.

La France mathématique se porte plutôt bien, comme le prouve le nombre important de conférenciers à ce congrès qui ont été formés en France ou qui y vivent. Vos succès, Chers Collègues, sont surtout dus à votre travail et à votre talent. Mais ils témoignent aussi de la qualité du système éducatif, des institutions, des laboratoires, bref d'un effort collectif.

Nous avons quelques raisons d'être moins rassurés en ce qui concerne l'avenir : les mathématiques et notamment leur place dans l'enseignement sont sujettes à critiques. Aurons-nous demain les moyens de former dans nos lycées les conférenciers des futurs congrès internationaux ? Un signal d'encouragement, comme certaines des phrases prononcées durant la séance inaugurale dans le message du président fédéral Roman Herzog et dans le discours du ministre fédéral Jürgen Rüttgers, ne pourra qu'être très apprécié par notre communauté.

Une vision simplificatrice peut conduire à distinguer d'une part les mathématiques « pures », sans utilité pratique, et d'autre part les mathématiques appliquées, concernées par des problèmes concrets. Les travaux exposés dans ce congrès, et notamment par certains conférenciers venant de France, montrent bien qu'il y a continuité entre mathématiques pures et appliquées, et confirment que les mathématiques dans leur ensemble constituent l'un des fondements d'une société de technologie avancée.

Nous voudrions terminer par un hommage à un géant des mathématiques de ce siècle, André Weil, disparu le 6 août dernier, à l'âge de 92 ans. En 1926, André Weil fut le premier parmi les jeunes intellectuels français à faire le voyage en Allemagne après la première guerre mondiale. Révolté par le chauvinisme en vogue, il savait bien qu'à l'époque, c'était en Allemagne que se faisaient les meilleures mathématiques, et que c'était là qu'il fallait venir les apprendre. Vingt ans plus tard, après la deuxième guerre mondiale, Henri Cartan tentait de rembourser cette dette envers l'école allemande en jetant les premiers ponts d'une coopération scientifique nouvelle qui n'a cessé depuis de fleurir.

Rassemblés aujourd'hui à Berlin, c'est évidemment cette idée-là de coopération que nous célébrons avec nos collègues venant aussi bien d'Europe que du reste du monde.

Nous vous souhaitons une bonne fin de congrès et vous donnons rendez-vous dans quatre ans à Pékin.

Image (12cm/8.4cm)

P. Shor, A. Wiles, C. McMullen, M. Kontsevich, W. Gowers et R. Borcherds

CROQUIS DE BERLIN

Karine CHEMLA & Jean-Louis NICOLAS

Le Congrès International des Mathématiciens 98 a eu lieu à Berlin du 18 au 27 août 1998. La cérémonie d'ouverture se tenait au Palais des congrès de Berlin. Après différents discours, Yuri Manin et David Mumford dévoilèrent les décisions des comités qu'ils présidaient : Andrew Wiles obtient « a special tribute », Richards Borcherds, Timothy Gowers, Maxim Kontsevich et Curtis Mc Mullen obtiennent la médaille Fields, et Peter Shor le prix Nevanlinna.

Les autres activités du congrès se déroulèrent à la Technische Universität, près du Kudamm, en plein centre de Berlin ex-ouest. Il était très agréable, pendant les pauses, d'aller flâner dans le quartier, plein de boutiques et de cafés. Mais il n'était pas moins intéressant de pouvoir découvrir le Berlin en chantier, transition entre la ville déchirée d'hier et le futur centre politique de l'Allemagne de demain.

C'était la première fois depuis 1904 que le Congrès International des Mathématiciens se tenait en Allemagne. Les pouvoirs publics allemands se sont réjouis de trouver là un témoignage de ce que la communauté mathématique allemande se voyait à nouveau admise à part entière au sein de la communauté internationale. Plusieurs manifestations d'histoire des mathématiques sont venues marquer la réflexion que l'évènement peut susciter. Une après-midi consacrée aux rapports mathématiques qu'entretenaient les scientifiques berlinois avec leurs collègues d'autres villes allemandes et de l'étranger a permis d'évoquer le centre mathématique que fut Berlin dans la seconde moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Mais un accent tout particulier fut mis sur les évènements qui affectèrent la communauté mathématique allemande après la prise du pouvoir par les Nazis. Une exposition que la société mathématique allemande (DMV) avait pu organiser grâce au travail de l'historien des mathématiques Reinhard Siegmund-Schultze, « Terror and Exile », montrait les dommages subis par les mathématiques berlinoises en conséquence de l'exil imposé à une partie non négligeable de son élite. L'exposition évoquait également la responsabilité qui incombait aux scientifiques en vue, tels Bierberbach, qui, par conviction ou par opportunisme, avaient travaillé en bonne intelligence avec les Nazis. Au cours d'une session également consacrée à cette sombre période de l'histoire, Joël Lebowitz et Herbert Mehrtens ont également souligné la responsabilité que nous portons tous de veiller à ce que mémoire soit faite. Par contraste, il était étonnant que les mathématiques de la période postérieure à 1945 ne soient l'objet d'aucun commentaire.

Le 19 août en fin d'après midi, à 7h30, était annoncée une conférence d'Andrew Wiles. Dès 7h, le grand amphithéâtre de la Technische Universität n'avait plus de sièges libres et les derniers arrivants durent s'asseoir sur les marches ou s'entasser debout dans les espaces libres. Andrew Wiles fut présenté par Don Zagier, qui souligna que, malgré la renommée exceptionnelle que lui avait apportée la démonstration du théorème de Fermat, il était resté modeste. Dans son exposé, intitulé « Twenty years of Number Theory », A. Wiles rappela les étapes qui l'avaient conduit à résoudre le problème de Fermat en citant les noms d'un grand nombre de ceux dont les travaux avaient contribué à permettre de clore la question. S'adressant à un large public, il ne rentra pas dans les « détails ». Pour terminer, il énonça une liste de problèmes de théorie des nombres non encore résolus. A la fin il fut salué par une *standing ovation* impressionnante. Cette conférence restera certainement comme un très grand moment des congrès internationaux des mathématiciens.

Les organisateurs avaient demandés à tous les conférenciers invités de préparer des exposés accessibles à un large public, car lors des précédents congrès, de nombreux participants s'étaient plaints de ne rien comprendre. Il semble qu'un réel effort ait été fait dans ce sens.

Une assez large place a été réservé à la présentation de logiciels de calculs tels que MAPLE, MATHEMATICA ou PARI. Les orateurs disposaient d'un ordinateur qui se projetait sur l'écran de l'amphithéâtre. En plus des trois cités précédemment, furent présentés une quinzaine d'autres logiciels. Le présentateur de MATHEMATICA, Michael Trott, a affirmé qu'il savait calculer l'intégrale multiple suivante

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right| dx_1\, dx_2\, dx_3\, dy_1\, dy_2\, dy_3$$

sur l'hypercube $[0,1]^6$, c'est à dire calculer la surface moyenne d'un triangle dont les trois sommets sont des points pris au hasard dans un carré de côté 1. Le résultat est $\frac{11}{144}$.

Il y eut également une session sur les publications électroniques, une autre sur les problèmes pédagogiques et didactiques, et une réunion organisée par le groupe « Femmes et Mathématiques ». Des films mathématiques, qui avaient été sélectionnés au cours d'une compétition organisée pendant la durée du Congrès, ont aussi été projetés.

Pour l'occasion, un timbre spécial a été imprimé par la Bundespost, d'un montant de 1,10 mark, c'est-à-dire 110 pfennigs. Dans sa présentation, le ministre des postes a observé que 110 s'écrivait de trois façons différentes comme somme de trois carrés et a détaillé l'ensemble des résultats mathémathiques qui avaient été inscrits dans le graphisme du timbre.

Le mardi 26, les services culturels francais à Berlin et à Bonn organisaient une réception au cours de laquelle la présidente de la SMF, Madame Martin-Deschamps, et le président de la SMAI, Monsieur Damlamian, prononcèrent le discours que l'on a pu lire plus haut.

Le prochain congrès aura lieu à Pékin, du 20 au 28 août 2002. On peut dès maintenant obtenir des informations sur la Toile :
`http://www.cms.org.cn`
ou envoyer un mél à la Société Mathématique de Chine :
`cms@math08.math.ac.cn`

INFORMATIONS

Terror & Exile

Lors du Congrès International de Mathématiciens de Berlin en août, en écho à certains milieux nord-américains qui avaient protesté contre la tenue de cette manifestation dans l'ancienne capitale du Reich, une exposition remarquable évoquait le sort de 53 mathématiciens et professeurs de mathématiques berlinois d'origine juive entre 1933 et 1945 et le comportement, varié, de leurs collègues, depuis le nazisme de Bieberbach jusqu'aux réactions-faibles de R. Rothe. Un fascicule reprend l'essentiel de cette exposition ; cette étude documentée du nazisme ordinaire fera réfléchir ...

Pour l'obtenir :

Katalog "Terror & Exile"
Deutsche Mathematiker-Vereinigung
c/o WIAS, Mohrenstr. 39, D-10117 Berlin
Fax : 0049 (0)30 20377307 – Mél : `dmv@wias-berlin.de`

Prix : 15.- DM port inclus. Payment par chèque ou carte de crédit.

⋆ ⋆ ⋆

Société Mathématique de France

Nous vous rappelons qu'une liste électronique permettant à chaque adhérent de se tenir informé régulièrement et gratuitement sur les publications a été ouverte en 1996. Pour figurer sur cette liste — si vous ne l'êtes pas déjà — il suffit de s'y inscrire.

Mode d'emploi :

– envoyer un mél à l'adresse suivante : `listserv@ens.fr`

– ne rien mettre dans la zone `subject`
– mettre la mention : `subscribe publications-smf` suivie de votre nom (par exemple `subscribe publications-smf Dupont Jean`)
– envoyer votre message sans signer.

⋆ ⋆ ⋆

Appel à candidatures

La fonction de directeur de l'Institut Henri Poincaré sera vacante à la rentrée universitaire 1999. Les candidats intéressés, mathématiciens ou physiciens théoriciens, sont priés de se faire connaître *avant le 1er mars 1999* par lettre adressée à :

M. Pierre Jacquard
Président du Conseil d'Administration
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre & Marie Curie 75231 Paris Cedex 05.

⋆ ⋆ ⋆

Comptes-rendus des réunions du CNU et du CNRS

Vous trouverez les comptes-rendus des réunions des 25e et 26e sections du CNU et les comptes-rendus du CNRS sur le serveur de la SMF :

`http://smf.emath.fr`

⋆ ⋆ ⋆

Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques

La Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (CFEM) constitue la sous-commission française de la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (CIEM). Elle permet à la France d'assurer un rôle important au sein de la CIEM.

La CFEM rassemble des organismes et institutions qui contribuent à l'enseignement des mathématiques en France : APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques), CNFM

(Comité National Français des Mathématiciens), IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), SMF (Société Mathématique de France), UPS (Union des Professeurs de Mathématiques Spéciales), Inspection Générale de Mathématiques.

La CFEM coordonne la participation française au congrès international sur l'enseignement des mathématiques, qui a lieu tous les 4 ans depuis 1969. Le prochain congrès (ICME 9) aura lieu à Tokyo en l'an 2000, année mondiale des mathématiques.

Elle contribue aux études internationales conduites régulièrement par l'ICMI. Deux sont en cours actuellement : « Le rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques », et « Enseignement et apprentissage des mathématiques dans l'enseignement supérieur ».

La CFEM prépare également un colloque sur l'enseignement des mathématiques, qui aura lieu en France en l'an 2000.

Le bureau de la CFEM est constitué de représentants des organismes membres. Pour la période 1998-2000, il est composé comme suit :
*P*résident : Bernard Cornu (Directeur de l'IUFM de Grenoble)
*V*ice-Présidente : Colette Laborde
*S*ecrétaire : Noële Vigier
*T*résorier : Pierre Ettinger
*M*embres du Bureau : Paul Attali, Régis Gras, Jean-Pierre Kahane, Jean-Philippe Labrousse, Tadiou Szwed

Siège Social : I.H.P., 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris
Contact : Bernard Cornu, IUFM, 30 avenue Marcelin Berthelot, 38100 Grenoble
Mél : `bernard.cornu@grenoble.iufm.fr`

⋆ ⋆ ⋆

Année 2000 : année mondiale des mathématiques

Origine

L'année mondiale des mathématiques a été lancée en Mai 1992 à Rio de Janeiro (Brésil) par l'Union Mathématique Internationale (IMU). Cette opération bénéficie du soutien de l'UNESCO avec une résolution de la Conférence Générale en Novembre 1997.

Buts

Un des principaux objectifs du projet est de saisir l'opportunité de l'an 2000 pour rendre accessible à un large public l'intérêt des recherches en mathématiques, leur intervention dans de nombreux secteurs de la vie quotidienne et économique et leur vitalité actuelle.

Les trois axes de l'opération

Les manifestations prévues dans le monde entier porteront sur trois thèmes :

- Les grands défis du XXI^e^ siècle. — D'éminents mathématiciens vont décrire les problémes non résolus à ce jour et qui leur semblent être d'une importance fondamentale pour la discipline. Des conférences et des livres sont prévus.
- Les mathématiques : une clef pour le développement. — Il s'agit d'améliorer, pour les pays dont l'activité mathématique est faible, l'éducation, la recherche et surtout l'accès aux moyens modernes d'information scientifique comme les bibliothèques électroniques.
- L'image des mathématiques. — Ceci est peut-être la partie la plus importante de l'opération : améliorer l'image des mathématiques, faire en sorte qu'elles soient systématiquement présentes dans la « Société de l'Information » et montrer leur rôle dans la société. Les opérations « grand public » comme les affiches sur les mathématiques dans les métros des grandes villes du monde sont inspirées par cet objectif.

La préparation

Tandis que le premier axe est essentiellement géré par l'IMU, les deux autres axes sont à l'origine de nombreux projets émanant des sociétés savantes en mathématiques, nationales ou internationales (conférences, films, livres, émissions de timbres, expositions...).

Contact : Mireille Chaleyat-Maurel, Présidente du Comité *WMY 2000* de l'IMU
Adresse postale : 7, rue des Wallons, 75013 Paris
Tél./Rép./Fax : 01 45 35 33 45
Mél : `mcm@ccr.jussieu.fr`
Serveur : `http://www.math.jussieu.fr`

COURRIER DES LECTEURS

L'ÉPINEUX THÈME DU RECRUTEMENT LOCAL

Yann BUGEAUD
Université Louis Pasteur

Nouvel adhérent à la S.M.F., je souhaiterais réagir à l'article paru dans le numéro 75 et consacré à l'analyse des recrutements en 25^{e} et 26^{e} sections, dont le ton m'a passablement irrité.

En écrivant au sujet des maîtres de conférences, je cite « 25% des recrutés ont fait leur thèse sur place et n'ont pas bougé de leur lieu de recrutement. C'est trop. », les auteurs — drapés derrière l'anonymat du sigle DPSGT1 — clouent au pilori plusieurs universités, dont Strasbourg 1. Ayant été recruté à Strasbourg l'an dernier, après y avoir soutenu ma thèse, je me sens tout particulièrement visé. Aussi, je m'interroge : qui donc est concerné par ces deux lignes lapidaires ? La commission de spécialistes, ou le candidat ?

Je ne peux autoriser les auteurs à juger ma décision sans connaître mes motivations. Mais peut-être pensent-ils que la commission ne doit sous aucun prétexte classer un « local » ? Donc éventuellement renoncer à un candidat qui les intéresse, et intéresse d'autres universités, pour une unique raison de mobilité, argument bien mince ? Et quelle est leur définition de « local » ? Prend-elle en compte la mobilité passée du candidat ? Et pourquoi obliger un candidat qui a le choix entre quatre postes à quitter son université d'origine ?

En outre, j'insiste sur le fait que mon cas n'est pas isolé : plusieurs jeunes maîtres de conférences ont préféré, malgré d'autres sollicitations, rester sur le lieu de leur thèse. Je sais combien est épineux le thème du recrutement local. Néanmoins, il me paraît malsain de systématiquement tirer à boulets rouges sur les commissions de spécialistes et/ou les candidats concernés. À l'avenir, il serait souhaitable que les auteurs de tels articles tiennent des propos plus mesurés.

LIVRES

Abelian varieties with complex multiplication and modular functions
GORO SHIMURA
Princeton Univ. Press, Mathematical Series. 46, 1998

Une variété abélienne complexe A est un tore complexe de dimension g – donc $\mathbb{C}^g/\Lambda$ où Λ est un réseau, de rang $2g$ – qui est une variété algébrique complexe. Soit $E_{\mathbb{Z}}$ son anneau d'endomorphismes (comme groupe analytique) et $E = E_0 \otimes \mathbb{Q}$: $E^{\mathbb{Z}}$ est un réseau dans E qui est une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. Il y a une notion naturelle de variété abélienne *simple* ; si A est simple, on dit que A est à multiplication complexe si E est de dimension $2g$ sur $\mathbb{Q}$; E est alors un corps CM (« corps de multiplication complexe »), i.e. E est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel E_0 de degré g sur $\mathbb{Q}$. En général, il y a une notion analogue de variété (non nécessairement simple) à multiplication complexe toujours par un corps CM de degré $2g$.

Parmi les variétés abéliennes, les variétés à multiplication complexe ont des propriétés remarquables, tant du point de vue géométrique que du point de vue arithmétique. Concentrons-nous sur l'aspect arithmétique. Soit k un corps de nombres ; supposons que A est définie sur k, ainsi que les endomorphismes dans $E_{\mathbb{Z}}$.

Rappelons que, d'après Weil, la fonction Zêta de A/k se calcule à l'aide de l'action de $Gal(\overline{k}/k)$ sur le module de Tate de A, qui n'est autre que $H^1(A, \mathbb{Q}_\ell)$, où l'on a choisi un nombre premier ℓ et où A désigne toujours la variété complexe. Dans le cas CM – quitte à remplacer $H^1(A, \mathbb{Q}_\ell)$ par $H^1(A, L)$ où L est une extension finie convenable de $\mathbb{Q}_\ell$ – cette action, qui doit commuter à l'action naturelle de E, est alors diagonalisable. On en déduit que la fonction Zêta de A est un produit de $2g$ fonctions L abéliennes, que l'on peut identifier à des fonctions L de Grössencharakterer (au sens de Hecke).

Si E n'opère plus par des k-endomorphismes, la théorie est plus subtile, mais on trouve tout de même que la fonction Zêta de E est assez simple, associée à des représentations « potentiellement abéliennes » du groupe de Galois. Puisque l'action de $Gal(\overline{k}/k)$ sur $H^1(A, \mathbb{Q}_\ell)$ se déduit de son action sur les points d'ordre fini de A, on obtient ainsi une solution du 12e problème de Hilbert (engendrement d'extensions abéliennes de k à l'aide de valeurs spéciales de fonctions analytiques).

Cette théorie est due à Shimura, Taniyama et Weil (1955 : Symposium Tokyo-Nikko). Elle a fait l'objet d'un exposé détaillé de Shimura et Taniyama, publié en 1961. Les 16 premiers paragraphes du présent ouvrage reprennent la monographie de

1961. A l'époque, Shimura et Taniyama ne décrivaient pas tous les facteurs eulériens de la fonction Zêta dans tous les cas (voir [ST : Main Theorem 4]). La théorie a été complétée par Shimura lui-même en 1971 quand A est simple ; ces compléments sont contenus dans le chapitre V.

Il est un peu dommage que les différentes améliorations ultérieures de la théorie ne soient pas mentionnées : elles sont dues entre autres à Serre, Tate (1981 ; non publié) et Deligne, Deligne utilisant le « groupe de Taniyama » introduit par Langlands. La détermination de la fonction Zêta dans le cas général est due à Yoshida et Deligne (1981). L'approche de Tate peut être trouvée dans les exposés de J.S. Milne.

La fin du livre est consacrée à des travaux plus récents de Shimura qui concernent deux sujets importants. Le premier (ch. VI) est la théorie des modèles canoniques et l'action des groupes réductifs adéliques (symplectiques ou unitaires) sur les corps de fonctions automorphes. C'est une théorie difficile, qui généralise le chapitre 6 de la célèbre « Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions » de Shimura. Si la théorie des modèles canoniques est complètement élucidée (voir par exemple l'article de Milne répertorié ci-dessous), le second aspect ne paraît pas avoir reçu une attention comparable. On le recommande à un lecteur ambitieux. Le second sujet (Ch. VII) est la relation entre valeurs spéciales des fonctions L associées à la multilication complexe et périodes de variétés abéliennes, un sujet central en arithmétique contemporaine. Aux résultats exposés par Shimura on rajoutera l'article de D. Blasius.

BIBLIOGRAPHIE

Ces références s'ajoutent à celles que le lecteur trouvera dans le livre.

[ST] G. Shimura et Y. Taniyama, *Complex multiplication of abélian varieties and its applications to number theory*, Publi. Math. Soc. Japon, 6, 1961.

J.-P. Serre : *Abélian ℓ-adic Representations and Elliptic Curves*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley, 1988.

P. Deligne, Motifs et groupe de Taniyama, in Deligne, Milne, Ogus, Shih, *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, Springer L.N. 900, 1982.

J. S. Milne, Canonical Models of (mixed) Shimura Varieties and Automorphic Vector Bundles, in *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions*, Perspect. Math. 10, Academic Press, 1990.

S. Lang, *Complex Multilication*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 255, Springer, 1983.

Local Cohomology, an algebraic introduction with geometric applications
M.P. Brodmann, R.Y. Sharp
Cambridge studies in advanced math. 60, 1998

Même si les développements les plus spectaculaires de la cohomologie locale sont en géométrie, l'algèbre noethérienne commutative s'en nourrit et l'enrichit aussi. Et c'est d'un point de vue d'algébristes que part le livre de Brodmann et Sharp.

Les résultats les plus importants qui sont démontrés dans ce livre sont des théorèmes d'annulation et de finitude (ou non). Le cas gradué est largement traité et les problèmes de dualité sont considérés. Des applications à la théorie des anneaux (système de générateurs d'idéaux, ...) et au problème de connexité de certaines intersections sont complètement explicitées. Pour donner une idée du type d'applications que l'on peut obtenir aisément, citons le résultat dû à Fulton-Hansen (1979) : soit V, W des sous-variétés projectives de $\mathbb{P}^r(K)$ vérifiant $\dim V + \dim W > r$, alors $V \cap W$ est connexe, où K est un corps algébriquement clos.

Le livre est écrit avec soin et montre effectivement l'utilité de la cohomologie locale en algèbre et en géométrie. Il s'adresse aux étudiants ayant une bonne connaissance de l'algèbre commutative.

Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol I, incompressible models
Pierre-Louis Lions
Oxford Science Publications, 1996

Pierre-Louis Lions nous propose en deux tomes une analyse détaillée des méthodes mathématiques de la mécanique des fluides. Notre lecture porte sur le premier tome qui traite principalement des milieux incompressibles. Trois types complémentaires de modèles sont étudiés de manière extrêmement précise et claire.

Les équations de Navier-Stokes avec densité variable

L'auteur aborde dans cette première partie le problème de l'existence, de la régularité et de l'unicité d'une solution au système suivant (posé sur un ouvert Ω) :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) & = 0, \\ \mathrm{div} u & = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u * u + pI - \tau^v) & = \rho f \end{array} \right.$$

où ρ (respectivement u) est la masse volumique (respectivement la vitesse) du fluide. Par ailleurs, p est la pression et τ^v est le tenseur des contraintes visqueuses. Plusieurs conditions aux limites sont envisagées : conditions de Dirichlet ou périodiques.

Les techniques mises en œuvre sont essentiellement dûes à R.J Di Perna et P.L Lions : elles conduisent à des estimations a priori donnant des propriétés de compacité inattendues. Les démonstrations sont complexes et fines et, au bout du compte, des résultats remarquables sont proposés.

Les équations de Navier-Stokes incompressibles en milieu homogène

Le modèle étudié dans cette partie est une simplification du précédent car la masse volumique ρ est constante. L'auteur y reprend des résultats de J. Leray et J.L Lions en y apportant néanmoins une touche personnelle. Par ailleurs, l'utilisation originale des espaces de Hardy lui permettent d'obtenir des résultats de régularité. Ces propriétés font penser aux techniques de compacité par compensation et à celle de l'analyse microlocale. Ce travail, ici encore, ouvre de nouveaux horizons dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Enfin, une difficulté souvent éludée pour les fluides incompressibles est la modélisation de la température : le lecteur trouvera à la fin de ce second volet les réponses aux questions traditionnelles.

Les équations d'Euler incompressibles

Cette fois, c'est vers une difficulté majeure de la modélisation actuelle des fluides que l'auteur nous entraine. Il discute du premier modèle (1) dans lequel on impose $\tau^v = 0$. Tout d'abord, dans le cas bidimensionnel, et grâce à l'utilisation d'une fonction de courant, l'auteur nous livre les derniers résultats qu'il a obtenu avec ses collaborateurs. Notons que les questions de la régularité et de l'unicité d'une solution (sous des hypothèses précises) sont discutées de manière très complète. Enfin le cas tridimensionnel est éclairé à la lumière d'une approche nouvelle grâce à l'introduction de solutions dissipatives. Même si, à l'heure actuelle, il reste un chemin à poursuivre, les explications proposées permettent ici encore au lecteur de se faire une idée des difficultés mathématiques qu'il reste à surmonter.

En résumé, le tome I de l'œuvre de P.L. Lions est un ouvrage incoutournable des mathématiques appliquées. Même s'il apporte des réponses claires et précises à certains problèmes de la mécanique des fluides incompressibles, son immense mérite est surtout d'ouvrir de nouvelles voies à l'aide d'outils originaux et puissants. A lire absolument.

Une fois cela fait, vous découvrirez dans le tome II (qui est paru) l'état de l'art des méthodes mathématiques pour les fluides compressibles. Bien sûr, la différence essentielle est la présence d'ondes. C'est d'ailleurs dans le premier chapitre que l'auteur donne les outils nécessaires à l'analyse de ce type de phénomène. Après avoir traité en détail le cas stationnaire, les problèmes d'évolution sont abordés ainsi que leurs approximations numériques.

C. Fabre. Université du Val de Marne

Global Analysis in Mathematical Physics : Geometric and Stochastic methods
Yuri Gliklikh
Springer, applied math. science 122, 1997

Cet ouvrage publié aux éditions Springer en 1997 est la version anglaise revue et complétée du livre intitulé *Analysis on Riemannian manifolds and Problems of Mathematical Physics* publié par l'université de Voronezh en 1989. Comme l'indiquent ces deux titres, sont abordés ici trois domaines des mathématiques qui pourraient a priori paraître assez éloignés les uns des autres : l'analyse globale, la géométrie riemannienne et l'analyse stochastique. L'auteur se proposant de donner une présentation dans un cadre *géométrique et stochastique* de l'équation de Newton (et d'autres équations du même type) vue comme équation fondamentale du mouvement, des ponts s'établissent naturellement dans ce contexte entre les divers branches des mathématiques évoquées plus haut. Ce livre, qui s'adresse à des mathématiciens déjà quelque peu familiers avec les notions de base de la géométrie différentielle, de l'analyse globale et de la théorie des processus stochastiques, contient cependant des appendices qui donnent un bref rappel de quelques unes des notions fondamentales utilisées dans chacun de ces domaines (connexion, processus markovien, martingales, espaces de Sobolev). Il offre une synthèse de résultats déjà existants (dont plusieurs sont dus à l'auteur) en mécanique stochastique classique et relativiste ainsi qu'en hydrodynamique, complétés par des résultats originaux et de nouvelles perspectives.

L'équation de Newton classique $\frac{d}{dt}\dot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$, ($x(t)$ désignant la trajectoire, $\dot{x}(t)$ la vitesse, t la variable temps, F la force) sur $\mathbb{R}^n$ peut se généraliser :

1– au cas d'une variété Riemannienne de dimension finie en remplaçant les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes $\frac{\nabla}{dt}\dot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$, ce qui permet par exemple de modéliser un solide tournant autour d'un point fixe dans $\mathbb{R}^3$, la variété étant alors un groupe de Lie,

2– a) à une équation stochastique sur $\mathbb{R}^n$ (la force devient aléatoire) de deux manières différentes :

— sous forme d'une équation stochastique de *Langevin* soit formellement (au sens des distributions) du type $\frac{d}{dt}\dot{\xi}(t) = F(t, \xi, \dot{\xi}(t)) + A(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))\dot{w}(t)$ (où $\dot{w}(t)$ désigne le bruit blanc, $A(t, x, X)$ un champ de tenseur de type $(1-1)$ sur la variété),

— sous forme d' une équation de *Newton-Nelson* (ce qui correspond à une quantification stochastique) sur $\mathbb{R}^n$ soit formellement $\frac{d}{dt}\dot{\xi}(t) = a(t, \xi, \dot{\xi}(t)) + \sigma\dot{w}(t)$ où $\sigma^2 I$ est l'opérateur de diffusion qui est constant ici, a étant choisi de telle manière que l'accélération du processus $\frac{1}{2}(DD_* + D_*D)\xi$ exprimée en terme de dérivée en avant D et en arrière D_* coïncide avec la force $F(t, \xi(t), \dot{\xi}(t))$,

b) à une équation stochastique sur une variété Riemannienne qui est une version covariante d'une équation de type Langevin (ce qui correspond à décrire une particule brownienne sur une variété) ou de type Newton-Nelson

3– à une équation différentielle (ordinaire ou stochastique) sur une variété Riemannienne de dimension infinie (ici le groupe de difféomorphismes d'un n-tore), cadre dans lequel on peut décrire par exemple le flot d'un fluide incompressible visqueux.

A ces trois types de généralisations correspondent trois parties du livre. Partant d'un formalisme géométrique de la *mécanique classique* qui utilise les outils classiques de la géométrie différentielle (Chapitres 1-3), Y. Gliklikh en présente ensuite une version stochastique (Chapitres 4-6) en vue de décrire la *quantification stochastique* d'un système classique, les techniques utilisées étant celles de *l'analyse stochastique sur les variétés*. Finalement (Chapitres 7-9), l'auteur étudie le formalisme *lagrangien en hydrodynamique*, ce qui repose essentiellement sur des techniques d'*analyse globale*.

Chacune de ces parties débute par un chapitre consacré à des fondements mathématiques, le chapitre 1 portant sur la complétude Riemannienne, le transport parallèle, les atlas uniformes, le chapitre 4 traitant des équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}^n$ puis sur une variété en utilisant le formalisme de Belopolskaya et Daletskii des champs d'Itô (il traite en particulier de la complétude stochastique), le chapitre 7 étant dédié à l'étude du groupe des difféomorphismes (en particulier ceux qui préservent le volume) d'une variété sans puis avec bord.

L'auteur propose une approche originale pour aborder certains problèmes délicats ; par exemple (section 20) avec l'équation de l'hodographe des vitesses qu'il utilise à la fois dans les équations déterministes (de la mécanique classique) et stochastiques (équations de Newton-Nelson ou de Langevin) pour l'étude de l'existence et du comportement qualitatif des solutions ou bien encore (chap. 8) lorsqu'il aborde l'étude d'un fluide visqueux incompressible avec des techniques de géométrie différentielle stochastique, ce qui lui permet comme dans le cas d'un fluide incompressible idéal, de travailler sur le groupe de difféomorphismes de classe C^∞.

Yuri Gliklikh a réussi le pari difficile de présenter de manière accessible à un public assez large de mathématiciens des résultats récents et parfois nouveaux dans des domaines qui utilisent des outils mathématiques très variés. C'est un livre vraiment très agréable à lire. Signalons aussi un autre ouvrage de l'auteur qui est postérieur et complémentaire à celui-ci (au sens où on y trouve une étude approfondie de certains aspects abordés dans le présent ouvrage) intitulé *Ordinary and Stochastic Differential Geometry as a Tool for Mathematical Physics* paru aux éditions Kluwer en 1996.

Sylvie Paycha. Université Clermont II

Erdös on graphs ; his legacy of unsolved problems
Fan Chung, Ron Graham
AK Peters, 1997

Quel héritage ! Ce petit livre de moins de 150 pages, de très sobre et belle qualité, regroupe en 6 chapitres, les questions ouvertes, essentielles et profondes, que Paul Erdös nous a laissées en théorie des graphes. Plus précisement, il s'agit de combinatoire, génératrice des domaines suivants :

(1) *Ramsey Theory* — On s'intéresse aux occurences inévitables de structures particulières lorsqu'on partage un ensemble. Par exemple, si on prend 6 personnes au hasard, ou bien au moins 3 se connaissent 2 à 2, ou bien 3 ne se connaissent pas du tout. Autrement dit, si on relie en rouge les personnes qui se connaissent et en bleu celles qui ne se connaissent pas, il existera toujours un triangle rouge ou un triangle bleu dans le graphe complet de toutes les relations entre les 6 personnes.

(2) *Extremal Graph Theory* — Occurences inévitables de certaines structures (arbres, cliques, cycles etc.) lorsqu'un paramètre est grand (par exemple, la densité des arêtes) ou après opérations (par exemple, contraction d'une arête)

(3) *Coloring, Packing and Covering* — On peut colorier les sommets ou les arêtes d'un graphe. Lorsqu'on parle de coloration, ici, 2 sommets reliés n'ont pas la même couleur et pour les arêtes, 2 arêtes issues d'un même sommet sont de couleurs différentes. C'est une des branches les plus actives actuellement, beaucoup de problèmes des autres chapitres s'y ramenant, sans oublier, par ailleurs, le théorème des 4 couleurs.

(4) *Random Graphs and Graphs Enumeration*

(5) *Hypergraphs* — un hypergraphe est la donnée d'un ensemble S (les sommets) et d'une famille de sous-ensembles de S (les arêtes). Lorsque cette famille est constituée de parties à r éléments, on dit que l'on a un r-graphe. Pour $r = 2$, on retrouve la notion usuelle d'arête définie par deux sommets, donc de graphe.

(6) *Infinite Graphs*

À défaut d'obtenir les résultats exacts, on se contente, bien souvent, de raffiner, au cours des années, des fourchettes les cernant. Dans ces domaines, les problèmes ouverts sont légions et la complexité sous-jacente affleure même dans des problèmes d'énoncé simple voire naïf. En voici deux exemples issus de (1) et (5) respectivement :

◇ **Conjecture** : Tout ensemble (non dégénéré) de $2^{n-2} + 1$ points quelconques du plan contient un n-polygône convexe.

On sait que cette conjecture est vraie pour $n = 3$, 4 et 5. Elle est maximale ainsi que le montre l'exemple de 8 points (voir la fig. 1), sans pentagone convexe possible (cf. B. Bollobás, *Modern graph Theory,* Springer, GTM).

◇ **Conjecture** (à 1000 dollars — une des prime les plus élevées proposées dans ce livre)

Par définition, une famille de r-graphes $(S_i)_{i,1\cdots t}$ est une t-étoile de centre A si $\forall i < j \quad Si \cap Sj = A$. Soit $f(r,t)$ le nombre maximum de r-ensembles qui ne contiennent pas une t-étoile, est-ce que $f(r,t) \leqslant c_t^r$ où c_t ne dépend que de t ? Même pour t $= 3$ le problème est ouvert : a-t-on $\forall n \, f(n,3) < c^n$?

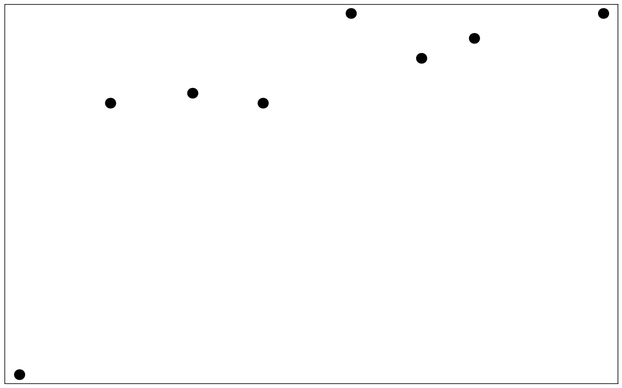


Fig. 1. *Un ensemble non dégénéré de 8 points ne contenant pas de pentagone convexe*

Cet ouvrage s'adresse aussi bien aux spécialistes de théorie des graphes qu'aux autres mathématiciens, amenés à se pencher sur ces questions. En effet, véritable fil d'Ariane, la bibliographie, très complète, qui s'égrène au fil de la lecture, dans les notes de bas de page réservées à cet effet, fournit, pour les non initiés, une carte des forêts de chemins à explorer (Paul Erdös a écrit plus de 1500 papiers avec quelques 460 collaborateurs). Pour les spécialistes du domaine, ou ceux des domaines connexes, cette façon de faire constitue un regroupement synthétique où retrouver la bonne référence est rendu facile grâce au contexte. On y lit ainsi la fabuleuse histoire des assauts et conquêtes des problèmes posés ainsi que les tenants et les aboutissants des théories générées à partir de là.

Mieux, les informaticiens trouveront dans ce livre, hors des sentiers battus, une mine de *problèmes à coder* allant des plus élémentaires aux plus difficiles, voire ouverts. Voici une occasion d'inverser la vapeur ou plus exactement le sens des relations qui s'installent entre mathématiciens et informaticiens. En effet, entre les premiers qui galopent et ceux, parmi les seconds, qui, intéressés par les fondements de l'informatique, science naissante, s'évertuent à donner un sens mathématique à ce qu'ils en connaissent, il serait intéressant, pour tout le monde, que la communauté mathématique fournisse aux informaticiens des problèmes mathématiques de toute difficulté mais facilement abordables, les motivant et entrant dans leur champ d'action. Ce livre en foisonne et en voici quelques exemples. Les trois premiers exercices suivants sont relatifs à la première conjecture :

(i) Exercice simple : reprendre le contre-exemple précédent et faire dessiner automatiquement les 56 pentagones à envisager.

(ii) Un peu moins simple : dessiner $2^{n-2}+1$ points dans le plan au hasard et faire dessiner tous les n-polygônes correspondants.

(iii) Plus difficile : écrire un programme qui permette de déterminer si les polygônes obtenus sont convexes. Étudier la complexité des algorithmes mis en œuvre et optimiser afin d'explorer les cas $n \geqslant 6$.

Et voici un problème ouvert : Donner un algorithme permettant de construire les graphes de Ramsey.

Pour un graphe G quelconque, on aimerait trouver le plus petit graphe complet K_n dans lequel, quelle que soit la coloration des arêtes avec r couleurs, il existe toujours un sous-graphe de G monochromatique et isomorphe à G. Ici bien sûr, les colorations ne sont pas soumises aux conditions indiquées dans (3).

Par exemple, si on reprend l'exemple donné des relations entre personnes, avec la relation binaire : *deux personnes se connaissent ou non*, G est un triangle et $r = 2$. Pour $n = 5$, il existe des colorations de K_5 qui ne font apparaître aucun triangle monochrome, alors que pour $n = 6$, quelle que soit la manière dont sont coloriées les arêtes en rouge et bleu, il existe toujours un triangle rouge ou un triangle bleu. C'est ce que le programme doit trouver. Il est possible d'écrire un programme adapté à ce cas particulier. Ce qui est ouvert c'est d'écrire un programme traitant le problème posé dans sa généralité.

Enfin les enseignants amateurs d'une pédagogie drainée par l'exemple et la recherche, ou désirant fabriquer des sujets de projets originaux à aspect théorique et pratique, trouveront dans ce livre matière à faire des heureux parmi leurs étudiants, en couplant ce livre avec un livre d'applications de théorie des graphes à des domaines divers. Par exemple, pour une application large (réseau de communication, graphes de fluence pour l'étude des systèmes linéaires associés aux réseaux électriques, chimie, mécanique statistique, sciences sociales, recherche opérationnelle, géographie, architecture et linguistique) on pourra consulter le collectif édité par Robin Wilson et Lowell W. Beineke (Academic Press) : *Applications of Graphs Theory* ou bien, pour d'autres thèmes d'application le livre de Gondran et Minoux *Graphes et Algorithmes* (Dunod) (localisation des émetteurs de télévision, diagnostic et détection de pannes, sélection de fichiers dans une banque de données, simplification d'expression booléennes, rotation des équipages dans les lignes d'aviation ou d'autobus, réalisation des emplois du temps, classification, choix des investissements, problèmes classiques dits du voyageur de commerce, ou du sac à dos.)

S'ouvrir aux applications pratiques et autres disciplines n'est pas une obligation et on trouvera aussi dans cet ouvrage des exemples intra-mathématiques de tout niveau. Par exemple, le petit problème élémentaire de géométrie du dernier chapitre réservé à la petite histoire, pourra motiver utilement l'introduction à la géométrie projective. Il est à remarquer que c'est d'ailleurs une source des très rares figures de ce livre ...

Voici son énoncé : prendre un cercle et le milieu M d'une corde quelconque A_1A_2. Tracer (cf. la fig. 2) deux autres cordes issues de M, B_1B_2 et C_1C_2. Tracer B_1C_2 et B_2C_1. Soit $D_1 = A_1A_2 \cap B_1C_2$ et $D_2 = A_1A_2 \cap C_1B_2$. Montrer que M est le milieu de D_1D_2.

En résumé, puisse cet ouvrage, par son contenu, motiver de nouvelles recrues dans ce domaine, mais aussi par l'exemple de sa conception même, faire émerger par sa pratique, des ouvrages analogues sur d'autres sujets. De façon plus précise :

- fournir des éclairages ciblés sur des questions centrales, avec leur cohorte de questions ouvertes et des pointeurs vers les résultats intermédiaires déjà obtenus ;
- donner une idée intuitive et précise des moyens mis en œuvre pour les démonstrations ;
- offrir des primes symboliques motivantes,

n'est-il pas une voie vers une meilleure intégration des mathématiques dans notre société ?

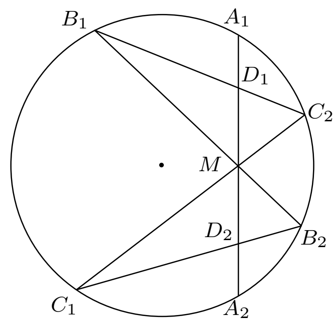


FIG. 2.

Toutefois, ce livre, racine d'arbres de recherches, n'est pas *self-content*. Pour les non-spécialistes, il sera utilement complété par des ouvrages de base, comme ceux de Bollobás (cf ci-dessus le dernier en date) ou de Norman L. Biggs : *Discrete Mathematics* et *Algebraic Graph Theory* (cf Gazette d'avril 1995).

J. Zizi. Ecole polytechnique

Cyclic Homology
JEAN-LOUIS LODAY
Springer Verlag, Grundlehere der Math. Wissenschaft, 2e édition, 1998

La cohomologie cyclique fut introduite par Alain Connes en 1981 comme une extension de la cohomologie de de Rham à des espaces pour lesquels les notions classiques de la topologie et de la géométrie différentielle ne sont pas disponibles. Les algèbres naturellement associées à ces espaces ne sont plus, contrairement à la situation classique, des algèbres commutatives. Ainsi, l'espace des feuilles d'un feuilletage, l'espace des orbites de l'action d'un groupe de Lie sur une variété sont des exemples d'espaces non commutatifs. La définition de la $K-$homologie des algèbres d'opérateurs (Brown, Douglas, Fillmore, et Kasparov), et la construction d'un caractère de Chern en $K-$homologie, adapté à ces espaces, ont été les motivations essentielles du travail d'Alain Connes. De manière quasi simultanée, Jean Louis Loday et Daniel Quillen, ont développé la théorie homologique correspondante, et identifié cette homologie cyclique comme partie primitive de l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices ; Boris Tsygan a obtenu aussi des résultats dans cette direction. Une théorie cyclique bivariante a été définie et étudiée par John. D.S. Jones et Christian Kassel. Le livre de Jean Louis Loday expose de manière détaillée ces diverses approches, et propose un panorama des applications de l'homologie cyclique, et des questions ouvertes. L'ouvrage se divise sommairement en quatre parties : homologie cyclique et algèbre homologique (chapitres 1 à 5), espaces cycliques, homologie équivariante, et caractère de Chern (chapitres 6 à 8), théorie des invariants, algèbres de Lie, $K-$théorie algébrique (chapitres 9 à 11), applications de l'homologie cyclique. Le dernier chapitre, écrit en collaborationvec Teimuraz Pirashvili, concerne la cohomologie de Mac Lane.

L'homologie de Hochschild est introduite au premier chapitre à partir du complexe de Hochschild, puis interprétée comme un foncteur Tor sur la catégorie des bimodules.

Des exemples de calculs sont ensuite donnés : l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative se calcule en termes de formes Kählériennes, l'homologie des matrices triangulaires supérieures est la somme des contributions des termes diagonaux, et, par invariance de Morita, l'application trace induit un isomorphisme en homologie. Le résultat essentiel de ce chapitre est le théorème de Wodzicki. Ce théorème établit une suite exacte en homologie de Hochschild, associée à la suite exacte $I = ker(A \to A/I)$, sous l'hypothèse que l'idéal bilatére I de l'algèbre A est $H-$unifère. Dualement, la trace devient cotrace, et la cohomologie de Hochschild s'interprète comme un foncteur Ext. La notion de module simplicial, introduite en fin de chapitre, permet une axiomatisation qui sera utilisée par la suite.

Le chapitre 2 présente trois complexes (et leurs variantes normalisées) calculant l'homologie cyclique des algèbres uniféres. La relation précise entre le (B, b) bicomplexe et le complexe cyclique de Connes est établie dans un travail de J.L. Loday et D. Quillen, par l'introduction du bicomplexe cyclique. Le (b, B) bicomplexe s'obtient en supprimant des colonnes acycliques du bicomplexe cyclique. L'homologie de

Hochschild d'une algèbre commutative est étroitement liée au module des formes différentielles. Il est montré que l'opérateur B de Connes se décrit, à travers cette correspondance, comme la différentielle extérieure. Le complexe initialement utilisé par Connes est le quotient du complexe de Hochschild par l'action du groupe cyclique en chaque degré. La suite exacte de Connes, liant homologie de Hochschild et homologie cyclique est établie comme conséquence de la périodicité du bicomplexe cyclique. Par une étude détaillée de cette suite exacte, les résultats fondamentaux sur l'homologie de Hochschild (Invariance de Morita, théorème de Wodzicki) sont transposés à l'homologie cyclique. Les notions de module cyclique et de complexe mixte fournissent, en fin de chapitre, une description axiomatique analogue à celle de l'homologie de Hochschild.

Les exemples de calcul d'homologie cyclique et d'homologie de Hochschild sont présentés au chapitre 3 dans des cas importants : algèbres tensorielles, algèbres symétriques (en termes de formes différentielles et d'homologie de de Rham). L'isomorphisme de l'homologie des algèbres de Lie et de l'homologie de Hochschild des algèbres universelles enveloppantes, est montré dans le cas plus général des algèbres presque symétriques. Les algèbres lisses sont étudiées en détail. Le résultat essentiel étant le théorème de Hochschild, Kostant, Rosenberg, qui établit l'identité de l'homologie de Hochschild des algèbres lisses, et des formes différentielles. L'opérateur B agit alors comme la différentielle extérieure. Ceci permet, par l'analyse d'une suite spectrale, de décomposer l'homologie cyclique en homologie de de Rham et en formes différentielles. Ce résultat, établi par Loday et Quillen, est une version algébrique d'un résultat de Connes concernant les fonctions C^∞ sur une variété. Un appendice, de María O. Ronco, sur les algèbres lisses complète ce chapitre.

Au chapitre 4 sont définies les opérations usuelles sur les complexes de Hochschild et le complexe cyclique. La formule homotopique de Cartan, établissant la nullité en homologie périodique des opérations associées aux dérivations, à plusieurs conséquences. Une application au calcul de l'homologie cyclique des idéaux nilpotents est donnée (Goodwillie.) L'isomorphisme de Künneth pour l'homologie de Hochschild est induit par une application de complexes, appelée « shuffle » battage). En homologie cyclique, l'isomorphisme de Künneth est remplacé par une suite exacte, et une application de « shuffle cyclique » définit un produit externe :

$$HC_*(A) \otimes HC_*(A') \to HC_*(A \otimes A').$$

La fin du chapitre est consacrée à la construction des idempotents Eulériens et aux $\Lambda-$ décompositions induites de l'homologie cyclique et de l'homologie de Hochschild. Il est montré que les éléments de ces décompositions sont, dans le cas lisse, liées aux formes différentielles et à la cohomologie de de Rham.

Diverses variantes de l'homologie cyclique sont introduites au chapitre 5 : homologie périodique, et homologie cyclique négative, qui sera par la suite utilisée comme receptacle universel du caractère de Chern en $K-$ théorie algébrique. Lorsque l'algèbre est munie d'une involution, le bicomplexe cyclique se scinde de façon naturelle en parties paire et impaire, décomposant l'homologie cyclique en parties dihédrale et anti-dihédrale. Une version quaternionique est également proposée. Ces exemples seront plus tard introduits de manière conceptuelle, avec la notion de groupes simpliciaux croisés. L'homologie cyclique d'une algèbre différentielle graduée est par définition l'homologie d'un tricomplexe, obtenu en incorporant au (b, B) bicomplexe la différentielle de l'algèbre. Le point important est qu'une équivalence d'algèbres différentielles graduées induit un isomorphisme en homologie de Hochschild et en homologie cyclique périodique. Cette propriété est à la base de la méthode des modèles minimaux. Le cas des algèbres de polynômes tronqués est traité. Un paragraphe est consacré à la théorie bivariante de Jones-Kassel et ses principales propriétés. Enfin, un exposé rapide de la cohomologie des complexes topologiques (cohomologie continue, cohomologie entière) est proposé. Les exemples classiques : fonctions C^∞, tore non commutatif, algèbres de feuilletages, algèbres de groupes, sont évoqués.

Au chapitre 6, sont décrites la catégorie simpliciale Δ, et la catégorie cyclique de Connes, ΔC. Un objet simplicial dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant, de Δ , dans $\mathcal{C}$. La catégorie de Connes définit de la même façon les objets cycliques. L'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique s'interprètent, en termes de modules simpliciaux, et de modules cycliques, comme des foncteurs Tor. Dualement, les cohomologies sont des foncteurs Ext. En remplaçant la famille C des groupes cycliques par un groupe croisé simplicial G, on obtient une nouvelle catégorie ΔG, et une homologie correspondante. Les groupes cyclique, dihédral, quaternionique, les groupes symétriques et les groupes de tresses sont des exemples de groupes croisés simpliciaux, qui définissent autant de variantes de l'homologie cyclique. Une classification compléte des groupes croisés simpliciaux est donnée.

Le résultat essentiel du chapitre 7 est l'existence d'une action canonique du groupe topologique $S^1 = SO(2)$, sur la réalisation géométrique $|X|$ d'un espace cyclique X. L'homologie cyclique du module cyclique associé est l'homologie de $|X|$, équivariante par rapport à cette action. L'espace cyclique associé à un groupe G est homotope à l'espace des boucles sur le classifiant BG, avec l'action canonique de S^1. L'homologie cyclique de l'anneau de G se décompose suivant les classes de conjugaison. Les contributions correspondantes aux éléments d'ordre infini sont identifiées à l'homologie de groupes discrets (Burghelea). La preuve utilise un calcul de groupes d'homotopie. L'auteur indique comment la notion de module croisé peut fournir une démonstration complétement algébrique.

Le chapitre 8 est consacré à la construction du caractère de Chern pour la $K-$théorie algébrique. Le caractère de Chern d'un module projectif sur une algèbre commutative A, est une application à valeurs dans l'homologie de de Rham de A. La généralisation au cas où l'anneau A n'est plus commutatif, consiste à associer à un idempotent e, de l'anneau des matrices sur A, une classe, dans $HC_{2n}(A)$. La construction doit être compatible avec la relation d'équivalence des modules projectifs de type fini, et induire une application fonctorielle et additive, $ch_{0,n} : K_0(A) \to HC_{2n}(A)$. Cette application est donnée comme une formule, et calculée sur des exemples. Il est montré que le caractère de Chern classique factorise a travers cette construction. Les caractères construits pour diverses valeurs de n s'obtiennent tous à partir d'un caractère générique, à valeurs dans l'homologie cyclique négative. Un caractère en homologie, défini sur $H_n(GL(A))$, basé sur la trace de Dennis est aussi étudié (Connes, Karoubi, Jones.) Le cas $n = 1$ correspond au groupe $K_1(A)$. Cette construction sera replacée dans un cadre plus général. Des applications à la conjecture des idempotents, et à l'intégralité de la trace sont expliquées. Le travail de P. Blanc et J.L. Brylinski sur le principe de Selberg est évoqué dans un exercice.

Les deux chapitres suivants concernent la théorie des invariants, et les travaux de J.L. Loday et D. Quillen sur l'homologie des algèbres de Lie de matrices. Après une description du complexe de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$,la structure canonique de coalgèbre de $H_*(\mathcal{G})$ est établie. Pour l'algèbre de Lie $\mathcal{G}l(A)$ des matrices sur l'anneau associatif unifère A, une application de chaines θ, du complexe de Chevalley-Eilenberg, vers le complexe cyclique de Connes est construite. Le théorème de Loday-Quillen dit que cette application θ (composée avec la trace canonique), induit un isomorphisme entre la partie primitive de $H_*(\mathcal{G}l(A))$, et l'homologie cyclique de A. La démonstration repose sur l'équivalence du complexe de Chevalley-Eilenberg avec un complexe de co-invariants sous le groupe symétrique. Un problème de stabilité est également étudié : à partir de quel rang l'inclusion des matrices

$$\mathcal{G}l_r(A) \hookrightarrow \mathcal{G}l_{r+1}(A)$$

induit-elle un isomorphisme en homologie ? Cette question est liée à l'homologie cyclique de Milnor. L'auteur propose une conjecture en termes de Λ-décomposition. Des calculs analogues sont présentés pour l'homologie à coefficients dans la représentation adjointe (Goodwillie), pour les matrices antisymétriques et symplectiques (Loday-Procesi), et pour l'homologiees algèbres de Leibniz (Cuvier).

Le chapitre 11 est une introduction à la $K-$théorie algébrique, et présente la construction du caractère de Chern dans le cas général. Le sous-groupe normal $E(A)$, des commutateurs de $GL(A)$ est un groupe parfait. Le groupe $K_2(A)$ se définit en termes d'extension centrale universelle de $E(A)$ (Kervaire-Milnor.) La construction + de Quillen permet de poser, dans le cas général la définition $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+), n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, la suite d'égalités

$$\pi_1(BGL(A)^+) = \pi_1(BGL(A))/E(A) = GL(A)/E(A) = K_1(A)$$

montre que l'on retrouve le groupe K_1 de Bass-Whitehead. Plusieurs réalisations de l'espace de Quillen $BGL(A)^+$ sont décrites, dont le modèle de Volodin, qui est un espace de matrices triangulaires supérieures relativement à un ordre partiel des entiers. L'utilisation de ce modèle, et le théorème de Loday-Quillen permettent d'établir l'isomorphisme rationnel de l'homologie cyclique relative et de la $K-$théorie algébrique des paires (A, I), pour un idéal bilatère nilpotent (Goodwillie). Le caractère de Chern, défini sur $K_n(A)$, à valeurs dans l'homologie cyclique négative est basé sur l'application de Hurewicz : $\pi_n(BGL(A)^+) \to_n (BGL(A)^+) = H_n(GL(A))$, composée avec l'application de Connes, Karoubi et Jones du chapitre 8. Une version relative est également proposée. La dernière partie de ce chapitre traite de $K-$théorie topologique et de classes caractéristiques secondaires. Ici, A est une algèbre de Banach complexe, et $GL(A)$ est considéré comme groupe topologique. Une propriété essentielle de la théorie topologique est une périodicité d'ordre 2 (périodicité de Bott). Le caractère de Chern construit pour la $K-$théorie algébrique factorise par la $K-$théorie topologique, en un caractère de Chern topologique. L'application naturelle $B^\delta GL(A)^+ \to BGL(A)$ définit un groupe relatif de $K-$théorie, pour lequel un caractère de Chern est également construit (Karoubi, Connes-Karoubi.)

Le chapitre 12 présente, sans démonstrations, des applications à la géométrie des espaces non commutatifs : algèbres de feuilletages, invariant de Godbillon-Vey, modules de Fredholm finiment sommables et modules θ sommables. La conjecture de Novikov et l'application de Baum-Connes sont présentées avec plus de détails, ainsi que l'approche par le théorème d'indice de Connes-Moscovici (Connes, Connes-Moscovici.) Une version $K-$théorique de la conjecture de Novikov (basée sur une construction de l'auteur) et les résultats de Bökstedt, Hsiang, et Madsen terminent le chapitre

Le dernier chapitre, en collaboration avec T. Pirashvili, concerne l'homologie de Mac Lane, et ses relations avec la $K-$théorie stable de Waldhausen. L'homologie de Mac Lane est définie à partir d'un complexe de chaines lié à la construction (cubique) d'Eilenberg-Mac Lane. Il est montré que cette homologie s'interprète comme un foncteur Tor sur les « bimodules non additifs ». La catégorie des « bimodules non additifs », introduite au début du chapitre, est une catégorie de foncteurs généralisant la notion de bimodule (qui sont vus comme des foncteurs additifs.) Un résultat analogue existe pour la cohomologie et les Ext (Jibladze-Pirashvili.) L'auteur introduit ensuite la $K-$théorie stable de Waldhausen, et présente le résultat de Dundas et McCarthy établissant, via le travail de Jibladze-Pirashvili, l'isomorphisme avec l'homologie de Mac Lane. Le chapitre se termine avec des exemples de calcul.

Chaque chapitre est accompagné d'une notice historique, et d'une liste de références guidant le lecteur désireux d'approfondir un point précis. Des exercices présentent des approches différentes, ou des résultats complétant le texte ; l'indispensable matériel technique est regroupé en cinq appendices. Une bibliographie abondante figure en fin de volume. La rédaction est trés soignée. Ce livre, de 513 pages, est un outil de travail précieux. Le débutant y trouvera un moyen d'accès rapide aux divers aspects du sujet. Il constituera pour le lecteur averti un ouvrage de référence, dense et complet, avec plusieurs démonstrations originales. Il était devenu nécessaire de pouvoir disposer d'une telle ressource.

Richard Zekri. Université de la Méditerranée

Intersection theory
W. Fulton
Springer Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2e édition (première édition 1984), 1998

Associer une *multiplicité* à une solution isolée x_0 d'un système de n équations polynomiales dépendant de n variables a été la source de bien des développements en géométrie algébrique et en algèbre commutative. Deux types de méthodes, parfois difficilement discernables, se partagent les faveurs des géomètres/algébristes :

– l'approche *dynamique* consiste à déformer les équations pour se ramener à une situation d'intersection propre (tous les points d'intersection sont isolés) puis à suivre en sens inverse les solutions qui tendent vers la solution x_0 ;

– l'approche *statique* a été le moteur de l'algèbre commutative, qui exprime la multiplicité d'intersection comme dimension du quotient d'un anneau par un idéal d'intersection.

La géométrie énumérative, certaines branches de la combinatoire, ont besoin pour leur développement de l'existence d'une théorie d'intersection qui couvre des situations variées, singulières notamment.

L'approche de Grothendieck du théorème de Riemann-Roch a complètement renouvelé les méthodes de la théorie d'intersection. De fait, démontrer R-R dans un cadre algébrique singulier assez général a été l'un des objectifs essentiels de la géométrie algébrique dans les années 60-70. Les retombées sont multiples, comme par exemple des formules de décompte du nombre de points entiers dans un polyèdre convexe (du nombre de façons d'acheter sa baguette de pain avec des pièces de $0,01$ et $0,02$ et $0,05$ Euro, ainsi que le présente Michèle Vergne).

Néanmoins, la théorie de l'intersection – en géométrie algébrique – présente de nombreuses chausse-trappes :

– Dans l'approche dynamique, la justification du « principe de continuité » cher à Poncelet a provoqué de nombreuses controverses : par exemple, le cône sur une quadrique lisse de l'espace projectif $\mathbf{P}^3$ contient des sous-variétés (ici, tout plan engendré par le sommet du cône et une génératrice de la quadrique) qui ne sont rationnellement équivalent à aucun cycle ne passant pas par le sommet. C'est le *lemme de déplacement* de Chow qui précise le cadre (lisse et quasi-projectif) dans lequel le principe de continuité s'applique. D'après Fulton, « most foundational treatments of intersection theory based on a moving lemma have failed to take care that all auxilliary constructions preserve properness of intersections », et il sait de quoi il parle...

– Dans l'approche statique, l'idéal à considérer pour calculer une multiplicité d'intersection n'est pas nécessairement la somme des idéaux de chaque variété. Ainsi, la variété égale à la réunion des plans $\langle x, y\rangle$ et $\langle z, t\rangle$ dans $\mathbf{C}^4$ a pour idéal (xz, yz, xt, yt) et la multiplicité d'intersection à l'origine avec le plan transverse $(x - z = 0,\ y - t)$ est égale à 2 (par déplacement du plan) alors que l'on a

$$\dim \mathbf{C}[x, y, z, t]/(xz, yz, xt, yt, x - z, y - t) = 3.$$

Dans son livre, Fulton choisit l'approche statique pour *définir* une théorie de l'intersection qui sorte du cadre projectif ou quasi-projectif.

Soit par exemple le problème de définir en toute généralité l'intersection de deux sous-variétés algébriques A et B d'une variété algébrique lisse M sur un corps. On cherche à obtenir un cycle, somme de sous-variétés algébriques de dimension $a+b-m$ affectées de multiplicités, à équivalence rationnelle près, contenu dans l'ensemble $A \cap B$, ensemble qui peut être de dimension $> a + b - m$ (intersection non propre). La recette de Fulton est simple : prenez la diagonale Δ du produit $M \times M$ et posez (avec J.-P. Serre) $A \cdot B = (A \times B) \cdot \Delta$; pour définir ce dernier terme, remplacez la variété $M \times M$ par le fibré normal N_M de Δ dans $M \times M$ et $A \times B$ par le cône normal $C_\Delta(A \times B)$ de Δ dans $A \times B$; posez alors $(A \times B) \cdot \Delta = C_\Delta(A \times B) \cdot \Delta$, où maintenant Δ est la sectionnulle de N_Δ ; enfin, dans la situation conique, profitant du fait que l'intersection d'un cône avec la section nulle est aussi la projection du cône sur sa base, définissez l'intersection dans le groupe d'homologie $H_{2(a+b-m)}(A \cap B)$ ou le groupe de Chow $A_{a+b-m}(A \cap B)$ comme la classe de Segre correspondante du cône (qui utilise uniquement la notion de classe de Chern d'un fibré en droite et l'isomorphisme de Thom).

Le secret de la recette réside dans l'existence d'une famille *plate* à un paramètre de variétés algébriques reliant $M \times M$ à N_Δ et $A \times B$ à $C_\Delta(A \times B)$; une telle construction apparaît déjà dans la démonstration du lemme d'Artin-Rees en algèbre.

Le développement de cette approche, agrémenté d'exemples multiples et variés, occupe le premier tiers du livre.

Le traitement que donne Fulton du théorème de Riemann-Roch met bien en évidence les questions posées, à la fin des années 70, par la généralisation de ce théorème au cas singulier et la manière dont celle-ci a été obtenue.

Lorsque $f : X \to Y$ est une application propre entre variétés algébriques lisses, la formule de Grothendieck entre classes de cohomologie

$$f_*(\mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{Td}(X)) = \mathrm{ch}(f_* E) \cdot \mathrm{Td}(Y),$$

où $\mathrm{ch}(E)$ est le *caractère de Chern* du fibré E et $\mathrm{Td}(X)$ la *classe de Todd* de la variété X, utilise la lissité de X et Y notamment pour définir l'image directe f_* des classes de cohomologie.

Dans le cas singulier, c'est une classe d'*homologie* $\tau_X(E)$ qui remplace la classe $\mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{Td}(X)$, de sorte que la définition de f_* ne pose plus de problème.

Il faut se souvenir que l'*homologie d'intersection* était inventée à la même époque et que, quelques années auparavant, MacPherson avait défini suivant le même principe des classes de Chern de variétés singulières.

C'est d'ailleurs la *construction du graphe* de MacPherson, analogue grassmannien de la déformation au cône normal, qui est utilisée comme outil pour définir le caractère de Chern localisé intervenant dans la définition de la classe τ_X.

Le livre de Fulton est devenu un livre de référence dans le domaine, notamment à cause des nouvelles méthodes qu'il a popularisées. La seconde édition ne comporte pas de nouveauté par rapport à l'édition originale, mais on trouve dans l'édition de 1996 du volume « Introduction to intersection theory in algebraic geometry » (CBMS Regional Conference series in Math., vol. 54, AMS (1984 et 1996)) du même auteur, outre une présentation claire des principaux thèmes abordés dans le livre, un certain nombre de commentaires sur les développements récents.

Claude Sabbah. CNRS, Ecole Polytechnique, Palaiseau

Representations and invariants of the classical groups
Roe Goodman, Nolan R. Wallach
Cambridge, encyclopedial of math. and its app. 68, 1998

Dans ce livre, il s'agit des groupes classiques complexes c'est-à-dire des groupes algébriques sur $\mathbb{C}$ définis comme groupes d'automorphismes d'une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique éventuellement dégénérée sur un espace vectoriel de dimension finie. Ces groupes sont les exemples les plus connus des groupes réductifs complexes et ils interviennent naturellement dans différentes branches des mathématiques. L'exemple le plus simple d'un tel groupe ést le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbb{C}^n$.

Le livre commence classiquement par décrire ces groupes, leurs formes réelles et leurs formes compactes. C'est une façon discrète d'introduire les outils pour les méthodes analytiques (prolongement holomorphe à partire d'une forme compacte). Ce point de vue sera peu utilisé dans le livre qui est de nature essentiellement algébrique. Dans les tous premiers chapitres, on trouve aussi les théorèmes de structure introduisant les tores, les systèmes de racines, le groupe de Weyl ...

Puis débute l'étude des représentations de dimension finie. Le théorème du bi-commutant est énoncé de façon générale pour une sous-algèbre semi-simple de $End\, V$ (où V est un espace vectoriel de dimension finie). Cela amène l'étude de la théorie classique des invariants ; pour V l'espace naturel sur lequel le groupe opère, il s'agit de décrire des générateurs pour l'algèbre des polynômes invariants :

$$P\big(\underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{k \text{ copies}} \times \underbrace{V^* \oplus \cdots \oplus V^*}_{m \text{ copies}}\big).$$

Les auteurs du livre donnent aussi des descriptions complètes pour l'action du groupe considéré dans l'algèbre tensorielle et dans l'algèbre extérieure de V ainsi que la décomposition de l'algèbre des polynômes $P(V)$ en tant que bimodule sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[G]$ et l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à coefficients polynomiaux.

Un chapitre important est consacré au calcul du caractère d'une représentation de dimension finie, formule due à Weyl ; ce chapitre présente 2 méthodes pour la démonstration de cette formule. La méthode originale de Weyl est analytique ; l'autre méthode, algébrique, repose sur des calculs de cohomologie extrêmement intéressants et utiles en eux-mêmes, dus à Kostant. Les auteurs déduisent de cette formule du caractère des formules pour la restriction des représentations à des sous-groupes, par exemple la restriction de $GL(n, \mathbb{C})$ à $GL(n-1, \mathbb{C})$ ou de $Sp(2n, \mathbb{C})$ à $Sp(2n-2, \mathbb{C})$.... Certaines de ces formules sont remarquables puisque la restriction s'y fait avec multiplicité 1.

Après ce chapitre intermède, les auteurs retournent à l'étude de $\otimes^k V$; ils montrent comment le théorème du bi-commutant permet d'introduire une dualité. L'exemple bien connu est celui où le groupe est $GL(V)$ et la dualité se fait alors entre représentation de $GL(V)$ se réalisant dans $\otimes^k V$ est celles du groupe des permutations de k-éléments opérant lui aussi naturellement sur cet espace vectoriel. Celui des autres groupes classiques est plus subtil est moins connu ; certaines des idées développées sont dues à Howe et datent d'une vingtaine d'années. Pour développer la curiosité du lecteur, les auteurs concluent leur présentation de la théorie des invariants par une application en théorie des nœuds : après avoir défini rapidement le groupe des tresses, ils montrent comment obtenir l'existence et l'unicité des polynômes de Jones. Ces polynômes calculent la trace des opérateurs associés aux éléments du groupe des tresses dans certaines représentations.

Les derniers chapitres du livre reviennent à des propriétés de base des groupes algébriques affines complexes ainsi que de leur action dans l'algèbre des fonctions régulières sur une variété algébrique affine munie d'une opération algébrique du groupe. Les auteurs introduisent aussi les espaces homogènes et les paires sphériques.

Ce livre est donc très ambitieux. Son style clair et précis, ses démonstrations complètes et ses nombreux exercices en font un livre de qualité tout à fait accessible aux étudiants de 3e cycle. Il s'adresse aussi à tout mathématicien confirmé confronté à un problème de représentation de dimension finie d'un groupe classique (complexe). Le livre fait 685 pages !

Par endroit la terminologie m'a surprise tout spécialement la disparition sans explication des diagrammes de Young au profit de ceux de Ferrers, Ferrers n'apparaissant d'ailleurs pas dans la bibliographie.

Colette Mœglin. CNRS, Université Denis Diderot

Regards sur l'éthique des sciences
Gérard Toulouse
Hachette, Littérature, 1998

Gérard Toulouse, un physicien qui se qualifie lui-même d'ami des mathématiques, a écrit ce livre après avoir siégé dans un comité d'éthique pour les sciences. Et en l'écrivant, il espère pousser à un débat réellement public.

Les trois grands thèmes dégagés par l'auteur sont : la maîtrise du savoir (résultats de la science), la déontologie des chercheurs, comment fonctionnent les institutions. Mais ce livre est tout en nuances ; cela se sent dès le départ dans le rappel historique de la diversité des réponses que les scientifiques ont apportées aux questions difficiles que l'éthique leur pose régulièrement. Là où les scientifiques ont sans doute été les plus convaincants est dans leur action à la suite du manifeste Russell-Einstein avec la naissance de Pugwash ; c'est la volonté de maîtriser les armes nucléaires qui fut le moteur de cette action. L'auteur examine de façon savoureuse l'attitude de la communauté scientifique française au moment de la reprise des essais nucléaires.

Les premiers chapitres sont destinés à cerner la notion d'éthique des sciences, le champ est vaste : des simples problèmes de morale aux rapports entre ceux qui savent et ceux qui produisent ou gouvernent.

Dans la suite, l'auteur s'attache à la situation française ; il commence par décrire les différents lieux où se produit de la science : associations et fondations (il l'appelle le tiers secteur), les universités et les établissements publics. La discussion la plus longue porte sur le tiers secteur. G.Toulouse met en relief (en le regrettant) la pauvreté du rôle des fondations en France ; il n'élude pas les problèmes (éthiques) de leur financement. Le rôle des académies est longuement discuté et spécialement celui de l'Institut de France. L'auteur donne aussi une comparaison historique entre l'Académie des Sciences de Paris et la Royal Society of London ; il montre en quoi ces 2 académies sont typiques des 2 grands modèles d'académie que l'on trouve de part le monde.

Dans les derniers chapitres, l'auteur aborde 2 problèmes importants : celui du contrôle social et juridique de la production scientifique et celui de la responsabilité des chercheurs à l'égard de la société et des générations futures.

L'une des réussites de ce livre est de secouer l'inertie des scientifiques. Le choix des appendices y contribue grandement ; on y trouve des textes écrits par des personalités connues exprimant des opinions diverses et tranchées.

C'est donc un livre à lire spécialement par nous mathématiciens qui sommes un peu à l'écart des problèmes d'éthique fortement médiatisés.

C. M.

L'infini en mathématiques
Norbert Verdier
Flammarion, Dominos 130, 1997

Ce livre commence par introduire des questions. Comment l'infini s'impose-t-il en mathématiques par exemple chez les grecs ? Comment perturbe-t-il ou même gêne-t-il la compréhension de la notion de nombre ; en quoi est-il contraire à la méthode d'exhaustion introduite par Archimède pour comparer 2 surfaces. Cette méthode permettait à Archimède de montrer l'égalité de la surface d'un disque de rayon R et d'un triangle rectangle d'hypothénuse $2\pi R$ et de hauteur R sans passage à la limite.

D'après l'auteur, la théorie de l'infiniment petit ne commence réellement à s'élaborer qu'au 17e siècle. Entre l'époque grecque et ce XVII$^{\text{e}}$ siècle, le débat toutefois continue : le mathématicien Ibn Qurra (Bagdad 836-901) essaie de manipuler « l'infini » en posant par exemple la question 2∞ est-il égal à ∞ ; tandis qu'en occident l'infini est plutôt une question théologique. Mais l'auteur montre que la situation est loin d'être homogène. Progressivement le calcul d'aire et de volume (calcul intégral) est vu comme un passage à la limite (Grégoire de S^t Vincent 1584-1667) bien que cette notion soit encore prématurée. La première bonne compréhension de l'infiniment petit semble ensuite être faite d'un point de vue géométrique. Et c'est la traduction des problèmes géométriques en problèmes numériques qui repose de nouveaux problèmes ; une définition rigoureuse des nombres devient nécessaire et ne sera claire qu'au XIX$^{\text{e}}$ siècle.

L'auteur développe ensuite l'arithmétique de l'infini due à Cantor. Au passage il présente la personnalité de Cantor : un mathématicien passionné et anxieux face à la recherche. La suite de cette histoire est assez bien connue des mathématiciens. La théorie des ensembles de Cantor est durement attaquée mais Hilbert et son programme la confortent ; la formalisation d'Hilbert permet de redéfinir les fondements des mathématiques et les travaux de Gödel détruisent la binarité vrai/faux. L'indécidabilité de l'existence de cardinaux compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ est démontrée par Cohen (1963), question que Cantor avait essayé de résoudre toute sa vie.

Ces questions épuisent la première moitié du livre. La suite essaie de montrer le caractère fécond de la dualité fini-infini en développant les idées des mathématiciens rejetant l'apport de Cantor. En premier lieu, il est question de Brouwer et de l'intuitionnisme (hérité de Kant) : c'est le principe du tiers exclu qui ici est rejeté. On ne peut savoir si tous les éléments d'un ensemble infini ont une propriété en la testant sur tous les sous-ensembles ayant un nombre fini d'éléments. Brouwer est célèbre par son théorème du point fixe : une fonction continue f d'un ensemble (convenable) dans lui-même a au moins un point fixe. Pourtant 40 ans après avoir démontré son théorème Brouwer en donne un contre exemple ; d'un point de vue constructiviste seule l'existence de point presque fixe peut être prouvée. L'auteur évoque ensuite rapidement l'analyse non standard.

Pour finir, le livre pose la question de l'infini et des machines et l'auteur introduit les travaux de Girard concernant la logique linéaire qu'il situe à mi-chemin entre la logique classique et la logique intuitionniste.

Ce livre est un livre grand public format carte postale de 125 pages ; il se glisse facilement dans une poche ce qui est appréciable. Mais en contrepartie on ne peut espérer qu'il aille au fond de toutes les questions évoquées. Mais il a le mérite indiscutable de montrer l'importance de ces questions et de pousser le lecteur à y réfléchir, à comprendre que rien n'est acquis. Son style est clair, les exemples choisis sont élémentaires. Il est donc très agréable à lire et j'ai le sentiment qu'un tel livre est extrêmement bénéfique pour l'image des mathématiques.

C. M.