SOMMAIRE DU N° 91

SMF

Mot du Président ... 2
Vie de la société ... 3

MATHÉMATIQUES

Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ? *P. Biane* ... 4
Une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass, *Y. Coudène* ... 10

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Calcul, informatique et théorie de l'information, *M.-J. Durand-Richard* ... 18

INFORMATIONS

CNRS : session d'octobre 2001 ... 31
Crafoord Ceremony, *M. Atiyah* ... 33
Concours Objectif Science, *A. Quéguiner-Mathieu* ... 34
Les Olympiades de Mathématiques 2001 , *J.-C. Novelli* ... 35
Revue Pénombre, *J.-M. Kantor* ... 37
Attribution du Prix Fermat ... 37

CARNET

J.-L. Lions, *G. Tronel* ... 39
O. A. Oleinik, *G. Tronel* ... 44
A. Ducrocq, *J.-M. Kantor* ... 46

COURRIER DES LECTEURS

Partenariat entre universités et CNRS, *J.-Y. Mérindol* ... 47
La politique du CNRS en mathématiques, *C. Peskine et M. Enock* ... 51
L'histoire de la "modularity conjecture", *J.-P. Serre* ... 55

LIVRES ... 59

Mot du Président

Parmi les multiples activités de la SMF, les plus marquantes sont actuellement celles qui concernent la recherche. La situation de l'enseignement scientifique en France n'en reste pas moins l'une des questions qui préoccupent nombre de collègues.

En effet, au cours du conseil d'administration du 17 juin dernier, le point a été fait sur la contribution personnelle de chacun de ses membres aux actions de la SMF et de nouveaux projets se sont dégagés autour d'un thème central : celui de l'enseignement.

Certes, la recherche mathématique française est florissante et ses perspectives de développement prometteuses. Il est cependant crucial de rester vigilant pour maintenir ce niveau d'excellence et garantir l'avenir. Un nombre croissant de métiers nécessitent une formation mathématique de haut niveau, on peut prévoir que de nombreuses créations d'emplois vont continuer à proposer des débouchés de plus en plus variés pour des étudiants possédant de sérieuses compétences en mathématiques. Préparer l'avenir, c'est donc en premier lieu garantir la qualité de l'enseignement dispensé aux jeunes.

Cet avenir est l'un des sujets de réflexion et d'inquiétude constants de la SMF qui s'est déjà engagée à différents niveaux. Elle intervient entre autres dans la conception des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire et participe de manière active à la commission Kahane.

S'appuyant sur les constats de sa commission de l'enseignement, la SMF a souhaité aller plus loin et en premier lieu, organiser une manifestation très ouverte en concertation avec la SMAI, associant des scientifiques d'autres disciplines.

Dans le même temps, J-P. Demailly a diffusé un rapport (disponible sur le serveur de la SMF [1] qui a encore contribué à sensibiliser beaucoup de collègues.

En octobre 2001, le conseil de la SMF a donc prévu l'organisation, en collaboration avec la SMAI, d'une table ronde qui se tiendra le samedi 12 janvier après-midi, sur le thème *mathématiques et enseignement des sciences*, et à laquelle sont invités Antoine d'Autume, Jean-Pierre Demailly, Pierre-Henri Gouyon, Jean-Pierre Kahane, Gilles Kahn, Patrick Le Tallec, et Jacques Treiner. Il y sera entre autres débattu de la place de la modélisation de l'algorithmique et du calcul numérique. Le programme est disponible sur le serveur de la smf [2].
Parmi les documents de travail, le compte-rendu de la séance qui s'est tenue le 22 Mai 2000 a l'Académie des Sciences sur *l'enseignement des mathématiques en liaison avec les autres disciplines* (paru dans les *Discours et Notices biographiques* de l'Académie des Sciences, tome III (2000), 83-93) sera distribué aux participants.

Ce premier pas, qui devrait préfigurer d'autres actions dans ce domaine, est lié à une inquiétude grandissante devant les problèmes de formation des scientifiques dont certaines solutions incombent principalement à la communauté mathématique.

Michel Waldschmidt

[1] `http ://smf.emath.fr/Enseignements/TribuneLibre`
[2] `http ://smf.emath.fr/Enseignements/CommissionSMF/Debatjanvier2002.html`

Vie de la société

Les internautes auront remarqué que le serveur de la SMF avait subi une cure de rajeunissment. Vos remarques constructives permettront encore de l'améliorer.

La SMF et la SMAI préparent actuellement deux grands colloques internationaux : le premier, avec la Société Mathématique Européenne, aura lieu à Nice en février 2003 ; le suivant, en collaboration avec la Société Mathématique Canadienne et la Société de Mathématiques Appliquées du Canada, est prévu en été 2004 à Toulouse.

La SMF contribue à l'élaboration d'un annuaire des mathématiciens français. Les informations sur ce sujet ont été envoyées aux adhérents en même temps que les bulletins de réadhésion.

La SMF est aussi un des partenaires de l'opération de numérisation des publications mathématiques (NUMDAM) pilotée par la cellule MathDoc. La SMF a patronné un colloque à l'Imperial College (Londres) le samedi 1 décembre 2001 : "Olinde Rodrigues and his circle : Mathematicians and social utopias".

⋆ ⋆ ⋆

Éditorial

Le comité de rédaction présente ses voeux aux lecteurs de la Gazette et les remercie pour leur fidélité.

— *Gérard Besson*

MATHÉMATIQUES

Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ?

P. Biane

Ce texte est tiré d'un article de D. Bayer et P. Diaconis "Trailing the dovetail shuffle to its lair" *Ann. Appl. Prob.* , **2** (1992), no. 2., p. 294–313.
Je remercie T. Chomette pour sa lecture attentive du texte.

1. Introduction

La méthode la plus utilisée pour battre un paquet de cartes consiste à couper le paquet en deux, puis à mélanger les deux parties en alternant les cartes. J'appellerai ces deux opérations *la coupe* et *le mélange*.

Lorsqu'on suit la méthode rigoureusement, on coupe le paquet en deux parties égales et on alterne exactement les cartes de chaque partie. Si on fait ça avec un paquet de 32 cartes, en prenant soin de laisser toujours la première carte sur le dessus du paquet, on s'aperçoit qu'au bout de 5 battages de cartes, on est revenu dans la position intiale. La règle générale est que la carte en position k arrive en position $2k - 1$ si $k \leqslant 16$ et en position $2k - 32$ si $k \geqslant 17$. Par exemple voici les positions successives de la sixième carte : 6, 11, 21, 10, 19, 6. On est bien revenu en position initiale en 5 coups.

Plus généralement, avec un jeu de 2^n cartes, cette méthode permet de revenir dans la position initiale en n battages.
Exercice : démontrer ce résultat ! (Je donne une solution à la fin du texte).

Ce fait est à la base d'un tour de cartes spectaculaire, où le magicien retrouve une carte dans un paquet que tout le monde croit bien mélangé. Évidemment, pour arriver à couper un paquet *exactement* au milieu puis à le « mélanger » parfaitement et cela 5 fois de suite, il faut une dextérité hors du commun, et bien peu de personnes au monde sont capable d'exécuter ce tour.

En général, quand on bat un paquet, après la coupe les deux parties ne sont qu'approximativement égales et lors du mélange les deux paquets n'alternent pas exactement. Heureusement d'ailleurs, car le but de l'opération est que l'on ne puisse pas deviner la position des cartes une fois le paquet battu, même si on la connaissait avant. Cela nous amène à la question principale de l'exposé : combien de fois doit on battre le paquet pour qu'il soit bien mélangé ? L'intérêt de la question est évident, au moins pour les joueurs de cartes ou les patrons de casinos. En effet, si l'on ne bat pas assez les cartes, il reste dans le jeu un peu d'information provenant de la distribution précédente, que certains joueurs pourraient exploiter pour deviner les cartes, comme par exemple dans le tour de magie qui est expliqué plus bas. Évidemment, plus on bat les cartes et plus on lutte contre cet effet, mais d'un autre côté, si l'on bat les cartes pendant trop longtemps, cela ralentit le jeu (et donc diminue les gains du casino !), il est par conséquent utile de savoir à partir de combien de battages le jeu est suffisamment mélangé.

Pour répondre à cette question il faut disposer d'un modèle mathématique qui décrive la façon dont on bat les cartes, puis arriver à en faire une analyse assez précise.

Le modèle dont il sera question ici a été proposé par les mathématiciens Gilbert et Shannon en 1955, et indépendamment par Reeds en 1981, et il a été testé par P. Diaconis qui a vérifié qu'il décrivait de façon réaliste le battage des cartes pratiqué par exemple dans les casinos.

2. Modèle probabiliste

2.1 La coupe

On dispose d'un paquet de n cartes, que l'on commence par couper en deux paquets de j et $n-j$ cartes, le nombre j étant choisi entre 0 et n, avec la loi *binomiale* c'est-à-dire que l'on a une probabilité $\frac{1}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$ que j soit égal à k.

La formule du binôme nous dit que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!}=1$ donc la somme des probabilités fait bien 1. Si on trace le graphe de cette probabilité en fonction de k, on observe une courbe "en cloche", dont le maximum se situe en $n/2$, et dont la plus grande partie se trouve concentrée entre $n/2-\sqrt{n}$ et $n/2+\sqrt{n}$.

Cela modélise de façon raisonnable ce que peut faire un batteur de carte d'une adresse moyenne en essayant de couper le paquet en deux parties égales. Une autre raison de choisir cette distribution est la suivante : si on choisit une partie de $\{1,\dots,n\}$ au hasard, toutes les parties étant équiprobables, alors la probabilité de tirer une partie à k éléments est $\frac{1}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Je donnerai plus bas encore une autre justification pour le choix de cette distribution.

2.2 Le mélange

Ensuite, une fois que le paquet a été coupé, on mélange les deux parties de la façon suivante : supposons qu'il reste a_1 cartes dans le premier paquet et a_2 dans le second, alors on choisit la carte du dessous du premier paquet avec probabilité $\frac{a_1}{a_1+a_2}$, ou bien celle du second avec probabilité $\frac{a_2}{a_1+a_2}$, et on continue ainsi, avec a_1-1 cartes dans le premier et a_2 dans le second, ou bien a_1 dans le premier et a_2-1 dans le second suivant les cas, jusqu'à épuisement des deux paquets. Là encore ce choix semble raisonnable, car plus l'un des paquets est gros par rapport à l'autre, plus on a de chance de choisir la carte de ce paquet.

2.3 Battages et permutations

On peut interpréter un battage de cartes comme une *permutation* du jeu de cartes. Dans la suite j'appellerai les cartes par des numéros $1,2,3,...,n$, plutôt que par leurs valeurs faciales habituelles, avec trèfle, pique, etc..., car cela rend les arguments plus aisés à suivre, mais cela ne change rien à la nature des choses. Une permutation peut se représenter sous la forme (ici avec $n=10$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

La première ligne représente l'ordre des cartes avant le battage, et la seconde ligne l'ordre après battage. Pour un jeu de n cartes, il y a $n!$ permutations possibles. Pour un jeu de 52 cartes, on a ainsi 52! possibilités, soit :

80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000
un nombre gigantesque. Si on voulait écrire tous les ordres possibles d'un jeu de 52 cartes, non seulement cela prendrait des milliards d'années (au bas mot), mais il n'y aurait sans doute pas assez de matière dans l'univers pour le faire. Comme nous le verrons plus loin, un seul battage ne permet de réaliser que 2^n permutations, or ici :

$$2^{52} = 4503599627370496$$

un nombre très grand mais néanmoins beaucoup plus petit que 52!. Même avec 4 battages, on obtiendra moins de 2^{208} permutations, soit

411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256

ce qui est toujours beaucoup plus petit que 52 ! (environ 2 millions de fois plus petit).

Il faudra donc nécessairement plus de battages pour espérer obtenir une proportion satisfaisante de toutes les permutations possibles, et une distribution suffisamment aléatoire des cartes. On verra plus bas comment quantifier l'aléa contenu dans le résultat de plusieurs battages de cartes.

3. Répartition des configurations après m battages

3.1 Le théorème

Pour le moment je vais donner une formule explicite pour la probabilité d'obtenir une configuration π du paquet de cartes au bout de m battages. On suppose que dans la configuration initiale les cartes sont dans l'ordre $123...n$, alors la configuration π n'est autre que l'ordre des cartes obtenu après m battages. Dans l'énoncé le symbole C_p^q désigne le coefficient du binôme $\mathrm{C}_p^q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ si $q \leqslant p$, et vaut 0 sinon.

Théorème : *La probabilité pour que le paquet se trouve dans l'état π après m battages est égale à*

$$p_n(\pi) = \frac{1}{2^{mn}} \mathrm{C}^n_{2^m+n-r}$$

où r est le nombre de suites montantes dans π.

3. 2 Un joli tour de cartes

3.2.1 Principe du tour

Pour comprendre l'énoncé du théorème il faut savoir ce qu'est une suite montante. Pour l'expliquer je vais décrire un tour de cartes inventé au début du siècle par les magiciens Williams et Jordan. Dans ce tour, le magicien tend un paquet de cartes à un spectateur, puis il tourne le dos au public et il demande au spectateur de battre deux fois le paquet, puis de le couper encore une fois, et de prendre la carte au dessus du paquet. Le spectateur note la valeur de la carte, puis il la remet où il veut dans le paquet et le rebat. Alors le magicien se retourne, étale les cartes devant lui, face dessus, et après les avoir intensément scrutées, désigne la carte que le spectateur avait sortie.

Comment fonctionne le tour ? Le magicien connaît l'ordre des cartes dans le paquet avant le battage, par exemple cet ordre est l'ordre naturel $1, 2, 3, ..., n$. L'idée de base est que battre trois fois le jeu laisse suffisamment de structures invariantes dans la distribution des cartes, ce qui est vrai si le nombre de cartes est suffisant (en général on prend un jeu de 52 cartes), et que l'on peut retrouver la carte du spectateur en comptant les suites montantes.

3.2.2 Suites montantes

Une suite montante est une sous-suite maximale constituée de nombres successifs. Toute permutation de $\{1, \ldots, n\}$ peut être décomposée de façon unique en une juxtaposition de suites montantes, par exemple si on considère la permutation de 16 chiffres

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 14 & 3 & 4 & 15 & 6 & 9 & 10 & 5 & 11 & 1 & 7 & 12 & 2 & 8 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

alors les sous-suites montantes sont : $(1, 2)$, $(3, 4, 5)$, $(6, 7; 8)$, $(9, 10, 11, 12, 13)$ et $(14, 15, 16)$. Pour trouver les suites montantes d'une permutation, on procède comme ceci : on commence par repérer la carte 1. Si la carte 2 est avant 1, alors (1) est une suite montante, sinon on cherche 3. Si 3 est avant 2, alors $(1, 2)$, est une suite montante, sinon on cherche 4, et ainsi de suite jusqu'à épuisement du paquet. Lorsqu'on bat une première fois les cartes qui sont dans la position initiale $123...n$, on obtient deux suites montantes $1, 2, ..., k$ et $k+1, k+2...n$, où k désigne le numéro de la carte où on a effectué la coupe (sauf dans le cas extrême où on a remis le paquet dans sa position initiale, auquel cas il y a une seule suite montante).

En général, au début, chaque battage multiplie par deux le nombre de suites montantes dans le paquet, donc au bout de 3 battages il y a 8 suites montantes, qui contiennent en moyenne 52/8= 6,5 cartes.

3.2.3 Explication du tour

La manipulation du spectateur, qui extrait une carte pour la replacer ailleurs, crée dans la plupart des cas une neuvième suite montante, qui consiste en cette unique carte. Le magicien n'a plus alors qu'à identifier les suites montantes dans le paquet pour trouver la carte recherchée (en fait l'analyse est un peu plus compliquée car on autorise le spectateur à faire une coupe supplémentaire mais j'ignore ici cette complication).

Le tour ne marche pas à tous les coups, c'est facile à voir, car une suite montante contenant une seule carte peut être créée par hasard lors des battages, ce qui peut tromper le magicien, ou bien le spectateur peut remettre la carte qu'il a choisie, à l'endroit où il l'a prise, ce qui détruit le principe du tour. Paradoxalement, en général le spectateur aura tendance, pour essayer d'embrouiller le magicien, à remettre la carte loin de l'endroit où il l'a prise, avec l'effet exactement inverse de celui recherché ! De même, plus il y a de cartes dans le jeu, plus il est rare qu'une suite montante à une seule carte soit créée, et donc plus le tour a de chances de marcher. Une simulation sur ordinateur a montré que, sur un million d'essais, avec un jeu de 52 cartes, le truc permet de deviner la bonne carte dans 84% des cas. Si on s'autorise une second essai en cas d'échec, alors le pourcentage de succès passe à 94%.

3.3 Démonstration du théorème

Voyons maintenant comment on démontre le théorème. Tout d'abord, examinons de plus près ce qui se passe après un seul battage.
Supposons que la coupe ait produit deux tas de j et $n-j$ cartes, numérotées 1 et 2. Ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{2^n} \frac{n!}{j!(n-j)!}$.
Pour effectuer le mélange on choisit chaque carte successivement dans l'un des deux paquets. Les choix successifs sont notés $i_1, i_2, ..., i_n$, où à chaque fois $i_k \in \{1, 2\}$ désigne l'un des deux paquets. La probabilité d'un tel choix est

$$\frac{x_1}{n} \frac{x_2}{n-1} \cdots \frac{x_{n-1}}{2} \frac{x_n}{1}$$

où x_k désigne le nombre de cartes qui restent dans le i_k^{eme} paquet à la k^{eme} étape. On voit facilement que les nombres $j, j-1, j-2, ..., 1$ et $n-j, n-j-1, ..., 1$ apparaissent chacun une fois au numérateur, donc le produit ne dépend pas de la suite des i_k, et vaut $\dfrac{j!(n-j)!}{n!}$.

Finalement, tous les résultats possibles avec une coupe au niveau j sont donc équiprobables, de probabilité $\dfrac{1}{2^n}$.
Ce résultat donne une autre justification au choix de la loi binomiale pour j : il conduit à l'équiprobabilité de tous les choix possibles, indépendamment de la taille des paquets après la coupe.
Il est possible que l'on obtienne la même permutation avec des nombres j_1 et j_2 différents. En fait cela ne peut se produire que si la permutation obtenue est la permutation identique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

et cela peut se produire exactement une fois pour chaque valeur de j. En effet, dans tous les autres cas, les deux suites montantes obtenues à l'issue de ce mélange sont, on l'a vu, de la forme $1, 2, \ldots, j$ et $j+1, \ldots, n$. C'est-à-dire qu'elles caractérisent l'entier j.

Si nous résumons ce que nous avons obtenu, nous voyons que chaque permutation avec 2 suites montantes peut être réalisée avec probabilité $\dfrac{1}{2^n}$, alors que la permutation identique, qui a une seule suite montante peut être réalisée une fois pour chaque valeur de j, ce qui fait qu'elle apparaît avec la probabilité $\dfrac{(n+1)}{2^n}$.

On vérifie bien ainsi le théorème dans le cas $m = 1$: dans ce cas, les seules valeurs possibles de r sont $r = 1$ et $r = 2$.

L'analyse du cas général est un peu plus compliquée. On remarque que l'on peut faire d'abord toutes les coupes avant de faire les mélanges, sans changer la probabilité finale de tirer une permutation donnée. Pour cela, après la première coupe, au lieu de mélanger les deux paquets, recoupons les chacun en deux parties, puis encore les quatre paquets obtenus en deux parties, etc... et cela m fois en tout, de sorte que l'on a obtenu 2^m parties. Rappelons que ces parties peuvent être éventuellement vides ! Alors on mélange ces parties de sorte que chacune des façons de faire le mélange a la même probabilité $\dfrac{1}{2^{nm}}$ (la démonstration du cas $m = 1$ se transpose telle quelle). On remarque aussi que le nombre de suites montantes après m battages est d'au plus 2^m.

On voit alors que ce procédé donne le même résultat que celui correspondant à faire m battages successifs. Maintenant, pour une permutation donnée, il faut calculer de combien de façons elle peut être réalisée avec ce procédé et multiplier par $\dfrac{1}{2^{nm}}$ pour obtenir sa probabilité d'apparaître. Quand on a effectué les m coupes on se retrouve avec 2^m paquets, chacun étant constitué de cartes qui se suivent. Cela revient en fait à avoir choisi les $2^m - 1$ positions où se trouvent les coupures entres les 2^m paquets. Supposons que les r suites montantes de la permutation que l'on veut obtenir soient données, par exemple $(1, 2, .., k_1); (k_1 + 1, ..., k_2); ...; (k_{r-1} + 1, ..., n)$, alors nécessairement, on doit avoir coupé les paquets entre k_j et k_{j+1}. Cela fait $r - 1$ coupes qui sont déterminées. Il reste alors $2^m - r$ coupes à effectuer, et on peut les faire où l'on veut dans $n + 1$ positions. Une fois cela fait, on pourra retrouver la permutation voulue au moment du mélange, d'une seule façon. Cela fait en tout $\mathrm{C}^n_{2^m+n-r}$ possibilités, d'après le

Lemme : *Il y a C_{p+q-1}^{p-1} façons de placer q objets dans p cases (les objets sont indistinguables, et on peut en mettre plusieurs dans chaque case).*
La démonstration du lemme est simple : si j'appelle $a_1, a_2, \ldots, a_p$ le nombre d'objets dans les cases $1, 2, ..., p$, alors $\{a_1+1, a_1+a_2+2, \ldots, a_1+\cdots+a_{p-1}+p-1\}$ forme un sous-ensemble à $p-1$ éléments de $\{1, 2, 3, \ldots, p+q-1\}$. Nous avons q objets au total, donc $a_1+\cdots+a_p = q$, c'est-à-dire $a_p = q-(a_1+\cdots+a_{p-1})$, et la connaisance des entiers $a_1, \ldots, a_{p-1}$ caractérise le placement des objets. On obtient ainsi une bijection entre les façons de placer q objets dans p cases et les sous-ensembles à $p-1$ éléments de $\{1, 2, 3, \ldots, p+q-1\}$, dont le nombre est C_{p+q-1}^{p-1}.

4. Vers une répartition homogène

Une fois le théorème démontré, comment résoudre notre problème initial ? On voit que, lorsque m tend vers l'infini, alors $\dfrac{C_{2^m+n-r}^{n}}{2^{nm}}$ tend vers $1/n!$, *i.e.* toutes les répartitions deviennent équiprobables, ce qui correspond bien à l'idée intuitive que plus l'on bat les cartes, plus le paquet devient aléatoire. Il faut maintenant quantifier cette intuition. Une manière de le faire consiste à introduire la quantité

$$Q_m = \frac{1}{2}\sum_{\pi} |p_m(\pi) - \frac{1}{n!}|$$

qui mesure la distance entre la probabilité uniforme et la probabilité réalisée par m battages de cartes. Cette quantité est toujours comprise entre 0 et 1. Si elle est proche de 1, cela signifie que les probabilités p_m se concentrent sur un petit nombre de configurations. Plus cette quantité est petite, plus la répartition est "aléatoire". En utilisant le théorème 1, on voit que

$$Q_m = \frac{1}{2}\sum_{r} A_{n,r}\left|\frac{C_{2^m+n-r}^{n}}{2^{nm}} - \frac{1}{n!}\right|$$

où $A_{n,r}$ désigne le nombre permutations avec r suites montantes. On ne connaît pas d'expression explicite simple de ces nombres, mais on connaît des algorithmes permettant de les calculer, et des formules approchées lorsque n est grand. À l'aide de cela, Bayer et Diaconis ont montré que, si $m = \dfrac{3}{2}\log_2 n + x$, alors

$$Q_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{2^{-x}}{4\sqrt{3}}} e^{-t^2/2}\,dt + r_n \qquad (*)$$

où r_n est un reste qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On voit que Q_m est proche de 1 lorsque $x << 0$ et proche de 0 lorsque $x >> 0$ (on peut donner des valeurs numériques précises, par exemple en regardant dans une table de la loi de Gauss). La conclusion est qu'il faut environ un peu plus que $\dfrac{3}{2}\log_2 n$ battages pour bien mélanger un jeu de n cartes. Lorsque $n = 52$, ce qui est le cas le plus fréquent dans les applications, on peut calculer précisément Q_m en fonction de m et on obtient les valeurs (avec 3 décimales)

$$Q_1 = 1.000,\ Q_2 = 1.000,\ Q_3 = 1.000,\ Q_4 = 1.000,\ Q_5 = 0.924,$$
$$Q_6 = 0.614,\ Q_7 = 0.334,\ Q_8 = 0.167,\ Q_9 = 0.085,\ Q_{10} = 0.043$$

On voit que la distance reste pratiquement à son maximum jusqu'à 5 battages, puis elle se met à décroître rapidement, et en pratique, avec 8 battages on obtient un brassage des cartes suffisant pour que la donnée de la distribution avant battage soit inutilisable par les joueurs. Notez que les valeurs de Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10} forment approximativement une suite géométrique de raison $1/2$, ce qui est en accord avec la formule approchée $(*)$.

A. Annexe : solution de l'exercice

Je termine en donnant une solution à l'exercice. On numérote les cartes de 0 à $2^n - 1$, et on écrit leur numéro en notation binaire, chaque numéro est donc une suite de n chiffres égaux à 0 ou 1. On vérifie facilement que la transformation de "battage parfait" consiste à faire une *permutation circulaire* de ces n chiffres, par exemple si on prend la sixième carte d'un jeu de 64 cartes, on écrit 5 en binaire (on a commencé par 0 !), soit 000101, et les positions successives seront, en notation binaire, 001010, 010100, 101000, 010001, 100010 et enfin 000101. Il est clair qu'avec une permutation circulaire, on revient sur ses pas en n étapes, et l'exercice est résolu.

Philippe Biane
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure de Paris

Une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass

Y. Coudène

1. Introduction

Le but de cette note est de présenter un résultat d'approximation analogue au théorème de Stone-Weierstrass, dans le cadre des espaces L^p. Rappelons l'énoncé de ce théorème (cf p.ex [Du66] chap.12) :

Soit X un espace topologique et $f_i : X \to R$ une famille de fonctions de $C(X)$ qui sépare les points :

$$\forall\, x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\, i\ tq \quad f_i(x) \neq f_i(y).$$

Alors l'algèbre engendrée par les fonctions f_i est dense dans $C(X)$ pour la topologie compacte-ouverte.

La topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie de la convergence uniforme lorsque X est compact.

Le théorème de Stone-Weierstrass peut être utilisé pour démontrer que les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2([0,1], dx)$, ou encore que les fonctions $x \mapsto e^{2\pi i n x}$ forment une base hilbertienne de $L^2([0,1], dx)$. Cet espace admet également des bases constituées de fonctions qui ne sont pas continues ; la plus simple est la base de Haar, définie comme suit :

$$f_0 = \mathbf{1},\quad f_{k,n} = 2^{n/2}\left(\mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right[} - \mathbf{1}_{\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right[}\right),\ k = 0..2^n - 1,\ n \in \mathbf{N}.$$

Cette famille de fonctions possède plusieurs propriétés intéressantes : ses éléments ne prennent qu'un nombre fini de valeurs et satisfont une certaine invariance d'échelle :

$f_{k,n+1}(x) = \sqrt{2}\, f_{k,n}(2x)$. Elle est donc facile à implémenter sur machine.

En dimension supérieure, il est possible de construire des fonctions satisfaisant des conditions semblables. Les intervalles sont remplacés par des ensembles possédant des propriétés d'autosimilarités, comme dans l'exemple ci-contre. Ces constructions interviennent en traitement d'images [KV95].

Revenons à la base de Haar : cette famille orthonormée de $L^2([0,1], dx)$ sépare les points ; on peut vérifier que le sous-espace vectoriel et l'algèbre qu'elle engendre coïncident. A partir de ces deux propriétés, peut-on en déduire que cette famille forme une base hilbertienne de L^2 ? Autrement dit, peut-on formuler une version du théorème de Stone-Weierstrass valide dans les espaces L^p ?

C'est le but de la première partie de cet article. On présente ensuite une correspondance entre σ-algèbres et partitions, due à V. A. Rokhlin ; cette correspondance permet d'obtenir des théorèmes d'approximation plus précis.

2. Approximation dans les espaces L^p

Afin de donner une preuve élémentaire, on se place sur l'espace $[0,1]$, qui est muni d'une mesure de probabilité borélienne μ.

Rappelons que pour $p \geqslant 1$, les espaces L^p sont des espaces de Banach pour la norme $||f||_p = (\int |f|^p)^{1/p}$. Pour $p \in]0,1[$, ce sont des espaces métriques complets pour la distance $d(f,g) = \int (|f-g|^p)$; ils ne sont plus localement convexes ([WRu73]1.47). En particulier, leur dual topologique est restreint à $\{0\}$, si μ est non-atomique. Pour $p = 0$, L^0 est l'espace des fonctions mesurables, muni de la convergence en probabilité ; c'est un espace métrique complet. Là encore, les seuls ouverts convexes sont $\{0\}$ et L^0 ([Fed69] 2.3.8).

Théorème 1. *Soit $p \in [0, \infty[$, μ une mesure de probabilité borélienne sur l'intervalle $[0,1]$, et $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions μ-mesurables bornées qui sépare les points :*

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\, n \in \mathbf{N} \ \ tq \ \ f_n(x) \neq f_n(y).$$

Alors l'algèbre engendrée par les fonctions f_n et les constantes, est dense dans $L^p([0,1], \mu)$.

Remarques :
– Il faut que la famille de fonctions f_n soit dénombrable. La famille des fonctions indicatrices des singletons sépare les points mais n'engendre pas L^p.
– Les fonctions f_n sont supposées bornées afin que l'algèbre qu'elles engendrent soit bien incluse dans L^p. Lorsque $p = 0$, cette condition est superflue.
– Il est possible de démontrer ce théorème à l'aide du théorème de Krein-Milman, portant sur les points extrémaux des compacts convexes ; cf [WRu73]5.7 pour une preuve dans le cadre topologique.

Preuve :
La démonstration comporte trois étapes : On commence par se ramener au cas où les f_n sont des fonctions indicatrices d'ensembles mesurables B_n. La propriété de séparation permet d'obtenir une injection de $[0,1]$ dans $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, qui envoie les ensembles B_n sur les cylindres. Comme les cylindres engendrent la tribu des boréliens, il suffit de vérifier que cette injection est un plongement pour terminer la preuve.

Le lemme suivant est un résultat classique en théorie des probabilités.

Lemme 1. *Soit $n \in \mathbf{N}$, et $a, b \in \mathbf{R}$. Alors la fonction indicatrice de l'ensemble $f_n^{-1}(]a,b[)$ est dans l'adhérence de l'algèbre engendrée par f_n et les constantes.*

Preuve :
Posons $f = f_n$; soit C une constante positive telle que $|f| \leqslant C$. Sur l'intervalle $[-C, C]$, on peut trouver une suite uniformément bornée de polynômes P_k, qui converge simplement vers $\mathbf{1}_{]a,b[}$. Pour cela, il suffit d'approcher de manière croissante la fonction $\mathbf{1}_{]a,b[}$ par des fonctions continues, par exemple $g_j(x) = min(1, jd(x,]a,b[^c))$ puis d'approcher ces fonctions g_j par des polynômes uniformément bornés par 2 ; la suite P_k est obtenue par extraction diagonale.

On a alors $P_k \circ f \to \mathbf{1}_{]a,b[} \circ f$ simplement, et $|P_k \circ f(x)| \leqslant 2$, $\forall x \in [0,1]$. Le théorème de convergence dominée montre donc que les éléments $P_k \circ f$ de l'algèbre engendrée par f tendent vers $\mathbf{1}_{f^{-1}(]a,b[)}$ lorsque k tend vers l'infini. La domination uniforme est inutile lorsque $p = 0$, car la converge presque partout implique la convergence en probabilité. †

Revenons à la preuve du théorème. Les ensembles $f_n^{-1}(]a,b[)$, avec a, b rationnels, sont en nombre dénombrable ; mettons les sous la forme d'une suite $\{B_k\}$. L'algèbre engendrée par les $\mathbf{1}_{B_k}$ est contenue dans l'adhérence de l'algèbre engendrée par les f_n, il suffit donc de démontrer qu'elle est dense dans L^p, ou encore que les B_k, et les ensembles négligeables, engendrent la tribu des ensembles μ-mesurables.

La famille $\{\mathbf{1}_{B_k}\}$ sépare les points ; par conséquent, on obtient une injection :

$$\begin{array}{rll} \Phi: & [0,1] & \to \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ & x & \to \{\mathbf{1}_{B_k}(x)\}_{k \in \mathbf{N}} \end{array}$$

Notons $\tilde{B}_k$ l'ensemble des points de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ dont la k^{ieme} coordonnée est égale à 1. Les $\tilde{B}_k$ engendrent la tribu des boréliens de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. L'égalité $\varphi^{-1}(\tilde{B}_k) = B_k$ montre que les B_k engendrent l'image réciproque de la tribu des boréliens de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Il suffit donc de montrer que l'image réciproque de la tribu des ensembles $\varphi_*\mu$-mesurables contient la tribu des ensembles μ-mesurables.

L'application φ étant injective, on a, pour tout $A \subset X$, $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Il suffit donc de montrer que l'image d'un ensemble μ-mesurable est $\varphi_*\mu$-mesurable. Quitte à réaliser $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ comme un compact de $\mathbf{R}$, on peut considérer que φ est à valeurs réelles. Le lemme suivant termine la démonstration du théorème :

Lemme 2. *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur l'intervalle $[0,1]$, et soit $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application injective μ-mesurable (l'image réciproque d'un borélien est mesurable). Alors l'image d'un ensemble μ-mesurable est $\varphi_*\mu$-mesurable.*

Preuve :
Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble μ-mesurable. Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on peut trouver un compact $K_j \subset A$, de mesure supérieure à $\mu(A) - 1/j$, sur lequel l'application φ est continue. C'est une conséquence de la densité des fonctions continues, au sens de la convergence presque partout, et du théorème d'Egorov : si φ_n est une suite de fonctions mesurables qui convergent presque partout, elle converge uniformément sur des compacts de mesure arbitrairement proche de 1.

On peut supposer les K_j croissants pour l'inclusion ; notons A_0 l'union des K_j. L'image d'un compact par une application continue est un compact, si bien que $\varphi(K_j)$

est compact. L'ensemble $\varphi(A_0)$ est donc borélien. De la même façon, on peut trouver un ensemble borélien $A_1 \subset A^c$ tel que $\mu(A^c - A_1) = 0$ et $\varphi(A_1)$ est borélien. L'application φ étant injective, on a les égalités :

$$\varphi^{-1}\varphi(A) = A, \qquad \varphi(A) \cap \varphi(A^c) = \varnothing.$$

Les inclusions $A_0 \subset \varphi^{-1}\varphi(A_0) \subset \varphi^{-1}\varphi(A) = A$ montrent que $\varphi_*\mu(\varphi A_0) = \mu(A)$. De même, $\varphi_*\mu(\varphi A_1) = \mu(A^c)$, si bien que l'ensemble $\varphi(A_0)\amalg\varphi(A_1)$ est de $\varphi_*\mu$-mesure totale.
Enfin, les inclusions $\varphi(A) \subset \varphi(A^c)^c \subset \varphi(A_1)^c$ impliquent la relation suivante : $\varphi(A) - \varphi(A_0) \subset \varphi(A_1)^c \cap \varphi(A_0)^c$. Ce dernier ensemble est négligeable, donc l'image de A est $\varphi_*\mu$-mesurable. †

L'énoncé du théorème étant de nature mesurable, il reste encore vrai sur tous les espaces probabilisés isomorphes à $[0,1]$. La preuve qui vient d'être donnée se généralise immédiatement, lorsque $[0,1]$ est remplacé par un borélien d'un espace métrique séparable complet ; ceci afin d'assurer la régularité de la mesure de probabilité borélienne μ.

Il n'existe, à notre connaissance, aucun ouvrage mentionnant ce résultat d'approximation. Cela ne signifie pas pour autant qu'il est nouveau : dans [Ro52], V. A. Rokhlin démontre qu'une famille dénombrable d'ensembles mesurables séparant les points engendre la tribu des ensembles mesurables. Ce résultat est parfois mentionné dans les livres de théorie de la mesure [Co80] [DRu90]. Il est obtenu comme corollaire des théorèmes de structure des ensembles analytiques.

3. Correspondance de Rokhlin

Que se passe-t-il lorsque les fonctions f_n ne séparent plus les points ? Peut-on encore caractériser les fonctions qui appartiennent à l'adhérence de l'algèbre engendrée par les f_n ? La réponse se trouve dans un article de V. A. Rokhlin [Ro52], qui met en correspondance les sous σ-algèbres de la tribu des ensembles mesurables, et certaines partitions de l'espace considéré.

3.1 Définitions

Définition 1. *Une partition ξ de $[0,1]$ est la donnée d'un ensemble de parties de $[0,1]$, disjointes deux à deux, recouvrant $[0,1]$. L'élément de la partition qui contient le point $x \in [0,1]$ est noté $\xi(x)$.*
La partition est dite mesurable *s'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables $\{B_n\}$ qui satisfait : $\forall\, C_1, C_2 \in \xi,\ C_1 \neq C_2,\ \exists\, n$ tq :*

$$C_1 \subset B_n \text{ et } C_2 \subset B_n^c \qquad ou \qquad C_1 \subset B_n^c \text{ et } C_2 \subset B_n.$$

On convient d'identifier deux partitions ξ et η s'il existe un ensemble mesurable $\Omega \subset [0,1]$, de mesure pleine, tel que $\xi(x) \cap \Omega = \eta(x) \cap \Omega,\ \forall x \in [0,1]$.

Les éléments d'une partition mesurable sont mesurables. Il suffit de remarquer que les ensembles B_n qui interviennent dans la définition de la partition déterminent complètement cette partition : $\xi(x) = \bigcap_{B_n \ni x} B_n \ \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c$.

La σ-algèbre des ensembles μ-mesurables est notée $\mathcal{T}$. On dira qu'une sous σ-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{T}$ est *complète* si elle contient les ensembles μ-mesurables négligeables relativement à la mesure μ. Il s'agit d'une complétion relative. Toute sous σ-algèbre $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ admet une complétion unique : c'est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et les ensembles μ-négligeables. De manière équivalente, c'est l'ensemble des parties $\tilde{A} \in \mathcal{T}$ pour lesquelles il existe un ensemble $\Omega \in \mathcal{T}$ de mesure pleine, et un ensemble $A \in \mathcal{A}$ satisfaisant : $\tilde{A} \cap \Omega = A \cap \Omega$.

On dira qu'une σ-algèbre complète $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est *séparable* si c'est la complétion d'une σ-algèbre engendrée par une famille dénombrable de parties.

Lemme 3. *Toute σ-algèbre complète $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ est séparable.*

Preuve :
L'espace $L^1([0,1], \mathcal{T}, \mu)$ est séparable. Toute partie d'un espace métrique séparable étant séparable, l'ensemble $\{\mathbf{1}_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ est séparable pour la norme L^1. Soit $\{\mathbf{1}_{A_n}\}$ une partie dénombrable dense ; montrons que les A_n engendrent $\mathcal{A}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on peut trouver une suite n_k telle que $\mathbf{1}_{A_{n_k}}$ converge presque partout vers $\mathbf{1}_A$. La différence symétrique de A et de $\overline{\lim}\ A_{n_k}$ est donc de mesure nulle ; l'ensemble A est dans la complétion de la σ-algèbre engendrée par les A_n. †

3.2 Partitions et σ-algèbres

Les algèbres de fonctions considérées dans la suite sont supposées unitaires : elles contiennent les constantes.

Correspondance [Ro52] *Il existe une bijection entre :*
– les partitions mesurables de $[0,1]$;
– les sous σ-algèbres complètes de $\mathcal{T}$;
– les sous-algèbres fermées de $L^0([0,1], \mathcal{T}, \mu)$.

Cette correspondance est définie comme suit :

A la partition ξ, on associe la complétion de la σ-algèbre $\{A \in \mathcal{T} \mid A = \cup_{x \in A} \xi(x)\}$. Cette complétion est notée $\hat{\xi}$; elle est composée des ensembles mesurables saturés par ξ.

Soit $\mathcal{A}$ une sous σ-algèbre, $\{B_n\}$ un ensemble dénombrable de parties tels que $\mathcal{A}$ soit engendré par les B_n et les ensembles négligeables. On associe à $\mathcal{A}$ la partition $\xi_{\mathcal{A}}$ dont les atomes sont donnés par $\xi_{\mathcal{A}}(x) = \bigcap_{B_n \ni x} B_n \ \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c$.

Lemme 4. *La définition de la partition $\xi_{\mathcal{A}}$ ne dépend pas du choix des B_n.*

Preuve :
Soit B_n un ensemble de parties et $< B_n >$ la σ-algèbre engendrée. On a l'égalité :

$$\bigcap_{B_n \ni x} B_n \ \bigcap_{B_n^c \ni x} B_n^c \ = \bigcap_{\substack{A \ni x \\ A \in < B_n >}} A$$

Pour voir cela, on remarque que $< B_n >_{x,y} = \{A \in < B_n > \ \mid x \in A \leftrightarrow y \in A\}$ est une σ-algèbre qui contient les ensembles B_n, si $x \in B_n \leftrightarrow y \in B_n,\ \forall n$.

Soit B_n et B'_n deux familles dénombrables dont $\mathcal{A}$ est la complétion. Pour chaque n, il existe des ensembles $A_n^1,\ A_n^2\ \in < B_n >$ tel que $A_n^1 \subset B'_n \subset A_n^2$ et $\mu(A_n^2 - A_n^1) = 0$. De la même façon, il existe des ensembles $A_n'^1,\ A_n'^2\ \in < B'_n >$ tel que $A_n'^1 \subset B_n \subset A_n'^2$ et $\mu(A_n'^2 - A_n'^1) = 0$. Les partitions associées aux B_n et aux B'_n coïncident sur $\Omega = (\cup\ A_n^2 - A_n^1)^c \cap (\cup\ A_n'^2 - A_n'^1)^c$. †

La correspondance entre partitions et σ-algèbres est maintenant une conséquence du lemme suivant :

Lemme 5. *Soit ξ une partition mesurable de $[0,1]$ et B_n les ensembles qui interviennent dans sa définition. Alors la σ-algèbre $\hat{\xi}$ est engendrée par les B_n et les ensembles négligeables.*

Preuve :
Soit $\varphi : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \{\mathbf{1}_{B_n}(x)\}$. L'image réciproque de la σ-algèbre des ensembles $\varphi_*\mu$-mesurables est contenue dans la σ-algèbre engendrée par les B_n et les ensembles négligeables. Il s'agit donc de montrer qu'elle contient la σ-algèbre $\{A \in \mathcal{T} \mid A = \cup_{x\in A}\xi(x)\}$.

Considérons un ensemble $A \in \mathcal{T}$; on a l'égalité $\varphi^{-1}\varphi(A) = \cup_{x\in A}\xi(x)$. Par conséquent, si $A = \cup_{x\in A}\xi(x)$, on obtient :

$$\varphi^{-1}\varphi(A) = A, \qquad \varphi(A) \cap \varphi(A^c) = \varnothing.$$

La preuve du second lemme montre que $\varphi(A)$ est $\varphi_*\mu$-mesurable, ce qui termine la démonstration. †

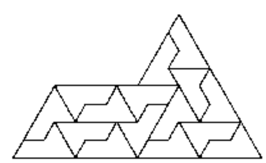
La correspondance entre sous σ-algèbres complètes de $\mathcal{T}$ et sous-algèbres fermées de L^0 dérive du premier lemme. Elle est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & L^0([0,1],\mathcal{A},\mu) \\ \{A \in \mathcal{T} \mid \mathbf{1}_A \in A^0\} & \longleftarrow & A^0 \end{array}$$

Remarques :
– En général, la σ-algèbre associée à une partition ξ n'est pas la σ-algèbre engendrée par les éléments de la partition. Par exemple, la σ-algèbre associée à la partition en points est égale à $\mathcal{T}$, tandis que la σ-algèbre engendrée par les singletons ne contient que les ensembles négligeables et leurs complémentaires.
– On peut associer à une partition ξ un facteur $\pi : [0,1] \to [0,1]/\xi$; V. A. Rokhlin démontre que tous les facteurs sont de cette forme.
– Soit T une transformation de $[0,1]$ qui préserve la mesure. La partition en orbites est mesurable si et seulement si T est intégrable du point de vue de la mesure : il existe une fonction mesurable dont les lignes de niveau coïncident avec les orbites de T. A l'opposé, si T est ergodique, toute partition mesurable qui contient la partition en orbites est grossière.

Illustrons cette correspondance sur un exemple : on cherche à construire sur $\mathbf{R}^2$ une base d'ondelettes, c'est-à-dire une base hilbertienne de L^2 satisfaisant des propriétés d'échelle. Pour cela, on se donne un pavage autosimilaire du plan.

Celui-ci est par exemple défini par la donnée d'une tuile de référence, disons un borélien d'intérieur non vide, et par une partition de cette tuile en un nombre fini de sous-ensembles qui peuvent être superposés à la tuile de référence à l'aide d'homothéties, rotations et translations.



En réitérant ce procédé, on obtient une suite de partitions emboitées, formées de tuiles dont le diamètre tend vers zéro. Considérons la famille $\mathcal{F}$ des fonctions indicatrice de toutes les tuiles obtenues par ce procédé. C'est une famille dénombrable qui sépare les points. L'algèbre engendrée par $\mathcal{F}$ est donc dense dans L^2.

Remarquons maintenant que l'algèbre engendrée par les fonctions indicatrice des éléments d'une partition coïncide avec l'espace vectoriel engendré par ces fonctions. Par conséquent, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ est dense dans L^2. Il suffit d'appliquer un procédé d'orthonormalisation pour obtenir une base hilbertienne.

3.3 Approximation et partitions

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la correspondance qui vient d'être décrite :

Théorème 2. *Soit A^0 une sous-algèbre fermée de $L^0([0,1],\mathcal{T},\mu)$, contenant les constantes. Soit $f_n \in A^0,\ n \in \mathbf{N}$ une suite de (représentants de) fonctions mesurables qui engendrent A^0. On définit une relation d'équivalence sur $[0,1]$ comme suit :*

$$x \sim y \ \leftrightarrow\ f_n(x) = f_n(y),\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Cette relation ne dépend pas de la suite f_n, à un ensemble de mesure nulle près.

Une fonction $f \in L^0$ appartient à A^0 si et seulement si il existe un ensemble Ω de mesure pleine tel que la restriction de f à Ω est constante sur les classes d'équivalence de la relation $\sim$.

En d'autres termes, la projection $\pi : X \to X/\sim$ induit un isomorphisme de $L^0(X/\sim, \pi_*\mathcal{T}, \pi_*\mu)$ sur A^0 ; on a noté : $\pi_*\mathcal{T} = \{A \subset X/\sim\ \mid \pi^{-1}A \in \mathcal{T}\}$. Il est possible de donner un énoncé similaire pour les espaces L^p. Ces espaces ne sont pas des algèbres lorsque $p \neq 0$, si bien que le parallèle avec le théorème de Stone-Weierstrass est moins frappant. Afin de faire ressortir ce parallèle lorsque $p = 0$, on introduit les définitions suivantes :

Définition 2. *Un espace probabilisé $(X, \mathcal{S}, \nu)$ est un* espace de Lebesgue *s'il est isomorphe à $([0,1],\mathcal{T},\mu)$, où μ est une mesure borélienne sur $[0,1]$ et $\mathcal{T}$ est la complétion de la σ-algèbre des boréliens relativement à la mesure μ.*

On dit qu'une sous-algèbre de $L^0(X,\mathcal{S},\nu)$ sépare les points *s'il existe une suite de (représentants de) fonctions f_n de cette sous-algèbre et un ensemble mesurable Ω de mesure pleine tel que : $\forall\ x,y \in \Omega,\ x \neq y,\ \exists\ n \in \mathbf{N},\ tq\ f_n(x) \neq f_n(y)$.*

Le résultat suivant est une reformulation du théorème 1. C'est aussi un corollaire du théorème 2.

Théorème 3. *Soit $(X,\mathcal{S},\nu)$ un espace de Lebesgue, et A^0 une sous-algèbre de l'algèbre $L^0(X,\mathcal{S},\mu)$, contenant les constantes. Alors l'algèbre A^0 sépare les points si et seulement si elle est dense dans L^0.*

4. Conclusion

La notion de partition mesurable joue un rôle important en théorie ergodique. Elle intervient dans les problèmes de désintégration de mesures et dans les calculs d'entropie. Nous espérons avoir montré que cette notion peut être présentée à un niveau élémentaire, et que son intérêt ne se restreint pas au seul domaine de la théorie ergodique.

Yves Coudène
École Normale Supérieure de Paris
Mél : `coudene@dma.ens.fr`

Références

[Co80] Cohn, Donald L. Measure theory. Birkhauser, Boston, Mass., 1980.

[Du66] Dugundji, James. Topology. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966.

[Fed69] Federer, Herbert. Geometric measure theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.

[KV95] Kovacevic, J. Vetterli, M. Wavelets and subband coding, Prentice Hall, Signal Processing Series, 1995. http ://cm.bell-labs.com/who/jelena/TwinDragon

[Ro52] Rokhlin, V. A. On the fundamental ideas of measure theory. Amer. Math. Soc. Translation 1952, (1952). no. 71, 55 pp.

[WRu73] Rudin, Walter. Functional analysis. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Dusseldorf-Johannesburg, 1973.

[DRu90] Rudolph, Daniel J. Fundamentals of measurable dynamics. Ergodic theory on Lebesgue spaces. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990.

Calcul, informatique et théorie de l'information

M.-J. Durand-Richard

Une séance du séminaire d'histoire des mathématiques de l'Institut Henri Poincaré [1]

L'existence et la production massive de ce nouvel objet scientifique et technique qu'est l'ordinateur nourrit depuis une cinquantaine d'années un bouleversement à la fois philosophique et sociologique, qui va de l'émergence de l'intelligence artificielle et des sciences cognitives à une réorganisation des échanges, tant économiques que sociaux. Les études généralistes le concernant pullulent. Apologétiques ou critiques, elles tendent à décrire le phénomène à partir de l'urgente nécessité d'assimiler ses conséquences les plus manifestes, comme s'il résultait du seul développement naturel de l'esprit humain. Une telle perspective n'offre cependant aucun outil pour penser l'oubli dans lequel est tombée, un siècle plus tôt, la « machine analytique » de Charles Babbage (1791 – 1871), dont les plans correspondent pourtant à l'architecture von Neumann d'un ordinateur d'aujourd'hui. De fait, la prépondérance acquise par l'ordinateur dans la seconde moitié du XX^e^ siècle s'enracine dans un contexte spécifique, celui de la Seconde Guerre mondiale, avec les nouvelles relations qu'elle installe entre l'université, l'industrie et l'armée aux États-Unis, et la transformation des champs disciplinaires qui en découle. La prise en compte de ce contexte permet de penser dynamiquement la façon dont l'ordinateur bouleverse jusqu'à la représentation de l'humain issue de la révolution scientifique du XVII^e^ siècle : celle d'un humain dominant la nature, où l'étude des mouvements de la matière inerte est le fait des seuls scientifiques, tandis que l'étude de la raison, du libre arbitre et de l'autonomie de l'esprit, est laissée aux seuls philosophes. Si la machine « ordinateur » dispose aujourd'hui d'une autonomie suffisante pour que certains l'affirment intelligente, le chômage exclut du corps social bon nombre de personnes dont elle fait disparaître la fonction. Cette possible substitution de la machine à l'humain signifie-t-elle que son fonctionnement échappe au déterminisme, ou que l'humain n'est lui-même qu'une machine totalement déterminée ? Est-ce vraiment en ces termes que le problème se pose ?

[1] Au cours de cette séance, Amy Dahan-Dalmédico est intervenue sur « La pensée calculante dans les années 1950 », Pierre Mounier-Kuhn sur « Les demandes de calcul et leurs différentes réponses : le cas de la France » et Jérôme Ségal sur « Mathématiques et théorie de l'information : les travaux de Shannon ».
Mes remerciements vont aux intervenants de cette séance du séminaire du 28 février 2001, pour les indications bibliographiques qu'ils m'ont fournies, ainsi qu'à Hélène Gispert, pour son travail de relecture sur ce compte-rendu.

La pensée calculante dans les années 1950

Face à ces questions, l'objectif de cette séance était donc d'analyser l'ordinateur, et les concepts qu'il recouvre, comme objets de science, en précisant leurs conditions historiques de production. Le panorama bibliographique qu'a présenté Amy Dahan-Dalmédico a focalisé l'attention sur le contexte spécifique de la Seconde Guerre mondiale et de la Guerre Froide, tandis que l'analyse de la situation de la France dans ce domaine, analysée par Pierre Mounier-Kuhn, a offert un éclairage *a contrario* sur les restructurations du champ scientifico-industriel liées au développement de l'informatique. En précisant ce que recouvre et ce qu'exclut la notion d'information, à travers les linéaments de sa conceptualisation, l'exposé de Jérôme Ségal a permis d'éclairer la part d'autonomie et la part de déterminisme de l'ordinateur, et de spécifier en quoi consistent les modélisations qu'il autorise. Au-delà de ses effets socio-économiques, la possibilité qu'offre l'ordinateur de traiter, à grande vitesse, un nombre considérable de données et de simuler les situations étudiées, confère en effet au concept de modèle une souplesse heuristique qui bouleverse jusqu'à la fonction sociale de la science.
Dans son exposé introductif, Amy Dahan-Dalmédico a dressé le panorama des différents types d'histoires de « la pensée calculante dans les années 1950 ». Celles qui se rattachent à l'histoire des idées ou à l'histoire des innovations conjuguent les références au progrès et au caractère révolutionnaire de cette avancée technologique. D'autres études, plus récentes, et aussi plus critiques, sont plus sensibles à l'inscription de ces recherches dans leur contexte et aux transformations du discours qui se constitue autour d'elles.
L'histoire des idées retient surtout le développement des mathématiques et de la logique. Tous les scientifiques qui participent à l'élaboration de l'ordinateur aux États-Unis, et plus largement de la cybernétique et de l'intelligence artificielle, héritent effectivement du foisonnement des travaux issus du mouvement de logicisation des mathématiques. Le programme formaliste de Hilbert n'a pas de secret pour un J. von Neumann (1903-57) ou un W. S. McCulloch (1898-1969). N. Wiener (1894-1964) a été l'élève de B. Russell (1872-1970) à Cambridge, W.H. Pitts (1923-69) a suivi les cours de Carnap à l'Université de Chicago en 1938. Les premiers travaux de von Neumann et d'Alan Turing (1912-54) s'inscrivent dans l'idéal de pure axiomatisation présent dans les trois questions fondamentales posées par Hilbert au Congrès de Bologne de 1928, portant sur la complétude, la consistance et la décidabilité des mathématiques [Hilbert, 1928]. Et tout Princeton a étudié l'article de Turing de 1936 sur la non-décidabilité des mathématiques (*Entscheidungsproblem*) [Turing, 1936]. Qui plus est, les thèses de l'atomisme logique, qui cherchent à isoler des faits irréductibles et logiquement indépendants permettant d'assimiler les constituants ultimes de la matière et de l'esprit, ne sont pas absentes des premières considérations d'un McCulloch imaginant le « psychon » comme entité élémentaire pour construire un calcul propositionnel des événements psychiques. Elles ont franchi l'Atlantique avec l'émigration des scientifiques juifs de l'Europe des années 1930.

Amy Dahan-Dalmédico a cependant insisté sur le fait que les travaux des mathématiciens dont les idées sont à l'origine des sciences cognitives ne sauraient être analysés comme relevant d'une histoire purement intellectuelle. Si la « machine de Turing », conçue en 1936, est une « machine de papier » digitale, si le « jeu de l'imitation » qu'il propose en 1950 vise à tester l'« intelligence » de l'ordinateur, le logicien qu'est Turing construit aussi dès 1937 à Princeton une machine à multiplier en binaire. En Grande-Bretagne, pendant toute la guerre, il travaille au sein du *Government Code and Cypher School*. Il s'occupe non seulement du décryptage des messages radio allemands, mais aussi d'un système de transmission numérique de la parole, mis en service dès 1943, qui servira aux dialogues directs entre Churchill et Roosevelt au début 1944.

L'article collectif qui constitue l'acte de naissance de la cybernétique, "Behavior, Purpose and Teleology", paraît en 1943. Cosigné par le mathématicien Wiener, l'ingénieur J. Bigelow (1913), et le physiologiste A. Rosenblueth (1900-1970), il établit des analogies fonctionnelles entre comportement machinique et comportement humain dans les phénomènes de régulation technique et biologique, en comparant l'action d'un tir de D.C.A. au geste d'un sujet humain, et en isolant la rétroaction comme facteur essentiel de l'activité volontaire non consciente. Lorsque le neuropsychiatre McCulloch et le mathématicien neurophysiologiste Pitts cosignent, toujours en 1943, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity" – article qui marque, quant à lui, la naissance du connexionnisme [McCulloch, 1943] tous deux sont instruits des travaux de biophysique mathématique menés à l'École de Chicago autour de N. Rashevsky (1899-1972). Ils y établissent l'équivalence formelle entre la logique propositionnelle et un réseau de neurones envisagés comme organes de transformation de signaux électriques. Quant à von Neumann, la comparaison qu'il établit plus tard entre le cerveau et l'ordinateur [von Neumann, 1958] est nourrie de recherches ciblées, alors qu'il est consultant de l'*Army Ordnance Department* depuis 1937, associé dès 1943 au *Manhattan Project* de Los Alamos pour fabriquer la bombe atomique, puis des bombes thermonucléaires. Le président Einsenhower le nomme membre du Comité consultatif général de la *Commission à l'énergie atomique* en 1952. On ne saurait donc négliger le fait que tous ces travaux sont issus de réseaux constitués pendant la Seconde Guerre mondiale autour de systèmes d'armes automatisés dont l'homme et la machine sont des éléments, sinon interchangeables, du moins constitutifs.
Les historiographies de l'innovation, de type socio-économique, insistent davantage sur ce qui caractérise l'ordinateur comme dispositif matériel, sur ses capacités techniques, sur les progrès technologiques qui ont accompagné sa conception, ainsi que sur son enracinement dans un monde d'ingénieurs qui n'ignorent pas les travaux des logiciens. D'autres acteurs entrent alors en scène. L'analyseur différentiel de Vanevar Bush (1890-1974), calculatrice analogique mécanique mise au point en 1929 pour la résolution des équations différentielles, y tient le premier rôle : elle est jusque dans les années 1940 la plus puissante machine permettant de faire des calculs scientifiques. Et les énormes besoins en calcul de la Seconde Guerre mondiale, tant en balistique qu'en mécanique des fluides ou thermodynamique des gaz, voient se succéder rapidement de nombreux grands calculateurs digitaux[2].Après le calculateur binaire à relais que construit Stibitz en 1937 pour les *Bell Telephone Laboratories*, ce seront : le MARK I (1937-44), calculateur électromécanique réalisé par H. H. Aiken pour IBM, l'ABC (1939-42) électronique de J. V. Atanasoff et C. Berry, qui inspire directement l'ENIAC (1943-45) de J. P. Eckert et J.W. Mauchly, construit à la *Moore School of Electrical Engineering* de l'Université de Pennsylvanie, à Philadelphie.

L'idée essentielle qui conduit à séparer la conception logique de la machine de celle de ses circuits électriques et de lui fournir un programme enregistré est formulée en 1944. Elle convertit les calculateurs en ordinateurs : à l'ENIAC (*Electronic Numerator Integrator Analyzer and Computer*) succède l'EDVAC (*Electronic Discrete Variable Computer*). Si l'histoire intellectuelle attribue celui-ci à von Neumann, les conflits ultérieurs avec les ingénieurs Eckert et Mauchly témoignent du caractère éminemment collectif de son élaboration[3]. Elle impose pour plusieurs dizaines

[2] Les calculateurs analogiques représentent des variables mathématiques par des grandeurs physiques mesurables. Des calculateurs de tir furent ainsi construits pour déterminer les trajectoires des obus : les nombres y étaient représentés par des valeurs de tension ou d'intensité d'un courant électrique dans un circuit. Au contraire, les machines digitales, en particulier binaires, effectuent des calculs discrets, à partir d'algorithmes sur des nombres.
[3] Ces conflits retarderont suffisamment les travaux pour que le premier ordinateur effectivement mis en service le soit en Angleterre. Ce sera le *Manchester Mark I.*

d'années l'architecture dite von Neumann et le fonctionnement séquentiel de ces machines, au détriment du fonctionnement en parallèle qui refera surface avec le néo-connexionnisme. Avant les techniques de miniaturisation des ordinateurs, le Whirlwind (1944-1951), construit au laboratoire de servomécanisme du Mit, avec sa possibilité d'effectuer des calculs en temps réel, aura un impact considérable sur la tentation d'identifier l'ordinateur au cerveau humain.

Il convient de souligner que toutes ces machines, même expérimentales, sont construites à des fins militaires. Leur rapide évolution suppose, outre la résolution de nombreux problèmes techniques, une mobilisation financière et intellectuelle sans précédent, en tout cas sans commune mesure avec les efforts individuels d'un Babbage un siècle plus tôt, même s'il reçut 17 000 livres de subventions de la Couronne britannique tout au long de son travail sur les machines.

Face à ces deux types d'historiographie, l'ouvrage plus récent de Paul N. Edwards, *The Closed World, Computers and the Politics of Discourse in Cold War America*, insiste, non sur les idées de progrès et de révolution techniques et intellectuels, mais sur celles de contingence historique, de déterminations plurielles et de centralisation du pouvoir ainsi rendu possible. L'expansion remarquable de ces machines correspond effectivement au développement d'une technologie cruciale pour les forces miltaires de la Seconde Guerre mondiale et de la Guerre Froide, pour laquelle l'homme, l'avion, le radar, le calculateur-prédicteur et l'artillerie sont organisés en un système unique de défense dans le cadre de la guerre anti-aérienne. Elle y apparait comme le résultat de réorganisations à plusieurs niveaux, liant des choix politiques et des valeurs socialement constituées, où la technique apparaît comme le produit d'interactions intriquées entre scientifiques, ingénieurs, militaires et politiques. Comme le souligne Amy Dahan-Dalmédico, P. Edwards montre en particulier que le choix de développer l'ordinateur digital, loin de résulter de choix intellectuels clairs et explicites marquant la voie d'un inéluctable progrès, provient bien davantage d'une bifurcation technologique induite par certains choix politiques et certaines valeurs sociales entre 1944 et 1961. Après la guerre, le champ du calcul analogique reste fortement investi, appuyé sur des groupes sociaux bien organisés autour de cette technologie – dont le laboratoire de Servomécanisme du Mit offre un exemple caractéristique. Les calculateurs analogiques restent plus économiques, moins encombrants et bien plus performants que leurs homologues électroniques digitaux. Ces derniers sont en outre beaucoup moins fiables, beaucoup moins familiers aux équipes d'ingénieurs qui les conçoivent, et d'utilisation plus problématique en raison des problèmes de conversion entre le binaire et les données. Leur universalité n'est pas immédiatement perçue comme intéressante pour les applications et ils paraissent devoir rester cantonnés au domaine de la recherche. Alors que les choix militaires sont initialement orientés, après la guerre, vers la conception d'une guerre aérienne et nucléaire offensive, le test atomique (1949) et l'explosion de la bombe à hydrogène (1953) soviétiques vont renforcer le camp favorable à une politique de confinement et à un programme centralisé de défense totale[4], baptisé Sage, contre une éventuelle attaque de l'URSS. Dans ce contexte, la peur du nucléaire va transcender les termes du débat sur les mérites techniques et stratégiques en arguments d'ordre idéologique. Tous les enjeux sont désormais examinés à travers le prisme de la lutte du capitalisme contre le communisme.

L'originalité de l'ouvrage de Paul Edwards réside précisément dans le fait d'insister sur la centralisation de pouvoir qu'induit la gestion des problèmes de sécurité

[4] C'est dans ce cadre que le Whirlwind, initialement prévu comme un simulateur de vol analogique, va devenir l'instrument de cette surveillance tous azimuts, premier ordinateur à fonctionner en temps réel.

par ordinateur[5], là où les autres types d'histoire s'attachent au contraire à souligner l'autonomie que suppose le fonctionnement systémique de cette machine. Il poursuit son propos en montrant que ce système C3I (commande, contrôle, communication et intelligence ou information) alimente aussi bien le discours cognitiviste qu'un discours métaphorique, à travers la référence au Cyborg (abréviation pour "cybernetic organism"), réduisant le fonctionnement du cerveau à celui d'un ordinateur. Là encore, la suprématie du fonctionnement digital ne s'est pas imposée d'emblée. De 1946 à 1953, la question de l'analogique ou du digital a fait l'objet de nombreuses discussions au cours des Conférences Macy[6], puisque l'étude du système nerveux pouvait aussi bien être menée en utilisant des variables continues. Là où McCulloch et Pitts envisageaient le fonctionnement du neurone comme celui d'un amplificateur à seuil, Wiener utilisait le langage des systèmes dynamiques, et la tension entre leurs points de vue ira jusqu'au conflit. Les thèses de P. Edwards apparaissent d'autant plus pertinentes que le cognitivisme, fondé sur l'idée d'un fonctionnement strictement computationnel du cerveau, se trouve contesté, depuis les années 1970, par les conceptions du néo-connexionnisme, qui réorientent le discours du côté d'une représentation plus dynamique et interactive, voire émergentiste, de la connaissance.

Les demandes de calcul et leurs différentes réponses : le cas de la France

Dans les années 1950, la situation de la France en matière d'ordinateurs est aux antipodes de celle des États-Unis. De tous les pays industrialisés, la France est le seul où la recherche publique n'a réalisé aucun ordinateur avant 1960. Parler de « retard technique » ne constitue pas pour P. Mounier-Kuhn une explication suffisante. C'est d'ailleurs une catégorisation refusée par les historiens. Les facteurs explicatifs les plus couramment évoqués en première analyse sont la capitulation et l'invasion allemande de 1940, ainsi que la priorité accordée après-guerre à la reconstruction. Qui plus est, l'informatique aura du mal à trouver sa place, par exemple dans la politique du CNRS, comme en témoignent les variations dans l'intitulé des commissions : ce n'est qu'en 1975, sous la pression du "Plan Calcul", qu'est créée une commission informatique consacrée au traitement du signal. Encore reste-t-elle dépendante des sciences de l'ingénieur. Et il est remarquable que dans les centres scientifiques qui, entre 1935 et 1955, ont entrepris de réaliser des calculateurs, les recherches n'aboutissent pas à la production d'ordinateurs : ni à l'Institut d'optique, ni à l'ONERA (Office national d'études et de recherches aéronautiques), ni au CNET (Centre national d'études des télécommunications), ni même au sein de l'Institut Blaise Pascal, pourtant créé à cet effet en 1946. Ces centres de recherches, dégagés des contraintes des sociétés commerciales, sont pourtant plus libres d'expérimenter des techniques, de promouvoir des concepts nouveaux.

Cet échec retarde d'autant la formation de spécialistes, ce qui n'est pas fait pour rapprocher la science et l'industrie. Il est souvent également rapporté à la domination des mathématiques pures en France, dans cette période d'après-guerre où s'imposent les travaux du Groupe Bourbaki, marginalisant à la fois les mathématiques appliquées et les travaux de logique. En 1950, la réforme de l'enseignement supérieur supprime

[5] Aux États-Unis cette visée d'un contrôle global du monde géré par un ordinateur se traduit concrètement par la mise au point de programmes conçus comme des systèmes clos, du programme SAGE pour les États-Unis au WMCCS (*World Wide Military Control and Command System*, 1961) censé contrôler la planète toute entière.

[6] du nom de la Fondation Josiah Macy qui a organisé dix conférences réunissant mathématiciens, cybernéticiens, ingénieurs, linguistes, anthropologues, neuroanatomistes, neurophysiologistes, psychologues et psychiatres.

le certificat de mécanique de la licence de mathématiques. Une telle restriction des domaines disciplinaires complique effectivement la coopération entre les différents secteurs d'activités qui, Outre-Atlantique, collaborent dès la construction des grands calculateurs. L'échec dans la construction de la machine universelle envisagée par Couffignal participe du même phénomène. Couffignal est sans aucun doute le cybernéticien le plus engagé dans le projet de construction d'un ordinateur en France [Ramunni, 1989]. Outre la faillite, en 1953, de Logabax, l'entreprise chargée de sa réalisation, l'échec du projet engage aussi les choix conceptuels et stratégiques de Couffignal. De retour des États-Unis, soucieux de promouvoir une « voie française », il s'engage sur une voie qui prend le contre-pied de ce qu'il a pu observer dans les laboratoires américains : il minimise le rôle de la mémoire, passant ainsi à côté de la notion de programme enregistré ; il envisage le progrès technique comme une entreprise de complexification du calcul et il privilégie à ce point la méthode déductive dans le domaine de la recherche qu'il subordonne totalement le technique au théorique, au moment où leurs échanges se révèlent particulièrement fructueux Outre-Atlantique.
Pour P. Mounier-Kuhn cependant, ces facteurs, relevant de l'histoire récente, ne sauraient seuls suffire à rendre compte de ces difficultés. Ne serait-ce que parce que la domination des mathématiques pures est moins évidente lorsqu'on remonte dans le temps. Il existe une tradition de recherches en mathématiques appliquées, issue de la Première Guerre mondiale, à laquelle des mathématiciens aussi importants que M. Fréchet (1878-1973) et E. Borel (1871-1956) ont largement participé.

Et d'autres spécificités interviennent dès qu'on envisage effectivement une histoire de plus longue durée qui dépasse celle des souvenirs propres aux acteurs concernés. P. Mounier-Kuhn analyse la situation de la France depuis l'entre-deux-guerres, l'absence de traditions de calcul, l'absence d'un apprentissage à la fois technique et social, non seulement des machines, mais de l'organisation humaine qui les entoure. Dans les années 1930, les instruments utilisés restent essentiellement les tables numériques élaborées par les centres de recherche publics, la règle à calcul et les calculettes de bureau. L'analyseur différentiel de V. Bush, copié à Manchester, Copenhague, Stockholm, Oslo, et en Allemagne, ne sera pas reproduit en France. L'industrie électrique fait peu de recherches, et a donc peu besoin de calcul. L'aéronautique souffre de problèmes d'organisation industrielle qui ne permettent pas l'émergence de bureaux d'études assez étoffés pour attaquer sérieusement, par exemple, les problèmes de vibrations et de résistance des structures. La recherche en mécanique des fluides (hydrodynamique, aérodynamique) fait seule l'objet d'un programme de recherches national : elle réalise une machine analogique entre les deux guerres. Il s'agit des cuves rhéographiques de J. Pérès (1877-1962), ou calculateurs Malavard (du nom de son élève), qui simulent la circulation d'un fluide (par exemple les tourbillons de l'air autour d'une aile d'avion) en utilisant le fait que l'écoulement du courant électrique et celui d'un fluide sont régis par la même équation différentielle, celle de Laplace. Ce laboratoire de recherche sera intégré, avec celui de L. Couffignal, à l'Institut Blaise Pascal.
Le manque d'équipement et de besoins en calcul entre les deux guerres, ainsi que l'absence d'intéractions entre sciences et techniques, sont pour P. Mounier-Kuhn les facteurs dominants. La situation de l'électrotechnique en France est spécifique : les entreprises concernées se contentent souvent d'exploiter des brevets étrangers. Les universités sont séparées des écoles d'ingénieurs et les cours d'électrotechnique peu fréquentés. Seuls deux étudiants suivent le cours sur les champs électriques de Le Corbeiller à l'École supérieure d'électricité dans les années 1930. Bien que le calcul soit la vocation première du Bureau des longitudes, celui-ci ne recevra aucun équipement nouveau entre 1900 et 1930. Et l'inventaire des machines dans les universités

avant-guerre témoigne de la même pénurie. Si les sciences de l'Univers sont assez gourmandes en calcul, les machines datent du début du XX^{e} siècle, et il faut attendre 1938 et le « plan Tardieux » pour commencer à rattraper le retard qui s'est accumulé avec l'inflation galopante des années 1920, l'indexation des crédits universitaires et la déflation des années 1934-35 sous le gouvernement Laval. Pierre Mounier-Kuhn parle d'un véritable sous-développement de la France quant à ses équipements de calcul.

Certes, il existe un effort de mobilisation scientifique non négligeable dans les années 1930. L'Institut Henri Poincaré, créé par E. Borel en 1931 avec le soutien du banquier E. de Rotschild et de la Fondation Rockfeller, participe à l'effort de mobilisation scientifique suscité par l'Armée dans ces années, passant des contrats avec la Marine et l'Armée de Terre. Le CNRS est créé en 1939. La même année, les services secrets polonais réfugiés en France apportent leurs connaissances des machines cryptogaphiques allemandes, et la société Bull[7] met au point des casseurs de codes électromécaniques. Mais avec le retard en équipements, ces nouvelles demandes en calcul, notamment dans le domaine de l'électrotechnique, des réseaux de télécommunications et du transport de l'énergie électrique, vont créer un véritable goulet d'étranglement, phénomène classique en histoire des techniques. Et la capitulation de 1940 brise net cet élan. Tous les projets sont abandonnés ou détruits. Bien des scientifiques sont tués[8] ou faits prisonniers, soit se replient vers les mathématiques pures.

Après la guerre, la France rêve de retrouver le niveau de 1939-40, mais elle conçoit son équipement dans l'urgence, et, dans un premier temps, en raison des handicaps accumulés avant la guerre, avec la conception d'un univers technique qui est celui de la Première Guerre mondiale. Là où s'expriment le plus de besoins en calcul, on fabrique d'abord des calculateurs mécaniques et, de 1945 à 1948, le CNRS commande encore mille calculateurs de bureau. Le CNRS attendra six ans pour tirer les leçons de l'échec du projet de Couffignal.

La situation change radicalement dans les années 1950, avec l'instauration des grands programmes technologiques. C'est dans le domaine du nucléaire, tant civil que militaire, que vont surgir les besoins en calcul les plus importants, notamment au CEA. L'Association française de calcul[9] voit le jour en 1958, qui deviendra l'AFCET, la Société savante des informaticiens. La construction des barrages EDF stimule les grands progrès des années 1950, avec notamment la création de l'Institut de mathématiques appliquées de Grenoble. Les changements les plus profonds interviendront dans les années 1960, où la nouvelle génération adopte des comportements nouveaux : scientifiques et ingénieurs sont désormais convaincus de l'utilité du calcul et des simulations qu'il autorise ; ils effectuent des stages dans les grands laboratoires américains, tandis que normaliens et informaticiens travaillent dans l'industrie. Trois chaires d'analyse numérique sont créées à Grenoble, Toulouse et Paris. La quête de précision issue de l'évolution technique rend manifeste les limites intrinsèques de l'analogique, dont l'augmentation des coûts concomittants à celle de la précision est exponentielle. Dans le développement des missiles par exemple, plus on gagne en précision, moins on a besoin d'explosifs, et plus on tire vite et loin. Qui plus est, comme l'écrivaient déjà von Neumann et Mauchly en 1947, la transposition du calcul digital aux tâches de gestion offre des possibilités d'amortissement tout à fait considérables. Par contre,

[7] La société Bull, fondée en 1932, produit des équipements électroniques de traitement de l'information. Elle réalise un petit ordinateur de gestion en 1959, qui est une réussite commerciale. Elle passe pourtant sous le contrôle de General Electric en 1964 après l'échec commercial du Gamma 60.

[8] Cavaillès et Lautmann sont tués par les Nazis.

[9] Elle est issue d'un groupe de calcul se réunissant à l'IHP depuis 1947 autour de E. de Lacroix, de Lavalette et de P. Belgodère.

les cuves rhéographiques, adoptées par Thomson en 1939, restent systématiquement utilisées dans la résolution des équations différentielles partielles, bouchant le marché des ordinateurs digitaux en ce domaine jusque dans les années 1960.
Les développements de l'informatique en France souffrent donc d'une inertie structurelle qui s'enracine dans la période de l'entre-deux-guerres, et qui se caractérise par l'absence de synergie entre les différents domaines qui, Outre-Atlantique, participent à son élaboration : mathématiques et techniques, science, industrie et armée.

Mathématiques et théorie de l'information : les travaux de Shannon

Au-delà de cette double analyse des conditions de production des ordinateurs dans les années 1950-60, l'intervention de Jérôme Ségal a permis de cerner les transformations conceptuelles qui accompagent cette restructuration institutionnelle des champs disicplinaires. A travers l'étude des travaux de Claude E. Shannon (1913-2001), il a retracé les différentes approches qui ont conduit à l'élaboration du concept d'information, des premières études en télécommunications à son axiomatisation. Il a insisté sur la transformation de sens qui s'est opérée dans le basculement de cette notion, du langage courant au langage scientifique.

Si la théorie de l'information fut identifiée comme telle dans les années 1940, la mathématisation de la notion d'information trouve son origine dans les années 1920, où elle intervient dans plusieurs champs de recherche. En thermodynamique, l'américain Gilbert N. Lewis (1875-1946) l'aborde intuitivement en affirmant qu'« un gain d'entropie signifie toujours une perte d'information et rien de plus », au moment même où le physicien hongrois Léo Szilard (1898-1964) en propose une formulation mathématique comme base d'une solution au paradoxe du démon de Maxwell. Le cadre de ce rapprochement entre information et entropie, ainsi qu'entre physique stochastique et théorie mathématique des probabilités, est celui des études sur l'irréversibilité du temps et le mouvement brownien. Elles seront prolongées par les travaux de Wiener et von Neumann en mécanique quantique dans la période de l'entre-deux-guerres. Elles conduiront un des théoriciens de la mécanique quantique, le physicien français Léon Brillouin (1889-1969), à proposer en 1956 une réinterprétation de la physique autour de la notion d'information.

Toujours dans les années 1920, le statisticien, eugéniste et biométricien anglais Ronald A. Fisher (1890-1962) fera lui aussi le rapprochement entre processus irréversibles et perte d'information. La formalisation de cette notion participe de sa volonté de substituer le concept de vraisemblance à celui de probabilité bayésienne, qu'induit l'évolution de ses recherches agronomiques vers une théorie mathématique de l'estimation. Fisher cherche à caractériser le meilleur choix possible des paramètres définissant une distribution statistique. Il insiste sur l'unité méthodologique qu'offre le raisonnement statistique dans la diversité des populations étudiées. Son traitement quantitatif de l'information apportée par un échantillon trouve des prolongements jusque dans les années 1940, notamment dans les travaux de mathématiciens comme l'américain J. L. Doobs et l'indien A. Bhattacharryya.

Pendant la même période, c'est la recherche d'une maximisation de la vitesse de transmission des messages dans le domaine des communications qui conduit à préciser la notion de signal, de codage et d'information. Des laboratoires industriels comme ceux de Siemens et Halske en Allemagne, ou les *Bell Laboratories* aux États-Unis – où les abonnés subventionnent une recherche qui mobilise déjà près de 1400 chercheurs et ingénieurs – , cherchent à rentabiliser les énormes financements des grands réseaux nationaux et internationaux. Disposant d'une solide formation en physique mathématique, des ingénieurs comme H. Nyquist (1889-1970) et R.V.L. Hartley (1888-1970) travaillent aux *Bell Laboratories* à maximiser la vitesse de transmission des messages,

et en donnent une expression quantitative qui prend en compte le choix des codes et la mise en forme du signal.
A partir de ces trois contextes se trouvent donc élaborées trois formulations mathématiques, qui co-existent à partir des années 1920, et où intervient une « quantité d'information », mesure de « l'intelligence » à transmettre, dont la forme logarithmique permet d'exprimer le caractère additif. Dans les trois cas, le point de vue est nouveau, spécifique et général : ce que mathématiciens et ingénieurs cherchent ainsi à symboliser, ce qui fait sens pour eux, ne concerne aucunement le contenu sémantique d'un message particulier, mais bien plutôt la mesure d'ordre qu'introduit un message spécifique dans l'ensemble des messages possibles.
La théorie mathématique de l'information va réaliser l'unification de ces trois courants. Elle prend forme dans le contexte spécifique de l'interdisciplinarité d'une recherche scientifique dont la Seconde Guerre mondiale renouvelle là aussi radicalement la structure, en accélérant le rapprochement des disciplines, tant sur le plan institutionnel que sur le plan théorique. La création de la *Moore School of Electrical Engineering* en 1923 à l'Université de Pennsylvanie à Philadelphie, comme celle du *Ballistic Research Laboratory* en 1935 favorisaient déjà la collaboration entre scientifiques, ingénieurs, industriels et militaires avant la Seconde Guerre mondiale. Cette collaboration va se trouver considérablement renforcée au sein du NDRC[10] (*National Defense Research Committee*) en 1940, devenu l'OSRD (*Office of Scientific Research and Development*) en 1941, et de la base de Los Alamos en 1942. Dès 1940, les cinq divisions du NDRC, dirigées chacune par le président d'une grande université ou d'un centre de recherche prestigieux, ont toutes des capacités d'initiative dans leur domaine propre, dans le cadre de contrats conclus entre l'armée et les différentes institutions impliquées. Aussi bien le calcul balistique des tables de tir pour la défense anti-aérienne que l'étude de la fission nucléaire instaurent de nouveaux besoins en calcul, et favorisent de nouveaux développements en statistiques, en analyse numérique, en théorie des ondes et en recherche opérationnelle.

Le travail et la carrière de Shannon s'inscrivent directement dans ce mouvement de restructuration des recherches autour de l'effort de guerre. Jeune inventeur diplômé en mathématiques et en ingénierie électrique, il entre au MIT dès 1936 comme assistant-chercheur. Il y travaille à la maintenance de l'analyseur différentiel, dont l'inventeur, V. Bush, a déjà participé à l'effort de guerre au cours de la Première Guerre mondiale et va organiser la mobilisation de la science pour la guerre en tant que président de l'OSRD à partir de 1942. Les idées du mémoire de *Master* de Shannon, « A symbolic Analysis of Relays and Switching Circuits », soutenu en 1937, sont immédiatement exploitées comme essentielles. En établissant que les circuits électriques formés de relais et de commutateurs peuvent être interprétés dans le calcul booléen, il permet de formaliser le fonctionnement de ces circuits par un calcul logique, et de les réduire à leur configuration optimale. Un champ entier de l'ingénierie électrique devient ainsi une application de la logique, ouvrant un programme de recherche qui installe au premier plan la question de la structure des circuits. Dès 1938, dans sa thèse de mathématiques, Shannon applique également l'algèbre de Boole à la génétique des populations - une génétique antérieure à l'identification de l'ADN en 1953 – tout en se démarquant d'un certain eugénisme ambiant.
Entré à l'*Institute of Advanced Studies* de Princeton en 1940, Shannon passe aux *Bell Laboratories* en 1941 pour travailler, avec H.W. Bode et R.B. Blackman, à la construction d'un appareil automatique de DCA, le M9 – opérationnel au cours de la seconde bataille d'Angleterre et du Débarquement – avant de s'orienter vers la

[10] Il est créé par Roosevelt le 27 juin 1940 pour fédérer l'ensemble des travaux menés dans des structures civiles, sauf les recherches aéronautiques, à des fins militaires.

cryptologie. Le MIT créera spécialement pour lui une chaire de théorie de l'information dans le département de génie électrique, qu'il occupera pendant plusieurs décennies. Du fait de la guerre, les besoins en cryptologie et les recherches en télécommunications se fécondent mutuellement et installent au premier plan la notion de code. La Première Guerre mondiale avait déjà conduit aux travaux du britannique W. Friedman (1891-1969), et à la mécanisation des étapes de chiffrage, dont la machine allemande Enigma (1926) constitue le fleuron. En Angleterre, Turing, installée à Bletchley Park avec la *Government Code and Cypher School* en 1939, réussira à en casser les codes. Il produit une mesure de l'information, mais ses travaux, classés « secret défense », tout comme la réalisation des machines à décrypter Colossus, ne seront accessibles qu'à partir des années 1970. Les développements issus de la mesure de l'information, notamment en analyse séquentielle et en théorie de la décision, s'appuieront plutôt sur les travaux parallèles de Shannon, qui remet un rapport aux forces armées en 1945, et publie en 1948 sa théorie mathématique de la communication, fondée sur le concept d'information. Bien que les deux hommes se soient rencontrés lors du voyage secret de Turing aux États-Unis en 1942-43, chacun ne connaissait des différents projets en cours que ce qu'il devait savoir, et ils n'ont pas échangé sur ce sujet.

C'est à partir de problèmes techniques de communication, liés à la transmission analogique (Vocoder) et numérique (MIC ou modulation par impulsions codées) de la parole, que Shannon s'intéresse à la notion de bruit. Il le considère comme une variable aléatoire et l'associe à la clé d'un code en cryptologie. Dès 1945, il remet aux Forces Armées un manuscrit, rendu public en 1957, dans lequel il précise les notions de redondance, d'équivocation, de capacité d'une voie de transmission. Il définit la quantité d'information par la fameuse formule

$$H = -\sum_{i=0} m\, p_i \log_2 p_i,$$

(où les p_i sont les probabilités de sélection), qu'il justifie par l'énoncé de ses propriétés, dont l'analogie avec la formule de Boltzmann, qui lui assurera un grand succès. La base 2 choisie pour le logarithme lui permet d'établir une correspondance quasi naturelle entre le nombre de bits du message (le « bit », abréviation pour "binary digit" , devient l'unité de mesure de la quantité d'information) et le nombre de questions à réponse oui-non pour déterminer un choix. Avec ses 23 théorèmes, sa *Théorie mathématique de la communication*, parue en 1948, reprend l'essentiel de ce rapport et constitue la première théorie à la fois probabiliste et algébrique de l'information, traitant du cas discret comme du cas continu. Alors que Shannon insiste sur le caractère non pertinent de la dimension sémantique du message pour sa théorie, W. Weaver, responsable d'une des divisions du NDRC, y voit au contraire, dans sa posface, un aspect fondamental de son développement à venir.

La même année parait, en France et aux États-Unis, l'ouvrage *Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine*, de Wiener, qui propulse sur le devant de la scène un sujet d'étude à l'œuvre depuis l'article fondateur qu'il a cosigné avec Bigelow et Rosenblueth sur le même sujet en 1943. Les servomécanismes et le concept de rétroaction y offrent une représentation des phénomènes biologiques de régulation. Rappelons que parallèlement, Pitts et McCulloch élaborent un modèle connexionniste de représentation logique du cerveau, tandis qu'ingénieurs et logiciens se mobilisent autour de von Neumann pour la construction de l'EDVAC. Enfin, les conférences Macy vont réunir ces scientifiques d'horizons si différents, à la recherche d'une unification de leurs recherches et d'un discours commun. C'est dans ce cadre que la théorie de la communication va devenir théorie de l'information, dont la terminologie s'installe dès 1946 et irradie, dès 1948, aussi bien en biologie moléculaire qu'en génétique et en linguistique, renouvelant en profondeur les disciplines où il est introduit. Le concept d'information se substitue à celui d'énergie et de matière comme concept fondamental, porteur d'une valeur heuristique d'autant plus forte qu'il n'est pas immédiatement détaché des ambiguîtés attachées au transfert de sens que suppose le passage du vocabulaire courant au vocabulaire scientifique.

Dès les années 1950, les travaux américains et soviétiques vont débattre du caractère probabiliste ou statistique des différentes définitions de l'information, avant de la resituer dans un cadre plus large, débouchant sur son axiomatisation et sur la théorie algorithmique de l'information. Aux Etats-Unis, les travaux de S. Kullback et R.A. Leibler proposent une réinterprétation des statistiques à partir de la notion d'information, tandis que ceux de E. T. Jaynes offrent une interprétation de la mécanique statistique comme application du principe d'entropie maximale. La théorie de l'information renforce ainsi le courant reposant sur l'interprétation subjectiviste des probabilités. En URSS, la démarche d'un A.I. Khinchin (1894-1956), dont les *Fondements mathématiques de la théorie de l'information* paraissent aux États-Unis en 1957, ou celle de A.N. Kolmogorov (1903-87), membre lui aussi de l'École mathématique fondée à Moscou dans les années 1920, est tout autre. Rejetant cette « pseudo-science bourgeoise » qu'est la cybernétique à leurs yeux, ils sont parmi les principaux mathématiciens à travailler la notion d'information dans les années 1950, qu'ils abordent au confluent de leurs recherches sur l'entropie des systèmes dynamiques et sur les algorithmes. Avec le développement des ordinateurs, ce qui, dans l'article de 1936 où Turing définit la calculabilité, était une expérience de pensée, devient l'objet de simulations véritables : la programmation constitue une véritable discipline. Dans son axiomatisation du calcul des probabilités (1933), Kolmogorov avait formalisé la manière dont on peut utiliser les probabilités des événements élémentaires sans en justifier l'existence. Il traduit la *Théorie mathématique de la communication* en russe dès 1953 et développe une véritable école soviétique de la théorie de l'information qu'il considère, bien plus qu'une technique, comme un moyen de décrire un objet mathématique de manière universelle. A la recherche d'une définition algorithmique du hasard, Kolmogorov fonde la théorie de la complexité algorithmique, qu'il définit comme la quantité d'information nécessaire pour obtenir le résultat d'un calcul selon un algorithme minimal. Une suite aléatoire peut alors être considérée comme une suite dont on ne peut obtenir les termes par aucun algorithme plus simple que celui qui consiste à en donner successivement les valeurs. Au Congrès International de Mathématiques de Nice en 1970, Kolmogorov pourra affirmer que l'approche algorithmique permet non seulement de définir l'information indépendamment des probabilités, mais aussi de fournir une nouvelle base au calcul des probabilités. Parallèlement à ces travaux de Kolmogorov, R.J. Solomonoff (1926) – qui a suivi les cours de Carnap, Fermi et Rashevsky à l'Université de Chicago en 1946 et participe à la naissance de l'Intelligence Artificielle à Darmouth en 1956 –, G. J. Chaitin (1947), ingénieur chez IBM, et P. Martin-Löf, mathématicien suédois, parviennent, indépendamment les uns des autres, à des conceptions semblables, qui débouchent sur la théorie algorithmique de l'information ou théorie des probabilités algorithmiques. La théorie de la taille des programmes est ainsi formellement identique à la théorie de l'information, dont elle conduit l'axiomatisation.

Ainsi, ces trois interventions font-elles apparaître l'importance des interfaces entre différentes structures sociales (sciences, industrie, armée) et différents registres intellectuels (mathématiques et techniques) dans la naissance de l'ordinateur, ruinant l'idée d'une science pure qui ne se développerait qu'à partir d'interrogations de nature strictement conceptuelle. La définition même de la notion d'information, mesure d'ordre dans un ensemble de messages possibles, associe clairement l'activité de cette machine à états qu'est l'ordinateur à la possibilité d'un contrôle social également porteur d'autonomie et d'enfermement ; d'autonomie, dans la mesure où les possibilités de traitement de l'information se trouvent considérablement accrues, et d'enfermement, dans la mesure où elles autorisent une concentration de pouvoir souvent masquée derrière les prouesses de la machine. Pour reprendre les interrogations soulevées en introduction, la possible interchangeabilité de l'humain et de la machine s'appuie sur la notion d'information, l'un et l'autre étant alors conçus comme des systèmes à états : une conception réductrice à plus d'un titre, aujourd'hui heureusement contestée de l'intérieur même du domaine des sciences cognitives, où le débat fait rage entre computationnisme et connexionnisme.

Marie-José Durand-Richard
Université Paris VIII et REHSEIS

INFORMATIONS

Section 01 du Comité National Compte rendu de la session d'octobre 2001

La section "Mathématiques et Outils de modélisation" du Comité National a tenu sa session d'automne du 16 au 19 octobre 2001. La direction scientifique du CNRS était représentée par Christian Peskine, directeur scientifique adjoint pour les Mathématiques et Michel Enock Levi, chargé de mission. Lors de la session, sont également intervenus Elisabeth Giacobino, directrice du département SPM, Francis Jutand, directeur du département STIC, Jacques Dupont-Roc, directeur scientifique adjoint pour la physique théorique (lois physiques fondamentales), ainsi que Jean-Marc Deshouillers représentant la mission scientifique universitaire. Outre l'évaluation des laboratoires en renouvellement ou à mi-parcours, des groupements de recherche et des chercheurs, de nombreux points d'actualité ont été discutés avec les tutelles.

Intervention de Christian Peskine

Christian Peskine a présenté plusieurs projets concernant l'informatisation et la communication des laboratoires. Tout d'abord, la cellule Mathrice (Réseau interne de communications et d'échanges) a été mise en place en mars 2000 et est animée par deux ingénieurs informaticiens (J. Marchand à Paris et B. Perrot à Rennes). Son objectif est de favoriser l'échange d'information entre les laboratoires, de veiller à la sécurité informatique, et en général d'assurer la mutualisation des expériences et des compétences. Le département compte aussi l'unité mixte de service Medicis, implantée à Polytechnique et dirigée par M. Giusti, axée sur le développement du calcul formel.

Enfin, le Cnrs gère maintenant un site spécifique aux mathématiques (`http://www.math.cnrs.fr/`) utile en premier lieu aux directeurs des laboratoires et aux personnes présentant des projets.

Intervention de Elisabeth Giacobino, directrice du département SPM

E. Giacobino a fait une intervention de politique générale. Elle a rappelé que le CNRS compte 41 unités mixtes de recherches de mathématiques, 1 unité propre de recherche (l'IML à Marseille), une unité propre de service (la cellule Mathdoc), 4 unités mixtes de service, et 13 divers. Ces laboratoires regroupent 351 chercheurs Cnrs et 2030 enseignants–chercheurs. De plus, 16 groupements de recherche (GDR) structurent l'activité scientifique de ces laboratoires.

Le budget pour 2001 est supérieur de 7,9 pour cent à celui de 2000 ; il représente en moyenne 11,9 KF par membre permanent des laboratoires.

Concernant le fonctionnement des laboratoires, un point important est la suppression des AFIP, c'est-à-dire de la procédure rapide d'affichage de postes d'ITA. La seule possibilité de recrutement sera donc le concours, qui est une procédure beaucoup plus longue, 18 mois au lieu de 6 entre l'acceptation du profil du poste par la direction scientifique et la prise de fonctions de la personne recrutée. Selon la directrice scientifique, ce changement devrait permettre un meilleur déploiement des personnels ITA au niveau des laboratoires et une adéquation du profil.

Points principaux de l'ordre du jour

La moitié des laboratoires (et des groupements de recherche) ont été évalués lors de cette session selon les sept critères fixés l'année dernière : production scientifique, recrutements, ouverture, innovation, formation doctorale, devenir des chercheurs formés par le laboratoire, vie de laboratoire. La section a constaté et apprécié le grand nombre de laboratoires ayant une bonne politique scientifique et regretté quelques comportements locaux partisans qui sont dommageables à l'ensemble de la communauté.

Un autre point important a été le vote sur les affectations vers les laboratoires des chercheurs recrutés (17) proposées par la direction scientifique. Ils ont tous été affectés dans un laboratoire distinct de leur laboratoire d'origine, et 8 d'entre eux travaillent en Ile de France.

Enfin, les nombreuses demandes de subventions de colloques (26) et d'écoles d'été ont été examinées et classées en quatre groupes de priorité. Les critères sont proches des critères d'évaluation des laboratoires : excellence scientifique, mise au point du dossier, place faite aux jeunes conférenciers.

Conseil scientifique de département

Le conseil scientifique de département SPM doit être mis en place fin 2001. Il compte 12 membres élus (5A+4B+3C) et 12 membres nommés. Il sera proposé qu'un représentant de chaque section y soit invité, ainsi que la direction scientifique. Il aura un rôle de prospective scientifique, mais tiendra lieu également d'instance d'arbitrage entre les cinq sections du département, notamment pour les créations ou fermetures d'unités, les promotions des chercheurs, les délégations des enseignants-chercheurs.

Hommage à J.-L. Lions

La section 01 du Comité National du CNRS tient à rendre hommage à la mémoire de Jacques Louis Lions décédé le 17 mai 2001. Mathématicien hors pair et d'une grande curiosité scientifique, Jacques Louis Lions fut le père fondateur d'une école de mathématiques appliquées d'un exceptionnel rayonnement international. Scientifique visionnaire, Jacques Louis Lions a su découvrir dans les problèmes issus de l'industrie ou des sciences environnementales de nouvelles thématiques dans lesquelles les mathématiciens devaient s'impliquer, depuis la formalisation des modèles, puis leur analyse théorique, jusqu'à leur simulation informatique. Organisateur charismatique, il a apporté une contribution originale et durable aux mathématiques en général, et à leur impact sur la société en particulier.

Crafoord Ceremony

Michael Atiyah

Le prix Crafoord 2001, décerné par l'Académie Royale de Suède, a été attribué à Alain CONNES professeur au Collège de France. A. CONNES est récompensé « pour ses travaux importants dans le domaine de la théorie des algèbres d'opérateurs et pour avoir été l'un des fondateurs de la géométrie non-commutative[1]. » Le prix a été remis le 26 septembre 2001 par sa Majesté le Roi de Suède. À cette occasion un discours de présentation a été prononcé par Sir M.F. Atiyah.
Nous reproduisons ci-dessous ce discours avec l'aimable autorisation de M. Atiyah et de l'Académie Royale de Suède.

Stockolm–September 2001

Your Majesties, President, Ladies and Gentlemen, it is a great honour and pleasure for me to introduce to you Professor Alain Connes, the winner of this year's Crafoord Prize for Mathematics.

Perhaps I could begin with a few words about my personal association with Alain Connes. He and I came from different mathematical traditions : I was trained as a classical algebraic geometer, he as a functional analyst, two apparently very different fields. But, over the years, we moved towards each other and our interests merged. Many years ago, I remember one of my friends who was himself a functional analyst, telling me about this up and coming young man and saying " you should meet him, I am sure you will find him interesting". He was right. I did meet Alain Connes and I have been extremely interested in him and his ideas every since!

As we all know, Mathematics is one of the great intellectual achievements of mankind, alongside Art, Literature and Science. It is, itself, part art and part science, partly a free creation of the human mind and partly an analysis of the natural world.

Many branches of Science, are, if one discounts their primitive roots, of comparatively recent origin. Some, we might say, are still adolescent, but mathematics has a much firmer and longer past, so that now it is an imposing architectural edifice. So much so, that every generation wonders how their successors — the graduate students of today — will ever be able to mount to the top and add their own contribution.

Some mathematicians have abandoned hope of maintaining the overall unity of their subject and have resigned themselves to its fragmentation into separate specialisations. But, time and again in our history, major figures appear whose vision transcends such narrow constraints, whose work helps to forge new bonds between the diverging branches, and whose legacy is a rejuvenated discipline, welcoming the next generation. Alain Connes is such a figure, continuing the great tradition of Riemann, Hilbert, Poincaré and Hermann Weyl.

The two great pillars of mathematics are Geometry, the creation of Greek civilisation, and Algebra, of Indo-Arab origin. These were supplemented and enhanced by the analysis (or calculus) of Newton and Leibniz. Since then, these great branches have diversified and interacted in a whole variety of ways, and Connes' creation of Non-commutative Geometry is the latest chapter in this saga. I will leave it to Professor Connes to elaborate on his ideas, but let me just say that his theory is both novel and traditional. It takes the best from the past, from a whole range of disciplines,

[1] Pour plus d'information, on pourra consulter : `http://www.kva.se/eng/pg/prizes/crafoord/pressc01.html`

and blends them together in a new and productive manner. It ranges over many parts of Geometry (Algebraic, Differential and Topological). It incorporates much algebra (groups, matrices, homology, K-theory). Analysis plays a central role and finally there are deep connections with theoretical physics. At the two Crafoord Days, just held this week in Lund and Stockholm, we heard a cross-section of separate speakers telling us about the recent advances in this exciting field.

Prediction is a dangerous enterprise, but I am fairly confident that the 21$^{\text{st}}$ Century will see great things emerge from the application of Connes' new theory. It is wholly fitting that this work should be recognised today.

Perhaps I can conclude with a few brief remarks about the relation of Mathematics to Physics, a subject that has fascinated philosophers and scientists for centuries and to which Alain Connes has frequently contributed. Let me give you my own view, which I think is particularly appropriate, here in the Royal Swedish Academy, the home of Carl Linnaeus the most famous of all botanists. I think of mathematicians as gardeners who grow and breed beautiful flowers to display in their gardens. Physicists are like the 19$^{\text{th}}$ Century plant collectors who explored the world and brought back exotic specimens to reinvigorate our gardens. I am a gardener and I am grateful to the plant collectors.

Objectif Science

Anne Quéguiner-Mathieu

Le concours Objectif Science est ouvert aux jeunes Français de 15 à 20 ans, lycéens ou en 1ère année d'enseignement supérieur, qui ont réalisé une recherche scientifique originale, théorique ou appliquée. Il est organisé, sous le haut patronage du Ministre de la Recherche, par l'Association Objectif Science, qui réunit de nombreux partenaires, dont la SMF.

Pour son édition 2001, le concours a distingué trois recherches originales réalisées par sept jeunes Français âgés de 17 à 19 ans. Le premier prix a été décerné à *Bruno Bugada*, 18 ans, de Pontarlier, qui a mis au point un système de mesure de la constante de gravitation universelle. Son remarquable instrument, réalisé en bois et en plomb, mesure cette force en moins d'une minute alors que les instruments habituels exigent au moins une heure de travail. Il devrait rendre de grands services aux enseignants de physique qui disposeront désormais d'un outil maniable en classe. Deuxième prix : *Gilles Guillou*, 17 ans, *Adrien Morel*, 19 ans, *et Kévin Pouessel*, 19 ans, de Vitré, pour leur « Jardin de l'espace ». Ils ont travaillé trois ans durant à la réalisation d'une mini-serre expérimentale permettant la germination de graines en apesanteur et l'ont confiée au spationaute français Jean-Pierre Haigneré qui l'a testée avec succès lors de sa dernière mission sur la station MIR. Troisième prix : *Guillaume Bonnery*, *Cyril Camier*, et *Benoît Saleur*, 19 ans de Narbonne tous les trois, qui ont appliqué à l'astronomie une technique de l'imagerie scientifique, la photométrie CCD.

Bruno Bugada, Gilles Guillou, Adrien Morel et Kévin Pouessel ont représenté la France au Concours Européen pour les Jeunes Scientifiques de l'Union Européenne du 15 au 22 septembre 2001 à Bergen, en Norvège. Il a rassemblé les 95 lauréats des concours nationaux de trente-cinq pays. Bruno Bugada a obtenu un prix spécial "host country prize, space camp Andoya".

Pour tout renseignement sur le concours, vous pouvez contacter l'association à l'adresse e-mail : `objectif.science@in2p3.fr`

Les Olympiades de Mathématiques 2001

Jean-Christophe Novelli

Cette année, les Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO) se sont déroulées à Washington dans un grand campus universitaire. Rappelons que cette compétition s'adresse à des élèves de niveau bac (au maximum) et rassemble environ 450 candidats venus du monde entier (plus de 80 pays étaient représentés à Washington). Cette année, la France, dont le chef de délégation était Claude Deschamps, a emmené : Pierre-Henri Brouard, Valentin Feray, Daniel Kitachevsky, Emmanuel Lepage et Jean Lorenzi élèves en Terminale et Pierre Dehornoy, élève en Première.

Durant les deux jours de compétition, les élèves ont disposé à chaque fois de quatre heures et demi pour traiter trois problèmes (les trois premiers le premier jour et les trois autres le second), chaque problème étant noté sur 7 points. Cette année, les problèmes étaient tous atypiques (si l'on peut dire !), chaque exercice demandant une méthode de résolution particulière et peu classique. Par exemple, l'exercice 1, un exercice qui semblait être un classique de géométrie se traite en réalité en quelques lignes par la trigonométrie et nous n'en connaissons aucune démonstration purement géométrique. L'exercice 2 était très long et particulièrement calculatoire. Les autres exercices étaient plus classiques, notamment les numéros 3 et 6, le 4 étant finalement le plus simple de la compétition (et le moins bien réussi de la France) et le 5 étant un exercice de géométrie peu passionnant.

Problème	1	2	3	4	5	6	**Total**
Pierre-Henri Brouard	3	0	7	4	3	4	21
Pierre Dehornoy	3	0	0	1	3	0	7
Valentin Feray	7	0	1	4	2	2	16
Daniel Kitachevsky	5	0	0	1	5	0	11
Emmanuel Lepage	7	7	1	4	2	1	22
Jean Lorenzi	7	0	1	1	2	0	11

Scores des différents candidats

La médaille d'or était à 30 points, la médaille d'argent à 21 points et la médaille de bronze à 11 points, ce qui fait que la France a ramené deux médailles d'argent et trois médailles de bronze (voir table des scores). Sur l'ensemble des pays, la France termine 28^e, première fois depuis 5 ans où elle se retrouve avant la trentième place !

Les problèmes

Problème 1.

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et dont O est le centre du cercle circonscrit. Soit P le pied de la hauteur abaissée de A sur BC.

On suppose que $\widehat{BCA} \geqslant \widehat{ABC} + 30°$.

Montrer que $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < 90°$.

Problème 2.

Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b et c, on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

Problème 3.

Vingt et une filles et vingt et un garçons ont participé à une compétition mathématique

– chaque participant a résolu au plus six problèmes ;
– pour chaque fille et chaque garçon, un même problème, au moins, a été résolu par chacun d'eux.

Montrer qu'il y a un même problème, au moins, qui a été résolu par au moins trois filles et trois garçons.

Problème 4.

Soit n un entier impair strictement supérieur à 1 et $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des entiers donnés.

Pour chacune des $n!$ permutations $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Montrer qu'il existe deux permutations b et c distinctes, telles que $n!$ divise $S(b)-S(c)$.

Problème 5.

Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ rencontre BC en P et la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ rencontre CA en Q.

On sait que l'angle $\widehat{BAC}$ a pour valeur 60° et que $AB+BP=AQ+QB$.

Quelles sont les valeurs possibles des angles du triangle ABC ?

Problème 6.

Soit a, b, c, d des entiers tels que $a>b>c>d>0$. On suppose que

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

Montrer que $ab+cd$ n'est pas un nombre premier.

Une saine lecture pour mathématiciens : la revue Pénombre

Jean-Michel Kantor

> « Ayez les chiffres en tête [...] Cela signifie que nous devons prêter attention à l'aspect quantitatif d'une situation ou d'un problème et faire une analyse quantitative fondamentale. Toute qualité se manifeste par une quantité déterminée, et sans quantité, il ne peut pas y avoir de qualité. Aujourd'hui encore, beaucoup de nos camarades ne savent pas qu'ils doivent prêter attention à l'aspect quantitatif des choses, aux statistiques fondamentales, aux principaux pourcentages, et aux limites quantitatives qui déterminent les qualités des choses ; ils n'ont de "chiffres" en tête pour rien ; il en résulte qu'ils ne peuvent éviter de faire des erreurs. »

Mao Tsé-Toung
« Méthodes de travail des comités du Parti »
Œuvres choisies, discours du 13 mars 1949.

A l'heure où tout est nombre, dans notre civilisation du numérique où pleuvent les statistiques et où les sondages remplacent les élections, l'Association Pénombre propose un espace public de réflexion et d'échange sur l'usage du nombre et des nombres.

La lettre de Pénombre est un plaisir de lecture et d'humour. Nos amis ont publié de nombreux articles, des dossiers sur la démographie les élections, les questions sociales vues sous leurs aspects numériques et statistiques. Bien sûr, tant qu'il y a une théorie des nombres (Vive Fermat !), il y a une science des statistiques, mais il faut distinguer — autant que faire se peut — la science et ses implications sociales. C'est seulement ainsi que la formation mathématique par exemple sera adaptée au 21e siècle. Citons parmi les dossiers récemment publiés par Pénombre :

– Si l'immigration nous était comptée
– Les lycées sous le feu de l'évaluation

Renseignements : `http://www.unil.ch/penombre/`

Attribution du Prix Fermat

Le jury du Prix Fermat de Recherche en Mathématiques (édition 2001), organisé par l'Université Paul Sabatier (Toulouse III), et parrainé par Astrium SAS, réuni à Toulouse le 26 octobre 2001, a décidé :
Prix 2001 attribué conjointement et partagé à égalité par Richard L. Taylor Professeur à l'université de Harvard et Wendelin Werner Professeur à l'université de Paris–Sud ;

– à Richard L. Taylor, pour ses contributions multiples à l'étude des liens entre représentations galoisiennes et formes automorphes ;

– à Wendelin Werner, pour ses travaux sur les exposants d'intersection du mouvement brownien et leur impact en physique théorique.

CARNET

Jacques-Louis Lions (1928 - 2001)

G. Tronel

Jacques-Louis Lions s'est éteint le 17 mai 2001, à l'âge de 73 ans. La plupart des mathématiciens des générations de la fin du XX^{e} siècle connaissait son nom : son œuvre mathématique est considérable, mais il est aussi connu pour les hautes fonctions qu'il a exercées : présidence de l'Union mathématique internationale, présidence de l'Académie des sciences, présidence du Centre national des études spatiales, pour n'en citer que quelques unes. Depuis sa disparition des articles ont été publiés sur sa vie et son œuvre. Je souhaiterais ici faire part de souvenirs partagés par ses fidèles, ses élèves, ceux qui suivaient régulièrement ses cours au Collège de France et les séminaires dont il assurait la direction. Ceci permettra sans doute de donner une idée de son influence et de son rayonnement sur ceux qui avaient la chance de le côtoyer.

Homme affable, il respectait toujours ses interlocuteurs ; il savait écouter. Il conseillait et encourageait souvent, il jugeait quelquefois, il condamnait très rarement ou quand ceci pouvait lui arriver, il tempérait son appréciation en essayant de dégager des aspects positifs. Il possédait un don exceptionnel qui lui permettait de discerner les qualités et les défauts de ses collaborateurs et ce qu'il pouvait en attendre. Les qualités de celui qui restait le « Maître » pour ses élèves ne se limitaient pas à ces quelques remarques. Par discrétion, par modestie, il n'aurait peut-être pas aimé que l'on parle trop de sa personne.

La première fois que j'ai rencontré Jacques-Louis Lions remonte à 1969 ; il était venu à l'Institut Henri Poincaré pour y recevoir le prix Maurice Audin. J'avais été impressionné par ce jeune grand mathématicien que je connaissais pour avoir lu « localement » le livre tiré de sa thèse : « Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites ». Quelques mois plus tard je lui écrivais pour lui demander de travailler avec lui. Il accepta immédiatement et me proposa un poste de maître-assistant à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. À l'époque, Jacques-Louis Lions, titulaire d'une chaire de mathématiques y enseignait un cours construit autour de l'analyse fonctionnelle, des espaces de Sobolev, de problèmes aux limites modèles. J'assurais les travaux dirigés sur ce cours. Pour la première fois dans ma carrière universitaire je rencontrais un « patron » accordant une grande confiance à ses collaborateurs dont le travail répondait à ses attentes, à ses exigences et à ses recommandations. Après sa nomination à la chaire « d'Analyse des systèmes et de leur contrôle » au Collège de France, je suis resté à l'Université de Paris VI, mais j'ai suivi la plupart de ses cours du Collège de France et des séminaires qu'il dirigeait. C'est en 1994 que Jacques-Louis Lions, alors qu'il achevait son mandat de Président de l'Union mathématique internationale, m'a associé, en collaboration avec Mireille Chaleyat-Maurel, à une initiative qu'il avait lancée en 1992 : faire de l'année 2000 l'Année Mondiale des Mathématiques. Conscient qu'il s'agit là d'une petite partie de l'activité débordante de Jacques-Louis Lions je vais tenter d'éclairer quelques aspects de son influence sur ceux qui assistaient à ses cours et ses séminaires du Collège de France et sur ceux qui ont été associés à la mise en place d'actions pour les mathématiques, dans le cadre de l'Année 2000, Année Mondiale des Mathématiques.

Il reste des traces écrites des cours et des séminaires du Collège de France, mais j'aimerais donner ici une idée de ce que pouvait représenter pour ses élèves l'enseignement de Jacques-Louis Lions. Traditionnellement les cours et les séminaires étaient progammés le vendredi : les cours le matin de neuf heures à onze heures, les séminaires à partir de quatorze heures. La durée des séminaires dépendait du nombre d'exposés, un en général, mais quelquefois trois. Pour ses élèves, le vendredi était la « journée Lions ». Le noyau dur de l'auditoire était constitué de parisiens, de provinciaux qui se déplaçaient en fonction des thèmes du cours et des exposés du séminaire. Le vendredi matin, à partir de huit heures, arrivaient dans la salle six de la rue Berthelot, d'abord les provinciaux, puis les banlieusards, les parisiens étaient en général les derniers ; certains étaient systématiquement en retard. En attendant Lions, les premiers arrivants qui avaient assité aux cours informaient les auditeurs occasionnels des leçons précédentes, échangeaient des documents manuscrits reproduits au carbone ; dans les années soixante-dix la photocopie n'était pas une pratique courante. A neuf heures Lions arrivait ; il était presque toujours souriant, mais lorsqu'il paraissait fatigué, ce qui était rare, son visage était grave. Tout en tirant de sa grosse serviette noire des dossiers d'une épaisseur impressionnante, il saluait l'auditoire puis il commençait immédiatement le cours. Il écrivait au tableau noir ; je n'ai pas le souvenir de l'avoir vu utiliser des transparents pendant ses cours. De son écriture caractéristique il commençait bien souvent par donner le « plan des réjouissances », ou bien il revenait sur les leçons précédentes apportant ici ou là des compléments, des commentaires, de nouveaux problèmes ouverts. Pendant deux heures, avec parfois une courte pause pendant laquelle il effaçait les tableaux tout en continuant à réfléchir, il déroulait théorèmes, corollaires, calculs, en général sans regarder ses notes. Lorsque qu'il consultait ses notes c'est qu'il avait « un léger doute » sur ce qu'il avait écrit, soit sur le tableau, soit sur ses papiers. Il corrigeait alors une hypothèse, rectifiait un calcul, ajoutait un lemme plus simple à démontrer. Il faisait partager ses certitudes et ses doutes à son auditoire. Les doutes se traduisait dans une phrase qui était devenue classique. « Si cette conjecture est vraie, le résultat serait étonnant, mais si elle est fausse ce serait encore plus intéressant car elle donnerait naissance à une multitude de problèmes nouveaux complètement ouverts. » À l'énoncé de ce commentaire nous savions qu'il avait déjà une idée assez précise du résultat, mais qu'il voulait encore réfléchir à la question pour pouvoir en parler plus tard.

Pendant son cours, il se concentrait sur les mathématiques, il arrivait rarement qu'il fasse des remarques sur des sujets hors mathématiques. Toutefois pour ce qui concerne sa position sur les querelles qui agitaient la communauté mathématique sur une division artificielle entre mathématiques appliquées ou mathématiques pures, il me semble que, personnellement, Lions considérait qu'il était un mathématicien intéressé par les applications. A partir du moment où il disposait de modèles et d'équations, il n'était plus question de bricolage ; il énonçait et démontrait ses théorèmes avec une grande rigueur, très souvent les idées à la base des problèmes qu'il abordait et les méthodes qu'il utilisait ou qu'il inventait lui paraissaient plus importantes que les résultats obtenus. Il considérait aussi que la résolution d'un problème allait jusqu'au calcul numérique complété aujourd'hui par le calcul scientifique. Il avait le souci de s'informer sur les essais numériques ; toutefois je ne l'ai jamais vu pianoter sur un ordinateur ! Pour tenter d'illustrer la position de Lions sur les mathématiques il me revient en mémoire une anecdote. Lors d'une conférence au séminaire Bourbaki sur les problèmes unilatéraux, il introduisit son exposé par la phrase : « Curieusement, la plupart des résultats établis pour les problèmes variationnels conduisant à des équations aux dérivées partielles restent vrais pour des inéquations aux dérivées partielles ». De l'auditoire vint ce commentaire : « J'ai toujours pensé que les équations aux dérivées partielles ne servaient à rien ». Lions se retourna, repéra l'intervenant et continua son exposé en négligeant de répondre. Il me semble que cette anecdote souligne aussi une des facettes de la personnalité de Lions : il n'aimait pas les polémiques et les jugements qui pouvaient blesser ou amener ses interlocuteurs à réagir violemment ou de manière irréfléchie. Il avait ses propres convictions, il souhaitait les faire partager et convaincre, mais il ne cherchait pas à les imposer à tout prix. Par exemple, il avait un point de vue sur l'enseignement des mathématiques, mais il s'est toujours tenu à l'écart des querelles sur les programmes scolaires. De même il n'aimait pas beaucoup les interviews avec les journalistes qui, ne comprenant pas grand chose aux mathématiques, écrivaient « un peu n'importe quoi ! »

A la fin de son cours, Lions posait des questions, répondait aux interrogations des auditeurs, annonçait le programme du séminaire de l'après-midi et des prochaines leçons, mais les interventions étaient assez brèves car la plupart des auditeurs allaient assiter au séminaire du laboratoire d'analyse numérique de l'Université Paris VI ; les questions en suspend pouvaient être relancées au séminaire du vendredi après-midi au Collège de France. Ce séminaire du vendredi après-midi était très apprécié, aussi bien par les conférenciers que par les auditeurs. Des mathématiciens prestigieux y ont fait des exposés. Pour ne citer que quelques noms, la liste se limitera à quelques mathématiciens étrangers : Magénès, Lax, Nirenberg, Hörmander, Ladyzhenskaia, Oleinik, Vishik, Fujita, Mizohata, Yamaguti. L'atmosphère du séminaire était amicale ; certains mathématiciens que Lions connaissait bien pouvaient se voir présenter de manière inattendue. L'un des conférenciers, spécialiste des problèmes de régularité dans des domaines non réguliers avec coins, fut présenté comme le « Roi des Coins ! » Lions intervenait très peu pendant les exposés qualifiés par les collègues étrangers d'exposés « à la française », mais, à la fin, il posait et suscitait des questions. Lorsque le conférencier ne donnait pas dans les premières minutes le résultat fondamental ou le but de son travail, il demandait : « Pouvez-vous nous montrer les résultats essentiels ? » Lions avait toujours un grand respect pour les conférenciers, même s'il lui arrivait de n'être pas d'accord avec le fond ou la forme de l'exposé ; il essayait toujours de dégager les éléments positifs. Lions acceptait et même suscitait des choix de sujets pouvant aller des problèmes les plus abstraits de la géométrie algébrique ou de l'unicité et la régulatité des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension trois, à des applications les plus concrètes comme la prévision du temps ou la fabrication de l'aluminium.

En 1998 lorsque Lions quitta le Collège de France, une tentative pour conserver le séminaire a été faite, mais sa présence manquait et il était difficile de le maintenir en l'état. Ce séminaire est maintenant couplé avec le séminaire du Laboratoire d'analyse numérique, le vendredi matin.

Tout au long de sa carrière Lions a eu le souci de diffuser largement les connaissances mathématiques comme en témoigne cette idée de faire de l'année 2000, l'Année Mondiale des Mathématiques. Il est difficile de connaître avec précision la date de naissance de cette idée. Madame Theis, qui fut sa secrétaire pendant de longues années, pense qu'elle remonte à 1990. Les premières notes écrites de la main de Lions datent de 1992, lorsqu'il était Président de l'Union mathématique internationale. Lions était un visionnaire et il pressentait les évolutions de la société parcourue par des courants antiscientifiques, surtout chez certaines élites politiques. Il avait très tôt compris qu'un effort de communication était nécessaire et qu'il fallait aller à la rencontre du grand public pour expliquer ce que pouvaient faire les mathématiciens dans des domaines pratiques comme la prévision du temps, la médecine, l'espace,... Il n'oubliait pas le rôle des mathématiques dans la formation du citoyen et il pensait qu'il était aussi indispensable que la communauté mathématique soit convaincue de la nécessité de se faire connaître. Toutes ces préoccupations se retrouvent dans les textes préparatoires au lancement de l'année 2000.

C'est en 1992, à Rio de Janeiro, que des circonstances favorables se sont trouvées réunies pour un lancement officiel de l'année 2000, Année Mondiale des Mathématiques. Lions avait obtenu le soutien de l'Unesco dont l'un des objectifs est la diffusion de la connaissance à l'échelle mondiale. Pour propager ses idées Lions lança un petit journal : la Newsletter Wmy 2000, dont les premiers numéros, parus en 1992 et 1993, avaient été composés et diffusés par notre collègue H. Gispert et Madame Theis. Le premier numéro de la Newsletter Wmy 2000 contient le document officiel connu sous le nom de « Déclaration de Rio ». Il annonce le lancement de l'Année Mondiale des Mathématiques et précise les objectifs à atteindre :

1- définir les grands défis mathématiques pour le XXI^{e} siècle ;
2- repenser le rôle des mathématiques dans le développement ;
3- améliorer l'image des mathématiques dans le grand public.

Le choix de l'année 2000 n'est ni un hasard ni une volonté en relation avec une quelconque mystique millénariste prédisant des catastrophes ou l'avènement d'un éden pour l'humanité grâce aux mathématiques ! Dans la série des actions que lance l'Unesco l'année 2000 n'avait pas encore de thème précis. De plus, pour rappeler l'initiative lancée en 1900 par Hilbert, l'année 2000 se présentait comme un anniversaire. Était-il possible, comme l'avait fait Hilbert, de dresser une liste de problèmes soumis à la sagacité des mathématiciens du XXI^{e} siècle ? Ne fallait-il pas profiter du changement de millénaire pour établir un bilan en mathématiques et prévoir leur futur ? Quelles formes prendrait la diffusion des connaissances et des recherches en mathématiques avec l'apparition des nouveaux médias, notamment l'Internet ? Ces interrogations sont clairement traduites dans les objectifs de la déclaration de Rio.

L'année mondiale lancée, il fallait faire connaître les différentes initiatives, les encourager, trouver des supports. Il s'avérait indispensable d'élargir la diffusion de la Newsletter Wmy 2000. C'est sans doute ce souci qui amena Lions, à la fin de son mandat de président de l'Union mathématique internationale, à créer un comité de rédaction international pour la Newsletter. La décision fût prise à Zurich en août 1994, lors du Congrés international des mathématiciens ; le comité de rédaction international comportait au moins un membre de chaque continent ; la composition et l'édition de la Newsletter étaient localisées à Paris. Mireille Chaleyat-Maurel et moi-même étions désignés pour assurer le suivi de la Newsletter dont la publication s'est faite au rythme d'un numéro par an, avec un budget annuel de 10.000 FF assuré par l'Unesco pour une diffusion à l'échelle mondiale de 5.000 exemplaires ! Avec Mireille nous avions la charge de toutes les opérations, mais nous avons été aidés par Lions et par différents organismes : l'Institut Henri Poincaré qui nous a fourni un bureau, l'École polytechnique qui a assuré l'impression de la Newsletter, le Collège de France, les Universités Paris VI et Paris VII, les sociétés mathématiques, Smf et Smai. Il faut aussi noter que l'enthousiasme de nombreux collègues a contribué à la réussite de l'année mondiale. Par ailleurs, cette initiative n'a rencontré bien souvent qu'un accueil poli auprès des pouvoirs publics, lorsqu'il n'y avait pas indifférence, voire hostilité.

Sur la période 1992–2000 neuf numéros de la Newsletter ont vu le jour et un dixième numéro de bilan devait être édité cette année ; nous nous apprêtions à demander à Lions la rédaction d'un éditorial lorsque nous avons appris sa mort. Partout où des mathématiciens se sont lancés dans l'aventure de l'Année Mondiale des Mathématiques le grand public a accueilli favorablement cette initiative. Sans entrer dans tous les détails, les événements les plus marquants ont été une intervention de Lions dans l'enceinte du parlement espagnol le jour du lancement officiel de l'Année Mondiale des Mathématiques en Espagne, au mois de janvier 2000 ; les campagnes d'affiches dans les métros de grandes villes : Paris, Londres, Montréal, Barcelone, Bueno Aires,..., la diffusion de milliers d'affiches offertes par la maison d'édition Springer-Verlag, des émissions de timbres-postes à thèmes mathématiques dans une dizaine de pays : Belgique, Luxembourg, Espagne, Argentine,... On également peut mettre au compte de l'Année Mondiale des Mathématiques l'émission du timbre français qui vient de sortir à l'occasion du quatre-centième anniversaire de la naissance de Fermat. Dans de nombreux pays, des expositions, des spectacles de rue, des fêtes, des conférences à thèmes mathématiques ont marqué l'événement. Pour ce qui concerne la France outre les campagnes d'affiches dans le métro de Paris et dans les transports publics de certaines villes, quelques régions se sont distinguées : l'ouest, la région lyonnaise, le Centre-sciences d'Orléans a édité deux séries d'affiches, l'une sur les mathématiques de la nature, l'autre sur les mathématiques du quotidien. Cette dernière série est à l'origine d'une plaquette qui présente au grand public douze domaines de la vie quotidienne dans lesquels les mathématiques interviennent de manière effective, mais peut-être pas suffisamment visible.

Avec quelques mois de recul, on peut dire que l'Année Mondiale des Mathématiques présente un bilan positif, même si tous les objectifs n'ont pas été atteints. Aujourd'hui les mathématiques jouissent d'une plus grande visibilité et d'une plus grande lisibilité dans le grand public. La communauté mathématique internationale a pris conscience de la nécessité de se faire connaître au-delà d'un cercle restreint de spécialistes. Les mathématiques, comme les autres activités, ont un rôle à jouer dans la société ; elles sont non seulement utiles, mais elles participent également à la formation culturelle et sociale du citoyen. De plus, en cette époque de mondialisation, elles constituent peut-être un exemple d'expérience transnationale qui peut réussir.

Le nom de Lions restera attaché à l'Année Mondiale des Mathématiques. Une preuve touchante nous a été fournie par le témoignage d'une institutrice d'un petit village canadien ; ce témoignage, parvenu après le dix-sept mai exprime la reconnaissance d'une classe de jeunes enfants qui, grâce à Monsieur le Professeur Lions, ont appris à connaître et à aimer les mathématiques.

L'Année Mondiale des Mathématiques s'est révélée riche en promesses ; en prolonger les effets au-delà de l'année 2000, témoignera de la fidélité que nous devons à la mémoire de Jacques-Louis Lions, lui qui a su partager et communiquer ses connaissances et sa foi en l'avenir.

Gérard Tronel

Université Paris VI

Olga Arsenievna Oleinik (1925 - 2001)

G. Tronel

Une Grande Dame des mathématiques qui a marqué le XX^{e} siècle, le professeur Olga Arsenievna Oleinik, est décédée, à Moscou, le treize octobre 2001. Elle était mondialement connue par ses travaux sur les équations aux dérivées partielles, la théorie mathématique de l'homogénéisation, la théorie de l'élasticité. Elle a marqué de sa forte personnalité les mathématiques russes, notamment durant son mandat de chef de la chaire des équations différentielles de l'Université Lomonossov de Moscou, chaire qu'elle dirigea pendant de longues années.

Elle était originaire de la région de Kiev, en Ukraine, où elle a vécu la période de son enfance, période dont elle parlait assez peu. Pendant la seconde guerre mondiale, comme de nombreux enfants soviétiques des régions directement impliquées dans les hostilités, elle est évacuée à Perm, une petite ville de l'Oural où elle achève ses études secondaires et commence ses études universitaires. Très brillante étudiante, en 1944, peu avant la fin de la guerre, elle est envoyée à l'Université de Moscou où elle termine ses études universitaires. Elle commence immédiatement une belle carrière de mathématicienne. Sous la direction du professeur Petrowsky, grand mathématicien, connu pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles de type parabolique, elle effectue ses premières recherches. Elle obtient des résultats nouveaux sur les solutions des problèmes du second ordre à coefficients réguliers.

Sa première thèse, sa dissertation dans la terminomogie universitaire russe, parait en 1950 sous le titre :« *Sur la topologie des courbes sur les surfaces algébriques* ». Dans cette thèse elle répond à une série de questions posées dans le cadre du seizième problème de Hilbert. Une succession de travaux de haute valeur lui permettent de décrocher, en 1954, le titre de Docteur d'état qui lui ouvre les portes d'une carrière de professeur. Le titre de sa thèse : « *Les problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles avec petits coefficients sur les termes d'ordre le plus élevé et le problème de Cauchy pour des équations non-linéaires générales* ».

Sa thèse d'état lui permet d'accéder à un poste de professeur à la chaire d'équations différentielles de l'Université de Moscou, elle est alors confirmée dans une carrière d'enseignante qu'elle avait commencée comme assistante, en 1950. En 1973, elle prend la direction de la chaire des équations différentielles, direction qu'elle assurera jusqu'à sa disparition.

La liste de ses travaux est impressionnante : plus de trois cent cinquante articles de recherches, une dizaine de monographies. Les domaines qu'elle a marqué vont des frontières de la géométrie algébrique aux applications à la physique théorique, à l'élasticité et à l'homogénéisation. Les améliorations qu'elle a apporté aux démonstrations de l'inégalité de Korn sont remarquables : calcul des meilleures constantes, méthodes originales d'amélioration et de généralisation des applications de cette inégalité.

Olga Arsenievna Oleinik a créé une école mathématique en assurant la formation de plus de cinquante chercheurs de haut niveau ; une vingtaine de ses élèves sont docteurs d'état et figurent parmi les plus grands spéciaistes mondiaux, notamment en calcul des variations et en homogénéisation.

Très tôt elle a pu voyager et elle a fait de nombreux séjours en France, invitée par Jean Leray au Collège de France ; elle est d'ailleurs titulaire de la médaille du Collège de France. Elle a visité pratiquement tous les grands établissements français d'enseignement supérieur ; École normale supérieure, École polytechnique, Universités parisiennes et de province. Elle a participé à de nombreux congrès et colloques.

Elle aimait particulièrement venir en France où elle rencontrait ses collègues ayant les mêmes intérêts scientifiques, Jean Leray, Jacques-Louis Lions, Laurent Schwartz, Yvonne Choquet-Bruhat, Gustave Choquet, pour ne citer que quelques uns de ceux qui étaient aussi ses amis.

Olga Arsenievna était une travailleuse infatiguable, elle pouvait passer des nuits et des jours penchée sur une série de problèmes qu'elle n'abandonnait que lorsqu'elle était satisfaite des résultats ou à bout de force. De calculs qui semblaient inextricables elle tiraient des formules d'une grande simplicité et d'une grande clarté. Elle cherchait toujours à obtenir les résultats les plus généraux à partir d'une série de problèmes a priori simples, appliquant un principe attribué à Jacques Hadamard : « Généraliser pour comprendre ». Elle était particulièrement exigeante sur les qualités pédagogiques des articles de recherche qui devaient être accessibles à des chercheurs débutants.

Ceux qui la connaissaient savaient que ses réactions étaient quelquefois imprévisibles, mais ils savaient aussi qu'elle était une femme généreuse. Le mathématicien en visite à Moscou était toujours bien accueilli à la chaire des équations différentielles malgré les difficiles conditions de vie surtout pendant l'hiver moscovite. Il arrivait assez rarement à Olga Arsenievna de s'échapper des mathématiques, mais lorsqu'elle pouvait se distraire quelques instants ici ou là, elle en profitait pour visiter une exposition ou un musée. Elle était très cultivée et connaissait très bien la littérature et la peinture française. Elle adorait les promenades dans la nature sauvage, promenades qu'elle entrecoupait de pauses pour discuter de problèmes mathématiques. Sa vive intelligence était toujours en éveil.

Les dernières années de sa vie ont été particulièrement difficiles mais, jusqu'au dernier moment, malgré les souffrances, elle a fait front avec beaucoup de courage.

Cette année la communauté mathématique est profondément affectée par sa disparition qui a suivi de peu celle de Jacques-Louis Lions. Ils se connaissaient bien et à un moment de leurs carrières respectives ils avaient partagé des intérêts scientifiques communs notamment lorsqu'ils travaillaient simultanément sur la théorie de l'homogénéisation. Tous les deux laissent en héritage, non seulement leurs travaux mathématiques, leurs enseignements, mais le souvenir de personnalités fortes et riches qui nous ont aidé à vivre et qui peuvent représenter des modèles pour les générations futures.

Gérard Tronel

Université Paris VI

Au revoir Albert Ducrocq

Saluons avec tristesse la disparition lundi 22 octobre d'Albert Ducrocq, grand professionnel du journalisme scientifique, connu pour sa passion de l'aventure spatiale qu'il a transmise sur les ondes et dans ses chroniques du Figaro, et fervent des mathématiques : les mathématiciens ont toujours trouvé auprès de cet homme chaleureux un soutien sans failles qui se manifestait par l'écho qu'il donnait systématiquement aux nouvelles du monde mathématique. Récemment Albert Ducrocq avait commis avec son vieux compère André Warusfel un livre reflétant leur passion commune et ses multiples aspects : *Les mathématiques plaisir et nécessité*, Éd. Vuibert (2000). Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques.

Encore quelques jours avant sa mort il assistait à l'Institut Henri Poincaré à une conférence de notre collègue S. Garfunkel sur les nouvelles approches de l'enseignement des mathématiques.
Espérons que les futurs journalistes scientifiques s'inspireront de son exemple .

Jean-Michel Kantor
Institut de mathématiques de Jussieu

A. Ducrocq

Albert Ducrocq (archives du Figaro).

COURRIER DES LECTEURS

Quelques chiffres à propos du partenariat entre les universités et le CNRS

J.-Y. Mérindol

J'ai été surpris par la réponse que Jean-Michel Lemaire a pensé nécessaire de faire (numéro d'Octobre[1] 2001) à mon interview dans la gazette (numéro de juillet 2001). Voici une mise au point qui clôt pour moi ce sujet.

Tout d'abord, je m'aperçois que j'ai retravaillé trop vite sur le texte que m'avait fourni François Digne et qui résultait d'une discussion. Ceci a eu des conséquences sur le style, et aussi sur l'orthographe que la gazette a malheureusement respectée. Mais ceci a eu des conséquences sur deux autres aspects, en introduisant des ambiguités, ce qui m'amène à deux regrets. Ma formule concernant le CNET était trop rapide, et a pu être mal interprétée. Dont acte, et désolé pour cette maladresse. Mon intention était de signaler que la recherche au CNET était à la fois plus active et plus importante qu'au CNRS, mais évidemment dans le domaine des télécommunications, et que cette recherche impliquait des mathématiciens. Le CNET n'a jamais été un organisme généraliste de recherche. Nous le savons tous et c'est pourquoi je trouve que la critique faite à ce sujet à mon égard par Jean-Michel relève du procès d'intention. Enfin je confirme que le CNRS a fait des efforts très positifs pour régler les conséquences du démantèlement de ce centre. Ensuite, bien que j'ai essayé d'être clair, il a dû arriver que le lecteur ne sache pas bien si je parlais du CNRS en général, et l'essentiel de ma réponse portait sur ce point, ou des mathématiques, ce qui n'étaient abordés qu'incidemment. Il est certain qu'il est dangereux d'extrapoler des données générales à la situation des mathématiques, ce que les chiffres que je donne plus loin confirment. Mais je demande aux anciens responsables des maths au CNRS de ne pas faire l'extrapolation inverse.

Maintenant, passons à quelques chiffres qui permettront de savoir si mes propos furent tenus sans rigueur.

Les organismes de recherche (EPST et EPIC) reçoivent une subvention de l'État, qui inclut les dépenses de salaires pour les fonctionnaires ou les personnels statutaires. Ce n'est pas le budget de l'organisme puisque ce budget intégre aussi des ressources supplémentaires (dites ressources propres).Voici des chiffres en Millions d'Euros pour l'année 2002 (projet de loi de finances) et pour les principaux organismes. Il s'agit des DO + AP (jargon pour « Dépenses ordinaires », dont les salaires et « Autorisation de Programmes », permettant notamment les investissements) :

	en ME
CNES :	8810
CEA (hors crédits militaires :)	6072
CNRS :	2217
INSERM :	451
INRA :	562
INRIA :	103

Source : projet de loi de finance 2002

Les deux premiers chiffres ne peuvent être directement comparés aux autres parce que les missions de ces organismes incluent largement la recherche-développement. Pour ceux qui aiment les

[1] Gazette n° 90

comparaisons, le budget (couvrant les activités d'enseignement, de recherche, de valorisation, de culture scientifique), salaires d'Etat et ressources propres compris, pour l'université Louis Pasteur est de l'ordre de 270 ME. Il ne me semble donc pas faux de dire qu'il existe des organismes plus riches que le CNRS. Il est par ailleurs certain que, de tous ces organismes, c'est le CNRS qui apporte les subventions de fonctionnement ou d'investissement relativement les plus faibles, par exemple quand on les compare au nombre de chercheurs concernés. Ce point est peut-être marginal en mathématiques, parce que notre discipline n'est pas la plus coûteuse en investissement. Je maintiens, sur ce sujet, le point de vue que j'ai donné en juillet.

Pour les mathématiques, une information intéressante sur les emplois provient du rapport fait chaque année par l'Observatoire des Sciences et des Techniques (OST). Le rapport 2000 (édition Economica, page 71) donne les chiffres suivants pour les chercheurs de la recherche publique civile. L'OST compte ici toutes les personnes des organismes de recherche (EPST et EPIC) et les enseignants-chercheurs des universités. Les sources sont dues au ministère de l'Education Nationale pour les universitaires (sections 25 et 26 du CNU) et aux déclarations des organismes de recherche. L'année de référence est de 1996. Dans le tableau ci-dessous le premier pourcentage concerne les mathématiques (3685 personnes) et le second l'ensemble des disciplines (71609 personnes) : (*c.f.* tableau page 50 en annexe).

Il y aurait bien sûr à discuter de la nature de ce que les autres organismes de recherche appellent mathématiciens. Il est certain que l'on y trouvera plus de statisticiens, de spécialistes de recherche opérationnelle et de numériciens que de géomètres ou d'arithméticiens. Je crois cependant que ces chiffres sont plus intéressants pour la question que j'abordais que de savoir combien de ces personnes adhèrent à la SMAI-SMF (chiffres choisis par Jean-Michel). Pour donner un exemple instructif, nous avons en 2000 à l'ULP autour de 90 mathématiciens permanents (universitaires et CNRS) et l'annuaire commun SMF-SMAI de 2000 donne 26 adhérents. Enfin, pour ceux qui se méfient de ceux qui s'occupent d'indicateurs, je signale que l'OST est un groupement d'intérêt public créé en 1990 et associant divers ministères, le CNRS, le CEA, l'INSERM, l'INRA et l'ANRT.

Toute la partie de mon interview où je parle du rôle du CNRS depuis la guerre ne portait pas particulièrement sur les mathématiques. Je maintiens, dans ce contexte, tout ce que j'ai écrit sur la myopie des organismes de recherche qui n'ont pas su (toutes disciplines confondues) profiter du développement d'universités dans de nouveaux sites à partir de la fin des années 60, puis du lancement des universités nouvelles à partir de 1992, pour y implanter des activités solides de recherche. Je n'en tire pas la conclusion que c'était facile à faire. Le ministère en charge de l'enseignement supérieur n'y réussit pas toujours mieux. Mais, sauf rare exception, ceci n'a même pas été tenté, ce qui est pour le moins l'une des limites du partenariat tant apprécié ailleurs.

Voici quelques chiffres à ce propos. En 1998, le CNRS avait 1334 unités de recherche (UMR et UPR) dont 1174 en partenariat avec les universités ou écoles (c'est-à-dire mentionnées et financées dans les contrats quadriennaux de ces 120 établissements) Plus de la moitié de ces unités sont dans 19 établissements (Paris 1,5,6,7 et 11, EHESS et Polytechnique, Aix-Marseille 1 et 2, Bordeaux 1, Grenoble 1, Lille 1, Lyon 1, Montpellier 2, Nice, Poitiers, Rennes 1, Strasbourg 1, Toulouse 3). Le seul site de cette liste qui n'est pas universitaire depuis plus de 40 ans est Nice.

(source : documents rassemblés par le CNRS pour une conférence de presse CNRS-CPU du 17 juin 1999).

Pour les universités nouvelles lancées depuis 10 ans, la situation est encore plus nette. Ces universités rassemblaient en

1999 un potentiel enseignant de 2877 personnes, soit 5,7 % du potentiel de toutes les universités françaises. Il conviendrait de légèrement corriger ce chiffre parce que ces établissements ont, malheureusement pour leur recherche, relativement plus de PRAG que les autres universités. Les chiffres du ministère de la recherche pour 2000 donnent 1697 unités de recherche liées au CNRS (la différence avec les chiffres 1998 résulte essentiellement de doubles comptes : les unités associées en n universités sont comptées n fois). Il y en a 25 (soit 1,4 %) qui sont liées aux universités nouvelles (*c.f.* tableau page 50 en annexe).

Mais, comme dans toutes les moyennes générales, il y a des cas particuliers. Prenons d'abord l'exemple des sites universitaires lancés à partir des années 60 jusqu'au milieu des années 80. Le rôle du CNRS à Nice (par exemple en mathématiques ou en biologie) ou à Mulhouse (en physique et en chimie) a été plus important que le rôle du même CNRS à Toulon, Avignon, Angers, Saint Etienne et beaucoup d'autres universités de ces années. Pour les universités nouvelles (créées à partir de 1992) de la région parisienne, je confirme tout à fait ce que dit Jean-Michel sur le rôle actif, et plutôt positif, des mathématiciens du département SPM. Mais ceci a été une exception confirmant la faible implication du CNRS dans son ensemble, sauf à Versailles-Saint-Quentin (ce qui s'explique d'ailleurs principalement parce que cette université à lancée à partir de Paris 6, avec délocalisation de certains laboratoires). Les quatre autres universités nouvelles, hors région parisienne, attendent encore une action volontariste du CNRS (et des autres organismes).

Je confirme aussi le rôle important et positif du CNRS, pas seulement en mathématiques, dans les années de plomb du recrutement dans l'enseignement supérieur (75–85). Mais depuis, et heureusement, les universités ont pu reprendre des recrutements. Et si le CNRS a raison d'être fier d'avoir eu les moyens de résister à la récession générale, ceci ne permet pas de prétendre que c'est encore le rôle principal qu'il doit jouer à l'avenir. Sans la création du CNRS, puis sans le partenariat solide qu'il a su installer avec les universités, la recherche française ne serait pas ce qu'elle est aujourd'hui. C'est positif pour le CNRS et pour les universités, et surtout pour la recherche publique. Mais ceci ne justifie pas que l'on considère que tout va tellement bien qu'il ne faille pas s'interroger sur des évolutions que je crois nécessaires, et pas seulement pour des détails. Je regrette que l'on ne puisse en parler sans avoir en réponse des enfantillages sur les géophysiciens. Le sujet mérite plus de sérieux.

La régionalisation, et l'internationalisation, sont deux grandes évolutions qui affectent toutes les organisations. Le CNRS n'a pas encore su comment traiter la question de la régionalisation. C'est un constat qui n'est pas nié par Jean-Michel Lemaire. Je confirme que sur la plupart des dossiers, il y a 8 CNRS correspondant aux départements scientifiques, ce qui ne facilite pas la progression sur le terrain des dossiers pluridisciplinaires ambitieux. Pas plus que Jean-Michel, je ne crois qu'il serait sage d'en avoir à la place un par région. Mais le rappel de cette évidence ne permet pas de traiter du problème, qui me semble vital et délicat. Ce n'est pas à moi de le résoudre, ce qui serait d'ailleurs une ingérence dans la vie interne d'un partenaire apprécié, mais je constate que la réponse de Jean-Michel ne comporte aucune proposition.

Jean-Yves Mérindol
Président de l'Université
Louis Pasteur de Strasbourg

Annexe

Répartitions par structures des
Emplois d'enseignants – Chercheurs et Chercheurs

	Maths	Ensemble
Enseignement supérieur (universités et écoles) :	79,3%	61,5%
CNRS :	8,9%	16,0%
autres EPST :	2,0%	7,0%
autres organismes de recherche :	9,8%	15,5%
Total :	100%	100%

Tableau se rapportant à la page 48

	Potentiel universitaire en 1999	Unités liées au CNRS en 2000
Cergy	415	6
Evry	312	5
Marne-la-Vallée	343	2
Versailles-Saint-Quentin	440	10
Littoral	422	3
Artois	393	0
Bretagne sud	264	0
La Rochelle	288	0

Tableau se rapportant à la page 49

(Sources : statistiques 1999 du MEN, statistiques du ministère de la recherche)

La politique du CNRS en mathématiques

C. Peskine et M. Enock

Critiquer la politique du CNRS est un exercice courant parmi les scientifiques, et les mathématiciens n'échappent pas à cet usage. Pour qu'ils le fassent de façon pertinente, nous pensons utile de rappeler brièvement quelle est la politique du CNRS pour les mathématiques.

La recherche mathématique française est, de l'avis général, au meilleur niveau mondial, tant par la quantité de mathématiciens actifs et leur qualité scientifique que par l'étendue du spectre couvert. Le CNRS doit contribuer au développement et au renouvellement de cette recherche, comme au maintien des qualités qui la placent à ce niveau. Bien que les mathématiques soient une discipline principalement universitaire, le rôle du CNRS est essentiel ; en effet, sa position dans la recherche scientifique, sa structure nationale, son ouverture internationale et son caractère pluridisciplinaire lui donnent les moyens d'une politique nationale cohérente et ambitieuse.

Ouverture et unité des Mathématiques sont les axes de cette politique.
Les mathématiques doivent s'ouvrir à la société et quitter la tour d'ivoire qui en donne aujourd'hui une image négative et fausse. Toute stratégie passe par l'attraction et la formation des jeunes ; la modernisation du milieu et des modes de travail est donc une urgente obligation. L'importance de la structuration du travail, de la recherche en équipe et de l'organisation des relations sociales, par exemple, n'est pas toujours bien comprise par certains mathématiciens.
Il est aussi important que les mathématiciens s'insèrent mieux dans la collectivité scientifique. L'intéraction des mathématiques avec les autres disciplines, le monde industriel et, plus généralement, l'environnement socio-économique, est une priorité scientifique. Après quelques décennies de développement « endogène », les mathématiques s'ouvrent davantage aux autres sciences et y trouvent de nouvelles sources d'inspiration. Dans ce processus d'ouverture, loin de devenir une discipline de service, les mathématiques restent une science fondamentale. Le caractère pluridisciplinaire du CNRS lui donne potentiellement de grandes capacités d'action sur ce terrain, encore insuffisamment exploitées.
Pour donner toute leur force à ces ouvertures, qui touchent au cœur même de cette discipline, il importe de renforcer l'unité des mathématiques. Toutes les méthodes mathématiques sont susceptibles d'être appliquées ; l'ensemble de la discipline est donc concerné et doit « bénéficier », dans tous les sens du terme, de cette ouverture. Les cloisonnements multiples entre mathématiques « pures » et « appliquées », héritages dépassés et sources de tant de querelles stériles, ne sont plus pertinents. Enfin, c'est dans un cadre unitaire que les mathématiciens attirent les meilleurs étudiants, recrutent les meilleurs chercheurs, et affrontent le mieux la nécessaire modernisation de l'organisation de leur recherche.
Voici quelques exemples actuels d'intéractions scientifiques avec d'autres disciplines :
– l'ouverture vers la physique, historiquement essentielle, est en plein renouvellement. Au-delà de l'analyse, des équations aux dérivées partielles ou de la théorie des groupes, ce sont toutes les géométries et tous les systèmes dynamiques qui sont désormais engagés ;
– la mécanique des fluides, à l'origine d'une partie des mathématiques appliquées, leur fournit maintenant une ouverture vers la météo, la cardiologie, la géologie, etc ;
– l'ouverture vers l'informatique offre des

perspectives d'applications à la logique, à la théorie des nombres, à la géométrie algébrique, et à toutes les "mathématiques discrètes" ;
– le traitement du signal et de l'image est un domaine dans lequel les mathématiques ont une place essentielle et qui permet des ouvertures vers toutes les sciences et industries ;
– l'ouverture vers la génomique concerne les statistiques et les mathématiques discrètes ; plus généralement, l'ouverture vers les sciences de la vie touche (et touchera) toutes les mathématiques, particulièrement la géométrie et les systèmes dynamiques ;
– l'ouverture vers l'économie a déjà produit les mathématiques financières ; elle pourrait se développer dans d'autres directions.

Les structures mises en place par le CNRS en mathématiques

Le CNRS a aujourd'hui une forte influence, par les structures qu'il met en place dans le monde universitaire, et par le rôle de ses personnels, scientifiques, techniques et administratifs. Ces structures, qui s'inscrivent également dans une politique territoriale, forment le cadre dans lequel le CNRS développe sa politique scientifique.

Un laboratoire n'est pas seulement un ensemble de brillants mathématiciens auquel le CNRS apporte un label de qualité, quelques chercheurs, des ITA et quelques crédits. C'est aussi une unité dans laquelle, sous la responsabilité du directeur, une réflexion prospective est faite, puis une politique cohérente est menée avec le soutien de la tutelle universitaire, pour :
– assurer la qualité et la cohérence du recrutement des enseignants-chercheurs ;
– attirer des chercheurs CNRS et des post-docs (européens ou autres) ;
– améliorer le recrutement, la formation, l'accueil et le suivi des doctorants ;
– ouvrir le laboratoire aux nouveaux thèmes et aux nouveaux projets ;
– renouveler les responsables de projet ;
– mettre en place un organigramme, évolutif, des personnels scientifiques, techniques et administratifs ;
– organiser les locaux et les moyens communs en fonction des priorités scientifiques.

Les laboratoires de mathématiques sont, presque tous, pluri-thématiques. Une telle configuration offre davantage de capacités d'évolution et se prête mieux à l'émergence de nouveaux projets. Les recrutements externes sont aussi une garantie d'évolution scientifique du laboratoire, de circulation des idées et de renouvellement des thèmes. Le recrutement local par clonage doit disparaître du paysage mathématique français. Un laboratoire est bien souvent « la partie recherche » d'un département universitaire de mathématiques, disposant de l'autonomie nécessaire pour se développer.

Pour assurer une cohérence locale entre différents laboratoires présents sur un même site (ou sur des sites voisins), nous mettons en place des fédérations de recherche, pour encourager ces laboratoires :

– à abandonner une politique stérile de concurrence face aux tutelles (les mathématiciens ne doivent pas laisser à d'autres le soin d'arbitrer entre leurs projets) ;
– à développer une réflexion prospective commune, en particulier lors du renouvellement des postes d'enseignants-chercheurs ; en ouvrant de nouvelles thématiques scientifiques, en donc en redéployant à l'intérieur des mathématiques, il est souvent possible d'éviter que des postes ne soient redéployés hors des mathématiques ;
– à optimiser la gestion des personnels et des moyens (locaux, réseaux informatiques, bibliothèques) qui doivent être mis en commun.

Pour assurer une cohérence nationale à la politique du CNRS, et en particulier à la formation des jeunes mathématiciens, nous mettons également en place des groupements de recherche (GdR) et des unités de service.

Les GdR d'ouverture interdisciplinaire sont des espaces où les mathématiciens rencontrent d'autres scientifiques. Conditions requises : qualité scientifique, bien entendu, mais aussi réalité et pertinence de l'interdisciplinarité, et impact positif sur la communauté mathématique.
Les GdR « thématiques » sont des réseaux regroupant autour d'un même thème tous les mathématiciens actifs du domaine, membres ou non de laboratoires reconnus par le CNRS. Conditions requises : qualité scientifique, bien entendu, mais aussi rôle dans la formation des jeunes, et contribution à leur mobilité lors des recrutements de maîtres de conférences et de chargés de recherches.

Les unités de service sont des structures au service de l'ensemble de la communauté mathématique française. Elles témoignent nettement du caractère national de la politique menée par le CNRS. Deux d'entre elles (l'Institut Henri Poincaré et le Centre international de rencontres mathématiques) sont des centres de rencontres mondialement reconnus, indispensables pour assurer au meilleur niveau l'échange des idées et des informations scientifiques. Deux autres (la bibliothèque Jacques Hadamard et la cellule Math-doc) sont le fruit de la coopération entre le département SPM et le Réseau national des bibliothèques de mathématiques (RNBM) ; elles permettent l'élaboration et la mise en place d'une politique nationale de documentation scientifique en mathématiques. Dans le domaine stratégique de l'informatique au service des mathématiques, un réseau (Mathrice) — encore informel — d'ingénieurs informaticiens de laboratoires de mathématiques participe à l'élaboration de notre politique de formation et de développement. Enfin, une unité propre de service est chargée de conserver et de mettre à la disposition des scientifiques les archives Bourbaki.

Les moyens mis en œuvre par le CNRS en mathématiques

Les mathématiques sont une discipline universitaire et la contribution du CNRS en moyens humains et matériels y est relativement faible ; il est donc important d'optimiser leur efficacité.

– Nos laboratoires comptent 350 chercheurs CNRS pour 2 000 enseignants-chercheurs. En mathématiques, les passages CR1 → PR2 sont exceptionnellement nombreux (douze en 2000). Cette mobilité, qui montre la bonne insertion des mathématiciens du CNRS dans l'Université, est un caractère essentiel de l'organisation de la recherche en mathématiques ; elle va de pair avec un recrutement fort et régulier de CR2, qui reste notre priorité.
Les CR2 nouvellement recrutés ne sont pas affectés dans le laboratoire qui les a formés : un grand nombre d'entre eux vont travailler en province, sur des sites qui sont toujours pluri-thématiques. Ces affectations sont menées en concertation avec le Comité national, les intéressés et les laboratoires. Les chercheurs confirmés sont souvent encouragés à demander une affectation dans des unités de taille plus restreinte, dans lesquelles ils auront davantage de visibilité, de responsabilités, d'influence, et où leur travail sera mieux mis en valeur — mais la mise en œuvre reste difficile.
Les quelques détachements d'enseignants-chercheurs au CNRS sont réservés à des opérations bien ciblées de politique scientifique ; lorsqu'une telle opération se développe sur plusieurs années, le détachement peut être suivi d'une intégration. En revanche, les délégations d'enseignants-chercheurs au CNRS sont nombreuses ; elles permettent, en coopération avec les universités, de soutenir des projets d'excellence et/ou interdisciplinaires, de donner à des universitaires la possibilité de participer à des semestres thématiques, ou d'aller travailler pour un temps dans un autre laboratoire, enfin de faciliter le travail de recherche de jeunes maîtres de conférences.
– Les laboratoires de mathématiques du CNRS disposent de 166 personnels ingénieurs, techniciens et administratifs

(ITA). L'affectation de tels personnels dans une unité est un signe fort de l'engagement du CNRS ; elle permet aussi d'obtenir des évolutions significatives dans les laboratoires et des engagements contractuels importants de nos partenaires. La politique menée dans ce domaine est donc un élément essentiel de notre stratégie.
– Les moyens financiers apportés par le département SPM sont restreints, comparés aux crédits d'origine universitaire. Il convient donc de leur donner une visibilité et un impact accrus ; sous la forme par exemple d'actions spécifiques en faveur de l'ouverture d'une nouvelle thématique au sein d'un laboratoire, d'actions jeunes destinées à encourager les jeunes mathématiciens à prendre des initiatives et des responsabilités, ou de crédits d'équipement (dans le cadre d'un plan de financement associant l'université, la région ou d'autres partenaires).

Tous les moyens mis en œuvre par le CNRS dans les laboratoires ont leur importance dans la négociation avec la cotutelle universitaire. Ils sont liés aux engagements que celle-ci prend pour les postes d'enseignants-chercheurs, l'amélioration des locaux, les relations avec la région ou d'autres partenaires, ou toute autre forme de soutien à nos laboratoires.

Relations internationales

Priorité est accordée aux coopérations contribuant à l'ouverture et à l'unité des mathématiques, et au développement de nos laboratoires.

L'accueil de chercheurs associés (pour un minimum de trois mois) est décidé en fonction de leur qualité scientifique bien sûr, mais surtout de l'intérêt scientifique du projet concerné et de son insertion dans le laboratoire, en particulier de l'interaction attendue de l'invité avec les chercheurs et les thésards. Il est aussi possible d'utiliser cette procédure d'accueil pour une durée plus longue, pour des post-docs.

Le jumelage avec l'IUM (Université indépendante de Moscou) devrait permettre de renforcer les interactions des mathématiques avec la physique théorique et l'informatique. Il veut structurer des relations durables avec l'école russe, dont les capacités de renouvellement sont toujours grandes, et qui ne souffre pas des mêmes cloisonnements que l'école française.

En mathématiques, l'espace européen de la recherche existe. Le CNRS est à l'étroit dans le cadre national. Nous développons donc des relations de concertation avec des organismes de recherche d'autres pays européens, et nous souhaitons rapidement mettre en place des structures de coopération avec certains d'entre eux.

Conclusion

Le CNRS mène, pour les mathématiques, une politique de réforme et de renouvellement. S'il est peu probable qu'elle ait une influence sur la qualité des théorèmes qui seront démontrés l'an prochain, nous conjecturons qu'elle contribuera à ce que, dans 20 ou 30 ans, la recherche mathématique en France soit toujours au meilleur niveau mondial, par le nombre de mathématiciens actifs, la qualité de leurs travaux scientifiques et l'étendue du spectre couvert.

Christian Peskine
Directeur scientifique adjoint,
Département SPM, CNRS

Michel Enock
Chargé de mission,
Département SPM, CNRS

L'histoire de la "modularity conjecture"

J.-P. Serre

À la suite de la publication de la lettre de Serge Lang dans le courrier des lecteurs du numéro 90 de la Gazette[1]*, Jean-Pierre Serre nous fait parvenir le texte d'une lettre qu'il a écrite récemment à D. Goss sur ce sujet.*

Lettre à David Goss, 30 mars 2000

Dear Goss,

You are right : the history of the "modularity conjecture" has been somewhat distorted recently, and it would be good to put the record straight. Let me try.
As you well know, the main actors have been Taniyama, Shimura and Weil. What they have published on it is as follows :

1. Taniyama. At the Tokyo-Nikko conference (1955), the organizers asked for a list of open questions. This list was typed and distributed to all participants (but it was not included in the Conference volume). Taniyama contributed several such questions. One of them (problem n° 12) is about elliptic curves ; you may find it (in Japanese) in his Collected Papers, p. 167, and (in English) in mine, Vol. III, p. 399 (see below). It is clear that Taniyama had been influenced by the results of Eichler of 1954 (which had also made a deep impression on Weil). His conjecture was, more or less, that Eichler's construction gives the zeta functions of all the elliptic curves over **Q**. Unfortunately, he chose to state it over an arbitrary algebraic number field ; this made him invoke a "field of automorphic functions" which does not make sense in such a general setting. Still, it was a brilliant insight.

2. Shimura. He clarified Eichler's theory by using the action of the Hecke algebra on the Jacobian of the modular curve (1958) ; this allowed him to split the Jacobian, up to isogeny. He obtained the "Eichler-Shimura" relation (for the reduction mod p of T_p) for large enough (but unspecified) primes p. It was Igusa (1959) who proved the important fact that this holds for every p not dividing the level.
As for the modularity conjecture, Shimura published nothing on it. He did not mention it (not even as a "problem") in his 1971 book, nor in any of the many papers on modular forms he wrote between 1955 and 1985. The most he did was to ask a few people (verbally, only) whether they believed in it or not. An explicit statement in print would have been more useful ; maybe he felt he did not have enough evidence to do so.

3. Weil. In his paper on "Funktionalgleichungen" (Coll. Papers, [1967a]), he mentions the conjecture, tongue-in-cheek, as an "exercise for the interested reader", without quoting Eichler or Taniyama (as he could have). He adds two decisive ingredients :
a) A characterization of modular forms by functional equations of Hecke type for the corresponding L functions, and their twists by Dirichlet characters. A remarkable aspect of his theorem is the way the constant of the functional equation depends on the twisting character. This has been the starting point of what is now called "converse theorems" in Langlands theory.
b) He suggests that, not only every elliptic curve over **Q** should be modular, but its "level" (in the modular sense) should coincide with its "conductor" (defined in terms of the local Néron models, say).
Part b) was a beautiful new idea ; it was

[1] Pages 46–52.

not in Taniyama, nor in Shimura (as Shimura himself wrote to me after Weil's paper had appeared). Its importance comes from the fact that it made the conjecture *checkable* numerically (while Taniyama's statement was not). I remember vividly when Weil explained it to me, in the summer of 1966, in some Quartier Latin coffee house. Now things really began to make sense. Why no elliptic curve with conductor 1 (i.e. good reduction everywhere) ? Because the modular curve $X_0(1)$ of level 1 has genus 0, that's why ! I went home and checked a few examples of curves with low conductor : I did not know any with conductor < 11, nor with conductor 16 ? No surprise, since $X_0(N)$ has genus 0 for such values of N, etc. Within a few hours, I was convinced that the conjecture was true.
I was not the only one to be convinced : people such as Birch, Tate, Swinnerton-Dyer, Mazur, ... felt the same way ; moreover, a lot of numerical evidence was soon collected by Swinnerton-Dyer and others. Of course, there were several loose ends which needed tying up, but this was done within a few years :
– the Galois-representation definition of the conductor, and of the gamma factors of the functional equation (Ogg, Tate, myself) ;
– the newform theory of Atkin-Lehner (1970) ;
– the fact that an elliptic curve is determined, up to isogeny, by its ℓ-adic representation (for any given ℓ). This was harder. I did it in my McGill lectures (1967) when the j-invariant is not an algebraic integer (a case which turned out later to be sufficient for Wiles), but I could not do it in general ; it had to wait until 1983, when Faltings proved the general Tate conjecture.

This period (end of the '60 s and beginning of the '70 s) was a very exciting one for people working on modular forms, elliptic curves and the like. To wit :
– Langlands's theory (especially his 1967 Yale notes), with its relations with motives ;
– Deligne's construction (1968) of the ℓ-adic representations associated with modular forms of weight $\geqslant 2$, confirming a conjecture I had made the year before ;
– the theory of modular forms mod p (Swinnerton-Dyer, 1970), which I applied to define p-adic modular forms and to construct the p-adic zeta function of an arbitrary totally real number field (Antwerp, 1972) ;
– Shimura's correspondence between modular forms of half-integral weight and those of integral weight (1972) : a surprising, and beautiful, application of Weil's "converse theorem" ;
– the crowning part (1973) : Deligne's proof of Weil's conjecture for varieties over finite fields, and, as a consequence, the proof of the Ramanujan-Petersson conjecture.

Quite a list, don't you think ?

Note that, during the ten years following Weil's paper, the modularity conjecture was called "Weil's conjecture", and Taniyama's original insight was all but forgotten. Around 1976, 1 bought a copy of Taniyama's Collected Papers, and I noticed that "problem n° 12" was included there in Japanese, but not in English. To make it more widely available, I reproduced its 1955 English version in my 1977 paper on l-adic representations ; a fitting place, since the notion of system of l-adic representations is due to Taniyama ! From then on, I started saying "Taniyama-Weil conjecture" instead of "Weil conjecture" : it seemed natural to me that the credit be divided between the two of them. Little did I know that I was thus starting a bitter controversy. In the '90 s, Lang took the matter to heart (as he often does) and launched a big campaign, in order to have Weil's name removed and the conjecture called "Taniyama-Shimura", which I find strange in view of Shimura's record (or absence of record, see above). I still feel that "Taniyama-Weil" is more accurate. Maybe your suggestion of "modularity conjecture" is even better ? Anyway, one should not take such terminology quarrels too seriously. As Weil was fond to say, "Pell's equation" is not due to Pell, and Klein did not do much on the "Kleinian functions" of Poincaré ...

Best wishes
J.-P. Serre

PS : Lang's paper in the 1995 Notices describes a would-be discussion between Shimura and myself, at the Institute, in 1962-64 (sic). You ask whether this discussion actually happened. The answer will surprise you : I don't know! I have no memory of it. However, it is perfectly possible that Shimura said once "... don't you believe that every elliptic curve is modular?" and that I replied something like "... why should it be so?". I know very well that memory erases what is not important. If he had given me even one little piece of evidence, I would have been impressed and I would not have forgotten. (The discussion with Weil, on the other hand, was memorable; the evidence was there.)

PPS : You would probably be interested by the letters I exchanged with Tate, Swinnerton-Dyer, Shimura,..., between 1966 and 1968, on the modularity conjecture. No controversy then : just mathematics.

[Extrait de "Wolf Prize in Mathematics", vol. 2, World Sci. Publ. Co., Singapore, 2001, pages 537–539]

Pattern formation in biology, vision and dynamics
édité par A. Carbone, M. Gromov et P. Prusinkiewicz
World Scientific Publishing Co., 2000. 423 p. $ 111. ISBN 981-02-3792-8

It is common knowledge that Biology and Mathematics have enjoyed a fruitful interaction for many years with substantive results emerging in both fields. However, a new era has dawned. The depth and importance of mathematics in the biological sciences has reached another order of magnitude, and there is every reason to believe that in the twenty-first century the impact of the life sciences on mathematics will rival or exceed that of the physical sciences.

Many of us as mathematicians were educated in the culture of physics and engineering. In fact over the past two decades the sophistication of mathematicians in theoretical physics has grown impressively. However, relatively few of us are as deeply knowledgeable and cultured in the life sciences. It is time for that to change.

We are not, of course, suggesting that mathematicians should abruptly shift gears and begin to address applied problems in Biology. We simply feel that awareness of the emerging ideas and techniques in life science can, indeed should, have a serious impact on mathematics. For example, the fields of non-linear analysis and dynamics embody a myriad of disparate problems, and it is of great benefit to have means of picking out the important ones. Physics has been particularly effective in this regard — directing us to the Navier-Stokes equations, the KdV-equation, the Yang-Mills equations, etc. Biology too, particularly now with its increasing sophistication is a source of direction in both these fields. Several of the articles in this volume are examples of that effect.

This gorgeously produced book, the result of a meeting: *la Formation des Motifs*, held at I.H.E.S. in December of 1997 gives an important entrée into the emerging world of biological mathematics. The theme is “pattern formation”, but a broad range of topics is covered, from DNA computing and visual perception to the study of pigmentation patterns on the shells of tropical mollusks. The articles vary considerably in their depth of mathematical content. Some are devoted almost exclusively to a presentation of biological (or biochemical) facts; others are quite mathematical and/or speculative. Most lie somewhere in the middle.

However, the editors have carefully organized the material under different rubrics: Growth and form, Reaction-diffusion, Cellular patterns, DNA and genetic control, and Images and Perception. Each topic contains a balance of articles — some scientifically expository and some quite theoretical. Many contributors have made considerable effort to render their work accessible to a wide audience.

This volume contains an array of fascinating articles, and we do not intend to give them an exhaustive review. We shall mention a few of the highlights — enough we hope to intrigue one to go to the source.

The book begins by discussing “growth and form” — self-evolving patterns seen in crystals, leaves and flowers, sponges and corals, etc.. It begins with an article addressing computational aspects of pattern formation. It discusses abstract algorithmic processes which are realized in many physical and biological systems. The next paper studies the impact of the fluid environment on the growth of sponges and corals, in particular the impact of hydrodynamics on their nutrient-driven growth processes. Stochastic evolutionary growth models are then treated in depth. Cannon, Floyd and Parry develop a mathematical theory of crystalline growth by using discrete approximations to riemannian geometry. In their article they give a very pretty explanation of why self-similarity fractals appear so frequently in nature. Recent results on aperiodic tilings are also discussed.

Some of the fundamental ideas concerning patterns in biology are due to Alan Turing who showed in 1952 that pattern formation requires the interaction of two substances with different diffusion rates. This introduces partial differential equations, the so-called *reaction-diffusion equations*, into the subject. They model "activator-inhibitor" systems and can be thought of as infinite dimensional dynamical systems. This theory is highly developed and is well treated in the book. It has had spectacular success in its application to understanding the color patterns on the shells of tropical mollusks. Some of these patterns are quite complicated and appear to be nearly randomly produced. The accord between the theoretically generated patterns and those which appear in nature is awesome (see pages 126-7).

Closely related to this is the study of phyllotaxis, certain quasi-crystalline structures found everywhere in plants. Pioneering work in this subject was done by the Bravais brothers in 1835-7. It led subsequently to A. Bravais' classification of the fourteen possible periodic lattices in 3-space. This is an early instance of the impact of life science on mathematics. In the article by Y. Couder and S. Douady we have a good example of very interesting dynamics coming out of a question in phyllotaxis.

One of the fundamental areas of research in biology is the study of cell growth, and the book contains many papers on this subject. Here an extensive knowledge of observed cell patterning is important, and a fair amount of space has been devoted to discussing what is known. For example there is a nicely written and informative article on plant meristems and their patterns. There is then a sequence of papers which address the question of cellular pattern development from wide-ranging perspectives. One is based on finite "cellwork" structures; another develops mechanical stress patterns as an important component of morphogenesis; yet another uses a smooth model based on a "displacement velocity" vector field and its associated covariant derivative called the "growth tensor". Details aside, it is clear that the mathematics of evolving systems poses geometrically and topologically interesting questions.

One of the most revolutionary and exciting areas discussed in this book is that of DNA computing and DNA nanotechnology. The articles in this section are very well written. We particularly recommend the paper of T. Head which gives a simple, lucid introduction to the subject. DNA computing completely changes ones thinking about combinatorial questions; the challange now is to find DNA algorithms for solving problems. N. Jonoska in her article discusses a number of NP complete problems, for example the Hamiltonian cycle problem, which can be solved using sophisticated molecules. She also discusses the important role knot theory plays here.

We also recommend N. Seeman's paper about DNA nanotechnology where knot theory again comes into play. This is an important new field (see for example the New York Times, August 10, 2000 - Science Times section). Ultimately one is interested in manufacturing molecular-sized motors or electronic gadgets: for example miniscule machines that could pass through the human arterial system to repair injuries.

The field also has a theoretical side which is concerned with the possiblilty and development of programmable DNA computers and also with the type of abstract logical questions common in modern computer science.

The last section of the book is concerned with visual perception – pattern and shape recognition. In a moment's reflection one can see the rich mathematical content of this subject. It provides fertile ground for new ideas and structures. We particularly recommend the article on neural coding by S. Thorpe.

We want to point out that the articles in this volume are not of uniform quality and interest. Some are rather routine and will probably bore many readers. This is to be expected. However, many of the articles are quite intriguing. Furthermore, most of the topics touched upon are covered in sufficient depth to give one a serious introduction to the area. Extensive bibliographies have also been carefully compiled.

Mathematicians should find this book a fascinating introduction as well as a useful source-book. At very least it opens a window on the emerging world of biological mathematics and all its possibilities. Many future mathematical models, methods and modes of thought, even techniques of computing will have roots in the exploding world of biological science.

H. Blaine Lawson and Marie-Louise Michelsohn
Stony Brook, New York

Reading the Principia. The debate on Newton's mathematical methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736
Niccolò Guicciardini
Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 285 p. $ 80.00. ISBN 0-521-64066-0

Les *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton sont un livre illustre mais difficile. Difficile surtout en raison de ces « principes mathématiques » beaucoup moins bien connus que la « philosophie naturelle » qu'ils sont censés sous-tendre. Ce sont ces principes mathématiques que N. Guicciardini se propose d'éclairer, en confrontant les lectures qu'en ont faites les contemporains et en démêlant les débats passionnés qu'ils ont provoqués jusqu'à Euler.

Les *Principia* sont un ouvrage de maturité de Newton (1687), bien postérieur aux « anni mirabiles » (1664-70) qui virent éclore sa « méthode analytique des fluxions » (méthode qui resta largement confidentielle). Entre-temps, Newton avait pris ses distances avec ses théories de jeunesse : il lut les Anciens, se convainquit de la supériorité de leur science, en vint même à considérer son œuvre propre comme la redécouverte d'un savoir perdu. Suivant cette évolution philosophique, il délaissa dans ses publications sa méthode analytique au profit d'une « méthode synthétique des fluxions » rappelant Archimède, et s'attacha à donner à la multiplicité des méthodes mathématiques mises en œuvre dans ses *Principia* la façade géométrique unie des traités d'Appolonius et Pappus.

La première partie de *Reading the Principia* est consacrée aux méthodes mathématiques de Newton : exposé de ses théories des séries, fluxions et fluentes, et de leurs avatars géométriques, suivi d'une analyse approfondie des méthodes des *Principia*, au cours de laquelle le lecteur mathématicien moderne, guidé de main de maître, apprend véritablement à lire et apprécier les arguments de Newton dans le texte. C'est fascinant.

Reading the Principia nous relate ensuite la façon dont les démonstrations du grand-œuvre de Newton furent lues et reçues.

L'auteur nous présente trois lecteurs. D'abord Newton lui-même : ses manœuvres compliquées lors de la querelle de priorité entre newtoniens et leibniziens-bernoulliens sur l'invention du « nouveau calcul » — Newton prétendant que les résultats des *Principia* avaient été établis au moyen de « la nouvelle analyse » avant d'être publiés, suivant l'antique tradition, sous forme « synthétique ». Puis Huygens, dont le célèbre *Horologium oscillatorium* avait impressionné Newton : il admira la virtuosité géométrique de Newton tout en critiquant ses écarts de la théorie des proportions d'Eudoxe (et en contestant ses prémisses physiques). Enfin le grand rival, Leibniz. Comme pour le calcul des fluxions, l'auteur présente une analyse aussi passionnante de la genèse du calcul infinitésimal leibnizien (*Nova methodus,* 1684).

Les méthodes des *Principia* firent naître dans l'Europe savante, sur fond de querelle de priorité, un débat complexe dont le cercle newtonien britannique et l'école de Bâle furent les principaux protagonistes ; problème de la traductibilité des arguments géométriques des *Principia* en langage symbolique leibnizien, controverses sur le contenu représentatif des symboles...

Là, le tableau s'élargit considérablement : l'auteur peint une époque scientifique en effervescence où le problème fondamental de la voie à suivre pour la mathématisation de la philosophie naturelle était ouvert : géométrisation dans la tradition de Galilée-Huygens, ou algorithmisation à la Leibniz ? On sait que le calcul infinitésimal sous la forme algorithmique que lui donna Euler — basée sur le concept de fonction absent chez Newton et Leibniz — finit par triompher à travers ses applications et reléguer au passé les méthodes géométriques des *Principia* (*Mechanica,* 1736).

En terminant une seconde lecture de ce livre, j'éprouve le même enthousiasme qu'à la première. L'architecture de l'ouvrage est si nette que jamais sa richesse et son érudition ne donnent l'impression de lourdeur ni de foisonnement. J'ai déjà souligné le talent pédagogique de l'auteur, qui amène le lecteur mathématicien moderne à lire Newton, Leibniz et J. Bernoulli, mieux : à entrer dans leur monde. On a l'impression d'y descendre par cercles successifs, avec émerveillement.

L'ouvrage brille par la rigueur et la clarté de ses analyses. Soin du détail : dans les figures, les citations reproduites en langue originale en note de bas de page, l'abondante bibliographie. Le style est très soutenu, évite l'anecdote mais aussi l'austérité par l'élégance souriante du ton. Un livre splendide.

Yves André, CNRS Paris.

La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler
présentée et annotée par Philippe Nabonnand
Publications des Archives Henri-Poincaré. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. 421 p.
228 FS. ISBN 3-7643-5992-7

Cette édition intégrale et commentée de la correspondance entre Poincaré et Mittag-Leffler forme le premier de quatre volumes consacrés aux échanges épistoliers de Poincaré.

La correspondance avec Mittag-Leffler s'étend sur trente ans, jusqu'à la mort de Poincaré. Du fait que les deux mathématiciens n'ont jamais collaboré scientifiquement, elle n'est pas un document de premier ordre pour l'histoire des idées mathématiques, bien qu'elle recèle certains aperçus sur la genèse des résultats de Poincaré.

En fait, elle nous apprend plus sur Mittag-Leffler — et par lui — que sur Poincaré, qui s'exprime avec sobriété et réserve.

Homme entreprenant et diplomate, éditeur-animateur-publiciste et trait-d'union important entre mathématiciens des écoles allemandes et françaises, Mittag-Leffler se fait l'écho des controverses et des réseaux d'influence du monde mathématique de l'époque, et des réactions aux idées novatrices de Poincaré. Admirateur et promoteur énergique de ces idées, il n'en déplore pas moins (discrètement avec Poincaré, ouvertement avec Hermite) le « manque de rigueur » de Poincaré auteur, qui souvent omet purement et simplement les démonstrations.

La richesse d'information des commentaires de P. Nabonnand, abondants et précis, réhausse l'intérêt du volume. Ces notes analysent en détail les points techniques soulevés par les protagonistes, et offrent en contrepoint des extraits d'autres correspondances contemporaines.

Ce sont les questions éditoriales liées à la publication des travaux de Poincaré dans les Acta Mathematica de Mittag-Leffler qui occupent l'essentiel des dix premières années de correspondance. Il est intéressant de voir comment l'éditeur est aussi bien referee (et comment Poincaré répond, moins en remaniant ses articles qu'en ajoutant des notices explicatives), qu'arbitre-médiateur des questions de priorité ou d'attribution, en accompagnant les articles reçus de notes de son cru.

L'apogée de cette correspondance est l'épisode du prix du roi de Suède : le succès que Poincaré remporta avec son célèbre mémoire sur le problème des trois corps, les erreurs fondamentales qu'il y découvrit peu après, les tractations de Mittag-Leffler pour retirer tous les imprimés de la circulation, l'humeur de Weierstrass...

La correspondance des vingt années suivantes ne nous montre guère que deux savants réputés s'occupant de médailles, de nominations dans des académies, de placer leurs obligés. N'aurait-on pu nous épargner l'ennui de cette litanie par la grâce d'une sélection judicieuse, plutôt que d'ourler de pieuse érudition la lettre la plus anodine ?

Yves André, CNRS Paris

John Conway

A COURSE IN OPERATOR THEORY

Graduate Studies in Mathematics, **21**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. 372 p. $ 49.00. ISBN 0-8218-2065-6

Un opérateur ou une algèbre d'opérateurs

L'étude d'un opérateur (application linéaire continue) d'un espace Hilbert est un vieux sujet qui a connu, au milieu du XX^{e} siècle, une reformulation intéressante en terme d'algèbres d'opérateurs (C^*-algèbres ou algèbres de von Neumann). Ainsi le théorème classique de décomposition spectrale d'un opérateur normal s'interprète en terme de représentations d'une C^*-algèbre commutative, c'est à dire, grâce au théorème de Gelfand-Segal, d'une algèbre des fonctions continues sur un espace localement compact (le spectre de l'opérateur normal).

Mais les interactions avec la théorie des algèbres d'opérateurs vont bien au-delà.

– Les algèbres de von Neumann se révèlent très intéressantes pour l'étude des espaces invariants d'un opérateur non-normal ; tout projecteur dans le commutant d'un opérateur (qui est une algèbre de Von Neumann) définit un espace invariant pour celui-ci.

– La stabilité de l'indice des opérateurs de Fredholm par perturbation par des opérateurs compacts ouvre la voie des théories cohomologiques (en particulier la K-théorie) pour l'étude des invariants des C^*-algèbres.

Des théorèmes classiques et d'autres moins

L'auteur, spécialiste de la théorie des opérateurs, s'est ainsi donné comme but d'introduire dans son cours d'initiation la majeure partie de la théorie classique des algèbres d'opérateurs. Après deux premiers chapitres sur l'étude des opérateurs normaux et de ses liens avec les C^*-algèbres commutatives, ce livre contient

– une étude assez complète de l'algèbre des opérateurs compacts, puis des opérateurs à trace, et des dualités entre ces algèbres,

– une description des exemples classiques d'opérateurs non-normaux (des décalages aux opérateurs de Bergmann),

– la classification en type des algèbres de von Neumann ainsi que l'existence d'une trace pour le type II_1.

Deux chapitres cependant sont nettement plus avancés. L'un s'intéresse aux perturbations par les compacts des représentation de C^*-algèbres et notament à la généralisation par Voiculescu du théorème de Weyl-von Neumann sur la modification du spectre d'un opérateur normal par perturbation compacte. L'autre à la notion de réflexivité pour le treillis des espaces invariants d'un opérateur.

Un livre à lire tout seul ?

De mon point de vue, ce livre peut servir de base à des séances d'exercices pour un cours de DEA sur les opérateurs. Le texte est bien détaillé, assez élémentaire, contient même, dans les preuves des théorèmes, des points (faciles) à établir tout seul et est parsemé des nombreux exercices. Mais il demande aussi à être complété par un cours qui dépasserait les parties techniques pour mieux souligner la cohérence des concepts introduits (l'auteur s'excusant plusieurs fois auprès de son lecteur (américain) d'être déjà trop théorique).

Il faut aussi noter que l'auteur n'a pas voulu introduire les produits tensoriels d'algèbres ni même d'espaces de Hilbert ainsi que les espaces d'opérateurs qui est une notion tout à fait fructueuse dans ce domaine (voir les travaux de Pisier et al.) Et puis, certaines notations liées aux espaces invariants, utilisées trop abondemment, rendent parfois plus difficile la compréhension des théorèmes standards.

Cela reste toutefois un texte intéressant, en particulier pour une étude solitaire en complément d'un cours, si l'on n'est pas rebuté par une approche somme toute très terre-à-terre.

Emmanuel Germain, Université Denis Diderot-Paris VII

Georges Skandalis
Topologie et analyse fonctionnelle
Dunod (Sciences Sup), 336 p., 2001. ISBN : 2100045318. 28,20 €

Il s'agit d'un cours de topologie générale, assez classique, assez complet. Après une brève introduction qui est l'occasion de revenir sur $\mathbf{R}^n$ et de présenter les espaces métriques, l'auteur fait le choix d'introduire d'emblée les espaces topologiques généraux et de se placer dans ce cadre dans la suite de l'ouvrage. Ce choix, qui peut paraitre rebutant pour un étudiant de Licence, est ici motivé de faÁon convaincante.

Suivent les développements attendus : compacité, connexité, espaces fonctionnels, espaces de Banach et de Hilbert. Le livre va en fait plus loin qu'un cours de Licence d'aujourd'hui, puisqu'il traite de manière assez compléte la théorie de Baire et ses applications aux espaces de Banach. Enfin, un chapitre sur les filtres est judicieusement placé en dernier (l'objectif étant ici de fournir une démonstration compléte du théorème de Tychonov) et est suivi d'un appendice, bienvenu, de théorie élémentaire des ensembles.

Il y a de très nombreux exercices. Une bonne part sont pourvus d'indications en fin d'ouvrage plutôt que de solutions : voila un compromis qui semble judicieux entre les (probables) exigences commerciales des éditeurs et l'intérêt des étudiant(e)s ! On peut néanmoins se demander pourquoi l'ensemble de Cantor, la courbe de Peano, la métrique Sncf, qui y font leur apparition, ne sont pas nommés comme tels, ce qui pourrait aider le lecteur à les reconnaÓtre ailleurs, alors que tous les grands théorèmes ont droit à leur nom traditionnel, fut-il folklorique...

Bref, il s'agit là d'un bon livre pour le second cycle de Mathématiques, plus ambitieux que la moyenne des (trop ?) nombreux livres disponibles aujourd'hui sur le même sujet, utile donc tant aux novices en Topologie qu'aux étudiants plus avancés, même si on peut lui préférer (mais « on » comprend-il vraiment le public d'aujourd'hui ?) le superbe baroque de Choquet ou la magnifique concision de Dieudonné.

Un mot enfin est de rigueur sur la présentation : certains éditeurs français savent faire de beaux livres de Mathématiques. Ce ne semble pas, de toute évidence, être le cas de l'éditeur de cette collection et on ne peut que regretter le peu d'attention portée a la lisibilité de l'ouvrage.

Jacques Lafontaine, Université Montpellier II