SOMMAIRE DU N° 82

Dates limites de soumission des articles
pour parution dans le n° 83 : *1er novembre 1999*
pour parution dans le n° 84 : *1er février 2000*

Mot de la présidente

La journée annuelle de la SMF a eu lieu le 19 juin à l'IHP. La partie scientifique a été consacrée cette année aux interactions entre mathématiques et physique, illustrées par trois brillantes conférences de Yann Brenier : *modélisation en hydrodynamique*, Richard Kenyon : *pavages du plan par des dominos* et Maxime Kontsevich : *périodes*.

Si ces conférences ont attiré un large public, force est de constater que celui de l'assemblée générale qui les a précédées était beaucoup plus restreint. Pourtant, la présentation du rapport moral, et le débat qui le suit, permettent à tout adhérent non membre du conseil d'administration de donner son avis et d'intervenir sur les orientations de la SMF. J'espère que l'an prochain vous serez plus nombreux à participer à ce moment important de la vie de la Société.

Lorsque j'ai rédigé le rapport moral (avril 99), le nombre d'adhérents était d'environ 1800, donc stable par rapport aux années précédentes. En fait, il est aujourd'hui d'un peu plus de 1900, ce qui représente une augmentation significative et montre que la SMF jouit d'une confiance grandissante dans la communauté mathématique. Je m'en réjouis et souhaite que cette progression se confirme l'année prochaine, afin de permettre peut-être à la SMF de fêter son 2000ème adhérent en l'an 2000 !

La SMF est de plus en plus sollicitée pour donner son avis sur des problèmes liés à l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. Le conseil de la SMF a demandé à la vice-présidente pour l'enseignement d'animer une commission enseignement – qui est totalement indépendante de la commission presidée par Jean-Pierre Kahane, mise en place par le ministère, dont je vous ai parlé dans le dernier numéro de la *Gazette* –. Cette commission est en train de se constituer et souhaite être informée des préoccupations des adhérents de la SMF concernant l'enseignement.

Mireille Martin-Deschamps

Vie de la société

Le renouvellement du conseil

Les élections au conseil du 19 juin 1999 ont donné les résultats suivants :
P. Cohen (600 voix - élue), M. Herzlich (598 voix - élu), N. Berline (586 voix - élue), M. Merle (572 voix - élu), B. Coupet (555 voix - élu), M. Brunaud (546 voix - élu), J. Bellissard (543 voix - élu), E. Logak (531 voix - élue), A. Helversen-Pasotto (468 voix), 11 bulletins nuls. Un certain nombre de personnes non candidates ont obtenu entre 1 et 3 voix.

Le conseil est maintenant constitué de : Y. Achdou, J. Bellissard, N. Berline, J.-P. Borel, M. Broué, M. Brunaud, P.-J. Cahen, G. Christol, P. Cohen, B. Coupet, C. Deschamps, R. Di Cosmo, J.-P. Henry, M. Herzlich, A. Jacquemard, E. Logak, M. Martin-Deschamps, J.-Y. Mérindol, M. Merle, J. Queyrut, G. Ruget, C. Sabbah, M. Vigué, B. Wirtz, M. Zisman.

L'élection du bureau et de la présidente

Le conseil s'est réuni le 20 juin et a réélu Mireille Martin-Deschamps présidente de la SMF. Le bureau est constitué de : Nicole Berline (vice-présidente, chargée de l'enseignement), Marc Brunaud (secrétaire), Paul-Jean Cahen (vice-président, chargé de la cellule de Marseille), Jean-Pierre Henry (trésorier), Claude Sabbah (vice-président, chargé des publications), Michel Zisman (vice-président, chargé du personnel).

Assemblée générale

Elle a eu lieu à l'IHP le 19 juin 1998. Les rapports ont été présentés : rapport moral par M. Martin-Deschamps, rapport sur les publications par C. Sabbah, rapport sur la cellule de Marseille par P.-J. Cahen, rapport financier par J.-P. Henry. Le rapport moral a été adopté à l'unanimité, le rapport financier est adopté avec 1 abstention. Vous pouvez les trouver sur le serveur.

Le serveur de la SMF – http ://smf.emath.fr

Il est possible d'effectuer des commandes d'ouvrages publiés par la SMF et de s'inscrire à la SMF directement sur le serveur.

Joindre la SMF par courrier, ou courrier électronique

Tout le courrier doit être adressé, soit au secrétariat, soit aux membres du bureau, soit aux comités de rédaction des revues et publications, à l'adresse de la SMF : IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris cedex 05.

– Secrétariat général
Claire Ropartz : `smf@dmi.ens.fr`

– Secrétariat des publications
Astérisque, *Bulletin* et *Mémoires*, *Panoramas & Synthèses*
Nathalie Christiaën : `christiae@dmi.ens.fr`
Officiel, *Gazette*, *Revue d'histoire des mathématiques*, *Collections* SMF
Nathalie Hermellin : `officiel@dmi.ens.fr`

– Bureau
Mireille Martin-Deschamps : `smf@dmi.ens.fr` ou `mmd@math.uvsq.fr`
Nicole Berline : `berline@math.polytechnique.fr`
Marc Brunaud : `Marc.Brunaud@ihp.jussieu.fr`
Paul-Jean Cahen : `paul-jean.cahen@math.u-3mrs.fr`
Jean-Pierre Henry : `henry@orphee.polytechnique.fr`
Claude Sabbah : `sabbah@math.polytechnique.fr`
Michel Zisman : `zisman@math.jussieu.fr`

Commission Enseignement

Elle est animée par Nicole Berline. N'hésitez pas à lui écrire à :
`berline@math.polytechnique.fr` ou Centre de mathématiques CMAT, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, tél 01 69 33 49 65, fax 01 69 33 30 19.

CIRM

Le poste de directeur du CIRM sera à pourvoir à compter du 1er septembre 2000 pour une période de 4 ans. Des informations supplémentaires concernant ce poste paraîtront dans le prochain numéro de la *Gazette*.

Mireille Martin-Deschamps

TRIBUNE LIBRE

Mathematics and the U.S. National Science Foundation

Donald J. LEWIS (*University of Michigan*[1])

Dans le contexte du débat actuel sur l'évolution du CNRS, le comité de rédaction de la Gazette *a sollicité cet article sur le subventionnement de la recherche mathématique par la National Science Foundation aux États-Unis.*

In November 1944, as the war was drawing to a close, President Franklin D. Roosevelt wrote Dr. Vannevar Bush, the Director of the Office of Scientific and Research Development, the wartime agency which served to mobilize civilian researchers, asking for a report on how the U.S. Federal government might promote scientific progress in the post-war era. Roosevelt felt that the lessons learned from this mobilization could be profitably employed in times of peace for the improvement of the nation's health, the creation of new enterprises bringing new jobs and the betterment of the national standard of living. He asked Bush to respond to four questions : How to foster the diffusion of scientific knowledge gained in the war ? How to deploy science against disease ? How to stimulate science in the public and private sector ? How to encourage the development of trained scientific talent ?

Bush's report, *Science — The Endless Frontier*, was published in 1945. His vision for the role of science and engineering in modern society serves as a blueprint for U.S. investment in scientific research and education even today. The central theme of the report was that the national health, economy and military security required the deployment of new scientific knowledge ; that the federal government had an obligation to ensure basic scientific progress and the production of trained scientific manpower ; and that a new federal agency should be established, funded and authorized to promote these ends.

The report stressed that the proposed agency had to preserve the « freedom of inquiry » needed to recognize that scientific progress results from the « freeplay of free intellects working on subjects of their own choice, in the manner dictated by their curiosity for an explanation of the unknown. »

The report was very much based on Bush's wartime experience as well as his previous experience as a faculty member at MIT. He could envision how what seemed impractical and eccentric could have profound impact on weaponry, health and the economy. He firmly believed that the wartime production of

[1] The author is a professor at the University of Michigan, who has just completed a four year term as Director of Division of Mathematical Sciences of the National Science Foundation.

technological miracles (atomic bomb, penicillin, etc.) had depleted the reservoir of fundamental knowledge and the supply of individuals capable of generating new knowledge. He was particularly aware of the inclination, due to America's practical culture, to foster applications of knowledge rather than advancement of knowledge. Prior to the war, government (agriculture, military) and industrial investment in research was ten times that available for academic research. Further, Bush felt to advance fundamental science it needed to be freed from the clutches of the military and to be centered at the universities under civilian control.

The report received an enthusiastic response from the media and the academic scientists. However, the response by Congress was not so enthusiastic and there was a desire for more government control than envisioned by Bush. In 1950, in response to the report, the National Science Foundation (NSF) was established and its mission was along the principles enunciated by Bush. NSF's charter called for it to concentrate on basic science and engineering. While a sister agency, the National Institutes of Health (NIH), was given the responsibility for health sciences. However, the lapse of time enabled the military to advance their funding of civilian research and for several decades the Office of Naval Research (ONR) had a much larger budget than did NSF. The ONR funded free inquiry research with the quiet understanding that if the Navy had needs, the civilian scientists should respond. The early part of my own career well illustrates the funding of pure mathematics by ONR. I am a number theorist. In the late forties, part of my graduate education was funded by ONR ; in 1952, I was offered a postdoctoral fellowship by both the NSF and ONR, and in the 1960's I had a number of postdoctorates funded by ONR.

Not to be outdone by the Navy, the Army and the Airforce also established offices to fund civilian researchers, although they had an emphasis on problems of interest to the military. The Defense Advanced Research Project Agency (DARPA) came later and only lately has funded mathematics. About the same time, it was decided to put the nuclear effort under civilian control and the Department of Energy (DOE) was established and assumed a major role for the funding of nuclear and high energy physics. DOE has a small mathematics program. The National Aeronautical and Space Agency (NASA) has funded space based observatories but no mathematics. Thus in short order there was a proliferation of agencies supporting civilian scientists at universities. Indeed, except for Mathematics and the Social Sciences, even today, NSF provides less than 40% of federal funding of academic researchers, quite opposite to Vannevar Bush's plan. About 15 years ago the National Security Agency (NSA) established a small grants program in mathematics. It is not unusual in the United States to have an initiative funded by several agencies and by several political units. This can be advantageous if one unit falls in disfavor or low interest.

DOE, NASA and the defense agencies have supported free standing research laboratories. Among them are the Naval Research Lab, Los Alamos National Lab, Lawerence Berkeley Lab, and NASA-Ames Lab. These have rather specific missions. None were mathematically oriented, although all had mathematical groups and most supported mathematics postdoctorates and had many mathematicians as consultants. In 1988, and 1990, the NSF had competitions to fund

Science and Technology Centers. These centers, limited in number, were established to attack a specific class of problems, were associated with a university and involved industrial collaborators. They had a maximum of eleven years of NSF funding. The Geometry Center at University of Minnesota and the Center for Discrete Mathematics and Computer Science at Rutgers University were mathematically oriented. Both of these have come to the end of NSF funding. The NSF did have another S & T competition in 1999 and it is doubtful that any mathematical center will be funded.

The cold war and in particular Sputnik led to substantial increase in federal funding of science and to increases in the NSF budget. By the mid-sixties essentially every active academic mathematics researcher had summer funding from some federal agency — however this situation did not long prevail. This emphasis on research in universities as well as the emphasis on training large numbers of scientists completely changed American universities and led to the creation of the research university. Prior to World War II research occurred in the major universities, but on a very small scale. It was not the dominant factor in determining promotions that it has become today. Funding of lab instruments fell to universities and private foundations.

Summer funding is perhaps a peculiarity of the United States. Until well into the twentieth century, the U.S. was an agrarian country ; indeed until about ten years ago its largest export has been agricultural products. As a consequence, many customs and practices have an agrarian origin. In earlier days, farm children were expected to help on the farm — even as late as 30 years ago, many school districts closed in October for the potato harvest. Hence, elementary and secondary schools only operated for 8 or 9 months and teachers were only paid for those months. This practice carried over to the colleges and universities and even today faculty are nominally paid only for the academic year, although they may be paid in 12 installments. Prior to the late fifties, science and engineering researchers sought summer consultantships in industry or other work. For academic research to flourish, it was highly desirable to support such in the summer, and hence federal agencies began to provide summer funding.

Included in the charge to both NSF and NIH was the development of scienctific manpower. In the 50's and 60's they did so by having national graduate fellowship competitions and by providing large training grants to leading departments. The result was that by 1970 the universities were producing more scientists than the market could support, especially since the large growth in postsecondary education enrollment had come to an end. This growth was due to substantial educational aid to veterans and to the increased birth rate immediately following the war. As a consequence of the over supply, the NSF ended its traineeship program and the emphasis shifted from funding education and research to only funding research. The lab sciences were able to make the case that they could not carry on their research without graduate and postdoctoral assistants and so their grants contained funding for such positions. The mathematicians couldn't or wouldn't make the same case and were content to provide support for graduate students via teaching assistantships. One consequence was the funding for mathematics didn't keep pace with that for the lab sciences and engineering. The use of graduate students to meet teaching needs led to an emphasis on selecting mathematics students with a strong interest and ability in teaching. This led the mathematics students to over focus on academic careers to the exclusion of other career opportunities.

Following the David Report of 1984, the NSF returned to supporting graduate students and postdoctorates in mathematics in a small way, and in 1998 the Grants for Vertical Integration of Research and Education in the Mathematical Sciences (VIGRE)[2] program was initiated and greatly increased such funding. Nevertheless, funding for graduate students and postdoctorates in mathematics still greatly trails that for the other sciences. In the last five years there has been a growing emphasis by the NSF on the integration of research and education and this is reflected in the goals of the VIGRE program. The VIGRE program provides support for research activities involving undergraduate students, graduate students and postdoctorates and seeks to create with the faculty a community of scholars with a minimum of walls between groups. It also seeks to broaden the education of mathematics students in the other sciences.

The scientific community was often quite critical of the Vietnam War and a fair number of researchers funded by the Defense agencies were quite outspoken. The net result was that Congress passed the Mansfield Amendment that limited the defense agencies to funding research directly related to their mission. In particular, the ONR had to end its funding of such areas as number theory, topology, geometry, and non-applied analysis. This loss of funding was not picked up by the NSF or other agencies.

Since the cold war, the defense agencies have steadily reduced their funding of mathematics to the point that the NSF now provides over 70% of the federal funding for mathematics. In the last two years, NIH has shown an interest in funding multidisciplinary research involving mathematics and this may reverse the discipline's growing dependency on NSF for funding. Presently, only one-third of active researchers in academic mathematics departments receive federal funding while two-thirds of the active researchers in academic physical science departments receive federal funding and an even larger percent do in engineering and the biological and medical sciences. Those mathematicians without funding do do research, but often in their spare time and except for small grants from their universities have little funding for travel or equipment. They are indeed very dedicated researchers who persist with little financial encouragement.

While the NSF has done a reasonable job in keeping to Vannevar Bush's ideal of free inquiry, the NSF has never been as apolitical as Bush sought or as mathematicians generally believe. In particular, in the last eight years essentially all increases in the NSF budget have been targeted toward areas the Office of the President sees as promoting the economic welfare of the nation. Thus, there has been funding for high performance computing, materials science, internet development, to name a few. All the increase in Fiscal Year 1998 was for Knowledge and Distributed Intelligence (KDI) and the requested increase in Fiscal Year 2000 is for Information Technology (network and software development, terraflop computer) and Biocomplexity. Mathematicians have had and do have a role to play in these targeted areas, but it is a supportive role and is not one

[2] Program Announcements for specific programs such as VIGRE can be found on the NSF/MPS/DMS web pages.

that warms the average mathematician's heart. KDI had three components — a major one being Computational and Mathematical Modeling. This emphasis on targeted research has undermined the funding of the core of most disciplines.

To obtain funding from NSF and NIH, the individual investigator or a team of investigators makes a proposal to a disciplinary division to work on a certain class of problems, describing the significance and probable impact of the proposed research and the method to be used in the attack. The proposal might call for support of graduate students, postdoctorates, consultants, equipment, as well as summer support of the senior researchers — usually proportional to academic salary.

The proposals are then reviewed by a peer group familiar with the proposed area of research. Finally, the Program Officers fund proposals they deem to be the strongest within the limits of their allocated budgets. Often there is negotiation as to the size of the budget.

Besides these individual investigator awards, the Division of Mathematical Sciences (DMS) funds some research conferences, several research institutes such as MSRI, IAS, IMA, a competitive postdoctoral program, and as of 1998, the VIGRE program which provides block grants to Departments for support of undergraduates, graduate students and postdoctorates. In every case there is a competition. For example, DMS is about to complete a recompetition for research institutes. The Foundation has a number of competitions that cut across disciplines, e.g., KDI.

Budgets for Divisions and programs are to a considerable extent based on history, with modest changes between programs reflecting changing quality of proposals. However, what is funded within a program changes rather dramatically over a five to ten year period reflecting new directions of research.

Proposed budgets for Divisions are in the domain of the Assistant Directors of the various Directorates and reflect suggestions of and negotiations with the Division Directors. There are seven research Directorates within NSF. DMS is in the Mathematical and Physical Sciences Directorate (MPS) which consists of five divisions : DMS, Chemistry, Physics, Astronomy, and Materials Research. The Assistant Directors makes budget proposals to the Director, who in turn arrives at a proposed budget. This is submitted for discussion to the Office of Management and Budget (OMB) of the Office of the President in June. Discussions over the next three months leads to a refined proposed budget. Between October and January, OMB with the President determine what the President will recommend in his budget message to Congress in late January. Congress disposes with these recommendations, as it seems fit, subject to Presidential veto. The NSF allocation is included in the Independent Agencies Appropriation Bill. The Independent Agencies include NSF, NASA, Housing and Urban Development (HUD), Veterans Hospitals and Americorp, a domestic analog of the Peace Corp. While funding for science is usually favorably received by both political parties, scientists are poor lobbyists and often science funding looses out to the pressure from veterans and from housing advocates. Once a bottom line budget for NSF has been determined, the Director determines the bottom line for each Directorate ; the Assistant Directors of the Directorates do the same for the Divisions and the Division Directors do so for the various Programs in the Division. The process from early discussions in the Directorates to program allocations takes about 22 months.

For Fiscal Year 1999, the NSF Operating Budget is $3.68 billion. In contrast, that for NIH is $15 billion. For Fiscal Year 1999, the Operating Budget for DMS will be $101 million. Approximately $15 million will go to support the VIGRE and the postdoctoral fellowship program ; $15 million will support graduate students and postdoctorates on individual awards, $6 million will support research institutes and the remainder will support individual investigators. Attached to any individual investigator award are funds which go to the university for costs incurred in research such as space, heat, light, janitor services, and library. Typically, that charge is about 30% of the grant but could be more or less depending on negotiations the university has had with the federal government.

Typically, NSF investigator awards provide senior investigators with 2/9ths of academic year salary for 2 months of summer research — it is presumed that the university pays for research during the academic year. For over a decade the DMS has provided the full 2 months of summer salary only for young researchers and for those senior researchers judged by NSF to be leaders and innovators in their field. Other DMS funded researchers receive less than 2 months of summer salary, usually one month. This policy is contrary to recommended NSF policy to fully fund those it funds, and was instituted in response to the demands of the mathematical community that more researchers receive at least some support. Acquiescing to these demands may have been a strategic mistake since it relieves pressure for greater funding of mathematics.

The DMS budget is the smallest of any of the divisional budgets within MPS, and DMS provides a larger percentage of the federal investment in that discipline than do the other divisions. Further, the mathematics academic community is larger than are those of the other MPS divisions. Part of this difference in budget is due to the need of the lab for sciences for significant investments in equipment. The underfunding of the mathematical sciences compared to other sciences has been debilitating. The mathematical community has not found an advocate that can make the case for more funding, in contrast to the other disciplines. Mathematicians have been ineffective in showing to the general populace that they are making the contributions Roosevelt saw for science during times of peace : improved wealth and health. One glimmer of hope lies in the fact that as science attacks more complex problems, mathematics must play a more essential role. If mathematicians choose to become involved in multidisciplinary research, the other sciences might become advocates for mathematics.

Gammes naturelles (suite)

Yves HELLEGOUARCH (*Université de Caen*)

L. Euler a affirmé en 1766 que « l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible ».

Dans les quatre premiers paragraphes nous avons donné un sens précis à cette affirmation en considérant l'échelle musicale constituée par le sous-groupe $< 2, 3 >$ de $\mathbb{Q}_+^*$, une « gamme abstraite » $< 2, 3 > /N$ où N est un sous-groupe de rang 1 de $< 2, 3 >$ engendré par un comma et la « gamme concrète » correspondante formée des représentants de plus petite hauteur des classes de $< 2, 3 >$ modulo N.

5. Limite des gammes de Pythagore Γ_n lorsque $n \to \infty$

On suppose ici que l'échelle choisie est $G =< p, q >$ où p et q sont des entiers premiers entre eux tels que $1 < p < q$ et on reprend les notations du §3.
Soit $r \in G$ et soit Γ_n une gamme de G. Lorsque n tend vers l'infini le degré $d_n(r)$ de r dans la gamme Γ_n tend vers $\pm\infty$ si $r \neq 1$, mais nous allons voir que $\dfrac{d_n(r)}{d_n(p)} = \dfrac{d_n(r)}{\mid y_n \mid}$ possède une limite dans $\mathbb{R}$.

Théorème 7. — *Soit $r \in G =< p, q >$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque n tend vers l'infini $\dfrac{d_n(r)}{d_n(p)}$ tend vers $\mathrm{Log}_p(r)$.*

Preuve – Par définition nous avons :

$$r \equiv r_{n-1}^{d_n(r)} \quad \text{modulo} \ < r_n >$$

Posons $r = p^x q^y$, on a alors :

$$\begin{cases} x = d_n(r)x_{n-1} + hx_n \\ y = d_n(r)y_{n-1} + hy_n \end{cases} \qquad h \in \mathbb{Z}$$

et en éliminant h entre ces deux équations, on trouve :

$$d_n(r) = \frac{y_n x - x_n y}{y_n x_{n-1} - x_n y_{n-1}}$$

En se rappelant que $| y_n | x_{n-1} + (-1)^{n+1} x_n y_{n-1} = 1$ on en déduit que :

$$\frac{d_n(r)}{| y_n |} = x + y\frac{p_n}{q_n}.$$

Comme $\frac{p_n}{q_n}$ tend vers $\mathrm{Log}_p(q)$, on voit que $\frac{d_n(r)}{d_n(p)}$ tend vers $\mathrm{Log}_p(r)$. ∎

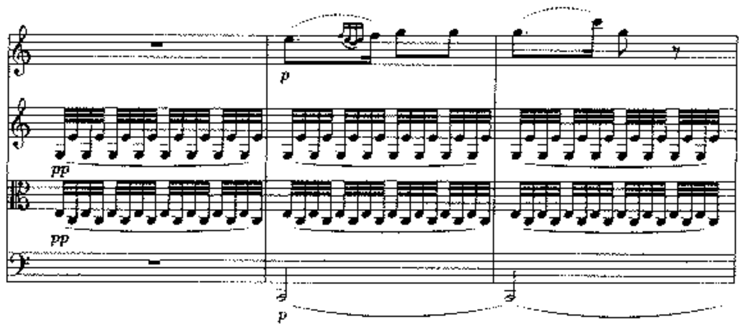
Remarques: 1) Lorsque r est donné dans G, il devient le représentant de plus petite hauteur de sa propre classe lorsque n est assez grand.

2) On peut interpréter le théorème 6 en disant que les limites des gammes de Pythagore sont des gammes tempérées continues, ce qui correspond bien au caractère « olympien » des tempéraments correspondants.

3) On a en fait donné une nouvelle construction des logarithmes de base entière des nombres rationnels !

6. Gammes des groupes de rang 3

Les musiciens qui ont la chance de jouer le quatuor en ut avec flûte de Mozart, savent que le second mouvement contient un passage d'une clarté harmonique intense



lorsque les instruments jouent dans un tempérament convenable : les tierces majeures mi/do de l'alto doivent être pures (intervalle 5/4) ce qui rend le do grave inévitable comme octave du son différentiel (ou son de Tartini) de fréquence 5-4.
Quant à la tierce mineure sol/mi (intervalle 6/5) entre le violon et l'alto, elle ne fait que renforcer le son différentiel précédent (6-5=1).

L'échelle musicale de ce quatuor doit donc contenir les nombres premiers $2, 3$ et 5 : ce doit être au moins l'échelle de Zarlino $< 2, 3, 5 >$ (et le passage serait encore plus beau si l'on remplaçait le violoncelle par une contrebasse).
On peut définir les commas du groupe $G =< 2, 3, 5 >$ comme on l'a fait au paragraphe 2 et on trouve :

$$2, \frac{3}{2}, \frac{2^2}{3}, \frac{5}{2^2}, \frac{2.3}{5}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2.5}{3^2}, \frac{2^4}{3.5}, \frac{5^2}{2^3.3}, \frac{3^4}{2^4.5} = \text{ comma de Didyme,}$$

$$\frac{2^{11}}{3^4.5^2}, \frac{5^6}{2^6.3^5}, \frac{3^8.5}{2^{15}}, \frac{2^{38}}{3^2.5^{15}}, \ldots$$

Nous allons maintenant considérer le groupe quotient de $G =< 2, 3, 5 >$ par le sous-groupe $< r, r' >$ engendré par $r = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ et $r' = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} 5^{\gamma'}$.

Théorème 8. — *Soient r et $r' \in G$ et $N =< r, r' >$.*
1) Posons :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' \\ y & \beta & \beta' \\ z & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Si le p.g.c.d. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ est égal à 1, alors G/N est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

2) Dire que la classe de $s = 2^a 3^b 5^c$ est un générateur de G/N équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & \gamma & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c = \pm 1.$$

Preuve –
1) Dire que p.g.c.d. $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = 1$ équivaut à affirmer l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \pm 1$$

en vertu du théorème de Bézout.

2) Mais cette dernière condition signifie que $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$ constituent une base de $\mathbb{Z}^3$.
Si nous posons $K = \mathbb{Z}(\alpha, \beta, \gamma) + \mathbb{Z}(\alpha', \beta', \gamma')$, nous voyons que $\mathbb{Z}^3/K$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ et engendré par la classe de (a, b, c). Mais ceci est juste la forme additive du résultat que nous voulons obtenir. ∎

Exemples : Nous allons « améliorer » les gammes de Pythagore, correspondant aux groupes $< 2, 3 > / < r >$, que nous avons obtenues dans le paragraphe 4.
Pour chaque comma r de $< 2, 3 >$ nous chercherons un comma r' de $G =< 2, 3, 5 >$ qui « dépende » de 5 et qui satisfasse au théorème précédent : on posera $N =< r, r' >$.
Soit φ la projection canonique $G \to G/N$ et soit $P = \varphi(< 2, 3 >)$. Comme $\operatorname{Ker} \varphi \cap < 2, 3 > = < r >$ on voit que P est isomorphe au groupe quotient $< 2, 3 > / < r >$ dont on était parti (mais certains représentants de ce groupe doivent être remplacés par des éléments de $< 2, 3, 5 >$ de plus petite hauteur dans le groupe G/N).

Finalement le nombre de degrés[1] de G/N dans une octave est égal à celui de P multiplié par l'indice de P dans G/N.
Lorsque cet indice est égal à 1, on dira que la gamme obtenue *affine* notre gamme de Pythagore, sinon on dira que l'on a obtenu une « *nouvelle gamme* ».

1) $r = \dfrac{2^2}{3}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	2	2	2	2	$\frac{5}{2^2}$	2

2) $r = \dfrac{3^2}{2^3}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$

3) $r = \dfrac{2^8}{3^5}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
s	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$

4) $r = \dfrac{3^{12}}{2^{19}}$

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$	$\frac{5^6}{2^6\times 3^5}$
s	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$

On voit donc apparaître des phénomènes intéressants dans les cinquièmes colonnes des trois premiers tableaux ainsi que dans les trois dernières colonnes du dernier tableau. Nous allons étudier en détail les gammes correspondantes que nous désignerons sous le nom générique de gammes de Zarlino (du nom de la quatrième du dernier tableau).

$(r, r') = \left(\dfrac{2^2}{3}, \dfrac{5^2}{2^3\times 3}\right)$: deux degrés (nouvelle gamme)

[1] la notion de degré est définie comme pour le rang 2.

$\mathbb{Z}$	0	1	2
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	2

$(r,r') = \left(\frac{3^2}{2^3}, \frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)$: quatre degrés (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4
fréquences	1	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = \left(\frac{2^8}{3^5}, \frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)$: dix degrés[2] (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquences	1	$\frac{2.5}{3^2}$	$\frac{3.2}{2^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2 \times 5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	2

$(r,r') = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{5^2}{2^3 \times 3}\right)$: vingt-quatre degrés (nouvelle gamme)

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
fréquences	1	$\frac{3^4}{2^4 \times 5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2 \times 5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^6}{2^7 \times 5}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^6 \times 5}{3^5}$

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^3}{2^2 \times 5}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{2^3 \times 5}{3^3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^5}{2^5 \times 5}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^8 \times 5}{3^6}$

20	21	22	23	24
$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{2^5 \times 5}{3^4}$	2

Les deux derniers commas du dernier tableau donnent encore des nouvelles gammes (mais dans le dernier cas, la gamme n'est pas croissante !).

[2] L'existence de cette gamme peut donner un sens à la construction d'un tempérament égal à 10 degrés (Luc Etienne).

En revanche la quatrième colonne du dernier tableau ne nous donne pas une nouvelle gamme. Dans ce cas on a $(r, r') = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4.5}\right)$: c'est la gamme de Zarlino proprement dite, elle affine la gamme de Pythagore :

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fréquences	1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3 \times 5}{2^3}$	2

voir plus loin un tableau des fréquences des 60 premiers degrés (ces fréquences sont croissantes) de cette gamme de Zarlino.

ZARLINO :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{2.3^2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\times 5}{2^3}$	2	$\frac{5^2}{2^2.3}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^2.3}{5}$

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$\frac{5}{2}$	$\frac{2^3}{3}$	$\frac{5^2}{3^2}$	3	$\frac{2^4}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2^2}$	2^2	$\frac{5^2}{2.3}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{2^3.3}{5}$	5	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^3}$	2.3

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$\frac{5^2}{2^2}$	$\frac{2^2.5}{3}$	$\frac{2^2.3^2}{5}$	$\frac{3.5}{2}$	2^3	$\frac{5^2}{3}$	3^2	$\frac{2^4.3}{5}$	2.5	$\frac{2^5}{3}$	$\frac{5.3^2}{2^2}$	$2^2.3$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$\frac{2^3.3^2}{5}$	3.5

48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
2^4	$\frac{5^2.2}{3}$	2.3^2	$\frac{3.5^2}{2^2}$	$2^2.5$	$\frac{2^6}{3}$	$\frac{5.3^2}{2}$	$2^3.3$	5^2	3^3	$\frac{2^4.3^2}{5}$	$2.3.5$	2^5

7. Attraction harmonique, justesse expressive

Soit une gamme Γ construite selon les principes précédents et représentant le groupe quotient G/N et soient x et $y \in \Gamma$.
Nous noterons par d la distance harmonique sur $\mathbb{Q}_+^*$ et par $\delta_\Gamma(x,y)$ le nombre $d(xN, yN)$.
$\delta_\Gamma(x,y)$ sera appelé la « dissonance » de l'intervalle $\dfrac{y}{x}$ dans la gamme Γ.

Proposition.- *Si z désigne le représentant de la classe de $\dfrac{y}{x}$ dans la gamme Γ, on a :*

$$\delta_\Gamma(x,y) = \operatorname{Log} h(z).$$

Preuve –

$$d(xN, yN) = \inf\{d(xu, yv); u, v \in N\} = \inf\{\operatorname{Log} h\Big(\frac{y}{x}w\Big); w \in N\} = \operatorname{Log} h(z).$$

∎

Nous allons montrer maintenant comment cette notion de dissonance permet de retrouver des notions musicales inexplicables à partir de la gamme tempérée T. Dans la suite, P désignera la gamme de Pythagore à 12 degrés et Z celle de Zarlino.
Hindemith remarque ([22] p. 55) que bien que les théoriciens de la musique ne soient d'accord sur rien, ils le sont cependant sur l'ordre de « parenté » décroissante des degrés de la gamme.
L'ordre que donne Hindemith est le suivant : unisson, octave, quinte, quarte, sixte majeure, tierce majeure, tierce mineure, etc.[3]
Il ajoute que la quarte augmentée (ou quinte diminuée) se trouve très loin.
Nous allons comparer ce qui se passe dans nos trois gammes[4]

	unisson	octave	quinte	quarte	sixte majeure	tierce majeure	tierce mineure	sixte mineure	quarte augment.
δ_P	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 27	Log 81	Log 32	Log 128	Log 729
δ_Z	0	Log 2	Log 3	Log 4	Log 5	Log 5	Log 6	Log 8	Log 25
δ_T	0	Log 2	$\frac{7}{12}$ Log 2	$\frac{5}{12}$ Log 2	$\frac{3}{4}$ Log 2	$\frac{1}{3}$ Log 2	$\frac{1}{4}$ Log 2	$\frac{2}{3}$ Log 2	$\frac{1}{2}$ Log 2

Comme la notion de dissonance dans la gamme de Zarlino reproduit assez bien l'ordre constaté par Hindemith, nous choisirons cette gamme dans la suite :

[3] Comparer avec les expériences de C. Stumpf, §1.
[4] Voir l'annexe pour la gamme tempérée T.

0 (unisson)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

7.1. Attraction harmonique

Depuis des siècles les musiciens ont constaté que certaines notes étaient « attirées » par d'autres ou que, plus exactement, certains intervalles avaient tendance à se « résoudre » dans des intervalles voisins ; Deryck Cooke ([3] p. 90) en donne un résumé que l'on va représenter par un tableau dans lequel le zéro est le degré de la note fondamentale (tonique).

		degré de la note supérieure						
		1	2	5	8	9	10	11
type	semi-tonal	$\downarrow 0$		$\downarrow 4$	$\downarrow 7$		$\downarrow 9$	$\uparrow 12$
	tonal		$\downarrow 0$			$\downarrow 7$	$\downarrow 8$	

Essayons de retrouver les attractions semi-tonales à partir de la gamme chromatique ci-dessus : nous dirons que la note n entourée de n_g et n_d se *résout* en n_g (resp .n_d) si :

$$h(n_g) < h(n_d)\Big(\text{resp}\,.h(n_g) > h(n_d)\Big) \text{ et } h(n) > h(n_g)\Big(\text{resp}\,.h(n) > h(n_d)\Big)$$

A partir de cette définition nous trouvons les attractions semi-tonales suivantes :

1	2	3	4	6	8	10	11
$\downarrow 0$	$\uparrow 3$	$\uparrow 4$	$\uparrow 5$	$\uparrow 7$	$\downarrow 7$	$\downarrow 9$	$\uparrow 12$

Pour trouver les attractions tonales, il suffit de remplacer les notes voisines à un degré par les notes voisines à deux degrés dans la définition, on trouve :

2	3	5	6	9	10
$\downarrow 0$	$\uparrow 5$	$\uparrow 7$	$\downarrow 4$	$\downarrow 7$	$\uparrow 12$

Dans l'ensemble on a un bon accord avec les résultats de D. Cooke, excepté pour la quarte juste (5) en ce qui concerne l'attraction semi-tonale (on trouve le contraire) et la septième mineure (10) en ce qui concerne l'attraction tonale (mais on ne trouve pas le contraire !).

7.2. Justesse expressive

La plupart des instrumentistes à cordes et des chanteurs pratiquent la « justesse expressive » ([1] ch. V) c'est-à-dire qu'ils modifient la hauteur des sons qu'ils utilisent par de légers « commas » (ce qui ne change pas la classe modulo N) afin de jouer plus juste en fonction du contexte.

Nous allons illustrer cette pratique par un exemple utilisant la gamme de Zarlino.

Nous présenterons dans un tableau les fréquences des sons des gammes majeures de do, sol, fa et ré. Pour passer des fréquences de do majeur à celles des tonalités ci-dessus on multiplie par $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3^2}{2^3}$.

	do	do#	ré	mi	fa	fa#	sol	la	si$^\flat$	si	do
do maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2
sol maj.	1		$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	2
fa maj.	1		$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$		2
ré maj.		$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$		$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$		$\frac{15}{8}$	

Dans la théorie de la musique, sol majeur et fa majeur sont considérées comme des tonalités voisines de do majeur, et ré majeur comme une tonalité voisine de sol majeur. En dehors de l'introduction d'une altération supplémentaire (dièze) on constate que la « montée » de la tonalité de do majeur à la tonalité voisine de sol majeur affecte le « sixième degré » qui s'élève d'un comma de Didyme $\left(\frac{81}{80}\right)$ pour devenir le « second degré » de la nouvelle gamme - je veux dire que le « la » de sol majeur est plus haut que le « la » de do majeur, et ceci d'un comma[5]. C'est un des éléments de la richesse et de la cohérence qui appartiennent au jeu des grands interprètes. Et c'est ce qui explique aussi que pour moduler d'une tonalité donnée dans une tonalité voisine l'harmonie recherchera l'ambiguïté et évitera les notes dont la hauteur change, comme le montre l'exemple suivant :

[5] le $fa^{\#}$ en sol majeur est également un comma de Didyme au-dessous de celui de notre gamme chromatique et le $si^{\flat}$ de fa majeur est un comma au-dessous de celui de notre gamme chromatique.

En termes plus mathématiques, on peut dire que le système de facteurs de notre gamme est cohomologiquement trivial mais non constant et que cette non constance est la cause de la justesse expressive.

Conclusion

Les quelques remarques du paragraphe 7 font apercevoir comment la substitution de $\mathbb{Q}_+^*$ à $\mathbb{R}_+^*$ permet d'enrichir le vocabulaire de la perception dans la théorie musicale : *distance mélodique* (dont la loi de Weber-Fechner donne une approximation grossière et qui correspond à peu près à la distance ordinaire), *distance harmonique* (pour laquelle la loi de Weber-Fechner ne s'applique absolument pas), *justesse expressive*, etc.
Mais cette théorie permet aussi de réconcilier les divers points de vue et d'expliquer comment les musiciens qui pratiquent la justesse naturelle peuvent comprendre ceux qui n'ont pas ce privilège : toutes les gammes abstraites $H = G/ <\text{commas}>$ sont des espaces homogènes sur $\mathbb{Z}$ et on a :

$$\deg(n * x) = n + \deg(x)$$

lorsque $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in H$. Pourtant c'est le contexte le plus riche qui permet de donner un sens (♯ et ♭) aux modèles appauvris !

Appendice

1. Prolongement de la fonction h à $\overline{\mathbb{Q}}^*$.

On désigne ici par $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$) dont on ne garde que la structure de groupe multiplicatif (ainsi $2^{1/12} \in \overline{\mathbb{Q}}^*$). On sait ([14] et [23]) que h possède un prolongement naturel à $\overline{\mathbb{Q}}^*$:

$$\overline{h} : \overline{\mathbb{Q}}^* \to \mathbb{R}_+^*$$

et que $\overline{h}(x^n) = \overline{h}(x)^n$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ (on sait aussi que si $\overline{h}(x) = 1$, alors x est un élément de torsion de $\overline{\mathbb{Q}}^*$). Cette remarque nous permet de définir une distance harmonique sur les gammes tempérées de Werckmeister et S. Cordier et sur la gamme mésotonique (et aussi sur $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_+^*$).
Puisque $\overline{h}(2^{n/12}) = \overline{h}(2)^{n/12} = 2^{n/12}$, cette distance sera d (tonique, $n^{\text{ième}}$ degré) $= \frac{n}{12} \operatorname{Log} 2$ pour la gamme officielle, et d (tonique, $n^{\text{ième}}$ degré) $= \frac{n}{7} \operatorname{Log} \frac{3}{2}$ pour la gamme de S. Cordier : on retrouve la distance ordinaire. Pour la gamme mésotonique, cependant, on obtient une sorte de compromis entre les gammes naturelles et les gammes tempérées :

degré	0	1	2	3	4	5	6	7
x	1	$\frac{2^3}{5^{\frac{5}{4}}}$	$\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2}$	$\frac{2^2}{5^{\frac{3}{4}}}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2}{5^{\frac{1}{4}}}$	$\frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^3}$	$5^{\frac{1}{4}}$
nom	do	ré$^\flat$	ré	mi$^\flat$	mi	fa	fa$^\#$	sol
$d(1,x)$	0	$3\operatorname{Log}2$	$\frac{1}{2}\operatorname{Log}5$	$2\operatorname{Log}2$	$\operatorname{Log}5$	$\operatorname{Log}2$	$\frac{3}{2}\operatorname{Log}5$	$\frac{1}{4}\operatorname{Log}5$

degré	8	9	10	11	12
x	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5^{\frac{3}{4}}}{2}$	$\frac{2^2}{5^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{5^{\frac{5}{4}}}{2^2}$	2
nom	sol$^\#$	la	si$^\flat$	si	do
$d(1,x)$	$2\operatorname{Log}5$	$\frac{3}{4}\operatorname{Log}5$	$2\operatorname{Log}2$	$\frac{5}{4}\operatorname{Log}5$	$\operatorname{Log}2$

Une évaluation numérique de ces nombres montre qu'ils correspondent bien à l'intuition harmonique. Notons que :

$$\begin{cases} d(\mathrm{do},\mathrm{do}^\#) & > d(\mathrm{do},\mathrm{r\acute{e}}^\flat) \\ d(\mathrm{do},\mathrm{sol}^\#) & > d(\mathrm{do},\mathrm{la}^\flat) \end{cases}$$

2. Dissonance des accords

Lorsqu'un accord de n notes est joué dans une échelle naturelle, on pourrait penser que la hauteur du point projectif correspondant dans $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{Q})$ est un bon candidat pour mesurer la dissonance de l'accord. Cependant le diamètre de cet ensemble de notes, pour la distance harmonique, semble être un dangereux concurrent !

3. Commas

Un grand nombre de commas pour un grand nombre de groupes de S ont été calculés à l'aide d'un algorithme de Philippe Luquet (mémoire de maîtrise, Caen). D'autre part l'algorithme d'E. Dubois [10] fournit aussi des commas (pas nécessairement *tous* les commas).

Bibliographie

[1] D. BLUM - *Casals et l'art de l'interprétation ;* Buchet/Chastel, Paris 1980.

[2] C. BUNTING - *Essay on the Craft of Cello-Playing ;* t. 2, Cambridge University Press 1982, p. 154.

[3] D. COOKE - *The Language of Music ;* Oxford University Press, 1963.

[4] S. CORDIER - *Piano bien tempéré et justesse orchestrale ;* Buchet/ Chastel, Paris 1982.

[5] J. DAUTREVAUX - *A propos de : Approximation en Musique ;* Bulletin A.P.M. $n°$ 299 (juin 1975).

[6] R. DE CANDE - *Histoire Universelle de la Musique ;* t. II, Seuil, Paris 1978.

[7] R. DE CANDE - *Dictionnaire de Musique ;* Microcosme/Seuil, 1961.

[8] A. DANIELOU - *Traité de Musicologie comparée ;* Hermann, actualités scientifiques et industrielles 1265, Paris 1959.

[9] A. DANIELOU - *Music and the Power of Sound ;* Inner Traditions, Rochester, Vermont, 1995.

[10] E. DUBOIS - *Thèse ;* Université P. et M. Curie, 17 mars 1980.

[11] E. EMERY - *Temps et Musique ;* Dialectica, L'Age d'Homme, 1975.

[12] L. EULER - *Essai d'une nouvelle théorie de la musique ;* in « Musique Mathématique » Paris Librairie Scient. et Phil. 1865.

[13] G.H. HARDY et E.M. WRIGHT - *An introduction to the theory of numbers ;* Oxford Un. Press, 1956.

[14] Y. HELLEGOUARCH - *Un aspect de la théorie des hauteurs ;* Journées arithmétique, Caen, 1980.

[15] Y. HELLEGOUARCH - *Scales ;* Comptes-Rendus, Mathématiques, La Société Royale du Canada, vol. IV, $n°$ 5 (oct. 1982) et vol. V, $n°$ 2 (avr. 1983).

[16] Y. HELLEGOUARCH - *Gammes Naturelles ;* in Musique et Mathématiques, éd. B. Parzysz, APMEP $n°$ 53, Paris 1983.

[17] Y. HELLEGOUARCH - *L'Essai d'une nouvelle théorie de la musique de Leonhard Euler ;* in Destin de l'Art, desseins de la Science, actes du colloque de Caen 1986, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1992.

[18] Y. HELLEGOUARCH - *Ford hyperspheres, a general approach ;* C.R. Math. Acad. Sci. Canada, vol. XI, oct. 1989.

[19] Y. HELLEGOUARCH - *A la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique ;* Marsyas, $n°$ 22, juin 1992.

[20] Y. HELLEGOUARCH - *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles ;* Masson, Paris, 1997.

[21] H. HELMHOLTZ - *On the Sensations of Tone ;* Dover, New York, 1954.

[22] P. HINDEMITH - *The craft of musical composition ;* Schott, Londres, 1945.

[23] S. LANG - *Fundamentals of Diophantine Geometry ;* Springer, Berlin, 1983.

[24] E. LEIPP - *Acoustique Musicale ;* Masson, Paris, 1971.

[25] B. PARZYSZ - *L'approximation en Musique ;* Bull. APM $n°$ 296, XII, 1974.

[26] J.H. SILVERMAN - *The Arithmetic of Elliptic Curves ;* Springer Berlin, 1985.

[27] H.M. STARK - *An Introduction to Number Theory ;* The MIT Press, Cambridge Mass. and London Eng., 1991.

⋆ ⋆ ⋆

Algorithme de réduction des degrés dans une gamme musicale

(d'après la théorie d'Yves Hellegouarch)

Marc CHEMILLIER & Gérard DUCHAMP
(*Université de Caen & Université de Rouen*)

Introduction

Dans la théorie d'Yves Hellegouarch, les « gammes naturelles » sont des gammes constituées de fréquences ayant entre elles des rapports rationnels. Ainsi, la gamme de Pythagore est obtenue en formant des intervalles d'octave et de quinte justes, c'est-à-dire en multipliant une fréquence de référence par des puissances de 2 et 3. La gamme de Zarlino est obtenue en formant des intervalles d'octave, de quinte et de tierce justes, c'est-à-dire en multipliant une fréquence de référence par des puissances de 2, 3 et 5.

Le problème posé par les intervalles justes est que, par exemple, si l'on parcourt le cycle des quintes ascendantes *do*, *sol*, *ré*, *la*, *mi*, etc. à partir d'un *do* initial, on ne peut pas retomber sur un *do* identique à une octave supérieure, parce que $(3/2)^{12}$ n'est pas une puissance de 2. Construire une gamme revient à introduire des approximations, en convenant par exemple d'« identifier » la note obtenue par un cycle de 12 quintes ascendantes redoublées (quinte plus octave) et celle obtenue par un saut de 19 octaves. Mathématiquement, cela revient à imposer une relation $3^{12}/2^{19} = 1$ dans le sous-groupe multiplicatif $< 2, 3 >$ de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par 2 et 3 (on dit alors que $c = 3^{12}/2^{19}$ est un *comma* du groupe). L'approximation est choisie de telle sorte que le quotient du sous-groupe $< 2, 3 >$ modulo c soit monogène isomorphe au groupe additif des entiers $\mathbb{Z}$. Les « degrés » de la gamme obtenue sont alors les éléments du sous-groupe quotient, classés dans l'ordre des puissances croissantes $g, g^2, ..., g^n$ du générateur g.

Pour choisir un représentant canonique de chaque degré de la gamme, Yves Hellegouarch introduit la notion de *hauteur* d'une fraction p/q comme étant le maximum du numérateur p et du dénominateur q. Le représentant canonique d'un degré est celui de hauteur minimale dans sa classe, c'est-à-dire la fraction dont les numérateur et dénominateur sont les plus petits possibles. Ainsi, dans la gamme de Pythagore, avec le comma $c = 3^{12}/2^{19}$ et en partant de la note *do*, le degré correspondant à la note *fa*$\sharp$ peut être représenté à la fois par la fraction $3^6/2^9$ et par la fraction $2^{10}/3^6 = 3^6/2^9 \times c^{-1}$ qui est équivalente. Mais la première fraction est de hauteur plus petite que la seconde et c'est elle qui est choisie comme représentant du degré *fa*$\sharp$.

Nous proposons ici un algorithme simplepermettant de calculer les représentants canoniques de tous les degrés d'une gamme définie par un ensemble de générateurs et un ensemble de commas. L'algorithme consiste à calculer de proche en proche les représentants canoniques des puissances successives $g, g^2, ..., g^n$ du générateur g, en remarquant que si une combinaison de commas et de leurs inverses permet de réduire g^i, alors elle permet également d'obtenir pour g^{i+1} une fraction de hauteur plus petite.

Description de l'algorithme

Le sous-groupe multiplicatif $< p_1, ...p_n >$ de $\mathbb{Q}^{+*}$ engendré par les $p_i, i \leqslant n$, est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}^n$. Le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ représente la fraction $p_1^{x_1}...p_n^{x_n}$.

On quotiente $< p_1, ...p_n >$ par $n-1$ commas, de telle sorte que le quotient soit isomorphe à $\mathbb{Z}$. Soient g et $u_1, ..., u_{n-1}$ les n-uplets représentant respectivement le générateur du quotient et les $n-1$ commas. La hauteur d'une fraction est le maximum du numérateur et du dénominateur. Le problème est de trouver des fractions de plus petite hauteur équivalentes respectivement aux puissances successives du générateur du quotient.

Si x est un n-uplet, on note $h(x)$ la hauteur de la fraction correspondant à x, et $p(x) = log(h(x))$. L'application p est une norme. On note H l'hyperplan engendré par les commas $u_j, j \leqslant n-1$, et N le réseau $\mathbb{Z}u_1 + ... + \mathbb{Z}u_{n-1}$ inclus dans H. Le n-uplet $k.g$ représente la puissance kième du générateur. On cherche un élément de $k.g + N$ de hauteur minimale. Le logarithme étant croissant, le problème revient à chercher un élément de $k.g + N$ de norme minimale pour p.

Lemme 1. *Soit w le vecteur de N tel que $k.g + w$ soit de norme minimale pour p. Alors $(k+1).g + w$ est de norme inférieure à celle de $(k+1).g$.*

Preuve — On a $p(k.g + w) \leqslant p(k.g)$. Donc $p((k+1).g + w) = \frac{k+1}{k} p(k.g + \frac{k}{k+1} w) \leqslant \frac{k+1}{k} p(k.g) = p((k+1).g)$, car $k.g + \frac{k}{k+1} w$ est sur le segment d'extrémités $k.g$ et $k.g + w$, et la fonction p est une norme, donc une fonction convexe. □

Pour réduire $(k+1).g$, on peut donc commencer par effectuer la même réduction w que pour $k.g$, c'est-à-dire se ramener à la réduction de $z = (k+1).g + w$. On cherche alors les éléments t de N tels que $p(z+t) \leqslant p(z)$. Cela équivaut par définition à :

$$t \in B_p(-z, r) \cap N$$

où $B_p(-z, r)$ est la boule de centre $-z$ et de rayon $r = p(z)$ pour la norme p. Le principe de l'algorithme est de recouvrir l'intersection $B_p(-z, r) \cap N$ par un pavé du réseau N, et de parcourir un à un les éléments de ce pavé.

Lemme 2. *La boule unité $B_p(1)$ de p est incluse dans l'hypercube correspondant à la boule unité de la norme*

$$L(x) = sup_{i \leqslant n}(|x_i| log(p_i))$$

On recouvre ensuite cet hypercube par un autre hypercube dont les arêtes sont parallèles aux lignes du réseau N. Soit S l'ensemble des sommets de l'hypercube $B_L(1)$. Les coordonnées des sommets dans la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ sont de la forme $\frac{1}{log(p_i)}$ et $\frac{-1}{log(p_i)}$. On complète la base $(u_j)_{j\leq n-1}$ de H pour former une base U de $\mathbb{Z}^n$, et on décompose chaque sommet s dans la base U en notant s_j la composante de s sur u_j. On pose :

$$m_j = sup_{s\in S}(s_j)$$

Lemme 3. *Soit X_j la j-ème coordonnée de x sur la base U. La boule unité $B_L(1)$ est incluse dans la boule unité $B_M(1)$ de la norme :*

$$M(x) = sup_{j\leqslant n}\frac{|X_j|}{m_j}$$

Une boule pour la norme M est un pavé dont les arêtes sont parallèles aux vecteurs de la base $(u_j)_{j\leqslant n}$. Il est facile de réaliser informatiquement un parcours des éléments de ce pavé de coordonnées entières sur les commas. L'algorithme peut finalement se décrire comme suit :

(1) *Formules de changement de base :* les coordonnées des commas u_j permettent d'obtenir les coordonnées x_i d'un vecteur x en fonction de ses coordonnées X_j dans la base U. On inverse ces formules, pour calculer l'expression des X_j en fonction des x_i.

(2) *Calcul des m_j :* on parcourt l'ensemble des $s = (\frac{e_1}{log(p_1)}, ..., \frac{e_n}{log(p_n)})$ où $|e_i| = 1$, en calculant à chaque fois les coordonnées s_j de s dans la base U, pour obtenir finalement les valeurs des $m_j = sup(s_j)$.

(3) *Réduction :*

(a) On suppose que la réduction de $k.g$ est effectuée et soit w le vecteur de N obtenu, tel que $k.g + w$ soit de hauteur minimale. On pose $z = (k+1).g + w$.

(b) Soit $r = p(z)$. On calcule les dimensions du pavé de l'hyperplan H de centre $-z$ et de rayon r pour la norme M, en prenant les coordonnées $z_1, ...z_{n-1}$ de z dans la base U, puis en calculant pour j compris entre 1 et $n-1$ les valeurs $a_j = -z_j - r.m_j$ et $b_j = -z_j + r.m_j$. Le pavé obtenu est $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$.

(c) On parcourt ce pavé en énumérant tous ses éléments t de coordonnées entières sur la base U, et en calculant à chaque fois la hauteur $h(z+t)$ jusqu'à obtenir la valeur minimale. Le vecteur t obtenu est tel que $z+t$ est le représentant canonique de $(k+1).g$, c'est-à-dire que $w+t$ est le nouveau vecteur de réduction.

Exemples de réduction pour la gamme de Zarlino

Le groupe correspondant à la gamme de Zarlino est $< 2, 3, 5 >$. Les relations $2^{19} = 3^{12}$ et $2^4.5 = 3^4$ donnent les deux commas $u = (19, -12, 0)$ et $v = (4, -4, 1)$. On cherche à réduire les puissances du générateur $g = 2^4/3.5$. Les réductions s'expriment par des couples de coordonnées sur la base (u, v).

Exemple 0.1. Réduction de g^{13}.

La réduction précédente donnant le représentant canonique de g^{12} *est* $(-5, 12)$ *et la hauteur de la fraction obtenue en appliquant cette réduction à* g^{13} *est* $h = 32$*. L'algorithme fournit les bornes suivantes pour le parcours :* $[-1, 0]$ *sur l'axe* u*, et* $[-2, 5]$ *sur l'axe* v*. On obtient le tableau ci-dessous où les hauteurs ne sont affichées que si elles sont inférieures à* h*.*

	-1	0
5	*	*
4	*	*
3	25	*
2	*	*
1	*	*
0	*	32
-1	*	*
-2	*	*

On voit que que c'est l'élément $(-1, 3)$ *qui fournit la plus petite hauteur. Cumulé à la réduction précédente, il donne la nouvelle réduction* $(-6, 15)$*. On obtient la fraction réduite suivante :*

$$(\frac{2^4}{3.5})^{13} \times (\frac{2^{19}}{3^{12}})^{-6} \times (\frac{2^4.5}{3^4})^{15} = \frac{5^2}{2^2.3}$$

dont la hauteur est $max(5^2, 2^2.3) = 25$*.*

Exemple 0.2. Réduction de g^{18}

La réduction précédente donnant le représentant canonique de g^{17} *est* $(-7, 17)$ *et la hauteur de la fraction obtenue en appliquant cette réduction à* g^{18} *est* $h = 128$*. L'algorithme fournit les bornes suivantes pour le parcours :* $[-2, 0]$ *sur l'axe* u*, et* $[-4, 7]$ *sur l'axe* v*. On obtient le tableau ci-dessous où les hauteurs ne sont affichées que si elles sont inférieures à* h*.*

	-2	-1	0
7	*	*	*
6	*	*	*
5	*	*	*
4	*	*	*
3	*	25	*
2	*	45	*
1	*	*	*
0	*	*	128
-1	*	*	72
-2	*	*	*
-3	*	*	*
-4	*	*	*

On voit que que c'est l'élément $(-1,3)$ *qui fournit la plus petite hauteur. Cumulé à la réduction précédente, il donne la nouvelle réduction* $(-8,20)$. *On obtient la fraction réduite suivante :*

$$(\frac{2^4}{3.5})^{18} \times (\frac{2^{19}}{3^{12}})^{-8} \times (\frac{2^4.5}{3^4})^{20} = \frac{5^2}{3^2}$$

dont la hauteur est $max(5^2, 3^2) = 25$.

Bibliographie

HELLEGOUARCH Y., Scales, *C. R. Soc. Roy. Math. Canada*, vol. IV, **05** (1982), vol. V, **02** (1983).

HELLEGOUARCH Y., Gammes naturelles, *Publ. APMEP*, **53** (1983).

HELLEGOUARCH Y., Kreisleriana, IREM de Basse-Normandie (1985).

HELLEGOUARCH Y., Une esthétique galiléenne : la théorie de la musique de Leonhard Euler, *Sem. Philo. Math.*, ENS Ulm, **50** (1986), repris dans *Destin de l'art, desseins de la science*, ADERHEM, Caen, 1991.

HELLEGOUARCH Y., À la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique, *Gazette des mathématiciens*, **33** (1987).

Solutions périodiques d'équations différentielles

Antoine CHAMBERT-LOIR (*Université Paris 6*)

Introduction

Dans leur article [1], Busenberg, Fischer et Martelli démontrent plusieurs généralisations du théorème de Yorke [2] : *si* $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *est lipschitzienne de constante* λ*, toute solution périodique non constante de l'équation différentielle* $x'(t) = F(x(t))$ *a une période* $\geqslant 2\pi/\lambda$. En effet, ils étendent ce résultat à d'autres espaces de Banach que l'espace euclidien ainsi qu'à certains systèmes dynamiques discrets.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, ils traitent d'abord un analogue discret et passent ensuite à la limite pour en déduire le théorème de Yorke. En revanche, dans le case d'un espace de Banach général, ils donnent une preuve directe fondée sur l'inégalité intégrale assez astucieuse que voici : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de période T de $\mathbf{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E,

$$(\star) \qquad \int_0^T \int_0^T \|f(t) - f(s)\| \, dt \, ds \leqslant \frac{T}{6} \int_0^T \int_0^T \|f'(t) - f'(s)\| \, dt \, ds.$$

Cette note n'a pour d'autre but que de remarquer que dans le cas d'un espace de Hilbert, à la fois le théorème de Yorke et son analogue discret sont des cas particuliers d'un énoncé très simple : *la variance est positive*, dont le cadre naturel est la transformation de Fourier des groupes abéliens localement compacts.

1. – Transformation de Fourier

Nous commençons par rappeler quelques faits concernant l'analyse de Fourier sur les groupes abéliens localement compacts, prouvés par exemple dans [3].

Soit G un groupe abélien compact et notons $\widehat{G}$ son groupe des caractères. C'est un groupe abélien discret dont l'élément unité $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1. Si $g \in G$ et $\widehat{g} \in \widehat{G}$, notons $\langle g, \widehat{g} \rangle = \widehat{g}(g) \in \mathbf{C}^*$. Soit d$g$ une mesure de Haar sur G. La transformation de Fourier sur G est définie pour $f \in L^1(G)$ par la formule

$$\mathcal{F}(f)(\widehat{g}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(G)} \int_G f(g) \, \langle g, \widehat{g} \rangle \, \mathrm{d}g.$$

On a la formule de Parseval selon laquelle si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$,

$$\int_G |f(g)|^2 \, \mathrm{d}g = \mathrm{vol}(G) \sum_{\widehat{g} \in \widehat{G}} |F(f)(\widehat{g})|^2$$

et qui permet d'étendre la transformation de Fourier par densité en un isomorphisme $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$.

Si f est à valeurs dans un espace de Hilbert complexe (séparable), tout ceci vaut, à condition de remplacer les valeurs absolues par des normes.

Lemme 1. — *Soit $f \in L^2(G;\mathcal{H})$ une fonction de G à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors,*

$$V(f) \overset{def}{=} \int_{G\times G} \|f(g)-f(h)\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h = 2\operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\substack{\widehat{g}\in\widehat{G}\\ \widehat{g}\neq\mathbf{1}}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2 . \tag{1}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{G\times G} \|f(g)-f(h)\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h &= \int_{G\times G} \Big(\|f(g)\|^2+\|f(h)\|^2 - 2\,\langle f(g)\,|\,f(h)\rangle\Big)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h\\ &= 2\operatorname{vol}(G)\int_G \|f(g)\|^2\,\mathrm{d}g - \left\|\int_G f(g)\,\mathrm{d}g\right\|^2\\ &= 2\operatorname{vol}(G)^2\sum_{\widehat{g}\in\widehat{G}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2 - 2\operatorname{vol}(G)^2\,\|\mathcal{F}(f)(\mathbf{1})\|\\ &= 2\operatorname{vol}(G)^2 \sum_{\substack{\widehat{g}\in\widehat{G}\\ \widehat{g}\neq\mathbf{1}}} \|\mathcal{F}(f)(\widehat{g})\|^2 .\end{aligned}$$

Remarquons que $V(f)$ n'est autre que $2\operatorname{vol}(G)^2$ fois la variance de f.

2. — Équations différentielles

Soit maintenant D une application linéaire définie sur un sous-espace $\operatorname{dom}(D) \subset L^2(G;\mathcal{H})$ à valeurs dans $L^2(G;\mathcal{H})$. Par exemple, un opérateur « pseudo-différentiel » donné par une formule du type

$$\mathcal{F}(Df)(\widehat{g}) = \mathcal{D}(\widehat{g})\mathcal{F}(f)(\widehat{g}), \tag{2}$$

où $\mathcal{D}$ est une fonction $\widehat{G}\to\mathbf{C}$. Du lemme précédent, on déduit immédiatement l'inégalité à la Poincaré suivante.

Lemme 2. — *Soit $\kappa\in\mathbf{R}_+$ tel que pour toute $f\in\operatorname{dom}(D)$ et tout $\widehat{g}\in\widehat{G}\setminus\{\mathbf{1}\}$, on ait*

$$\|\mathcal{F}(Df)(\widehat{g})\| \geqslant \kappa\,\|\mathcal{F}(f)\|(\widehat{g}). \tag{3}$$

Alors, pour toute fonction $f\in\operatorname{dom}(D)$, on a $V(Df)\geqslant\kappa^2 V(f)$.

En particulier, si D est donné par la formule (2), on peut prendre pour κ la borne inférieure de $|\mathcal{D}(\widehat{g})|$ pour $\widehat{g}$ décrivant l'ensemble des caractères non triviaux de G.

Soit maintenant $F:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ une fonction continue. On suppose qu'elle satisfait la condition de Lipschitz pour la constante λ, c'est-à-dire que pour tous v_1 et $v_2\in\mathcal{H}$,

$$\|F(v_1)-F(v_2)\| \leqslant \lambda\,\|v_1-v_2\| . \tag{4}$$

Le problème est de déterminer les fonctions $f\in\operatorname{dom}(D)$ telles que

$$Df(g) = F(f(g)), \qquad g\in G. \tag{5}$$

Théorème 3. — *Si l'équation* (5) *a une solution non constante (p.p.)* $f \in \mathrm{dom}(G)$*, alors* $\kappa \leqslant \lambda$.

En effet, on déduit du lemme 2 l'inégalité

$$V(Df) \geqslant \kappa^2 V(f). \tag{6}$$

tandis que d'après la définition de $V(f)$, on a

$$\begin{aligned} V(Df) &= \int_{G\times G} \|(Df)(g) - (Df)(h)\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &= \int_{G\times G} \|F(f(g)) - F(f(h))\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &\leqslant \lambda^2 \int_{G\times G} \|f(g) - f(h)\|^2 \,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &\leqslant \lambda^2 V(f). \end{aligned} \tag{7}$$

Si f n'est pas constante, $V(f) \neq 0$, d'où l'inégalité voulue.

3. — Applications

a) *Le théorème de Yorke*

Appliqué à la situation suivante, le théorème 3 implique le théorème de Yorke rappelé dans l'introduction.

– G est le cercle $\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, si bien qu'une fonction sur G s'identifie à une fonction T-périodiques sur $\mathbf{R}$;
– la mesure de Haar sur G est la mesure induite par la mesure de Lebesgue. En particulier, $\mathrm{vol}(G) = T$;
– le groupe $\widehat{G}$ s'identifie à $\mathbf{Z}$, l'accouplement canonique est donné par $\langle t, n\rangle = \exp(2i\pi nt/T)$;
– l'opérateur D est la dérivation, donnée « en Fourier » par $\mathcal{D}(n) = 2i\pi n/T$. On peut donc choisir $\kappa = 2\pi/T$.

b) *Systèmes discrets*

L'analogue discret du théorème de Yorke a été démontré par Busenberg, Fischer and Martelli [1] : *Soit* $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *une fonction* λ*-lipschitzienne sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Soit* h *un entier et supposons qu'il existe une suite non constante* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,*

$$x_{n+1} = x_n + F(x_n), \quad x_{n+h} = x_n. \tag{8}$$

Alors, $2\sin(\pi/h) \leqslant \lambda$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème 3 aux données suivantes :

– $G = \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, la mesure de Haar est la mesure de comptage, donc $\mathrm{vol}(G) = h$;
– le groupe des caractères de G est $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, l'accouplement entre G et $\widehat{G}$ est donné par $\langle n, \nu\rangle = \exp(2i\pi n\nu/h)$;

– l'opérator D est donné par $D((x_n)) = (x_{n+1} - x_n)$. il est de type « pseudo-différentiel », avec $\mathcal{D}(\nu) = \exp(2i\pi\nu/h) - 1$. On peut donc prendre $\kappa = 2\sin(\pi/h)$.

c) *Autres exemples*

Mais on peut bien sûr déduire du théorème 3 des résultats de *non-existence* d'équations différentielles bien plus généraux. Par exemple, soit $P \in \mathbf{C}[x]$ et supposons que l'équation différentielle $P(d/dt)f = 0$ n'a pas de solution T-périodique non constante (autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, $P(2i\pi n/T) \neq 0$). Posons

$$\varepsilon_0 = \min_{n\in\mathbf{Z}^*} |P(2i\pi n/T)| .$$

Soit alors une fonction λ-lipschitzienne $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Il résulte du théorème 3 que si $\lambda|\varepsilon| < \varepsilon_0$, l'équation différentielle

$$P(d/dt)(f) = \varepsilon F(f)$$

n'a pas de solution T-périodique non constante.

d) *Remarque incontrôlable*

On peut aussi interpréter ce résultat comme un énoncé de non-contrôlabilité : considérons un système physique qui obéit, en l'absence de forces extérieures, à l'équation différentielle $Df = 0$ et qui n'est pas naturellement T-périodique. Pour obtenir une évolution T-périodique du système, on peut imaginer un mécanisme de contrôle que nous interprétons comme un second membre $F(f)$ à l'équation différentielle. Pour que ce soit possible, la fonction de contrôle F doit d'après le théorème 3 avoir une « grande » constante de Lipschitz, autrement dit notre mécanisme de contrôle doit être sensible aux petites perturbations.

Références

[1] S. Busenberg, D. Fischer and M. Martelli, *Minimal periods of discrete and smooth orbits,* Amer. Math. Monthly **96** (1989), p. 5–17

[2] J. Yorke, *Periods of periodic solutions and the Lipschitz constants,* Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), p. 509–512

[3] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications,* Hermann, 1941

À propos de l'*histoire des sciences arabes*[1]

Hélène BELLOSTA (*Institut français d'études arabes de Damas*)

L'apport des mathématiques arabes est essentiel pour qui veut comprendre comment se constituent aux XVI^{e} et XVII^{e} siècles les mathématiques classiques. C'est cet apport que s'attache à décrire et à commenter cet ouvrage. Les travaux accumulés depuis quelques décennies ouvrent en effet la voie à une meilleure connaissance de la science arabe et de son apport à la science classique, ils ont rendu possible cette synthèse, la première jamais effectuée dans ce domaine et dans cet esprit. Les plus grands spécialistes dans leur domaine ont été sollicités, ils s'adressent à un large public cultivé, dépassant le simple cercle de leurs collègues, sans toutefois faire œuvre de vulgarisation ; c'est un véritable livre de référence qui leur a été demandé, afin de restituer à la science arabe son visage et sa place, en privilégiant l'analyse des sources anciennes et en consacrant quelques chapitres aux prolongements latins et hébraïques.

On appelle science arabe la science qui s'écrit en langue arabe, quelle que puisse être par ailleurs la langue maternelle des divers savants qui la créent ou leur religion et sans aucune considération d'ordre ethnique. A partir du IX^{e} siècle, dans une partie du monde qui s'étend de l'Andalous aux confins de la Chine et de l'Inde, en passant par le Maghreb, le Moyen-Orient, l'Iran (c'est-à-dire, à l'est, l'ancien empire d'Alexandre), l'arabe est en effet la langue des mathématiques et de la philosophie et est, avec l'Islam, l'un des facteurs d'unité d'un monde politiquement morcelé. Au X^{e} siècle en particulier, lorsqu'éclate l'unité politique du califat abbasside, que le rôle de protecteur des savants, jadis dévolu au calife, passe à des potentats locaux, souvent iranophones ou turcophones, et que l'on assiste, à l'est, en même temps qu'à une dispersion des centres de la vie intellectuelle (Bukhârâ, Samarqand, Merw, Nishâpûr, mais aussi Shirâz capitale des Bûyides, Ghaznî, capitale du Ghaznevide Mahmud Ibn Sübüktekîn, deviennent des centres intellectuels importants), à une renaissance

[1] *Histoire des sciences arabes*, sous la direction de R. Rashed, avec la collaboration de Régis Morelon, Le Seuil 1997, 3 volumes, 1007 pages. Traduction française, revue et mise à jour, de la version anglaise parue à Londres en 1996 (*Encyclopedia of the History of Arabic Science*, London, Routledge, 1996). Une traduction arabe de la version anglaise a paru à Beyrouth en 1998 ; une traduction persane est sous presse à Téhéran. *Volume I : astronomie théorique et appliquée. Volume II : mathématiques et physique. Volume III : technologie, alchimie et sciences de la vie.* Une analyse du développement des institutions scientifiques dans le monde islamique et un exposé des diverses classifications des sciences clôturent le tome III. Cet ouvrage fournit en outre au lecteur une abondante bibliographie, comprenant les publications les plus récentes.

de la langue persane comme langue littéraire (c'est l'époque de Ferdousî, auteur du Shahnâme, un des monuments de la poésie persane), l'arabe reste cependant la langue des mathématiques et de la philosophie : al-Birûnî, persanophone, contemporain de Ferdousî et, comme lui, protégé du sultan Mahmud de Ghaznî, écrit son œuvre mathématique en arabe ; Ibn Sinâ (Avicenne), dont la langue maternelle est le persan, écrit sa somme philosophique *al-Shifâ'* en arabe et en donne un résumé/vulgarisation en persan ; Nasîr al-Dîn al-Tûsî, persanophone, traduit lui-même en arabe ses écrits..., on pourrait en multiplier les exemples. Ce rôle de l'arabe est tout-à-fait analogue à celui que jouera en Europe, quelques siècles plus tard, le latin.

La science arabe, à ses débuts comme à son apogée, a une vocation universelle et il faut noter le cosmopolitisme de ce monde, qui regroupe des savants venus d'horizons divers, de religions diverses (musulmans certes, mais aussi chrétiens, juifs, sabéens, zoroastriens, voire athées...). Ces savants se veulent et sont, les héritiers de la science et de la philosophie grecques ; même si le développement de la science arabe a pu bénéficier d'autres apports — en particulier de l'Inde ou de la Chine —, ceux-ci sont négligeables devant l'importance reconnue de l'héritage grec. Ce milieu des géomètres, soutenu par le pouvoir politique (al-Ma'mûn fonde à Bagdad en 832, la *Maison de la Sagesse*, première institution scientifique de l'empire abbasside, qui founit un cadre institutionnel à la science et favorise une professionnalisation des savants), marqué par les défis, mais aussi la collaboration, où la correspondance joue un rôle aussi important que celui qu'elle jouera plus tard en Europe, évoque d'ailleurs fortement le milieu européen du XVII^e siècle.

Héritiers de la science et de la philosophie grecque, philosophes et savants du monde arabe ont traduit l'essentiel des œuvres scientifiques et philosophiques grecques. Commencée au VIII^e siècle, l'œuvre de traduction sera à peu près achevée à la fin du X^e. Ce mouvement de traduction atteint son apogée au IX^e siècle (il ne nous reste d'ailleurs pratiquement rien des traductions antérieures). En l'espace de quelques décennies les *Éléments* d'Euclide, fondement de la géométrie, sont traduits trois fois, l'*Almageste* de Ptolémée, base de l'astronomie médiévale, deux fois ; seront également traduits les *Coniques* d'Apollonius, ainsi que deux traités d'Archimède (*De la mesure du cercle* et *De la sphère et du cylindre*) et *Les Arithmétiques* de Diophante, pour ne parler, en mathématiques, que des ouvrages fondamentaux, dont l'impact sera profond sur le développement des mathématiques arabes... Certains de ces textes, dont les originaux grecs sont perdus, ne nous sont d'ailleurs connus aujourd'hui que par leurs traductions arabes (c'est le cas des trois derniers livres des *Coniques* et de quatre livres des *Arithmétiques* de Diophante en particulier). Il s'agit, en traduisant des textes gréco-hellénistiques, de rendre disponible en arabe des textes indispensables : les liens entre traduction et recherche sont en effet étroits — il n'y a pas, comme on l'a parfois soutenu, dans la science arabe, deux périodes qui se seraient succédées dans le temps, une période de traductions, suivie d'une période d'assimilation et de recherches — et les traductions, souvent dues à des chercheurs scientifiques de haut niveau, sont motivées par des recherches déjà existantes.

A ce mouvement de traduction fait pendant au XII^e siècle un mouvement de traduction d'arabe en latin, dans l'Italie du sud et en Espagne. Le rôle de ces traductions pour le développement des mathématiques dans l'Occident médiéval peut être comparé à celui des savants et traducteurs de Bagdad pour les pays d'Islam. C'est par elles que l'Europe, à partir du XII^{e} siècle, s'initiera aux mathématiques, tout particulièrement à l'algèbre et aux méthodes de calcul dit « indien ».

C'est incontestablement l'algèbre qui constitue l'apport le plus novateur, le mieux connu et le plus célèbre, des mathématiciens de langue arabe. L'ouvrage qui fonde l'algèbre est le traité d'al-Khwârizmî. Celui-ci est également l'auteur d'un traité d'arithmétique qui constitue la première introduction à Bagdad des méthodes indiennes de calcul (système décimal de position et opérations effectuées dans ce système) et ce sont ses nombreuses traductions latines qui vont faire découvrir à l'Europe du XII^{e} siècle le « calcul indien ».

L'algèbre se présente, pour al-Khwârizmî, comme d'une part la théorie des équations du second degré, solubles par radicaux, d'autre part comme le calcul algébrique sur les polynômes associés (de degré inférieur ou égal à 2), sans que soit encore formulée la notion de polynôme en général. L'extension de la notion de puissance algébrique sera effectuée indépendamment par deux mathématiciens contemporains : Abû Kâmil (850-930) et Sinân Ibn al-Fath ; Sinân Ibn al-Fath formule explicitement la notion de puissance entière positive. Cette première élaboration de la théorie des polynômes à coefficients rationnels sera poursuivie par al-Karajî (mort au début du XI^{e} siècle) et al-Samaw'al (mort en 1175). On doit en particulier à al-Karajî la première expression de la formule dite du binôme de Newton ; il démontre cette formule par une méthode que l'on pourrait appeler proto-induction (assez comparable à celle qu'utilisera plus tard Pascal) et donne le tableau des coefficients binomiaux jusqu'à l'ordre 12 (triangle de Pascal). Al-Samaw'al poursuit et systématise l'œuvre d'al-Karajî sur les polynômes. Grâce à la définition de la puissance nulle ($x^0 = 1$), il donne et démontre, pour la première fois, dans toute sa généralité, sous la forme d'un tableau, de x^9 à x^{-9}, la règle $ax^m bx^n = abx^{m+n}$, où n et m sont des entiers relatifs, en utilisant implicitement l'isomorphisme des groupes $(\mathbf{Z}, +)$ et $(\{a^n, n \in \mathbf{Z}, a > 0\})$. Il étudie également le produit et la divisibilité de polynômes dans $\mathbf{Q}[X, 1/X]$ et dans $\mathbf{Q}[X]$, division avec reste et donne une approximation des fractions rationnelles et des racines carrées de polynômes à coefficients rationnels, par des éléments de $\mathbf{Q}(x, 1/x)$, (c'est-à-dire en donne un développement limité au voisinage de $+\infty$).

Les mathématiciens arabes ne réussiront pas à résoudre les équations du troisième degré par radicaux dans le cas général, ce sera l'œuvre de l'école italienne du XVI^{e} siècle ; cependant la résolution de ces équations les préoccupait et ils parviendront à résoudre certaines équations particulières : Sharaf al-Dîn al-Tûsî (XII^{e} siècle), par exemple, reconnaît le rôle du discriminant dans le cas particulier de l'équation $x^3 + c = bx$.

La résolution géométrique, déjà présente chez les mathématiciens grecs qui ramènent un certain nombre de problèmes solides à des intersections de coniques, va être développée par les géomètres arabes (al-Khâzin, Ibn al-Haytham, al-Khayyâm, Sharaf al-Dîn al-Tûsî). La démarche ainsi mise en œuvre, traduire des problèmes géométriques en termes d'équations algébriques, puis résoudre ces dernières par des intersections de courbes convenablement choisies, est précisément celle qu'on retrouve dans la géométrie de Descartes et qui conduira à la naissance de la géométrie algébrique. Deux noms sont essentiellement attachés à ce chapitre des mathématiques, ceux d'al-Khayyâm et de Sharaf al-Dîn al-Tûsî.

Al-Khayyâm, (1048-1131 environ) se propose d'élaborer une théorie générale des équations du troisième degré à l'exemple de ce qu'avait fait al-Khwârizmî pour les équations quadratiques et non plus, comme ses prédécesseurs, de résoudre telle ou telle équation particulière. Il donne, sur le modèle de la classification d'al-Khwârizmî, une classification systématique de ces équations, qu'il résout par l'intersection de deux coniques. Cette interprétation géométrique lui est rendue possible par le choix d'une unité, qui lui permet d'interpréter toute grandeur comme, au choix, une longueur, une surface ou un volume ; les équations du troisième degré peuvent ainsi être rendues homogènes et lues en termes de relations entre volumes (le pas suivant sera franchi par Descartes qui, une fois choisie l'unité de longueur, interprète la multiplication comme produisant une nouvelle longueur et non plus comme la construction d'un rectangle). La discussion, encore maladroite, de l'existence du point d'intersection de ces coniques repose sur l'idée intuitive de la continuité des courbes (basée sur le mouvement, c'est-à-dire la continuité du temps) et de leur convexité ainsi que sur l'étude de leurs branches infinies, ce qui va déboucher sur l'étude de nouvelles propriétés des coniques (convexité et étude locale en particulier).

Son successeur Sharaf al-Dîn al-Tûsî (XII^e siècle) va étudier de façon plus rigoureuse les conditions d'existence de ces points d'intersection, dont l'abscisse détermine la racine positive demandée ; ceci va l'amener à se pencher sur des problèmes de localisation et de séparation des racines, l'obliger à définir la notion de maximum d'une expression algébrique (en introduisant la dérivée formelle d'un polynôme). Une autre innovation d'al-Tûsî consiste à traiter, en même temps que la résolution géométrique, la résolution numérique des équations du troisième degré. Il développe pour cela une variante de la méthode de Ruffini Horner.

L'algèbre dès ses débuts se caractérise par son style à la fois calculatoire et démonstratif ; c'est une science théorique et appliquée, commune à l'arithmétique (qui traite des nombres — entiers ou fractionnaires — c'est-à-dire des quantités discrètes) et à la géométrie (qui traite des grandeurs, c'est-à-dire du continu). L'indépendance croissante des opérations algébriques par rapport à la représentation géométrique fonde l'autonomie et la spécificité de l'algèbre. L'unité de son objet repose plus sur la généralité de ses opérations que sur celle des êtres mathématiques qu'elle manipule, aussi bien nombres rationnels que quantités irrationelles ou grandeurs géométriques. C'est de cette confusion entre nombre et grandeur, de plus en plus couramment pratiquée et dont aucune justification théorique n'est évidemment donnée, que naîtra à la fin du XIX^e siècle la notion de nombre réel.

Il faut noter ici que ce développement de l'algèbre se fait entièrement sans symbolisme, il s'agit d'une mathématique entièrement rhétorique (même les nombres dans le traité d'algèbre d'al-Khwârizmî ne sont pas écrits dans le système décimal, mais écrits en toutes lettres et accordés selon les règles de la grammaire).

L'algèbre n'est cependant pas le seul chapitre des mathématiques dans lequel se sont illustrés les mathématiciens de langue du monde arabe, et la constitution de l'algèbre comme discipline provoque également un développement de l'analyse diophantienne, de la théorie des nombres, de l'analyse combinatoire et de l'analyse numérique. L'analyse combinatoire fait ses débuts séparément chez les linguistes (pour les besoins de la phonologie, de la lexicographie et de la cryptographie) et chez les algébristes (à qui l'on doit la formule du binôme et le triangle de Pascal) ; la jonction des deux courants se fait ensuite et l'analyse combinatoire devient un instrument applicable aux situations les plus diverses. Des mathématiciens, comme al-Kashî (XV^e^ siècle), lui consacreront même des traités indépendants comportant les résultats devenus classiques que sont l'interprétation du triangle arithmétique et de sa loi de formation, ainsi que l'ensemble des règles élémentaires de l'analyse combinatoire (permutations, arrangements, combinaisons).

C'est également en liaison avec l'algèbre et pour les besoins de l'astronomie d'observation, que va se développer l'analyse numérique. De nombreux algorithmes numériques nouveaux voient le jour, pour l'extraction des racines carrées, des racines cubiques et même — avec al-Samaw'al (XII^e^ siècle) qui met en œuvre pour ce calcul la méthode de Ruffini-Horner — des racines n-ièmes ; pour améliorer ces approximations ce dernier développera également la théorie des fractions décimales. Ces algorithmes et ces calculs, ainsi que la théorie des fractions décimales, seront repris et développés après lui par Nasîr al-Dîn al-Tûsî (XIII^e^ siècle) et al-Kashî (XV^e^ siècle), avec lequel l'analyse numérique atteindra son plus grand développement. Al-Bîrûnî (XI^e^ siècle) utilise et développe des méthodes d'interpolation d'origine indienne (l'interpolation quadratique de Brahmagupta). Les mathématiciens arabes ne se sont pas contentés, comme leurs prédécesseurs babyloniens, grecs ou indiens, d'établir des algorithmes de calcul, mais ils en ont donné des justifications mathématiques, ont comparé entre eux les différents algorithmes, engageant ainsi une réflexion consciente sur la nature et la limite des approximations.

L'étude de l'analyse indéterminée, ou analyse diophantienne rationnelle, dont les débuts remontent au milieu du IX^e^ siècle, sera poursuivie et systématisée par Abû Kâmil (vers 880), contemporain de la traduction arabe des *Arithmétiques* de Diophante ; celui-ci la dotera d'une terminologie propre et en donnera un exposé systématique dont l'objet est de résoudre par l'algèbre des problèmes traités jusqu'alors par les arithméticiens. Avec al-Karajî qui tente de dégager des méthodes pour chaque classe de problèmes, l'analyse indéterminée devient un chapitre de l'algèbre. Quant à l'analyse diophantienne entière, chapitre de la théorie des nombres, de nombreux travaux — dans la tradition d'al-Khâzîn, un des fondateurs de cette tradition — verront le jour sur les triangles numériques, les nombres congruents ; les mathématiciens du monde arabe tenteront même de démontrer l'impossibilité du premier cas du théorème de Fermat.

La théorie des nombres est au confluent de deux traditions, euclidienne et néo-pythagoricienne. Thâbit Ibn Qurra (IX^e^ siècle) étudie les nombres amiables et démontre le théorème qui porte son nom. Ces travaux seront repris et complétés par al-Fârisî (1267-1320), qui, dans le cadre de ses travaux sur les nombres amiables, étudie la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers et l'unicité de cette décomposition et découvre certaines fonctions arithmétiques élémentaires. Les mathématiciens du monde arabe s'intéresseront également aux nombres parfaits et à la caractérisation des nombres premiers.

La contribution des mathématiciens du monde islamique aux déterminations infinitésimales a déjà été évoquée ici. Rappelons simplement que, engagées dans la postérité des travaux d'Archimède, leurs recherches les ont conduits à retrouver certaines des méthodes d'Archimède dont ils n'avaient pas eu connaissance, à calculer de nouveau la surface du cercle et celle de la sphère, ainsi que le volume de la sphère. Ils se sont également intéressés à la quadrature de la parabole et au calcul du volume de diverses sortes de paraboloïdes de révolution. Les grands noms de cette recherche sont, après les frères Banû Mûsâ, ceux de Thâbit Ibn Qurra (836-901) — qui détermine, outre l'aire des segments de parabole, le volume du paraboloïde de révolution, ainsi que l'aire de l'ellipse —, de son petit fils Ibn Sinân (909-946), d'al-Qûhî, (fin du X^e^ siècle) et enfin d'Ibn al-Haytham (lat. Alhazen, né en 965 environ, mort après 1040), dernier grand mathématicien de la tradition infinitésimaliste arabe — il calcule en particulier et pour la première fois dans l'histoire, le volume du solide obtenu en faisant tourner une parabole autour d'un axe parallèle à la tangente au sommet —.

Si, comme on l'a dit, les tentatives de résolution géométrique des équations du troisième degré débouchent sur l'étude de quelques nouvelles propriétés des coniques, les recherches en optique vont également stimuler le développement de la théorie des coniques : pour les besoins de l'optique (essentiellement les recherches sur les miroirs paraboliques ou elliptiques et les lentilles) on va s'intéresser à la façon d'obtenir un tracé continu de ces courbes, à l'aide d'instruments dits compas parfaits, étudier leurs propriétés focales, leur définition par foyer et directrice, les propriétés de leurs tangentes et celles des asymptotes des hyperboles, renouvelant et prolongeant ainsi la théorie d'Apollonius. Le développement simultané de l'astronomie à partir du IX^e^ siècle va en outre induire de nouvelles directions de recherches en géométrie ; pour résoudre les problèmes posés par les astronomes, les mathématiciens vont en effet être amenés à appliquer leurs théories à de nouveaux objets et même à développer un certain nombre de théories nouvelles. Tout d'abord, afin de construire des astrolabes, dont la demande, à partir du IX^e^ siècle, est de plus en plus importante et donne naissance à une profession reconnue comme telle, celle des « astrolabistes », la nécessité se fait jour d'obtenir une représentation plane exacte de la sphère céleste ; cette nécessité va susciter une multiplication des recherches sur les projections. Si l'on trouvait déjà chez Ptolémée la notion de projection stéréographique, les mathématiciens arabes (al-Kindî, Banû Mûsâ au IX^e^ siècle, Ibn Sinân, al-Sijzî, mais surtout Ibn Sahl et al-Qûhî au X^e^ siècle) vont élaborer une première théorie des projections de la sphère sur un plan, projections cylindriques d'axes quelconques et projections coniques à partir d'un point quelconque. Cette théorie mathématique nouvelle, née des besoins de l'astronomie, va assez vite se développer indépendamment de la construction des astrolabes ; les projections deviennent en elles-mêmes un objet d'étude et un domaine de recherches, ouvrant ainsi un nouveau chapitre de géométrie, non hellénistique.

Les projections ne sont pas les seules transformations géométriques à avoir suscité l'intérêt des mathématiciens du monde arabe. Dans son traité sur les sections du cylindre Thâbit Ibn Qurra fait intervenir pour la première fois dans ses démonstrations des transformations géométriques ponctuelles (projections cylindriques, affinités orthogonales, homothéties) dont il démontre et utilise certaines propriétés ; ce traité va infléchir la recherche en géométrie dans une nouvelle direction et aura une influence profonde sur les œuvres de ses successeurs, en particulier celles de son petit fils Ibrâhîm Ibn Sinân (909-946). Celui-ci, pour calculer l'aire de la parabole, fait intervenir, le concept de transformation affine, déjà mis en œuvre par Thâbit : il démontre, de la façon la plus générale, que toute transformation affine bijective laisse invariante la proportionnalité des aires. Il utilise également, pour construire point par point des coniques, des transformations projectives (homologie). Ibn al-Haytham, dans son traité sur *Les Connus*, étudie les images de droites et de cercles par des translations, des homothéties et des similitudes directes. Cependant, passé le XIe siècle, les transformations géométriques, autres que celles nécessaires à la construction des astrolabes, suscitent moins d'intérêt.

C'est encore pour les besoins de l'astronomie que se développe la trigonométrie plane et sphérique ; les notions de sinus et de sinus verse, absentes des mathématiques grecques, sont les deux apports de l'astronomie indienne, introduite à Bagdad au VIIIe siècle en même temps que des tables astronomiques d'origine persane. Simultanément, ou presque, Euclide, Ménélaüs et Ptolémée sont, au IXe siècle, traduits en arabe à plusieurs reprises. Les exigences accrues des astronomes font que l'on ne se contente plus des anciennes tables et que l'on vérifie les calculs anciens ; faisant une synthèse des apports grecs et indiens, les astronomes essaient de démontrer les règles qui figurent dans les traités d'astronomie et les tables de sinus ou de cordes. Ces efforts vont donner naissance à une floraison de traités, mathématiques d'une part, sur la « figure secteur » (le théorème de Ménélaüs) et sur le rapport composé qui était le problème majeur posé par l'utilisation de ce théorème, astronomiques d'autre part, les *zîj* (i.e. tables, *zîj* d'al-Battânî, fin du IXe siècle, *zîj* d'al-Farhânî, mort après 861, qui vont passer tôt dans le monde latin). C'est dans le *zîj* de Habash (contemporain d'al-Khwârizmî et d'al-Battânî) que sont définis clairement le sinus et le sinus verse ; c'est également Habash qui le premier définit la tangente et en établit une table. L'introduction de la tangente passera cependant presque inaperçue et la notion de tangente ne se dégagera que lentement de la notion d'ombre du gnomon. Il faudra attendre l'*Almageste* d'Abû al-Wafâ' al-Buzjânî (940-997/8) pour que son importance soit reconnue. La découverte, au Xe siècle, du théorème des sinus dans le plan et du théorème des sinus sur la sphère (proportionnalité des sinus et des arcs correspondants des triangles sphériques), dont plusieurs mathématiciens, parmi lesquels Abû al-Wafâ' al-Buzjânî, se disputent la paternité, sera la pierre de touche du renouveau de la trigonométrie sphérique. Le *Traité du quadrilatère* de Nasîr al-Dîn al-Tûsî (1201-1274), vaste synthèse des traités précédents, sera le point culminant de la trigonométrie arabe. L'ouvrage s'achève sur la détermination des triangles sphériques quelconques, ramenée à celle des triangles rectangles et incluant l'emploi du triangle polaire (c'est du reste le seul usage connu du triangle polaire dans le monde arabe).

La trigonométrie arabe, a cependant du mal à se dégager de l'astronomie et à constituer un chapitre autonome de géométrie. C'est vraisemblablement ce fait qui va freiner, voire même arrêter, son développement ultérieur ; il faudra que la trigonométrie passe dans le monde latin, débarrassée d'une partie des traditions du calcul astronomique pour pouvoir donner lieu à de nouveaux développements.

On voit ainsi, en quelques siècles, les savants du monde islamique, poursuivant l'œuvre de leurs prédécesseurs gréco-hellénistiques, inventer l'algèbre et l'appliquer à toutes les autres branches des mathématiques, développer, à la suite d'Archimède, les recherches sur les mathématiques infinitésimales, préparant ainsi les travaux modernes en théorie de l'intégration, créer, en liaison avec l'optique et l'astronomie, les nouveaux chapitres de géométrie que sont la théorie des projections et l'étude des propriétés focales des coniques. Les traductions latines, à partir du XII^e siècle, de certaines de leurs œuvres ont introduit, entre autres, en Europe, le calcul indien et l'algèbre, préparant ainsi l'essor intellectuel de la Renaissance ; sans les mathématiques arabes l'œuvre de Léonard de Pise (1202) est incompréhensible ; les travaux de l'école algébrique italienne au XVI^e siècle (Cardan, Tartaglia, Bombelli) sur les équations du troisième degré se font dans la continuité directe de ceux d'al-Khayyâm et de Shâraf al-Dîn al-Tûsî ; les travaux d'al-Samaw'al et de Simon Stevin d'une part, ceux de Shâraf al-Dîn al-Tûsî ou d'Ibn Sinân et de Viète et Fermat d'autre part, ceux d'al-Khâzin et de Bachet de Méziriac enfin, relèvent de la même problématique et nombreuses sont les similitudes que l'on peut relever entre leurs œuvres. La dichotomie médiéval/moderne, (ou oriental/occidental) qui opposerait deux types différents de pensée et de rationalité se trouve ainsi mise à mal et demande à être revue et nuancée : rien ne permet en effet de classer en des ères différentes les travaux de ces divers mathématiciens ; les résultats obtenus et démontrés par les algébristes des XI^e et XII^e siècles ont d'ailleurs été pour la plupart attribués par les historiens des sciences aux mathématiciens des XVI^e et XVII^e siècles et les ruptures, car il y a vraiment des ruptures, ont plutôt lieu au XVII^e siècle au sein même des œuvres de Descartes ou de Fermat.

Ce qui frappe après ce survol rapide, c'est la continuité de ce développement des mathématiques : d'une rive de la Méditerranée à l'autre, du III^e siècle avant notre ère, au XVII^e siècle, des Grecs aux Européens, en passant par les Arabes, c'est bien la même rationalité que l'on voit à l'œuvre, transcendant les époques, les frontières et les langues.

ENSEIGNEMENT

À propos de l'étude internationale timss[1]

Michèle PÉCAL (*APMEP*)

Depuis quelques années, un fossé semble s'être creusé entre les attentes des enseignants du supérieur et les compétences que les étudiants ont acquises pendant leurs années de lycée. Nostalgie ou véritable baisse du niveau des étudiants ? On ne dispose que de peu de données objectives sur l'évolution du « niveau » des élèves pour répondre à cette question. L'influence de la massification de l'enseignement, des changements de programmes et de structures et de quelques autres facteurs est un sujet de réflexion complexe et souvent développé.

Dans cette situation les possibilités de comparaison des compétences des élèves de différents pays fournissent des indicateurs intéressants. On connaît les résultats récents des Olympiades Mathématiques Internationales, compétition entre des jeunes spécialement sélectionnés et entraînés. La médiocrité des performances de l'équipe française a suffisamment déçu pour provoquer la création de l'association Animath, qui, parmi ses objectifs, se propose d'aider à la préparation des compétiteurs en même temps que de favoriser l'implantation de clubs mathématiques, ce qui devrait notamment permettre de créer un vivier de jeunes, motivés pour les mathématiques et la recherche de problèmes. Cependant les Olympiades ne concernent qu'un très petit nombre de lycéens et ne peuvent donc ni donner une image de ce que sont les systèmes d'enseignement, ni du niveau général des lycéens.

En 1995, la France a participé à l'étude TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), étude de l'IEA (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement), dont les résultats ont été rendus publics fin 1996. Cette étude a concerné plusieurs populations d'élèves : 9 ans, 13 ans et fin d'études secondaires. C'est cette dernière qui nous intéresse ici.

Pour situer cette enquête par rapport à notre système éducatif, rappelons que l'année 1994-95 était la première année de mise en application en terminale de la réforme des lycées qui a amené la structure que nous connaissons actuellement, et qui, en particulier, avait vu la disparition de la terminale C et sa fusion avec la terminale D, pour constituer l'actuelle terminale S. L'étude TIMSS a été élaborée de 1991 à 1995 et a concerné plus de 40 pays pour l'ensemble des trois niveaux cités ci-dessus.

Un comité international coordonnait l'étude et a défini les règles méthodologiques et statistiques que chaque pays devait respecter. Chaque pays était

[1] Le questionnaire TIMSS sera analysé par J. Pian et A. Pommellet dans un prochain numéro de la *Gazette*

ensuite responsable de l'organisation nationale, tout en étant tenu de respecter les règles fixées par le comité international. En France, l'organisation a été confiée à la DEP (Direction de l'Evaluation et de la Prospective du ministère de l'Education nationale) et au CIEP (Centre International d'Etudes Pédagogiques).

Les organisateurs ont retenu, en France, les élèves des classes terminales de lycées, de toutes les séries, y compris les élèves de baccalauréat professionnel et de terminale de BEP. Comme dans chaque pays, l'enquête a porté sur un échantillon (échantillonnage stratifié). Tous les élèves ont passé une épreuve de « connaissances de base et culture générale en mathématiques et en sciences », les élèves ayant reçu une formation spécialisée en mathématiques ont eu de plus une épreuve spécifique en mathématiques et physique. Trente pays participaient à l'épreuve de culture générale, vingt-huit à l'épreuve spécifique pour les scientifiques.

Des questionnaires d'opinion étaient aussi proposés aux professeurs et aux établissements.

Un coup d'œil au classement des pays satisfait largement le lecteur français qui s'intéresse à l'enseignement des mathématiques. Il peut même être étonné : la France se classe première en mathématiques pour la population des élèves scientifiques et septième (juste au dessus de la moyenne) pour la population globale. Il faut de plus noter qu'en France, les séries retenus dans la population des « scientifiques » étaient S, ES, L spécialité mathématiques et quelques séries technologiques, ce qui représentait environ 20% de la population totale, alors que dans la plupart des autres pays elle était de l'ordre de 5%. Les jeunes français semblent donc bien se défendre en mathématiques. Notons que, par contre, les résultats en physique sont beaucoup moins bons, nettement en dessous de la moyenne pour les scientifiques, légèrement en dessous pour les « non-scientifiques ».

Il semblerait donc que le niveau en mathématiques, même s'il nous semble « avoir baissé » depuis quelques années, soit en fait resté très bon. Au delà de la satisfaction que cela peut nous procurer quant à notre système d'enseignement, il nous reste à nous interroger sur les informations que cette étude et ces résultats peuvent nous apporter. D'autre part, les différences de résultats observées, sont elles significatives ? Et de quoi ?

On peut facilement imaginer la complexité à organiser une telle étude, à élaborer, choisir, traduire des questions qui seront posées à des élèves de nombreux pays, dont les cultures et les systèmes scolaires sont variés et parfois très différents. Sans même parler des problèmes de traduction, les programmes d'enseignement de mathématiques, s'ils comportent des éléments communs, n'en sont pas moins assez divers. Plus largement les « curricula », qui englobent, outre les programmes au sens strict, les pratiques d'enseignement et, pour parler rapidement, l'ensemble les conditions d'apprentissage, varient très nettement d'un pays à l'autre. L'activité du professeur et de l'élève pendant ce que nous appelons « l'heure de cours », par exemple, est très différente d'un pays à l'autre. D'ailleurs nous savons bien que même dans notre pays, elle varie assez considérablement suivant les professeurs : du « cours magistral », qui doit encore bien persister ici ou là, aux séances de « problèmes ouverts », tous les niveaux d'interactivité entre élèves et entre l'enseignant et l'élève peuvent exister.

TIMSS n'est pas seulement une enquête sous forme de questionnaires posés aux élèves des différents pays, mais est également une étude des curricula des différents pays. Les programmes, les manuels, les documents fournis aux enseignants, les horaires d'enseignement, le type de travail en classe et « à la maison », l'équilibre entre écrit et oral, tout cela entre en ligne de compte dans la formation des élèves et a, à divers titres, été étudié dans TIMSS. Ces travaux étaient de toutes façons indispensables pour élaborer les questionnaires composés de questions de mathématiques et sciences. Dans le cadre de TIMSS, on distingue plusieurs aspects du curriculum : le curriculum officiel (intended curriculum), le curriculum réel (implemented curriculum), le curriculum atteint (attained curriculum). Ces différents aspects et les relations entre eux sont étudiés, ainsi que les relations entre évaluation et curriculum. Des renseignements peuvent en être tirés, qui peuvent avoir une influence sur l'évolution des systèmes d'enseignement, bien que, il faut le reconnaître, les deux précédentes études internationales (FIMS et SIMS) n'aient eu que peu d'impact, tout au moins en France.

L'enquête proprement dite a eu lieu en mai 1995. Les questionnaires proposés aux élèves contenaient divers types de questions : QCM, QROC (questions à réponse ouverte courte), questions ouvertes. En cela elle différait des précédentes études internationales FIMS et SIMS qui n'étaient constitués que de QCM.

Les questions d'évaluation, les contenus d'enseignement, ... sont repérés à l'aide d'une grille permettant des classifications et des comparaisons.

La première partie de cette grille concerne les contenus mathématiques, relativement condensés et répartis à grands traits. La deuxième partie, dont le titre anglais est « performance expectations », peut être appelée « démarches sollicitées et produits attendus ». La troisième partie concerne les « finalités » (le titre anglais est « perspectives »). La seule lecture des titres de cette grille montre les différences d'interprétation qui peuvent exister d'un pays à l'autre s'agissant de questions d'enseignement.

Les questions de culture générale scientifique (mathematics and science literacy) étaient réparties en deux questionnaires totalisant une trentaine de questions de mathématiques, physique, chimie, sciences de la vie et de la Terre, dix-neuf étant des questions de mathématiques : pourcentages, proportionnalité, lecture de graphique appliqués à des longueurs, des aires, des durées, ... Il s'agit à peu près de ce que nous appelons « l'information chiffrée ».

Les deux questionnaires de mathématiques pour les élèves à formation scientifique totalisaient trente-six questions et étaient accompagnés d'un petit formulaire (somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, sinus et cosinus d'une somme, formule de Moivre, volume d'un cylindre et d'un cône, ...). On y trouve des questions de combinatoire, de probabilité, des questions concernant des fonctions, des aires calculées à partir d'intégrales, des questions de géométrie : vecteurs, calculs de longueurs, utilisation de transformations, ... Chaque question est courte, pour certaines il s'agit de QCM, pour d'autres on demande « montrez votre travail ».

Il est clair que les résultats ne sont pas indépendants des curricula, cependant les compétences acquises par les élèves peuvent leur permettre de résoudre des problèmes relativement simples sur des notions qu'ils n'ont pas toujours étudiées en classe. Cela fut le cas, par exemple, pour la population des élèves français de 13 ans (classes de cinquième et quatrième chez nous) qui réussirent honorablement les questions de probabilité qui ne font pas partie du programme français à ce niveau. Lors des analyses, les résultats à des questions basées sur les mêmes notions ont été croisés de façon systématique, des analyses de type analyse implicative ont été réalisées, afin de repérer des invariants tels que les éléments dépendant peu des curricula.

Quelques questions étaient communes aux élèves de cinquième-quatrième (13 ans) et aux élèves de terminales (questionnaire commun à toutes les séries). L'ensemble des élèves de terminale les ont mieux réussies, cependant les élèves de BEP ont moins bien réussi que ceux de quatrième, les élèves de STT et de L devancent à peine en mathématiques ceux de quatrième.

En ce qui concerne les élèves scientifiques, disons brièvement que les élèves français de fin d'études secondaires ont mieux réussi les questions d'application directe des connaissances que celles demandant un réinvestissement, que les questions d'algèbre et de probabilités ont été mieux réussies que celles d'analyse et de géométrie, que les élèves qui ont un plus grand nombre d'heures d'enseignement réussissent mieux, et ... que les garçons réussissent mieux que les filles... (60,9% contre 57,3% de réussite, pour les élèves de série scientifique) la différence étant moindre lorsque les horaires d'enseignement sont plus élevés.

Rien de bien nouveau, mais la confirmation que les efforts doivent porter sur un meilleur apprentissage à la recherche de problèmes, ce qui nécessite que les élèves disposent de temps pour chercher, confronter leurs pistes de recherche, leurs solutions, entre eux et avec leurs professeurs de mathématiques. Cela confirme aussi que la réussite des élèves augmente avec l'horaire de mathématiques, contrairement à ce qu'on entend parfois et probablement qu'on peut gommer, par un temps d'enseignement suffisant, les différences culturelles ou sociologiques.

Il est bien sûr plus convaincant de s'appuyer sur des exemples, de prendre connaissance des questions posées et de résultats plus précis et détaillés. Un dossier est disponible à l'IREM de Besançon et contient une bibliographie, des notes d'informations du ministère de l'Education nationale rendent compte de quelques éléments de cette étude : notes 96.49 et 96.50 de décembre 1996 concernant les élèves de terminales, note 97.06 de février 1997 concernant les élèves de cinquième et quatrième. On peut aussi consulter le site web de TIMSS : http ://www.csteep.bc.edu/timss

Signalons également que l'enquête EVAPM Terminales qui a eu lieu en mai-juin 1999 reprend des questions de TIMSS. L'observatoire EVAPM a conduit depuis 1987 douze enquêtes d'évaluation dont les analyses ont été publiées par l'APMEP. Cette année, pour l'opération dans les classes de terminales des lycées d'enseignement général et technologique, deux des 28 questionnaires élaborés sont faits à partir de questions de TIMSS. Les analyses des résultats fourniront sans doute de nouveaux indicateurs.

Peut-on s'arrêter aux bons résultats en mathématiques de nos élèves, comparativement à ceux d'autres pays, pour en conclure que tout est parfait ? Le fait que les élèves « scientifiques » français aient obtenu 557 points alors que la moyenne des pays ayant participé à l'enquête est 501 est-il significatif d'un niveau supérieur à celui des autres pays ? Chacun sait la prudence avec laquelle il faut interpréter des résultats statistiques et tenir compte des paramètres liés à l'expérimentation. Nous avons là seulement un indicateur : les élèves français ont bien réussi, cette année-là, les questions qui leur ont été posées et qui étaient issues d'un consensus entre les organisateurs de l'enquête. Ces questions étaient, pour certaines, classiques dans notre enseignement, pour d'autres moins, la formulation en était nettement différente de celle de nos problèmes de baccalauréat. On peut dire que les élèves de l'échantillon retenu ont su, aussi bien ou mieux que d'autres, mobiliser leurs connaissances. L'obligation dans laquelle se trouvaient les concepteurs des questionnaires de proposer des questions suffisamment adaptées aux connaissances des élèves d'une trentaine de pays était nécessairement réducteur vis-à-vis des notions mathématiques mises en jeu, mais écartait toute forme de bachotage ou de reproduction d'exercices cent fois répétés.

Il serait aussi déraisonnable de déduire des médiocres résultats aux Olympiades que l'enseignement est calamiteux que de croire, à la vue de ceux de TIMSS, à l'excellence de notre système d'enseignement pour les classes scientifiques ! N'oublions pas d'ailleurs que le niveau en sciences et en mathématiques de la population globale n'est, d'après TIMSS, que moyen. Cependant il serait tout aussi déraisonnable de nier que la formation donnée en mathématiques dans l'enseignement secondaire a des qualités. Dans le climat de morosité et de découragement actuel, il serait bon que tous les « acteurs de l'éducation », enseignants, « décideurs », opinion publique, en soient conscients et que chacun, à la place qu'il occupe, ait à cœur d'en préserver la qualité, c'est-à-dire s'efforcer de l'améliorer, d'en maintenir les points forts et d'en corriger les faiblesses, sous peine de voir cette qualité s'effondrer rapidement. Cela passe par l'investissement des enseignants qui doivent aussi savoir que leur travail n'est pas sans efficacité. Cela passe par des moyens suffisants donnés à l'enseignement des mathématiques, pour permettre aux élèves de mieux développer leurs capacités de raisonnement en leur donnant le temps scolaire indispensable pour apprendre à chercher, à expérimenter, à s'exprimer. Cela passe par des programmes raisonnables donnant aux élèves l'occasion, non seulement d'acquérir des connaissances, mais de les mobiliser pour résoudre des problèmes et ainsi développer leur goût pour la recherche.

⋆ ⋆ ⋆

Contribution au débat sur l'enseignement des mathématiques en premier cycle[1]

Denis RICHARD (*Université Clermont-Ferrand 1*)

En fait, je ne propose ci-dessous ni une critique ni une analyse du contenu de l'essai de notre ancien président Jean-Jacques Risler : je pense qu'il répond brillamment à une question franco-française dont j'ai personnellement l'impression qu'elle ne se pose pas réellement mais qu'elle est un artefact de l'organisation de notre système éducatif scientifique ou, à tout le moins, un symptôme du hiatus existant entre les programmes dont nous avons besoin et l'académisme qui caractérise notre enseignement.

1) Il s'agit à mon avis de la *n-ième version du problème récurrent posé par la sempiternelle discussion physicien-versus-mathématicien* sur l'élaboration du parfait programme pédagogique mathématique fournissant les outils nécessaires, voire indispensables, à l'enseignement de la physique. Ils les faudraient sophistiqués à souhait et transmis en un temps record. Il y eut de nombreuses tentatives, dans de nombreuses institutions universitaires. Il y eut même de remarquables enseignements sur les techniques et les méthodes de la physique par des scientifiques de renom (B. Malgrange, L. Schwartz). Au petit niveau d'une propédeutique, j'ai, plus jeune, tenté d'animer un débat sur la question. Ce fut vain et je crois, aujourd'hui comprendre pourquoi.

1a) Philosophiquement, épistémologiquement, les sciences physiques ne peuvent s'élaborer en recherche que par *l'intrication de l'expérience et de l'outil de modélisation mathématique*. Le sens et la sémantique du terme mathématique ne s'élabore qu'au fur et à mesure que l'observation du physicien progresse. À supposer qu'un étudiant puisse être comparé avec un chercheur, ce serait bien de façon concomittante et en suivant le principe de nécessité que les notions devraient apparaître et s'interpréter. Ceci paraît utopique mais c'est pourtant incontournable : on ne peut obtenir un bon rendement pédagogique par une dichotomie maths/physique. Qu'il me soit permis de raconter l'histoire d'un étudiant de licence de mathématiques qui ayant eu une très bonne note à un certificat d'électricité s'était entendu *reprocher* (!) par le maître-assistant en fonction d'avoir de bons résultats alors que sa compréhension de la physique s'était révélée médiocre en travaux pratiques. L'étudiant rétorqua à l'enseignant que pour noter valablement une épreuve de physique, il faudrait commencer par ne pas y poser un problème de ... mathématique !

1b) En fait les physiciens — particulièrement en France — ont eu (ont encore ?) tendance à exposer les outils mathématiques de la connaissance en

[1] Ces contributions sont la suite de notre dossier sur l'enseignement des mathématiques dans le 1er cycle (numéro 81 de la *Gazette* (juillet 1999), voir les articles de J.-J. Risler, J. Bok et F. Weissler).

sciences physiques en lieu et place de la physique elle-même. *Enseigner la physique demande des expériences et du temps.* Il faut alors rester modeste dans l'apprentissage et ce n'est pas l'ambition des programmes de premier cycle universitaire qui y incite. On y veut tout et tout de suite : les équations de Maxwell avant que ne soit assimilées les notions de résistance, d'inductance, d'impédance, d'onde, d'énergie, etc. La question posée tourne alors à celle-ci : y aurait-il une manière de comprendre la physique sans en faire ? (pour peu que les mathématiciens livrent les étudiants cuirassés des théories suffisantes...) et la réponse de Jean-Jacques Risler serait positive.

1c) *Chez les autres.* Les étudiants qui intègrent une université nord-américaine (celle de Calgary au Canada, par exemple) n'ont absolument pas le niveau mathématique de nos élèves de taupe, ni même de ceux des IUT scientifiques. Pourtant des physiciens américains comme le professeur Feynmann leur enseigne la physique la plus contemporaine dès la première année. Comment font-ils ? J'ai discuté à l'université Fudan de Shangaï avec des étudiants en physique de troisième année qui semblaient passionnés. Ils passaient plus de temps à construire des expériences en réparant du matériel vétuste, à ce qu'ils disaient, qu'à faire des mathématiques. Ils y substituaient l'informatique avec moins de moyens que dans nos instituts. Le niveau de recrutement de Fudan étant comparable à celui de nos écoles normales supérieures, on n'avait pourtant pas jugé utile d'ingurgiter à des étudiants qui pouvaient certainement le supporter, une machinerie mathématique préalable. Il y a déjà longtemps, j'ai enseigné quatre ans à Alger et les étudiants d'alors étaient motivés et encadrés par des jeunes universitaires tout aussi motivés. Le niveau mathématique valait celui des universités françaises de la même époque, enthousiasme militant en plus pour tous les protagonistes. Les maths passaient bien et la physique plus difficilement : nous avions, à l'époque diagnostiqué le manque de pratique expérimentale dès l'enfance des jeunes algériens, puis au lycée (de conception française) et enfin à l'université.

1d) On peut d'ailleurs retourner les termes du problème et penser qu'il n'est possible d'enseigner certaines notions mathématiques de géométrie différentielle, de surfaces, de théorie du potentiel, qu'après que les étudiants aient eu connaissance des phénomèmes physiques ainsi modélisés.

2) *L'air du temps.* De mon expérience en IUT, je crois pouvoir conclure que les étudiants moyens comprennent dans l'ordre : la logique propositionnelle, puis les automates à nombre fini d'états (qui délivrent un jus de pomme ou d'orange et rendent la monnaie sur 6 francs), puis les automates qui calculent modulo n, puis l'arithmétique élémentaire dans ces liens avec l'algorithmique pratique (codage, cryptographie) car elle devient nécessaire à ce stade. On peut ensuite passer à l'algèbre de Boole qui est celle des machines. L'algèbre linéaire survient alors et s'atteint par la géométrie de l'écran et ses transformations linéaires en 2D et 3D. Vous direz alors : et l'analyse réelle ? et la théorie du signal ? et les champs de vecteurs ? Cette année, à l'IUT, on a enseigné l'interpolation polynomiale et les différences finies (pas de notion de limite), c'est avec Maple qu'on a manipulé les groupes finis, les séries et les équations différentielles (cours de mathématiques de deuxième année). Quant aux séries de Fourier, à la transformation de Laplace, cela se travaille au tableau et sur l'oscilloscope. Les preuves ne sont pas données mais la signification électrique supplée les preuves, non fournies.

2a) Il me semble que la *majorité des étudiants* (c'est-à-dire tous, sauf les taupins) *ont besoin de mathématiques discrètes et d'informatique* (avec usage de progiciel de calcul formel) pendant le début de leur premier cycle scientifique. Les gens qui auront besoin des mathématiques de la physique sont, en fait, minoritaires : il y a à penser aux biologistes, aux commerciaux, aux économistes, aux juristes, aux médecins, aux techniciens de tous horizons...

Dans le cas où les mathématiques du continu s'avèrent indispensables, elles peuvent (doivent) suivre les mathématiques discrètes et l'informatique et se traiter simultanément à l'enseignement de la discipline qui en fait usage.

2b) Quant aux programmes des taupins et des DEUG scientifiques qui se veulent proches des classes préparatoires, ils sont, de longue date principalement adaptés aux professeurs qui les enseignent et ce n'est déjà pas si mal. On trouve dans le couple (professeurs de taupe-taupins) une homogénéité de niveau et motivation qui est précieuse. L'évolution ne peut dès lors se faire que par la formation des enseignants de mathématiques qui doivent connaître plus d'informatique et plus de physique. C'est d'ailleurs le but de l'introduction du calcul formel à l'agrégation, de la création du nouveau CAPES d'informatique (à quand l'agrégation d'informatique ?) On pourrait peut-être croire à la lecture de tout ce qui précède que je suggère de nous rapprocher du modèle américian et des programmes tels que définis par Rosen dans son excellent pavé intitulé *Discrete Mathematics*. Il n'en est rien et je pense qu'on doit (peut) conserver les taupes (en organisant l'évolution des formations de leurs professeurs) qui ne sont en rien des structures à l'américaine.

Voilà comment je propose d'oublier les éternels débats sur la façon d'en arriver au plus vite à la formule de Stokes, dont je pense qu'ils sont un peu le cache-sexe d'une nudité en pédagogie expérimentale de certaines parties du système de l'enseignement de la physique en France. Plus positivement, c'est dans l'atmosphère scientifique d'aujourd'hui qu'il faut chercher l'oxygène de la formation scientifique. Les jeunes y respirent à plus fortes inspirations que nous. Les machines et les modélisations abstraites de l'univers qui nous entoure sont à une majorité de la population estudiantine un viatique vers la critique, la culture (mathématique et universelle) et la création scientifique.

Contribution au débat sur l'enseignement des mathématiques en premier cycle[1]

Manuel SAMUELIDÈS
(*École normale supérieure de l'aéronautique et de l'espace*)

Introduction

L'existence même d'une commission nationale composée de mathématiciens et de physiciens sur les programmes de premier cycle scientifique est une excellente chose. Bien entendu, les programmes locaux sont souvent le fruit de concertations interdisciplinaires. D'autre part, à l'échelle nationale, le programme de mathématiques des classes préparatoires a lui aussi fait l'objet de débats interdisciplinaires. Mais les préoccupations politiques et corporatistes polluent souvent ce qui devrait être un débat avant tout pédagogique et aussi scientifique.

Les lignes directrices du document rédigé par J.-J.Risler : détermination du programme de mathématique en fonction du programme de physique et de ses besoins, ne pas chercher absolument à tout prouver, réaffirmation du rôle autonome et spécifique de l'enseignement mathématique pour son rôle de formation à la rigueur (hypothèses de validité) et de modélisation (structure logique autonome relativement à la discipline physique) sont effectivement une bonne base de départ. Cependant, il ne faut pas croire que leur application est aisée ou qu'elle suffira à résoudre les problèmes pédagogiques posés par l'enseignement des mathématiques dans les formations d'ingénieurs et de physiciens. Ces principes sont appliqués dans les écoles d'ingénieurs et avec un public d'étudiants généralement bien sélectionnés. Bien que les conditions d'enseignement des écoles d'ingénieurs soient assez différentes de celles du premier cycle des universités, à partir de l'expérience des écoles, on peut réfléchir sur les problèmes de mise en application des principes louables énoncés dans le texte de la commission.

Détermination du programme

A partir de l'évidence que les programmes de mathématiques et de physique sont élaborés avec des logiques disciplinaires différentes et sans harmonisation suffisantes, le texte se livre à une critique du rôle trop grand dévolu à l'algèbre et à un plaidoyer pour la réhabilitation de ce que l'on peut appeler l'analyse vectorielle ou la géométrie différentielle. Effectivement, dans les écoles d'ingénieurs, l'algèbre a généralement une part réduite. Cependant, on fait un usage important de certaines notions enseignées en premier cycle. Il est par exemple important de savoir manipuler les polynômes formels pour pouvoir les stocker en machine ou bien les appliquer à un opérateur abstrait (calcul symbolique). La

[1] Ces contributions sont la suite de notre dossier sur l'enseignement des mathématiques dans le 1[er] cycle (numéro 81 de la *Gazette* (juillet 1999), voir les articles de J.-J. Risler, J. Bok et F. Weissler).

manipulation des fractions rationnelles reste assez importante dans les études de stabilité des systèmes linéaires. ... Quant à l'enseignement des opérateurs différentiels géométriques, leur introduction dans les cours de mathématiques n'a pas été durable : on peut constater en tout cas que ce type d'enseignement n'apparaît plus beaucoup dans les catalogues de tronc commun. Quelle conclusion générale tirer de l'évocation de ces deux points parmi d'autres ? Que l'utilisation d'outils mathématiques dans un cours de physique constitue une *incitation* à inclure ces outils dans un cours de mathématiques et non une *obligation*. En effet, pour être une réussite pédagogique, un concept ne peut être isolé et une certaine masse critique est nécessaire. L'explication du caractère intrinsèque des opérateurs de l'analyse vectorielle dépasse peut-être le niveau d'un cours de mathématiques du premier cycle, en revanche l'usage de ces opérateurs est une invitation pressante à mettre l'accent beaucoup plus tôt et de façon plus détaillée sur les fonctions à plusieurs variables. Réciproquement, la non-utilisation d'objets mathématiques dans le cours de physique de l'année n'est pas une raison suffisante pour les abandonner. Ainsi, on se rend compte que le meilleur rapport entre l'usage du calcul tensoriel en mécanique et ses fondements dans le cours de mathématiques a lieu en algèbre linéaire dans le chapitre délicat de la dualité.

Le calcul et la démonstration

En quoi consistent les prérequis mathématiques des cours de physique ? La plupart du temps en l'énoncé de règles de calcul et à leur mise en application sur des exemples simples et si possible qui serviront par la suite. Cela montre le rôle important du calcul. Même si on attend de la machine qu'elle soulage l'effort de l'étudiant par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel, il faut bien voir que les physiciens s'ingénient à faire réfléchir les étudiants sur des exemples-jouets où tous les calculs se font à la main. Le meilleur moyen pour un étudiant peu formé à l'abstraction de se familiariser avec un objet mathématique est de faire des calculs dessus. Cette familiarisation peut être trompeuse, elle n'en est pas moins nécessaire. L'article de J.-J. Risler insiste à la fois sur le fait qu'on ne peut faire dans un cours de mathématiques appliquées toutes les démonstrations et que le rôle irremplaçable des mathématiques est de pouvoir fournir des démonstrations. Le problème se pose de choisir les démonstrations qu'on se propose d'éxécuter. Leur caractère utile pour les applications doit être un critère de choix. En particulier, le caractère constructif ou pas d'une démonstration doit être pris en considération. Par exemple, la démonstration du théorème du point fixe donne l'occasion d'introduire un algorithme sans cesse utilisé dans les calculs. Ainsi, non seulement calcul et démonstration doivent coexister dans un cours de mathématiques appliquées mais il faut inventer le maximum de liaisons entre eux.

Rôle autonome des mathématiques

Dans la plupart des textes sur l'enseignement universitaire qu'il m'est donné de lire, le combat pour l'autonomie des mathématiques dans les formations de physiciens et d'ingénieurs se confond avec celui pour le monopole des mathématiciens sur la formation mathématique. On peut pourtant constater qu'un monopole ne se proclame pas. Celui-là est depuis toujours non appliqué et on ne peut réclamer son application brutale à moins de mettre en cause en bloc toutes les formations données jusqu'ici qui ne le respectaient pas, ce qui ne sera pas forcément efficace. Le texte indique plus justement ce que les physiciens peuvent gagner à ce que les mathématiques soient enseignées par les mathématiciens. On pourrait aussi vanter le recours à des équipes mixtes. Le travail pluridisciplinaire tant vanté devrait être mis en œuvre dans les équipes pédagogiques où il est plus facile qu'en recherche car le niveau des connaissances nécessaires est moins élevé. Le recours à des équipes pluri-disciplinaires dans les enseignements de mathématiques des écoles d'ingénieurs est pratiqué avec succès et ne pose pas de problème particulier tant que des rapports de pouvoir et encore plus de poste à pourvoir n'en est pas un enjeu. Les enseignants et les ingénieurs que j'ai fait participer à ces équipes à Sup'Aéro depuis plus de vingt ans en sont ravis ainsi que les étudiants et c'est aussi le cas dans les autres écoles d'ingénieurs que je connais. Le mathématicien aura souvent du mal à inventer la petite histoire ou le cas pratique qui illustrera la formule au programme. S'il la connait déjà, c'est que le travail pluridisciplinaire lui est familier et dans ce cas, il pratique sans doute déjà l'hybridation des équipes pédagogiques dans la limite des possibilités intitutionnelles. La contrepartie est bien sur le contrôle par le mathématicien de l'enseignement mathématique. Il importe en effet comme le souligne le texte que celui-ci n'apparaisse pas comme un enseignement ancilliaire noyé dans celui des disciplines d'application. Mais l'autonomie des mathématiques n'est pas nécessairement synonyme de l'isolement des disciplines.

Projet et calcul numérique

Enfin, le texte ne mentionne pas l'intérêt du calcul numérique sur machine et des projets pluri-disciplinaires. Je ne voudrais pas ressasser un discours convenu au moment où ces projets sont présentés par un certain discours offciel comme une panacée et introduits partout du lycée à l'agrégation. Cependant, l'importance du projet et du calcul numérique pour l'enseignement des mathématiques dans les formations de physiciens et d'ingénieurs n'est pas douteuse. D'abord, le calcul numérique permet à l'étudiant de pratiquer l'expérimentation, la variation paramétrique et le sens des approximations au niveau du premier cycle. L'étudiant peut être amené à comparer plusieurs méthodes, bref à rencontrer l'usage de l'esprit critique que tout mathématicien se plaît à reconnaître dans sa discipline et que généralement ne réalisent pas les étudiants faibles ou moyens de premier cycle. Ensuite, dans les utilisations industrielles, l'usage des mathématiques est de nos jours indissolublement lié à celui du calcul numérique, c'est un point fort des mathématiques et il serait dommage de s'en priver. Enfin le tryptique « modélisation — étude mathématique — résolution numérique » peut se décliner en partenariat avec la plupart des physiciens dans l'intérêt des étudiants qui peuvent dans ces conditions fournir un travail beaucoup plus intense et prolongé qu'à l'ordinaire. La SMF et la SMAI pourraient d'ailleurs jouer un rôle d'incitateur en lançant par exemple une revue électronique de projet mathématique à différents niveaux pour diffuser et mettre en valeur le meilleur du formidable travail des pédagogues et des étudiants de classe préparatoire et d'université qui conçoivent et mettent au point ces projets d'application.

Conclusion

Le travail de la commission intervient au moment où de nombreuses expériences dans les classes préparatoires, les écoles d'ingénieurs et les universités mettent en pratique la pédagogie pluri-disciplinaire sous contrôle des mathématiciens dans l'enseignement des mathématiques. Même si ces expériences sont encore dispersées et non systématisées, la nécessaire critique de la routine existant encore dans trop de formations doit s'accompagner de l'inventaire, du bilan critique et de la diffusion de ces novations.

Présentation de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques et du groupe technique disciplinaire

Rémi LANGEVIN[1] (*Université de Bourgogne*)

La première réunion du Groupe Technique Disciplinaire (G.T.D.) présidé par C. Robert a eu lieu le 19 fevrier 1999. La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, créée par Monsieur le ministre de l'Education nationale, de la recherche et de la technologie, à la demande des principales associations mathématiques, s'est mise en place le 17 avril 1999 et a commencé ses travaux le 5 juin. Elle est présidée par J.P. Kahane.

Les travaux de la commission et du groupe technique ont la même fin : l'enseignement des mathématiques dans notre pays. Leurs démarches sont complémentaires.

Le G.T.D. doit dès aujourd'hui reprendre le processus de rédaction des programmes du secondaire. Il a commencé par celui de la classe de seconde. Le programme de seconde est écrit dans le cadre d'une seconde indifférenciée, avec un horaire modeste. Il est composé de trois grands chapitres : statistiques, calcul et fonctions, géométrie. Pour chaque chapitre, les capacités attendues, en nombre volontairement limité, constituent une base commune sur laquelle se fonderont les programmes des années ultérieures. De plus, un ensemble de thèmes d'études est proposé, dans lequel l'enseignant devra puiser au gré du questionnement et des motivations des élèves.

Il vient aussi terminer une première version de celui de première L. Ce programme est centré sur les mathématiques utilisées de façon visible dans notre société actuelle : les tableaux de nombres, les pourcentages, certains paramètres statistiques, les représentations graphiques sont ainsi des mathématiques visibles. Il a pour objectif de rendre les élèves actifs et le plus autonomes possible vis-à-vis de l'information reçue.

La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques a pour mission de dégager les évolutions à long terme des objectifs et des contenus de l'enseignement des mathématiques, de l'école élémentaire à l'université, et de faire évoluer en conséquence la formation initiale et la formation continue des enseignants de mathématiques ainsi que les concours de recrutement. Elle se propose de travailler sur quelques thèmes fondamentaux comme la place de l'informatique et le renouveau de la géométrie ; elle souhaite communiquer

[1] R. Langevin est membre du groupe technique disciplinaire présidée par C. Robert et de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques présidé par J.-P. Kahane.

largement avec l'ensemble de la communauté scientifique et avec le corps enseignant et elle rendra publics des rapports d'étape sur les différentes questions à l'étude.

Cette dualité a au moins deux significations : d'une part la nécessité d'une réflexion ample, qui associe des enseignants, des chercheurs, des spécialistes d'autres disciplines concernés par l'enseignement et la divulgation des mathématiques, d'autre part le besoin d'un processus continu d'évolution des programmes que nécessite l'évolution des techniques et de la société.

Bien sûr cela ne signifie pas que la commission devra se contenter d'énoncer quelques principes généraux. Par exemple elle a déjà lancé un appel à la rédaction d'articles, de livres, de documents audiovisuels ou multimédia accessibles aux professeurs de mathématiques des lycées et collèges.

Cela ne signifie pas non plus que le G.T.D. devra seulement rédiger au jour le jour des programmes. Il mène sa propre réflexion sur l'ensemble des contenus abordés pendant les trois années de lycée. Le G.T.D. accompagnera les programmes de documents plus détaillés et de références bibliographiques et disposera à cette fin d'un serveur, `http://www.cndp.fr/GTD/Maths` qui devrait être accessible à partir de novembre 1999.

En s'inscrivant dans la durée, nous espérons que le travail de la commission de réflexion et du G.T.D. sera utile à tous ceux qui enseignent des mathématiques, aujourd'hui souvent dans des conditions difficiles.

Composition du groupe technique disciplinaire :
Présidente : Claudine Robert, professeur, université Joseph Fourier, Grenoble.
Membres : Philippe Clarou, professeur, enseignement secondaire et IUFM de Grenoble.
Rémi Langevin, professeur, université de Bourgogne.
André Laur, professeur de l'enseignement secondaire ; président sortant de la régionale de l'APMEP.
Claudine Ruget, inspectrice générale, présidente du jury de l'agrégation de mathématiques.
Ce premier groupe sera prochainement élargi.

Composition de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques
Président : Jean-Pierre Kahane, professeur émérite à l'université de Paris-Sud, membre de l'Académie des sciences.
Membres : Michèle Artigue, professeur à l'université Denis Diderot et à l'IREM de Paris-Jussieu.
Roger Balian, physicien au CEA, membre de l'Académie des sciences.
Frédéric Bonnans, maître de conférences à l'École polytechnique, directeur de recherche à l'INRIA.
Guy Brousseau, professeur honoraire à l'université de Bordeaux I.
Michel Broué, professeur à l'université Denis Diderot et à l'Institut universitaire de France, membre du conseil national des programmes.
Claude Deschamps, professeur en classes préparatoires au lycée Louis-le-Grand à Paris.
Jean Claude Duperret, professeur en collège, à l'IUFM et à l'IREM de Reims.
François Dusson, professeur en classes préparatoires à Rouen.
Olivier Faugeras, directeur de recherches à l'INRIA de Sophia-Antipolis, membre de l'Académie des sciences.
Sylviane Gasquet, professeur honoraire de l'enseignement secondaire, membre du conseil national des programmes.
Rémi Langevin, professeur à l'université de Bourgogne.

Michel Merle, professeur à l'université de Nice.
Daniel Perrin, professeur à l'IUFM de Versailles et à l'université de Paris-Sud.
Antoine Petit, professeur à l'École normale supérieure de Cachan.
Jean-Pierre Richeton, professeur en lycée et à l'IUFM de Strasbourg.
Claudine Robert, professeur à l'université Joseph Fourier et à l'IUFM de Grenoble.
Claudine Ruget, inspectrice général de mathématiques, présidente du jury de l'agrégation de mathématiques.

⋆ ⋆ ⋆

À propos de l'introduction de l'enseignement de la statistique dans les lycées

Claudine ROBERT
(*Présidente du groupe technique disciplinaire en mathématiques*)

Un groupe chargé d'écrire les nouveaux programmes de mathématiques des lycées d'enseignement général, avec commande institutionnelle d'introduire l'enseignement de la statistique, a été mis en place en janvier 1999.

Les quelques lignes ci-dessous sont destinées à donner des informations sur le vif débat que soulève l'introduction de la statistique dans l'enseignement secondaire ; schématiquement, ce débat oppose les spécialistes de l'enseignement des probabilités et statistiques tel qu'il se pratique actuellement dans les lycées et les praticiens ou les enseignants-chercheurs en statistique.

Il y avait, jusqu'à présent, dans l'enseignement secondaire français, quelques chapitres de mathématiques dont le titre était statistique. L'esprit de ces chapitres est bien celui des statistiques et non de la statistique et témoigne de l'époque où stocker un grand nombre de données était réservé aux instituts spécialisés. Dans le cadre de ce programme et avec le relais des manuels scolaires s'est ainsi développée une pratique de la statistique propre à l'enseignement secondaire et qui s'est peu à peu dissociée de celle que pratiquent les statisticiens (qu'ils soient enseignants chercheurs ou analystes).

Sans entrer dans les détails, jusqu'à la terminale, il n'était jamais fait mention de la notion de fluctuation d'échantillonnage (ou même simplement de variabilité de la moyenne empirique pour des séries de données aléatoires). La pratique induite par ce programme et les manuels correspondants constituent à mon avis un réel barrage à la compréhension de la statistique, ne serait ce que par les maladresses considérables qui fleurissent à tous les niveaux et que les enseignants ressentent fortement.

L'optique du groupe qui compose les programmes n'est pas du tout de donner une place centrale à l'enseignement de la statistique dans toutes les sections mais par contre de poser les bases d'une statistique plus moderne. Le programme que nous proposons est sans doute déroutant pour un corps professoral compétent mais qui dans son ensemble n'a jamais fait de statistique, ou alors en annexe d'un cours de probabilité. Certains auraient souhaité attendre encore quelques années afin notamment que les enseignants se forment en statistique ; mais comment les professeurs peuvent-ils se former et avoir une pratique enseignante qui, si elle est conforme aux programmes actuels, sera en contradiction totale avec ce qu'ils apprendront ? Nous pensons qu'avoir à enseigner des rudiments de la statistique les aidera au contraire à acquérir peu à peu des connaissances plus profondes dans ce domaine.

On trouvera en annexe les grandes lignes du programme sur lequel nous travaillons actuellement. Ce programme s'apparente à ce qui se fait et va se faire en Angleterre qui a une longue tradition dans ce domaine. Mais malgré des traditions différentes, pourquoi, en ce qui concerne l'enseignement des statistiques au lycée, ne pourrait-on pas faire au moins aussi bien que nos voisins d'outre Manche ?

Annexe

Voici quelles sont les grandes lignes que nous envisageons pour les nouveaux programmes du lycée en statistique. Ces nouveaux programmes entreront en vigueur en septembre 2000, 2001, 2002 respectivement pour les classes de seconde, première et terminale. Rappelons qu'au collège les élèves travaillent abondamment depuis plusieurs années sur la moyenne arithmétique d'une série et le langage graphique (histogrammes, diagrammes en bâtons, camemberts) et apprennent en technologie et en mathématiques à manipuler un tableur.

En seconde. Introduction de la fluctuation d'échantillonnage selon le schéma suivant :

— Réalisation effective par les élèves d'expériences de lancers de pièces ou de dés, de tirage de boules dans des urnes ; observation de la variabilité des séries de résultats : on introduit la notion de distribution empirique de fréquences et ce sont les variations de cette dernière que l'on observe ; la moyenne, l'étendue et les paramètres qui s'en déduisent sont ainsi eux aussi fluctuants.

— Utilisation de simulation de la loi uniforme sur l'ensemble des chiffres (touche random des calculatrices pour les élèves, logiciels type excel pour les enseignants) ; il s'agit en premier lieu d'appréhender ce que signifie simuler une expérience aléatoire (sans disposer du concept de probabilité) ; ensuite, grâce à la simulation, on pourra observer à grande échelle et ainsi expérimenter que l'ampleur de la fluctuation de la distribution empirique des fréquences diminue quand le nombre de simulations augmente. La quantification de cette diminution pourra être approfondie dans l'un des thèmes facultatifs de ce nouveau programme et qui concerne la notion de fourchette de sondage.

Les programmes de première et terminale ne sont pas complètement déterminés et dépendront du résultat des expérimentations qui vont se faire chaque année dans les classes (le programme de seconde sera expérimenté dès cette année dans une cinquantaine de classes). Néanmoins, les idées directrices pour la statistique sont actuellement les suivantes (elles seront déclinées différemment suivant les sections).

Recueil de données ; résumé de ces données soit à l'aide du couple moyenne, écart-type, soit par un diagramme en boîte à pattes.

On pourra travailler sur des données classiques (courbes des tailles des carnets de santé des enfants par exemple) ou sur des données que les élèves recueillent eux-mêmes (pouls, durée des coups de téléphone ou du temps d'attente à une caisse d'une grande surface, poids des cartables, appréciation de longueurs, etc.) en insistant toujours sur la question qui motive le choix de l'étude et le lien avec les données recueillies, le mode de recueil de ces données et les problèmes que cela pose, le traitement statistique que l'on pourra en faire pour apporter des éléments de réponse ; en conclusion de telles études, on posera clairement la question du sens de certaines différences (i.e on indiquera que la statistique donne des moyens de comparer des différences à celles qui sont usuelles dans le cadre de la fluctuation d'échantillonnage) et comment pourrait se généraliser l'étude faite.

Une attention particulière sera portée à la variance qui sera utilisée pour des données gaussiennes notamment dans les domaines de la biologie et la médecine, en production industrielle et pour les erreurs de mesure. En physique, les élèves ont vu qu'il valait mieux utiliser la moyenne de plusieurs mesures plutôt qu'une seule : à travers l'observation de données réelles ou simulées on illustrera le fait que l'écart type de la moyenne est en $1/\sqrt{n}$.

En section scientifique, on peut dès la classe de première, justifier la définition de la variance — plutôt que la définition d'une mesure de dispersion que les élèves choisissent naturellement, à savoir la moyenne des valeurs absolue des écarts ; une « justification » classique de la variance est actuellement la facilité de calcul puisque les calculatrices de poche la proposent directement !

Tableau de contingence. Interprétation des marges, construction du tableau des pourcentages associés, par ligne et par colonne. Test du khi-deux pour des tableaux (2,2) (il s'agit ici de faire comprendre l'esprit du test en se référant aux résultats de simulations de tirages de boules dans des urnes).

— Les programmes actuels de l'enseignement secondaire ont dans le chapitre statistiques un paragraphe faisant une étrange référence à la régression linéaire. Cela donne trop souvent lieu à des études surprenantes où la note en mathématiques au bac devient directement une fonction de la note en physique, où on parle d'un poids idéal fonction affine de la taille (ce qui ne peut guère aider les élèves à comprendre la notion de fonction ou de modèle). On apprend de plus qu'il est légitime de faire un ajustement linéaire dès que le coefficient de corrélation linéaire empirique est supérieur à 0.8 ou 0.9 suivant les ouvrages, et ceci indépendamment du nombre de données observées. La droite des moindres carrés sera maintenue dans les programmes (mais pas dans le cadre du chapitre statistique) et utilisée pour faire de l'interpolation et l'extrapolation linéaire sur un intervalle bien défini, notamment pour des données chronologiques.

— Le lien avec les probabilités sera traité dès la classe de première, en étant vigilant à ne pas mélanger comme cela se fait actuellement ce qui relève de la théorie et ce qui relève de l'expérience.

⋆ ⋆ ⋆

Rapport sur l'ICM 18–27 Août 1998 à Berlin

Detlev HOFFMANN

Pour la la première fois depuis 1904 (à l'époque à Heidelberg), le « International Congress of Mathematicians » (ICM) a eu lieu en Allemagne, cette fois-ci à Berlin, de nouveau capitale de l'Allemagne après la réunification. Avec plus de 3500 participants, ce congrès est le point de rencontre le plus important pour la communauté internationale des mathématiciens et il donne d'amples occasions d'établir ou de renouveler des contacts avec d'autres mathématiciens, d'entendre parler des résultats les plus récents dans tous les domaines de recherche et de se faire une idée de leurs développements futurs.

Le congrès a commencé par l'inauguration mardi matin 18 août, au centre international de congrès (International Congress Center, ICC), suivi du premier exposé du programme scientifique le même jour l'après-midi. A partir du mercredi 19 août, les conférences avaient lieu dans les amphis et salles de l'université technique (Technische Universität, TU) de Berlin. Le programme scientifique consistait en 21 conférences plénières d'une heure, plus de 160 conférences invitées de 45 minutes et de nombreux exposés de 15 minutes, ainsi que de posters.

Les conférences plénières avaient pour but de donner à un public de mathématiciens de spécialités diverses une impression générale d'un sujet de recherche, son histoire, son développement et ses tendances futures. Chacune était donnée par un mathématicien ayant joué un rôle crucial dans l'évolution du sujet.

Les conférences invitées étaient réparties en 19 sections représentant les divers domaines de recherche, comme par exemple la logique, l'algèbre, la topologie, l'analyse, la probabilité et la statistique, les aspects mathématiques de l'informatique, mais aussi l'enseignement et la popularisation des mathématiques ou l'histoire des mathématiques. Les conférenciers invités étaient des spécialistes qui présentaient des résultats récents parmi les plus importants de chaque sujet.

Les exposés courts et les posters ont permis aux mathématiciens venant de tout le globe, en particulier aux jeunes chercheurs, de présenter leurs travaux, parfois pour la première fois, à un public international.

L'inauguration

L'inauguration du congrès a eu lieu à l'ICC (International Congress Center) devant un public de plus de 4000 personnes, pour la plupart des mathématiciens participants, mais aussi des membres de leurs familles. Pour la première fois dans l'histoire de ce congrès, on pouvait suivre l'inauguration en direct sur Internet, une preuve que les mathématiques ont trouvé leur entrée dans l'âge de l'informatique, une tendance qui se retrouvait dans les sujets de plusieurs conférences, exposés et discussions pendant ce congrès. Accompagnée par des interludes d'un ensemble de musique de chambre, la cérémonie a commencé par des salutations de David Mumford, président de l'IMU (International Mathematical Union), Martin Grötschel, président du comité d'organisation de l'ICM, qui a présenté une vidéo sur Berlin et qui a remercié les sponsors pour leur soutien financier important, Karl-Heinz Hoffmann, président de la DMV (Deutsche Mathematiker Vereinigung : société allemande des mathématiciens), qui a donné quelques informations sur l'histoire de la DMV et de Friedrich Hirzebruch, président d'honneur du comité d'organisation, qui a exprimé quelques réflexions pensives et graves sur l'histoire des mathématiques et le destin des mathématiciens en Allemagne pendant le régime des Nazis.

Ensuite, ce sont les politiciens qui ont pris la parole. D'abord, Wilhelm Staudacher, secrétaire d'État et directeur d'office présidentiel, a souhaité la bienvenue au nom du président de l'Allemagne Roman Herzog. Jürgen Rüttgers, ministre de l'Éducation, des sciences, de la recherche et de la technologie a utilisé cette occasion pour faire un peu de campagne électorale pour les élections fédérales fin septembre, ce qui me semblait déplacé devant un public international de mathématiciens. Le bourgmestre régnant de Berlin, Eberhard Diepgen, a essayé de faire de la publicité pour Berlin. Le président de la Technische Universität Berlin, Hans-Jürgen Ewers, pour sa part, a critiqué les politiciens pour leur politique universitaire, des plaintes qui ne sont vraisemblablement pas trop différentes de celles des mathématiciens des autres pays. Finalement, le secrétaire d'État du ministère des Finances, Hansgeorg Hauser, a présenté le timbre postal commémoratif mis en circulation à l'occasion de l'ICM.

Le point culminant de la cérémonie a sans aucun doute été la présentation des lauréats de la Médaille Fields et du Prix Nevanlinna. Les médaillés de Fields étaient Richard E. Borcherds (Cambridge University ; algèbres de Kac-Moody, formes automorphes), W. Timothy Gowers (Cambridge University ; théorie d'espaces de Banach, théorie combinatoire), Maxim Kontsevich (IHES Bures-sur-Yvette ; physique mathématique, géométrie algébrique, topologie) et Curtis T. McMullen (Harvard University ; dynamique complexe, géométrie hyperbolique). Le Prix Nevanlinna a été conféré à Peter W. Shor (AT&T Labs Florham Park, New Jersey ; informatique quantique). Cependant, les applaudissements les plus enthousiastes ont été réservés à Andrew J. Wiles (Princeton University), qui était honoré d'une médaille spéciale pour sa démonstration du grand théorème de Fermat : Wiles était déjà trop âgé pour recevoir une médaille de Fields (l'âge limite est de 40 ans par une convention toujours respectée).

Après un buffet impressionnant, des éloges ont été prononcées dans lesquels les travaux des lauréats étaient décrits. Ces exposés étaient parfois un peu décevant : on avait l'impression que les conférenciers des éloges n'avaient pas eu assez de temps pour se préparer.

L'inauguration s'est terminée avec la première conférence plénière du programme scientifique.

Les conférences plénières

La première conférence plénière était donné par Jürgen Moser (ETH, Zürich) ; il a présenté sa vue personnelle du développement historique de la théorie des systèmes dynamiques. A noter que c'était la seule conférence plénière qui ait duré beaucoup plus longtemps que prévu.

C'est Persi Diaconis (Mathematics and ORIE, Cornell University) qui a présenté la dernière conférence plénière du congrès, juste avant la cérémonie de clôture. Son exposé était certainement parmi les plus divertissants. Il a traité du concept du « coupling » en probabilité et de ses applications, par exemple combien de fois il faut battre un jeu de cartes pour que la distribution des cartes soit au hasard.

La qualité des autres conférences plénières était assez variée. Il y en avait quelques-unes qui étaient nettement trop techniques pour des non-spécialistes (dans ce cas, les conférenciers veulent-ils impressionner leurs collègues, ou sont-ils simplement incapable de s'imaginer que la matière présentée n'est probablement pas si facile à comprendre pour un non-spécialiste ?). D'autres souffraient d'une présentation qui laissait beaucoup à désirer, par exemple des transparents inintelligibles ou illisibles. D'ailleurs, ces problèmes, l'incompréhensibilité, l'inintelligibilité et l'illisibilité, s'appliquaient aussi parfois (à mon avis trop souvent) aux conférences invitées. Faut-il réviser les critères pour les invitations des conférenciers ?

Un bon exemple de comment on peut présenter un sujet extrèmement difficile et abstrait à un public de non-spécialistes était donné par Vladimir Voevodsky (Northwestern University, Evanston, USA). Dans son exposé *Homotopy Theory of Algebraic Varieties*, il a présenté avec une clarté exceptionnelle les motivations et les idées cruciales qui se trouvent dans ses travaux vers une démonstration de la conjecture de Milnor. Son exposé a bien mérité les applaudissements vraisemblablement les plus longs de toutes les conférences plénières.

Parmi les autres conférences plénières qui étaient de très bonne qualité, il faut mentionner celle de Peter W. Shor qui venait de gagner le Prix Nevanlinna. Il a expliqué avec beaucoup de verve les principes du calcul quantique (qui pourrait un jour aboutir à des ordinateurs d'une puissance colossale lorsque l'on arrivera à résoudre les problèmes techniques qui ne sont pas négligeables du tout).

D'autres conférences plénières que l'on peut ajouter à la liste des exposés bien présentés et plutôt intelligible pour des non-spécialistes étaient celle de Christopher Deninger (Universität Münster, Allemagne), *Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces*, celle de Ehud Hrushovski (Hebrew University of Jerusalem, Israël), *Geometric model theory*, ainsi que celle de Dusa McDuff (SUNY Stony Brook, USA), *Fibrations in Symplectic Topology* et celle de Cumrun Vafa (Harvard University, Cambridge, USA), *Geometric Physics*. Evidemment cette liste reflète mes préférences et impressions personnelles et elle n'est certainement pas complète.

De plus, il y avait une conférence d'une heure hors du cadre des conférences plénières, donnée par Andrew Wiles qui a raconté le développement de la théorie des nombres pendant les vingt dernières années de son point de vue. Ce fut indubitablement un des points culminants du congrès. Son merveilleux exposé a été récompensé par les ovations du public.

Les conférences invitées

Etant un algébriste moi-même, c'est la section d'algèbre qui a priori aurait dû être la plus intéressante pour moi. Cependant, la composition de la liste des conférenciers était assez décevante. Bien sûr il s'agissait sans exception des mathématiciens de très grand calibre, mais il y avait huit exposés dans cette section, dont cinq concernaient d'une manière ou l'autre les groupes finis. Un autre exposé aurait été mieux placé dans la section d'algèbre géométrique. A mon avis, les sujets divers de l'algèbre n'étaient pas représentés d'une façon équilibrée, quelques domaines n'étaient représentés que marginalement ou, pire, pas du tout (par exemple, la théorie des anneaux et des modules, les algèbres à division, etc.). Finalement, je suis allé seulement à deux conférences dans la section d'algèbre, dont un exposé intéressant de Eric Friedlander (Northwestern University, Evanston, USA), *Geometry of Infinitesimal Group Schemes*.

Parfois, il n'était pas facile de choisir une parmi les nombreuses conférences invitées qui avaient lieu en même temps (c'est une autre raison pourquoi je suis allé seulement à deux exposés d'algèbre). On avait, par exemple, les médaillés de Fields qui donnaient leurs exposés dans le cadre des conférences invitées. D'autre part, on pouvait profiter de la diversité et du grand nombre des exposés pour élargir son horizon et pour apprendre un peu sur des sujets assez loin de celui de sa propre recherche. En fait, on peut dire que c'est exactement ce qu'il faut pour tirer le plus de bénéfices d'un tel congrès.

De cette manière, on pouvait prendre connaisance des problèmes très intéressants de la géométrie combinatoire dans l'exposé de Emo Welzl (ETH Zürich, Suisse), *Halving Point Sets* et de la statistique dans l'exposé de David J. Aldous (University of California, Berkeley, USA), *Stochastic Coalescence*. On a appris que Michael Freedman, médaillé Fields en 1986 pour ses travaux sur les variétés à 4 dimensions, travaille maintenant pour le nouveau « think tank » de Microsoft à Redmond, USA, où il s'occupe d'un des grands problèmes de l'informatique théorique, à savoir si $P = NP$ ou non. Krystyna M. Kuperberg (Auburn University, USA) a donné un aperçu réussi sur la conjecture de Seifert et ses variations *Counterexamples to the Seifert Conjecture*. Neil J. A. Sloane (AT&T Research Labs, Florham Park, USA) a présenté dans son style inimitable — un peu agité mais toujours très amusant — les résultats les plus récents sur le problème de remplissage de l'espace par des sphères. Il a surpris le public par son annonce que T. C. Hales venait de résoudre la conjecture de Kepler, à savoir trouver la façon la plus dense dans laquelle on peut remplir l'espace à trois dimensions par des sphères disjointes de même rayon. On pouvait aussi suivre des exposés d'un genre différent sur l'histoire de mathématique. Par exemple, Karine Chemla (CNRS, université Paris VII) a parlé d'une des œuvres classiques des mathématiques chinoises, appelée « Les Neuf Chapitres », datant de presque deux mille ans et Joseph Dauben (The City University of New York, USA) a fait le récit de l'influence des œuvres mathématiques (!) de Karl Marx sur le développement des mathématiques en Chine pendant la révolution culturelle.

La liste ci-dessus ne peut donner qu'une faible impression des sujets présentés par les conférences invitées que l'on peut trouver dans les volumes II et III des actes de ce congrès (qui étaient disponibles dès le premier jour du congrès, un exploit étonnant des organisateurs).

D'autres événements

Le programme des conférences était accompagné par beaucoup d'autres activités et événements. Pendant trois après-midis, le public pouvait assister aux présentations des logiciels mathématiques. Une séance suivie d'une discussion s'intérresait aux média électroniques (Internet, publications électroniques, etc.) et à leur rôle dans les mathématiques à l'avenir, une autre s'occupait de la situation des femmes dans la communauté mathématique toujours largement dominée par les hommes. Dans celle-ci plusieurs mathématiciennes venant des pays différents (la Suisse, l'Allemagne, l'Inde, les États-Unis, le Méxique, la Russie, la Chine) ont parlé de leurs expériences dans la communauté mathématique.

Une exposition avait pour sujet la situation et le destin des mathématiciens (en particulier des mathématiciens juifs) en Allemagne pendant l'ère du national-socialisme. Regarder les photographies de cette exposition et lire les textes fut une expérience remuante et attristante.

Il ne faut pas oublier l'étalage des livres dans les stands des maisons d'édition ce qui donnait l'occasion de se renseigner sur les publications les plus récentes et de les acheter à prix réduit.

A Berlin il y a une organisation qui s'appelle « Urania » et qui date de la fin du siècle dernier. Son but est la popularisation des sciences. A l'occasion de l'ICM, cette organisation en commun avec les organisateurs du congrès, a composé un programme d'expositions, de conférences et de films pour le grand public (en particulier pour des non-mathématiciens). Dans un exposé très divertissant Jacobus van Lint (Eindhoven, Pays-Bas) a expliqué quel rôle avait été joué par les mathématiques dans le développement des CDs. Gero von Randow, un journaliste responsable de la section science et recherche dans *Die Zeit*, un hebdomadaire parmi les plus réputés en Allemagne, a parlé des difficultés d'écrire sur des sujets mathématiques pour le grand public et des problèmes à l'égard de la popularisation des mathématiques dans un journal de ce type. Walter Schachermayer (Universität Wien, Vienne, Autriche) a présenté un aperçu du développement des mathématiques financières, commencant par la thèse de Bachelier en 1900 jusqu'à la formule de Black-Scholes en 1973 et des tendances plus récentes. On a aussi projeté des films, parmi eux une vidéo consistant en des courts métrages qui avaient pour sujet la visualisation de certains aspects et idées mathématiques.

En plus de ce programme scientifique et mathématique, les organisateurs du congrès ont proposé aussi un programme touristique avec ses excursions et ses tours de ville (parfois organisés par des mathématiciens berlinois eux-mêmes), ses visites de Dresde et des musées berlinois, ses spectacles.

L'avant-dernier jour du congrès il y avait une fête, la « ICM Party ». C'était probablement la seule fois où l'organisation laissait un peu à désirer : les points de boissons et de nourritures manquaient pour disperser la foule de plus de deux ou trois mille personnes.

Le congrès s'est terminé avec la cérémonie de clôture par des remerciements aux organisateurs et aux participants et une présentation de la ville organisatrice du prochain ICM : Pékin en 2002.

On peut résumer en disant que ce congrès a été un grand succès, non seulement scientifique mais aussi en ce qui concerne l'organisation et les rapports d'homme à homme (ou mieux, de mathématiciens à mathématiciens). Il faut mentionner l'effort des organisateurs pour populariser les mathématiques et les présenter au grand public, par exemple les activités de l'Urania mentionnées ci-dessus, mais aussi des conférences de presse et la diffusion d'une documentation plutôt réussie sur ce congrès par une chaîne de télévision. Les ICMs sont des événements incontournables et chaque mathématicien devrait y aller au moins une fois dans sa vie.

⋆ ⋆ ⋆

Rapport moral de la SMF période de juin 98 à juin 99

Affaires Générales
Mireille Martin-Deschamps, Présidente

Depuis mon élection à la présidence de la SMF, je me suis efforcée de poursuivre l'action de mes prédécesseurs, d'une part pour lui faire jouer son rôle de défense et de promotion des mathématiques et de la communauté des mathématiciens, d'autre part pour développer ses activités scientifiques. Je remercie tous mes collègues qui ont travaillé avec moi dans ce sens, les membres du conseil d'administration – et en particulier du bureau –, les membres des comités de rédaction des revues et tous ceux qui ont donné un peu ou beaucoup de leur temps pour des actions plus ponctuelles.

CIRM

Le CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) est un centre de recherche et de formation créé par la SMF en 1981. Actuellement, son statut est celui d'une UMS (Unité Mixte de Service), dont les tutelles sont le MENRT, le CNRS et la SMF, qui en a la gestion. En particulier une partie importante des postes du CIRM lui sont affectés par le CNRS et nous nous félicitons de ce soutien.

Le CIRM a bientôt 20 ans. Il a été construit en deux étapes, en 1980-81 puis en 1989-90 (construction de la bibliothèque). Nous envisageons maintenant une troisième tranche de travaux de remise à niveau des bâtiments, qui regrouperait tous les aménagements et rénovations souhaitables. Ce projet, que nous avons baptisé CIRM 2000, préparé avec l'aide de l'architecte du CNRS, R. Simon, a été soumis au rectorat dans le cadre de l'opération U3M et nous espérons qu'il aura une suite favorable.

Le taux de remplissage du CIRM est actuellement de 45 semaines par an. Robert Moussu, président du conseil scientifique, est très satisfait du bilan des rencontres 98, tant par leur nombre que par leur qualité. Il faut cependant noter que cette augmentation significative de l'activité du CIRM se fait à budget quasiment constant, ce qui n'est pas sans poser de problèmes. C'est pourquoi nous avons fait cette année une demande de subvention dans le cadre du programme européen « Accroître le Potentiel Humain ».

La capacité hôtelière du CIRM va être augmentée, grâce à la mise à sa disposition d'une partie du centre (voisin) de formation du CNRS, dans lequel en particulier est prévu l'aménagement de 4 studios. Les travaux devraient être terminés à la fin du mois de juin 99.

Début septembre, lorsque nous avons souhaité faire un appel de candidature pour le remplacement de Jean-Pierre Labesse au poste de directeur du CIRM (son mandat arrive à expiration au 31 août 99), Jean-Michel Lemaire, directeur scientifique adjoint au CNRS, nous a proposé de modifier la structure de direction du CIRM, en lui affectant en particulier un poste administratif de haut niveau, ce qui permettrait d'alléger les charges purement administratives du directeur. Nous sommes de notre côté très attachés au fait que le directeur du CIRM reste un scientifique. Dans l'attente d'un accord, que j'espère prochain, sur la définition des responsabilités respectives du directeur et du responsable administratif, nous avons demandé à Jean-Pierre Labesse de rester pour une année supplémentaire et je le remercie d'avoir accepté.

Activités scientifiques

Parallèlement à la traditionnelle Journée annuelle, Jean-Jacques Risler avait lancé des « Journées SMF » en province, qui sont devenues des « Journées thématiques ». La première, organisée par Marie-Françoise Roy, a eu lieu a Saint-Malo en juin 98, sur le thème *mathématiques et robotique*, la seconde, organisée par Philippe Tchamitchian, sur le thème *mathématiques et génétique*, a marqué au CIRM, avec un peu de retard, le 125ème anniversaire de la SMF. Nous espérons trouver suffisamment de bonnes volontés pour pouvoir continuer régulièrement cette activité, qui contribue à la visibilité de la SMF.

Par ailleurs, deux sessions « États de la recherche », dont le responsable est actuellement Jean-Benoît Bost, sont prévues en 1999 : en juin à Strasbourg *rigidité, groupe fondamental et dynamique* et en septembre à Clermont Ferrand *nouveaux invariants en géométrie et en topologie*. Je remercie nos collègues, qui s'investissent dans l'organisation de ces sessions, ainsi que le Ministère et le CNRS, qui fournissent un soutien financier, cependant le financement n'est pas toujours à la hauteur des espérances des organisateurs.

Débats

Nous avons organisé cette année deux réunions débats. La première en octobre, avec le réseau national des bibliothèques, a réuni plus de 70 personnes (mathématiciens et bibliothécaires) sur le thème de la documentation (tarifs des périodiques, consortiums, diffusion des prépublications et visibilité des thèses et habilitations). En particulier des propositions d'actions concrètes ont été envisagées pour réagir à la forte augmentation des tarifs. La deuxième, en avril, a présenté les travaux d'une commission présidée par Bernard Teissier, sur l'avenir des revues mathématiques françaises et leurs nouveaux modes de développement face à l'apparition des serveurs de prépublications électroniques.

Enseignements

En juin 98 est paru un texte officiel réformant de manière significative l'agrégation de mathématiques (suppression de l'épreuve d'option à l'écrit, création d'une épreuve orale supplémentaire de « modélisation »). La SMF, la SMAI et la SPECIF ont écrit au ministre pour protester contre le manque de concertation sur sa mise en place j'ai été reçue avec Alain Damlamian par Didier Dacunha-Castelle, mais nous n'avons obtenu que des paroles rassurantes sur la bonne volonté du jury pour éviter que cette nouvelle épreuve n'ait un poids excessif la première année.

Pour tenter de répondre aux inquiétudes d'un nombre croissant de nos collègues concernant l'enseignement de notre discipline, les attaques auxquelles elle est soumise et la perte de sens de la culture mathématique chez de nombreux étudiants, nous avons engagé un projet ambitieux de réflexion globale sur les contenus et les méthodes de cet enseignement. Ce projet, qui a fait l'objet d'une concertation étroite avec l'APMEP, la SMAI et l'UPS, s'est concrétisé par une lettre au ministre dans laquelle nous lui demandons d'engager une rénovation en profondeur de cet enseignement à tous les niveaux. Actuellement, il semble que nous puissions être raisonnablement optimistes sur l'évolution de ce projet, qui sera, je l'espère, l'un des grands chantiers des années à venir.

Affaires internationales

La SMF était présente au congrès international de Berlin (ICM98), où elle avait un stand en partenariat avec France-Edition, ce qui a permis la vente d'un nombre non négligeable d'ouvrages et surtout la possibilité de faire mieux connaître à un immense public les activités de la Société. Nous en avons profité également pour renforcer nos liens avec des sociétés étrangères, en vue d'échanges de publicité. Enfin, nous avons organisé, avec la SMAI, une réception à la Maison de France en l'honneur de Maxime Kontsevitch, un des 4 lauréats Fields, qui réside en France où il est professeur à l'IHES.

J'ai signé à cette occasion un contrat de co-édition avec l'AMS, qui permettra la publication en anglais d'un certain nombre de titres publiés par la SMF, dans ses collections de livres, ou dans *Astérisque* ou les *Mémoires*. Avec l'accord des auteurs, ces titres seraient publiés par l'AMS 2 ou 3 ans après leur publication par la SMF.

Grâce à l'énergie de Paula Cohen, le projet de colloque AMS/SMF a pris forme. Il aura lieu en juillet 2001 à l'ENS de Lyon, qui va prendre en charge une grande partie de son organisation, par l'intermédiaire de Jean Giraud, d'Etienne Ghys et Denis Serre.

La SME, dont nous sommes membres, tenait son assemblée générale à Berlin et le conseil de la SMF avait donné à ses représentants à cette assemblée un mandat précis : approuver les actions passées de la SME, approuver l'action menée par la SME pour transformer le *Zentralblatt* en une banque de données à gestion européenne et refuser le fait que le JEMS (nouveau journal de la SME) n'accepte de publier que des articles rédigés en anglais. Sur ce dernier point – qui était le plus sensible –, notre protestation a été purement formelle, car la comité de rédaction de JEMS avait du renoncer à cette disposition, sous la pression de son éditeur (Springer). Je souhaite que la collaboration avec la SME, qui est encore limitée, s'intensifie dans les années à venir.

CIMPA

Le CIMPA, qui est un outil remarquable pour le soutien au développement de la recherche et pour l'aide à la formation en mathématiques d'enseignants, de chercheurs et d'ingénieurs dans les pays en voie de développement, et dont la SMF est membre institutionnel, a connu récemment de graves difficultés financières. Le conseil de la SMF de juin 98 a adopté un texte de soutien qui a été envoyé au président de la République et à tous les ministres concernés.

A l'automne, le directeur général de l'UNESCO a fait à la France des propositions qui vont dans le sens d'un développement du CIMPA et notre ministre y a répondu favorablement. Les négociations sont en cours sous la responsabilité de l'ambassadeur de France à l'UNESCO et il serait souhaitable de profiter de certaines échéances (par exemple la conférence mondiale de Budapest sur la science, UNESCO-ICSU) pour faire passer auprès des pouvoirs publics un projet d'avenir ambitieux pour le CIMPA.

Coopération avec la SMAI

Cette coopération a été régulière, comme vous avez pu le lire tout le long de ce rapport. Nos deux sociétés ont agi de concert chaque fois que cela a été possible et j'espère que cette coopération se poursuivra avec le prochain président. En plus de tous les points qui ont été cités, je voudrais mentionner le fait que nous avons eu une réunion de bureaux commune, au cours de laquelle nous avons décidé en particulier de fondre nos deux annuaires pour une publication qui devrait avoir lieu en septembre et de mettre en place des échanges de publicité pour nos revues. Nous avons également publié une mise à jour du livret du candidat, qui paraîtra à l'avenir uniquement sous forme électronique.

Actions diverses

Les nouveaux statuts, adoptés par l'assemblée générale extraordinaire réunie en avril 98, ont été enregistrés par le ministère de l'Intérieur à l'automne 98. Le nouveau règlement intérieur sera proposé par le conseil pour l'assemblée générale.

Depuis la conclusion du contrôle fiscal, le gouvernement a annoncé de nouvelles mesures concernant la fiscalité des associations et nous sommes en train d'accomplir les démarches pour nous conformer aux dispositions de la nouvelle instruction fiscale.

L'état des comptes de la Société est satisfaisant, comme vous pourrez le lire dans le rapport financier et je m'en réjouis. Cela reflète la bonne santé de notre activité de publications, mais aussi le fait que nous avons bénéficié cette année, grâce aux démarches entreprises par mon prédécesseur Jean-Jacques Risler, d'un emploi quasiment gratuit, occupé par un jeune scientifique du contingent, qui a en particulier beaucoup travaillé sur notre fichier, dont il a fait une base de données plus facilement exploitable.

Une subvention du ministère, obtenue dans le cadre du projet « Revues électroniques », nous a permis d'améliorer notablement notre serveur. Nous avons revu complètement sa structure interne, amélioré sa présentation et créé de nouvelles rubriques ayant trait à la vie mathématique française. On y trouve aussi bien sûr des informations de base concernant la société (en particulier un annuaire électronique et un système d'adhésion électronique) et une partie importante est consacrée aux publications. Cette partie comporte en particulier un catalogue électronique et un système de commande via le réseau. Le serveur est donc devenu une publication à part entière de la SMF et nous avons décidé de mettre en place un Comité de rédaction qui sera chargé du suivi éditorial.

En même temps, nous avons mis en place une concertation avec la SMAI et la Cellule MathDoc, afin de coordonner nos efforts et nos serveurs et d'éviter, dans la mesure du possible, les recoupements.

Grâce à l'aide de certains collègues, une version électronique de l'*Officiel des mathématiques* a pu être facilement élaborée à partir de la version papier. On y trouve l'intégralité des informations de l'*Officiel* papier. Cependant, il est urgent que la SMF prenne des décisions concernant l'avenir de l'*Officiel* et définisse mieux sa collaboration avec l'*Agenda des conférences mathématiques* (ACM).

De manière générale, la charge de travail informatique est de plus en plus importante. Le changement de formats de la *Gazette* et la mise au point des formats TEX propres à la SMF ont causé une surcharge de travail et un certain retard pour les publications, retard qui est maintenant en grande partie comblé. Malgré l'aide de certains de nos collègues, les efforts et le dévouement de notre personnel, le manque d'un informaticien (au moins à mi-temps) se fait vraiment sentir. Il nous faudra au moins pour l'année prochaine faire appel à des vacations.

En avril 99, le nombre d'adhérents est proche de 1800, avec une centaine de nouveaux adhérents, il est donc stable par rapport aux années précédentes. Cependant, comme mes prédécesseurs, je souhaiterais une augmentation significative du nombre d'adhérents, qui donnerait encore plus de poids à la SMF lorsqu'elle parle au nom de la communauté mathématique.

Communication
Martin Andler, vice-président

L'action du vice-président chargé de la communication est très liée à l'activité générale de la Société et relève donc pour l'essentiel du rapport moral du président. Comme je termine trois années dans mes fonctions, je voudrais malgré tout profiter du rapport moral pour faire un bref bilan de ce que j'ai pu faire, de ce qui s'est fait et relève de la communication et de ce qui devrait être fait. La communication peut, brièvement, se diviser en deux grands secteurs :

— la communication interne à la SMF et plus largement à la communauté mathématique,

— la communication externe vers le grand public, souvent à travers les media.

Sur le plan de la communication interne, le contexte général de cette fin de siècle est que les gens en général, les mathématiciens en particulier adoptent plus volontiers des attitudes de consommateur que des attitudes citoyennes. Ceci est particulièrement vrai en France, où nous attendons presque tout des pouvoirs publics. La SMF souffre d'une représentativité insuffisante, même si elle est forte. Bien des entreprises qui ont été initiées par la SMF, ou qui lui doivent beaucoup, ne sont guère portées à son crédit : on peut penser au CIRM, aux revues de la SMF, aux nouvelles collections lancées ces dernières années par notre société, aux états de la recherche, aux journées thématiques SMF, etc. On peut aussi évoquer l'action plus politique de la société, ses interventions auprès des pouvoirs publics sur diverses questions comme l'enseignement, la place des mathématiques dans la recherche, ou, de manière plus concrète, la réalisation (avec la SMAI) du livret du candidat, la publication de l'*Officiel*, etc. Il est clair que les outils centraux de notre politique de communication sont la *Gazette* et de plus en plus le serveur de la SMF. La *Gazette*, sous l'efficace direction de Daniel Barsky, joue pleinement son rôle d'information et de débat. Mais son rôle doit évoluer en raison du développement du serveur. Grâce au pragmatisme de Claire Ropartz, la SMF a un serveur depuis bientôt deux ans. Cette année, nous avons mis en place une structure de concertation avec la SMAI et la cellule Math Doc pour que l'ensemble des trois serveurs, fournisse le maximum d'informations – tout en conservant, en ce qui concerne les associations, la liberté de parole qui convient. Pierre Bérard a accepté d'être le rédacteur en chef du serveur pendant cette période de lancement, lui donnant un élan supplémentaire ; mais il faudra très prochainement le doter d'un véritable comité de rédaction. Nous souhaitons mieux informer les collègues dans les universités de l'action de la SMF. La nomination de Bruno Wirtz comme coordinateur des délégués SMF est un premier pas dans cette direction. Pourrait-on envisager que dans chaque département ou laboratoire, un panneau d'information donne les principales nouvelles de la SMF ou concernant les mathématiques en général, les dernières parutions. C'est une piste à laquelle nous réfléchissons.

Sur le plan de la communication externe, les axes sont les suivants :

— les contacts avec les pouvoirs publics, les organismes, etc. qui relèvent de la politique générale de la Société, et dont je ne parlerai pas ici ;

— les contacts politiques à niveau local (députés, conseils généraux etc.) ; pour faire passer un message sur les mathématiques, leur utilité dans l'enseignement et la recherche par exemple, ce niveau est bien souvent plus efficace que le niveau national. La coordination des délégués SMF devrait pouvoir fournir des pistes ;

— l'action en direction des autres disciplines et notamment de leurs sociétés savantes ; à plusieurs reprises ces deux dernières années, nous avons pu travailler efficacement avec la société de physique (SFP), soit sur des questions politiques (place des mathématiques), soit sur des questions de communication (nous avons été invités à participer aux Bars des Sciences, très belle initiative des physiciens en direction du grand public) ;

— l'action en direction des journalistes. Nous avons, par exemple, à l'occasion du congrès de Berlin, publié un communiqué de presse auprès de l'AFP et alimenté les journalistes avec qui nous étions en contact d'informations concernant le congrès, les médailles Fields, la participation française...

Rappelons aussi qu'au début 98, nous avions organisé, avec l'association des journalistes scientifiques, un petit-déjeuner de presse sur les mathématiques. Ce type d'action est à la fois indispensable et difficile. Indispensable, car les sociétés savantes sont les seules à pouvoir prendre ce genre d'initiative (même si, évidemment, lorsque nous le faisons, c'est en liaison avec les différents acteurs de la communauté mathématique). Difficile car les journalistes ne sont pas passionnés de sciences et encore moins de mathématiques. Leur mode obligatoire de fonctionnement leur laisse très peu de temps ; il faut pouvoir réagir instantanément... Ils ont également leurs propres contacts parmi les mathématiciens, ce qui est bien normal. C'est malgré tout, une action qu'il faut poursuivre. En 1998, comme chaque année paire, nous avons attribué un prix d'Alembert. Cette année, le lauréat était Jean-Pierre Delahaye. La grande affaire de communication en direction du grand public va bientôt nous être fournie par l'année des mathématiques – année 2000. Grâce à l'impulsion donnée par la présence en France des animateurs de la Newsletter internationale Worlds Mathematical Year 2000, Mireille Chaleyat-Maurel et Gérard Tronel, de nombreuses initiatives se préparent. Dès cet été, un colloque aura lieu à Sainte Affrique sur Emile Borel avec l'estampille « années mathématique 2000 ». Des colloques savants, des publications, mais aussi et surtout des initiatives dirigées vers le grand public devraient fournir de nombreuses occasion de parler de mathématiques. Espérons que nous saurons saisir cette occasion pour présenter notre discipline de manière attirante, en montrant le rôle éminemment formateur qu'elle peut jouer.

Les Publications
Claude Sabbah, Secrétaire

Activité depuis juin 1998

Rappel de la répartition actuelle des responsabilités du secrétariat aux publications

– Nathalie Christiaën : *Astérisque*, *Bulletin et Mémoires*, *Panoramas & Synthèses*.

– Nathalie Hermellin : *Gazette*, *Officiel*, *Revue d'histoire des mathématiques* (RHM), *Collection SMF* (*Cours Spécialisés, Séminaire & Congrès*).

– Claire Ropartz : diffusion, publicité, abonnements (membres SMF).

– Christian Munusami (Marseille) : routage, abonnements (non membres SMF), suivi des abonnements.

Un organigramme précis des différentes responsabilités est en cours de fabrication.

Serveur de la SMF : l'évolution du serveur est très positive (avec notamment la possibilité de passer des commandes). En ce qui concerne les publications, un effort est fait pour avoir un outil bibliographique utile :

– Chaque nouvelle parution est annoncée (avec son résumé en français et en anglais, ses mots-clés et sa classification mathématique) dès sa disponibilité et la fiche bibliographique est envoyée a *Zentralblatt*.

– Les articles définitivement acceptés vont désormais être annoncés dès leur acceptation (sous réserve que l'auteur fournisse les données bibliographiques nécessaires).

– Les numéros anciens seront mis à jour avant juin.

Néanmoins, les statistiques de connexions montrent que cette partie du serveur est encore peu utilisée.

Diffusion des revues SMF : suite à la rupture de l'accord de diffusion de *Bulletin et Mémoires* et de la *Revue d'histoire des mathématiques* par l'ancienne SPES (Gauthier-Villars)[1], la SMF a choisi d'assurer elle-même la diffusion de l'ensemble de ses revues. Néanmoins, pour favoriser la diffusion par abonnement de la revue *Panoramas & Synthèses*, celle-ci est aussi assurée par EDP-Sciences

[1] Cette rupture, fait de la SPES, a été rendue nécessaire du fait des modifications dans l'orientation de la politique de cette société, par suite notamment du rachat de Gauthier-Villars par Elsevier.

à partir de 1999. La cellule de Marseille a donc pris en charge l'ensemble des abonnements (excepté ceux des membres SMF). Par ailleurs, l'AMS se charge de la diffusion (non exclusive) des revues de la SMF en Amérique du Nord.

Coédition SMF/AMS : un contrat de coédition d'une série SMF/AMS de traductions de certaines monographies publiées en français par la SMF a été signé en août 1998 par Mireille Martin-Deschamps lors du congrès de Berlin. Ce contrat prévoit la traduction (sous réserve de l'accord des auteurs) des volumes de *Panoramas & Synthèses* et *Cours Spécialisés* et d'un choix de volumes d'*Astérisque* et *Mémoires*. Trois numéros de *Panoramas & Synthèses* et deux numéros d'*Astérisque* sont en cours de traduction.

Coédition SMF/EDPSciences : un accord de coédition de la série *Cours Spécialisés* avec EDP-Sciences est en bonne voie. Il devrait permettre l'amélioration de la diffusion de cette série. La SMF garderait la responsabilité scientifique de la série tandis qu'EDP-Science se chargerait de la fabrication et de la diffusion. Cet accord est motivé par plusieurs raisons :

– Le secrétariat des publications de la SMF a de plus en plus de mal à faire face aux multiples tâches d'édition qui lui incombent. L'édition de la série *Cours Spécialisés* nécessite (suivant les auteurs) un travail long et soigné de relecture et de composition.

– Le réseau de diffusion de la SMF est adapté aux revues vendues par abonnement, mais n'est pas adapté à la diffusion de *Cours Spécialisés* (la SMF ne peut pas utiliser le réseau des libraires).

– La SMF n'étant pas une association à but lucratif, ne peut faire la publicité suffisante pour *Cours Spécialisés*.

Cet accord doit permettre de développer la collection (à titre de comparaison, la SMAI possède une collection bien développée du même type, en coédition avec Springer).

Imprimeur : suite à quelques problèmes de qualité avec Louis-Jean, *Astérisque* est désormais imprimé par Jouve (à Mayenne), de même que quelques autres publications scientifiques de la SMF. Louis-Jean garde les *Bulletin et Mémoires* et la *Revue d'histoire des mathématiques*.

Routage : la responsabilité du routage et son suivi sont désormais complètement assurés par la cellule de diffusion (Marseille). Ceci va dans le sens d'une meilleure répartition du travail du secrétariat des publications. Un nouveau routeur a été choisi, ce qui va dans le sens d'une meilleure qualité du service et de meilleurs coûts.

Diffusion, publicité : un fac-simile de la couverture de chaque publication est désormais diffusé largement à chaque parution. Deux fois par an est aussi diffusé largement un quatre-pages faisant état des dernières parutions. Un effort particulier a été fait pour le lancement de la formule d'abonnement de *Panoramas & Synthèses*. Par ailleurs, les publications récentes apparaissent dans la rubrique correspondante des *Notices* de l'AMS. Des échanges d'emplacements publicitaires ont été faits ou vont être faits avec d'autres sociétés : la London Mathematical Society, les sociétés mathématiques japonaise, allemande et espagnole.

Retards de publication des périodiques

Revues à jour : *Astérisque*, *Mémoires*, *Panoramas & Synthèses*, *Officiel*.

La situation d'*Astérisque* est très bonne du point de vue des textes (plusieurs numéros de l'année 2000 sont déjà acceptés et en cours de composition). Il faut maintenant prévoir une augmentation du nombre de pages publiées, pour permettre la publication rapide de monographies. Je propose une augmentation de 3 étoiles par an, correspondant à l'équivalent d'un volume du séminaire Bourbaki.

La situation des *Mémoires* est bonne, ainsi que celle de *Panoramas & Synthèses*. Néanmoins, la situation de *Panoramas & Synthèses* reste fragile, car les articles de *Panoramas & Synthèses* nécessitent un long travail de relecture et les numéros de *Panoramas & Synthèses* sont à prévoir très à l'avance.

L'*Officiel* est disponible en accès gratuit sur le serveur SMF depuis novembre 1998. Néanmoins, les services proposés par cette installation ne sont pas aussi bons que ceux proposés par l'agenda des conférences mathématiques (ACM) de S. Cordier. Il est probable qu'une meilleure interaction entre les deux est nécessaire.

Retards conjoncturels : *Bulletin*, *Gazette*.

Un seul fascicule du *Bulletin* 1998 est sorti en 1998, les trois autres au premier trimestre 1999. Le *Bulletin* a un peu souffert du rattrapage de retard pour *Astérisque* et *Mémoires* en 1998. Il est prévu que les fascicules 1999 sortiront de manière plus régulière.

La *Gazette* a changé de format, ce qui a pu provoquer quelques retards, suite à différents problèmes techniques. Le rythme normal semble avoir été repris.

Retards structurels : *Revue d'histoire des mathématiques*.

La *Revue d'histoire des mathématiques* doit faire face à un manque de textes. Le premier fascicule 1998 n'est sorti qu'en décembre 1998 et le second est prévu pour juin 1999. Le nouveau comité de rédaction a commencé à modifier la présentation pour rendre la revue plus attractive pour les auteurs. L'évolution est à surveiller de près, car la revue ne peut se permettre longtemps un tel retard, sous peine de perdre ses abonnés.

Bilan sur la diffusion

Après une série d'augmentations par paliers sur quatre ans, les tarifs d'abonnement n'augmenteront pas en 2000 (décision du conseil de janvier 1999).

Le nombre d'abonné stagne ou baisse très légèrement pour l'ensemble des revues. En revanche, les ventes au numéro faites en 1998 sont en augmentation sur 1997. Le départ de la formule « abonnement » de *Panoramas & Synthèses* est encourageant (déjà plus d'une centaine d'abonnés).

Changements dans les comités de rédaction

Jean-Yves Chemin a accepté de diriger le comités de rédaction de série *Séminaires & Congrès électroniques*. Cette série devrait pouvoir redémarrer sous forme électronique en 2000.

Lignes directrices proposées

La politique suivie depuis plus d'un an s'appuie sur les principes ci-dessous :

– La SMF doit garder la maîtrise de ses publications, qui en font une de ses raisons d'être et une de ses sources importantes de financement. Il s'agit donc d'une part d'atteindre un équilibre financier pour les publications et d'autre part d'en augmenter leur diffusion.

– L'activité éditoriale de la SMF doit se centrer sur les revues vendues par abonnement. La SMF n'est pas performante (et n'a pas vocation à l'être) pour une diffusion hors abonnement.

– Un des *objectifs importants* pour les quatre années à venir est de développer l'action promotionnelle. Outre les moyens financiers qui seront dégagés, la SMF espère profiter mieux des possibilités offertes par ses partenaires (CNRS, EDP-Sciences, AMS). Elle prévoit aussi d'accueillir des stagiaires d'écoles de commerce qui aideront à trouver les meilleures formules de promotion.

De plus, des contacts ont été pris avec d'autres sociétés mathématiques pour échanger des encarts publicitaires.

Quelques objectifs pour 1999-2000

Revues électroniques

Le *Bulletin* est la seule revue dont l'existence d'une version électronique semble nécessaire dans un avenir proche. En effet, *Astérisque*, *Mémoires* et *Panoramas & Synthèses* publient en général des textes longs qui ne gagneraient pas beaucoup à être présents sous forme électronique.

La collection *Séminaires & Congrès* devrait passer sous forme électronique avec un accès gratuit pour une durée à déterminer. Néanmoins, la mise en place d'un nouveau comité de rédaction a pris beaucoup de temps et il ne faut pas s'attendre a avoir des textes prêts avant 2000.

Les choix techniques pour la mise en place d'une version électronique du *Bulletin* ne sont pas encore faits. La table ronde du 10 avril devrait aider à prendre une décision. Il me semble important de travailler en collaboration avec d'autres revues, telles les *Annales de Fourier*.

Par ailleurs, il semble clair que l'existence d'une version électronique du *Bulletin* doit s'accompagner de la possibilité d'accès aux anciens numéros. Une étude de coût a été demandée à l'INIST (CNRS) qui est prêt à nous aider dans cette direction. Il s'agirait d'obtenir un résultat analogue à celui des revues de JSTOR (www.jstor.org) : les revues sont scannées et le résultat est passé par un logiciel de reconnaissance de mots, ce qui permet une recherche par mots-clés.

L'Officiel

Cette publication offre des services incontestables à ses abonnés. Néanmoins, par manque de place, elle ne peut détailler les informations sur les colloques. Une réorientation de son contenu devrait être envisagé, pour mieux tenir compte des possibilités qu'offre l'interrogation électronique. Il faut penser à une meilleure collaboration avec l'agenda des conférences mathématiques (ACM) de S. Cordier. De plus, l'*Officiel* devrait donner plus de place à des emplacements publicitaires pour d'autres sociétés mathématiques, permettant en retour une meilleure présence de la SMF dans l'espace publicitaire de ces sociétés.

La cellule de diffusion à Marseille
Paul-Jean Cahen, Vice-Président

Le chiffre d'affaires de la cellule de diffusion a connu une forte croissance dans les quatre dernières années (300 kf en 1995, 1600 kf en 1998), évolution essentiellement due à la progression des ventes au numéro (1000 en 1995, 4000 en 1998) mais aussi à la prise en charge directe des abonnements en provenance d'OFFILIB et SPES. L'année passée elle a poursuivi son effort de professionnalisation. Après s'être équipée du matériel adapté (logiciel, machines à timbrer et à cercler), la maison de la SMF a procédé à un échange de personnel avec le CIRM. Elle a cédé un mi-temps de secrétariat comptabilité et récupéré un mi-temps de manutention. Une stagiaire de l'école de commerce, tout en apportant un point de vue extérieur et critique, a permis de mener à bien quelques enquêtes, notamment sur le suivi des stocks. la prise en charge d'une partie du routage nous a permis de négocier les meilleurs tarifs postaux et de baisser les coûts pour l'ensemble de la diffusion. Nous continuons à travailler, avec l'ensemble du Bureau, à une répartition efficace des tâches entre le siège parisien et la cellule de diffusion à Marseille et nous poursuivons l'effort de professionnalisation avec des projet de formation en matière de comptabilité et de perfectionnement sur notre logiciel.

Rapport Financier, exercice 1998
Jean-Pierre Henry, Trésorier

L'année 1998 se solde par un résultat positif meilleur que ce que prévoyait le budget prévisionnel. Le bilan de 1998 (hors CIRM) présente un bénéfice de 544 kf, ce qui compense les déficits de 1996 (de 148 kf) et de l'exercice 1995 (272 kf). Les finances de la SMF sont donc redevenues saines et nous redonnent une légère marge de manœuvre.

L'examen attentif de l'exécution du budget invite par ailleurs à tempérer l'optimisme.

Les grandes masses de l'exécution du budget :

Côté recettes environ 3,6 MF :

(1) Les recettes dues aux ventes des 2 principales revues représentent 1862 kf (1861 kf en 1997).

(2) Les subventions publiques représentent 617 kf (contre 445 kf en 97)
- 134 kf du CNRS (105 kf en 1997)
- 433 kf du MRT (340 kf en 1997)
- 50 kf du Ministère de la culture

(3) Les cotisations : 370 kf (386 kf en 1997).

(4) La *Gazette* (abonnements et publicité) : 327 kf (334 kf en 1997).

Côté dépenses environ 3,1 MF :

(1) Les salaires
- 1361 kf (1340 kf en 1997).

(2) Les frais de fabrication composition, droit d'auteur et papier pour les revues SMF (*Astérisque*, BM, *Gazette*, *Officiel*, PS, RHM, coll. SMF)
- 722 kf (743 kf en 1997)

(3) Les frais d'affranchissement et routage :
-314 kf (358 kf en 1997)
(4) Le fonctionnement
- 193 kf (233 kf en 1997)

Commentaires généraux

La première remarque qui s'impose est que les subventions dépassent le bénéfice comptable et sont donc nécessaires à notre survie.

Astérisque, Bulletin et Mémoires :

Les recettes d'*Astérisque* se sont stabilisées à 1110 kf contre 1100 kf en 1997 (dont 55 kf venant d'OFFILIB pour les années antérieures). Les recettes de *Bulletin et Mémoires* marquent un léger fléchissement à 751 kf contre 760 kf.

Diffusion :

Nous n'avons pas complètement récupéré les pertes d'abonnements diffusés par la SPES (Gauthier-Villars). Tout laisse craindre une perte en nombre d'abonnements.

Malheureusement, en dépit de la qualité de ces 2 revues les chiffres d'abonnements et ventes de collections complètes de nos deux revues principales, *Astérisque* et *Bulletin et Mémoires* stagnent (environ 600 abonnements et collections complètes pour *Astérisque*).

Subventions :

Dans la situation actuelle on peut considérer que ces deux revues avaient leur budget équilibré. Mais la restructuration du secteur de l'édition scientifique en modifiant la diffusion de *Bulletin et Mémoires* nous fragilise à nouveau. Par conséquent, sauf opérations spéciales, les subventions CNRS qui nous ont aidé à passer le cap difficile du changement de distribution d'*Astérisque* continuent à apparaître nécessaires pour relancer notre diffusion ; loin d'être des subventions de fonctionnement, elles correspondent à un « coup de pouce » nécessaire pour prendre un nouveau départ tout en gardant des prix bas et en élevant la qualité et sans doute nombre le de pages. Un effort de publicité et marketing est indispensable, dans les limites de notre caractère non commercial.

Utilité publique :

Nous avons passé le cap des changements de diffuseurs en augmentant modérément les tarifs qui restent très inférieurs à ceux des revues correspondantes du secteur privé ; le passage au secteur privé capitaliste aurait entraîné à l'évidence le doublement ou le triplement des tarifs, voire la disparition, au détriment de la communauté scientifique et des bibliothèques publiques universitaires.

Bien entendu l'équilibre des comptes repose aussi très largement sur l'excellence du travail bénévole de dizaines de mathématiciens dans les comités de rédaction, aux secrétariats éditoriaux et bien sûr du directeur de la publication, ceci est favorisé par le caractère non lucratif de l'association.

Autres publications :

Les autres collections et opérations spéciales (*Bourbaki, Leray*) produisent un petit flux plutôt croissant qui incite à l'optimisme.

Par contre, les « Revues électroniques » et les ventes sur le serveur ne produisent pour le moment aucune rentrée significative d'argent, mais c'est le propre de tous les investissements sur le Web. Il s'agit d'un investissement cumulé maintenant de 2 MF pour 1995, 1996, 1997, 1998 dont 1,4 MF de subventions publiques. Le serveur de la SMF a fait beaucoup de progrès, notamment avec l'*Officiel* en ligne et la possibilité de passer commande sur le serveur. Mais ce n'est, avec les résumés, qu'un début de ce qu'il faut faire.

Un gros effort est à programmer en ce domaine dans les quatre années à venir. Malheureusement la SMF a peu de ressources financières propres mobilisables. Une coordination avec les autres revues mathématiques du secteur non commercial est souhaitable

Évolution des dépenses :

En ce qui concerne les dépenses, il faut noter que le poste salaires a bénéficié de la présence d'un appelé du contingent qui a été très efficace. L'année prochaine les dépenses salariales augmenteront au minimum du demi-poste nécessaire. En fait il y a à la fois des activités de saisies et de maintenance informatique.

Redressement fiscal :

La SMF et le CIRM ont fait l'objet d'un redressement fiscal sur les années 1994 et 1995, l'incidence pour la SMF est nulle, par contre pour le CIRM, il a été constaté en charges exceptionnelles dans les comptes 1997 des régularisations de TVA au titre des années 1994, 95, 96 pour un montant de 360 kf, la première partie de ce redressement a été appelée. Nous allons d'ici quelques semaines répondre à un questionnaire, l'administration fiscale décidera alors de notre statut fiscal ce qui devrait nous tranquilliser pour un certain nombre d'années (ou nous obliger à la liquidation de la SMF-CIRM, ou encore revenir au statut antérieur, sans TVA, pour l'hôtellerie du CIRM).

Évolution du routage :

La diffusion (et en particulier le routage) est essentiellement confiée à la « cellule » de Marseille ; ce changement va être positif à terme ; pour l'instant ce changement induit évidemment un surcroît de travail aussi bien à Luminy qu'au siège.

Morale de l'histoire :

Enfin, comme l'année dernière, ce qui fait que je reprends une partie de la conclusion, je ne peux qu'admirer le dévouement et la qualité du travail de l'équipe du personnel de la SMF. Les mathématiciens sont exigeants aussi bien comme clients que comme patrons, les tâches sont multiples et chaque personne a plusieurs responsabilités. Ces responsabilités changent, en particulier cette année.

Nous allons leur demander en plus un effort de formation.

La comptabilité est rendue complexe par les différentes sortes de rentrées d'argent et de subventions et l'imagination sans relâche de notre haute administration.

Je ne peux que souhaiter que les mathématiciens qui profitent à la fois des publications de la SMF et de l'existence du CIRM prennent plus conscience de cet effort et soutiennent leur « société savante » tant qu'elle existe.

⋆ ⋆ ⋆

Les revues mathématiques face à l'électronique[1]

Introduction

Comme tous les grands journaux mathématiques, les revues mathématiques françaises se trouvent confrontées à la nécessité de s'adapter au mode d'utilisation électronique. Le développement des serveurs de prépublications électroniques augmente la rapidité et l'étendue de la diffusion de l'information mathématique ; celui des bases de données électroniques facilite l'accès à cette information.

Pour les mathématiciens, l'important est de conserver aux journaux (électroniques ou non) leur rôle essentiel de stabilisation des connaissances à un moment donné, ainsi qu'une bonne garantie des résultats publiés.

Les revues mathématiques, françaises notamment, doivent choisir de nouveaux modes de développement adaptés à ces réalités : à côté d'une version papier traditionnelle, elles devront proposer rapidement une version électronique, sous peine de disparaître à terme du paysage mathématique.

Pour permettre une clarification du débat et pour orienter le développement des revues de la SMF en collaboration avec les autres revues françaises, Jean-Jacques Risler, alors président de la SMF, avait mis en place une commission[2] présidée par Bernard Teissier, chargée de réfléchir à ces questions.

Cette table ronde a pour objet la présentation des conlusions de la commission par Bernard Teissier, donnant ainsi l'occasion d'un échange de vues sur les questions abordées. Elle a réuni une trentaine de participants.

Rapport de la commission Teissier pour la table ronde

Les buts principaux de la publication des articles scientifiques sont :

(1) Assurer la diffusion des connaissances y compris leur diffusion dans le temps, c'est-à-dire l'assurance de la pérennité du support.

(2) Valider les résultats de la recherche et aussi de leur « intérêt », qui se traduit par une échelle des valeurs des revues qui correspond en théorie à l'intérêt des articles qu'elles publient.

Cependant trouver des rapporteurs devient de plus en plus difficile, et on a l'impression que le nombre d'articles soumis croît plus vite que celui des rapporteurs et que celui des lecteurs. Il est donc important de réfléchir non

[1] Ce texte est un résumé du compte rendu de la table ronde du 10 avril 1999 organisée par la Société Mathématique de France, préparé par Claude Sabbah et disponible sur le serveur de la SMF : `http://smf.emath.fr`

[2] composée de Jean-Benoît Bost, Jean-Pierre Bourguignon, Bernard Helffer, Benoît Perthame, Bernard Prum, Pierre Schapira, Bernard Teissier.

seulement à la diffusion mais aussi au contenu et au rôle des publications dans la diffusion des connaissances et l'évaluation des résultats. Aussi il ne faut pas que le trio PEP (Papier-Électronique-Prix) occulte tous les autres problèmes. La commission recommande la solution mixte électronique/papier. Rappelons les principaux arguments :

– l'électronique a de nombreux avantages : accès facile de (presque) partout, moteurs de recherche permettant de trouver tous les articles qui contiennent un mot donné, possibilité de liens entre les bases de données du type *MathSciNet* ou *Zentralblatt* et les serveurs de journaux.

– avec les techniques actuelles d'imprimerie, tant qu'on ne le brûle ou ne l'inonde, un journal traverse les siècles. Un fichier électronique dépend d'un système d'exploitation, d'un logiciel et les deux changent à une vitesse telle qu'on ne peut rien assurer. Il se pourrait que le problème de la pérennité des électrodocuments ait un coût *a posteriori* qui modifie considérablement l'estimation économique du procédé.

– un inconvénient plus sournois est que l'électronique encourage la prolifération des prépublications, disséminées sur des serveurs gratuits, certes, mais spécialisés. Cette publication « sauvage » n'est pas un mal en soi, sauf si elle induit une baisse de qualité

– la lecture sur écran est encore peu agréable.

En conclusion, pour toutes ces raisons, la position sur ce point de la Commission est que pour les cinq prochaines années au moins il faut garder une version papier et une version électronique et dans toute la mesure du possible faire que la version électronique de chaque journal rende tous les services énumérés ci-dessus.

Le point suivant est un peu politique, si les mathématiciens se convertissaient au tout-électronique le centre de gravité de la publication mathématique de haut niveau ferait un saut géographique. Actuellement une bonne moitié des dix meilleures revues mondiales est européenne mais l'Europe est bien en retard pour l'électropublication.

Du point de vue scientifique, les poids lourds de la publication mathématique en Europe sont l'Allemagne, l'Angleterre et la France. Les poids lourds du point de vue économique de la publication scientifique en général sont en Hollande. Si l'on regarde du point de vue des sociétés savantes de mathématiques, l'Allemagne disparaît de la liste et si l'on regarde du point de vue des livres, ou du point de vue des éditeurs commerciaux, c'est la France qui disparaît.

Les journaux mathématiques français sont donc dans une position périlleuse à moyen terme, malgré une bonne santé scientifique et économique. Il va falloir qu'ils s'adaptent en créant des versions électroniques, ne serait-ce que pour rester compétitifs en ce qui concerne la vitesse de publication et la facilité de références croisées. Cela demande non seulement pas mal d'argent, mais aussi un savoir-faire certain. De plus, les revues françaises souhaitent continuer à publier le plus possible en français, ce qui représente un handicap commercial.

Il semble donc impératif que les journaux mathématiques français et en particulier ceux de la SMF, puissent s'appuyer, d'une manière ou d'une autre, sur un éditeur professionnel, pour les indispensables développements techniques, la diffusion et certains choix stratégiques.

Qu'est-ce qu'une revue électronique ?

La notion de revue électronique ne recouvre pas une réalité unique, à l'heure actuelle. Claude Sabbah présente quelques exemples typiques.

(1) Le traitement de JSTOR (`http://www.jstor.org`) : la version papier de l'article est scannée, puis la partie « texte » est récupérée à l'aide d'un logiciel de reconnaissance optique de caractères et les mots sont intégrés dans une base de données ; enfin, les données bibliographiques (titre, auteur, résumé, mots-clés) sont intégrées dans une base de données ; il est ainsi possible de rechercher les articles qui contiennent

– des mots donnés,
– des auteurs donnés,
– des mots de titre donnés,
– des mots-clés donnés,

puis d'imprimer la version scannée de l'article. JSTOR traite ainsi notamment les *Annals of Mathematics* et *Transactions of the American Mathematical Society*. Ce procédé semble bien adapté[3] pour un archivage des revues anciennes (avant l'avènement de TEX) si la version papier est assez lisible.

(2) Beaucoup de revues (non commerciales notamment) proposent une table des matières électronique, avec un accès aux données bibliographiques des articles, ainsi que la possibilité (gratuite ou payante) de télécharger une version imprimable (sur un écran ou une imprimante) de l'article. Ici l'apport de l'électronique est la commodité et la rapidité d'accès aux articles.

(3) L'autre apport (gadget ou réelle utilité ?) d'une version électronique est la possibilité de navigation à l'intérieur ou à l'extérieur des articles.

(a) Il existe des variantes hyperdvi ou pdf, qui permettent de « naviguer » *à l'intérieur* du fichier. Ceci nécessite néanmoins une préparation *en amont* du fichier TEX utilisé.

(b) La navigation *externe* à l'article nécessite un gros travail en amont de la mise en place électronique d'un article. Il s'agit d'établir des liens avec

– des bases de données (*Mathematical Reviews* ou *Zentralblatt*),
– d'autres articles ou prépublications,
– des données non textuelles (images, programmes, etc.).

Il est essentiel que ces liens restent stables au cours du temps.

Les interventions

Quels sont les avantages réels des revues électroniques pour les mathématiciens ? Si les bases de prépublications électroniques apparaissent maintenant comme un outil de travail très utile, il semble évident que les revues électroniques ne répondent pas complètement à certains espoirs qu'elles avaient fait naître notamment sur :

1) la plus grande rapidité de publication que les revues papier (car le temps de lecture par les rapporteurs reste incompressible) ;

[3] Note du rédacteur : une réalisation analogue est à l'étude pour le fonds des revues de la SMF.

2) l'offre de services nouveaux, les liens hypertextes sont peut-être seulement des gadgets, qui ne justifient pas les lourds investissements qu'ils nécessitent (les avis semblent partagés sur cette question).

3) la baisse significative des coûts de production (car la composition, la mise en place de liens etc., nécessite un personnel de plus en plus qualifié et des investissements technologiques parfois importants) ;

4) les solutions aux problèmes de stockage du papier (car la sauvegarde électronique devient une opération de plus en plus technologique).

La dualité du chercheur a été soulignée par plusieurs participants. En tant qu'auteur, il désire être *bien* publié dans des délais rapides et, en tant que lecteur, il veut une limitation du nombre d'articles convenablement validés, nous sommes auteurs et pas assez lecteurs. Ceci montre l'importance du travail des éditeurs (comité éditorial, mise en forme de l'article).

Quel est le devenir de la prépublication électronique, une fois l'article publié : faut-il obliger les auteurs à la retirer des serveurs de prépublications ou de leur page personnelle ? Plusieurs revues permettent aux auteurs de laisser leur prépublication sur leur page personnelle ou sur un serveur, à condition d'indiquer clairement la référence de l'article publié, à laquelle le lecteur est invité à se reporter. La tendance est la même en physique.

⋆ ⋆ ⋆

Le Centre Educasup-Maths

Jean-Louis MALTRET

Educasup, projet de la direction de la technologie du ministère de l'Éducation nationale, est un système national d'information sur les outils pédagogiques numériques et audiovisuels réalisés pour l'enseignement supérieur. L'objectif est de recenser, discipline par discipline, les produits disponibles pour une diffusion et une utilisation dans l'enseignement supérieur. Ce recensement est destiné à alimenter des bases de données disciplinaires distinctes mais utilisant le même logiciel et la même grille de description.

Le centre **Educasup-Maths** est géré par l'IREM d'Aix-Marseille : il rassemble et diffuse une documentation décrivant les outils multimédias en mathématiques dans l'enseignement supérieur (universités, IUT, classes préparatoires,...).

Outil au service de la communauté des enseignants de mathématiques, il veut contribuer à la visibilité en étant un lieu de recensement de divers produits et en offrant à tous la possibilité de faire connaître plus largement leurs réalisations.

Le centre est également chargé d'animer la réflexion sur les usages des produits sous la forme d'un forum associé à la base de données disciplinaire, alimenté par les utilisateurs des produits recensés.

Le centre s'appuie pour ces tâches sur un réseau de correspondants, dont la collaboration peut s'effectuer soit en signalant des produits, soit en recueillant des informations sur ces produits, soit en contribuant à la base de données par la saisie de fiches.

Si vous avez des suggestions pour le site (des conférences, publications,... à annoncer), si vous connaissez des outils ou produits qui devraient figurer dans la base de données, ou si vous souhaitez être correspondant Educasup-Maths n'hésitez pas à nous contacter.

Centre disciplinaire maths du projet Educasup : http://educasup.irem.univ-mrs.fr/
Responsable : Jean-Louis Maltret, jlm@irem.univ-mrs.fr
IREM Aix-Marseille Case 901 163 avenue de Luminy 13288 Marseille Cedex 9
Tél : 04 91 41 39 40 Fax : 04 91 82 93 43

⋆ ⋆ ⋆

L'AUF peut financer vos missions !

L'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) rassemble aujourd'hui plus de 400 institutions membres titulaires (universités, grandes écoles, laboratoires de recherche, conférences internationales des doyens et directeurs d'établissements) réparties dans 49 pays de la francophonie. Créée en 1961 à Montréal (Canada-Québec), où elle a son siège, elle s'est engagé dans la coopération universitaire multilatérale et s'est progressivement implantée dans les grandes régions géographiques du monde francophone en y déployant des programmes visant le développement de l'enseignement supérieur et de la recherche et en y établissant des bureaux régionaux (12 actuellement) et des antennes (5), chargés sur le terrain, du suivi et de l'animation des programmes. La mise en œuvre des actions se fait selon les critères académiques traditionnels (appels d'offres, jugement par les pairs, évaluation...) et respecte l'équilibre dans la mise en réseaux sur objectifs qui permet de mobiliser les ressources humaines et matérielles francophones et facilite le partage des savoirs et des savoirs-faires ; la régionalisation pour prendre en compte les spécificités de chaque région.

Les programmes concernent principalement la recherche, l'apprentissage du français et la formation en français, l'information scientifique et technique. L'Université Virtuelle Francophonie (UVF) et le Fonds International de Coopération Universitaire (FICU) complètent le dispositif. Par exemple, les objectifs de **la recherche** sont :

– La consolidation de l'espace scientifique francophone par un maillage des structures et organismes scientifiques en prenant appui notamment sur les Réseaux Thématiques de Recherche (RTR),

– La création des conditions d'une relance durable de la recherche dans les pays du Sud, par une amélioration des conditions de travail et de vie des chercheurs, par une aide à la structuration scientifique des établissements universitaires, par le financement d'une pratique multilatérale de la recherche, par le transfert vers le Sud des savoirs-faire accumulés au Nord...

Toutes les informations utiles (appels d'offres, adresses, dates limites,...) sont en permanence accessibles sur le site Toile : http://www.aupelf-uref.org

CARNET

Lichnérowicz et la réforme des mathématiques

André REVUZ

Je prendrai la liberté de désigner notre cher camarade disparu par le diminutif affectueux que j'utilise depuis 65 ans : Lichné...

Pour rédiger les quelques lignes qui suivent, j'ai eu principalement recours pour rafraîchir mes souvenirs personnels à deux documents.
— le rapport préliminaire de la commission rédigé par Lichné lui même en mars 1967
— le texte d'une conférence, postérieure à 1973, qu'il intitula : buts et difficultés de la réforme de l'enseignement mathématique en France.

Je souhaiterai que ces documents soient largement republiés aujoud'hui.

André Lichnérowicz

La commission a travaillé de décembre 1966 à juin 1973 où elle fut dissoute à l'initiative de son président.

L'idée fondamentale de Lichné était qu'une des conditions nécessaires du développement harmonieux de nos sociétés était la diffusion d'une solide culture scientifique et au sein de celle-ci de la culture mathématique : il tenait pour essentielle l'économie de pensée que permettent les mathématiques.

L'objectif de la commission était donc d'améliorer l'enseignement mathématique à tous les niveaux.

Les IREM

La commission estima que tout progrès réel était conditionné par une étude objective des problèmes que rencontre cet enseignement et recommanda, dès ses premières séances, la création des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique) dont l'idée était proposée par l'avant-garde de l'APMEP

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) (et la justice veut que je cite ici Glaymann, Vissio et Walusinski). Le projet soumis début 1967 au ministre de l'époque, A. Peyrefitte, reçut la réponse suivante : « c'est très bien mais ça ne peut pas être limité aux seules mathématiques. » Enterrement élégant ! Mais 68 arriva et le nouveau ministre E. Faure fut trop heureux de faire immédiatement quelque chose en créant les premiers IREM, suivis à la cadence de 3 ou 4 par an de leurs frères pour aboutir à créer un IREM par Académie (existant en 1975). Un comité national des IREM présidé par Lichné veillait sur leur fonctionnement. Leurs missions explicites étaient :

- La recherche sur l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux.
- La formation continue des professeurs du 1^er^ et du 2^e^ degré.
- La diffusion des documents relatifs à ces thèmes.

Les IREM, qui fonctionnent toujours, ont fourni un excellent travail qui n'a malheureusement pas toujours eu l'impact qu'il méritait et il faut aussi regretter que bien que créés comme « instituts d'université » ils n'ont été l'objet de la part des mathématiciens qu'au mieux de la plus pure indifférence. Et cependant les IREM ont fait preuve d'une ouverture d'esprit qui n'est, hélas, pas très fréquente, n'hésitant pas à collaborer avec des représentants d'autres disciplines et des psychologues.

Expérimentation

Réformer l'enseignement passait inéluctablement par une modification des programmes, mais aussi pensait Lichné, des méthodes d'enseignement.

Une expérimentation fut mise sur pied par les IREM et l'Institut national pédagogique avec l'objectif de tester de nouveaux contenus et de nouvelles méthodes. Il fut institué dans un nombre non négligeable d'établissements un travail en groupe pour la préparation de l'enseignement et pour son évaluation. Jamais réforme ne fut préparée par une expérimentation aussi large, mais comme je le constatais quelques années plus tard : « toutes les expériences réussissent, toutes les extensions échouent ». Ce qui ne veut pas dire que les expériences n'étaient pas sérieuses, mais que les extensions devraient être progressives ce qui évidemmment se heurte au dogme illusoire du « même enseignement pour tous ». Les professeurs qui participaient aux expériences étaient volontaires et prêts à faire de grands efforts et du point de vue scientifique solidement encadrés, cela permettait des avancées qu'on ne pouvait attendre d'enseignants non-motivés et non encadrés. Les classes expérimentales faisaient le bonheur tant des professeurs que des élèves et avaient le mérite de fournir des théorèmes d'existence du type « Il est possible d'enseigner telle notion à tel public » à condition de rappeler l'utilisation des méthodes actives provoquant l'initiative des élèves et l'on eut parfois à assister à l'utilisation catastrophique par un enseignant dogmatique de séquences qui s'étaient montrées très efficaces.

Les programmes

Quant à la modification officielle et généralisée des programmes, elle présentait des difficultés pas faciles à évaluer : peut-on ne modifier qu'un peu ? À quelle cadence faut-il modifier ? Dès le début, Lichné avait posé le principe :

modifications graduées par étapes de 4 ans. Cela semblait la sagesse et l'indication était bonne, mais à l'usage il fut clair d'une part que 4 ans était un délai trop court pour qu'une modification qui ne fut pas superficielle soit vraiment assimilée et que d'autre part dans la vie politique du ministère, 4 ans c'est terriblement long : 5 ministres se sont succédés de 1966 à 1973 ! Et les ministres étaient sensibles aux oppositions sourdes ou véhémentes qui se firent rapidement jour. Je ne ferai pas l'histoire, attristante, de ces oppositions qui me furent une douloureuse surprise, mais il faut insister sur la patience avec laquelle Lichné y fit front sans jamais se départir de son calme, mais n'en pensant pas moins. Un jour où, parlant d'un opposant de marque particulièrement virulent je lui dis : « je pense qu'il est quand même honnête », Lichné me répondit sans élever la voix : « non, il n'est pas honnête ! ».

L'origine essentielle de ces oppositions est certainement le conservatisme viscéral qui règne quasiment partout : changer demande des efforts non négligeables, (à moins que l'on change sans en être conscient), mais chez la plupart changer est proprement sacrilège, ce qui explique mainte véhémence...

À cet égard, Lichné fit preuve au départ, sur les possibilités d'évolution des mentalités, d'un optimisme que la suite ne confirma malheureusement pas. Un paradoxe voulut que l'inspection générale, résolument hostile au début fut complètement convaincue — 3 ans plus tard ! — mais pour beaucoup d'autres ce n'est pas 3 ans, mais 30 ans qu'il aurait fallu.

La décision de Lichné de dissoudre la commission en juin 1973 et qu'il ne commenta pas tenait sans doute à ce qu'il avait senti que les troupes ne suivaient pas et qu'il lui manquait le soutien explicite de la communauté des mathématiciens qui ne porta jamais qu'un intérêt lointain aux problèmes d'enseignement et dont l'individualisme exacerbé des membres paralyse toute action collective.

La commission ne pensa jamais que les programmes qu'elle proposait étaient parfaits et intangibles — ç'aurait été la négation de toute sa philosophie —, mais après elle ce ne furent pas à des tentatives d'adaptation et d'amélioration que l'on procéda, mais à une démolition systématique, aggravée par une recherche de démocratisation mal comprise aboutissant à un nivellement par le bas alors que Lichné visait une démocratisation par le haut. Sommes nous arrivés à un minimum à partir duquel on va pouvoir remonter ?

Le plus bel hommage que la communauté mathématique dans sa totalité — il faut revivifier la formule : « de la maternelle à l'université »— pourrait rendre à Lichné serait de reprendre dans le contexte actuel, les efforts qui furent les siens et mesurant soigneusement les redoutables obstacles qu'il faudra affronter (pesanteurs sociologiques, rigidités administratives et corporatismes, étroitesses de vues, analphabétisme mathématique de la quasi totalité de la population) de parvenir à ce que l'enseignement mathématique possède toutes les qualités qu'il souhaitait lui faire acquérir.

Lichnérowicz et la géométrie différentielle

Marcel BERGER

Lichnérowicz s'est intéressé à de très nombeux aspects, facettes de la géométrie différentielle. Dans un certain nombre de cas, ce seront ci-dessous nos éclairs, sa contribution fut relativement ponctuelle. Dans d'autres au contraire il a poursuivi ses travaux sur de longues périodes, le cas kählérien en est l'un des plus plus frappants. Mais il reste un esprit remarquable par cette curiosité à grand angle (n'avait-il pas envisagé d'écrire une thèse sur le roman policier ?), largeur de spectre qui explique, entre autres raisons, son énorme influence comme patron de thèse, en langage plus moderne on parle de directeur de recherches. Les sections 1 à 4 nous semblent couvrir les domaines qu'il a longuement et grandement explorés. Nous mentionnerons dans la section 5 ses recherches plus localisées. Par incompétence, nous devrons ignorer ici ses contributions en géométrie symplectique, déformations et quantifications, elles ferons l'objet d'un autre article rédigé par un expert, Charles-Michel Marle.

Il nous semble certain que son intérêt pour la géométrie différentielle « pure » était motivé par son profil à la fois de géomètre et de physicien mathématicien. Pure ne doit pas être mal compris, pour lui les variétés différentiables avaient une métrique, de la courbure mais aussi un laplacien, pouvaient être des espaces homogènes, des variétés à structure holomorphe complexe, etc.

Il faut mentionner qu'il a été l'un des premiers à introduire en France après-guerre une direction de thèse de proximité. Au lieu de s'entendre dire « voici un sujet de thèse, revenez-me voir dans huit ans quand vous aurez fini », on savait qu'on pouvait aller le voir très souvent. Il tenait aussi à cette qualité, essentielle si l'on ne veut pas risquer de causer éventuellement de graves dégats chez les thésards, de vérifier que le sujet de thèse offert ne comportait pas de risque. Pour citer mon cas personnel, il m'a dit « tu peux travailler sur les groupes d'holonomie, je viens de vérifier que Chevalley ne s'en occupe plus ».

La France a connu de 1918 à 1955 un retard mathématique considérable, surtout sur le plan de l'enseignement. Il y avait certes Elie Cartan, Gaston Julia, Paul Lévy, mais ils étaient isolés de la grande masse des mathématiques diffusées largement. Par exemple il n'y avait, mettons de 1945-1955, pas un seul cours de mathématiques raisonnablement moderne à la Sorbonne (à l'exception de celui de troisième cycle de Paul Lévy). La cause est aujourd'hui admise semble-t-il : l'hémorragie absolue, si l'on excepte Gaston Julia et Paul Lévy, de la première guerre mondiale. Des livres comme le van der Waerden, le Courant-Hilbert et bien d'autres, étaient ignorés de presque tous les professionnels. Bien sûr, Bourbaki fut le grand sauveteur de notre isolement, mais Lichnérowicz y participa aussi largement. Dans de nombreux cours et par le livre qui les résume, il milita inlassablement pour diffuser en France l'écriture moderne des espaces vectoriels et le calcul tensoriel, la notion de variété et celle de forme différentielle extérieure, l'espace de Hilbert, les séries et la transformation de Fourier, les équations intégrales. C'était une partie de son enseignement de physique mathématique à Strabourg et le livre (Lichnérowicz, 1947) eut une influence considérable. La préface par Darmois en est instructive pour montrer l'isolement français dans le domaine en question : il n'y est question que d'ouvrages allemands d'avant-guerre.

1. A la suite de Bochner (formules « à la Weitzenböck »)

Le texte (Bochner, 1946) restera une pierre incontournable : Bochner calcula le laplacien du carré de la norme d'une 1-forme différentielle ω sur une variété riemannienne :

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|\omega\|^2) = \|D\omega\|^2 + \langle D\omega, \omega\rangle + \mathrm{Ricci}(\omega, \omega)$$

Ici Δ est le laplacien sur les fonctions, mais aussi sur les 1-formes, $D\omega$ désigne la dérivée covariante et Ricci la courbure de Ricci. Puisque l'intégrale d'une divergence (donc d'un laplacien en particulier) sur une variété compacte (sans bord) est toujours nul, Bochner déduit de son calcul qu'il n'existe aucune forme harmonique non nulle ($\Delta\omega = 0$) sur une variété riemannien compacte à courbure de Ricci positive. Grâce au théorème de Hodge – de Rham cela entraîne que le premier nombre de Betti de la variété est nul. Les relations entre courbure et topologie forment peut-être le sujet le plus naturel de la géométrie riemannienne. Avant Bochner on n'en connaissait guère que de très faibles, si l'on excepte le cas de la courbure sectionnelle négative. Dans la direction « courbure positive » Bochner ouvrait une brèche, dont Lichnérowicz perçut de suite l'horizon dévoilé. Il s'en servit dans au moins quatre directions, cinq si l'on comprend l'extension pure et apparemment simple au cas des formes de degré supérieur à 1, extension dévelopée outre Lichnérowicz par Bochner et Yano, et terminée, comprise, seulement dans (Meyer, 1971). Ce genre de formule est maintenant appelé « de Weitzenböck ». Effectivement une certaine partie de ces formules généralisées se trouve dans (Weitzenböck, 1923), comme exemples de calcul différentiel « absolu ». Mais l'auteur n'en fait strictement rien, ce pourquoi d'ailleurs il aurait été bien en peine puisque l'on ne disposait pas à l'époque du théorème du type Hodge-de Rham.

Dans (Lichnérowicz, 1950) on trouve le calcul qui fournit le laplacien de la norme carrée du tenseur de courbure complet R :

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|R\|^2) = \|DR\|^2 + \mathrm{Univ}(R, R, R) + Q(D(\mathrm{Ricci}))$$

où $\mathrm{Univ}(R, R, R)$ est une forme cubique universelle en R et Q une forme quadratique universelle en la courbure de Ricci. Je suis encore surpris aujourd'hui du peu de choses que l'on a fait avec cette formule extraordinaire. Dans (Tricerri & Vanhecke, 1986) on voit en quelques lignes qu'elle entraîne que les espaces localement symétriques sont caractérisés par la forme algébrique ponctuelle de leur tenseur de courbure R, un résultat qui généralise des résultats très partiels obtenus auparavant de façon très pénible.

Dans (Lichnérowicz, 1958) il y a l'idée d'appliquer la formule de Bochner, non plus à une 1-forme harmonique, mais à la 1-forme qui est la dérivée df d'une fonction propre du laplacien : $\Delta f = \lambda f$. On trouve, en intégrant : $0 = \int_M \|\mathrm{Hess} f - \lambda \int_M \|df\|^2 + \int_M \mathrm{Ricci}(df, df)$. D'où alors facilement la conclusion :

la première valeur propre λ_1 du laplacien d'une variété riemannienne compacte M^d à courbure de Ricci vérifiant Ricci $\geqslant d-1$ vérifie $\lambda_1 \geqslant d$. Il me semble que c'est la première relation historique entre spectre et courbure. Sous la même hypothèse, il montre en outre dans le cas kählérien que l'on a mieux : $\lambda_1 \geqslant 2d$. Ceci parce qu'il s'intéresse en fait aux champs de vecteurs holomorphes ξ : ceux-ci vérifient $\Delta x = 2 \cdot \mathrm{Ricci}(\xi)$, et on l'applique à la fonction propre qui est la divergence de ξ.

C'est dans (Lichnérowicz, 1961), mû par la physique mathématique, qu'il découvrit qu'il existe des laplaciens naturels pour d'autres objets que seulement les formes différentielles extérieures. On n'a pas fini d'épuiser cela, par exemple on l'applique avec fruit au cas des formes différentielles symétriques d'ordre 2 pour prouver que l'ensemble des structures d'Einstein sur une variété compacte est de dimension finie, voir (Besse, 1987). Le texte (Lichnérowicz, 1961) est aussi important par d'autres aspects, on y trouve une formule complète pour les variations à un paramètre des structures riemanniennes ou lorentziennes et comme application des résultats sur les variations des équations de la relativité générale.

Last not least, mû toujours par la physique c'est dans (Lichnérowicz, 1963) qu'il applique la technique de Bochner aux spineurs d'une variété spinorielle et trouve la formule, ahurissante de simplicité (si l'on se rappelle que, pour les formes différentielles extérieures de degré autre que 1, le terme résiduel était très complexe à déchiffrer) : $\delta^2 = D * D + \frac{\mathrm{scal}}{4}$, où δ est l'opérateur de Dirac, D la dérivée covariante et scal la courbure scalaire. Il identifie ensuite l'index de l'opérateur de Dirac avec le $\hat{\alpha}$-genre de Borel-Hirzebruch. D'où, grâce au théorème de l'index qui venait tout juste d'être démontré, une restriction topologique pour la condition ultra-faible « la courbure scalaire est positive » (ce fut même la seule restriction connue a fortiori pour l'hypothèse de la courbure sectionnelle positive, ce avant Gromov en 1981). Les avatars de cette formule sont loin d'être terminés, elle a diffusé dans une bonne partie de la littérature actuelle ; sous forme de livres on pourra l'apprécier par exemple dans (Berline, Getzler, & Vergne, 1992) et (Lawson & Michelsohn, 1989). Lichnérowicz continua à travailler sur les spineurs jusqu'à la dernière minute.

2. Le royaume de Kähler

Ce royaume, découvert dans (Kähler, 1933), resta très longtemps pratiquement ignoré, voir une de ses rares analyses historiques en (Bourguignon, 1993). Mais il nous semble que le déclenchement fut le livre (Hodge, 1941). Car il dissocia « à la Riemann » la structure de variété algébrique de celle de variété seulement kählérienne. Dans cette brèche l'après-guerre vit s'engouffrer, Chern en 46, Weil en 49 et bien d'autres. Lichnérowicz fut l'un de ceux-là. Une de ses motivations était la question d'Elie Cartan : les domaines bornés homogènes de $\mathbf{C}^n$ sont-ils tous symétriques ? question à laquelle il travailla d'arrache-pied (on sait aujourd'hui qu'il y a des contre-exemples). Une question essentielle était de savoir ce qui restait, en kählérien seulement, des résultats de Lefschetz sur les variétés algébriques. Mais aussi ce qui restait dans le cas seulement symplectique (disons ici presque-kählérien). Bien que cela apparaisse aujourd'hui

« élémentaire », mais ce ne l'était pas à l'époque, ce fut lui qui établit l'équivalence entre variété kählérienne, variété à groupe d'holonomie compris dans le groupe unitaire complexe $U(n)$, et variété admettant une 2-forme extérieure de rang maximum qui est à dérivée covariante nulle. En outre aussi l'équivalence, dans le domaine kählérien, entre courbure de Ricci nulle et groupe d'holonomie contenu dans le groupe spécial unitaire $SU(n)$. Tout ceci permettait de commencer à voir plus clairement ce qui subsistait de Lefschetz.

Dans (Lichnérowicz, 1969) on trouve pour la première fois la généralisation aux cas riemannien, de dimension quelconque, de la notion de variété d'Albanese et de l'application de Jacobi sur cette variété, notions considérées auparavant seulement dans le cas des algébriques et celui des surfaces. Un résultat important est dans (Lichnérowicz, 1971) : si la courbure de Ricci (alias la première classe de Chern) d'une variété kählérienne compacte est non négative alors cette application de Jacobi est une fibration holomorphe.

3. Groupes d'holonomie

Cette notion, essentielle aujourd'hui (cordes, variétés miroirs en physique mathématique, mais aussi en mathématiques « pures » : conjecture de Calabi, variétés hyperkählériennes, Kähler-quaternioniennes), créée par Elie Cartan dans (Cartan, 1925), resta très longtemps au purgatoire avant d'en être violemment sortie par (Borel & Lichnérowicz, 1952) : il y est montré le résultat ahurissant que le groupe d'holonomie d'une variété riemannienne, même locale (ouverte), est toujours un groupe de Lie compact. Rappelons que ce groupe est celui formé par le transport parallèle le long de tous les lacets issus d'un point. Il est surprenant qu'il soit compact pour des variétés qui sont des ouverts « si petits soient-ils ». L'espoir d'Elie Cartan était d'obtenir à l'aide de ce groupe une classification des variétés riemanniennes. On sait aujourd'hui que ce n'est pas le cas, hormis celui très spécial des espaces symétriques, sinon il ne reste que (hormis le groupe orthogonal total ou spécial et les dimensions exceptionnelles 7 et 8) : le cas kählérien, le cas kählérien à courbure de Ricci nulle, le cas kähler-quaternionien et le cas hyperkählérien. Ceci explique, joint à la conjecture de Calabi (prouvée par Thierry Aubin dans le cas négatif et Yau dans le cas général) l'importance des variétés spéciales citées juste ci-dessus. Nous avons mentionné plus haut comment Lichnérowicz réalisa le lien direct entre holonomie dans $U(n)$ et être kählérienne, plus le cas à courbure de Ricci nulle. Il ne manqua pas d'utiliser aussi les groupes d'holonomie de façon essentielle pour les résultats de la section suivante.

4. Le royaume des homogènes

Toujours mû par la question d'Elie Cartan sur les domaines bornés homogènes, les espaces homogènes ne cessèrent de le hanter. De toute façon, vus à la Klein, les géométries sont toutes homogènes. Le livre entier (Lichnérowicz, 1958) leur est consacré. Mais dès (Lichnérowicz, 1953) il classait presque complètement (dans le cas semi-simple) les espaces homogènes kählériens compacts, classification terminée dans (Borel, 1954) pour le cas semi-simple, voir le livre (Besse, 1987). Mais il ne s'arrêta pas là, (Lichnérowicz, 1990) termine complètement la question pour le cas des groupes kählériens.

On sait que les opérateurs différentiels invariants sont importants, dès (Lichnérowicz, 1965) il démontre qu'ils commutent sous la seule condition qu'il y ait un élément de volume invariant. Ces opérateurs ont été très étudiés plus tard, voir le livre (Helgason, 1984).

5. Eclairs

A. L'harmonie des spères

(Lichnérowicz, 1943) démontre que les espaces harmoniques de dimension 4 sont symétriques. Les espaces harmoniques sont les variétés riemanniennes pour lesquelles le laplacien admet une solution élémentaire ne dépendant que de la distance (ou plein d'autres conditions équivalentes, par exemple la valeur d'une fonction harmonique est égal à sa moyenne sur les boules, etc.) Sont connus pour être harmoniques tous les espaces symétriques de rang 1, c'est-à-dire ceux où le groupe d'isotropie est symétrique. On sait maintenant que l'harmonicité, jointe à la compacité, entraîne la symétrie. En revanche il y a des contre-exemples dans le cas non compact.

B. Bien avant les submersions riemaniennes

(Lichnérowicz, 1949) considère les fibrations d'un point de vue riemannien, bien avant leur mise en forme dans (O'Neill, 1966b), avec l'idée de voir ce que l'on peut faire avec des conditions sur les fibres via Hodge-de Rham. Il obtient ainsi des résultats topologiques lorsque les fibres sont des sous-variétés minima.

C. Harmoniques versus holomorphe

A plusieurs reprises Lichnérowicz, typiquement pour la « fibration » de Jacobi ci-dessus où il s'en servit de façon capitale, s'est intéressé aux relations entre applications holomorphes et applications harmoniques. En fait il fut l'un des premiers à réaliser l'importance des applications harmoniques, créées par Eells et Sampson en 1964. Par exemple (Lichnérowicz, 1970) est une étude fine de cette liaison et en particulier étend des résultats connus au cas presque-kählérien. On retrouve encore là son souci d'étendre le plus de choses possibles au cas symplectique.

Bibliographie

Berline, N., Getzler, E., & Vergne, M. (1992). *Heat kernels and Dirac operators*. Springer.

Besse, A. (1987). *Einstein manifolds*. Springer.

Bochner, S. (1946). Vector fields and Ricci curvature. Bulletin of Amer. math. Soc., 52, 776-797.

Borel, A. (1954). Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups. Proc. national Acad. Sc., 40, 1147-1151.

Borel, A., & Lichnérowicz, A. (1952). Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. C. R. Acad. Sc. Paris, 234, 1835-1837.

Bourguignon, J.-P. (1993). Eugenio Calabi and Kähler metrics. In P. de Bartolomeis, F. Tricerri, & E. Vesentini (Ed.), *Manifolds and geometry*, (pp. 61-85). Pisa : Cambridge University Press.

Cartan, E. (1925). Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. sc. Ecole norm. sup., 42, 17-88.

Helgason, S. (1984). *Groups and geometric analysis*. Academic press.

Hodge, W. (1941). *The theory and applications of harmonic integrals* (second edition 1952). Cambridge University Press.

Kähler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 9, 173-186.

Lawson, B., & Michelsohn, L. (1989). *Spin geometry*. Princeton University Press.

Lichnérowicz, A. (1943). Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques. Bull. soc. math. France, 72, 146-168.

Lichnérowicz, A. (1947). *Algèbre et analyse linéaires*. Masson.

Lichnérowicz, A. (1949). Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale. Commentarii math. helvetici.

Lichnérowicz, A. (1950). Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques. In International congress of math., (pp. 216-223). Harvard.

Lichnérowicz, A. (1953). Espaces homogènes kählériens. In C. R. Acad. Sc. Paris 237, 695-697

Lichnérowicz, A. (1958). *Géométrie des groupes de transformations*. Dunod.

Lichnérowicz, A. (1961). Propagateurs et commutateurs en relativité générale. Publications math. IHES, 10, 293-344.

Lichnérowicz, A. (1963). Spineurs harmoniques. C. R. Acad. Sc. Paris, 257, 7-9.

Lichnérowicz, A. (1965). Opérateurs différentiels invariants sur les espaces homogènes. Annales scientifiques E. N. S., 81, 341-385.

Lichnérowicz, A. (1969). Applications harmoniques à valeur dans un tore. C. R. Acad. Sc. Paris, 269, 912-916.

Lichnérowicz, A. (1970). Application harmoniques et variétés kählériennes. Symposia mathematica, 3, 341-402.

Lichnérowicz, A. (1971). Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemaniennes à courbure de Ricci généralisée non négative. J. of differential geometry, 6, 47-94.

Lichnérowicz, A. (1990). Groupes kählériens. C. R. Acad. Sc. Paris, 310, 671-676.

Meyer, D. (1971). Sur les variétés riemanniennes à opérateur de courbure positif. C. R. Acad. Sc. Paris, 272, 482-485.

O'Neill, B. (1966b). The fundamental equations of a submersion. Michigan math. journal, 13, 459-469.

Tricerri, F., & Vanhecke, L. (1986). Variétés riemanniennes dont le tenseur de courbure est celui d'un espace symétrique riemannien irréductible. C. R. Acad. Sc. Paris, 302, 233-235.

Weitzenböck, R. (1923). *Invariantentheorie*. Groningen : Noordhoff.

Lichnérowicz et la relativité générale

Yvonne CHOQUET–BRUHAT

Je n'étais encore qu'une lycéenne quand j'entendais mon père faire l'éloge d'un jeune mathématicien, André Lichnérowicz, qui alliait à ses dons mathématiques un sens profond de la physique et de remarquables qualités pédagogiques. Fils unique de brillants parents, un père littéraire secrétaire général de l'alliance française et une mère sévrienne mathématicienne, André Lichnérowicz était un homme d'une vaste culture, intéressé tout au long de sa vie par les problèmes les plus variés, scientifiques ou philosophiques et par leur impact sur le monde où nous vivons. Son esprit était brillant, clair, rapide et d'une activité inlassable. Grand intellectuel, Lichnérowicz était aussi très humain. Il avait un vif désir de communiquer ses idées et une sûre fidélité à ses amis. Lichnérowicz se considérait comme responsable de tous ceux qui avaient été ses élèves — et il en a eu beaucoup. Il leur portait un soutien indéfectible, particulièrement quand ils avaient des difficultés professionnelles ou privées. Lichnérowicz savait choisir pour chacun un sujet de thèse approprié à ses goûts et ses capacités, sujet qui lui permettrait de façon presque certaine, encouragé et aidé autant que necessaire, d'obtenir le diplôme recherché. Cette diversité de choix offerte par Lichnérowicz à ses élèves venait de la variété de ses propres intérêts. Je ne parlerai que des travaux de Lichnérowicz en relativité générale, d'autres plus compétents rapportent sur d'autres domaines.

La première et fondamentale, contribution de Lichnérowicz à la relativité générale a été d'y apporter dès 1939, dans sa thèse soutenue sous la direction de Georges Darmois, le point de vue de la géométrie différentelle globale : tout modèle relativiste est une variété différentiable munie d'une métrique de signature hyperbolique vérifiant sur cette variété les équations d'Einstein, avec ou sans sources. Il a explicité dans le cadre général approprié les conditions de raccordement données par G. Darmois dans des coordonnées particulières : ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une métrique soit une solution classique globale des équations d'Einstein avec second membre éventuellenent discontinu. La méthodologie de Lichnérowicz a été utilisée dans la construction de nombreux modèles et a pu être étendue sans réelle difficulté aux solutions faibles dont la conception s'est développée plus tard.

Le point de vue global adopté par Lichnérowicz lui a permis dès 1939 de démontrer dans toute sa généralité un résultat fondamental obtenu dans des cas particuliers par Einstein et Pauli et lui a valu l'admiration de ceux ci : Lichnérowicz a établi, grâce à sa maîtrise du calcul tensoriel deux identités fondamentales qui lui ont permis de montrer qu'il n'existe pas de soliton gravitationnel, c'est-à-dire de solution stationnaire non triviale (i.e, à courbure non nulle) des équations d'Einstein du vide sur une variété du type $S \times R$ où S est spatiale et soit asymptotiquement euclidienne soit compacte. Lichnérowicz a étendu ce résultat, avec son élève Y. Thiry, à la théorie unitaire pentadimensionnelle (groupe de jauge $U(1)$) dans le cas — comme il l'a souligné lui-même où le fibré en cercles est trivial. Quelques trente ans plus tard E. Witten a construit un contre-exemple dans le cas où ce fibré n'est pas trivial. Il a fallu attendre cette dernière décade pour montrer qu'il existe des solitons quand le groupe de jauge n'est pas abélien.

Les équations d'Einstein sont invariantes par difféomorphismes, comme pour les théories de jauge leur intégration se décompose en un problème d'évolution et un problème des contraintes, contrainte dite hamiltonienne et contrainte de moment, équations qui doivent être satisfaites par les données initiales. En 1944 Lichnérowicz a utilisé la relation entre les courbures scalaires de deux métriques conformes pour transformer la contrainte de moment en un système linéaire indépendant du facteur de conformité quand la variété initiale est une sous variété maximale de l'espace-temps et la contrainte hamiltonienne en une équation elliptique semi-linéaire pour le facteur de conformité : cette équation, appelée depuis équation de Lichnérowicz, joue toujours un rôle essentiel dans la résolution du problème des contraintes.

Par la suite jusque vers les années 70 et plus épisodiquement plus tard, Lichnérowicz s'est attaqué à la plupart des problèmes fondamentaux liés à la relativite générale. Il en a donné un traitement systématique, sans être rebuté par des calculs parfois très lourds. Il a publié des rédactions lucides et détaillées, incluant des contributions de ses élèves, qui ont souvent servi de base aux travaux ultérieurs. Lichnérowicz s'est intéressé tout au long de sa carrière à la représentation des sources matérielles en relativité. Il a été le premier a obtenir en 1940, en collaboration avec R. Marrot, une formulation mathématique cohérente de la théorie cinétique relativiste. Il a dès les années 50 trouvé les bonnes extensions de divers théorèmes généraux de la mécanique des fluides classique. Dans les années 70, à l'occasion de cours au Collège de France et aux États Unis, il a repris des travaux sur l'hydrodynamique et la magnétohydrodynamique relativiste, y incluant des considérations thermodynamiques dues à Taub et Pichon. Son étude originale des ondes de choc en magnétohydrodynamique représente un travail considérable. Comme beaucoup d'autres travaux de Lichnérowicz il aboutit après des calculs très complexes où d'autres se seraient perdus, à des conclusions claires, physiquement significatives.

Je citerai maintenant les travaux de Lichnérowicz sur la radiation gravitationnelle, les champs spinoriels, la quantification des champs sur un espace temps courbe, prélude à ses travaux ultérieurs sur la quantification liée à la théorie des déformations.

Dans un mémoire de plus de cent pages paru en 1960 Lichnérowicz donne une étude théorique complète d'abord de la radiation électromagnétique sur un espace temps courbe, puis de ce qu'il convient d'appeler radiation gravitationnelle, liée au tenseur de courbure, enfin du couplage de ces deux quantités. Cet article comme beaucoup d'autres du mêne auteur est resté une référence de base utilisée dans les développements ultérieurs sur le sujet.

Dans son article sur la radiation gravitationnelle Lichnérowicz se préoccupait déjà de quantification. Dans un autre important article publié en 1964 dans les annales de l'I.H.E.S. il introduit des propagateurs tensoriels qui généralisent à un espace temps courbe le propagateur de Jordan Pauli. Il les utilise à la construction du commutateur quantique sur un espace temps courbe d'abord du champ électromagnétique puis de la variation du champ gravitationnel. Ce travail est un grand classique et contient de nombreux résultats intermédiaires qui ont été utilisés à maintes reprises. Il introduit en particulier les équations dites d'ordre supérieur. Ces équations et le tenseur de Bel, étudié par Luis Bel dans sa thèse, sont fondamentaux pour les estimations a priori utilisées ces dernières années dans la recherche de solutions globales dans le temps. Les beaux travaux de Lichnérowicz sur la quantification des champs bosoniques sur un espace temps courbe l'ont naturellement conduit au problème de la quantification des champs spinoriels sur de tels espaces temps. Dans deux longs articles parus en 1964 et 1965 Lichnérowicz met sur pied de façon complète la théorie des spineurs sur une variété pseudo riemannienne. Il donne la définition intrinsèque des opérateurs d'usage courant en physique, conjugaison de charge et adjonction de Dirac. Les formules qu'il a établies ont été essentielles pour l'aboutissement des théories de supergravité. Les importantes contributions de Lichnérowicz à la géométrie riemannienne liées à la théorie des spineurs ont été signalées dans l'article de M. Berger. Le dernier article de Lichnérowicz, paru quelques semaines avant sa mort traitait de l'opérateur de Dirac sur une variété Kählerienne.

Lichnérowicz a fondé en 1957, avec l'américain J. A. Wheeler et le russe V. Fock, la société *Relativité g énérale et gravitation*. C'était à l'origine une sorte de club comportant un relativement petit nombre de membres qui se réunissait en un congrès tous les deux, puis tous les trois ans. Il régnait entre les relativistes une atmosphére conviviale et chaleureuse, comme toujours dans l'entourage de Lichnérowicz. Depuis ces lointains débuts les domaines physiques et mathématiques en interaction avec la relativité générale se sont multipliés et le nombre des relativistes a considérablement augmenté. Cependant les points de vue de géométrie différentielle globale introduits par Lichnérowicz sont adoptés par tous et son nom toujours cité avec admiration.

L'œuvre d'André Lichnérowicz en géométrie symplectique

Charles-Michel MARLE

En raison de ses liens étroits avec la mécanique et, plus généralement, la représentation mathématique de l'univers physique, la géométrie symplectique ne pouvait que susciter l'intérêt d'André Lichnérowicz, qui fut à la fois géomètre, mécanicien et physicien. Son œuvre dans ce domaine est vaste et importante ; je vais m'efforcer d'en présenter quelques aspects (ceux que je connais le mieux), sans prétendre à l'exhaustivité.

Les variétés de Poisson

Rappelons qu'une variété symplectique (W, F) est une variété différentiable W, de dimension paire $2n$, munie d'une 2-forme différentielle F fermée ($dF = 0$), partout de rang maximum, c'est-à-dire $2n$. L'application $\mu : TW \to T^*W$, $\mu(X) = -i(X)F$, est un isomorphisme de fibrés vectoriels qui se prolonge aux puissances extérieures, ce qui permet de considérer le champ de 2-tenseurs contravariants antisymétriques $\Lambda = \mu^{-1}(F)$. Pour alléger, nous dirons dans la suite simplement *tenseur* pour *champ de tenseurs contravariants antisymétriques*.

La condition de maximalité imposée au rang de F s'est très vite révélée trop contraignante pour nombre d'applications, notamment à la mécanique. Aussi de nombreux auteurs ont-ils considéré la notion de *variété présymplectique* (variété différentiable W munie d'une 2-forme différentielle F fermée, mais pas nécessairement de rang maximum). Malgré l'ingéniosité des chercheurs qui se sont intéressés à ces objets, les résultats ont été décevants et mal adaptés aux applications envisagées, sauf peut-être dans le cas très particulier où le rang de F est constant. André Lichnérowicz a été, à ma connaissance, le premier à voir clairement qu'une généralisation fructueuse des variétés symplectiques devait utiliser le tenseur contravariant Λ plutôt que la 2-forme F [15]. Il considère un couple (W, Λ), où W est une variété différentiable et Λ un 2-tenseur sur W. Le *crochet de Poisson* de deux fonctions u et $v \in N = C^\infty(W, \mathbf{R})$ est alors défini par $\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv)$, et le *champ de vecteurs hamiltonien* X_u associé à une fonction $u \in N$ est le champ tel que, pour tout $v \in N$, $i(X_{u)}dv = \{u, v\}$. A. Lichnérowicz montre alors que le crochet de Poisson des fonctions vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si le tenseur Λ vérifie la condition $[\Lambda, \Lambda] = 0$ (le crochet figurant dans cette expression étant le crochet de Schouten-Nijenhuis). Lorsque cette condition est vérifiée, l'espace N des fonctions différentiables sur W, avec le crochet de Poisson pour loi de composition, est une algèbre de Lie et l'application $u \mapsto X_u$ un homomorphisme d'algèbres de Lie. On dit alors que (W, Λ) est une *variété de Poisson*, dont Λ est le *tenseur de Poisson*. Ce dernier pemet de définir un morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ en posant $\langle \Lambda^\sharp \alpha, \beta \rangle = i(\Lambda)(\alpha \wedge \beta)$, où α et β sont deux éléments de la même fibre de T^*W. Ce morphisme se prolonge aux puissances extérieures. Bien entendu, une variété de Poisson (W, Λ) de dimension paire $2n$ dont le tenseur de Poisson est partout de rang $2n$ est une variété symplectique : le morphisme $\Lambda^\sharp$ est alors un isomorphisme et la 2-forme symplectique est $F = (\Lambda^\sharp)^{-1}(\Lambda)$.

Les variétés de Jacobi

Rappelons qu'une *forme de contact* sur une variété différentiable W de dimension impaire $2n+1$ est une 1-forme différentielle ω telle que $\omega \wedge (d\omega)^n$ soit une forme élément de volume. Avec A. Lichnérowicz, nous dirons alors que (W, ω) est une *variété pfaffienne*. Comme celle d'une variété symplectique, la structure d'une variété pfaffienne peut être définie au moyen d'objets contravariants, au lieu de l'être par un objet covariant (la 1-forme de contact ω) ; mais alors que, pour une variété symplectique, un seul objet contravariant (le tenseur Λ) suffisait, deux objets contravariants sont maintenant nécessaires (correspondant, *grosso modo*, à la 1-forme ω et à sa différentielle extérieure $d\omega$) : un champ de vecteurs E appelé *champ de Reeb* (car il a été considéré pour la première fois par G. Reeb [20]) et un 2-tenseur Λ. A. Lichnérowicz a prouvé que ces deux objets vérifiaient les identités

$$[E, \Lambda] = 0\,, \qquad [\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda\,, \tag{$*$}$$

le crochet figurant dans ces expressions étant le crochet de Schouten-Nijenhuis. Plus généralement, il considère une variété différentiable W munie d'un champ de vecteurs E et d'un 2-tenseur Λ. Il définit le *crochet de Jacobi* $\{u, v\}$ de deux fonctions différentiables u et $v \in N = C^\infty(W, \mathbf{R})$, et associe, à toute fonction différentiable $u \in N$, un champ de vecteurs X_u, dit *champ hamiltonien* associé à u, en posant

$$\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv) + \langle u\, dv - v\, du, E\rangle\,, \quad X_u = \Lambda^\sharp(du) + uE\,. \tag{$**$}$$

A. Lichnérowicz montre que le crochet de Jacobi vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si E et Λ vérifient les identités $(*)$. Lorsque c'est le cas, (W, Λ, E) est une *variété de Jacobi* [16] ; l'espace N des fonctions différentiables sur W, muni du crochet de Jacobi, est une algèbre de Lie et l'application $u \mapsto X_u$ un homomorphisme d'algèbres de Lie. Lorsque W est de dimension impaire $2n+1$ et que le tenseur $E \wedge \Lambda^n$ ne s'annule en aucun point, la variété W est en fait une variété pfaffienne, dont la 1-forme de contact ω peut être exprimée au moyen de E et de Λ. Par ailleurs, une variété de Jacobi dont le champ de Reeb est identiquement nul est une variété de Poisson. Les variétés de Jacobi généralisent donc à la fois les variétés symplectiques, les variétés pfaffiennes et les variétés de Poisson. L'introduction des *variétés conformes de Jacobi* permet à A. Lichnérowicz d'inclure également les variétés de contact (dont la structure est définie par la donnée d'un sous-fibré de rang 1 du fibré cotangent localement engendré, au voisinage de chaque point, par une 1-forme de contact) et les variétés localement conformément symplectiques.

Géométries de Poisson et de Jacobi

L'importance des variétés de Poisson a été rapidement reconnue, notamment par A. Weinstein qui en a étudié les propriétés locales [23]. Signalons aussi d'autres travaux qui ont permis une vision nouvelle des variétés de Jacobi. Une *algèbre de Lie locale* sur une variété différentiable W est un fibré vectoriel (V, π, W) de base W, dont l'espace des sections différentiables est muni d'une loi de composition $(s_1, s_2) \mapsto \{s_1, s_2\}$ qui en fait une algèbre de Lie, cette loi de composition étant locale (le support de $\{s_1, s_2\}$ est contenu dans l'intersection des supports de s_1 et de s_2). Cette notion, introduite par Shiga, a été étudiée par A. Kirillov dans le cas où la dimension des fibres de V est 1 [12]. Elle s'est révélée équivalente à celle de variété conforme de Jacobi. Lorsque $R = W \times \mathbf{R}$ et que $\pi : V \to W$ est la première projection, l'espace des sections différentiales du fibré $(W \times \mathbf{R}, \pi, W)$ s'identifie à l'espace $N = C^\infty(W, \mathbf{R})$ des fonctions différentiables sur W. La donnée d'une loi de composition sur cet espace équivaut à celle d'une loi de composition sur N. Lorsque cette loi est locale et satisfait l'identité de Jacobi, A. Kirillov a montré qu'il existe sur W un tenseur Λ et un champ de vecteurs E tels que, pour tout couple (u, v) de fonctions différentiables sur W, le crochet $\{u, v\}$ soit donné par la première formule $(**)$ ci-dessus. Bien entendu, puisque ce crochet vérifie l'identité de Jacobi, Λ et E vérifient les identités $(*)$. En d'autres termes, (W, Λ, E) est une variété de Jacobi.

Avec F. Guédira, A. Lichnérowicz a effectué une étude approfondie des algèbres de Lie locales et de leurs relations avec les variétés de Poisson [10] ; ils ont notamment montré que l'espace total V d'un fibré de Jacobi (V, π, W) dont les fibres sont de dimension 1 est canoniquement muni d'une structure de Poisson homogène, le crochet de Poisson de deux fonctions homogènes sur V correspondant au crochet des deux sections qui leur sont canoniquement associées.

Soit (W, Λ, E) une variété de Jacobi. Le champ de directions engendré par le champ de vecteurs E et par l'image du morphisme $\Lambda^\sharp$ est appelé *champ caractéristique*. Ce n'est en général pas un sous-fibré vectoriel de TW (son rang n'est pas nécessairement constant). Cependant, A. Kirillov a prouvé que ce champ de directions est, en un sens généralisé, complètement intégrable et définit un *feuilletage de Stefan* de W, c'est-à-dire une partition de W en sous-variétés immergées connexes maximales, appelées *feuilles*, dont l'espace tangent, en chaque point, est la valeur en ce point du champ caractéristique. Les feuilles ne sont pas nécessairement toutes de même dimension ; celles de dimension paire sont des variétés symplectiques et celles de dimension impaire des variétés pfaffiennes. Lorsque la variété de Jacobi considérée est en fait une variété de Poisson (W, Λ), les feuilles, toutes de dimension paire, sont appelées *feuilles symplectiques*. Ce résultat met en évidence le fait que les singularités du couple (Λ, E), c'est-à-dire les points au voisinage desquels le rang du champ caractéristique n'est pas constant, s'organisent en sous-variétés immergées et sont donc beaucoup plus simples que les singularités du rang et de la classe d'une forme de Pfaff ; de même, pour une variété de Poisson (W, Λ), les singularités du tenseur de Poisson Λ (c'est-à-dire les points au voisinage desquels le rang du morphisme $\Lambda^\sharp$ n'est pas constant) sont beaucoup plus sympathiques que les singularités des formes présymplectiques. C'est peut-être pour cette raison que les variétés de Poisson sont beaucoup mieux adaptées aux applications à la mécanique et à la physique que les variétés présymplectiques.

La cohomologie de Poisson-Lichnérowicz

Soit (W, Λ) une variété de Poisson. Dès sa première publication sur les variétés de Poisson [15], A. Lichnérowicz a remarqué que l'opérateur ∂_Λ, qui associe à tout p-tenseur P le $(p+1)$-tenseur $\partial_\Lambda P = [\Lambda, P]$ (ce crochet étant le crochet de Schouten-Nijenhuis) est de carré nul, donc permet de définir une cohomologie sur W (en utilisant comme p-cochaînes les p-tenseurs contravariants antisymétriques). Cette cohomologie, communément appelée *cohomologie de Poisson*, mais qu'il serait plus judicieux d'appeler *cohomologie de Poisson-Lichnérowicz*, est en général compliquée, car elle reflète certaines propriétés topologiques de la variété W et du feuilletage de Stefan formé par ses feuilles symplectiques. A. Lichnérowicz en a commencé l'étude, actuellement très activement poursuivie par de nombreux chercheurs (voir par exemple les ouvrages récents [4] et [21]). Il a notamment montré que le morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp : T^*W \to TW$, prolongé aux puissances extérieures, est tel que, pour toute p-forme différentielle η sur W, $\Lambda^\sharp(d\eta) = \partial_\Lambda(\Lambda^\sharp\eta)$. Par suite, $\Lambda^\sharp$ détermine un homomorphisme de la cohomologie de De Rham dans la cohomologie de Poisson-Lichnérowicz. Lorsque la variété de Poisson considérée est en fait une variété symplectique, cet homomorphisme est un isomorphisme.

Signalons encore une importante propriété des variétés de Poisson, bien que sa découverte (faite indépendamment par plusieurs auteurs, dont B. Fuchssteiner, F. Magri et C. Morosi, A. Weinstein, P. Dazord) ne soit pas attribuable à André Lichnérowicz : le fibré cotangent T^*W à une variété de Poisson (W, Λ) possède une structure d'algébroïde de Lie ayant pour ancre le morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp : T^*W \to TW$. Cela signifie qu'il existe, sur l'espace des sections différentiables de ce fibré (c'est-à-dire sur l'espace des 1-formes différentielles sur W), une loi de composition (notée $(\zeta, \eta) \mapsto [\zeta, \eta]$), qui en fait une algèbre de Lie, vérifiant, pour tout couple (ζ, η) de 1-formes différentielles et toute fonction différentiable f sur W,

$$\Lambda^\sharp[\zeta, \eta] = [\Lambda^\sharp\zeta, \Lambda^\sharp\eta], \quad [\zeta, f\eta] = \big(\mathcal{L}(\Lambda^\sharp\zeta)f\big)\eta + f[\zeta, \eta].$$

Le crochet de deux 1-formes exactes du et dv est lié au crochet de Poisson $\{u, v\}$ par la relation $[du, dv] = d\{u, v\}$.

J.-L. Koszul a prouvé que le crochet des 1-formes différentielles sur une variété de Poisson (W, Λ) se prolonge en une loi de composition sur l'espace vectoriel gradué des formes différentielles de tous degrés, faisant de cet espace une algèbre de Lie graduée [13]. Le morphisme $\Lambda^\sharp$, prolongé aux puissances extérieures, est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées (l'espace vectoriel gradué des tenseurs contravariants antisymétriques étant muni du crochet de Schouten-Nijenhuis pour loi de composition).

Certaines de ces propriétés ont depuis été étendues aux algébroïdes de Lie généraux, qui apparaissent étroitement liés aux variétés de Poisson. Ainsi par exemple, l'espace total du fibré dual d'un algébroïde de Lie possède une structure de Poisson homogène canonique. Ainsi, l'importance des variétés de Poisson se confirme !

Déformations de l'algèbre des fonctions sur une variété

Avec M. Flato (malheureusement décédé quelques semaines avant lui), D. Sternheimer, F. Bayen et C. Fronsdal, A. Lichnérowicz a appliqué la théorie des déformations de structures algébriques (initiée par M. Gerstenhaber [9]) aux structures d'algèbre associative et d'algèbre de Lie de l'espace des fonctions sur une variété symplectique (ou de contact) [1,2,7,8,17]. Indiquons brièvement le point de départ de ces travaux, en considérant, par exemple, l'espace $N = C^\infty(W, \mathbf{R})$ des fonctions sur une variété de Poisson (W, Λ). Soit $(u, v) \mapsto u *_\nu v$ une application bilinéaire de $N \times N$ dans l'espace $E(N, \nu)$ des séries formelles en un paramètre ν et à coefficients dans N, de la forme $u *_\nu v = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u, v)$. Les $C_r : N \times N \to N$ sont des applications bilinéaires appelées *cochaînes*. On dit que $(u, v) \mapsto u *_\nu v$ est une *déformation formelle* de la structure d'algèbre associative de N (en abrégé, un *$*_\nu$-produit*) si la propriété d'associativité $(u *_\nu v) *_\nu w = u *_\nu (v *_\nu w)$ est formellement vérifiée. Deux déformations formelles, notées $(u, v) \mapsto u *_\nu v$ et $(u, v) \mapsto u *'_\nu v$, sont dites *équivalentes* s'il existe un endomorphisme formel $T_\nu = \mathrm{id}_N + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$, où les T_s sont des endomorphismes linéaires de N, tel que l'on ait formellement $T_\nu(u *'_\nu v) = (T_\nu u) *_\nu (T_\nu v)$.

A. Lichnérowicz et ses collaborateurs ont immédiatement vu qu'il convenait de choisir $C_1(u, v) = \{u, v\}$, crochet de Poisson. Ils ont montré que lorsqu'on cherche à déterminer successivement les cochaînes C_r pour $r = 2, 3, \ldots$, on rencontre, à chaque ordre du développement en série formelle, une obstruction représentée par un élément du troisième espace d'une cohomologie (la *cohomologie de Hochschild*) dont les p-cochaînes sont les applications p-multilinéaires de N^p dans N. La nullité de cette classe est la condition nécessaire et suffisante pour que le développement en série formelle puisse être poussé à l'ordre immédiatement supérieur. De même, l'étude de l'équivalence de deux déformations de la structure d'algèbre associative de N fait apparaître, à chaque ordre, une obstruction représentée par un élément du deuxième espace de cohomologie de Hochschild.

De manière analogue, on peut définir et étudier les déformations formelles de la structure d'algèbre de Lie de N, le rôle précédemment joué par l'identité exprimant l'associativité étant joué par l'identité de Jacobi. Les obstructions sont alors des classes d'une autre cohomologie, la *cohomologie de Chevalley*, dont les p-cochaînes sont les applications p-multilinéaires alternées de N^p dans N. De toute déformation formelle de la structure d'algèbre associative de N on peut déduire, par antisymétrisation, une déformation formelle de sa structure d'algèbre de Lie.

A. Lichnérowicz et ses collaborateurs ont montré que les déformations formelles de l'algèbre associative N des fonctions différentiables sur une variété symplectique (ou de Poisson) offrent une *méthode de quantification* des systèmes hamiltoniens classiques, autre que la méthode basée sur la quantification géométrique de B. Kostant et J.-M. Souriau.

Depuis les travaux d'H. Weyl (1931) et J. Moyal (1949), on connaît un exemple de déformation non triviale de l'algèbre associative des fonctions différentiables sur $\mathbf{R}^{2n}$ muni de sa structure symplectique canonique, appelé *crochet de Moyal-Weyl*. De nombreux chercheurs ont étudié l'existence de déformations formelles des structures d'algèbre associative ou d'algèbre de Lie de l'espace des fonctions différentiables sur une variété symplectique (ou de Poisson) générale. Les premiers résultats sont dus à J. Vey pour la structure d'algèbre de Lie [22], O. Neroslavsky et A. Vlassov pour la structure associative [18], sous une hypothèse topologique (nullité du troisième nombre de Betti). Cette hypothèse a été levée d'abord par M. Cahen et S. Gutt dans le cas d'un fibré cotangent [3], puis par M. De Wilde et P. Lecomte dans le cas d'une variété symplectique quelconque [5]. Des preuves plus simple de ce théorème d'existence ont été données ensuite par plusieurs auteurs, notamment Karasev et Maslov [11], Omori, Maeda et Yoshioka [19], Fedosov [6]. Récemment, M. Kontsevich a obtenu, comme conséquence d'une conjecture (qu'il avait formulée en 1993 et prouvée en 1997), un résultat très profond : sur toute variété différentiable, il y a équivalence entre les classes de déformations formelles de l'algèbre associative des fonctions différentiables et les classes de déformations formelles de la structure de Poisson nulle [14].

En guise de conclusion

Faute de place, j'ai dû renoncer à présenter bien d'autres aspects de l'œuvre d'André Lichnérowicz en géométrie symplectique qui mériteraient une description détaillée : étude des algèbres de Lie associées aux variétés symplectiques, de contact, de Poisson, de Jacobi ; géométrie des transformations canoniques ; espaces homogènes de contact ; ...

J'ai eu le privilège d'être élève d'André Lichnérowicz, et j'ai la plus grande admiration tant pour ses qualités humaines que pour son œuvre scientifique. Lorsque, dans les années 60, je suivais ses cours au Collège de France, j'admirais son exceptionnelle virtuosité calculatoire et le parfait agencement des démonstrations difficiles, qu'il exposait toujours de manière complète. Avec plus de recul, je me rends compte que plus admirable encore est la profondeur de sa vue, qui lui a permis de dégager des concepts clefs des mathématiques d'aujourd'hui et de demain.

Références

1. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnérowicz and D. Sternheimer, Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics, *Letters in Math. Phys.*, 1977, **1**, 521–530.
2. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnérowicz and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, I : deformation of symplectic structures, and II : physical applications, *Annals of Physics*, 1978, **3**, 61–110 and 111-152.
3. M. Cahen and S. Gutt, Regular star-representations of Lie algebras, *Letters in Math. Phys.*, 1982, **6**, 395–404.
4. A. Cannas da Silva and A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley mathematics lecture notes Vol. 10, American Mathematical Society, 1999.

5. M. De Wilde and P. Lecomte, Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, *Letters in Math. Phys.*, 1983, **7**, 487–496.
6. B. Fedosov, A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Differential Geometry* (1994), **40**, 213–238.
7. M. Flato, A. Lichnérowicz and D. Sternheimer, Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications, *J. Math. Phys.*, 1976, **9**, 1754–1762.
8. M. Flato, A. Lichnérowicz et D. Sternheimer, Crochet de Moyal-Vey et quantification, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1976, **283**, A, 19–24.
9. M. Gerstenhaber, Deformation theory of algebraic structures, *Ann. of Math.*, 1964, **79**, 59–90.
10. F. Guédira et A. Lichnérowicz, Géométrie des algèbres de Lie de Kirillov, *J. Math pures et appl.*, 1984, **63**, 407–484.
11. M. Karasev and V. Maslov, *Nonlinear Poisson Brackets : geometry and quantization*, Translations of Mathematical Monographs 119, American Mathematical Society, Providence, 1993.
12. A. Kirillov, Local Lie algebras, *Russsian Math. Surveys*, 1976, **31**, 4, 55–75.
13. J.-L. Koszul, Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, dans *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, Astérisque hors série, Société Mathématique de France, 1985, 257–271.
14. M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, I, preprint (1997), q-alg/9709040.
15. A. Lichnérowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential geometry*, 1977, **12**, 253–300.
16. A. Lichnérowicz, Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées, *J. Math. pures et appl.*, 1978, **57**, 453–488.
17. A. Lichnérowicz, Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les $*_\nu$-produits), *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1982, **32**, 157–209.
18. O. M. Neroslavsky et A. T. Vlassov, Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1981, **292**, 71.
19. H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization, *Advances in Math.* (1991) **85**, 224–255.
20. G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, *Mém. Acad. Roy. Belgique, Sci.*, 1952, **27**, 130–194.
21. I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics vol. 118, Birkhäuser, Basel, 1994.
22. J. Vey, Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comment. Math. Helvetici*, 1975, **50**, 421–454.
23. A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential geometry*, 1983, **18**, 523–557.

À la mémoire de Kenkichi Iwasawa (1917–1998)

Roland GILLARD

Kenkichi Iwasawa est décédé d'une pneunomie aigüe le 26 octobre 1998 à l'âge de 81 ans. Il est né le 11 septembre 1917 et était le plus jeune des deux enfants du propriétaire d'une soierie à Kiryu-Shi (préfecture de Gumma). Il a fait ses études supérieures à l'université impériale de Tokyo. Il a épousé Aiko Kaneko, sœur cadette d'un camarade d'école, en 1941. Sa carrière mathématique débuta en avril 1940 par un poste d'assistant professeur à l'université impériale de Tokyo, il devint en avril 49 professeur associé à la même université mais visita l'Institute for Advanced Study de 1950 à 1952. Il devint ensuite assistant professeur puis professeur associé au Massachusettes Institute of Technology et enfin professeur dans cet institut en 1957. En 1967, il obtient un poste de professeur à l'université de Princeton jusqu'en 1986 où l'université lui confère l'Emeritat. Il rentre au Japon en 1987 et continue à assister au séminaire de théorie des nombres de Tokyo.[1]

Kenkichi Iwasawa

Pendant sa carrière, K. Iwasawa reçu le prix Asahi (1959), le prix Frank Nelson Cole (1962), le prix de l'Académie du Japon et le prix Fujiwara.

Ses contributions, déjà 62 articles et 5 livres répertoriés pour [2], ont marqué de façon importante deux domaines mathématiques : la théorie des groupes algébriques et des groupes de Lie d'une part et la théorie des nombres d'autre part. Un résumé beaucoup plus développé de son œuvre a été rédigé par Satake et Coates, cf [2], à l'occasion de son départ en retraite[2]. Etant moi-même arithméticien, je connais peu le premier volet des résultats d'Iwasawa. Je voudrais simplement mettre l'accent sur un théorème de décomposition des groupes de Lie semi-simples : la « décomposition d'Iwasawa », $G = KAN$, cf. [4] décompose un tel groupe de Lie en produit d'un sous-groupe compact maximal, K, d'un sous groupe de Cartan, A sous groupe de Lie correspondant à une sous algèbre de Lie commutative maximale $\mathfrak{h}$, et d'un groupe nilpotent N ; ainsi par exemple pour GL_n, K est le groupe orthogonal, A le sous-groupe des matrices

[1] je remercie K. Miyake et G. Fujisaki pour ces informations bibliographiques
[2] cf. aussi [11], ou sa traduction en anglais encore à paraître

diagonales et N le sous-goupe des matrices triangulaires supérieures avec une diagonale de 1. Cette décomposition permet de définir les ensembles de Siegel et ainsi d'obtenir des domaines fondamentaux.

Pour la partie théorie des nombres, on pourra consulter le texte de R. Greenberg, [3], d'une quarantaine de pages. Ce que l'on appelle en théorie des nombres « théorie d'Iwasawa » concerne les extensions galoisiennes de groupes de Galois $\mathbb{Z}_p$, pour p un nombre premier fixé (d'ailleurs appelé plutôt l au début) ; Iwasawa les appelait Γ-extensions. Le premier résultat marquant, cf. [5] concerne une évaluation du nombre de classes d'idéaux pour la sous-extension K_n de degré p^n, $n \in \mathbb{N}$, le n ième niveau, d'une $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞/K : la puissance de p dans ce nombre de classes est donnée pour n assez grand par une formule du type $\mu p^n + \lambda n + \nu$ avec des entiers λ, μ, ν ; λ et μ sont $\geqslant 0$. ceci s'obtient en l'interprétant au moyen de la limite projective X des p-parties, A_n, des groupes de classes des K_n. L'action du groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ sur ce groupe compact se traduit par une structure de module sur $\mathbb{Z}_p[[T]]$, après choix d'un générateur. On récupère A_n à partir de X en divisant par $((1+T)^n - 1)X$, à une erreur qui se stabilise près ; l'exemple fondamental (le cas cyclotomique) est celui où K_n est l'extension de $\mathbb{Q}$ obtenue par adjonction des racines p^{n+1} ièmes de 1, on a une $\mathbb{Z}_p$-extension sur le corps K_0 des racines p ièmes. J.-P. Serre a exposé ce résultat au séminaire Bourbaki, cf. [12].

Le deuxième résultat fondamental a été motivé par le cas monogène : dans l'exemple précédent si X, ou des facteurs pour la décomposition suivant l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$, est monogène le théorème de Stickelberger donne en fait sa structure : Iwasawa fait le lien entre ces éléments de Stickelberger et les fonctions L p-adiques que Kubota et Leopoldt venaient d'introduire. Sa théorie donne d'ailleurs le raffinement que ces fonctions, que l'on savait seulement être continues en $s \in \mathbb{Z}_p$, provenaient en fait de série entières $\sum a_n T^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ évaluées en $T = (1+p)^s - 1$, cf son livre [9]. Dans le cas cyclotomique, des calculs numériques ont montré assez tôt à Iwasawa que l'invariant μ était nul pour $p = 37, 59, 67$ et (les 3 nombres premiers irréguliers $\leqslant 100$), ceci l'a conduit à une conjecture qui a résisté une dizaine d'années avant d'être résolue par deux de ses élèves Ferrero et Washington, cf [13]. Le rapport entre les $\sum a_n T^n$ et les séries caractéristiques de X est l'objet de la conjecture « principale » énoncée dans [1] et qu'Iwasawa a dû aussi envisager. C'est devenu le théorème de Mazur et Wiles, redémontré après par Rubin après des travaux plus élémentaires de Thaine et Kolyvagin.

Pour finir ce bref résumé des contributions, je voudrais parler de [8] où K. Iwasawa fait le lien entre les séries $\sum a_n T^n$ précédentes et une limite projective d'un quotient U_n/C_n d'un groupe des unités du complété en p par son sous-groupe des unités cyclotomiques (engendré par des quotient de $1-\zeta$, avec ζ racine de 1). Cette théorie a été reprise par Coleman, Fontaine et Wintenberger (corps des normes) ainsi que dans la théorie des systèmes d'Euler de Kolyvagin.

Pour situer l'importance historique de la théorie d'Iwasawa, il suffit de dire qu'elle a relancé l'intérêt pour les travaux de Kummer, Herbrand,... et donc ouvert la voie à la solution du problème de Fermat par Wiles. Elle a été reprise par B. Mazur dans le cadre des variétés abéliennes et des groupes de Selmer, théorie qui a été développée par la suite par R. Greenberg et B. Perrin-Riou (sortie du cadre « ordinaire »). Plusieurs centaines d'articles ont développé la théorie d'Iwasawa, plus de deux cents contenant son nom dans le titre.

Références

[1] J. Coates . *p-adic L functions and Iwasawa Theory.* In A. Fröhlich, editor, *Algebraic Number Fields*, pages 269–353, Academic Press 1977.

[2] J. Coates et I. Satake. *Comments.* In J. Coates, R . Greenberg, B. Mazur et I. Satake, editors, *Algebraic Number Theory- In honor of K. Iwasawa*, pages xvii-xxiv, Academic Press 1989.

[3] R. Greenberg . *Iwasawa Theory - Past and present.* In K. Miyake, editor, *Class Field Theory Centennial Conference*, 43 pp., à paraître,

[4] K. Iwasawa. *On some type of topological groups. Ann. of Math.*, 50 ; 507-558, 1949.

[5] K. Iwasawa. *On some invariants of cyclotomic fields. Am. J. Math.*, 80 ; 773–783, 1958.

[6] K. Iwasawa. *On* Γ*-extensions of algebraic number fields. Bull. Amer. Math Soc.*, 65 ; 183–226, 1959.

[7] K. Iwasawa. *On the theory of cyclotomic fields. Ann. of Math.*, 70 ; 530–561, 1959.

[8] K. Iwasawa. *On some modules in the theory of cyclotomic fields. J. Math. Soc. Japan*, 16 ; 42–82, 1964.

[9] K. Iwasawa. *Lecture on p-adic L functions.* Ann. of math. Studies N^o 74, Princeton University press, 1972, 106 pp.

[10] K. Iwasawa. *On* $\mathbb{Z}_l$*-extensions of algebraic number fields. Ann. of Math.*, 98 ; 246-326, 1973.

[11] K. Iwasawa. *Two hours with Kenkichi Iwasawa. (Japanese). Sugaku* 45, N^o 4, 366-372 (1993). [ISSN 0039-470X] With list of publications.

[12] J.-P. Serre. *Classes des corps cyclotomiques.* Séminaire Bourbaki N^o 174, 1958, 11 pp.

[13] L. Washington. *Introduction to cyclotomic fields.* Springer-Verlag, 1982.

LIVRES

Introduction to H^p spaces, seconde édition
P. Koosis
Cambridge Tracts in mathematics 115, 1998

Cet ouvrage, écrit dans un style vivant, aussi clair qu'agréable, présente les bases de la théorie des espaces de Hardy de fonctions analytiques sur le disque, ainsi que de nombreuses interactions de cette théorie avec des domaines connexes. Les phénomènes de compensation qui jouent un rôle crucial dans l'étude des intégrales singulières (thème central de l'ouvrage) sont très soigneusement analysés et décrits. Les outils les plus classiques (factorisation, fonctions intérieures et extérieures, théorème de Beurling, transformation conforme et comportement au bord) sont présentés en détail et agrémentés de figures qui facilitent grandement la tâche du lecteur. Les propriétés de bornitude de la transformée de Hilbert et l'usage de la « fonction maximale » de Hardy et Littlewood ouvrent la voie vers la dualité entre l'espace H^1 et l'espace BMO des fonctions à oscillation moyenne bornée, établie par C. Fefferman et aujourd'hui classique, et vers la décomposition atomique de l'espace H^1. D'autres théorèmes importants sont démontrés : suites interpolantes de Carleson, caractérisation des mesures de Helson-Szego, théorème de la couronne. Enfin, une dizaine de problèmes (assez délicats) sont proposés au lecteur.

Les analystes auront plaisir à parcourir ce livre, et à l'utiliser comme ouvrage de référence sur les questions classiques, et délicates, liées aux estimations intégrales fines en théorie des fonctions anlytiques. Ceux d'entre eux qui se proposent de faire progresser la recherche dans cette direction y trouveront « ce qu'il faut savoir" avant de se lancer. Par exemple, le problème de la couronne, ouvert en plusieurs variables, est ici montré en detail dans le cas d'une variable. Mentionnons cependant que ce livre est la deuxième édition d'un ouvrage publié en 1980. L'auteur a naturellement procédé à diverses modifications, bien décrites dans la préface, destinées à améliorer la première édition. Mais il faut signaler que certains progrès récents et importants ne sont pas mentionnés dans la bibliographie. Citons par exemple les travaux de J. Bourgain et G. Pisier qui utilisent l'espace quotient L^1/H^1 en géométrie des espaces de Banach (voir [3]), les resultats de N. G. Makarov sur les mesures harmoniques et le comportement au bord des applications conformes ([2]), les travaux de N. J. Kalton sur les liens inattendus entre la distribution des fonctions de H^1 et l'interpolation entre espaces de Banach (commencés dans [1]), ou encore la theorie à présent très en vogue des « ondelettes". L'omission de ces résultats de pointe ne peut pas être reprochée à l'auteur, dont l'objectif etait de faire connaître et apprécier les resultats centraux de la théorie des espaces de Hardy, et qui a certainement atteint son but.

[1] N. J. Kalton : Non linear commutators in interpolation theory, Memoirs of the A.M.S. 385 (1988).

[2] N. G. Makarov : On the distrosion of boundary sets under conformal mappings, Proc. London Math. Soc. (3) 51 (1985) 2, 369-384.

[3] G. Pisier : Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces, C. B. M. S. regional conference series, vol. 60 (1986).

G. Godefroy, CNRS, Université de Paris 6

Continuaous Martingales and brownian motion (3e ed)
D. Revuz et M. Yor
Springer grundlehren der math. Wissenschaften 293, 1999

Daniel Revuz et Marc Yor sont deux probabilistes parisiens, mais *le* Revuz-Yor (nom commun, avec article) est un objet qui appartient au patrimoine mondial des probabilistes depuis 1991. La troisième édition vient de paraître ; je gage qu'il y en aura d'autres.

L'architecture de l'édifice est très classique : quatre composantes (le texte proprement dit, les exercices, les notes et commentaires qui closent chaque chapitre, et la bibliographie), auxquelles s'ajoutent trois index ; l'ensemble est à la fois très riche et extrêmement accueillant, et tout a manifestement été préparé pour vous y faire sentir très vite à l'aise, que vous soyez un visiteur occasionnel ou un habitué, un étudiant de troisième cycle ou un chercheur confirmé, un probabiliste ou un utilisateur de la théorie. Une bonne partie de l'immense érudition des auteurs est immédiatement à votre disposition ; il vous sera seulement demandé un minimum de culture probabiliste, le bagage d'une école d'ingénieurs ou d'un second cycle universitaire.

Les chapitres I à V, VII et les deux premières sections du chapitre IX sont la plateforme sur laquelle s'appuie toute la théorie des processus stochastiques continus ; ils constituent un élément indispensable de la formation à ce domaine, et un matériau analogue se retrouve dans les ouvrages voisins (*Brownian Motion and Martingales in Analysis,* par R. Durrett, *Diffusions, Markov Processes and Martingales : Itô Calculus,* par L. Rogers et D. Williams, *Brownian Motion and Stochastic Calculus,* par I. Karatzas et S. Shreve, ...). Le reste de l'ouvrage introduit des théories souvent utiles et des thèmes complémentaires (temps local, changement de probabilité, excursions, fonctionnelles additives, processus de Bessel, théorèmes limite). Le parti pris des auteurs de se restreindre au cadre des semimartingales continues (avec une petite exception pour les martingales de densités de changement de loi) s'explique probablement par le souci de maintenir une taille raisonnable.

Qu'est-ce qui fait de ce livre un instrument dont on ne peut bientôt plus se passer ? Le soin avec lequel chaque démonstration est choisie (d'autres pouvant faire l'objet d'exercices) puis ciselée ? La précision limpide des énoncés et la fluidité du raisonnement ? Les notes et commentaires, qui ne se contentent pas de compléments bibliographiques, mais esquissent aussi le paysage de la recherche, par des survols de questions ouvertes, abondamment documentés et actualisés à chaque édition ? Ou bien les exercices, compléments précieux et parfois véritables problèmes ? (Les notes renvoient à la bibliographie pour ceux d'entre eux qui sont plus qu'une simple application du texte ; certains portent des titres qui contribuent à faciliter la navigation dans l'ouvrage.) Ou encore la gigantesque bibliographie de quelque 720 entrées, constamment remise à jour (elle a grossi de moitié depuis la première édition), et qui justifierait à elle seule la parution, et les rééditions, de l'ouvrage ?

Chacun a sa réponse. Pour moi, c'est le sentiment que cette œuvre a une âme, l'impression de participer à l'intimité entre les auteurs et le mouvement brownien, et de ressentir un peu de leur enthousiasme.

M. Emery, CNRS, Strasbourg

Representations and cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras, II : Cohomology of groups and modules
D.J. Benson
Cambridge studies in adv. math., 1998

Il s'agit d'une réédition. Les deux volumes sont consacrés à la théorie des représentations, à la théorie de la cohomologie et à leurs interactions. La quantité de matière présentée en un peu plus de 500 pages est impressionante et traitée de manière très élégante.

Le premier volume se compose de six chapitres. Les trois premiers sont de nature introductive. Après une courte introduction aux anneaux et aux modules, l'auteur introduit l'homologie et la cohomologie (dont la composition de Yoneda), prouve le théorème de Künneth, définit et étudie Ext et Tor pour les complexes de chaînes ainsi que l'hyper(co)homologie. Le chapitre suivant développe l'étude des modules pour les algèbres de groupes, en particulier la théorie classique modulaire. Il considère le produit tensoriel et le cup-produit pour les algèbres de Hopf cocommutatives (le critère de Benson et Carlson est démontré pour les algèbres de Hopf qui possèdent un antipode). Du côté cohomologie, il étudie l'induction (incluant l'induction tensorielle), la restriction et le transfert, ainsi que la cohomologie relative. Il donne une preuve élégante du théorème de relèvement de Green et Maranda. Du côté représentations, il décrit la correspondance de Green et certains résultats de la théorie de Clifford. Le chapitre se clôt sur la description de Jenning et Quillen de l'algèbre de Lie p-restreinte associée à un p-groupe.

Le quatrième chapitre, point culminant du premier volume, fournit une introduction détaillée à la théorie de Auslander-Reiten des algèbres de dimension finie. Il s'ouvre sur une étude des algèbres héréditaires, des algèbres de chemins des carquois et des carquois des algèbres : si C est un *carquois* (*i.e.,* un graphe orienté) et k un corps commutatif, on définit l'*algèbre des chemins* kC de C comme l'algèbre sur k, dont le k-espace vectoriel sous-jacent possède une base constituée des *chemins* $\bullet \to \bullet \to \cdots \to \bullet$ dans C, et dont la multiplication est définie sur les éléments de la base par la composition des chemins dans l'ordre inverse si les chemins sont composables de cette manière et zéro sinon. Par exemple, à tout sommet x de C correspond un chemin de longueur nulle qui fournit un idempotent e_x. Une algèbre libre est une algèbre de chemins pour le carquois constitué d'un unique sommet. L'algèbre kC est de type fini si et seulement si C a un nombre fini de sommets et d'arêtes, et est de dimension finie si de plus il n'y a pas de cycle orienté. Une *représentation* d'un carquois C associe à tout sommet x de C un espace vectoriel V_x et à toute arête $\overset{x}{\bullet}\to\overset{y}{\bullet}$ une application linéaire $V_x \to V_y$ entre les espaces vectoriels correspondants. Les représentations de C sont naturellement en bijection avec les kC-modules. Une représentation de C étant fixée, on forme le kC-module d'espace vectoriel sous-jacent $V := \bigoplus_x V_x$ et d'action d'un élément de base $\overset{x_1}{\bullet}\to\cdots\to\overset{x_2}{\bullet}$ sur V donnée par la composition des applications

$$V \to V_{x_1} \to \cdots \to V_{x_2} \hookrightarrow V.$$

Ainsi, par exemple, l'action de l'idempotent e_x est donnée par la projection sur V_x. Réciproquement, étant donné un kC-module V, on définit une représentation de C en posant $V_x := e_x V$. Si c est un élément de base de kC correspondant à une arête $\overset{x}{\bullet}\to\overset{y}{\bullet}$ on a $e_y c = c = c e_x$, et c envoie V_x sur V_y. L'algèbre des chemins d'un carquois possédant un nombre fini de sommets est héréditaire. Le chapitre comprend aussi l'énoncé de la trichotomie des types (fini, modéré et sauvage) des représentations d'algèbres. L'auteur étudie les types de représentations des carquois et des algèbres, dont le théorème de Gabriel. On introduit les catégories de foncteurs ainsi que l'algèbre de Auslander. L'auteur présente la méthode des filtrations fonctorielles, qui est ensuite appliquée à la construction des modules indécomposables des groupes diédraux. On en vient alors aux suites d'Auslander-Reiten (pour les algèbres de dimension finie), aux morphismes irréductibles et à la preuve par Auslander du théorème de Rojter. La section suivante porte sur les diagrammes de Dynkin et euclidiens, les transformations de Coxeter, les groupes de Weyl, l'algèbre d'Auslander et les suites presque scindées, avec comme conséquences les résultats de Riedtmann et de Webb sur la structure des carquois d'Auslander-Reiten.

Le cinquième chapitre étudie les anneaux de représentations et les anneaux de Burnside, il comprend en particulier les congruences de Dress pour l'anneau de Burnside, la preuve de Tom Dieck de la caractérisation de Dress des groupes résolubles en termes d'idempotents dans l'anneau de Burnside. On y trouve aussi le résultat de Benson et Parker qui dit que la forme complexe de l'anneau de représentation d'un groupe est somme directe de l'image de l'induction et du noyau de la restriction, les théorèmes classiques d'induction d'Artin, Brauer, Colon et Dress de l'anneau de représentation d'un groupe et la description, due à Benson et Carlson et généralisant des résultats de Green et de O'Reilly, d'un assez grand quotient de celui-ci ne contenant aucun élément nilpotent non nul.

Le dernier chapitre du premier volume porte sur la théorie classique des blocs : il comprend les trois principaux théorèmes de Brauer (sous leur forme générale), la théorie de Clifford des blocs, la description, due à Brauer, Thompson, Green et Dade, des blocs à groupe de défaut cyclique (ainsi que la description de leur carquois d'Auslander-Reiten). La dernière partie fournit une esquisse de la description d'Erdman des blocs dont le groupe de défaut est un groupe de Klein.

Le premier chapitre du second volume passe rapidement en revue les points suivants : groupes d'homotopie, espaces de lacets, CW complexes, homologie cellulaire, fibrés, ensembles simpliciaux (dont la suite exacte de Milnor des inclusions d'ensemble simpliciaux). Dans le deuxième chapitre, l'homologie (et la cohomologie) des groupes topologiques est introduite via l'espace $K(G,1)$ d'Eilenberg et Mac Lane du groupe topologique G, qui est un

CW complexe de groupe fondamental G lui-même et dont les groupes d'homotopies de degrés supérieurs sont triviaux. Ce chapitre traite de la classification des G-fibrés principaux à bases paracompactes (il contient la construction de Milnor d'un G-fibré principal universel), développe la K-théorie des espaces compacts et introduit la théorie de la cohomologie généralisée, avec, en particulier, la définition des opérations d'Adams et leur application au calcul par Quillen de l'anneau de cohomologie des groupes généraux linéaires sur les corps finis, les énoncés (avec des références précises pour les démonstrations) du théorème de périodicité de Bott et du théorème de complétude d'Atiyah reliant l'anneau de Grothendieck des représentations complexes de dimension finie de G à la K-théorie de l'espace classifiant. Les classes de Chern et de Stiefel-Whitney sont introduites ainsi que le transfert d'un groupe topologique H à un groupe topologique G, considéré comme une application stable de la base du G-fibré principal universel de Milnor de H sur celle du G-fibré principal universel de Milnor de G, et la conjecture de Segal (prouvée par Carlson en 1984) qui dit essentiellement que les applications stables entre les espaces classifiants sont engendrés par les transferts et les homomorphismes de groupes.

Les suites spectrales sont l'objet du troisième chapitre : elles sont introduites via le calcul de la cohomologie des CW complexes filtrés et d'une fibration de Serre des CW complexes, puis sont étudiées en particulier la suite spectrale d'un couple exact, celle d'un complexe double, la suite spectrale de Lyndon, Hochschild et Serre d'une extension de groupes, la suite spectrale de Künneth, la suite spectrale d'Eilenberg et Moore associée à un diagramme de relèvements de fibrations de CW complexes et la suite spectrale d'Atiyah.

Le quatrième chapitre comprend la preuve due à Evens que, pour tout AG-module M de type fini sur un anneau noethérien A, le $H^*(G, A)$-module $H^*(G, M)$ est de type fini, les propriétés multiplicatives de la suite spectrale d'un couple exact obtenue à partir de l'homomorphisme de Bockstein, lesquelles relient cohomologies intégrale et modulaire, la démonstration d'un théorème de Serre sur l'annulation de certains produits d'opérateurs de Bockstein et la description des principales propriétés des opérations de Steenrod.

Le cinquième chapitre porte sur les variétés de modules. Il y est en particulier montré qu'un élément de $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M, M)$, où k est un corps de caractéristique p, est nilpotent si et seulement si sa restriction à tout p-sous-groupe abélien élémentaire est nilpotente (résultat dû à Quillen lorsque $M = k$ et à Carlson dans le cas général). La preuve est utilisée pour démontrer le théorème de Chouinard selon lequel un kG-module M est projectif si et seulement si sa restriction à tout p-sous-groupe abélien élémentaire est projective. On présente deux démonstrations (l'une utilisant des variétés, l'autre de l'hypercohomologie), d'une généralisation, due à Benson et Carlson, du théorème d'Eisenbud (un module indécomposable de complexité un est soit projectif soit périodique) aux modules de complexité arbitraire : un module de complexité c possède une résolution périodique à c-feuillets qui s'exprime comme un produit tensoriel de complexes périodiques. Les sections suivantes traitent du théorème de Benson, Carlson et Robinson (étant donné un groupe fini G, il existe un entier naturel n, qui dépend de G, tel que, pour tout anneau commutatif A et tout AG-module M la cohomologie de Tate de M est nulle dès qu'elle s'annule en n degrés consécutifs).

Le sixième chapitre concerne les complexes G-simpliciaux (*i.e.,* les complexes simpliciaux munis d'une action d'un groupe fini G tels que l'image d'un simplexe sous l'action d'unélément de G soit encore un simplexe, et tels que si un élément de G stabilise un simplexe, il le stabilise point par point), et plus particulièrement le complexe $\mathcal{S}_p(G)$ des p-sous-groupes non triviaux de G, le complexe $\mathcal{A}_p(G)$ des p-sous-groupes abéliens élémentaires non triviaux de G et celui $\mathcal{B}_p(G)$ des p-sous-groupes P de G tels que $P = \mathrm{O}_p\,(\mathrm{Norm}_G(P))$ (le plus grand p-sous-groupe distingué de $\mathrm{Norm}_G(P)$). On y démontre que les inclusions $\mathcal{A}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ et $\mathcal{B}_p(G) \hookrightarrow \mathcal{S}_p(G)$ sont toutes deux des équivalences G-homotopiques (résultats dûs respectivement à Quillen et Thévenaz, et à Bouc et Thévenaz) et que la caractéristique d'Euler de $\mathcal{S}_p(G)$ est congrue à un modulo la p-partie $|G|_p$ du cardinal de G (résultat dû à Brown). On y introduit le module de Steinberg généralisé à l'aide du module de Lefschetz réduit (*i.e.,* la somme alternée des groupes de chaînes) d'un complexe G-simplicial et l'on montre que c'est un module virtuel projectif (résultat dû à Quillen et Webb) qui, lorsque G est un groupe de Chevalley en caractéristique p, coïncide au signe près avec le module de Steinberg défini de manière classique via l'immeuble de Tits. La conjecture d'Alperin (les modules simples sont en nombre égal aux correspondants de Green simples), et sa reformulation due à Robinson et Webb en termes de l'invariant de Lefschetz de $\mathcal{S}_p(G)$, closent le chapitre.

Le septième et dernier chapitre est consacré à la théorie de Ronan et Smith des faisceaux sur les G-complexes simpliciaux. Il contient en particulier l'énoncé du théorème de Smith sur les modules simples des groupes de Chevalley en caractéristique p.

Chaque partie contient des exercices qui vont plus loin dans la théorie et sont en général faciles. Un très grand nombre de commentaires et de remarques font le lien entre les divers sujets, expliquent et résument les résultats et rappellent le développement historique. Les preuves sont élégantes et très souvent nouvelles.

A.-M. Aubert, ENS, Paris

Moduli of Curves
J. Harris et I. Morrison
Springer GTM 187, 1998

Ce livre présente quelques aspects de la théorie des modules des courbes algébriques *complexes* (bien que le cas de la caractéristique non nulle soit parfois évoqué).

Le lecteur familier avec les ouvrages du premier auteur retrouvera ici son style agréable et facile, et son approche très pédagogique, construite sur de nombreux exemples, des différents concepts et résultats. L'esprit diffère sensiblement de celui du livre « Geometry of Algebraic Curves, vol. I » de E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 267, Springer-Verlag, 1985) ; ce présent texte devait à l'origine être incorporé dans la deuxième partie de cet ouvrage, annoncée depuis la publication de la première, mais les différences de styles et de points de vue étaient telles que ce projet a été abandonné. Plutôt que de chercher à écrire un traité exhaustif, les auteurs ont préféré choisir et développer des points particuliers, ce qui leur permet d'une part de se diversifier davantage, d'autre part de pousser beaucoup plus loin certains développements jusqu'à aborder des problèmes très récents. On trouvera aussi de nombreux commentaires et références sur l'état actuel d'avancement des connaissances.

La plupart des démonstrations ne sont pas reproduites dans tous leurs détails, l'idée étant plutôt de donner envie au lecteur d'en savoir plus en se reportant soit à des ouvrages de référence existants, soit à des articles publiés. Comme l'annoncent clairement les auteurs dans l'introduction, « our preference has been to focus on examples and applications rather than on foundations ».

Si ce style a ses adeptes, il a aussi ses détracteurs. Il est vrai que l'abondance d'explications, de commentaires et d'interprétations nuit parfois à la clarté de l'exposition. Je trouve aussi très regrettable cette mode récente de transformer en exercices les points délicats ou fastidieux des démonstrations. Comme dans tous les livres, il y a des fautes, mais sans que cela devienne un problème (j'ai relevé plus bas quelques exemples).

En conclusion, ce n'est pas un livre que le spécialiste à la recherche d'une référence trouvera très pratique ni très complet. En revanche, le lecteur s'initiant au domaine sera surement passionné tant l'enthousiasme des auteurs est communicatif ; ce livre est plus un roman qu'un dictionnaire, et je l'ai lu avec plaisir.

Je vais maintenant passer rapidement en revue ce qu'on peut (et ce qu'on ne peut pas) trouver dans ce livre.

Le premier chapitre s'intitule « Parameter spaces : constructions and examples ». Après quelques pages de discussions sur la représentation des foncteurs, les espaces de modules fins et grossiers et leurs différences, illustrées par des exemples, la construction de Grothendieck des schémas de Hilbert est expliquée dans ses grandes lignes, et son espace tangent de Zariski est déterminé par un calcul explicite qui met bien en valeur l'importance de la platitude. L'exemple du schéma de Hilbert qui contient les cubiques rationnelles de $\mathbb{P}^3$ est traité en détail (en partie sous forme d'exercices), ainsi que les diverses pathologies que l'on rencontre. Quelques problèmes ouverts sont mentionnés, comme celui de caractériser les courbes rigides dans $\mathbb{P}^3$, ou de minorer la dimension des composantes du schéma de Hilbert des courbes. Un autre calcul d'espace tangent est donné pour la variété de Severi $V_{d,g}$ des courbes planes de degré d et genre g fixés.

Le second chapitre s'intitule « Basic facts about moduli spaces of curves », et passe en revue les diverses constructions de cet espace, ainsi que ses propriétés géométriques, topologiques et cohomologiques. Il est de nature essentiellement expositoire et aucune démonstration n'est donnée (certaines seront données plus tard). On commence de nouveau par des exemples explicites en genre ≤ 3 qui expliquent pourquoi il n'y a pas d'espace de modules fin, et comment on peut y remédier en ajoutant des points marqués ou des structures de niveau. Trois constructions de $\mathcal{M}_g$ sont expliquées (de façon brève et informelle, le but étant surtout de donner des références) : comme quotient de l'espace de Teichmüller, à partir de celle de l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées, et comme quotient en Théorie Géométrique des Invariants (c'est la construction qui sera expliquée en détail au chapitre quatre). Les sujets suivants sont abordés : dimension des sous-variétés complètes de $\mathcal{M}_g$ (théorème de Diaz), travaux de Harer sur la stabilité de la cohomologie de $\mathcal{M}_g$ et son calcul en petits degrés, conjecture de Faber sur la structure du sous-anneau de l'anneau de Chow $A^\bullet(\mathcal{M}_g)$ engendré par les classes « tautologiques » κ_i, problèmes analogues pour la courbe universelle et les schémas de Hilbert. Le chapitre se termine par une présentation des formules de Witten-Kontsevich sur les nombres d'intersections des classes canoniques de $A^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ et par une discussion rapide (quatre pages) des espaces de modules d'applications stables, des invariants de Gromov-Witten et de la cohomologie quantique.

Le chapitre trois, « Techniques », commence par une étude des propriétés élémentaires des courbes stables (parfois, mais pas de façon systématique, appelées ici « moduli stable », ce que je trouve troublant) : faisceau dualisant, théorème de Riemann-Roch, automorphismes. Les arguments suggérés sont de nature élémentaire, mais les démonstrations sont laissées en exercice. Suit une discussion tout aussi élémentaire de différents problèmes de déformation au premier ordre, où quelques exemples sont traités explicitement et certains très complètement (comme celui des déformations d'un morphisme $C \to \mathbb{P}^2$ avec conditions de tangence le long d'une droite, qui sera utilisé dans la suite pour la démonstration de l'irréductibilité des variétés de Severi $V_{d,g}$). On passe ensuite aux réductions stable et semi-stable, illustrées par quinze pages d'exemples simples mais instructifs, et dont la démonstration de l'existence n'est qu'esquissée. Dans un « interlude », les auteurs définissent de façon très détaillée et terre-à-terre (ce n'est pas un reproche) le « groupe des classes de diviseurs rationelles sur le champ » (il est dommage ici que la notation fluctue entre $\mathrm{Pic}_{\mathrm{fun}}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathrm{Pic}_{\mathrm{fun}}(\overline{\mathcal{M}}_g)$), en évitant toute référence aux champs algébriques (ce qu'on pourra regretter). Comme il est de règle dans cet ouvrage, on étudie ce groupe (et ses liens avec $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$) beaucoup plus sur des exemples que par la théorie abstraite. On passe ensuite au théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, avec comme application l'expression des classes de Chern du fibré de Hodge en fonctions des classes tautologiques κ_i sur $\mathcal{M}_g$ puis sur $\overline{\mathcal{M}}_g$, et à la formule de Porteous, avec comme application le calcul de la classe du lieu hyperelliptique dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_3) \otimes \mathbb{Q}$. Le chapitre se termine en expliquant par des exemples (pas de démonstration) comment la notion de « revêtement admissible » permet de compactifier le schéma de Hurwitz $\mathcal{H}_{d,g}$ des courbes de genre g munies d'un revêtement de degré d de $\mathbb{P}^1$.

Le chapitre quatre est consacré à la construction de $\overline{\mathcal{M}}_g$ par la Théorie Géométrique des Invariants. Fidèles à leur philosophie, les auteurs limitent leur ambition à un survol rapide de la théorie, que je trouve cependant trop approximatif. Il est presque indispensable d'avoir sous la main le livre [GIT] (« Geometric Invariant Theory », de J. Fogarty, F. Kirwan et D. Mumford, 3e éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), 34, Springer-Verlag, 1994) pour vérifier les énoncés. On parle par exemple de valeurs de polynômes homogènes en des points de l'espace projectif (p. 197) ; dans la démonstration du critère de Hilbert-Nagata, un point essentiel est escamoté (le fait que l'opérateur de Reynolds préserve tout idéal stable) ; un des points essentiels de la construction, la surjectivité de l'application quotient (ou, de façon équivalente, le fait que l'image d'un fermé invariant est fermée, c'est-à-dire la propriété de « quotient géométrique », dans la terminologie de [GIT]), a été oublié ; l'introduction au critère de Hilbert-Mumford est fausse (au bas de la page 200, « x non stable » est équivalent à « $\mu_\lambda(x) \geq 0$ ou $\mu_{-\lambda}(x) \geq 0$ », pas à la première de ces inégalités seulement).

On passe ensuite à la construction de Gieseker de $\overline{\mathcal{M}}_g$ (cet argument apparaît déjà dans le livre de Mumford, « Stability of projective varieties », l'Ens. Math. **23** (1977), 39–110). Pour une courbe *lisse,* il n'y a pas de problème : le point du schéma de Hilbert correspondant au plongement 5-canonique est stable pour l'action du groupe spécial linéaire. Pour les courbes singulières, on ne sait montrer que les implications suivantes : C courbe stable $\Rightarrow$ $[C]$ semi-stable $\Rightarrow$ C courbe « potentiellement stable », notion *ad hoc* intermédiaire entre stabilité et semi-stabilité. On a besoin pour conclure un argument de dégénérescence. Les démonstrations sont presque complètes, mais je ne trouve pas le cheminement des idées particulièrement clairement présenté (je pense par exemple à l'avant-dernier paragraphe de la page 220). Le chapitre se termine par quelques pages sur les progrès accomplis depuis ces travaux de Gieseker, principalement en ce qui concerne les variétés de dimension supérieure (travaux de Karu, Kollár, Viehweg).

Le chapitre cinq est consacré aux systèmes linéaires limites et à leur application aux problèmes de Brill-Noether (l'existence d'un g^r_d est équivalente à $\rho = g-(r+1)(g-d+r) \geq 0$) et Gieseker-Petri (lissité de G^r_d) pour une courbe générale. L'idée est de déduire des propriétés des systèmes linéaires sur une courbe lisse en étudiant leur limite sur une courbe singulière simple dont la jacobienne est compacte. Cette théorie, dont le principe est élémentaire, se prête bien au style du livre et à sa philosophie d'apprendre par l'exemple, et c'est à ma connaissance la première fois qu'elle apparaît dans un livre.

On trouve dans le sixième et dernier chapitre, « Geometry of moduli spaces : selected results », de nombreux exemples d'application des techniques présentées dans les chapitres précédents ; il est aussi très riche en problèmes ouverts. Les démonstrations sont rarement complètes, mais suffisament détaillées pour satisfaire la curiosité du lecteur. On trouve ainsi des (esquisses de) démonstrations de résultats déjà mentionés (irréductibilité de $\mathcal{M}_g$, théorème de Diaz, irréductibilité des variétés de Severi $V_{d,g}$), une étude détaillée du groupe de Picard du lieu hyperelliptique dans $\overline{\mathcal{M}}_g$, une discussion des diviseurs amples sur $\overline{\mathcal{M}}_g$ et le calcul des classes des lieux de Brill-Noether qui sont des diviseurs ($\rho = -1$), qui entraîne que $\overline{\mathcal{M}}_g$ est de type général pour $g \geq 24$. On termine par quelques spéculations passionnantes sur des applications arithmétiques de ce résultat : si on croit à la conjecture de Lang, presque toutes les courbes de genre $g \geq 24$ définies sur $\mathbb{Q}$ devraient correspondre à des points de $\overline{\mathcal{M}}_g$ contenus dans une sous-variété propre ; il est suggéré que cette sous-variété pourrait être contenue dans un lieu de Brill-Noether (avec $\rho < 0$) : après tout, on ne connaît aucune courbe définie sur $\mathbb{Q}$ qui vérifie l'équivalence du théorème de Brill-Noether !

O. Debarre, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Dynamical Systems and Semisimple Groups, an introduction
RENATO FERES
Cambridge Tracts in math, 126, Cambridge University Press, 1998

Comme son titre l'indique clairement, le livre [1] de Renato Feres se veut une introduction aux systèmes dynamiques, et plus précisemment à l'étude des actions sur les variétés de groupes tels que $SL(n,\mathbb{Z})$ ou $SL(n,\mathbb{R})$, pour $n \geqslant 3$.

Le programme de recherche dans lequel se place cet ouvrage, souvent appelé programme de Zimmer, est de comprendre ces actions, en particulier lorsqu'elles préservent des structures géométriques. On s'attend à ce que ces actions soient plus rigides, plus rares et plus classifiables que les actions de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ en raison de la structure si particulière de ces « gros » groupes. Un outil fondamental est alors la superrigidité de Margulis-Zimmer qui permet de comprendre les actions mesurables de ces groupes sur les fibrés principaux.

L'un des buts affichés du livre de R. Feres est de donner une preuve de ce résultat remarquable, ainsi qu'une extension dans le cadre continu ou lisse.

Cependant, comme nous allons le voir, il ne faut pas limiter cet ouvrage à ce seul but : il contient toute une série de résultats fondamentaux dans différents sujets, du théorème de Birkhoff au théorème de Rosenlicht en passant par la classification des représentations de $SL(2,\mathbb{C})$, avec des preuves modernes, efficaces et quelquefois inédites sous forme de livre. Les exercices permettent d'apporter toutes sortes de compléments, ce qui permet de couvrir de trés nombreux exemples de base des sytémes dynamiques : décalage, rotations irrationelles, difféomorphimes d'Anosov . . . Ce livre est vraiment une introduction à la théorie ergodique vue sous un angle géométrique.

Il me semble que *Dynamical Systems and Semisimple Groups* a toutes les qualités pour devenir un texte de référence, agréable, facilement consultable, et comparable en cela à la série des GTM. Je ne pense pas qu'il existe sur le sujet de textes aussi introductifs. Il n'est pas réellement possible de le comparer aux deux monuments du sujet : le traîté très complet de G. Margulis [3] et le livre de R. Zimmer [4].

Il a à la fois des ambitions moins grandes et un cadre plus large. Il part de connaissances plus élémentaires, et énonce des résultats de base dans de nombreux sujets sortant du cadre strict de la superrigidité. Par ailleurs, il adopte un point de vue et une problématique beaucoup plus proche de la géométrie différentielle (et symétriquement plus éloignés de la théorie ergodique) : les chapitres sur les structures géométriques et la superrigidité lisse n'ont pas d'équivalents dans ces deux textes ; inversement, il n'aborde pas l'arithméticité, effleure seulement la propriété T et se restreint au cas des groupes définis sur $\mathbb{R}$. En fait, le livre de R. Feres sert plus d'introduction à la lecture de Margulis et Zimmer qu'il ne les concurrence.

Les notions requises pour lire cet ouvrage ne dépassent pas en théorie celles du programme de Maîtrise. Ceci est littéralement vrai, mais une petite expérience en géométrie différentielle en facilitera grandement la lecture. Ainsi, si les définitions des fibrés principaux et des structures géométriques sont explicitement données, avoir pratiqué auparavant le fibré des repères et les métriques riemaniennes rendra ces objets moins opaques. Par contre, les chapitres de théorie des groupes de Lie, de géométrie algébrique ou de théorie de la mesure, peuvent s'aborder sans complexes.

Pour ne pas dépasser 250 pages, R. Feres a du faire quelques choix. Certains théorèmes fondamentaux, en particulier ceux de dynamique hyperbolique, sont seulement énoncés : leurs preuves alourdiraient considérablement le texte, et il existe bien souvent de bonnes références sur ces sujets. De même, pour faire un cours aussi rapide sur les groupes réductifs, un biais a été choisi : celui de les voir sous l'angle des groupes linéaires stables par involution de Cartan. Il s'agit à mon avis d'un péché véniel : il y a suffisamment d'excellents ouvrages sur les groupes semisimples pour s'y reporter en cas d'angoisse sur la généralité des hypothèses choisies. Les choix faits par R. Feres sont clairement explicites et ne paraissent pas vraiment contestables.

Les rédactions des démonstrations sont très fouillées (peut-être quelquefois trop ...) et des plus affutées en particulier en ce qui concerne Birkhoff, Moore et bien sûr la superrigidité de Margulis-Zimmer.

Je recommande la lecture de cet ouvrage qui me semble tout particulièrement destiné à des lecteurs, novices ou experts, intéressé par la géométrie différentielle et ses interactions avec la théorie ergodique et la théorie des groupes de Lie.

Examinons pour conclure, chapitre par chapitre, le contenu de *Dynamical Systems and Semisimple Groups, an introduction*.

1. Terminologie et constructions de bases pour les actions de groupes sur les espaces topologiques. Les difféomorphismes d'Anosov sont définis de même que sont énoncés les résultats sur la structure des variétés stables et instables.

2. Mesures invariantes, récurrence de Poincaré, entropie, désintégration des mesures (non démontrée ...) *etc.*

2. Théorie élémentaire des groupes de Lie : application exponentielle, sous-groupes fermés, homomorphismes continus *etc.* Vocabulaire des actions sur les variétés.

3. Introduisant rapidement à la géométrie algébrique à l'ancienne, insistant sur le caractère noethérien, il vise à démontrer le théorème de Rosenlicht donnant la structure des actions algébriques sur les variétés algébriques. Il énonce les résultats sur le radical unipotent des groupes linéaires algébriques.

4. Petite zoologie des groupes classiques.

Les quatres premiers chapitres ont été élémentaires. Avec les suivants on entre dans le vif du sujet.

5. Structures géométriques : définitions, réduction des structures. Structure géométrique invariante par un groupe : enveloppe de l'action d'un groupe.

6. Groupes semisimples : décomposition de Cartan et d'Iwasawa, rang réel, racines, groupes de Weyl. L'un des buts de ce chapitre est de démontrer que les groupes de rang plus grand que 2 sont engendrés par des centralisateurs.

7. Théorie ergodique : théorèmes de Moore, de Birkhoff. Introduction aux méthodes spectrales : moyennabilité et propriété T.

8 Théorème d'Osseledets.

9 Superrigidité de Zimmer-Margulis. R. Feres et moi-même, dans [2], avons mis au point la preuve exposée dans ce chapitre. Sensiblement différente des preuves classiques de [3] et [4] elle prétend être plus élémentaire et rapide. Elle repose tout de même fondamentalement sur la même stratégie.

Le livre se conclut par un appendice succint sur les réseaux : $SL(n,\mathbb{Z})$ est un réseau dans $SL(n,\mathbb{R})$; enfin construction de réseaux cocompacts de ce dernier groupe.

Références

[1] R. Feres
Dynamical systems and semisimple groups
Cambridge Tracts in Mathematics **126**, 250 p, 1998

[2] R. Feres ; F. Labourie
Topological Superrigity and Anosov actions of lattices
à paraître aux Annales de l'Ens (1997).

[3] G. Margulis
Discrete Subgroups of Semisimple Lie groups
Springer-Verlag, New York, 1991

[4] R. Zimmer
Ergodic Theory and Semisimple Groups
Monograph in Mathematics, Birkhaüser, Boston, 1984.

F. Labourie, Université Paris-Sud

Random Graphs
V. F. Kolchin
Encyclopedia of Mathematics, Cambridge, 1999

Ce livre est l'un des tous premiers à traiter systématiquement des propriétés probabilistes de structures fondamentales en mathématiques discrètes. Y sont couverts les arbres, les graphes, les matrices booléennes et les permutations. On part d'une description (exacte) de structures combinatoires par séries génératrices de dénombrement pour aboutir aux lois (asymptotiques et probabilistes) qui régissent les objets de grande grande taille. Le domaine peut être qualifié de « combinatoire probabiliste » et l'approche dans ce cadre est analytique plutôt que stochastique.

La démarche de Kolchin consiste à exploiter systématiquement la représentabilité de paramètres combinatoires par sommes de variables aléatoires. Elle s'inscrit dans un courant bien développé parmi l'École russe depuis les années 1960. Le livre de Kolchin fait d'ailleurs suite à deux ouvrages antérieurs de l'auteur qui sont devenus des classiques [3,4]. Il complète aussi agréablement deux livres de Sachkov parus sur des thèmes voisins dans cette même collection de l'*Encyclopedia of Mathematics and its Applications* ; voir notamment l'excellent traité [5] originellement publié en 1978 !

En ouverture, l'ouvrage présente de manière accessible les quelques notions nécessaires à l'ensemble : probabilités discrètes, fonctions caractéristiques, convergence en loi, propriétés centrales et locales limites (c-à-d, convergence des fonctions de repartitions ou approximation des densités), analyse asymptotique et méthode du col. Il est suivi de ce que l'École russe a baptisé « schéma général d'allocations ». Grosso modo, un grand nombre de classes combinatoires sont « décomposables » : une permutation se décompose en cycles, un graphe en ses composantes connexes, une forêt en ses arbres composants. Cette décomposabilité induit des relations simples entre les séries génératrices de dénombrement. Soit $\mathcal{C}$ une classe combinatoire (les « composants ») et C_n le nombre d'objets dans $\mathcal{C}$ de taille n. On introduit les séries génératrices exponentielles, $C(z) := \sum C_n z^n/n!$. Alors, le fait de former sur une classe primitive $\mathcal{C}$ des objets structurés plus complexes (des « composites »), tels des suites ou des ensembles, des k-suites ou des k-ensembles, se traduit en séries génératrices par

$$\frac{1}{1-C(z)}, \quad e^{C(z)}, \quad C(z)^k, \quad \frac{1}{k!}C(z)^k.$$

Cette démarche désormais classique en analyse combinatoire moderne a été joliment formalisée et développée par Foata et Schützenberger dans les années 1970. Il est clair dès lors qu'un grand nombre de propriétés, asymptotiques ou non, accompagnent de telles relations. C'est le but de Kolchin de montrer toute la finesse de l'usage qui peut en être fait dans le cas des structures fondamentales discrètes.

Pour analyser les objets composites de taille n formés sur des composantes de type $\mathcal{C}$, le procédé suivi par Kolchin consiste à introduire systématiquement des variables aléatoires définies par

$$\Pr\{\xi\} = \frac{1}{C(x)}\frac{C_m x^m}{m!}.$$

De fait certaines des caractéristiques principales d'objets composites s'expriment comme sommes de copies indépendantes de ξ. Il est intéressant d'observer que la fonction caractéristique de ξ n'est alors autre qu'une forme normalisée de de la série génératrice de dénombrement de C, soit $C(x+e^{it})/C(x)$. L'analyse de telles fonctions caractéristiques rejoint alors l'analyse directe des séries de dénombrement dans le plan complexe qui est la base du courant de « combinatoire analytique » : *Fourier rejoint ici Cauchy.* Naturellement les problèmes traités échappent largement au cadre classique du théorème de la limite centrale et les déformations de contours astucieuses se conjuguent avec la méthode du col.

Le chapitre 1 illustre la démarche d'ensemble par une discussion extensive des forêts d'arbres non enracinés. Les arbres sont des graphes connexes sans cycles, ici étiquetés, dont on sait depuis Cayley qu'ils sont dénombrés par n^{n-2}. Ils sont d'ailleurs reliés au produit d'un processus de branchement à la Galton-Watson dont la loi de reproduction est de Poisson. On trouvera dans ce chapitre des estimations précises du nombre de forêts de taille totale n comportant N arbres ainsi que de la distribution de la taille du plus grand arbre dans une forêt. Les expressions mettent en jeu la fonction de Gauss (e^{-x^2}) dans le cas simple ou la fonction d'Airy ($\mathrm{Ai}(z)$, l'une des solutions de $y''-zy=0$) dans les régions spéciales, ce selon les résultats d'analyses de col.

Le chapitre 2 discute le modèle célèbre de percolation sur le graphe complet introduit par Erdös et Rényi vers 1959. Le livre est alors conforme à son parti pris analytique, lequel fournit des estimations complémentaires fines à ce que fournit l'approche probabiliste classique illustrée par le traité encyclopédique de Bollobás [2]. Soit $\mathcal{G}_{n,T}$ le modèle de graphe aléatoire à n sommets et T arêtes. Alors, si T est suffisamment en deça de $n/2$, le graphe est « sous-critique » et il ne comporte que des arbres et des composantes connexes unicycliques. Lorsque n s'approche de $n/2$, la structure devient plus complexe, et les analyses préparées au chapitre précédent mettent en évidence des phénomènes de type Airy. Ces résultats se transposent pour l'essentiel au modèle où les arêtes sont choisies indépendamment avec probabilité p pour peu que $T \approx n^2p/2$. Ce chapitre par son orientation analytique peut alors servir d'excellente introduction au « giant paper on the giant component » de Janson, Knuth, Łuczak et Pittel (*Random Structures and Algorithms* 3 (1993), 233-358) dont l'exploitation reste sans doute encore très largement à faire.

Le chapitre 3 développe des travaux récents portant sur les systèmes d'équations linéaires sur un corps fini. On y trouve le comportement précis du rang d'une matrice aléatoire à coefficients dans GF(2), dans les cas dense, creux, carré, ou rectangulaire. La reconstructibilité de solutions de systèmes linéaires est aussi étudiée. Ces problèmes sont susceptibles d'intéresser certaines branches de la cryptographie moderne pour laquelle les fonctions booléennes, les corps finis, et leurs propriétés statistiques sont des objets de base. Les phénomènes de seuil mis en évidence rappellent aussi ceux que l'on constate souvent en algorithmique et complexité des problèmes NP-complets : la transition entre problèmes sous-contraints et problèmes sur-contraints y est une sorte de transition de phase brusque.

Les chapitres 4 et 5 enfin concluent par une discussion poussée des propriétés des permutations vis à vis de la décomposition en cycles. La loi du nombre de cycles est asymptotiquement gaussienne (résultat classique dû à Goncharov en 1942) et l'on obtient facilement divers résultats quantitatifs de grande déviations. Il est également possible d'imposer diverses contraintes portant sur le nombre ou la longueur des cycles. Dans ce dernier cas, les problèmes énumératifs se relient à l'analyse du nombre de solutions d'équations dans le groupe symétrique et l'analyse de col prévaut alors.

Le livre de Kolchin obéit bien à la charte de la collection telle que décrite par Rota (récemment disparu) : « *This series is devoted to significant topics [. . .] for which a detailed development of the abstract theory is less important than a thorough and concrete exploration of the implications and applications* ». Tout au plus pourra-t-on regretter que la consigne ait été parfois un peu trop bien respectée et que manque à l'occasion un peu de lyrisme et de perspective. Ce défaut, somme toute léger, est largement contrebalancé par les notes historiques et bibliographiques de fin de chapitre. Le niveau est homogène et les prérequis par ailleurs peu volumineux sont bien couverts en début d'ouvrage. Les estimations données peuvent paraître un peu techniques de prime abord mais elles sont précises et complètes.

On dispose ainsi d'un ouvrage solide et utile qui mérite clairement de figurer dans les bibliothèques de chercheurs intéressés aux propriétés asymptotiques et probabilsites des structures discrètes. Le livre de Kolchin peut alors avantageusement être complété par deux ouvrages récents de la même collection : celui de Sachkov déjà nommé [5], et celui de Bergeron, Labelle et Leroux pour une présentation élégante de la combinatoire énumérative moderne [1].

[1] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures.* Cambridge, 1998.

[2] B. Bollobás. *Random Graphs.* Academic Press, 1985.

[3] V. F. Kolchin. *Random Mappings.* Optimization Software Inc., 1986. (Traduit de *Slučajnye Otobraženija*, Nauka, Moscow, 1984.)

[4] V. F. Kolchin, B. A. Sevastyanov, and V. P. Chistyakov. *Random Allocations.* Wiley, 1978. (Traduit de *Slučajnye Razmeščeniya*, Nauka, 1976.)

[5] V. N. Sachkov. *Probabilistic methods in combinatorial analysis.* Cambridge 1997. (Adapté de *Verojatnostnye Metody v Kombinatornom Analize*, Nauka, 1978.)

P. Flajolet, INRIA Rocquencourt

Six lectures on commutative algebra
J. Elias, J.M. Giral, R.M. Miró-Roig, S. Zarzuela, éditeurs
Progress in Math 166, Birkhäuser, 1998

Ce livre est la reproduction de 6 séries de cours d'algèbre commutative ayant eu lieu en Catalogne durant l'été 96. Le but en est évidemment de faire un état du sujet et de ses perspectives alors que les méthodes numériques (en particulier le programme Macaulay) ont grandement contribué, depuis 20 ans, à changer les orientations et les présentations combinatoires.

Les avancées ainsi permises sont particulièrement présentes dans le cour de M. L. Green : un anneau de polynômes peut être aisément gradué de tel sorte que chaque espace de la graduation soit de dimension 1. A tout idéal homogène, on associe alors un idéal gradué. Pour étudier l'idéal gradué ainsi associé, l'idée est de le « déplacer » à l'aide d'un élément du groupe linéaire de façon à ce qu'il devienne stable sous l'action du groupe des matrices triangulaires supérieures. Ceci est possible grâce à un théorème de Galligo et même grandement indépendant des choix. On a ainsi construit à partir de l'idéal de départ, un idéal intial générique et l'objet du cours de M. Green est d'étudier les conséquences d'une telle construction, en particulier à l'aide de résolutions universelles libres de ces idéaux dont la combinatoire se prête aux méthodes numériques. La fin de son cours est consacré à diverses généralisations quand l'algèbre de polynôme est remplacé par une algèbre extérieure ce qui est lié à l'homologie simpliciale des complexes à nombre fini de sommets.

Le cours d'Avramov se situe au delà du champ d'application des ordinateurs en étudiant les algèbres à résolution libre non finie. La structure la plus riche que l'on puisse mettre sur une telle résolution est celle d'une algèbre différentielle graduée à la Cartan-Eilenberg. Avramov explique cela en donnant des résultats assez complet pour les anneaux locaux de

Golod (anneaux se situant à l'opposé des anneaux d'intersection complète ; la résolution libre de leur corps résiduel à une « croissance » maximale).

Le cours d'Hunecke est entièrement consacré à ses travaux communs avec Hochster sur la complétion suivante des idéaux, appelé « tight closure » : à l'idéal I on associe I^* défini par :

$$I^* := \{x \mid \exists c \quad cx^k \in I^k, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Le cours de Schenzel est de facture classique : il s'agit des applications de la cohomologie locale (sans avoir peur des suites spectrales) à l'étude des variétés projectives. Les résolutions libres et les fonctions de Hilbert associées à l'anneau des coordonnées des variètés projectives sont aussi l'objet du cours de Valla ; ce cours est fortement influencé par les travaux de Stanley. Il s'agit de comprendre quelles contraintes sont imposées aux polynômes de Hilbert d'une algèbre graduée par des propriétés de l'algèbre comme d'être de Cohen-Macaulay - ce cas est connu par un théorème de Macaulay réinterprété par Stanley - ou d'être intègre - ce cas est ouvert.

Les fonctions de Hilbert permettent de définir naturellement la notion de multiplicité d'un module ; le cours de Vasconcelos est consacré à des généralisations de cette mesure numérique des modules. Ces généralisations font intervenir la cohomologie et ont pour perspective de donner des renseignements sur les générateurs (minimaux nécessaire) d'une algèbre graduée en tant que module de type fini sur une de ses sous-algèbres qui est une algèbre de polynôme.

Comme on le voit, ce livre est un peu différent d'un compte-rendu d'école d'été classique puisque chaque auteur présente (en termes simples) des travaux récents qui sont en général au cœur de leurs recherches actuelles. Il est ainsi fait une présentation attrayante et dynamique de l'algèbre commutative actuelle.

C. Mœglin, CNRS, Université de Paris 7

Characters of finite groups, Part 1.
Y. G. Berkovich, E. M. Zhmud'
Trans. of Math. Mono. 172, publications de l'AMS, 1998

Le fil conducteur de ce livre est la théorie classique des caractères avec une présentation précise de l'œuvre des pères fondateurs de cette théorie. Mais l'originalité du livre tient en ce que les auteurs ajoutent de nombreux corollaires concernant des propriétés fines des groupes finis (non réductifs) et ceci dès le 2e chapitre. Par exemple, on trouve dans ce livre une description complète des groupes ayant beaucoup d'involutions. L'apport des auteurs est particulièrement sensible quand il s'agit de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe admette une représentation fidèle de longueur au plus k, où k est un entier arbitraire. Cette condition est liée au nombre de sous-groupes engendrés par des éléments pris dans au plus k classes de conjugaison.

Ce livre s'adresse donc avant tout aux chercheurs ayant besoin de propriétés fines des groupes finis ; il ne remplace en aucun cas un livre de base comme celui de J.- P. Serre. L'avantage de ce livre est qu'il est bien construit, que l'introduction est exhaustive et l'index des notations particulièrement bien fait, permettant sans problème une lecture non linéaire. La partie 2, quand à elle, donne de nombreuses classification de groupes dont les caractères vérifient certaines propriétés.

Ce livre est la traduction d'un manuscript (non publié) écrit en Russe datant de 1990.

C. M.

Éléments de géométrie, actions de groupes
Rached Mneimné
Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, 1997

Livre — Le livre de Rached Mneimné que Cassini nous propose depuis 1997 devrait remplir de bonheur bien des lecteurs. Sous un titre anodin (ou sybillin, comme on voudra), c'est d'un traité d'algèbre linéaire qu'il s'agit.

Je précise. Il s'agit d'une synthèse originale (et que je trouve très réussie) entre les « basses » mathématiques, celles qu'on enseigne en DEUG et les « hautes », celles qu'on utilise pour démontrer ses propres théorèmes.

J'ai parlé de traité, mais il s'agit *vraiment* d'un livre. Ce n'est pas la suite convenue « définition-théorème-démonstration » dont nous avons hélas tant l'habitude, mais bien un texte écrit, discursif, voire digressif, constitué d'une foule d'exemples et de liens entre ces exemples, exemples

– d'opérations de groupes, on s'en doute — si j'ai bien compris, l'algèbre linéaire, c'est l'opération du groupe linéaire[1] sur les matrices, il y a donc un chapitre assez avancé sur les classes de similitude,
– de foules de « petits » groupes (ils opèrent partout)
– de toutes sortes de matrices 2×2 avec par exemple
  – dans le groupe symétrique ou ailleurs, $GL(2, \mathbb{F}_q)$ et ses potes $SL(2, \mathbb{F}_q)$ et $PSL(2, \mathbb{F}_q)$
  – le birapport et $PSL(2, \mathbb{R})$, $PSL(2, \mathbb{C})$
  – les classes de similitude dans les matrices 2×2 réelles et les quadriques affines.

La « note » (dans ce livre, les chapitres s'appellent des notes) sur le birapport est remarquable. Je ne pense pas que les lectrices et lecteurs s'initieront au birapport en la lisant, une familiarité — et peut-être même un peu plus — avec le sujet est nécessaire. Par contre, la lecture de ce chapitre leur permettra de faire le lien entre le birapport et différents classiques de la géométrie plane (le théorème de Pascal, le groupe circulaire), ce qui, certes n'est pas très original comme je le présente mais l'est assez comme Mneimné le présente dans le livre.

Mon goût personnel m'aurait poussée vers un peu plus d'applications à la géométrie euclidienne (la plupart des problèmes d'angles et de cocyclicité sont justiciables d'un traitement par le birapport[2] qui leur ôte une partie de l'ennui qu'ils semblent porter en eux).

Il est clair que le goût de Mneimné le pousse plutôt vers la géométrie algébrique et surtout les groupes algébriques. Qui s'en plaindrait ? Toutes les manipulations faites aveuglément sur les matrices sont des opérations *algébriques* et si ceci a aussi des conséquences sur la topologie et la géométrie des ensembles de matrices, disons-le !

À qui s'adresse ce livre ? — À nous, d'abord. J'ai appris beaucoup en le lisant, en l'ouvrant au hasard ou en en utilisant l'index de façon systématique pour explorer de façon transversale[3] une notion élémentaire (je vous conseille d'essayer avec le « rang »).

À nos étudiants un peu avancés ou un peu curieux, ensuite. Je l'ai d'ailleurs découvert, quelques mois après sa parution grâce à un agrégatif (d'ailleurs agrégé depuis) qui me l'avait signalé comme « plein de trucs utiles pour nous ». Depuis, j'essaie de convaincre ses successeurs que c'est *le* livre d'algèbre linéaire dont ils ont besoin. Il est clair que l'organisation synthétique du matériau dans ce livre est particulièrement adaptée à ces étudiants. L'auteur est, on le sait[4], un vieux routier de la préparation à l'agrégation, il ne s'en cache d'ailleurs pas. Oui, c'est un livre que les agrégatifs devraient utiliser, même si, ou parce que, le chapitre sur les classes de similitude est bien ambitieux.

L'éditeur — Je ne résiste pas à une remarque[5] sur *Cassini*. Il ne me semble pas qu'un machin bachotant étiqueté « Préparation à l'agrégation » puisse être d'une quelconque utilité à un futur enseignant, même si celui-ci prépare un concours. Ce dont ces étudiants ont besoin, c'est d'ouvrages de mathématiques, qui les aident à enrichir, organiser et synthétiser leurs connaissances.

---

[1] Hélas, nos étudiants arrêtent d'étudier l'algèbre linéaire après avoir aveuglément jordanisé des matrices en deuxième année de DEUG… juste avant qu'on veuille bien leur dire ce qu'est une opération de groupe, dans un contexte disjoint.

[2] Voir par exemple le théorème des six birapports de Perrin et ses applications, qu'on ne trouve que dans les meilleurs livres de géométrie.

[3] Ce langage technocratique, pour me donner l'occasion de signaler que je suis en désaccord avec la définition de la transversalité que donne Mneimné à la page 59.

[4] On sait qu'il est déjà l'auteur d'un grand classique, « le » Mneimné-Testard [1].

[5] « remarque [...] que nous introduisons ici parce qu'elle est irrésistible », comme dit Saramago.

Le livre de Mneimné est cela, je l'ai dit. J'ai le plaisir d'ajouter que, chez *Cassini*, c'est presque une règle. En plus, les livres y sont bien relus, la typographie est très agréable et soignée... j'ai eu bien du mal à trouver une faute[6] dans le Mneimné.

Alors préférez les ovales aux ellipses, oubliez Marine Porto, ses « l'épreuve de jardinage à l'oral de l'agrégation » et ses con-frères et précipitez-vous chez Cassini. En plus du livre de Mneimné (dont il nous annonce trois petits frères !) et dans un catalogue général déjà impressionnant, il vient de publier un petit bijou, le petit guide de calcul différentiel (de Rouvière) [2] dont je rêvais depuis longtemps.

Références

[1] R. Mneimné et F. Testard – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Méthodes, Hermann, 1986.

[2] F. Rouviere – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 1999.

M. Audin, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

Les plus belles formules mathématiques
LIONEL SALEM, FRÉDÉRIC TESTARD ET CORALIE SALEM
Le sel et le fer, Cassini, 1998

Cassini vient aussi de rééditer ce livre plublié en 1990 par Interédition. Parmi les auteurs l'un est chimiste, l'autre mathématicien et la troisième déssinatrice. Le résultat est un livre beau à regarder et surprenant à lire : il s'agit de 49 « formules » mathématiques dont certaines sont très simples ($(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$) d'autres plus subtiles (*tout nombre entier est somme de 4 carrés, théorème du à Lagrange*) présentées et très généralement démontrées sur les pages de gauche. La page de droite est un dessin (en général) expliquant la démonstration. Les démonstrations présentées sont élégantes, en principe compréhensible par tout un chacun. Voilà un livre grand public qui utilise l'aspect ludique des mathématiques pour éviter toute problématique sur leur abstraction.

C. M.

Dites un chiffre
MALCOLM E. LINES
Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, 1999

Ce livre est lui aussi un livre grand public de mathématiques écrit par un non mathématicien ; l'auteur est physicien. Lui aussi semble être un enthousiaste des mathématiques et part du principe que cet enthousiasme doit pouvoir se transmettre à quiconque, par exemple un historien spécialiste du moyen-âge. De fait, les sujets traités dans ce livre sont des sujets à la mode : la cryptographie, le chaos, les problèmes NP (comment trouver un algorithme pour répartir au mieux des objets dans 3 malles), les fractales (ou comment calculer la longueur d'une côte rocheuse) ... ces sujets sont bien choisis, maintenant le lecteur en alerte. Toutefois les méthodes mathématiques sont complètement inexistantes dans ce livre. C'est une présentation, réussie, de certains champs d'application des mathématiques mais, me semble-t-il pas une invitation à faire des mathématiques ni même à chercher à voir comment elles fonctionnent pour pouvoir les utiliser au mieux.

C. M.

[6] Mais j'y suis arrivée, l'auteur peut me contacter.

Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. (Textes rassemblés et préparés par Bernard Blochs, Jean-Claude Régnier)
Georges Glaeser
La pensée Sauvage, éditions,Grenoble 1999

Cet ouvrage est construit à partir de cours de D.E.A. de didactique des mathématiques donnés à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg de 1975 à 1988 ; ces cours représentaient 800 pages dont certaines déjà publiées comme brochures de l'A.P.M.E.P.(76, Analyse et synthèse ; 96 fondements de l'évaluation). Il a donc fallu les transformer pour rendre l'ouvrage plus accessible. Ce corpus de base est complété par cinq textes écrits par des amis de Georges Glaeser, vieux routiers de la didactique.

Dans le premier, François Pluvinage retrace les grandes étapes de la vie de Georges Glaeser, son rôle moteur dans le développement de l'IREM, du D.E.A., du rallye d' Alsace, de la collection « le livre du problème », et son action de précurseur pour baser la didactique sur des expérimentations soigneusement contrôlées.

Après une introduction où il décrit son propre apprentissage et la part prise par son équipe dans l'organisation de la communauté des chercheurs en didactique, Georges Glaeser consacre le premier chapitre à la mathématique et son enseignement. Il y brosse à grands traits mais avec fougue le projet mathématique puis combat sans faiblesse quelques mythes : assimiler la mathématique à un savoir constitué, déroulé linéairement et figé depuis des siècles, la présenter comme une prison réglée par des interdits et ne laissant aucune place à l'imagination ; il analyse alors l'échec en maths puis dénonce la bureaucratie et la lourdeur administrative.

Le second chapitre, consacré aux racines historiques de la didactique des maths, montre sur des exemples élémentaires comment a profondément évolué, par son public et ses méthodes, l'enseignement destiné aux enfants et adolescents ainsi que la formation des maîtres sans oublier la pédagogie mondaine à la Clairaut et les leçons particulières. Abordant la période contemporaine, il condamne trois hérésies : la pédagogie sans élèves, celle des opinions et celle du ministère puis rend un vibrant hommage aux innovateurs de la pédagogie heuristique : Wagenschein, Polya et Blutel.

Le troisième (Une théorie des situations didactiques, processus de courte durée) rentre dans le vif du sujet. Après avoir précisé ce qu'est pour lui l'éducation mathématique, l'auteur décrit à l'aide d'exemples ce que sont une situation didactique, la transmission éducative, un contrat et une variable didactiques, présente les trois versants de la compréhension (psychologique, scientifique et de la communication) et privilégie finalement l'heuristique conçue comme une étude des phénomènes de la compréhension.

Le quatrième (Une conception génétique, processus de longue durée) explore et critique le modèle piagétien.

Le cinquième (Epistémologie et didactique), après avoir rejeté une vision artificielle de l'histoire, attribuant la mathématique « à un nombre infime d'individu (sic) incommodés par les bourdonnements d'un essaim de caisses de résonance », développe le concept d'obstacle épistémologique introduit par Bachelard et tente une classification. Il se termine par une réflexion sur les contre-exemples et leur caractère plus ou moins monstrueux.

En conclusion « une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques veut être un encouragement à poursuivre de nouvelles investigations dans un champ de recherche plus étendu. »

Pour terminer, Guy Brousseau compare dans un « manifeste pour la didactique des mathématiques » le travail des équipes de Strasbourg et de Bordeaux puis présente rapidement l'état actuel des recherches françaises, Gérard Vergnaud donne le point de vue d'un psychologue, Guy Noël s'interroge sur le concept de problème et trois collègues de l'I.P.N. de Mexico rappellent ce que leur équipe doit à Georges Glaeser.

Comme le dit l'auteur dans son introduction , cet ouvrage gagnera à être relu plusieurs fois et cela de façons différentes ; il intéressera aussi bien les mathématiciens, les chercheurs en didactique, les enseignants, les parents élèves qui y trouveront de nombreux exemples accessibles sans connaissances approfondies ; chacun pourra compléter tel ou tel point en se référant à la bibliographie.

Regrettons toutefois que , par suite d'une impression trop hâtive, aucune relecture n'ait éliminé du texte final de très nombreuses coquilles, jusqu'à une dizaine par page, qui supprimant lettres et mots rendent certaines phrases incompréhensibles.

Remercions Georges Glaeser, dont les « Mathématiques pour l'élève professeur » ont depuis trente ans influencé de nombreux collègues et qui annonce une histoire de l'enseignement de notre discipline, de nous donner cet ouvrage où il a mis, une fois de plus, tout son coeur, sa fougue et sa passion.

P.L. Hennequin, Université de Clermont-Ferrand II