SOMMAIRE DU N^o 90

Éditorial

Ce numéro 90 paraît avec un peu de retard sur la date prévue, ceci pour des raisons techniques ; nous prions nos lecteurs de nous en excuser. Dans le numéro 89 nous avons publié, dans notre rubrique « courrier des lecteurs », une lettre de M. Akkar à propos des mathématiques marocaines ; ce texte fait suite au dossier "francophonie" paru dans un précédent numéro ; ce dossier est ouvert en permanence et nous incitons nos collègues mathématiciens francophones à l'alimenter. Le comité de rédaction souhaite faire paraitre des articles de mathématiques plus élémentaires et en conséquence lance un appel aux contributions.

— Gérard Besson

Mot du président

Après les attentats de New-York le 11 septembre dernier, j'ai adressé à Hyman Bass, Président de l'American Mathematical Society, le message suivant, dont la traduction a été assurée par Paula Cohen :

Dear Colleague,

Following the tragedy which has just struck the United States, and in the name of the Société Mathématique de France, I send this message of sympathy to all the members of the American Mathematical Society.

The friendly relations that our two societies enjoy were solidified two months ago by the meeting that was held in Lyon, and the personal ties between our subscribers are numerous and strong. For that reason the drama that you are experiencing touches us deeply. During this painful time that you are enduring, we assure you of our sincere solidarity.

Michel Waldschmidt

Vie de la société

Le premier congrès Franco-Américain de Mathématiques organisé conjointement par la SMF et l'AMS s'est tenu à Lyon du 17 au 20 juillet 2001. Plus de 600 mathématiciens travaillant dans 30 pays différents y ont participé ; un quart des participants venait des États-Unis. Environ 320 exposés ont été donnés pendant ces sept demi-journées. Toute l'équipe mathématique de l'ENS a été mobilisée par Étienne Ghys pour l'organisation.

Le Prix d'Alembert 2002 est couplé avec le Prix Anatole Decerf de la Fondation de France. L'appel à candidature a été lancé. Les information concernant ces prix se trouvent sur le serveur de la SMF `http ://smf.emath.fr/`. Nous comptons sur les adhérents de la SMF pour susciter de nombreuses candidatures.

La SMF patronne le Colloque *Fermat, 400 ans après* qui se tient à Toulouse et Beaumont de Lomagne du 18 au 20 Octobre 2001, et soutient aussi l'Exposition *Les 72 Savants de la Tour Eiffel* du 15 octobre 2001 au 15 juin 2002 à l'Institut Henri Poincaré (Paris), qui débute en même temps que la Fête de la Science.

« Théorème d'Archimède-Gromov » pour l'espace hyperbolique

N. Bergeron (*Université Paris-Sud, Orsay*)

0. Quelques définitions

Un plongement 1-lispschitzien d'un espace métrique (X, d_X) dans un autre (Y, d_Y) est un plongement pour lequel la métrique intrinsèque (d_X) de l'espace plongé (X) est minorée par la restriction de la métrique ambiante $((d_Y)_{|X})$.

C'est le cas lorsque $X \subset Y$ et d_X est la métrique par chemin sur X obtenue à partir de la métrique d_Y. Les liens entre ces métriques intéressent les géomètres depuis Gauss et son célèbre *Theorema Egregium*. Plus généralement, la régularité lipschtizienne a pris une grande importance en géométrie notamment sous l'influence des travaux de Gromov (quasi-isométries, influence de la dilatation sur l'homotopie, plongements uniformes de groupes de type fini dans un Hilbert...). Plus simplement, les applications 1-lipschitziennes permettent d'apprécier la notion de courbure $\leqslant 0$. Ainsi, Alexandrov définit la notion d'espace métrique X *à courbure négative* par la propriété suivante :

$(K \leqslant 0)$: Toute fonction 1-lipschitzienne $f : \{x_1, x_2, x_3\} \to X$ avec $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \mathbb{R}^2$ tel que $d(x_1, x_2) + d(x_4, x_3) = d(x_2, x_3)$, s'étend en une application 1-lipschtzienne $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to X$.

Malgré des hypothèses assez faibles, ces objets sont riches et l'on peut travailler avec eux (cf. [BH]). Signalons l'exercice suivant tiré de [Gr2].

Exercice. — Soit X un espace métrique de courbure négative et soient x_1, x_2, x_3 les sommets d'un triangle géodésique Δ dans X. Alors, toute isométrie $f : \{y_1, y_2, y_3\} (\subset \mathbb{R}^2) \to X$ telle que $f(y_i) = x_i$ pour $i = 1, 2, 3$, se prolonge en une application 1-lipschitzienne de T, le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets y_1, y_2, y_3, dans X envoyant T sur Δ.

Un théorème typique et classique d'extension d'applications lipschitziennes est le théorème suivant (cf. [Ki]).

Théorème de Kirszbraun. — *Si $S \subset \mathbb{R}^m$ et $f : S \to \mathbb{R}^n$ est 1-lipschitzienne, alors f admet une extension 1-lipschitzienne $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.*

Dans un court article [Gr1], Gromov réduit la démonstration du théorème de Kirszbraun à la « décroissance du volume de l'intersection des boules ». Rappelons ce que cela signifie. Considérons des points $x_i \in \mathbb{R}^n$, pour $i =$

$1, \ldots, k$. Soient $B(x_i, r_i) \subset \mathbb{R}^n$ les boules autour de ces points et de rayons fixés $r_i \geqslant 0$. On introduit

$$V(x_i, r_i) = \mathrm{Vol}\Big(\bigcap_i B(x_i, r_i)\Big).$$

Suivant M. Gromov, on appelle « théorème d'Archimède-Gromov » le théorème suivant [Gr1].

« Théorème d'Archimède-Gromov »

0.Euc Théorème. — *Si $k \leqslant n+1$ alors la fonction V est monotone décroissante en $d_{ij} = ||x_i - x_j||$,* i.e. *si des k-uplets x_i et x'_i vérifient $d_{ij} \geqslant d'_{ij}$, alors*

$$V(x_i, r_i) \leqslant V(x'_i, r_i).$$

Selon Gromov [Gr1] : « *It is likely that 0.Euc extends to the hyperbolic space with curvature* $\equiv -1$. » Le but de cette courte note est d'adapter la démonstration de Gromov de 0.Euc au cas de l'espace hyperbolique et de confirmer ainsi la remarque ci-dessus. Rappelons que l'*espace hyperbolique de dimension n* est l'unique (à isométrie près) variété riemannienne complète, orientée, simplement connexe et de courbure sectionnelle constante égale à -1. Nous le noterons $\mathbb{H}^n$. On se placera dans le modèle de l'hyperboloïde : soit $\mathbb{R}^{1,n}$ l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ munit du *produit Lorentzien*

$$x \circ y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1}.$$

L'espace $\mathbb{H}^n$ s'identifie au sous-espace

$$\{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid x \circ x = -1 \text{ et } x_1 > 0\}$$

de $\mathbb{R}^{1,n}$ muni de la métrique d définit par $\cosh d(x, y) = -x \circ y$. L'espace $\mathbb{H}^n$ est naturellement équippé d'un élément de volume (c'est une variété riemanienne cf. [Rat]) qui dans les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ de $\mathbb{R}^{1,n}$ est donné par

$$\frac{dy_2 \cdots dy_{n+1}}{\sqrt{1 + (y_2^2 + \cdots + y_{n+1}^2)}}.$$

Considérons maintenant des points $x_i \in \mathbb{H}^n$, pour $i = 1, \ldots, k$. Soit $B_h(x_i, r_i) \subset \mathbb{H}^n$ les boules (pour la métrique hyperbolique d) autour de ces points et de rayons fixés $r_i \geqslant 0$. On introduit

$$V_h(x_i, r_i) = \mathrm{Vol}\Big(\bigcap_i B_h(x_i, r_i)\Big),$$

où l'on a prit le volume hyperbolique. Dans la suite, on démontre le « théorème d'Archimède-Gromov » pour l'espace hyperbolique, autrement dit on démontre le théorème suivant.

0.Hyp Théorème. — *Si $k \leqslant n+1$ alors la fonction V_h est monotone décroissante en $d_{ij} = d(x_i, x_j)$,* i.e. *si des k-uplets x_i et x'_i vérifient $d_{ij} \geqslant d'_{ij}$, alors*

$$V_h(x_i, r_i) \leqslant V_h(x'_i, r_i).$$

1. Lemmes

Comme dans la démonstration de [Gr1], la preuve de 0.Hyp résultera d'une version sphèrique de 0.Hyp. Le fait que l'espace soit hyperbolique et non euclidien n'intervient que dans la preuve du lemme 1.B ci-dessus. On peut donc en première lecture penser au cas euclidien (la preuve est alors celle de [Gr1]). Considérons la sphère $S_h^{n-1}(r) \subset \mathbb{H}^n$ de rayon r autour de l'origine $u = (1, 0, \ldots, 0)$ (dans le modèle de l'hyperboloïde). La métrique riemannienne de $\mathbb{H}^n$ induit sur chacune de ces sphères une métrique riemannienne et donc une forme volume. Pour cette forme volume, on considère :

$$V_{n-1}(x_i, r_i, r) = \mathrm{Vol}\Big(S_h^{n-1}(r) \bigcap_i B_h(x_i, r_i)\Big).$$

1.a Lemme. — *Si $k \leqslant n$ et que des k-uplets de points x_i et x'_i dans $\mathbb{H}^n$ vérifient $d(u, x_i) = d(u, x'_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $d_{ij} \geqslant d'_{ij}$, alors*

$$V_{n-1}(x_i, r_i, r) \leqslant V_{n-1}(x'_i, r_i, r)$$

pour tout $r \geqslant 0$ et $r_i \geqslant 0$.

1.a' Remarque. — Le cas le plus important de 1.a est celui où $d(u, x_i) = d(u, x'_i) = r$ qui donne une version sphèrique de 0.Hyp. De plus, puisque la géométrie de $S_h^{n-1}(r)$ converge vers celle de $\mathbb{H}^{n-1}$, la version sphèrique de 0.Hyp implique 0.Hyp. Autrement dit le lemme 1.a implique le théorème 0.Hyp. Enfin, remarquons que réciproquement, 1.A découle de la version sphèrique de 0.Hyp appliquée à la projection radial $\bar{x}_i$ de x_i sur $S_h^{n-1}(r)$ et au rayon $\bar{r}_i$ tel que

$$B_h(\bar{x}_i, \bar{r}_i) \cap S_h^{n-1}(r) = B_h(x_i, r_i) \cap S_h^{n-1}(r).$$

Pour montrer 1.a, nous aurons besoin du lemme suivant.

1.b Lemme. — *Si $k \leqslant n$ et que des k-uplets de points x_i et x'_i de $\mathbb{H}^n$ vérifient $d(u, x_i) = d(u, x'_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $d_{ij} \geqslant d'_{ij}$, alors il existe une famille continue de k-uplets x_i^t telle que*

(1) *$x_i^0 = x_i$ et $x_i^1 = x'_i$;*
(2) *les fonctions $t \mapsto d(u, x_i^t)$ sont constantes ;*
(3) *les applications $t \mapsto d_{ij}^t$ sont décroissantes.*

2. Démonstration de 1.a

Supposons, par récurrence, que 1.a est vrai pour un certain k et $n-1$. On va démontrer 1.a pour les $(k+1)$-uplets dans $S_h^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Notons x_i et x'_i pour $i = 0, 1, \ldots, k$ deux $(k+1)$-uplets vérifiant les hypothèses du lemme 1.a Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que les x_i sont distincts et que $x_0 = x'_0$. D'après la remarque 1.a', on peut supposer que $d(u, x_i)(= d(u, x'_i)) = r$ pour tout $i = 0, 1, \ldots, k$. Le lemme 1.b affirme alors qu'il existe une famille continue de $(k+1)$-uplets x_i^t dans $S_h^n(r)$ allant de x_i à x'_i et telle que d_{ij}^t soit décroissante en t. Mais $k+1 \leqslant n+1$ et donc toute homotopie monotone (pour d_{ij}^t) peut être approchée par une autre homotopie monotone (au sens large) et qui, sur tout sous-segment de $[0,1]$ de la forme $[\frac{\nu}{N}, \frac{\nu+1}{N}]$ (pour un certain N dépendant de la précision de l'approximation), a tous les d_{ij}^t constants en

t sauf un. (On peut remarquer que, dans la démonstration du lemme 1.B, la condition d'être une matrice symétrique positive de rang r est une condition ouverte dans l'espace des matrices symétriques de rang r.) Pour montrer le lemme 1.a, il nous suffit de le montrer pour les $(k+1)$-uplets x_i^t et $x_i^{t'}$ pour $t = \frac{\nu}{N}$ et $t' = \frac{\nu+1}{N}$ et pour $\nu = 1, \ldots, N$. En particulier, quitte à réindexer les x_i et les x_i', on s'est ramené à prouver le lemme 1.a sous l'hypothèse additionnelle :

$$d(x_i, x_0) = d(x_i', x_0) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

L'intersection à considérer est

$$S_h^n(r) \cap B_h(x_0, r_0) \bigcap_{i=1}^{k} B_h(x_i, r_i) = \bigcup_{t=0}^{r_0} (S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)) \bigcap_{i=1}^{k} B_h(x_i, r_i).$$

Mais l'intersection $S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)$ est une sphère hyperbolique et l'hypothèse de récurrence implique (sous l'hypothèse (1))

$$\mathrm{Vol}_{n-1}\Big((S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)) \bigcap_{i=1}^{k} B_h(x_i, r_i)\Big) \leqslant$$
$$\mathrm{Vol}_{n-1}\Big((S_h^n(r) \cap S_h^n(x_0, t)) \bigcap_{i=1}^{k} B_h(x_i, r_i)\Big).$$

La démonstration du lemme 1.a découle alors d'une simple intégration par rapport à t.

3. Démonstration de 1.b

Soient x_i et x_i' deux k-uplets comme dans l'énoncé du lemme 1.b Notons $\rho_i = d(u, x_i) = d(u, x_i')$. À chaque point x_i (resp. x_i'), on associe un vecteur $v_i \in \mathbb{R}^n = \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ (resp. $v_i' \in \mathbb{R}^n$) de norme (euclidienne) 1 tel que la courbe (géodésique)

$$\alpha_i(t) = \cosh(t)u + \sinh(t)v_i$$

$$(\text{resp. } \alpha_i'(t) = \cosh(t)u + \sinh(t)v_i')$$

dans $\mathbb{H}^n$ passe par u et x_i (resp. x_i'). En particulier, on a $x_i = \alpha_i(\rho_i)$ (resp. $x_i' = \alpha_i'(\rho_i)$). On a donc :

$$\cosh(d_{ij}) = \cosh(\rho_i)\cosh(\rho_j) - \sinh(\rho_i)\sinh(\rho_j) < v_i, v_j >$$

et

$$\cosh(d_{ij}') = \cosh(\rho_i)\cosh(\rho_j) - \sinh(\rho_i)\sinh(\rho_j) < v_i', v_j' >,$$

où $<,>$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On va avoir besoin du fait suivant qui découle trivialement du théorème de Sylvester.

Fait. — Soit $k \leqslant n$. Soit v_i $(i = 1, \ldots, k)$ un k-uplet de vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^n$. Alors, la matrice $(< v_i, v_j >)_{i,j}$ est une matrice symétrique $k \times k$, semi-définie positive et avec que des 1 sur la diagonale. Réciproquement, si M est une matrice symétrique $k \times k$, semi-définie positive et avec que des 1 sur la diagonale, alors il existe k vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 tels que $M = (< v_i, v_j >)_{i,j}$.

Les matrices $(1-t)(< v_i, v_j >)_{i,j} + t(< v'_i, v'_j >)_{i,j}$ sont symétriques, semi-définies positives et avec que des 1 sur la diagonale. Donc d'après le fait précédent, cette famille représente un chemin v_i^t dans l'espace des k-uplets de vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^n$. On en déduit l'existence d'une famille continue $x_i^t = \cosh(\rho_i)u + \sinh(\rho_i)v_i^t$ de k-uplets de points dans $\mathbb{H}^n$ telle que :

(1) $x_i^0 = x_i$ et $x_i^1 = x'_i$;
(2) l'application $t \mapsto d(u, x_i^t)$ est constante égale à ρ_i ;
(3) l'application $t \mapsto d(x_i^t, x_j^t)$ est décroissante.

Ce qui achève la démonstration de 1.B.

4. Corollaires

Comme dans [Gr1], on peut tirer les conséquences suivantes du théorème 0.Hyp.

4.a. Lemme d'intersection de Kirszbraun hyperbolique. — *Si x_i et x'_i sont deux k-uplets de $\mathbb{H}^n$ (maintenant pour un k quelconque) qui vérifient $d_{ij} \geqslant d'_{ij}$, alors*

$$\bigcap_i B_h(x_i, r_i) \neq \varnothing \Rightarrow \bigcap_i B_h(x'_i, r_i) \neq \varnothing.$$

Démonstration. On applique 0.Hyp aux boules autour de x_i et x'_i dans l'espace $\mathbb{H}^m \supset \mathbb{H}^n$, pour $m = \max(n, k-1)$.

4.b. Théorème de Kirszbraun hyperbolique. — *Si $S \subset \mathbb{H}^m$ et $f : S \to \mathbb{H}^n$ est 1-lipschitzienne, alors f admet une extension 1-lipschitzienne $g : \mathbb{H}^m \to \mathbb{H}^n$.*

Démonstration. En appliquant le lemme de Zorn, on obtient une extension maximale 1-lipschitzienne $g : T \to \mathbb{H}^n$ de f. Soit $\xi \in \mathbb{H}^m - T$. Puisque g est maximale, il n'existe pas d'élément $\eta \in \mathbb{H}^n$ tel que

$$|\eta - g(x)| \leqslant |\xi - x| \text{ pour tout } x \in T.$$

Autrement dit,

$$\bigcap_{x \in T} B_h(g(x), |x - \xi|) = \varnothing.$$

Comme les boules de l'espace hyperbolique sont compactes, il existe un sous-ensemble fini $F \subset T$ tel que

$$\bigcap_{x \in F} B_h(g(x), |x - \xi|) = \varnothing.$$

Mais ceci est absurde d'après 4.a. Donc $T = \mathbb{H}^m$ et le théorème est démontré.

5. Commentaires

Selon Gromov [Gr1], l'auteur de 0.Euc pourrait-être Archimède, bien sûr un tel énoncé est absent de ses œuvres. Mais, comme me l'a fait remarqué Thomé, Archimède aurait en tout cas facilement pu obtenir une preuve expérimentale de 0.Euc en jouant avec des balles (un peu tronquées) lors de son célèbre bain. La preuve de 0.Hyp que l'on a proposée est en tout point identique à celle de Gromov de 0.Euc, la seule (et très légère) modification est notre preuve du lemme 1.b qui permet le passage au cas hyperbolique. Les corollaires 4.a et 4.b étaient déjà connus (cf. [Va]). De plus, dans le contexte bien plus général des espaces singuliers, Lang et Schroeder [LS] ont étendus le théorème de Kirszbraun dans le but d'étudier les quasi-plats dans les espaces singuliers.

Références

[BH] Bridson, M. and Haefliger, A., *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, 1999.

[Gr1] Gromov, M., Monotonicity of the volume of intersections of balls, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math. 1267, Springer, New York, 1987.

[Gr2] Gromov, M., *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, 152, *Birkhauser*, 1999.

[Ki] Kirszbraun, M. D., Über die zussamenziehende und lipschitzsche Transformationen, *Fund. Math.* **22** (1934), 77-108.

[LS] Lang, U. and Schroeder, V., Kirszbraun's theorem and metric spaces of bounded curvature, *Geometric and Functional Analysis*, 7 :3 (1997), 535-560.

[Rat] Ratcliffe, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, 1994.

[Va] Valentine, F. A., Contractions in non-Euclidean spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944), 710-713.

L'effet papillon n'existe plus !

Raoul Robert
(*CNRS UMR 5582, Institut Fourier, Saint Martin d'Hères*)

Ce texte correspond à une conférence faite aux journées Rhônes-Alpes de L'Académie des Sciences en novembre 2000.

Nous savons tous qu'il est difficile de prévoir le temps. On peut avancer plusieurs explications possibles de ce fait.

(1) C'est parce que notre compréhension des phénomènes météorologiques et nos modèles de circulation atmosphérique sont imparfaits.
(2) Nos modèles sont satisfaisants mais leur mise en oeuvre effective est encore trop rudimentaire : réseau d'observation trop lâche, puissance de calcul insuffisante...
(3) Il y a un obstacle théorique fondamental : le système dynamique qui régit cette évolution est impropre à une prédiction au delà d'un temps court.

Depuis les années soixante c'est l'explication 3) qui l'a emporté sous le nom « d'effet papillon ». Je vais simplement livrer ici les quelques réflexions qui m'ont amené à penser différemment.

I. Introduction

La naissance de l'effet papillon

En 1962, alors qu'il étudiait un modèle extrêmement simplifié de convection atmosphérique, le météorologiste E.N. Lorenz découvrit, grâce à la simulation numérique, qu'un système très simple de trois équations différentielles avec une non linéarité quadratique peut avoir des solutions surprenantes, présentant de l'instabilité exponentielle par rapport aux conditions initiales et un comportement à long terme non périodique où les trajectoires s'enroulent autour d'un ensemble à géométrie compliquée. Lorenz s'attaqua ensuite au problème de la circulation atmosphérique à grande échelle (i.e. vu de loin ; l'atmosphère apparaît alors comme une mince pellicule de gaz entourant la sphère terrestre). Il considéra qu'il s'agissait en première approximation d'étudier le mouvement d'un fluide parfait incompressible à deux dimensions (parfait signifie sans viscosité ; en effet à grande échelle la viscosité moléculaire du gaz joue un rôle tout à fait négligeable). Ici encore, pour simplifier les calculs, il utilisa une approximation grossière ne comportant qu'un petit nombre de degrés de liberté (quelques dizaines). À nouveau Lorenz retrouva sur ce système le phénomène de sensibilité exponentielle par rapport aux données initiales. Il pensa alors que si l'avenir était aussi difficile à prédire avec un petit nombre de degrés de liberté, la situation ne pourrait qu'empirer avec un modèle plus réaliste de l'atmosphère, dont le nombre de degrés de liberté serait alors véritablement gigantesque. Remarquons ici que le modèle du fluide parfait incompressible est une idéalisation mathématique qui comporte un nombre infini de degrés de libertés (la réalité physique que ce modèle représente en a elle un nombre très grand mais fini). Lorenz retrouvait sur ces exemples le phénomène de sensibilité exponentielle par rapport à la condition initiale, phénomène déjà constaté par Poincaré sur le problème des trois corps et Hadamard sur les géodésiques des surfaces à courbure négative. Il n'y avait là rien de fondamentalement neuf, son apport original fut la conséquence qu'il en tira quant à l'imprédictibilité des écoulements atmosphériques.

Un contradicteur de Lorenz lui fit remarquer que si le mouvement de l'atmosphère était aussi instable qu'il le prétendait, il suffirait d'un battement d'aile d'une mouette pour changer irrémédiablement son évolution. Lorenz soutint que c'était bien le cas et que de plus ce changement se produirait en deux semaines environ. De cette polémique (la mouette se métamorphosant au passage en papillon) naquit « l'effet papillon » : à savoir qu'un événement impondérable comme le battement des ailes d'un papillon en un point du globe est une perturbation suffisante pour déclencher deux semaines plus tard une tornade en un point éloigné. Evidemment, comme on ne peut connaitre l'état de tous les papillons à un instant donné, cela implique que la prédiction de l'état de l'atmosphère au delà de quinze jours est impossible.

Peu de temps après, en 1966, paraissait aux Annales de l'Institut Fourier un article de V.I. Arnold intitulé « Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits ». Dans cet article, Arnold expose une vision géométrique du mouvement du fluide parfait : nonobstant les avatars liés à la dimension infinie du problème, on peut voir le mouvement du fluide parfait comme un flot géodésique sur une variété riemannienne et le fait que l'espace des configurations soit à peu de choses près un groupe de Lie permet à Arnold de calculer la courbure sectionnelle dans des plans, le calcul peut être complètement explicité dans le cas d'écoulements sur le tore de dimension deux, et on s'aperçoit alors qu' il y a « beaucoup » de sections qui donnent une courbure strictement négative. Un lien est donc établi entre le mouvement du fluide parfait et les géodésiques instables étudiées par Hadamard à la fin du siècle dernier. Arnold en déduit que l'écoulement atmosphérique, qui est en première approximation l'écoulement d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel, est fondamentalement instable et présente la propriété de sensibilité exponentielle par rapport aux conditions initiales. Les considérations d'Arnold semblent donc conforter l'image suggérée par Lorenz. Et l'effet papillon connaît un beau succès médiatique...

Le doute s'installe

Les décennies suivantes ont été marquées par des efforts considérables pour améliorer la prévision météorologique. Les météorologistes ont notamment étudié comment, dans leurs modèles, se propageait une erreur initiale ; ils ont constaté que, passé une courte période de un à deux jours (période pendant laquelle le système a un comportement voisin d'un système linéaire), la croissance des perturbations n'est pas exponentielle comme l'avait prédit Lorenz mais grosso modo proportionnelle au temps [5]. Ceci amène à une réflexion critique sur l'image du papillon employée par Lorenz : à savoir qu'une petite perturbation locale de l'atmosphère, va de proche en proche, par interaction non linéaire, affecter des échelles spatiales de plus en plus grandes pour finalement provoquer des changements à grande échelle. Cette image a été abondamment reprise, tant par des journalistes que par des scientifiques. Mais ce processus existe-il vraiment ?

Le retour de Boltzmann

Un autre fait s'est progressivement imposé durant ces dernières décennies, à savoir la reconnaissance d'une différence fondamentale entre les écoulements turbulents à deux ou trois dimensions. À deux dimensions les écoulements forment spontanément des structures à grande échelle que l'on nomme structures cohérentes (comme les grands tourbillons cycloniques ou anticycloniques qui parcourent notre atmosphère terrestre). Et ceci bien qu'à petite échelle l'écoulement puisse apparaître comme tout à fait « chaotique ». L'apparition de telles structures et leur persistance au sein d'un environnement pleinement turbulent a longtemps intrigué les géophysiciens. Comme l'a suggéré Onsager en 1949 [8] l'explication de ce phénomène est de nature statistique, pour le comprendre il faut étendre au fluide parfait la mécanique statistique de Boltzmann. Le propre des systèmes dynamiques qui modélisent la circulation atmosphérique est d'avoir un nombre considérable de degrés de liberté (comparable au nombre d'Avogadro). Il semble aller de soi pour Lorenz et ceux qui ont repris l' image du papillon à leur compte que ce qui est valable pour trois degrés de liberté le sera a fortiori pour un grand nombre car la situation n'en sera que plus compliquée et donc plus imprédictible. La mécanique statistique suggère, elle, une vision différente. Les systèmes à un très grand nombre de degrés de liberté sont assez semblables à un gaz formé de beaucoup de molécules et pour de tels systèmes la mécanique statistique distingue deux types de quantités observables : les observables microscopiques (comme par exemple les trajectoires individuelles des molécules) et les observables macroscopiques qui s'expriment par des moyennes statistiques, comme la densité ou la pression. Les observables microscopiques sont imprédictibles alors qu'au contraire les observables macroscopiques sont généralement prédictibles. Dans le cadre de cette analogie, prédire le mouvement à grande échelle des masses d'air est de nature macroscopique alors que la description locale du chaos turbulent est de nature microscopique. Notre papillon qui va sans doute modifier localement le chaos turbulent à petite échelle, peut-il avoir un effet sensible sur l'objet macroscopique qu'est une structure cohérente ?

En fait, une étude détaillée de la formation des structures cohérentes montre que c'est justement le chaos turbulent à petite échelle qui crée le mélange local de la fonction tourbillon. C'est là le mécanisme générateur de ces structures organisées, mécanisme tout à fait analogue à la relaxation rapide imaginée par les astrophysiciens pour expliquer la formation des galaxies [4]. Or ce chaos turbulent à petite échelle est, comme nous essayerons de le montrer, bien décrit par les calculs d'Arnold. Pour résumer, c'est l'imprédictibilité du mouvement à petite échelle qui va assurer la convergence du système vers des structures organisées et donc le rendre éventuellement prédictible à grande échelle sur des temps longs.

Nous donnons dans les pages qui suivent quelques considérations théoriques qui, alliées à des résultats de simulations numériques, nous paraissent de nature à soutenir ce point de vue ainsi qu'à en cerner les limites.

II. Qu'est-ce que prédire le mouvement d'un fluide ?

La turbulence, mouvement complexe et désordonné d'un fluide, apparaît dans presque tous les écoulements que l'on observe à l'échelle humaine. C'est le cas de tous les écoulements où l'effet non linéaire domine le frottement visqueux (quand le frottement visqueux prédomine l'écoulement prend un aspect plus ordonné, on dit qu'il est laminaire). Nous nous intéressons ici aux écoulements atmosphériques dans lesquels le frottement visqueux est tout à fait négligeable, et qui sont donc turbulents. Nous allons nous intéresser à une classe particulière d'écoulements turbulents, ceux à deux dimensions, c'est-à-dire quand l'écoulement a lieu dans un plan ou sur une surface. Ceci n'est pas une pure vue de l'esprit mais une approximation souvent utilisée en pratique lorsque le fluide est confiné dans une couche de faible épaisseur. Ainsi les mouvements de l'atmosphère ou des océans, lorsque l'épaisseur des couches fluides est négligeable par rapport aux échelles horizontales considérées, peuvent être considérés comme bidimensionnels. Lorsque la vitesse des particules fluides reste faible par rapport à la vitesse de propagation du son, on peut faire de plus l'approximation que l'écoulement est incompressible (c'est le cas pour l'océan ou l'atmosphère). la dynamique de l'écoulement est alors entièrement déterminée par la vorticité, qui est le rotationnel de la vitesse. L'intérêt de la vorticité provient du fait qu'elle est inchangée pour chaque particule de fluide au cours de son mouvement.

Pour la suite nous limiterons donc notre étude au cas d'un fluide parfait incompressible à deux dimensions occupant un domaine plan Ω. Sous leur forme la plus usuelle, les équations du mouvement (équations d'Euler) s'écrivent :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p, \text{ sur } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

où $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ est le champ de vitesse du fluide, $p(t, \mathbf{x})$ sa pression. À ces équations, il faut rajouter une condition limite pour la vitesse au bord du domaine $\partial\Omega$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ($\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal unitaire sortant au bord du domaine). Et pour déterminer complètement le mouvement du fluide il nous faudra en outre fixer une condition initiale $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

Il est usuel et commode de prendre le rotationnel de l'équation ci-dessus afin d'éliminer la pression qui est une fonction inconnue. En notant $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ la fonction (scalaire) tourbillon, ou vorticité de l'écoulement, on obtient le nouveau système :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0\,, \\ \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega, \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il se présente sous la forme d'une équation de transport (sur la première ligne) couplée avec un système elliptique (sur la deuxième ligne). On peut montrer que le mouvement est parfaitement déterminé si l'on se donne comme condition initiale une fonction tourbillon mesurable bornée arbitraire $\omega_0(\mathbf{x})$ [11].

Décrire ainsi le mouvement d'un fluide au moyen du champ de vitesse $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ constitue ce qu'on appelle une description eulérienne. Mais on peut vouloir aussi décrire le mouvement du fluide en suivant les trajectoires de toutes ses particules. On adopte alors une description lagrangienne. Une telle description correspond à la détermination d'une application φ de : $\mathbb{R} \times \overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}$ telle que $\varphi(t, \mathbf{x})$ représente la position à l'instant t de la particule qui était en $\mathbf{x}$ à l'instant initial $t = 0$.

Le lien entre ces deux descriptions est évidemment donné par l'équation différentielle :

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathbf{u}(t, \varphi(t, \mathbf{x})),\ \varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \right.$$

Dans le cas où le flot est régulier, on vérifie facilement que, pour tout t fixé, les applications $\mathbf{x} \to \varphi(t, \mathbf{x})$ sont des difféomorphismes de $\overline{\Omega}$ qui préservent la surface et l'orientation.

Il est clair que si l'on suppose $\varphi(t, \mathbf{x})$ exactement connu, le champ de vitesse $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ est alors connu, il suffit de dériver φ par rapport au temps. Par contre, si nous supposons $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ connu, pour obtenir φ, il faut intégrer l'équation différentielle (III). Il se peut alors que la tâche s'avère impossible, en pratique, au delà d'un temps court , si le système dynamique (III) est sensible par rapport à la condition initiale. Comme c'est précisément très généralement le cas en mécanique des fluides, on voit qu'il ne revient pas du tout au même de parler de prédiction en terme de φ ou de $\mathbf{u}$.

En ce qui concerne la météorologie où l'océanographie, prédire, en pratique, ce n'est pas prédire φ mais $\mathbf{u}$. La distinction est cruciale comme on va le voir. En effet le météorologiste veut en premier lieu savoir quelle sera la vitesse et la force du vent , la pression... en un lieu donné à un instant donné, et pas savoir d'où viennent les molécules qui constituent le vent (bien que cette question ne soit pas non plus dénuée d'intérêt).

III. Le calcul d'Arnold et l'imprédictibilité du flot lagrangien

Commençons par résumer brièvement la contribution d'Arnold, renvoyant à [1, 2] pour un exposé détaillé. Tout comme Arnold, afin d'éluder les sérieuses difficultés d'analyse liées à la dimension infinie du problème, nous procèderons de façon purement formelle.

On a vu que donner une description lagrangienne du mouvement, c'était déterminer la fonction $\varphi(t, \mathbf{x})$, chaque fonction $\varphi_t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x})$ étant un difféomorphisme de $\overline{\Omega}$ préservant la mesure de surface et l'orientation (i.e. un élément de *SDiff* ($\overline{\Omega}$).

Autrement dit, un mouvement fluide est une courbe $t \to \varphi_t$ tracée sur la variété $M = \mathit{SDiff}\,(\overline{\Omega})$ (l'espace des configurations du système).

À l'instant t, la relation $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t,\varphi(t,\mathbf{x}))$ indique que le champ de vitesse $\mathbf{u}(t,\varphi_t(\mathbf{x}))$ appartient à l'espace tangent en φ_t à M. L'espace tangent en φ à M est constitué des champs de vitesse $\mathbf{v}(\varphi(\mathbf{x}))$, où $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est un champ de vitesse sur $\overline{\Omega}$ tel que $div\,\mathbf{v} = 0$ et $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Cet espace est naturellement muni d'une norme associée à l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{v}(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}$, et donc M est munie d'une structure riemannienne. Il est facile de vérifier que les mouvements du fluide parfait correspondent aux courbes φ_t tracées sur M qui sont des points critiques de l'intégrale d'action :

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x}$$

pour tous $t_1 < t_2$ (sous les contraintes $\varphi(t_1,.) = \varphi_1$, $\varphi(t_2,.) = \varphi_2$). En d'autres termes, les mouvements du fluide parfait sont les géodésiques de la variété riemannienne M.

L'intérêt de ce cadre géométrique est de ramener, au moins formellement, les mouvements du fluide parfait à des choses bien connues. En effet, on sait que l'étude de la stabilité des géodésiques de la variété s'exprime en terme de courbure au moyen de l'équation de Jacobi [2]. On établit notamment que si φ_t est une géodésique partant de φ_0, de vecteur vitesse $\mathbf{v}(t)$ à l'instant t (supposé de norme égale à 1), et si la courbure sectionnelle de la variété dans tous les plans passant par $\mathbf{v}(t)$ est inférieure ou égale à $-c\,(<0)$, une perturbation de la condition initiale va croître au moins comme $\exp(ct)$: $d(\varphi_t,\Phi_t) \geqslant d(\varphi_0,\Phi_0)\exp(ct)$ où Φ_0 désigne la condition initiale perturbée et d la distance géodésique sur la variété. De plus si la courbure en tout point et dans toutes les sections est inférieure ou égale à $-c$, et si la variété M est compacte, alors le « flot géodésique », c'est à dire le groupe à un paramètre de transformations $(\varphi_0, v(0)) \to (\varphi_t, v(t))$ est mélangeant au sens usuel de la théorie ergodique. Arnold a pu mener à bien le calcul de la courbure sectionnelle dans le cas des écoulements sur le tore à deux dimensions, il a montré que la courbure est négative pour « la plupart » des sections, donnant ainsi une vision géométrique éclairante de l'instabilité des flots lagrangiens. Ajoutons une dernière remarque importante, le calcul d'Arnold fait apparaître que l'instabilité exponentielle est d'autant plus grande que les structures spatiales concernées sont petites.

IV. Les structures cohérentes de la turbulence bidimensionnelle

Dans les écoulements turbulents bidimensionnels on observe un phénomène tout à fait remarquable : l'écoulement a tendance à s'organiser en grandes structures tourbillonnaires cependant qu'à petite échelle le mouvement est très chaotique (disons turbulent). Ces structures, qui peuvent être formées d'un seul tourbillon, de deux tourbillons accolés tournant en sens inverse, de trois...sont bien connues et quotidiennement observées dans l'atmosphère terrestre ou elles s'étendent généralement sur plusieurs milliers de kilomètres : on les nomme structures cohérentes. On peut voir ces grandes structures cycloniques ou anticycloniques, que les nuages permettent de visualiser, sur les images prises par les satellites. La grande tache rouge de Jupiter, gigantesque tourbillon d'environ

20 000 km de diamètre, formé dans une mince couche fluide à la surface de la planète, est un exemple particulièrement spectaculaire d'une telle structure. La formation de ces structures cohérentes est une caractéristique des écoulements à deux dimensions. Grâce aux simulations numériques, le processus conduisant à l'apparition des structures cohérentes est assez bien décrit. On voit sur les équations (II) que la fonction tourbillon est transportée par le champ de vitesse $\mathbf{u}$. La déformation du champ de vitesse va donc étirer puis replier la vorticité en des filaments de plus en plus fins.

Ce processus va produire une cascade (un transfert) de l'enstrophie $\left(\int_\Omega \omega^2\, d\mathbf{x}\right)$ vers les petites échelles spatiales, en même temps que l'énergie va se concentrer dans les grandes échelles, donnant naissance aux structures cohérentes. Ce processus est tout à fait analogue à celui de la relaxation rapide décrit par Hénon, King et Lynden-Bell pour expliquer la formation des galaxies [4]. Il apparaît clairement que la convergence du flot à grande échelle vers une structure organisée est intimement liée aux oscillations « chaotiques » de la vorticité à petite échelle. Comme la vorticité est transportée par le flot lagrangien $\varphi(t, \mathbf{x})$, l'émergence des structures cohérentes semble donc liée au caractère « chaotique » de ce flot. Bien qu'en apparence paradoxale, cette affirmation peut se comprendre facilement à l'aide d'un modèle très simple.

Un modèle simplifié

Supposons donné un flot lagrangien $\varphi(t, \mathbf{x})$ sur $\overline{\Omega}$, tel que pour tout t, φ_t soit un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ qui conserve la mesure de surface et supposons que φ_t soit mélangeant au sens usuel de la théorie ergodique, *i.e.*, :

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_t^{-1}(A) \cap B| = |A| \cdot |B|,$$

pour tous A, B sous ensembles mesurables de $\overline{\Omega}$, $|A|$ désignant la surface de A. φ_t étant fixé, on définit un système dynamique de la façon suivante. On se donne comme condition initiale une fonction mesurable bornée quelconque $\omega_0(\mathbf{x})$, et on définit : $\omega(t, \mathbf{x}) = \omega(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}))$ (*i.e.* ω est simplement transportée par φ_t). $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ est ensuite défini par :

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega\,,\ \operatorname{div}\, \mathbf{u} = 0\,, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Notre système est une sorte d'équation d'Euler altérée, où on a cassé la relation entre φ et $\mathbf{u}$, mais qui conserve la propriété de faire osciller la vorticité dans des échelles spatiales de plus en plus petites.

Propriétés du modèle

Notons $\overline{\omega}_0 = \dfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \omega_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, la valeur moyenne de la vorticité initiale. À cause du caractère mélangeant de φ_t, on vérifie facilement que :

$$\omega(t, \mathbf{x}) \xrightarrow[(t\to\infty)]{} \overline{\omega}_0, \text{ au sens faible,}$$

i.e. $\int_\Omega \omega(t,\mathbf{x})\,\theta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \longrightarrow \int_\Omega \overline{\omega}_0\,\theta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ pour toute fonction continue θ sur $\overline{\Omega}$. Il découle alors de la relation (IV), par un argument standard de compacité, que :

$$\int_\Omega |\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) - \overline{\mathbf{u}}_0(t,\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \longrightarrow 0, \text{ quand } t \to \infty$$

où $\overline{\mathbf{u}}_0$ est défini par $\operatorname{rot}\overline{\mathbf{u}}_0 = \overline{\omega}_0$, $\operatorname{div}\overline{\mathbf{u}}_0 = 0$, $\overline{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

On voit donc sur ce modèle que le comportement mélangeant de φ implique la convergence forte en énergie de $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ vers $\overline{\mathbf{u}}_0$. Si, par exemple, Ω est un disque, lorsque $t \to \infty$, le mouvement va s'organiser en un mouvement de rotation solide. Bien que plus complexe, la situation est similaire pour les équations d'Euler. En effet, on obtient les équations d'Euler en rajoutant la relation $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}\big(t,\varphi(t,\mathbf{x})\big)$ dans le modèle ci-dessus. Bien sûr le flot $\varphi(t,\mathbf{x})$ ne peut plus alors être mélangeant, à cause de la conservation de l'énergie ; il conserve néanmoins un caractère « chaotique » comme le montrent les calculs d'Arnold et les simulations numériques.

Ainsi l'apparition des structures cohérentes est liée au caractère chaotique du flot lagrangien. On peut dire que, pour les équations d'Euler comme pour le modèle simplifié, c'est l'imprédicibilité du flot lagrangien qui rend le champ de vitesses (éventuellement) prédictible sur des temps longs.

En conclusion, les considérations ci-dessus suggèrent que, pour la turbulence bidimensionnelle, le phénomène de sensibilité par rapport à la condition initiale doit disparaître et la prédiction à long terme devenir possible si l'on s'en tient à une description du mouvement au moyen du champ de vitesse $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$. C'est cette hypothèse que nous examinerons dans le paragraphe suivant.

Remarque

Le mécanisme de la relaxation rapide décrit ci-dessus est typiquement lié à la dimension infinie du problème. En effet, la vorticité oscille à des échelles spatiales de plus en plus petites, ce qui implique un nombre infini de degrés de liberté. Il faut donc s'attendre, lorsque pour les nécessités de la simulation numérique, on va approximer notre système par un système tronqué à D degrés de liberté, à observer des comportements différents suivant que D est petit ou grand. Ce point sera étudié au paragraphe suivant.

V. Simulations numériques

Nous avons choisi de tester les considérations théoriques des paragraphes précédents sur un exemple classique : la formation d'une structure cohérente tripôlaire. De telles structures, formées de trois tourbillons accolés, un tourbillon central tournant dans un sens et deux tourbillons latéraux tournant en sens opposé, le tout animé d'un mouvement de rotation uniforme, peuvent être observées dans l'atmosphère et les océans ou être obtenues en laboratoire ou même encore plus simplement par simulation numérique [3]. Nous avons choisi cet exemple à dessein car c'est à la fois une structure cohérente bien identifiable mais qui peut facilement, en faisant varier la condition initiale, se casser en deux dipôles, ce qui permet, en partant d'une condition initiale bien choisie, d'obtenir des effets intéressants du point de vue de l'étude de la sensibilité.

Description des expériences de simulation

Comme il est usuel de le faire, on va approximer l'écoulement du fluide parfait dans tout l'espace en considérant une vorticité initiale localisée dans une petite zone d'un (comparativement) grand domaine périodique. $\Omega =]0,2\pi[\times]0,2\pi[$ La fonction vorticité initiale est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
&\omega_0(\mathbf{x}) = a_1 \text{ dans l'ellipse} && \frac{(x_1-\pi)^2}{r_0^2} + \frac{(x_2-\pi)^2}{r_1^2} \leqslant 1\,,\\
&\omega_0(\mathbf{x}) = a_2 \text{ dans la couronne} && r_2^2 \leqslant (x_1-\pi)^2 + (x_2-\pi)^2 \leqslant r_3^2\,,\\
&\omega_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ailleurs.}
\end{aligned}$$

À cause de la périodicité de l'écoulement dans les deux directions, la valeur moyenne de ω_0 sur Ω doit être nulle, de sorte que les paramètres a_1, a_2, r_0, r_1, r_2, r_3 doivent vérifier $a_1\, r_0\, r_1 = a_2\,(r_2^2 - r_3^2)$. Dans ce qui suit nous prendrons : $a_2 = 2\pi$, $r_0 = 0.5$, $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.65$, r_3 ***variable***. Ainsi ω_0 est une tache elliptique de vorticité négative entourée d'une couronne de vorticité positive.

Pour les besoins du calcul numérique, on introduit une petite viscosité ν_e, et on résout numériquement d'une façon classique les équations de Navier-Stokes avec des conditions de périodicité au bord (les dérivées spatiales sont évaluées par une méthode pseudo-spectrale, et la discrétisation en temps utilise un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre trois).

Première expérience, formation d'une structure tripôlaire

Cette première expérience consiste à observer la formation de la structure tripôlaire.

– *Paramètres numériques.*

(i) Résolution spatiale : la plus grande résolution possible est bien sur souhaitable pour pouvoir atteindre des viscosités faibles et traiter correctement la condition initiale discontinue. On prendra une grille de 256×256 points, ce qui nous permettra d'approcher la limite inertielle avec un temps de calcul raisonnable.

(ii) viscosité : on prendra $\nu_e = 1/2000$, ce qui est la plus petite viscosité compatible avec notre choix de résolution.

(iii) Pas de temps : $\Delta t = 0.001$.

– *Le résultat.*

On prend $r_3 = 1$. Le flot simulé est décrit sur la *figure* 1 : l'évolution du flot est représentée par les lignes de niveaux de la fonction tourbillon à différents instants. La condition initiale n'étant pas une solution stationnaire des équations, elle évolue immédiatement en un mouvement turbulent qui mélange les niveaux de vorticité 0, a_1, a_2. Après ce processus de mélange le système converge (en quelques dizaines de temps de retournement) vers un état quasi-stationnaire formé d'une structure tripôlaire qui n'évolue plus que par une lente diffusion visqueuse. Dans l'état final le système a atteint une configuration stationnaire

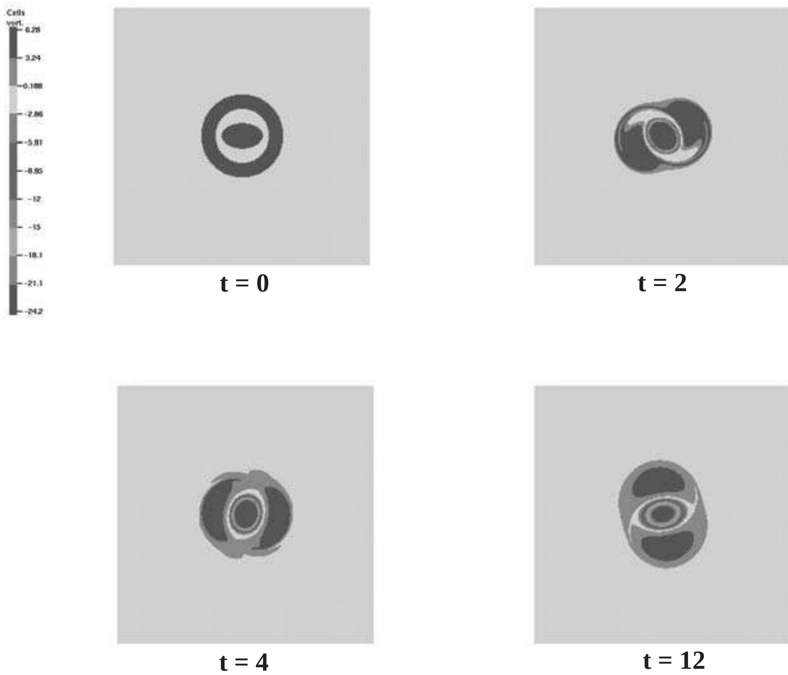

FIG. 1. Formation d'une structure cohérente tripôlaire. L'évolution est simulée avec un grand nombre de variables (256×256). On représente à différents instants les valeurs de la vorticité en chaque point, les valeurs sont indiquées par différents niveaux de gris. L'état initial est choisi de façon à ce que le système évolue rapidement vers une structure cohérente : il est constitué d'une ellipse où la vorticité est négative entourée d'une couronne où la vorticité est positive. Au début, la couronne se déforme et s'enroule de manière complexe autour de l'ellipse. Progressivement un système formé de trois tourbillons se constitue, puis se stabilise en une structure formée d'un tourbillon central entouré de deux tourbillons accolés tournant en sens inverse, le tout animé d'un mouvement de rotation uniforme. On n'aboutit donc pas à une évolution chaotique mais à une structure cohérente stable.

dans un repère en rotation uniforme. Si on diminue progressivement r_3, le même scénario se reproduit jusqu'à une valeur critique, approximativement égale à 0.9325, au dessous de laquelle le système ne donne plus un tripôle mais se scinde en deux dipôles *(voir figure 2)*.

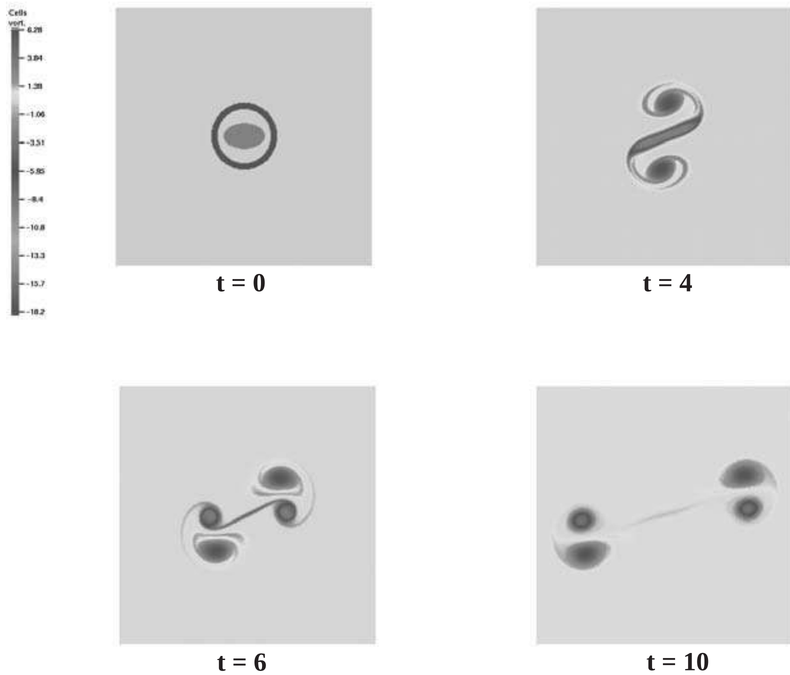

FIG. 2. En changeant l'état initial (couronne plus mince), on observe une organisation différente : le tourbillon central s'étire, puis le système se scinde en deux dipôles qui s'éloignent l'un de l'autre à vitesse constante.

Deuxième expérience, effet d'une perturbation de la condition initiale

La perturbation de la vorticité initiale (cas $r_3 = 1$) est prise suivant le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de l'opérateur linéarisé. La norme de l'énergie de la perturbation est prise égale à 1% de la norme de la condition initiale.

– *Le résultat.*

À l'œil nu on ne voit pas de différence notable avec le résultat non perturbé (figure 1) *(nous ne donnons pas les figures)*. Si l'on observait le flot à plus petite échelle on verrait des modifications au niveau des petites structures, mais l'écoulement à grande échelle n'apparaît pas affecté par la perturbation. Traçons maintenant la courbe donnant l'évolution de l'erreur relative en norme de l'énergie en fonction du temps (*figure 3*) :

$$e(t) = \left(\frac{\int \left|\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{u}_p(t,\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x}}{\int |\mathbf{u}(t,\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}} \right)^{1/2},$$

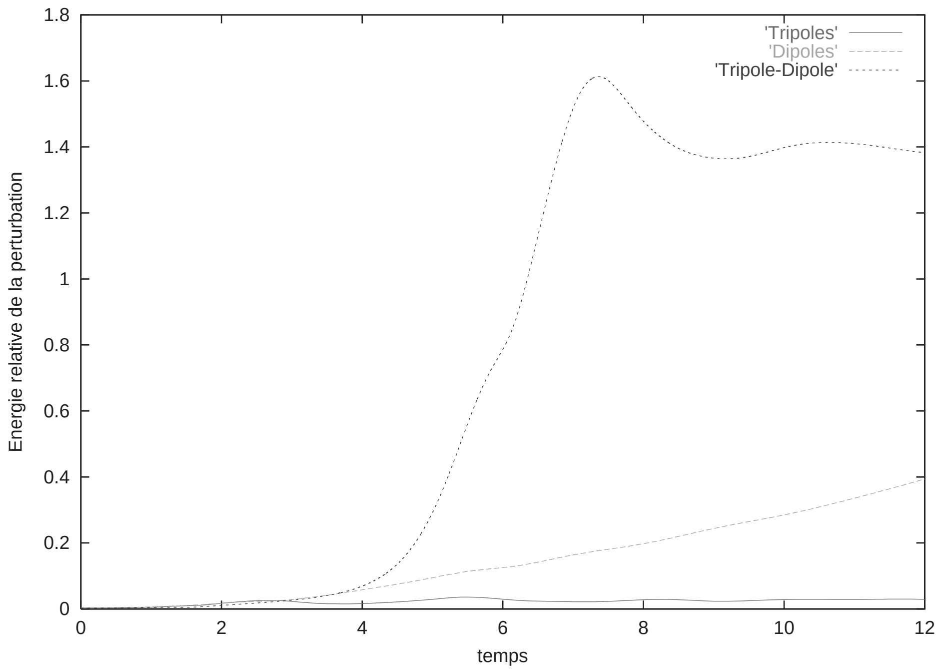

FIG. 3. Trois courbes de sensibilité correspondant à trois situations distinctes : formation d'un tripôle (en rouge), formation de deux dipôles (en vert), voisinage d'une bifurcation (en bleu). On notera la distinction très nette entre ces trois régimes.

où $\mathbf{u}_p(t, \mathbf{x})$ est la solution perturbée. On constate une phase de croissance exponentielle de $e(t)$ qui est assez brève (de l'ordre de quelques temps de retournement de la structure), puis de faibles oscillations et $e(t)$ se stabilise à une valeur proche de 0.04.

– Le cas $r_3 = 0.8$. Ici non plus il n'y a aucun effet visible à l'oeil nu, on observe toujours la formation de nos paires de tourbillons. En revanche, passé une courte période ou elle se superpose à la précédente, la norme en énergie de la perturbation à une croissance linéaire tout à fait caractéristique (*figure 3*).

– Le cas du rayon critique $r_3 = r_c = 0.9325$.

Dans ce cas le système non perturbé va former une structure tripôlaire alors que le système perturbé va donner naissance à deux dipôles. La courbe d'erreur (*voir figure 3*) montre clairement le phénomène de sensibilité exponentielle au moment de la séparation en deux dipôles.

Troisième expérience, on change le nombre de degrés de liberté

On fait exactement le même calcul que dans la première expérience ($r_3 = 1$), le seul paramètre changé étant le nombre de degrés de liberté D.

– *Les résultats.*

Cette fois, pour $D = 16 \times 16$, on n'observe plus la formation d'une structure et les oscillations « chaotiques » de la vorticité gagnent toute la boîte périodique. On constate maintenant que l'effet de la perturbation initiale gagne progressivement toutes les échelles de l'écoulement. Ceci apparaît très clairement sur la courbe d'erreur (*figure 4*), où l'on voit que, contrairement au cas $D = 256 \times 256$, l'erreur ne reste pas bloquée à une valeur faible.

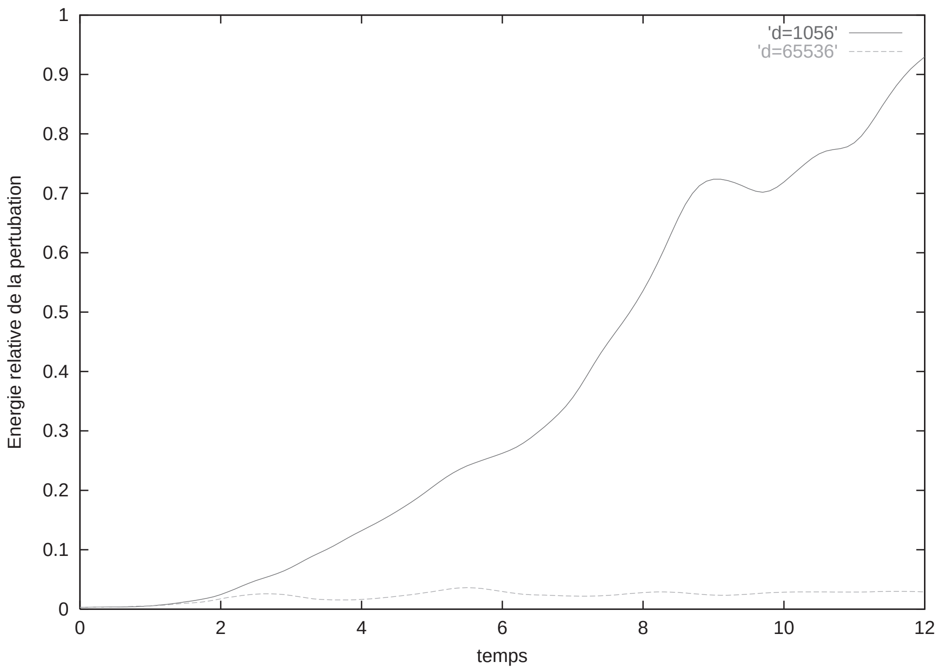

FIG. 4. Variation de la sensibilité suivant le nombre de degrés de liberté. En diminuant le nombre de degrés de liberté, on retrouve les observations de Lorenz.

Remarque

Pour $D = 16 \times 16$, l'équation que l'on résout numériquement (où on a gardé $\nu_e = 1/2000$) n'est plus une approximation raisonnable des équations de Navier-Stokes. C'est sans importance puisque nous testons le changement de comportement du système dynamique avec le nombre de degrés de liberté et non son adéquation en tant que modèle du mouvement fluide, adéquation qui n'apparaît que pour D grand.

Commentaires sur ces expériences

La deuxième expérience montre que lorsque le nombre de degrés de liberté du système est grand le phénomène de sensibilité par rapport à la condition initiale disparaît. Bien que le système soit très instable, la perturbation affecte essentiellement les petites échelles et n'a que peu d'influence sur le comportement à grande échelle du système. La sensibilité par rapport à la condition initiale peut se manifester cependant lorsqu'on se place au départ sur une « séparatrice » entre deux possibilités d'évolution « macroscopiques » différentes. Le système peut basculer soit vers une structure cohérente, soit vers une autre. Le système va alors changer de comportement à grande échelle parce qu'il est en fait au voisinage d'une transition de phase et qu'une petite perturbation des invariants (énergie, enstrophie...) peut changer son état d'équilibre statistique [10].

VI. Sur la prédictibilité des écoulements atmosphériques

L'étude de sensibilité aux conditions initiales présentée ci-dessus porte sur un processus d'auto-organisation particulier ; bien qu'il n'épuise pas à lui seul tous les comportements possibles des écoulement bidimensionnels, il est représentatif de ce que l'on observe dans la circulation atmosphérique, formée de structures cohérentes qui se déplacent autour de la planète et interagissent. D'autres simulations numériques font apparaître le même comportement : l'énergie de la perturbation est le plus souvent stationnaire ou à croissance linéaire, très rarement exponentielle.

En conclusion, nous pensons que l'image, suggérée par l'effet papillon, d'une perturbation à petite échelle se propageant et s'amplifiant en gagnant les grandes échelles de l'écoulement est trompeuse. Nous avons montré qu'avec un grand nombre de degrés de liberté la sensibilité exponentielle par rapport à la donnée initiale devient un phénomène exceptionnel, ce qui bien sûr améliore le pronostic en ce qui concerne la prévision.

Si la limite indépassable de deux semaines pour le temps de prédiction météorologique n'a pas de justification solide, on peut s'attendre à ce que les progrès constants de l'efficacité des processeurs, l'affinement du réseau d'observation, le perfectionnement des modèles et des méthodes numériques conduisent à des améliorations importantes de la fiabilité des prévisions dans les années à venir. Cela ne signifie pas pour autant qu'il n'y ait plus d'obstacles à franchir ; l'instabilité exponentielle, bien qu'exceptionnelle, demeure dans des situations critiques lorsque le système n'ayant pas d'état d'équilibre local bien défini peut basculer vers une structure ou vers une autre.

On pourra objecter que nous avons examiné ici le comportement d'un système relativement simple (le fluide parfait à deux dimensions) et que l'atmosphère terrestre est autrement plus complexe. À cela on peut répondre d'une part que c'est en reprenant l'étude du même système que celui que considéra Lorenz qu'on aboutit à une conclusion opposée ; et d'autre part que les principaux traits caractéristiques des modèles complexes qui modélisent de façon plus appropriée l'écoulement atmosphérique sont déjà présents dans l'équation du fluide parfait bidimensionnel, à savoir chaos à petite échelle, imprédictibilité des trajectoires des particules fluides et formation de structures cohérentes et que l'étude de ces modèles, d'un point de vue statistique, peut être entreprise de manière analogue. La principale simplification faite est l'élimination des mécanismes de forçage. En effet, l'atmosphère n'est en perpétuel mouvement que parce que des forces compensent les effets de dissipation d'énergie par frottement. Ce forçage a lieu sous la forme suivante : des courants de convection locaux avec des montées de colonnes d'air chaud et des descentes d'air froid se produisent ici ou là ; l'action de la force de Coriolis, due à la rotation de la terre, sur ces colonnes montantes ou descendantes force le mouvement fluide. Dans un premier temps il est légitime de négliger ces forces, dans les études de prédictibilité, dans la mesure ou le temps caractéristique de ce forçage (temps nécessaire pour que ces forces produisent un effet sensible) est nettement plus grand que le temps de relaxation vers les structures cohérentes : mais il est clair que les modèles effectifs de circulation doivent en tenir compte.

Moralité

Dans de multiples questions on se trouve face à des systèmes complexes qui possèdent un très grand nombre de degrés de liberté, et on se préoccupe généralement de prédire des quantités « macroscopiques » qui sont en fait des moyennes statistiques. Il découle assez clairement de ce qui précède que l'instabilité exponentielle du système « microscopique » n'est en rien synonyme d'imprédictibilité.

Remerciements

Je remercie très chaleureusement Carole Rosier de l'université Lyon I, qui a effectué avec autant de patience que de compétence les simulations numériques présentées ici.

Références

[1] V. I. Arnold – « Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **16** (1966), p. 319–361.

[2] V. I. Arnold et B. A. Khesin – *Topological methods in hydrodynamics*, Springer Verlag, 1996.

[3] X. Carton et B. Legras – « The life cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows », *J. Fluid Mech.* **267** (1994), p. 53–82.

[4] P. H. Chavanis, J. Sommeria et R. Robert – « Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems », *Astrophys. J.* **471** (1996), p. 385–399.

[5] E. N Lorenz – « A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model », *Tellus Ser. A* **17** (1965), p. 321–333.

[6] J. Hunt – « Prévision déterministe et statistique de l'environnement et de la turbulence », *Turbulence et déterminisme* (M. Lesieur, éd.), Presses universitaires de Grenoble, 1998.

[7] E. N. Lorenz – « Deterministic nonperiodic flow », *J. Atmospheric Sci.* **20** (1963), p. 130–141.

[8] L. Onsager – « Statistical hydrodynamics », *Nuovo Cimento Supp.* **6** (1949), p. 279.

[9] R. Robert et C. Rosier – « Long range predictability of atmospheric flows », *Nonlinear processes in geophysics* (2001).

[10] R. Robert et J. Sommeria – « Statistical equilibrium states for two-dimensional flows », *J. Fluid Mech.* **229** (1991), p. 291–310.

[11] V. I. Youdovitch – « Non-stationary flow of an incompressible liquid », *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **3** (1963), p. 1032–1066.

Femmes et mathématiques dans le monde occidental, un panorama historiographique

Renate Tobies [1]
(*Fraunhofer-Institut für Techno und Wirtschaftsmathematik*)

L'auteur, historienne des mathématiques, a enseigné dans plusieurs universités allemandes et, dernièrement, à l'université de Linz en Autriche, où elle a été professeur invitée en histoire des mathématiques et études sur les femmes. Elle est actuellement au Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik de Kaiserslautern où elle travaille dans le cadre du projet « Women in mathematics. Career Development in Mathematics under a gender-comparative Perspective » financé par la German Volkswagen Foundation.

Cet article a été traduit et annoté par Hélène Gispert avec l'aide de Jeanne Peiffer. Les notes ajoutées à cet article tentent d'apporter, en contrepoint des données pour l'Allemagne présentées par l'auteur, quelques éléments relatifs à la situation française; des travaux de Jeanne Peiffer sur l'historiographie des mathématiques en France (à paraître) et sur les sciences et les femmes dans le cadre des « Gender studies » sont également à l'origine de certaines des remarques et références bibliographiques complémentaires qui y figurent.

La participation des femmes à l'activité mathématique est étroitement liée aux positions et aux rôles qui sont les leurs dans la société. Aujourd'hui dans de nombreux pays des femmes mathématiciennes accèdent aux grades les plus élevés. Il reste que partout le développement des carrières des mathématiciennes se heurte à des obstacles persistants. En Allemagne, par exemple, seulement 3,4% des chaires de professeurs d'université en mathématiques sont occupées par des femmes [2]. C'est une des raisons pour lesquelles la fondation Volkswagen en Allemagne soutient un projet interdiscipinaire auquel collaborent des mathématiciens, des historiens des mathématiques et des socio-psychologues afin d'établir les différents facteurs qui interviennent dans le déroulement des carrières des femmes et des hommes en mathématiques. Cet article s'appuie

[1] L'auteur, Renate Tobies, dédie cet article au professeur docteur h.c. Helmut Neunzert, Kaiserslautern, en l'honneur de son 65e anniversaire le 2 août 2001. H. Neunzert est le fondateur de la chaire Sofja Kowalewskaja de professeur invitée à l'université de Kaiserslautern en Allemagne.

[2] Un tableau sur les pourcentages de femmes parmi les mathématiciens dans les différents pays d'Europe se trouve dans la revue *Femmes et maths*, 2 (1997), p. 4. Pour la grande majorité de ces pays le pourcentage de femmes parmi les professeurs d'université est compris entre 0% et 5%. Pour la France, ce pourcentage qui est égal à 10% est un des plus élevés; il n'est cependant pas sans intérêt de le relativiser en lui opposant le pourcentage de femmes parmi les maîtres de conférences des 25e et 26e sections qui est, lui, de 26% (*Femmes et maths*, 2 (1997), p. 65).

sur les recherches menées dans le cadre du volet historiographique de ce projet qui a débuté par une analyse de la littérature existante sur ce sujet.

Une première question s'est alors posée, celle de l'existence même d'une littérature spécifique sur les femmes et les mathématiques. Si l'on consulte le récent *Reader's Guide to the History of Science* (Hessenbruch, 2000), on ne trouve aucun titre sur ce sujet. Bien que ce livre donne une large place tant à l'histoire des mathématiques qu'au thème "femmes et sciences", il n'y a pas une seule référence spécifique à "femmes et mathématiques".

En fait, ceci semble surprenant dans la mesure où Fauvel (1994) rendait déjà compte de 28 livres et articles sur ce sujet. Il y a bien évidemment plus de 28 titres qui ont été publiés sur les femmes et les mathématiques jusqu'à aujourd'hui. La plupart d'entre eux ne sont consacrés qu'à des biographies de femmes mathématiciennes. C'est le cas du dernier paru, deux gros volumes du Biographical Dictionary of Women in Science (Olgivie/Harvey, 2000), dont l'organisation bio-bibliographique permet dans la plupart des cas un accès à la littérature de langue anglaise la plus récente. Dans cette tradition essentiellement biographique, qui est de fait très ancienne, on dispose d'un bon aperçu sur les femmes mathématiciennes les plus éminentes avec Grinstein/Campbell (1987) et l'Index of Women Mathematicians (http ://www.agnesscott.edu/lriddle/women/alpha.htm) qui font cependant l'impasse sur les recherches les plus récentes.

Dans son article Fauvel mentionnait quelques travaux pionniers des années 1970 aux USA parus à la faveur du mouvement féministe, dont la réédition d'un livre ancien de Mozans (1913/1974). Mais une première série de portraits de vingt et une femmes — de Hypathie à Kowalewskaja — avait été publié dès 1897 en Allemagne (Weyer, 1897) [3]. En fait, en se limitant à des séries ou monographies de portraits individuels de femmes exceptionnelles, la littérature existante constate, sauf exceptions notables, une absence des femmes dans les mathématiques jusqu'au vingtième siècle.

La première de ces exceptions est Hypathie d'Alexandrie (née en 415) dont il y a aujourd'hui beaucoup de biographies. Elle est la seule femme mathématicienne de l'Antiquité dont le nom nous soit parvenu. Une tradition voulant que la femme de Pythagore, neuf siècles plus tôt, ait été mathématicienne est trop peu fondée pour que l'on puisse la retenir. En ce qui concerne Hypathie, on dipose de très peu de matériaux primaires sur sa vie ; or tout ce qui ne s'appuie pas directement sur eux relève soit de la fiction, soit de la spéculation (voir www.agnesscott.edu/lriddle/women/hypatia.htm, www.polyamory.org/∼howard/Hypatia/primary-sources.html).

À partir du Moyen Âge, certaines femmes, en particulier dans les couches élevées de la société, recevaient une éducation au même titre que les hommes. Nous ne connaissons cependant aucun nom de femmes mathématiciennes pour cette période. Après la révolution scientifique, et plus particulièrement au cours du 18e siècle en France et en Italie des femmes lettrées accédèrent à une notoriété

[3] Au tournant du siècle on constate un foisonnement d'écrits de ce type, suscités en France par les nombreuses associations féministes de la Troisième République qui regroupaient alors entre 200 000 et 300 000 adhérentes. Citons, par exemple, A. Rebière (1897 et 1894), *Les femmes dans la science*, G. Loria, « Encore les femmes mathématiciennes », Revue scientifique (1904), M. d'Ocagne, *Quelques figures de mathématiciennes* (1925).

intellectuelle [4]. Les trois grandes figures les plus célèbres de femmes mathématiciennes d'alors sont Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), Gabrielle-Émilie du Châtelet (1706-1749) et Sophie Germain (1776-1831). L'ouvrage fondamental le plus récent sur la vie et l'œuvre de ces trois femmes est la thèse d'Ulrike Klens (1994). On peut y ajouter les articles de Dalmedico (1991), Peiffer (1992), Truesdell (1989) et Bucciarelli/Dworski (1980). Dans l'Angleterre de la première moitié du dix-neuvième siècle un certain nombre de femmes, dont les plus connues sont Mary Somerville (1780-1872) et Ada Byron King, Countess of Lovelace (1815-1852) (voir Patterson 1983, Brück 1996 et Stein 1985), ont également manifesté un intérêt créateur pour les mathématiques.

Le dix-neuvième siècle est encore un siècle où les femmes mathématiciennes sont des exceptions dans un monde mathématique universitaire qui leur est absolument fermé. La littérature, là encore, conduit à dresser une liste de « premières femmes » dans différents pays. Ainsi, le premier doctorat de mathématiques qui ait été délivré à une femme, le fut à la russe Sofja Kowalewskaja (1850-1891) dont la vie fut une lutte incessante pour accéder à ce qui était alors un privilège réservé aux hommes, étudier et professer. Emigrée, elle obtint en 1869 l'autorisation d'assister aux cours de l'université de Heidelberg. Elle voulut alors rejoindre Berlin pour suivre les cours de Karl Weierstrass (1815-1897). Les femmes n'ayant pas alors en Prusse le droit de s'inscrire à l'université, encouragée et soutenue par Weierstrass, elle envoya à l'université de Göttingen trois thèses — l'une sur les équations aux dérivées partielles intégrales, la seconde sur les intégrales abéliennes et la troisième sur la forme des anneaux de Saturne —, à la suite de quoi l'université lui délivra en 1874 son doctorat *in absentia* avec la mention la plus élevée. Nommée professeur à Stockholm en 1884, membre du comité de rédaction des *Acta Mathematica*, Sofja Kowalewskaja fut la première femme mathématicienne professionnelle.[5] Elle devint pour beaucoup un symbole de ce qu'une femme peut accomplir dès lors que certaines conditions le permettent. L'université de Kaiserslautern a ainsi, par exemple, inauguré en 1991 une chaire de mathématiques appliquées Sofja Kowalewskaja

[4] Dans son article, « L'engouement des femmes pour les sciences au XVIIIe siècle », Jeanne Peiffer caractérise l'éducation scientifique proposée aux filles. Elle insiste sur son caractère exclusivement qualitatif. Tout ce qui regarde — selon les termes de l'époque — les sciences abstraites, la mécanique, la géométrie, l'algèbre, en est retranché. On retrouve des réticences de même type dans les programmes (ainsi que dans les commentaires et débats qui les accompagnent) à la fin du 19e siècle lorsque la Troisième République instaure l'enseignement secondaire féminin (voir note 8). Cet article est paru dans l'ouvrage *Femmes et pouvoirs sous l'Ancien Régime*, sous la direction de D. Haase-Dubosc et E. Viennot, aux Éditions Rivages (1991).

[5] La situation personnelle et professionnelle de S. Kowalewskaja est plusieurs fois évoquée dans les lettres d'Hermite à Mittag Leffler. Citons, par exemple, cet extrait d'une lettre du 25 octobre 1882, significatif des difficultés et des préjugés auxquels Kowalewskaja a du se heurter : « Hier j'ai eu avec M. Tchebichew un entretien, qui m'a fait bien de la peine, au sujet de Madame de Kowalewski, qui est à Paris, pendant que son mari est à Moscou et sa fille à Odessa. M. Tchebichew fait reproche à M. Weierstrass d'avoir ainsi dérangé l'existence d'une femme, mère de famille, en lui mettant en tête de traiter des questions difficiles, qu'elle ne résoudra point, assure-t-il, et au détriment de devoirs qui passent avant la science. Je l'ai laissé dire, sentant bien en moi-même qu'il avait raison. » « Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883) », publiées et annotées par P. Dugac, *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 5 (1984), p. 177.

pour des professeurs femmes invitées. La biographie la plus importante qui ait été consacrée à Sofja Kowalewskaja en langue anglaise est celle de Koblitz (1983) [6]. Ses travaux mathématiques ont fait l'objet d'une analyse approfondie par Cook (1984), l'intégralité de sa thèse ayant été éditée pour la première fois par Tollmien (1997). Ce dernier a également écrit une biographie grand public (1995) pour laquelle il a eu recours à des sources inédites sur la vie politique de Kowalewskaja.

Dans la décennie qui suivit la thèse de Sofja Kowalewskaja, il n'y eut que deux autres thèses de mathématiques soutenues par des femmes, l'une en Suisse, l'autre en Angleterre. La russe Jelisbeta Fjodorowna (1845-1919) fut ainsi la seconde femme à obtenir le grade de docteur en mathématiques ; c'est en Suisse, à l'université de Berne qu'elle soutint en 1878 son doctorat. Quelques années plus tard, en 1885, l'anglaise Charlotte Angas Scott (1858-1931) devint à son tour docteur en mathématiques à l'université de Londres. Elle joua très vite un rôle clé dans la création de l'American Mathematical Society et eut une influence considérable sur la communauté mathématique américaine alors en plein développement et particulièrement sur la part qu'y prirent les femmes (Fenster/Parshall 1993b). Elle fut pendant une quarantaine d'années, de 1885 à 1925, la responsable des études mathématiques au célèbre collège Bryn Mawr. Dès les années 1890 elle encouragea les jeunes mathématiciennes à poursuivre leurs études en Europe, tout particulièrement à Göttingen qui était devenu, avec Felix Klein (1849-1925) et David Hilbert (1862-1943) qui cherchaient également à promouvoir des femmes mathématiciennes, un centre international de mathématiques (Tobies, 1999).

Avec la toute fin du 19e siècle le nombre de femmes docteurs augmente plus rapidement, sans que cela renvoie nécessairement à des changements institutionnels significatifs dans l'accès des femmes aux universités. Ainsi, trois femmes, qui ont chacune fait l'objet de biographies, obtinrent un doctorat en 1895 : Thyra Eibe, à l'université de Coppenhague (Hoyrup, 1993) et Marie Gernet (1865-1924) à Heidelberg (Tobies, 1997), respectivement première femme docteur en mathématiques au Danemark et en Allemagne, et Grace Chisholm (1868-1944) à Göttingen avec Klein (Grattan-Guinness, 1972 ; Mühlhausen, 1993).

Leur devenir mathématique est très instructif quant au statut que pouvait alors avoir les femmes dans la vie mathématique. Grace Chisholm, qui n'eut jamais de reconnaissance institutionnelle, est connue pour avoir écrit avec son mari, le mathématicien William Henry Young (1863-1942), président de l'Union Mathématique Internationale dans les années 1930, le premier livre en langue anglaise sur la théorie des ensembles. Leur couple est le premier exemple significatif d'une « collaboration » mathématique entre mari et femme (théorie de la mesure, analyse de Fourier). Marie Gernet, par contre, demeura inconnue pendant longtemps. Après sa thèse sur les fonctions hyperelliptiques menée sous la direction de Leo Kœnigsberger, elle dut travailler comme institutrice et ne poursuivit pas ses recherches.

[6] On peut ajouter également en langue française le livre de Jaqueline Detraz, *Sofia Kovalevskaya 1850-1891, l'aventure d'une mathématicienne*, Belin (1993).

À la fin du 19e siècle plusieurs pays ont ouvert leurs universités aux femmes. L'Allemagne ne le fit que très tard [7], chaque état procédant indépendamment, en fonction de ses propres lois sur l'éducation (Tobies, 1997). Dans l'état de Baden (avec les universités de Heidelberg, Freiburg et Karlsruhe) la situation des étudiantes se régularisa à partir de 1900, en Bavière à partir de 1903. En Prusse, l'état le plus important avec le plus grand nombre d'universités (dix universités en 1900), un tel décret ne fut promulgué qu'en 1908. À Göttingen, les femmes ne pouvaient s'inscrire jusqu'à cette date dans les universités où elles n'étaient tolérées que comme auditrices. C'était à chaque professeur de décider s'il acceptait ou non qu'une femme assiste à ses cours et séminaires.

Avant cette loi, Felix Klein obtint pour la première fois du gouvernement prussien l'autorisation d'encourager officiellement l'accès d'étudiantes à l'université (voir Tobies, 1991/1992). Durant le semestre d'hiver de 1893-94, trois femmes vinrent étudier les mathématiques et les sciences à Göttingen. Toutes les trois étaient étrangères ; il s'agissait de l'anglaise Grace Chisholm déjà citée et des américaines Mary F. Winston (1869-1942) qui obtint son doctorat en 1897 avec Klein et Margaret E. Maltby (1860-1944) première femme, en 1895, à soutenir une thèse de physique dans une université allemande.

Ces femmes étrangères tracèrent la voie aux femmes allemandes qui jusqu'en 1908 ne bénéficiaient pas d'un enseignement secondaire de mathématiques et de sciences. Ce n'est qu'à cette date que ces matières furent enfin enseignées en Allemagne dans les établissements secondaires de filles [8]. Jusque là, l'éducation des femmes, en mathématiques comme en sciences, ne pouvait être que privée. L'historiographie disponible sur les femmes et les mathématiques dans les premières années du 20e siècle ne s'attache toujours qu'à quelques rares figures exceptionnelles comme Emmy Nœther (1882-1935) ou Hilda Geiringer (1893-1973) première femme à obtenir une *venia legendi* en mathématiques appliquées. Emmy Nœther, une des personnalités phare des mathématiques du

---

[7] Que dire de la France où, malgré la vivacité des mouvements féministes, ce n'est qu'en 1924 que le baccalauréat, nécessaire pour entrer à l'université, est enfin créé pour l'enseignement secondaire féminin. Certes, des jeunes filles, en passant le baccalauréat de l'enseignement secondaire masculin, pouvaient avoir accès aux études supérieures. Mais même si elles furent de plus en plus nombreuses à partir des années 1900, il demeure que la vocation « naturelle » de l'enseignement secondaire féminin, à la différence de son homologue masculin, n'était pas l'enseignement supérieur. En 1902, les étudiantes françaises dans les facultés de sciences en France n'étaient que 40 et représentaient moins de 1% des inscrits. (On pourra lire les paragraphes consacrés aux femmes dans le milieu mathématique dans l'ouvrage d'Hélène Gispert, *La France mathématique*, SFHST&SMF (1991), pp. 150-152). À la liste des « premières » femmes diplômées, nous pouvons ajouter, pour la France, une illustre inconnue qui obtint en 1893 une thèse d'astronomie, dont le président du jury, Gaston Darboux, insiste dans son rapport sur sa qualité de première femme docteur de l'université française et la replace dans la lignée des rares femmes mathématiciennes dans l'histoire (voir op. cité, p. 86).

[8] En France, par contre, les mathématiques et les sciences physiques et naturelles font, dès son origine en 1882, partie de l'enseignement secondaire féminin. Mais les programmes sont revus à la baisse à la fin du siècle, entre autres en ce qui concerne les mathématiques (on propose même de supprimer la géométrie, ce qui ne se fera pas) et les sciences. Cet enseignement reste une pale copie de son homologue masculin jusqu'au milieu des années 1920. On pourra consulter les programmes dans l'ouvrage de B. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914)*, INRP-Economica (1995).

début du siècle, obtint son doctorat à l'Université d'Erlangen avec Paul Gordan (1837-1912), le roi de la théorie des invariants jusqu'à l'entrée en scène de Hilbert. D'origine juive, elle était la fille aînée du mathématicien Max Nœther. Elle fut la mathématicienne la plus productive (Nœther, 1983) et créa sa propre école mathématique en algèbre abstraite : plus de quinze étudiants passèrent leur thèse sous sa direction. Klein et Hilbert reconnurent son importance, la firent venir à Göttingen et réussirent, après deux tentatives infructueuses, à lui faire soutenir une habilitation en 1919, juste avant qu'une nouvelle loi fut votée autorisant l'habilitation à la fois pour les hommes et les femmes. Elle fut, en Allemagne, la première à obtenir le titre de professeur, même si cette fonction ne fut pas rémunérée ; c'est en tant que lectrice qu'elle était rétribuée. En 1933, à la suite de la « clause aryenne » de la loi nazie sur les fonctionnaires d'état, elle perdit son poste, émigra aux États-Unis et trouva un havre à Bryn Mawr (voir les biographies (Dick, 1970 ; Brewer/Smith, 1981)). On manque toujours d'une étude détaillée d'importance sur son œuvre bien que ses méthodes eurent une grande influence, non seulement en algèbre, mais dans d'autres domaines (Koreuber, 2001 ; Koreuber/Große-Rhode, 1998).

Hilda Geiringer fut également confrontée à des difficultés de carrière à la fois parce que femme et juive. Elle soutint en 1917 à l'université de Vienne un doctorat sur les séries de Fourier de deux variables sous la direction de Wilhelm Wirtinger (1865-1945). Comme les véritables mathématiciens appliqués étaient rares, Richard von Mises (1883-1953) l'embaucha en 1921 comme assistante dans son laboratoire de mathématiques appliquées de l'université de Berlin. De 1921 à 1923 elle fut mariée au statisticien Felix Pollaczek (1892-1981). Bien que ses propres travaux en statistiques et en plasticité avançaient bien, elle demeura dans l'ombre de von Mises. En 1933, elle aussi fut licenciée et elle suivit von Mises à Istanbul puis aux États-Unis où ils arrivèrent en 1940. Elle n'y obtint jamais de véritable poste. Après la mort de von Mises, qu'elle avait épousé en 1943, elle se consacra presque exclusivement à l'édition des travaux de ce dernier, en particulier sa *Théorie mathématique des statistiques et probabilités* parue en 1964 (Binder, 1992 et 1995 ; Siegmund-Schultze, 1993 ; Vogt, 1994).

Depuis les années 1980 on assiste à un tournant historiographique. Avec le développement des approches féministes en histoire des sciences et des études dites de « gender studies », on trouve une réflexion plus profonde sur les facteurs affectant au vingtième siècle la participation des femmes, en tant que catégorie sociologique, à l'activité mathématique [9]. Il est vrai qu'au vingtième siècle le nombre de femmes ayant un doctorat de mathématiques a beaucoup augmenté — ce qui reste relatif — et qu'elles ont apporté des contributions importantes.

On trouve plusieurs travaux substantiels sur des communautés de mathématiciennes dans les premières décennies du vingtième siècle. Citons pour les USA (Green/La Duke, 1987 et 1990 ; Fenster/Parshall, 1993b), pour l'Italie (Fenaroli et al., 1990), et pour l'Allemagne (Tobies, 1997 et 1998 ; Görgen/Tobies,

[9] Ces études ne se limitent pas au seul vingtième siècle ; voir l'article déjà cité de Jeanne Peiffer sur le 18e siècle qui s'inscrit dans cette nouvelle littérature féministe traitant des conditions spécifiques d'accès des femmes instruites aux sciences et aux mathématiques.

2001 ; Abele et al. 2001). Aux USA, 229 femmes obtinrent leur PH D de mathématiques avant 1940. En Allemagne, 113 femmes passèrent un doctorat de mathématiques entre 1907/1908 et 1944/45, pour 1224 hommes (Görgen/Tobies, 2001). Mais l'histoire n'a pas été celle d'un progrès constant de la participation des femmes au monde mathématique. Aux USA ce n'est que dans les années 1970 que les femmes regagnèrent la part qu'elles occupaient au début du siècle parmi les diplômés de mathématiques (Kenschaft, 1981).

La direction de recherche la plus récente dans ces études sur les femmes et les mathématiques s'intéresse à la comparaison des carrières des femmes et des hommes, leur début de recherche comme leur progression de carrière. Il n'existe que peu d'études historiques de ce genre dont, pour l'Allemagne et les USA, (Fenster/Parshall, 1993 a,b ; Abele et al., 2001, Görgen/Tobies, 2001). Cet axe de recherche est plus développé en sociologie, psychologie sociale et didactique des mathématiques. Certains chercheurs ont tenté d'attribuer le déséquilibre dans les contributions des hommes et des femmes en mathématiques, ainsi que des différences de performances scolaires, toujours en mathématiques, entre filles et garçons à des facteurs génétiques intrinsèques que des tests psychologiques auraient prouvé (Armstrong, 1979 ; Beermann et al., 1992 ; Benbow/Arjmand, 1990 ; Fennema, 1985). Il nous semble que ces études, et les arguments qu'elles développent, peuvent au mieux être considérés comme s'inscrivant dans une tradition ancienne de fausse rationalisation pseudo-scientifiques de l'infériorité de la femme [10]. Même s'il y a des différences mineures dans les performances scolaires des filles et des garçons en mathématiques (Kaiser, 2000 ; Kaiser/Steisel, 2000) et même si leurs intérêts peuvent être fonction du genre (Baumert et al., 1998), les explications d'ordre génétique ne sont pas déterminantes. Il est de mieux en mieux connu que les attentes sociales relatives aux comportements, qui peuvent s'exprimer de façon multiple et complexe, interviennent de façon essentielle dans la détermination des performances mathématiques. Les résultats les plus récents, établis en collaboration par des mathématiciens, historiens des mathématiques et des psycho-sociologues, sont présentés dans (Abele et al., 2001) [11].

Je pense que le nombre de femmes mathématiciennes, qui est aujourd'hui très différent en fonction des pays, va continuer à croître. Cela en partie grâce à l'action de diverses organisations, comme l'American Association for Women in Mathematics et l'European Women in Mathematics, créées pour promouvoir les intérêts et veiller au développement des femmes en mathématiques.

Bibliographie

• Abele, Andrea ; Neunzert, Helmut ; Tobies, Renate ; Krüsken, Jan (2001) : « Frauen und Männer in der Mathematik. Früher und heute ». *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Heft 2, 8–16.

[10] Une critique de ce type d'arguments a par exemple été développée dans un article de Catherine Goldstein, « Une créativité spécifique des femmes en mathématiques ? Questions à une question », *Sextant*, 2 (1994), 105-128.

[11] Voir également sur cette question, par exemple, F. Mariotti, « Place et statut des mathématiques dans la genèse par sexes de la structure de la représentation sociale des métiers scientifiques », *Femmes et maths*, 5 (2000), 5-19.

• Armstrong, J.-M. (1979) : *Achievement and participation of women in mathematics : An overview.* Denver : Education Commission of the States.

• Baumert, J. ; Schnabel, K. ; Lehrke, M. (1998) : « Learning math in school : does interest really matter ? » In : L. Hoffmann, A. Krapp, K.A. Renninger und J. Baumert (eds.), *Interest and learning*, Kiel : Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, 327–336.

• Beermann, Lilly ; Heller, Kurt A. ; Menacher, Pauline (1992) : *Mathe : nichts für Mädchen ? Begabung und Geschlecht am Beispiel von Mathematik, Naturwissenschaft und Technik.* Bern : Hans Huber.

• Benbow, C.P. ; Arjmand, O. (1990) : « Predictors of High Academic Achievement in Mathematics and Science by Mathematically Talented Students : A Longitudinal Study ». *Journal of Educational Psychology* 82, 430–441.

• Binder, Christa (1992) : « Hilda Geiringer : ihre ersten Jahre in Amerika ». *Amphora. Festschrift für Hans Wußing zu seinem 65. Geburtstag*, ed. by S.S. Demidov, M. Folkerts, D.E. Rowe and Ch.J. Scriba. Berlin, Boston, Basel : Birkhäuser, 25-53.

(1995) : « Beiträge zu einer Biographie von Hilda Geiringer - Jugend und Studium in Wien ». GAMM-Mitteilungen, Nr. 4, 61–72.

• Brewer, James W. ; Smith, Martha K. (1981) : *Emmy Nœther. A Tribute to her Life and Work.* New York.

• Brück, Mary (1996) : « Mary Somerville, mathematician and astronomer of underused talents ». *Journal of the British Astronomical Association* 106, 4, 201–206.

• Bucciarelli, L.-L. ; Dworski, N. (1 980) : *Sophie Germain : An Essay in the History of the Theory of Elasticity.* Dordrecht : Reidel.

• Cooke, Roger (1984) : *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya.* New York : Springer.

• Creese, Mary R.S. (1998) : *Ladies in the Laboratory ? American and British Women in Science, 1800-1900 : a survey of their contributions to Research.* Lanham, Md. and London : The Scarecrow Press, Inc.

• Dalmedico, Amy Dahan (1991) : « Sophie Germain ». *Scientific American Dec.*, 117–122.

• Dick, Auguste (1970) : *Emmy Nœther.* Basel : Birkhäuser.

• Fauvel, John (1994) : « Women and mathematics ». *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, ed. by I. Grattan-Guinness, London and New York : Routledge, Vol. 2, 1526–1532.

• Fenaroli, G. ; Furinghetti, F. ; Garibaldi, A.C. ; Somaglia, A.M. (1990) : « Women and mathematical research in Italy during the period 1887-1946 ». *Gender and Mathematics : An international Perspective*, ed. by L. Burton. London : Cassell, 144–155.

• Fennema, E. (ed.) (1985) « Explaining sex-related differences in mathematics : Theoretical models ». *Educational Studies in Mathematics* 16, 303–320.

• Fenster, Della Dumbaugh ; Parshall, Karen Hunger (1993a) : « A Profile of the American Mathematical Research Community : 1891-1906 ». *The History of Modern Mathematics Vol. 3*, ed. by E. Knobloch and D.-E. Rowe. Boston : Springer, 179–227.

(1993b) « Women in the American Mathematical Research Community : 1891-1906 ». *The History of Modern Mathematics Vol. 3*, ed. by E. Knobloch and D.-E. Rowe. Boston : Springer, 229–161.

• Görgen, Uli ; Tobies, Renate (2001) : *Verzeichnis der mathematischen Dissertationen, die von 1907/08 bis 1944/45 an deutschen Universitäten verteidigt wurden, analysiert nach den Fachgebieten und nach dem Geschlecht der Promovierten.* Kaiserslautern.

• Grattan-Guinness, Ivor (1972) : « A mathematical union : William Henry and Grace Chisholm Young ». *Annals of Science* 29, 105–186.

• Green, Judy ; LaDuke, Jeanne (1987) : « Women in the American Mathematical Community : The Pre-1940 Ph.D.'s ». *The Mathematical Intelligencer* 9, 11–23.

(1990) : « Contributors to American mathematics : An overview and selection ». *Women of Science : Righting the Record*, ed. by G. Kass-Simon and P. Farnes. Bloomington, IN : Indiana University Press, 117-146.

• Grinstein, Louise S. ; Campbell, Paul J. (eds.) (1987) : *Women of Mathematics* (A Biobibliographic Sourcebook). New York, Westport CT and London.

• Hag, Kari ; Lindqvist, Peter (1997) : « Elisabeth Stephansen. A pioneer ». *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab* (Trondheim), Skrifter 2, 1–23.

• Hessenbruch, Arne (ed.) (2000) : *Reader's Guide to the History of Science*. London and Chicago Fitzroy Dearborn Publishers.

• Hoyrup, Else (1993) : « Thyra Eibe - the first female mathematician in Dänemark ». *Normat* 41, No.2, 41–44.

• Kaiser, Gabriele (2000) : « Internationale Vergleichsuntersuchungen im Mathematikunterricht - eine Auseinandersetzung mit ihren Möglichkeiten und Grenzen ». *Journal für Mathematik-Didaktik* 21, 171–192.

• Kaiser, Gabriele ; Steisel, T. (2000) : « Results of an Analysis of the TIMS Study from a Gender Perspective ». *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 32, 1, 18–24.

• Kenschaft, P.C. (1981) : « Black women in mathematics in the United States ». *American Mathematical Monthly* 88, 592–604.

(1982)« Women in mathematics around 1900 ». *Signs : Journal of Women in Culture and Society* 7, 906–909.

• Klens, Ulrike (1994) : *Mathematikerinnen im 18. Jahrhundert : Maria Gaetana Agnesi, Gabrielle-Emilie DuChâtelet, Sophie Germain. Fallstudie zur Wechselwirkung von Wissenschaft und Philosophie im Zeitalter der Aufklärung* (Forum Frauengeschichte, Vol. 12). Paffenweiler : Centaurus.

• Koblitz, Ann Hibner (1983) : *A Convergence of Lives. Sofia Kovalevskaia : Scientists, Writer, Revolutionary.* Boston, MA : Birkhäuser.

• Koreuber, Mechthild (2001) : « Emmy Nœther, die Nœther-Schule und die "Moderne Algebra" Vom begrifflichen Denken zur strukturellen Mathematik ». H. Götschel and H. Daduna (eds.), *Perspektiven-Wechsel : Frauen- und Geschlechterforschung zu Mathematik und Naturwissenschaften* (Talheimer Sammlung kritisches Wissen, Vol. 12). Mössingen-Talheim : Talheimer Verlag, 54–74.

• Koreuber, Mechthild ; Große-Rhode, Martin (1998) : « Vom Begriff zur Kategorie. Ein Beitrag zur Bedeutung Emmy Nœthers für die Informatik ». D. Siefkes (ed.), *Sozialgeschichte der Informatik.* Wiesbaden : Deutscher Universitätsverlag, 151–173.

• Mason, Joan (1991) : « Hertha Ayrton (1854-1923) and the admission of women to the Royal Society of London ». *Notes Rec. Royal Society of London* 45 (2), 201–220.

• Mason, Joan (1995) : « The Women Fellows' Jubelee ». *Notes Rec. Royal Society of London* 49 (1), 125–140.

• Mozans, H. J. (1913) : *Women in Science : With an Introductory Chapter on Women's Long Struggle for Things of the Mind.* Cambridge, MA : MIT Press [repr. 1974].

• Mühlhausen, Elisabeth (1993) : « Grace Emily Chisholm Young (1868-1944) ». *Bedeutende Frauen Göttingens*, ed. by T. Weber-Reich. Göttingen : Wallstein.

• Nœther, Emmy (1983) : *Collected Papers*, ed. by N. Jacobson. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer.

• Ogilvie, Marilyn ; Harvey, Joy (eds.) (2000) : *The Biographical Dictionary of Women in Science. Pioneering Lives from Ancient Times to the Mid-20th Century.* Vol. 1, 2. New York and London : Routledge.

• Patterson, Elizabeth C. (1983) : *Mary Somerville and the Cultivation of Science 1815-1840.* The Hugue : Nijhoff 1983.

• Peiffer, Jeanne (1992) : « Damenwissenschaften in der französischen Aufklärung - einfacher Zeitvertreib oder Teilnahme an der Gelehrsamkeit ? » Frauen und Mathematik. Die allmähliche Rückeroberung der Normalität, ed. by A. Grabosch and A. Zwölfer. Tübingen.

• Pieper-Seier, Irene (1997) : « Ruth Moufang : Eine Mathematikerin zwischen Industrie und Universität ». « Aller Männerkultur zum Trotz » : *Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften*, ed. by R. Tobies, Frankfurt a.M. and New York : Campus, 181–202.

• Siegmund-Schultze, Reinhard (1993) : « Hilda Geiringer-von Mises, Charlier Series, Ideology, and the Human Side of the Emancipation of Applied Mathematics at the University of Berlin during the 1920s ». *Historia Mathematica* 20, 364–381.

• Stein, D. (1985) : *Ada : A life and a Legacy*. Cambridge, MA : MIT Press.

• Tobies, Renate (ed.) (1997) : « Aller Männerkultur zum Trotz » : Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften. Frankfurt a.M. and New York : Campus.

(1991/92) : « Zum Beginn des mathematischen Frauenstudiums in Preußen ». *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 28, 151–172.

(1997) « Mathematikerinnen und ihre Doktorväter ». *« Aller Männerkultur zum Trotz »* : Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften, ed. by R. Tobies, Frankfurt a.M. and New York : Campus, 131–158.

(1998) : « 'Angewandte Mathematik ist schmutzige Mathematik'. Die Rolle von Frauen in diesem Gebiet in den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts ». *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte* 18 (1998), 15–35.

(1999) « Felix Klein und David Hilbert als Förderer von Frauen in der Mathematik ». *Prague Studies in the History of Science and Technology, N.S.* Vol. 3, 69–101.

• Tollmien, Cordula (1991) : *« Die Habilitation von Emmy Nœther an der Universität Göttingen »* . NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 28, 1–11.

(1995) : Fürstin der Wissenschaft. Die Lebensgeschichte der Sofja Kowalewskaja. *Weinheim and Basel : Beltz.*

(1997) *« Zwei erste Promotionen : Die Mathematikerin Sofja Kowalewskaja und die Chemikerin Julia Lermontowa ».* « Aller Männerkultur zum Trotz » : Frauen in Mathematik und Naturwissenschaften, *ed. by R. Tobies, Frankfurt a.M. and New York* : Campus, 83-129.

• Truesdell, C. (1989) : *« Maria Gaetana Agnesi »* . Archive for History of Exact Sciences 40, 113–142.

• Vogt, Annette (1994) : *« Hilda Pollaczek-Geiringer (1893-1973) - erste Privatdozentin für Mathematik an der Berliner Universität »* . Dialektik, Enzyklopädische Zeitschrift für Philosophie und Wissenschaften pp. 157–162.

• Weyer, Georg (1897) : *« Weibliche wissenschaftliche Leistungen in den Gebieten Mathematik, Astronomie und Nautik »* . Die Akademische Frau. Gutachten hervorragender Universitätsprofessoren, Frauenlehrer und Schriftsteller über die Befähigung der Frau zum wissenschaftlichen Studium und Berufe, *ed. by A. Kirchhoff. Berlin : Hugo Steinitz, 234–255.*

Documentation mathématique
Enjeux et éléments de réponse

Pierre Bérard (*Cellule MathDoc et Institut Fourier, Grenoble*)

Enjeux

La documentation joue un rôle primordial dans tous les domaines scientifiques et tout particulièrement en mathématiques. Trois raisons au moins pour ce qui nous concerne.

• Une publication mathématique contient l'intégralité d'un résultat qui est ainsi immédiatement utilisable par la communauté scientifique.

• Un résultat mathématique jouit, à priori, d'un caractère pérenne et l'utilisation d'articles anciens est fréquente. Ainsi, les œuvres de H. Poincaré sont toujours d'actualité aujourd'hui.

• Il y a un caractère "imprévisible" dans les mathématiques. Certaines notions, certains résultats ont, parfois contre toute attente, un impact important sur les sciences (c'est la "unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences" évoquée par le physicien E. Wigner), sur l'ingénierie ou sur les mathématiques elles-mêmes, des années après leur découverte.

La documentation est, pour un mathématicien, une source essentielle d'inspiration, de concepts et d'outils. C'est dans les exemples, parfois du passé (surfaces minimales, équations différentielles, *etc*.), qu'il forge son intuition. C'est dans le corpus des résultats acquis qu'il trouve ses outils. C'est souvent en faisant des rapprochements inattendus entre champs mathématiques a priori éloignés qu'il fait progresser sa science (ce qui explique, au moins en partie, l'importance des revues mathématiques généralistes, et elles sont majoritaires). La documentation constitue donc en mathématiques une ressource "stratégique" à laquelle la communauté consacre beaucoup de soins et une part importante de son budget de recherche. L'avènement de l'ère électronique n'a pas changé fondamentalement la relation des mathématiciens à la documentation, mais elle a renforcé l'importance de certaines ressources documentaires[1].

• Importance des bases de données pour retrouver les informations pertinentes dans une littérature cumulative, à croissance exponentielle (moins de 1 000 articles par an vers la fin des années 1800, plus de 70 000 aujourd'hui).

• Importance de la littérature grise (en particulier par l'intermédiaire de serveurs de prépublications, dont certains commencent à jouer le rôle d'archives numériques).

[1] La communauté mathématique n'est bien sûr pas la seule à se préoccuper de ces questions. Mentionnons, également celles des physiciens et des chercheurs en sciences de la vie qui sont très actives dans ce domaine.

• Importance de l'accès électronique aux revues spécialisées (versions en-ligne et archives numérisées) et des liens croisés entre ressources numériques.

• Importance de l'archivage à très long terme (en particulier celui des documents numériques).

La concentration dans le monde de l'édition, la création de services à valeur ajoutée par les éditeurs commerciaux et la pression budgétaire sur les bibliothèques (augmentations des tarifs d'abonnement, sur-coûts pour les accès électroniques) le montrent, la documentation est devenue un *enjeu commercial* extrêment important[2].
Tous les aspects de la documentation (ainsi que les modalités de sa diffusion) sont concernés, depuis les prépublications jusqu'aux revues, en passant par les bases de données, la numérisation des fonds anciens (et même les logiciels de gestion documentaire ou, aujourd'hui, de gestion électronique de documents).
De grands groupes commerciaux, plus préoccupés par les gains des actionnaires que par la diffusion de la science, tentent aujourd'hui d'occuper l'ensemble du terrain : celui des revues et des services associés bien sûr mais aussi, et c'est nouveau, celui des prépublications, *etc*. En accaparant, par le biais de certains accords de consortium, les moyens budgétaires dont nous disposons, ils mettent également en péril les éditeurs de taille modeste et en particulier les éditeurs à caractère académique.
La documentation est pour nous, producteurs et utilisateurs de contenu, un enjeu scientifique et politique. Serons-nous demain libres d'accéder à la documentation dont nous avons besoin, à quel prix et dans quelles conditions ?
Concernant les revues, et au delà des questions techniques (contraintes budgétaires, marchés, *etc*.) et des stratégies des établissements ou des organismes de recherche, il me semble primordial de veiller à plusieurs points fondamentaux :

• Choix des titres selon des critères scientifiques (rapport qualité/prix : voir à ce sujet l'analyse faite par U. Rehmann à Bielefeld[3] et l'article K. Frazier[4]), en adéquation aux priorités des laboratoires.

• Garanties sur la pérennité des documents et sur les conditions d'accès (à très long terme) aux collections (numériques ou imprimées).

• Soutien à l'édition académique, souvent de grande qualité, qui est un facteur de modération des coûts d'abonnements (voir l'analyse de U. Rehmann).

• Implication forte de la communauté scientifique (qui alimente les revues, qui fait partie des comités éditoriaux, qui assure le contrôle scientifique des publications et qui, parfois, se bat très vivement contre les hausses excessives des tarifs[5]) dans la gestion des moyens documentaires, à tous les échelons.

Le réseau national des bibliothèques de mathématiques (RNBM) et la Cellule MathDoc mènent des actions concertées dans cette direction. Ces actions ont permis, à ce jour, la conclusion d'accords pour faciliter l'accès aux bases de données Zentralblatt MATH et Mathematical Reviews, aux versions électroniques

---

[2] On pourra à titre d'exemple, lire l'article :
`www.nature.com/nature/debates/e-access/Articles/butler.html`

[3] `www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/BIB/`

[4] `www.dlib.org/dlib/march01/frazier/03frazier.html`

[5] Certains comités éditoriaux de revues qui pratiquaient des tarifs excessifs n'ont pas hésité à démissionner en bloc, puis à créer une revue concurrente.

de revues de mathématiques du service LINK, la mise en place d'un service de sommaires portant sur un ensemble de près de 900 revues, en mathématiques et domaines connexes. Deux autres actions sont actuellement menées par la Cellule MathDoc, en collaboration avec les laboratoires et les bibliothèques de mathématiques. Ces actions participent d'un effort international visant à donner à la communauté scientifique les moyens de jouer pleinement son rôle dans la gestion des ressources documentaires.

Les programmes de numérisation rétro-active

Différents programmes sont consacrés à la numérisation systématique de fonds anciens dans le monde. Le programme JSTOR[6] est pluri-disciplinaire et il permet en particulier d'accéder aux fonds anciens de la vingtaine de revues mathématiques américaines. La société américaine de physique a numérisé l'intégralité du fonds des Physical Reviews (1893 – 1997)[7]. Les bases de données Mathematical Reviews et Zentralblatt MATH ont également mené de tels programmes et la numérisation du Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik est en cours[8].

Il existe d'autres programmes de numérisation, comme ceux menés à l'université de Göttingen, à l'Université Cornell ou à la Bibliothèque nationale de France[9]. Ces programmes peuvent répondre à plusieurs objectifs : souci patrimonial, mise à disposition des fonds anciens auprès d'une communauté de lecteurs élargie, création d'un ensemble scientifique cohérent par insertion de liens croisés entre les fonds anciens numérisés et les fonds nativement numériques ou entre fonds numérisés et bases de données.

Parce qu'ils valorisent l'ensemble d'un corpus documentaire, les programmes de numérisation représentent des enjeux scientifiques importants, mais aussi des enjeux financiers pour les éditeurs commerciaux. S'il est difficile aujourd'hui de concevoir l'avenir d'une revue sans version électronique, il sera difficile demain de concevoir celui d'une revue dont le fonds ancien n'aura pas été numérisé. C'est pour que les revues françaises puissent répondre à cette exigence de demain, que le programme de NUMérisation de Documents Anciens Mathématiques (NUMDAM)[10] a été lancé. Soutenu par la Direction de la Recherche et par le Centre National de la Recherche Scientifique, il est piloté par la Cellule MathDoc.

Une première phase, significative et financée par le CNRS, permettra de numériser de l'ordre de 220 000 pages (environ 8 000 articles). Cinq revues généralistes et une série d'actes de colloques sont concernées par cette phase[11].

Le travail préliminaire à la première phase du programme NUMDAM (dépouillement des collections en vue de la numérisation, création et alimentation de la

---

[6] `www.jstor.org`
[7] `prola.aps.org`
[8] `www-irma.u-strasbg.fr/EMIS/projects/JFM/`
[9] `gallica.bnf.fr`
[10] `www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/NUMDAM/`
[11] Annales de l'Institut Fourier, Bulletin et Mémoires de la Société Mathématique de France, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, Journées Équations aux Dérivées Partielles, ainsi qu'une autre revue importante pour laquelle des négociations sont en cours.

base de données des articles, rédaction du cahier des charges techniques) s'est déroulé de septembre 2000 à mai 2001. Un appel d'offre pour les opérations de numérisation a été émis par le CNRS fin juin 2001. Le choix de l'opérateur et la notification du marché devraient intervenir avant la fin de l'année 2001. La première phase du programme NUMDAM devrait s'achever au printemps 2003. Les principes généraux suivants ont été retenus.

- Le programme NUMDAM est conçu pour s'insérer dans un effort global de la communauté scientifique internationale et il collaborera, autant que faire se peut, avec les institutions qui développent des programmes similaires (en mathématiques ou plus largement).
- L'interface donnant accès aux documents numérisés sera orientée "utilisateurs" (moteur de recherche, qualité de l'affichage et de l'impression).
- La base de données NUMDAM (notices bibliographiques des articles, avec résumé quand il existe et plein texte caché) sera librement accessible sur la Toile. Des liens croisés seront introduits, entre les articles des fonds numérisés et les notices des bases de données mathématiques : Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Mathematical Reviews et Zentralblatt MATH.
- Les textes des articles (mode image) seront aussi librement accessibles que possible. Leur intégration dans le flux des articles nativement numériques est prévue. Ces deux points prendront en compte les contraintes économiques des revues, par exemple par l'instauration d'un "créneau mobile".

Les phases ultérieures du programme NUMDAM devraient être rapidement programmées. Elles permettront de traiter d'autres revues mathématiques publiées en France, ainsi que des documents importants (séminaires, cours, *etc*). Dresser la liste des documents à numériser, localiser et réunir les originaux en vue de leur traitement demandera un travail important auquel seront associés mathématiciens, historiens des sciences et bibliothécaires.
N'hésitez pas à adresser à la Cellule MathDoc vos suggestions concernant les documents à numériser.

Serveurs de prépublications et de thèses

Les prépublications, les thèses et les habilitations jouent, on le sait, un rôle très important. Elles permettent la communication des résultats de la recherche bien avant leur publication dans une revue spécialisée. Ces documents sont de plus en plus souvent mis en accès libre sur la Toile : pages personnelles, serveurs des laboratoires, ou archives de prépublications telles que `arXiv`[12].
En mettant en place des *index nationaux de littérature grise* en 1997, la Cellule MathDoc se donnait pour objectif d'améliorer la visibilité des prépublications, des thèses et des habilitations de mathématiques publiées en France, ainsi que celle des laboratoires qui les mettent en ligne et qui assurent ainsi la première validation scientifique[13]. Cet objectif a été en partie rempli avec la montée en puissance des index et la collaboration avec l'index international Math-Net.preprints/MPRESS.
Ces index reposent sur le ramassage, dans différents sites en France, de fichiers

[12] `www.arxiv.org`
[13] `www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/prepub.html`

contenant des méta données – auteur(s), titre, date, mots clés, codes de classification mathématique – pour permettre une indexation efficace, les textes eux-mêmes restant sur les serveurs locaux.
Ce système de collecte d'informations réparties sur des sites variés présente des avantages (mise en place relativement aisée, plus grande responsabilité laissée aux laboratoires) mais également des inconvénients importants (les méta données ne sont pas toujours conformes, les pages personnelles sont parfois volatiles, le système est difficile à modifier parce qu'il repose sur un réseau d'interlocuteurs ...). Une évolution est aujourd'hui indispendable.
En vue d'améliorer le système des index nationaux, la Cellule MathDoc collabore actuellement avec le *Centre pour la Communication Scientifique Directe* (CCSD, UPS 2275 du CNRS)[14].
L'objectif principal est de participer à une internationalisation de l'archive `arXiv`, en particulier par la création de miroirs *actifs* capables de recevoir des soumissions d'articles et de diffuser les textes (les miroirs actuels sont tous passifs : les soumissions ne peuvent se faire que sur le serveur maître, les miroirs n'assurent que la diffusion).
Une première réalisation dans cette direction sera bientôt finalisée avec la mise en service d'un *serveur pour les thèses*, comportant une section *thèses de mathématiques*.
La mise en place d'un miroir actif de l'archive `arXiv` pour les prépublications prendra sans doute quelques mois. Le cahier des charges est en cours de discussion. Il est souhaitable que le système permette le dépôt d'une prépublication par un individu, ainsi que le dépôt systématique par un laboratoire (qui sera alors dûment identifié).
Des informations sur la mise en place de ces nouveaux dispositifs sont disponibles à l'adresse :

`www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/CCSD-CMD/`

Les laboratoires et les écoles doctorales peuvent dès à présent prendre contact avec la Cellule MathDoc pour organiser leur participation à ces serveurs de thèses et prépublications.

[14] `ccsd.cnrs.fr`

De l'exposition « Fermat, enfant de la Lomagne » à l'espace interactif des Mathématiques dans la maison natale de Pierre de Fermat.

Jean Aymes [1] (*Association Fermat-Lomagne*)

Promouvoir la dimension culturelle des mathématiques

L'événement constitué par la démonstration du théorème de Fermat en 93-94 a été le catalyseur de la création de l'association Fermat-Lomagne dont le but est de promouvoir la dimension culturelle des Mathématiques dans la maison natale de Pierre de Fermat à Beaumont-de-Lomagne (Tarn et Garonne).
L'association a vocation à explorer divers champs :

– le champ historique par une présentation de la vie de Pierre de Fermat à travers ce qui nous est parvenu de son enfance, sa famille, sa correspondance, son époque ;
– le champ mathématique composé des thèmes principaux : Fermat, mathématicien du XVII^e siècle ; Fermat, aujourd'hui et demain à travers des portraits, des panneaux, des montages vidéos ;
– le champ animation avec des ateliers mathématiques mis à disposition d'un large public, une bibliothèque accessible au grand public, des actions de rayonnement pour un public.

Fermat-Lomagne est un point de rencontre au sens culturel :

– relier cette partie d'histoire sur ce que fut un grand homme et son existence dans un terroir - la Lomagne - , une époque, dans le mouvement des idées du XVII^e siècle.
– relier les aspects majeurs de l'activité mathématique à travers les siècles : de leur préhistoire aux découvertes d'aujourd'hui ; développer une perspective active de la réflexion mathématique : des jeux, des manipulations, des objets mathématiques seront progressivement présentés dans cette maison.
– Fermat-Lomagne existe essentiellement par des collaborations :
– les collaborations de beaumontois, non-mathématiciens, y apportent une impulsion déterminante tant pour inscrire le projet dans sa réalité locale que pour le finaliser vers l'intéressement du grand public ; les collectivités territoriales procurent un soutien actif.
– avec l'appui des professeurs, notamment avec l'Association des Professeurs de Mathématiques, l'institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, des professeurs d'université, ... non seulement de l'Université Paul Sabatier mais bien au-delà du Midi-Pyrénées, c'est la dynamique garantie d'une vulgarisation scientifique de qualité qui est acquise ;

[1] Jean Aymes est le Président de l'Association Fermat-Lomagne : 3 rue Pierre Fermat 82500 Beaumont de Lomagne.

– des partenariats s'étendent déjà vers des graphistes, des artistes, des astronomes, des technologues (chaudronniers, ébénistes) à travers les réalisations en cours : expositions, fabrications d'objets à portée mathématique, coopérations autour d'expositions.

Tout cela ouvre sur de riches échanges : c'est réellement la mise en évidence d'une ouverture nécessaire aux mathématiques, c'est un attachement à accroître la compréhension des mathématiques.

Les actions de l'association

Depuis cinq ans, l'association Fermat-Lomagne a conduit diverses actions :

– réalisation de la première exposition Fermat qui a reçu des milliers de visiteurs de différentes nationalités ;

– initiation à des jeux mathématiques lors de diverses manifestations, notamment la « Fête de l'Ail » en juillet, fête traditionnelle à Beaumont ;

– participation à l'organisation de plusieurs colloques : « Sciences jésuites, Sciences protestantes », « Commerce et mathématiques » ;

– présentation d'expositions ;

– accueil du public, de classes de colléges et lycées, de groupes de professeurs chiliens.

L'exposition « Fermat, enfant de la Lomagne »

Elle a été inaugurée le 2 décembre 2000 et propose la première partie de vingt panneaux dont la réalisation est de qualité professionnelle ; elle articule ce que l'on peut retenir du personnage de Fermat et des éléments destinés à intéresser les jeunes avec :

– des hauts de panneaux consacrés à Pierre de Fermat, son époque, son pays, son génie ;

– des bas de panneaux plus spécifiquement réalisés pour le public jeune : histoire des mathématiques, anecdotes sur les mathématiques et les mathématiciens, énigmes ou jeux.

L'exposition est permanente : du lundi au vendredi de 14 heures à 18 heures et le samedi de 9 heures à 13 heures ; renseignements à l'Office de Tourisme : 05 63 02 42 32.

Nous voulons que les jeunes, le public trouvent ici occasion de goûter la saveur des mathématiques, leur histoire, leurs problèmes, leur rôle dans l'activité humaine.

Vers « l'espace Fermat »

L'exposition « Fermat, enfant de la Lomagne » amorce la réalisation de « l'espace Fermat « , but primordial de l'association. Il sera développé sur la maison natale comme espace interactif voué à l'animation mathématique : expositions ; manipulations ; mises en valeur de réalisations de classes ou d'amateurs ; centre de ressources à propos de Pierre de Fermat.

Pour l'année 2001, année du quatre centième anniversaire de la naissance de Fermat, quelques dates sont d'ores et déjà retenues. En mai 2001 sera mise en place la deuxième partie de l'exposition permanente « Fermat, enfant de la Lomagne ». En juin 2001, édition du livre « Fermat, enfant de la Lomagne » composé de 120 pages en quadrichromie ; les enfants de l'école du Blanc interprètent une pièce sur la vie de Fermat. En août 2001, émission d'un timbre pour commémorer son mois de naissance. En octobre 2001, colloque du 400^{e} anniversaire organisé par l'université Paul Sabatier : le 18 et le 19 octobre à l'université, le 20 octobre à Beaumont-de-Lomagne, avec visites guidées, jeux mathématiques, théâtre de rue, concert baroque et conférences.

Une ambition éducative

N'est-il pas précieux qu'une association se donne pour propos de déployer ce caractère vivant de la science mathématique avec ses problèmes, ses avancées, ses efforts pour surmonter les difficultés, sa patiente détermination pour découvrir, pour offrir à l'humanité ces langages abstraits dont elle a besoin.

Les interactions des mathématiques avec d'autres domaines nous intéressent. Elles montrent à la fois l'emploi des mathématiques et leur irremplaçable rôle pour maîtriser la complexité du réel. Ici, on verra que les savoirs, tous facettes de réponses et des questions que pose le réel ne sont pas faits pour être cloisonnés mais articulés, coordonnés, liés. En reposant sur cette symbiose, les panneaux, les animations, les objets de l'espace Fermat sont déjà des points de départ.

L'espace Fermat a une fonction éducative ; nous voulons susciter le désir d'apprendre, le goût, le plaisir de chercher, la joie d'explorer et de trouver, le besoin d'abstraire dans le droit-fil d'une science dont le but relève de l'honneur de l'esprit humain. En relation avec l'Ecole, ce lieu va montrer combien les professeurs sont des éveilleurs : exposer des mathématiques est un défi - c'est difficile - , mais c'est surtout un enjeu, une contribution à éclairer le sens, la passion de la science. Car n'oublions pas qu'à travers l'instant fugace où un jeune aura été intéressé à telle ou telle question, c'est sa vie d'humain comme acteur indispensable d'une société qui se dessine. Souvenons-nous qu'Andrew WILES a dit dans cette maison natale même il y a cinq ans le point de départ de sa motivation : « À l'âge de dix ans, j'ai lu la conjecture de Fermat dans un livre, et depuis cette question me passionne » Ici, l'instant fugace peut être vécu, ici ces points de départs peuvent être saisis.

C'est ainsi que Fermat-Lomagne entend susciter les plaisirs des Mathématiques.

Prix Abel

La Norvège va créer un nouveau prix international en mathématiques, le prix Abel, du nom du célèbre mathématicien Norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829). Pour financer le prix, le gouvernement Norvégien va mettre en place en 2002, 200^{e} anniversaire de la naissance d'Abel, un fond de 200 millions de couronnes. Le Prix Abel sera décerné annuellement à partir de 2003. Son montant est similaire à celui du Prix Nobel, avec l'espoir qu'il joue le rôle d'un prix Nobel en mathématiques.

Le gouvernement Norvégien espère que le Prix Abel va rendre la recherche mathématique plus visible auprès du public et que cette initiative, à laquelle l'IMU et la SME ont déjà manifesté un appui total, sera une preuve forte de la valeur que la Norvège accorde au savoir et à la connaissance.

L'idée d'un Prix Abel avait été suggérée pour la première fois par le mathématicien Norvégien Sophus Lie vers la fin du 19^{e} siècle. En 1902, le roi Oscar II de Suède et de Norvège avait proposé la création de ce prix, mais cette proposition disparut en même temps que l'union entre les deux nations en 1905. L'initiative actuelle est venue du département de mathématiques de l'université d'Oslo.

CARNET

Hommage à Jacques-Louis Lions, Témoignages

Jacques-Louis Lions nous a quitté le 17 mai dernier. Il a été un mathématicien prolifique et a également joué un rôle important dans l'organisation de la recherche (il a été président du Centre National d'Études Spatiales, entre autre). Son activité de mathématicicen s'est située à la charnière des mathématiques appliquées et des mathématiques fondamentales, césure sans fondement scientifique mais très réelle dans notre pays. C'est pour aller contre ce que nous considérons comme une abérration que nous avons décidé de ne pas concurrencer nos amis de la revue MATAPLI dans l'hommage qui sera rendu à Jacques-Louis Lions. Au contraire, nous saisissons cette triste occasion pour amorcer un rapprochement, que nous espérons durable, entre nos deux publications. Nous reproduisons ci-dessous, avec l'aimable autorisation de Brigitte Lucquin, rédactrice en chef de MATAPLI, le sommaire du dossier[1] en hommage à Jacques-Louis Lions. Henri Cabannes nous signale également que Jacques-Louis Lions a rédigé peu avant sa mort un texte sur ses activités de très jeune résistant, qui paraitra dans : HISTOIRE et MÉMOIRES de GUERRE - Les Écoles normales supérieures (Ulm et Sèvres) et la seconde guerre mondiale. Par Gilles Pécout, éditions Rue d'Ulm.

Gérard Besson

Sommaire

[1] voir la revue MATAPLI n° 66.

COURRIER DES LECTEURS

Comments on non-references in Weil's works

S. Lang (*Yale University, New Haven*)

In 1999, the *AMS Notices* published several articles on André Weil's works (April, June-July, September). These were complemented in the April 1999 *Notices* with an editorial on Weil by the *Notices* editor in chief Anthony Knapp. Concerning a comment at sfome Weil talk that proper credit was not given by Weil for some theorem, Knapp quoted Weil's answer. "I am not interested in priorities", and added his own comment : "This was the quintessential Weil. Mathematics to him was a collective enterprise." I object. In the sense that mathematics progresses by using results of others, Knapp's assertion is tautologically true, and mathematics is a collective enterprise not only to Weil but to every mathematician.

However, there is also another sense. Mathematics is often a lonely business. Public recognition of the better mathematicians is a fact. A competitive spirit, present in Weil as in other mathematicians, sometimes degenerates into dishonesty. Mathematicians are made aware early in their career of the need to attribute results properly. Weil transgressed certain standards of attribution several times throughout his life in significant ways. I documented at least one of these ways in my *Notices* Forum piece on the Shimura-Taniyama conjecture [La 95b]. In this piece, I reproduced a letter from Weil to me (3 December 1986), ending with Weil's own peremptory conclusion : "Concerning the controversy which you have found fit to raise, Shimura's letters seem to me to put an end to it, once and for all." Now a year after Knapp's editorial, Rosen returns to the Shimura-Taniyama conjecture with some comments [Ro 00] p. 476, where he does not accept Weil's own conclusion.

The Knapp editorial and Rosen's comments prompt me to complement my *Notices* article by further historical remarks showing how Weil several times throughout his life did not properly refer to his predecessors, but was "interested in priorities". These constitute significant examples, when Weil does not regard mathematics as a "collective enterprise" in the sense that he hides the extent to which he uses previous work, and sets up or pokes fun at some of his predecessors, as we shall now document.

On Hasse and Deuring's work concerning correspondences

It was Hasse who uncovered the source of proof for the Riemann hypothesis in function fields (Artin's conjecture from his thesis). Weil's books on curves and abelian varieties [We 48a], [We 48b] published in the late forties do not mention Hasse's or Deuring's contributions. In particular, Weil does not mention that Hasse not only proved the theorem for curves of genus 1, but that he uncovered the relation between characteristic 0 and characteristic p, and that Hasse followed by Deuring pointed to the theory of correspondences as the key to the solution in general. Furthermore, Weil was indeed interested in priorities, as when he wrote tendentiously that some results of Severi were "rediscovered by Deuring", thereby minimizing his predecessors' discoveries, and misrepresenting the context in which they were made. For example, in Weil's 1940 letter to Simone Weil (*Collected Papers* Vol. I, p. 253) (which he calls an " esquisse d'histoire de la théorie des nombres" in the appended comments), Weil writes (my translation)[1] :

"... it is incredible the extent to which people as distinguished as Hasse and his students, who gave their most serious thoughts to this subject for years, have not only neglected, but deliberately disdained the riemannian direction : it's to the point where they can't read works written in Riemannian (Siegel once poked fun at Hasse who had told him about not being able to reader my paper in the *Liouville journal*), and that they rediscovered sometimes with considerable pain, in their dialect, important results which were already known, such as those of Severi on the ring of correspondences, rediscovered by Deuring."

This quote might be "quintessential Weil", but it shows something other than "mathematics to him was a collective enterprise." It is actually a very tendentious presentation masquerading as history. Artin, Davenport, Hasse, Mordell, Siegel, Weil, had limitations, like all of us, including me. The phrase "not only neglected but deliberately disdained" ("non seulement négligé, mais dédaigné de parti pris") is an example of Weil's tendentious attributions. One of Hasse's limitations was that he was not able to read the classical transcendental versions of the theory of abelian functions, as in Poincaré, Castelnuovo, or Weil's paper [We 38], and was not able to read the italian geometers as well as Weil, but it was not a question of "disdain" or "neglect". Hasse and Deuring did not merely "rediscover ... in their dialect" results already known to Severi. Notably Hasse, who had just written major papers on complex multiplication (1927-1931), saw first the connection with the Riemann hypothesis in function fields of genus 1 [Ha 34], and he pointed to the theory of correspondences and endomorphisms as holding the key to the problem of the Riemann hypothesis in function fields generally. Thus Hasse made a fantastic step forward in connecting the complex theory with the purely algebraic theory in characteristic p, and showing how reduction

[1] « ... il est incroyable à quel point des gens aussi distingués que Hasse et ses élèves, et qui ont fait de ce sujet la matière de leurs plus sérieuses réflexions pendant des années, ont, non seulement négligé, mais dédaigné de parti pris la voie riemannienne : c'est au point qu'ils ne savent plus lire les travaux rédigés en riemannien (Siegel se moquait un jour de Hasse qui lui avait déclaré être incapable de lire mon mémoire de Liouville), et qu'ils ont retrouvé quelques fois avec beaucoup de peine, en leur dialecte, des résultats importants déjà connus, comme ceux de Severi sur l'anneau des correspondances, retrouvés par Deuring. »
In [We 60), Weil wrote another similar put down of his predecessors, without citing them by name, stating that « les meilleurs specialistes des théories arithmétiques et 'galoisiennes' ne savaient plus lire le riemannien, ni à plus forte raison I'Italien... » *Collected Works* Vol. II, p. 412, [My translation : "the best specialists of arithmetic and 'galois' theories didnt know any more how to read 'Riemannian, let alone italian..."]

mod p mixes with complex multiplication in the theory of endomorphisms.[2]

Readers cannot get an inkling of the origins of such fundamental insights either from Weil's own works or from the accounts of Weil's works in the *Notices* (1999). For instance, Raynaud's account [Ra 99] refers to Hasse in just one sentence : "[The Riemann hypothesis in the case of curves over finite fields] was first proved by Hasse [4] in the case of elliptic curves ($g = 1$)."

After breaking open the whole question as above, Hasse [Ha 36] in three *Crelle* papers developed the theory purely algebraically on elliptic curves in characteristic > 0, independently of reduction mod p. Later Deuring started dealing with the theory of correspondences algebraically in characteristic > 0 for higher genus [De 37], [De 41a], [De 41b]. Among other things, he started the representation of the endomorphisms on the points of finite order of the jacobian ($l-$adic representations). Certain previous results of algebraic geometry, some coming from the more algebraic methods of Severi and others from more transcendental methods of Castelnuovo, needed to be algebraicized completely because they were needed in this generality for the applications to the Riemann Hypothesis on higher genus curves in characteristic p.

I don't know how justified Weil is in attributing to Siegel the reaction toward Hasse as Weil's describes it. But Siegel had no reason to ridicule or poke fun at ("se moquait de") Hasse for his limitation in not understanding Weil's transcendental approach to abelian functions. Although Siegel himself understood and handled this type of analysis, Siegel's limitations were evidenced later by his inability to understand much of the mathematics and especially algebraic geometry developed in the fifties and sixties, as partly described in my article concerning Siegel's letter to Mordell [La 95a].

I myself have had my own limitation in that I was not (and still am not) able to read the papers of the Italian geometers. I needed the algebraic translations by van der Waerden, Chevalley, Zariski and Weil himself to get into the subject. It was not at all the case that I "not only neglected but deliberately disdained" those works.

On Castelnuovo's work

Weil also did not regard mathematics as a collective enterprise with Castelnuovo, by leaving out of his references throughout his life the extent to which he used Castelnuovo's ideas concerning the equivalence defect and the jacobian of a curve.

In my book on abelian varieties, I systematically gave Weil credit for his ability to make the contributions of Severi and Castelnuovo available to the postwar period of algebraic geometry, and to go beyond. In fact, in historical comments concerning Castelnuovo's equivalence defect, I stated that Weil "was the first to recognize that Castelnuovo's theorem on the equivalence defect of correspondences on a curve could be expressed as a theorem on abelian varieties." It turns out that I was wrong. I was taken to task for this attribution by Kani [Ka 84], see especially p. 27, footnote 12. Indeed,

[2] Essentially, in [Ha 34], Hasse gives a one-line proof for the Riemann hypothesis on elliptic curves, assuming appropriate foundations. Indeed, he argues as follows. Lift the curve from characteristic p to characteristic 0, and also lift the Frobenius endomorphism to a complex endomorphism μ. The degree of Frobenius is q. Hence $\mu\overline{\mu} = q$, so $| \mu |= q^{1/2}$, which is one formulation of what one is after.

Weil makes only one reference to Castelnuovo, in his book on abelian varieties, for some of the basic theorems on abelian varieties by stating (my translation)[3] : "... already Castelnuovo had recognized how to use the latter, although it is not easy to find in his works a formulation or even less a precise justification ... The proof of Poincaré's theorem from the above principle, which one will find in No. 51 of the present work, is for instance substantially the same as the proof given by Castelnuovo in the classical case, in No. 9 of his memoir."

However, Weil does not refer to any other paper by Castelnuovo, and he omitted a far more important reference to another of Castelnuovo's papers *Sulle funzione abeliane* [Ca 21]. This paper is also reproduced in Castelnuovo's collected works. I learned of this paper and of Castelnuovo's fundamental contributions from Kani [Ka 84]. In the complex case, the relation between Castelnuovo's equivalence defect and an intersection number on the Jacobian is clearly established in [Ca 21]. Furthermore, Castelnuovo defines the characteristic polynomial of an endomorphism of the jacobian (determinant of the pfaffian of the complex representation). He shows that the equivalence defect occurs as the penultimate coefficient of the characteristic polynomial, as on pp. 536, 538 and 541, and that all these coefficients can be expressed as intersection numbers. Castelnuovo also gives the intersection formulas of the sum of the curve with itself r times and the theta divisor, as well as powers of the theta divisor. See pp. 547-548. In the fifties, I learned such results from Weil's book and lectures on abelian varieties. Weil in his book used essentially the same notation as Castelnuovo for the varieties equal to the sum of the curve with itself r times on the Jacobian, $r = 1, \ldots, p-1$, and for the theta divisor. (Weil uses W_r and Castelnuovo uses V_r, the theta divisor being equal to $W_{p-1}(p = \text{genus.})$ But there are no references to Castelnuovo on these matters in Weil's works, nor were there in his courses, nor are there in the AMS *Notices* article on the above subject matter [Ra 99]. What Weil did in the forties was to algebraicize Castelnuovo's theory, and extend it, following Hasse's fundamental discoveries and Deuring's subsequent work on the subject, as described above. Of course, to carry out this plan was a first rate mathematical achievement. For two decades, Weil was the only one in the world capable of pulling it off, in large part because he knew how to read Castelnuovo and Severi. I have the highest regard for his mathematics. But being a great mathematician is not a license for obscuring and misrepresenting the works and original ideas of others who opened up the field, and for poking fun at them.

On Mordell's conjecture

Weil correctly referred to Mordell's conjecture in his thesis [We 28],

[3] « ... déjà Castelnuovo avait reconnu le parti qu'on peut tirer de ce dernier$^{(3)}$, sans qu'il soit pourtant facile d'en trouver chez lui une formulation ni encore moins une justification précise. » Weil's footnote 3 refers to Castelnuovo's « beau mémoire *Sugli integrali semplici appartenanti ad una superficie irregolare* (Rend. Acc. Linc. (v) XIV, 1905), reproduit (N^{o}. XXVI) dans G. Castelnuovo, *Memorie Scelte*, Bologna 1937 la démonstration du théorème de Poincaré à partir du principe en question, qu'on trouvera au n^{o} 51 du présent travail, est par exemple substantiellement identique à celle qu'en donne Castelnuovo, pour le cas classique, au n^{o} 9 de ce mémoire. »

when he stated that (my translation)[4] "...this conjecture, already stated by Mordell (loc. cit. note 4) seems confirmed to some extent by an important result recently proved...", and then cites Siegel's theorem on the finiteness of integral points on curves of genus at least 1. Weil made a similar evaluation in *Arithmetic on algebraic varieties* [We 36], but without reference to Mordell, namely : "On the other hand, Siegel's theorem, for curves of genus > 1, is only the first step in the direction of the following statement : On every curve of genus > 1, there are only finitely many rational points."

Subsequently, Weil explicitly denigrated Mordell's contribution. In his *Two lectures on number theory, past and present* [We 74a], he wrote : "For instance, the so-called Mordell conjecture on Diophantine equations says that a curve of genus at least two with rational coefficients has at most finitely many rational points." Why "so-called"? Weil goes on : "It would be nice if this were so, and I would rather bet for it than against. But it is no more than wishful thinking because there is not a shred of evidence for it, and also none against." In his Collected Papers Vol III, p. 454, he goes one better (my translation)[5] : "We are less advanced with respect to 'Mordell's conjecture'. This is a question which an arithmetician can hardly fail to raise; in any case, one sees no serious reason to bet for or against it."

I have several objections to Weil's tendentious evaluation ("quintessential Weil").

First, Weil puts Mordell's conjecture in quotes, as if there was some question about Mordell's famous insight. Second, concerning a "question which an arithmetician can hardly fail to raise", I would ask when? It is quite a different matter to raise the question in 1921, as did Mordell, or decades later, especially following Mordell's insight. Furthermore, Weil here goes against the evaluations which he himself made in the two papers mentioned above, dating back to 1928 and 1936. Weil at the end of his 1928 thesis even proposed a generalization of Mordell's conjecture as follows (my translation)[6] : "The most important problem of the theory is no doubt precisely to know if, among all virtual systems of degree $\leqslant p-1$ arising from a finite set of generators, there are infinitely many effective ones; if this question has a negative answer, it would follow in particular that on a curve of genus $p > 1$ there is only a finite number of rational points, whatever be the domain of rationality (for example, Fermat's equation $x^n+y^n=z^n$, would have only a finite number of solutions for each value of $n > 2$)." However, when I learned abelian varieties (from Weil's books and his course in Chicago in 1954), I observed that Weil's proposed generalization for effective $(p-1)$-cycles on curves was false because the

[4] « cette conjecture, déjà énoncée par Mordell (loc. cit. note 4) semble confirmée en quelque mesure par un important résultat démontré récemment... »

[5] « Nous sommes moins avancés à l'égard de la 'conjecture de Mordell. Il s'agit là d'une question qu'un arithméticien ne peut guère manquer de se poser; on n'aperçoit d'ailleurs aucun motif sérieux de parier pour ou contre. »

[6] « le problème le plus important de la théorie est sans douteprécisément de savoir si, parmi tous les systèmes virtuels de degré $\leqslant p-1$ qui se déduisent d'une base finie, il peut s'en trouver une infinité d'effectifs; si la question devait être résolue par la négative, il s'ensuivrait en particulier que sur une courbe de genre $p > 1$ il n'y a qu'un nombre fini de points rationnels quel que soit le domaine de rationalité (par exemple l'équation de Fermat, $x^n + y^n = z^n$, n'aurait qu'un nombre fini de solutions pour chaque valeur de $n > 2$). »

theta divisor could contain an abelian subvariety of dimension $\geqslant 1$. I then made my general conjecture that a subvariety of an abelian variety is Mordellic if (and only if) it does not contain the translation of a non-trivial abelian subvariety. My conjecture was proved by Faltings three decades later.[7]

Third, concerning Weil's statements in 1974 and 1979 that there is no "Shred of evidence" or "motif sérieux" [serious reason] for Mordell's conjecture, they not only went against his own evaluations in earlier decades, and similar evaluations by others since [8], but they were made after Manin proved the function field analogue in 1963 ; after Grauert gave his other proof in 1965 ; after Parshin gave his other proof in 1968, while indicating that Mordell's conjecture follows from Shafarevich's conjecture (which Shafarevich himself had proved for curves of genus 1) ; at the same time that Arakelov theory was being developed and that Zarhin was working actively on the net of conjectures in those directions (Shafarevich conjecture, Tate conjecture, isogeny conjecture, etc.) ; and within four years of Faltings' proof.

On the Shimura-Taniyama conjecture

I gave a systematic account of this item in my *Notices* Forum article [La 95b], which I now urge readers to look at again in the present broader context. Weil's first reaction when Shimura told him the conjecture was to make the comment : "I don't see any reason against it, since one and the other of these sets are denumerable, but I don't see any reason either for this hypothesis." [We 79], III, p. 450 When others brought out the role of Shimura and Taniyama, Weil started inveighing against conjectures, and kept it up for the next decade. In my article, I quote from a letter where Shimura writes : "For this reason, I think, he [Weil] avoided to say in a straightforward way that I stated the conjecture[...] Of course Weil made a contribution to this subject on his own, but he is not responsible for the result on the zeta functions of modular elliptic curves, nor for the basic idea that such curves will exhaust all elliptic curves over $\mathcal{Q}$." If Weil had started his 1967 paper with a couple of sentences stating that Shimura told him this basic idea, and that the paper was the result of his thinking about the idea, then there would be evidence in this instance for Knapp's purported description of Weil's motivation. As it is, Weil's suppression of Shimura's role in making the conjecture was evidence of something opposite to viewing mathematics as a "collective enterprise". It is unfortunate that the accumulated evidence was not taken into account by some people to follow Weil's own conclusion in his letter to me, already quoted in the introduction : "Concerning the controversy which you have found fit to raise, Shimura's letters seem to me to put an end to it, once and for all."

Reçu janvier 2001.

Références

[7] In his article [Fa 91] p. 549, Faltings states that the conjecture was made "by A. Weil and also by S. Lang" ; later in [Fa 94] p. 175, it's "by A. Weil (as well as apparently independently by S. Lang)." I objected to Faltings about the attribution to Weil, which is incorrect. Cf. the quotes from Weil I give in the above text.

[8] For instance, Parshin in 1968 [Pa 68] wrote : "Finally when $g > 1$, numerous examples provide a basis for Mordell's conjecture that in this case $X(Q)$ is always finite. The one general result in line with this conjecture is the proof by Siegel that the number of integral points (*i.e.* points whose affine coordinates belong to the ring $\mathcal{Z}$ of integers) is finite."

[Ca21] G. Castelnuovo – « Sulle functione abeliane », *Rend. Acad. Lincei* V, vol. XXX (1921), reproduced in the collected works, p. 529-549.

[De37] M. Deuring – « Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper, I », *J. reine angew. Math.* **177** (1937), p. 161–191.

[De41a] M. Deuring – « Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper, II », *J. reine angew. Math.* **183** (1941), p. 25–36.

[De41b] ______, « Die Typen Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **14** (1941), p. 191–272.

[Fa91] G. Faltings – « Diophantine approximation on abelian varieties », *Ann. of Math.* **133** (1991), p. 549–576.

[Fa94] ______, « The general case of S. Lang's conjecture », *Barsotti Symposium, Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991)*, Perspect. Math., vol. 15, Academic Press, San Diego, 1994.

[Ha34] H. Hasse – « Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenköpern », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **10** (1934), p. 325–348.

[Ha36] ______, « Zur Theorie der abstrakten elliptischer Funktionenkörper », *J. reine angew. Math.* **175** (1936), I. p. 55–62 ; II. p. 69–88 ; III. p. 193–208.

[Ka84] E. Kani – « On Castelnuovo's equivalence defect », *J. reine angew. Math.* (1984), p. 24–70.

[La95a] S. Lang – « Mordell's Review, Siegel's Letter to Mordell, Diophantine Geometry, and 20th Century Mathematics », *Notices Amer. Math. Soc.* **42** (1995), no. 3, p. 339–350.

[La95b] ______, « Some History of the Shimura-Taniyama Conjecture », *Notices Amer. Math. Soc.* (1995), p. 1301–1307.

[Pa68] A. N. Parshin – « Algebraic curves over function fields », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **32** (1968), translation AMS Math. USSR Izv. 2 (1968) p. 1145–1170.

[Ra99] M. Raynaud – « André Weil and the Foundations of Algebraic Geometry », *Notices Amer. Math. Soc.* **46** (1999), no. 8, p. 864–867.

[Ro00] M. Rosen – « Review of Fermat's Last Theorem for Amateurs », *Notices Amer. Math. Soc.* **47** (2000), no. 4, p. 474–476.

[Sh58] G. Shimura – « Correspondences modulaires et les fonctions zeta de courbes algébriques », *J. Math. Soc. Japan* **10** (1958), p. 1–28.

[Sh61] ______, « On the zeta functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions », *J. Math. Soc. Japan* **13** (1961), p. 275–331.

[Sh67] ______, « Class fields and zeta functions of algebraic curves », *Ann. of Math.* **85** (1967), p. 58–159.

[We74a] A. Weil – « Two lectures on numbe theory, past and present », XX.

[We29] ______, « L'arithméthique sur les courbes algébriques », *Acta Math.* **52** (1928), p. 11–45.

[We36] ______, « Arithmetic on algebraic varieties », *Uspekhi Mat. Nauk* **3** (1936), p. 101–112.

[We38a] ______, « Généralisation des fonctions abéliennes », *J. Math. Pures Appl.* (1938), p. 185–225.

[We48a] ______, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris, 1948.

[We48b] ______, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Hermann, Paris, 1948.

[We60] ______, « De la métaphysique aux mathématiques », *Sciences* (1960), p. 52–56.

[We67a] ______, « Über die Bestimmung Dirichletscher Reffien durch Funktionalgleichungen », *Math. Ann.* (1967), p. 165–172.

[We79] ______, *Collected papers*, Springer Verlag, 1979.

Quelques remarques sur l'interview de Jean-Yves Mérindol

Jean-Michel Lemaire
(*ancien Directeur scientifique adjoint au département SPM du CNRS*)

Permettez-moi d'abord de préciser que je ne m'exprime qu'à titre personnel, sur la base évidemment de mon expérience passée, mais en aucune façon au nom du CNRS ou de son département des Sciences Physiques et Mathématiques. Dans sa conclusion, Jean-Yves Mérindol estime que les mathématiciens ne manifestent pas de style particulier dans l'exercice des fonctions de Président d'Université. Malgré la haute opinion que je m'étais formée de Jean-Yves au cours des contacts que nous avons eu dans l'exercice de nos fonctions respectives, je ne puis que déplorer qu'il n'applique pas à ses déclarations les exigences de rigueur qu'on pourrait attendre d'un mathématicien, et d'ailleurs de n'importe quel scientifique. Notons en passant que le fait que certains géophysiciens aient manifesté cette absence de rigueur à une toute autre échelle ne permet pas pour autant d'inférer quoique ce soit de général sur le comportement de nos collègues de cette discipline placés en situation de responsabilité : il existe d'ailleurs des contre-exemples.

Venons-en aux faits :

1) "le CNRS n'est ni le seul ni le plus riche organisme de recherche. Il y en a d'autres très puissants (...) qui développent des compétences importantes, y compris en mathématiques."
Que veut dire "riche" dans ce contexte ? S'agissant des mathématiques, le CNRS est riche de ses 350 chercheurs et 160 ingénieurs et techniciens, tous affectés dans des laboratoires universitaires. Même avec une définition très large de la notion de mathématicien(ne), on n'arrive pas à ce chiffre dans tous les autres organismes réunis[1], et surtout, à l'exception de quelques chercheurs de l'INRIA, ces personnes exercent leurs fonctions dans des laboratoires propres à leurs organismes. Quel est donc le sens de cette remarque par rapport à la question posée ? Mérindol suggèrerait-il que le président de la SMF devrait s'adresser à ces organismes pour soutenir le CIRM par exemple ? Si estimables qu'ils soient, je doute fort qu'ils soient enclins à mettre à sa disposition un bâtiment de 30 chambres et un quart de million d'euros de subvention annuelle.

2) Le CNET : que la qualité de la recherche qui s'y faisait fût excellente, et qu'une partie de cette recherche ait mis en œuvre des mathématiques sophistiquées, nul n'en doute. Le CNRS a d'ailleurs su mobiliser plusieurs dizaines de postes - à un moment de forte pression budgétaire - pour accueillir des chercheurs du CNET lors de son démantèlement. Mais sur quelle base objective peut-on affirmer que la qualité de la recherche du CNET était bien supérieure à celle du CNRS ?. L'affirmation est gratuite, le dénigrement ne l'est sans doute pas.

3) Jean-Yves Mérindol expose une vision partielle - et partiale - du rôle historique du CNRS vis-à-vis des mathématiques. Pendant la récession des années 75-85, c'est le recrutement au CNRS qui a permis à l'école française de mathématiques de se maintenir au niveau qui est le sien. Quelques années après, la décision d'affecter les deux tiers des recrutements

[1] L'annuaire SMF-SMAI 2000 recense une quarantaine d'adhérents à l'INRIA et autant au CEA, une douzaine à l'ONERA, 4 à l'INRA (unité de biométrie) et au CNES, aucun à l'INSERM, mais 33 à la DER/EDF !

en province a été une option stratégique forte de l'ensemble de l'organisme, qui a été un facteur important du développement de pôles d'excellence hors Île-de-France. Et en ce qui concerne les mathématiques, l'effort d'association d'équipes nouvelles n'a jamais cessé jusqu'à aujourd'hui : ainsi, pour se limiter à la "petite couronne" parisienne, il y a à présent des UMR à Marne-la-Vallée, Cergy, Versailles et Evry, alors qu'il n'était nullement évident pour ces centres de définir et de mettre en œuvre un projet scientifique original, si près des grands centres de Jussieu et d'Orsay qui en avaient formé la plupart des acteurs, et où ces derniers étaient fortement tentés de conserver leur activité de recherche...et leur bureau ! En ce qui concerne les chercheurs du CNRS, la direction du SPM n'a pas ménagé ses efforts pour inciter les chercheurs parisiens à aller animer ces équipes nouvelles. L'expérience m'a cependant montré que les pressions amicales sont plus efficaces que les mesures administratives...

4) En matière de prospective, Jean-Yves Mérindol a raison d'affirmer que le problème démographique "doit être abordé globalement par les universités et les organismes de recherche". Ce devrait être le "noyau dur" des contrats entre le CNRS et les Universités, et chacun sait qu'on en est encore très loin. Le CNRS y a sa part de responsabilité, certes, mais ses partenaires (Strasbourg est-elle vraiment une exception ?) n'offrent guère de répondant à ma connaissance : "les commissions de spécialistes sont souveraines...", dit-on, et on en reste là. On aurait aimé en savoir un peu plus sur ses idées pour "aborder la relation avec le CNRS sur un mode différent" en mathématiques. S'agissant de la mobilité CNRS-Université, rappelons tout de même que pour la seule année 2000, 14 CR1 sont devenus professeurs...

5) Enfin, Jean-Yves Mérindol soulève la question de la politique du CNRS en région et de son expression. Il a raison d'en souligner la faiblesse, et l'ambiguïté du rôle du délégué régional. Il s'agit d'un problème de gouvernance générale de l'organisme, mais dont la solution ne passe certainement pas par l'attribution d'un pouvoir d'arbitrage *scientifique* au délégué régional : s'il est parfois vrai, comme me l'a souvent dit Jean-Yves, que nos partenaires ont en face d'eux sept (et maintenant huit !) CNRS et pas un seul, il ne faut pas pour autant risquer d'en avoir vingt. J'espère vivement que la réflexion menée par la Présidence du CNRS débouchera sur une capacité accrue de l'organisme à exprimer une politique lisible dans toutes ses dimensions, interdisciplinaire, régionale, mais aussi européenne. Cela dit, pour affirmer que les universités "sont dans une situation plus simple et peuvent afficher des priorités scientifiques", il faut - malheureusement aussi - une bonne dose...disons d'angélisme.

En conclusion, j'aurais préféré lire, sous la plume d'un président de la valeur de Jean-Yves, qu'il est grand temps que les Universités et le CNRS se regardent enfin comme des partenaires, dont chacun cherche à tirer parti des forces de l'autre et non à en dénigrer les faiblesses. Dans la compétition internationale, nous gagnerons ou nous perdrons ensemble.

LIVRES

Diffusions, Markov Processes and Martingales. Vol. 1. Foundations ; Vol. 2. Itô calculus.
L. Rogers, D. Williams
Reprint of the second (1994) edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, (2000). Vol. 1 : 386 p. $ 37.95. ISBN 0-521-77594-9 ; Vol. 2 :480 p. $ 39.95. ISBN 0-521-77593-0

Ces deux livres sont une réédition par *Cambridge University Press* du traité de Rogers et Williams consacré aux processus stochastiques. Aucune modification n'a été apportée par rapport à la version antérieure parue en 1994 à l'exception du prix de vente qui a sensiblement baissé. Ces deux volumes constituent à la fois une excellente introduction aux processus de Markov, aux martingales et au calcul stochastique, mais aussi une source d'information très riche sur des aspects plus avancés. La rédaction privilégie l'intuition et les heuristiques reléguant au second plan le formalisme abstrait.

Le premier volume, édité pour la première fois en 1979, a été profondément enrichi pour sa seconde publication en 1994. Le livre s'ouvre sur un long chapitre consacré au mouvement Brownien. Soucieux de présenter avant tout des applications et des motivations, les auteurs ont complètement omis les concepts théoriques et le détail des preuves afin de survoler l'éventail le plus large possible de résultats. Le reste de l'ouvrage reprendra ces différents aspects pour leur donner un cadre théorique. La structure du livre permet de pratiquer plusieurs niveaux de lecture et le lecteur peut se contenter de piocher quelques résultats dans chaque sections. Par exemple, le second chapitre est beaucoup plus élémentaire et on y reconnaîtra en particulier des pans entiers du livre de Williams *Probability with martingales*. Finalement, la troisième partie est consacrée aux processus de Markov. On y trouvera à la fois une description des semi-groupes de Feller, mais aussi des concepts plus avancés concernant les processus de Ray.

Le second volume est principalement consacré au calcul stochastique. La rédaction est aussi fluide que dans le premier tome et offre différentes perspectives au lecteur. Une fois encore une lecture linéaire n'est pas nécessaire, en particulier le second volume est complètement indépendant du premier (à condition de connaître la théorie élémentaire des probabilités). Le premier chapitre est consacré à la construction des intégrales stochastiques, à la formule d'Itô, aux changements de mesures, etc. Ensuite les équations différentielles stochastiques sont introduites d'abord dans un cadre classique, puis dans une seconde étape le cas des diffusions sur des variétés est considéré. Comme dans le premier tome, l'accent est mis sur les exemples concrets, les auteurs cherchant avant tout à présenter la structure globale de la théorie et l'enchaînement logique des idées. Le livre se conclue sur des aspects plus théoriques permettant de généraliser les constructions précédantes.

Thierry Bodineau, Équipe Probabilites et modèles aléatoires de Paris VI et VII

Stability and transition in shear flows
P.J. Schmid, D.S. Henningson
Applied Mathematical Sciences, **142**, Springer-Verlag, New York, 2001. 556 p.
$ 79.95. ISBN 0-387-98985-4

La question de la stabilité d'écoulements et de leur transition vers la turbulence est un des plus jolis problèmes de la mécanique des fluides. Ce sujet est très étudié depuis plus d'un siècle, par des méthodes de théorie spectrale, par des méthodes d'énergie ou par des méthodes numériques. Hélas la plupart des livres consacrés à ce sujet sont soit dépassés, soit difficilement lisibles (soit les deux !). Le livre de J. Schmid et D.S. Henningson, très agréable à lire est donc particulièrement bienvenu. Après une introduction limpide présentant les différents nombres de Reynolds critiques, les auteurs développent la théorie de la stabilité d'écoulements de cisaillement nonvisqueux, passant en revue aussi bien les critères classiques de stabilité (Rayleigh, Fjortoft, Howard) que le problème de donnée initiale. L'étude spectrale dans le cas visqueux (Orr, Sommerfeld et Squire) est ensuite décrite, sans toutefois entrer dans les détails abominables de l'analyse, mais en s'appuyant en permanence sur des calculs numériques, ce qui la rend particulièrement aisée à lire. Les chapitres suivants sont consacrés à la croissance des modes non normaux, à la stabilité nonlinéaire (développements faiblement nonlinéaires, résonances à trois ondes), à l'étude de flots plus complexes (Falkner–Skan, instabilité secondaire). Pour terminer, les auteurs présentent une description remarquable des divers scénarios de transition vers la turbulence, en s'appuyant à la fois sur des expériences et sur des calculs numériques.

Ce livre me semble donc être une référence extrèmement agréable et précieuse pour toute personne intéressée par la mécanique des fluides, et même par les problèmes de stabilité en général.

Emmanuel Grenier, ENS Lyon

Codes and algebraic curves
Oliver Pretzel
Oxford lecture series in mathematics and its applications **8**. The Clarendon Press, Oxford 1998. 192 pp. ISBN : 0-19-850039-4. $ 65

Ce livre est une introduction à la théorie des codes géométriques de Goppa, une classe de codes correcteurs d'erreurs construits à l'aide de géométrie algébrique sur des corps finis.

Les codes correcteurs d'erreurs sont des techniques pour améliorer la qualité de l'enregistrement ou de la transmission d'informations. Celle-ci consiste à envoyer dans un canal une information sous la forme d'une série de signaux binaires ('0' ou '1'), les bits. Un des moyens utilisés pour rendre plus fiable cette transmission consiste à utiliser la redondance : on ajoute quelques bits bien choisis de manière périodique dans le message. Ces bits supplémentaires permettent de détecter une erreur dans la transmission de l'information ou même de corriger cette erreur. C. Shannon a montré qu'en codant les messages de façon appropriée, on peut obtenir un rendement quasi maximum, en ce qui concerne la correction des erreurs de transmission. Mais sa démonstration n'est pas constructive et on ne connaît l'existence de codes optimaux que dans des cas particuliers.

Pour pallier ces inconvénients, on a introduit, dans les années 80, à la suite du mathématicien russe V. Goppa, de nouvelles familles de codes, construits à l'aide de technique de géométrie algébrique sur les corps finis : les codes géométriques. Ces codes ont des paramètres extrêmement bons.

Pour les construire, on évalue des fonctions algébriques sur des courbes définies sur un corps fini. À partir de certaines conditions algébriques sur ces fonctions, on peut estimer les paramètres des codes obtenus, essentiellement le taux de bits supplémentaires, et le taux d'erreurs que l'on peut corriger. Le théorème de Riemann-Roch est essentiel dans ces estimations.

Il y a deux façons d'introduire les courbes algébriques : par la géométrie, comme c'est fait par exemple dans le livre de W. Fulton (*Algebraic Curves,* W. A. Benjamin, New York, 1969) ou par l'algèbre, en étudiant le corps des fonctions rationnelles d'une courbe algébrique, comme le fait Chevalley (*Introduction to the theory of algebraic function of one variable*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1951). Cette dernière présentation est plus abstraite, mais se révèle plus puissante.

Plutôt que de choisir entre les deux présentations, Pretzel utilise d'abord la théorie géométrique des courbes algébriques pour énoncer le théorème de Riemann-Roch et présenter les codes. Cela donne lieu à une première partie où les énoncés les plus difficiles sont admis. Il se contente d'énoncer juste ce qu'il faut assimiler de géométrie algébrique pour comprendre la théorie des codes de Goppa. L'important ici est le calcul pratique. Il est présenté avec beaucoup d'exemples et l'auteur étudie complètement quelques courbes planes. Cette présentation est agréable à lire : la rédaction est faite pour aider l'intuition géométrique.

Il envisage ensuite le décodage des codes géométriques de Goppa, d'abord en expliquant l'algorithme simplifié de de Skorobogatov-Vlăduţ puis en traitant l'algorithme plus précis de Duursma, qui utilise les idées de vote à la majorité de Feng et de Rao.

Puis, dans une deuxième partie, à l'aide de la théorie des corps de fonctions, il donne une démonstration rigoureuse des théorèmes de géométrie utilisés, essentiellement le théorème de Riemann-Roch et la formule de Plücker sur le genre des courbes planes lisses. Comme au début, Pretzel fait beaucoup d'efforts pédagogiques. Il motive par exemple la présentation des différentielles de manière historique, en introduisant la notion analytique avant d'introduire la notion algébrique plus abstraite de différentielle de Weil qui lui servira ici.

Enfin il termine ce livre par le théorème de Tsfasman, Vlăduţ, et Zink montrant que les codes géométrique de Goppa sont asymptotiquement meilleurs que ceux que l'on savait construire auparavant, et par l'étude des familles asymptotiques de corps de fonctions récemment trouvées par A. Garcia et H. Stichtenoth qui permettent de démontrer le même théorème, à l'aide de courbes plus explicites.

Il y a deux notions de codes de Goppa. Pretzel introduit d'abord la notion de code de fonction, dont la définition ne fait intervenir que la notion de diviseur, puis par dualité la notion de code résiduel, et démontre une estimation des paramètres de ces codes. Cela lui permet de ne pas utiliser à cette étape la notion plus compliquée de forme différentielle et de résidu, avec lesquelles on présente généralement les codes résiduels. Bien sûr ces notions sont cachées dans le théorème de Riemann-Roch, mais celui-ci peut être énoncé sans elles. Il n'introduit ces notions que quand elles sont nécessaires, pour la démonstration du théorème de Riemann-Roch dans la deuxième partie, puis pour prouver que les deux notions de code de fonction et de code résiduel sont en fait deux représentations différentes du même objet.

Ce livre peut être considéré comme une présentation relativement simple des la théorie des codes de Goppa pour quelqu'un qui a peur d'être rebuté par l'accumulation de concepts habituellement employés pour introduire la géométrie algébrique. La deuxième partie satisfera le lecteur qui cherche des démonstrations complètes. C'est aussi une introduction au livre plus complet de H. Stichtenoth (*Algebraic Function Fields and Codes*, Springer-Verlag).

Ce livre nécessite une familiarité avec les fondements de la théorie des codes correcteurs d'erreurs, très brièvement rappelée, et avec la théorie des corps finis. Il comporte de nombreux exercices à la fin de chaque chapitre.

François Rodier, Université de Marseille I

Model Theory, Algebra, and Geometry
édité par D. Haskell, A. Pillay et C. Steinhorn
Mathematical Sciences Research Institute Publications, **39**. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. 227 pp. ISBN 0-521-78068-3. $ 49.95.

Issu d'un semestre de théorie des modèles organisé au MSRI en 1998, ce volume présente une bonne part des développements réalisés au cours des quinze dernières années en théorie des modèles des corps, en privilégiant les interactions avec la géométrie et la théorie des nombres. Il a été conçu de manière à former un tout et à être accessible au mathématicien n'ayant qu'une familiarité modeste, voire inexistante, avec la théorie des modèles.

Après un premier article de D. Marker rappelant les rudiments de la théorie des modèles, L. van den Dries fait le point sur la théorie des modèles des corps classique. Les articles suivants sont consacrés aux corps avec structures supplémentaires. Ainsi l'article de D. Marker est-il consacré aux corps différentiels et celui de Z. Chatzidakis aux corps aux différences. Ces deux textes exposent également l'utilisation qui a été faite récemment des théories des modèles de ces théories par E. Hrushovski respectivement dans ses travaux concernant les conjectures de Mordell-Lang et Manin-Mumford. En géométrie réelle une notion importante apparue dans la dernière décénie est celle de *o*-minimalité. Ce concept unificateur recouvrant la théorie des ensembles semi-algébriques, sous-analytiques, pfaffiens, ..., est exposé dans l'article de D. Macpherson. Les nombreux développements sur la structure des ensembles définissables sur les corps valués sont exposés dans l'article de J. Denef ainsi que leurs applications, notamment aux théorèmes de rationalité, ainsi que les aspects analytiques et rigides analytiques. En guise de conclusion, B. Mazur fait le point sur les différentes approches de la conjecture de Mordell-Lang en mettant l'accent sur les questions d'effectivité.

Cet ouvrage de référence constituera une source d'information très utile, tant pour le néophyte que le spécialiste.

François Loeser, Université Paris VI

Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces
Hiraku Nakajima
University Lecture Series **18**. American Math. Society, 1999. 132 p.
ISBN 0-8218-1956-9. $ 21.

Soit X une surface algébrique complexe, que l'on supposera lisse et quasi-projective. Pour tout entier n, on peut considérer l'espace des modules paramétrisant les sous-schémas ponctuels de longueur n dans X. On le note $X^{[n]}$, c'est le schéma de Hilbert des points de longueur n dans X. La donnée de n points distincts de X définit un tel sous-schéma ponctuel de longueur n dans X, mais on en obtient de plus compliqués en faisant entrer en collision certains de ces points pour créer des points "épais" qui seront comptés avec multiplicité. Plutôt que d'étudier les espaces $X^{[n]}$ un par un, il est commode de les étudier « tous à la fois ». Ainsi, pour les polynômes de Poincaré $P_t(X^{[n]})$ (le polynôme de Poincaré d'un espace Y est défini par $P_t(Y) = \sum_{k\geqslant 0} t^k \dim H^k(Y)$), un résultat remarquable de Göttsche [1] donne la formule suivante pour la fonction génératrice des polynômes de Poincaré :

$$\sum_{n\geqslant 0} q^n P_t(X^{[n]}) = \prod_{m\geqslant 1} \frac{(1+t^{2m-1}q^m)^{b_1(X)}(1+t^{2m+1}q^m)^{b_3(X)}}{(1-t^{2m-2}q^m)^{b_0(X)}(1-t^{2m}q^m)^{b_2(X)}(1-t^{2m+2}q^m)^{b_4(X)}},$$

les $b_i(X)$ étant les nombres de Betti de X. De façon a priori surprenante, le terme de droite dans cette formule apparaît également dans un contexte apparement bien différent, celui des représentations des superalgèbres de Lie de dimension infinie. En effet, ainsi que l'ont observé Vafa et Witten [4], il coïncide avec ce que donne la formule des caractères appliquée à une certaine représentation d'une certaine superalgèbre de Lie L qui est le produit d'une algèbre d'Heisenberg et de Clifford. Cette remarque a été élucidée indépendemment par Grojnowski [2] et Nakajima [3], qui ont construit une action naturelle, induite par des correspondances algébriques, de la superalgèbre de Lie L sur l'espace $H := \bigoplus_n H_*(X^{[n]})$, somme directe des groupes d'homologie des espaces $X^{[n]}$, munissant H d'une structure d'algèbre vertex.

L'ouvrage de Nakajima est consacré à l'exposition de ces développements récents passionants, mais en outre il présente en passant de plaisantes vues sur des thèmes reliés de façon directe ou indirecte, comme la théorie géométrique des invariants et l'application moment, les quotients hyper-kähleriens, les singularités simples et leurs résolutions, la correspondance de McKay, ainsi que des excursions vers la théorie de Morse, la géométrie symplectique et les fibrés de Higgs. Écrit dans un style plaisant et agréable, il éveillera la curiosité de chacun en lui donnant envie d'en apprendre plus. Chaudement recommandé.

Références

[1] L. Göttsche, *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*, Math. Ann. **286** (1990), 193–207.
[2] I. Grojnowski, *Instantons and affine algebras I : the Hilibert scheme and vertex operators*, Math. Res. Letters **3** (1996), 275–291.
[3] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on surfaces*, Ann. of Math. **145** (1997), 379–388.
[4] C. Vafa, E. Witten, *A strong coupling test of S-duality*, Nucl. Phys. **431** (1994), 3–77.

François Loeser, Université Paris VI

Alterations and resolution of singularities. A research textbook in tribute to Oscar Zariski
édité par H. Hauser, J. Lipman, F. Oort et A. Quirós
Progress in Mathematics **181**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. 598 p. $ 109.00. ISBN 3-7643-6178-6

The book[1] contains a collection of articles by participants of the Working Week on Resolution of Singularities held at Obergurgl in Tirol, September 7-14, 1997. It is dedicated to Oscar Zariski, the founder of the school of algebraic geometry in the United States. During his long career as a mathematician he obtained ground-breaking results in algebra and algebraic geometry. Many years of his career were dedicated to the desingularization problem. One of his major achievements were the modernization of the classical theory of blow-ups and the proof of the existence of resolutions of singularities in dimension three.

The main focus of the book is on the substantial recent progress in the desingularization problem resulting from a rather powerful shift of the approach to the whole subject pioneered by J. de Jong.

In order to appreciate this change we need to consider the history of the subject. In geometry we are often dealing with objects which are locally similar at most points but exhibit exceptional behavior at a subset of points of smaller dimension. This subset is called the singular locus. More concretely, let us consider a simple topological

[1] Cette recension est aussi parue dans le *Bulletin of the AMS*.

version of the desingularization problem. Let X be a finite connected polyhedron of dimension d. Its smooth (or nonsingular) points are those which have a small neighborhood isomorphic to a ball. If we assume that X is a manifold without boundary and that every point of X lies on a simplex of dimension d then a desingularization of X is a smooth manifold X' (without boundary) together with a surjective map $f : X' \to X$ such that f is an isomorphism on an open, everywhere dense subset $U \subset X'$. Using the desingularization (X', f) we can distribute the complexity concentrated at a singular point x in X over the subcomplex in X' containing the preimage $f^{-1}(x)$.

Unfortunately, in such a natural geometric setting a resolution does not exist in general! The simplest counterexample is given by a union of two copies of a cone over a real manifold which is not cobordant to zero. For example, an isolated unresolvable singularity would be a real cone over the real (!) fourfold $\mathbb{CP}^2$. Thus already in dimension 5 we can build a polyhedron which is a smooth manifold away from two singular points and which does not admit a resolution of singularities.

Amazingly enough, resolutions do exist for polyhedra associated with solutions of polynomial equations with coefficients in complex numbers. These, very special, subsets of complex affine (resp. projective) spaces are called algebraic varieties over the complex numbers. Easy examples of highly singular varieties are subvarieties of the affine space $\mathbb{A}^n$ given by generic homogeneous polynomials of degree ≥ 2 in n-variables. In spite of the complexity of the singularities which can appear on algebraic varieties, H. Hironaka, a student of Zariski, proved in the early 1960's the existence of a resolution in the strongest possible form. Precisely, for any projective variety X he constructed a smooth projective variety X' with a surjective (algebraic) map $f : X' \to X$ such that f is an isomorphism over an open dense subset of X. Here X' can be viewed, topologically, as a smooth even-dimensional manifold. Hironaka's construction satisfies several other properties:

– the map f is an isomorphism outside of the singular points of X;

– the preimage of the singular set is a union of smooth projective subvarieties of (complex) codimension one with transversal intersections (special smooth submanifolds of codimension two);

– X' and f are obtained through a sequence of standard operations (blow-ups of smooth subvarieties contained in the singular locus).

A blow-up, intuitively, replaces its *center* (an algebraic subvariety) by the set of its normal (complex) directions. In particular, one blow-up resolves the affine cone singularities described in the example above.

The initial proof of Hironaka was quite lengthy and complicated. Hironaka followed the classical path of blowing up the subvariety of most complex singular points. The problem which was encountered by Zariski and others was that up to dimension three the complexity of the singularity still has some geometric flavor, but in higher dimensions it lacks a geometrically intuitive characterization. Subsequently, Hironaka's proof and its logic have been substantially clarified (see, for example, the article of S. Encinas and O. Villamayor in this volume, or the papers of E. Bierstone and P. Millman [2], and M. Spivakovski [5]). The general strategy is to introduce an appropriate function φ with values in a finite subset of a (lexicographically ordered) finitely generated semigroup (vectors with entries $\mathbf{N}$) and semicontinuous on X. The value of φ at each point reflects the complexity of the singularity. The maxima of φ are smooth inside the singular locus. Blowing up such points reduces the global maximum of φ on X.

This ultimate solution, which works for algebraic varieties over *any* field of characteristic zero, had a tremendous impact on the development of algebraic geometry. In practice, it substantially simplified computations of geometric invariants of algebraic varieties and provided a solid foundation for the subsequent advances in algebraic geometry. Bluntly put, it is one of the few universally useful mathematical results.

However, so far all attempts to extend the method to varieties defined over fields of finite characteristic or discrete valuation rings of mixed characteristic have failed. The original algorithm by Hironaka and its present modifications lead to loops: blow-ups don't diminish the maxima of φ.

For many years the spectacular success of the method of desingularizations by blow-ups developed by Segre, Zariski and Hironaka blinded, in a sense, other researchers in this field. It was so natural and powerful that other alternatives were abandoned or forgotten. This spell was broken by Johan de Jong in 1995.

Before explaining the approach of de Jong let us recall another important development in algebraic geometry. Independently of Hironaka's resolution of singularities, Deligne, Mumford, Knudsen and others were building the theory of stable degenerations of curves and compactifications of their moduli (natural parameter) spaces. Naturally, one wants to relate the invariants of the degeneration to invariants of the generic fiber. It is a standard trick in algebraic geometry to compute something on a maximally degenerated object and then extend the outcome (by continuity) to the smooth case. But there was no clear understanding of what justified such computations, and, not surprisingly, some of the computations were wrong. In the theory of moduli the main difficulty comes from the presence of automorphisms. Algebraic curves of a given genus degenerate into rather complicated one dimensional objects — combinations of singular curves with multiplicities. How to deal with this? The theory of stable curves and stable degenerations, in general, brought clarity to the subject. For every smooth family of curves $\mathcal{C}^* \to \Delta^*$ over a punctured disc there exists a unique relative compactification $\mathcal{C} \to \Delta$ (at least after changing the base by a finite cyclic covering of Δ^*). Moreover, the preimage of $0 = \Delta \setminus \Delta^*$ is a union of algebraic curves with normal crossing and very mild (nodal) singularities such that each smooth rational component of the preimage of 0 intersects the other components in at least two points. Such reducible curves (appearing as limits $\mathcal{C}_0$) are called semi-stable. Semi-stability is sufficient if one is interested in local properties of degenerations (or "coarse" moduli spaces). However, if one is interested in morphisms between degenerating families (or "fine" moduli spaces) one needs to introduce additional data to eliminate possible automorphisms of semi-stable curves. One approach is to fix a finite number of smooth points on curves and to keep track of these points. A second approach involves level structures. The corresponding moduli spaces are much more rigid. In particular, one has two crucial properties:

– for every family $\mathcal{C}^*$ of stable (punctured) curves over a (dense) Zariski open subset $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ of a normal variety $\mathcal{B}$ there exists a generically finite surjective proper morphism $f : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ such that the pullback of $\mathcal{C}^*$ extends to a stable family over $\mathcal{B}'$;

– a complete family of stable curves (over a normal connected base) is uniquely determined by its restriction to a Zariski open subset of the base.

Most importantly, the theory of stable curves exists for fields of any characteristic. Moreover, in the case of finite characteristic p, all morphisms involved are separable (no p-th roots are required).

De Jong's main observation was that this powerful theory provides a tool for desingularization. First of all, every variety can be fibered in curves. Secondly, using induction on dimension and base change we can assume that the base is smooth and that the locus of nonsmooth stable curves is a divisor with normal crossing. The resulting families of stable pointed curves have relatively simple singularities which can be treated directly. One refers to this resolution of singularities as resolution by "alterations". Alterations are not birational but only generically finite!

As it happens, Hironaka's resolution of singularities is, in a sense, too precise. De Jong's alterations are sufficient for many theoretical applications (see below).

Outline of the book

Roughly speaking, one can divide the articles of the book into the following categories:

(1) method of alterations and its applications in algebraic geometry;
(2) applications of desingularization to differential equations;
(3) valuation theory;
(4) some aspects of the Zariski-Hironaka desingularization theory of algebraic varieties;
(5) historical accounts.

The introductory lecture of J. Lipman sketches of the biography of Zariski and his main contributions in mathematics. Zariski was a witness and active participant of the turbulent years of the Russian Revolution and Civil War between 1917 and 1920. In 1920 he escaped to Italy and several years later he emigrated to the United States.

The subsequent articles are devoted to different aspects of the desingularization problem in algebraic geometry and some other areas. The first half of the book corresponds roughly to lectures given at the Working Week (unfortunately, not all of them were included). It provides a vigorous introduction to basic problems, classical techniques, and recent developments in the field.

The lecture of H. Hauser gives a concise historical account of the desingularization problem, a list of principal contributions to its solution, selected references, and, most importantly, a convenient dictionary of basic specific terminology used in this book.

The lectures of D. Abramovich and F. Oort explain in a transparent and rigorous manner the proof of the alteration theorem of J. de Jong. They include a thorough exposition of the theory of moduli of stable pointed curves and some results related to de Jong's theorem, in particular several different proofs of the weak version of Hironaka's theorem in characteristic zero.

They are followed by two lectures by J.-M. Aroca devoted to singularities of differential equations and their resolutions by blow-ups. In the first article he gives a detailed proof of the Seidenberg theorem which says that after finitely many blow-ups one can transform a complex foliation of dimension one on a surface to a foliation with simple singularities. Simple means that the first order part is a matrix with at least one nontrivial eigenvalue. This implies that through every point of a foliated surface there passes a locally holomorphic integral curve. Thus, in some cases, blow-ups suffice to reduce these equations, at least locally, to canonical forms. There are examples (Darboux, Jouanolou) of a codimension one foliation in a threefold without (even formal) integral divisors through a singular point.

The lecture notes by S. Encinas and O. Villamayor on constructive desingularization detail recent improvements of Hironaka's approach, giving algorithms for the desingularization of an embedded variety.

The article by G. Bodnár and J. Schicho provides a computer algorithm for the desingularization of an affine hypersurface.

The article of V. Cossart contains a refined version of the desingularization of surfaces, following Zariski's program.

The lecture notes of D. Cox give an introduction to toric varieties, their singularities and toric resolutions. Toric varieties are irreducible algebraic varieties equipped with an action of an algebraic torus (product of several copies of $\mathbf{C}^*$) with a finite number of orbits. Geometric properties of toric varieties (including their singularities) admit a purely combinatorial description. This class of varieties is an ideal testing ground for conjectures: it is sufficiently rich to capture many interesting geometric phenomena and at the same time sufficiently rigid to allow explicit constructions.

The article of B. van Geemen and F. Oort considers compactification of the moduli scheme of curves with non-trivial level structures. They show that there exist natural (though singular) compactifications which are not moduli spaces.

The article of T. Geisser discusses several applications of de Jong's theorem. The first (due to O. Gabber) is the non-negativity of local intersection multiplicities in the case of mixed characteristic. Their algebraic definition, in an abstract setting, was given by J.-P. Serre as an Euler characteristic of some explicit derived functor. As intersection multiplicities they ought to be non-negative, but this was not at all clear from the definition. The second application is a theorem about singular cohomology of algebraic varieties (defined by A. Suslin and V. Voevodski). De Jong's theorem implies that singular cohomology (with finite coefficients) for any separated scheme over an algebraically closed field (of characteristic prime to the order of the coefficient ring) coincides with étale cohomology. Further, one obtains a description of Chow groups with finite coefficients as étale cohomology. There are several other applications to relations between different cohomologies and monodromy representations.

R. Goldin and B. Tessier describe a simple toric resolution of a plane curve singularity.

The second article of H. Hauser carefully explains the geometric picture of the resolution of an embedded singular surface.

The short paper by de Jong gives an application of his alteration theorem to Dieudonné modules.

The paper by F.-V. Kuhlmann deals with valuation theory and its connections with logic (model theory for fields).

L. D. Tráng considers M. Spivakovski's approach to surface singularities.

The paper by J. Lipman studies the classical question of a simultaneous resolution of equisingular points. The notion of equisingularity was introduced by Zariski in order to express the intuitive idea that the singular locus admits a natural stratification by algebraic subsets of points with similar complexity of their neighborhoods. Lipman discusses several approaches to the proper definition of this notion.

G. Müller describes resolutions of weighted homogeneous singularities.

F. Pop gives a survey of birational abelian geometry and applications of alterations to the problem of reconstruction of function fields from their Galois groups.

The paper of H. Reitberger recalls several failed attempts to prove resolution of singularities before Hironaka.

The concluding article of M. Vaquié contains the classical treatment of the valuation theory.

Comments

Let us make an informal comment on the idea of alterations. Morally, it is the search for *good* covering varieties. Phrased in this way, the theory of alterations hints at the existence of a relatively small class of algebraic varieties which dominate *all* other algebraic varieties. A prototype in arithmetic is a consequence of a theorem by a (recently deceased) Russian mathematician G. Belyĭ, which was noticed by Yu. Manin: for *any* algebraic curve C defined over a number field there exists a modular curve $X_0(N)$ and an unramified covering $X \to X_0(N)$ such that X dominates C (in fact, there are even smaller families of curves with this property). A part of Belyĭ's argument (and de Jong's lecture at the conference at Santa Cruz) inspired the approach of the first author and T. Pantev to desingularizations. Precisely, any projective algebraic variety is (after blow-ups of some smooth points) a finite covering of a $\mathbb{P}^1$-fibration over a projective space, ramified only in sections (!) of this fibration.

In particular, any isolated singularity is a covering of a neighborhood of a smooth point ramified in a family of smooth hypersurfaces. This example indicates that the method of alterations has some hidden potential which remains to be explored.

Conclusion

As one can see from our description, many of the articles of the book are either expositions of classical results or useful variations of well known topics. In our opinion, the core of the book is the papers discussing different aspects of de Jong's alteration theory and its applications, especially the excellent lecture notes of D. Abramovich and F. Oort. Unfortunately, the presentation of applications of alterations is relatively short. We would have welcomed some comments on the central role of certain classes of singularities and their explicit desingularizations in the minimal model program pursued by Sh. Mori, J. Kollár, and many others (see [4]).

A curious reader will certainly enjoy the multifaceted view of the subject — the emerging internal diversity of the field may provide inspiration to a wide range of mathematicians, from graduate students to experts.

Postscriptum

In the autumn of 1981, the first author visited Zariski at his residence with a message from the Harvard Mathematics Department that Zariski was awarded the Wolf prize. "Too late!" exclaimed the 82-year old mathematician.

References

[1] G. Belyĭ, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Acad. Nauk SSSR **43**, 269-276, (1979).

[2] E. Bierstone, P. Millman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Inventiones Math. **128**, 207-302, (1997).

[3] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math. (2) **79**, 109–203, (1964); ibid. **79**, 205–326, (1964).

[4] J. Kollár, Sh. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, (1998).

[5] M. Spivakovsky, *A solution to Hironaka's polyhedra game*, Arithmetic and geometry, Vol. II, 419–432, Progr. Math., **36**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1983).

[6] O. Zariski, *Collected papers, vol. I-IV*, The MIT Press, Cambridge, (1972-79).

Fedor Bogomolov, New York University
Yuri Tschinkel, Princeton University